Pein · Aufstellung von u Königinnen auf
Einem Schachbrett · 1889 ·

AUFSTELLUNG VON n KÖNIGINNEN

AUF EINEM SCHACHBRETT VON n^2 FELDERN

DERART

DASS KEINE VON EINER ANDERN GESCHLAGEN WERDEN KANN.

(VON $n = 4$ BIS $n = 10$)

VON

DR. AUGUST PEIN,

OBERLEHRER AN DER REALSCHULE ZU BOCHUM.

MIT 7 FIGURENTAFELN.

LEIPZIG,

IN KOMMISSION BEI GUSTAV FOCK.

1889.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

Inhaltsverzeichnis.

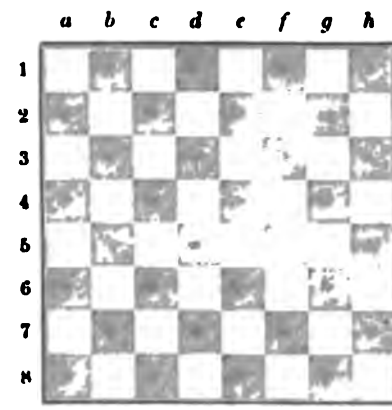
Tabellen.

Figurentafeln.

§ 1. Das Schachbrett.

Das gewöhnliche Schachbrett ist ein Quadrat, welches durch je 7 zu den Seiten parallele Linien in 64 Quadrate geteilt ist, die man Felder nennt. Der bequemeren Übersicht wegen sind diese Felder abwechselnd durch zwei verschiedene Farben, gewöhnlich weifs und schwarz, unterschieden. Die senkrechten oder Vertikal-Reihen, kurz Spalten genannt, bezeichnet man von links nach rechts der Reihe nach mit den Buchstaben a, b, c, d, e, f, g, h, und die wagerechten oder Horizontal-Reihen, die wir kurz Zeilen nennen wollen, von oben nach unten der Reihe nach mit den Zahlen von 1 bis 8 (Fig. 1). (Im Schachspiel selbst werden die wagerechten Reihen von unten nach oben gezählt; für unseren Zweck scheint es jedoch bequemer zu sein, in Übereinstimmung mit der gewöhnlichen Zählweise der Reihen zu bleiben.) Ein einzelnes Feld wird dann mit dem Buchstaben, dessen Spalte, und mit der Zahl bezeichnet, deren Zeile es angehört, wie Figur 2 zeigt.

Fig. 1.



Eine Reihe Felder von gleicher Farbe, welche einer der beiden Diagonalen des Schachbretts parallel sind, wie $c_1 f_2 g_3 h_4$ oder $a_5 b_4 c_3 d_2 e_1$, wollen wir eine Diagonalreihe, und die beiden Reihen auf den Diagonalen des Schachbrettes selbst Hauptdiagonalreihen nennen. Indem wir die Diagonale des Schachbretts von oben links nach unten rechts die erste, und die von unten links nach oben rechts die zweite nennen, sollen auch die Diagonalreihen als erste und zweite unterschieden werden.

Fig. 2.

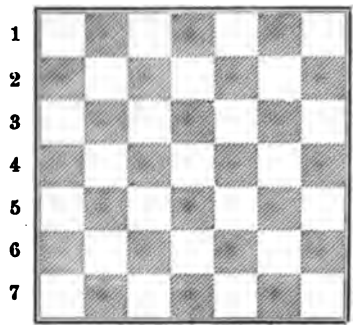
	a	b	c	d	e	f	g	h
1	a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	f_1	g_1	h_1
2	a_2	b_2	c_2	d_2	e_2	f_2	g_2	h_2
3	a_3	b_3	c_3	d_3	e_3	f_3	g_3	h_3
4	a_4	b_4	c_4	d_4	e_4	f_4	g_4	h_4
5	a_5	b_5	c_5	d_5	e_5	f_5	g_5	h_5
6	a_6	b_6	c_6	d_6	e_6	f_6	g_6	h_6
7	a_7	b_7	c_7	d_7	e_7	f_7	g_7	h_7
8	a_8	b_8	c_8	d_8	e_8	f_8	g_8	h_8

Während das gewöhnliche Schachbrett 8 wagerechte und 8 senkrechte Reihen mit je 8 Feldern enthält, können wir auf demselben 15 erste und 15 zweite Diagonalreihen mit je 1 bis 8 Feldern unterscheiden.

Die erläuterten Begriffe lassen sich leicht auf ein beliebiges Schachbrett von n^2 Feldern, d. i. auf ein in n^2 Quadrate geteiltes Quadrat übertragen. Ein solches enthält n Horizontalreihen, n Vertikalreihen und zweimal

Fig. 3.

a b c d e f g



$(2n - 1)$ Diagonalreihen mit je $1, 2, 3 \ldots n - 1, n, n - 1, \ldots 3, 2, 1$ Feldern. Figur 3 zeigt ein Schachbrett von 49 Feldern.

Während bei den Schachbrettern von n^2 Feldern, bei denen n gerade ist, die Anzahl der weifsen Felder gleich der der schwarzen Felder ist, sind bei ungeradem n beide Zahlen um 1 verschieden. Denken wir uns, wie es bei dem Schachspiel üblich ist, das Schachbrett stets so bezeichnet und aufgestellt, dafs das unterste Feld rechts, oder was dasselbe ist, dafs das oberste Feld links ein weifses ist, dafs also die erste Diagonale stets weifse Felder enthält, so enthält die zweite Diagonale bei ungeradem n ebenfalls weifse, bei geradem n dagegen schwarze Felder, und die Anzahl der weifsen Felder ist bei ungeradem n um 1 gröfser als die der schwarzen. Ist n gerade, so enthält das Schachbrett $(2n - 1)$ weifse und ebenso viel schwarze Diagonalreihen; ist dagegen n ungerade, so enthält das Schachbrett $2n$ weifse und $(2n - 2)$ schwarze Diagonalreihen.

§ 2. Der Turm, der Läufer, die Königin.

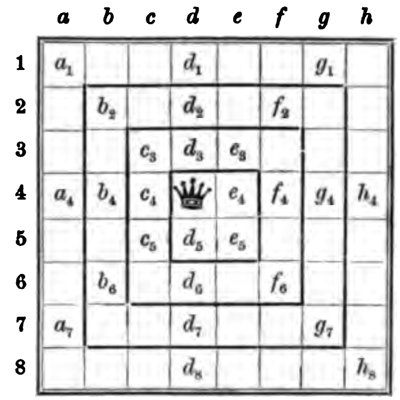
Von den Figuren, welche beim Schachspiel verwendet werden, sind für uns hier nur drei von Bedeutung, der Turm, der Läufer und die Königin oder Dame, deren Bewegungsart wir zuerst zu zeigen haben.

Der Turm kann von dem durch ihn besetzten Felde nach allen (nicht anderweitig besetzten) Feldern der wagerechten und der senkrechten Reihe sich bewegen, welchen das von ihm besetzte Feld angehört, er kann in einem Zuge auf jedes dieser Felder gelangen. Befindet sich auf seinem Wege eine (feindliche) Figur, so kann er dieselbe schlagen, d. h. von dem Brette entfernen und sich an deren Stelle setzen. Die Schlaglinien des Turmes sind daher parallel zu den Seiten des Schachbrettes. Ein in d_4 stehender Turm beherrscht also die senkrechte Reihe d und die wagerechte Reihe 4, und bedroht, wie jeder Turm auf dem gewöhnlichen Schachbrett, aufser dem besetzten Felde noch 14 Felder, auf dem Schachbrette von n^2 Feldern dagegen noch $2(n - 1)$ Felder.

Der Läufer geht und schlägt nur in der Richtung der Diagonalen, er bleibt daher stets auf derselben Farbe des Schachbrettes. Ein auf d_4 befindlicher Läufer bedroht also die Felder der beiden sich in d_4 kreuzenden Diagonalreihen, im ganzen 13 Felder. Ebenso viele Felder bedroht der Läufer, wenn er sich auf einem der drei Felder d_5, e_4, e_5 befindet. Steht dagegen der Läufer in dem diese 4 Felder umgebenden Rande $c_3 c_6 f_6 f_3$ von 12 Feldern, so bedroht er nur 11 Felder; in dem dann folgenden Rande $b_2 b_7 g_7 g_2$ stehend bedroht er nur 9, und in dem äufsersten Rande stehend nur 7 Felder. Wir wollen den äufseren Rand als ersten, die folgenden als zweiten, dritten, vierten u. s. w. bezeichnen. Bei geradem n enthält der innerste Rand 4 Felder, bei ungeradem n aber nur 1 (weifses) Feld. Bei einem Schachbrett von n^2 Feldern bedroht ein auf dem ersten (äufseren) Rande stehender Läufer $(n - 1)$ Felder, und auf jedem folgenden Rande je 2 Felder mehr, als auf dem vorhergehenden.

Die Königin oder Dame vereinigt in sich die Bewegung und Schlagart des Turmes und des Läufers. Sie kann mit einem Zuge nach jedem (unbesetzten) Felde der wagerechten und der senkrechten Reihe, sowie der beiden Diagonalreihen gelangen, welchen das von ihr besetzte Feld angehört, sie kann jede auf ihrem Wege befindliche (feindliche) Figur **schlagen.** Eine in d_4 stehende Königin bedroht daher die in Figur 4 bezeichneten $(14 + 13 = 27)$ Felder. Eine im ersten (äufseren) Rande des gewöhnlichen Schachbrettes stehende Königin bedroht nur 21 Felder, im zweiten Rande stehend bedroht sie 23, im dritten Rande stehend 25, und im inneren Rande stehend 27 Felder. Auf einem Schachbrette von n^2 Feldern beherrscht die Königin einschliefslich des von ihr besetzten Feldes,

Fig. 4.



auf dem **äufseren** Rande stehend

$$1 + 2(n - 1) + (n - 1) = 3n - 2,$$

auf dem **zweiten** Rande stehend

$$1 + 2(n - 1) + (n + 1) = 3n,$$

auf dem **dritten** Rande stehend

$$1 + 2(n - 1) + (n + 3) = 3n + 2, \ldots$$

Felder, und auf jedem folgenden inneren Rande stehend je 2 Felder mehr.

Für die Fälle $n = 1$ bis $n = 10$ erhalten wir also folgende Zahlen der von einer Königin beherrschten Felder:

	$n = 10$	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Im ersten (äufseren) Rande stehend	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1
Im zweiten Rande stehend	30	27	24	21	18	15	12	9		
Im dritten Rande stehend	32	29	26	23	20	17				
Im vierten Rande stehend	34	31	28	25						
Im fünften Rande stehend	36	33								

§ 3. Die Aufgabe.

Nach diesen für das Folgende nötigen und genügenden Erklärungen können wir die uns hier vorliegende Aufgabe folgendermafsen aussprechen:

Auf einem Schachbrett von n^2 Feldern sollen n Figuren, von denen jede den Rang einer Königin hat, so aufgestellt werden, dafs keine von einer andern geschlagen werden kann. Es soll nicht nur die Anzahl aller möglichen Stellungen, sondern es sollen auch diese Stellungen selbst ermittelt werden.

Für n **Türme** lassen sich diese Stellungen selbst durch Permutieren der Zahlen in einer Stellung etwa $a_1 b_2 c_3 d_4 e_5 f_6 g_7 h_8 \ldots$ durch eine für gröfsere n zwar sehr umfangreiche, aber doch einfache Arbeit ableiten, während die Anzahl aller Stellungen $n! = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots . (n - 1) n$ ist. Es ergeben sich also für ein Schachbrett von

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 Feldern
1, 2, 6, 24, 120, 720, 5 040, 40 320, 362 880, 3 628 800

Lösungen der Aufgabe der n Türme. Durch das Hinzutreten der Bedingung (des Läufers), dafs in jeder Diagonalreihe höchstens ein Turm stehen darf, wird die Lösung der Aufgabe eine verwickeltere.

Es ist ferner sehr leicht, auf dem Schachbrette von n^2 Feldern n Läufer so aufzustellen, dafs keiner den andern schlagen kann, es lassen sich sogar bedeutend mehr Läufer als n derartig aufstellen, so z. B. auf zwei äufsern parallelen Reihen sogar $2n - 2$. Bedeutend schwieriger aber ist die Ermittelung aller Stellungen von n Läufern und der Anzahl dieser Stellungen schon für ein bestimmtes nicht zu grofses n. Nimmt man aber noch die Bedingung (des Turmes) hinzu, dafs in jeder Spalte und in jeder Zeile nur ein Läufer stehen darf, so wird die Aufgabe noch bedeutend schwieriger.

Die allgemeine Lösung der vorliegenden Aufgabe für n Königinnen ist daher bis jetzt auch noch keineswegs gelungen. Man hat nur für das gewöhnliche Schachbrett von 64 Feldern und für kleinere Schachbretter die Aufgabe gelöst. Im folgenden sollen nach Aufführung der Lösungen für diese Schachbretter auch die Lösungen für Schachbretter von 81 und 100 Feldern gegeben werden. Dagegen haben wir auf die Lösung der allgemeinen Aufgabe ganz und gar verzichtet.

Der geschichtlichen Entwickelung der Aufgabe entsprechend haben wir dieselbe in obiger dem Schachspiel entlehnten Fassung ausgesprochen. Da in einer jeden Reihe nur eine Königin stehen darf und sowohl in den n Vertikalreihen als auch in den n Horizontalreihen n Königinnen Platz finden sollen, so folgt, dafs auch in jeder Vertikalreihe und in jeder Horizontalreihe eine Königin stehen mufs. Daher könnte die Aufgabe auch lauten:

Auf einem in n^2 Quadrate geteilten Quadrat sind n Quadrate so zu bestimmen, dafs in jeder wagerechten und in jeder senkrechten Reihe und auch in den einzelnen Diagonalreihen nur je ein Quadrat liegt.

Andere Fassungen der Aufgabe werden sich weiter unten ergeben.

§ 4. Erste Lösung der Aufgabe.

Ein sehr einfaches Verfahren, solche Stellungen aufzufinden, welche der Aufgabe entsprechen, beschreibt Gaufs[1]) in einem Briefe[2]) an Schumacher[3]) mit folgenden Worten:

„Auf einem präparierten Quadratnetz (am besten wohl, wenn man auf einer Schiefertafel die Linien etwas tief einritzt, und die Zeichen mit Stift, also leicht wegzulöschen, einschreibt) kann man die erforderlichen Versuche leicht durchmachen .... Sobald ein Platz besetzt wird, etwa mit einem +, fallen schon von allen übrigen 63 Plätzen viele aus, die durch ein Zeichen 0 als kassiert bezeichnet werden. Besetzt man von den übrigen einen zweiten, so fallen wieder eine grofse Menge aus und man gelangt bald dahin, entweder alle Plätze teils mit + teils mit 0 besetzt zu finden, oder zu einer wahren Auflösung zu gelangen."

1) Karl Friedrich Gaufs, geb. 30. April 1777 in Braunschweig, gest. 23. Febr. 1855 in Göttingen, wo er seit 1807 Professor und Direktor der Sternwarte war.

2) Briefwechsel zwischen C. F. Gaufs und H. C. Schumacher. Herausgegeben von C. A. F. Peters. 6 Bde. Altona 1860 bis 1865. 6. Bd. Brief von Gaufs vom 27. Septbr. 1850.

3) Heinrich Christian Schumacher, geb. 3. Septbr. 1780 zu Bramstedt in Holstein, gest. 28. Dezbr. 1850 in Altona, wo er seit 1821 als Direktor der Aufnahme von Holstein und Lauenburg einer Sternwarte vorstand.

Fig. 5.

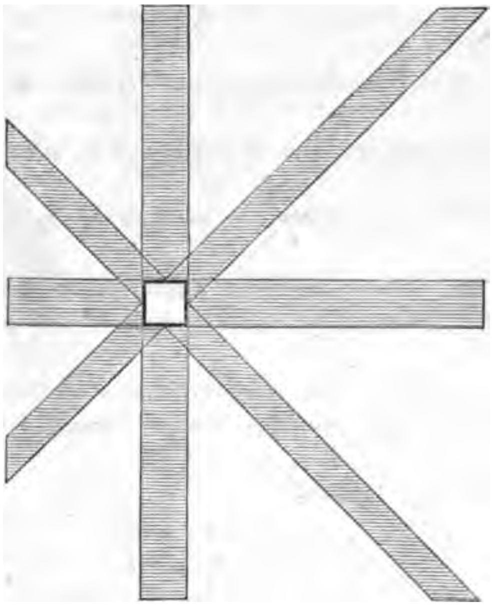


Fig. 6.

a)

a_1	b_1	c_1	d_1
a_2	b_2	c_2	d_2
a_3	b_3	c_3	d_3
a_4	b_4	c_4	d_4

b)

a_1	—	—	—
—	—	c_2	d_2
—	b_3	—	d_3
—	b_4	c_4	—

c)

a_1	—	—	—
—	—	—	d_2
—	b_3	—	—
—	—	—	—

d)

a_1	—	—	—
—	—	c_2	—
—	—	—	d_3
—	b_4	—	—

e)

—	—	c_1	d_1
a_2	—	—	—
—	—	c_3	d_3
—	b_4	—	d_4

f)

—	—	c_1	d_1
a_2	—	—	—
—	—	—	d_3
—	b_4	—	—

g)

—	b_1	—	d_1
—	—	c_2	d_2
a_3	—	—	—
—	—	c_4	d_4

h)

—	b_1	—	—
—	—	—	d_2
a_3	—	—	—
—	—	c_4	d_4

i)

—	b_1	c_1	—
—	b_2	—	d_2
—	—	c_3	d_3
a_4	—	—	—

k)

—	b_1	—	—
—	—	—	d_2
—	—	c_3	—
a_4	—	—	—

l)

—	—	—	—
—	b_2	—	—
—	—	—	d_3
a_4	—	—	—

Um das fortwährende lästige Hinschreiben und Auslöschen der Zeichen zu vermeiden, habe ich dies Verfahren in der Weise noch bedeutend vereinfacht, dafs ich zu einem nach Art der Figur 2 beschriebenen Schachbrette (dessen kleine Quadrate etwa 1 cm Länge haben) passende stern- oder kreuzförmige Figuren von verschiedener Länge ausschnitt, wie sie Fig. 5 andeutet. Legt man einen solchen Stern, der in der Mitte ausgeschnitten ist, mit der Mitte auf ein Feld, so sieht man das betreffende Feld in der Mitte, während alle Felder in der zugehörigen Vertikalreihe und in der Horizontalreihe, sowie in den beiden Diagonalreihen verdeckt werden.

Zur Erläuterung dieses Verfahrens wollen wir einige Beispiele geben, und für die Schachbretter von 4^2, 5^2 Feldern alle Lösungen, für 6^2 und 8^2 Felder wenigstens je eine Lösung suchen. Für die Schachbretter von 2^2 und 3^2 Feldern sind Lösungen nicht möglich, wie man sogleich sieht, während auf dem Schachbrett von 1 Felde wohl eine Königin aufgestellt werden kann, die aber von keiner andern bedroht ist.

Besetzen wir auf dem Schachbrett IV von 16 Feldern (Fig. 6. a) das Feld a_1 mit einem solchen Stern, so erhält dasselbe das Ansehen von (b), wo in der zweiten

Spalte nur noch b_3 und b_4 stehen. Durch Besetzung von b_3 wird die dritte Spalte leer (c), während durch Besetzung von b_4 die beiden übrigen Felder c_2 und d_3 in einer Diagonalreihe stehen (d), so dafs keine Lösung mit a_1 möglich ist.

Wird das Feld a_2 besetzt (e), so bleibt in der zweiten Spalte nur b_4, durch dessen Besetzung wir in (f) die Lösung $a_2 b_4 c_1 d_3$ erhalten.

Ebenso liefert die Besetzung von a_3 in (g) und die dann folgende von b_1, wie (h) zeigt, die Lösung $a_3 b_1 c_4 d_2$.

Die durch Besetzung von a_4 bleibenden beiden Felder der zweiten Spalte b_1 und b_2 liefern, wie (i), (k), (l) zeigen, keine Lösung.

Da wir alle Felder der a-Spalte, und bei jedem die noch verbleibenden Felder der b-Spalte besetzt haben, so haben wir alle möglichen Lösungen gefunden. Es sind dies also $a_2 b_4 c_1 d_3$ und $a_3 b_1 c_4 d_2$.

Natürlich ist es nicht nötig, die Auflösung in dieser Ausführlichkeit hinzuschreiben, vielmehr genügt es, nur die letzten Felder und die sich etwa ergebenden Lösungen oder die Gründe, welche die Unmöglichkeit einer solchen zeigen, kurz anzugeben.

So könnte man obiges Verfahren kurz so aufschreiben:

$a_1 b_3$ ... Spalte c leer	$a_2 b_4 c_1 d_3$ ... (1)	$a_4 b_1 c_3$ ... Spalte d leer
$a_1 b_4 c_2$. Spalte d leer	$a_3 b_1 c_4 d_2$ ... (2)	$a_4 b_2$ ... Spalte c leer.

Für das Schachbrett V von 25 Feldern (Fig. 7) ergiebt sich leicht folgendes:

Fig. 7.

a_1	b_1	c_1	d_1	e_1
a_2	b_2	c_2	d_2	e_2
a_3	b_3	c_3	d_3	e_3
a_4	b_4	c_4	d_4	e_4
a_5	b_5	c_5	d_5	e_5

$a_1 b_3 c_5 d_2 e_4$ ... (1)	$a_3 b_5 c_2 d_4 e_1$ ... (6)
$a_1 b_4 c_2 d_5 e_3$ ... (2)	$a_4 b_1 c_3 d_5 e_2$ ... (7)
$a_1 b_5 c_2$ ... Spalte d leer	$a_4 b_1 c_5$ ... Zeile 3 leer
$a_2 b_4 c_1 d_3 e_5$ ... (3)	$a_4 b_2 c_5 d_3 e_1$ ... (8)
$a_2 b_5 c_1$ ... Zeile 3 leer	$a_5 b_1 c_4$ ... Spalte d leer
$a_2 b_5 c_3 d_1 e_4$ ... (4)	$a_5 b_2 c_4 d_1 e_3$ ... (9)
$a_3 b_1 c_4 d_2 e_5$ ... (5)	$a_5 b_3 c_1 d_4 e_2$ ... (10).

Auf dem Schachbrett von 25 Feldern giebt es also vorstehende zehn Lösungen unserer Aufgabe.

Das Schachbrett VI von 36 Feldern (Fig. 8) liefert für a_1 keine Lösungen; für a_2 findet man:

Fig. 8.

a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	f_1
a_2	b_2	c_2	d_2	e_2	f_2
a_3	b_3	c_3	d_3	e_3	f_3
a_4	b_4	c_4	d_4	e_4	f_4
a_5	b_5	c_5	d_5	e_5	f_5
a_6	b_6	c_6	d_6	e_6	f_6

$a_2 b_4 c_1 d_3 e_5$ ... Zeile 6 leer	$a_2 b_5 c_1 d_6 e_4$ ... Spalte f leer
$a_2 b_4 c_6 d_1 e_3 f_5$ ... (1)	$a_2 b_5 c_3 d_1$ .... Zeile 6 leer
$a_2 b_4 c_6 d_1 e_5$ ... Zeile 3 leer	$a_2 b_5 c_3 d_6$ .... Zeile 1 leer
$a_2 b_4 c_6 d_3$ .... Spalte f leer	$a_2 b_6 c_1 d_3$ .... Spalte f leer
$a_2 b_5 c_1 d_4$ ... Spalte 6 leer	$a_2 b_6 c_3 d_1 e_4$ ... Spalte f leer.

Mit a_2 beginnt also nur die Lösung $a_2 b_4 c_6 d_1 e_3 f_5$.

Endlich wollen wir noch für das Schachbrett VIII von 64 Feldern die mit $a_1 b_5$ beginnenden Stellungen aufsuchen. Um alle solche Stellungen zu finden, müssen wir der Reihe nach die bei Besetzung von $a_1 b_5$ frei bleibenden Felder der Reihe c, und zu jedem c die bei ihm noch unbesetzten Felder der Reihe d, und bei jedem derselben die noch nicht besetzten e u. s. w. versuchen.

$a_1 b_5 c_2 d_6 e_3 f_7$ .. Zeile 8 leer	$a_1 b_5 c_8 d_2 e_4$ .... Spalte h leer
$d_8 e_3$ ... Zeile 6 leer	e_7 ... Spalte h leer
e_6 ... Zeile 7 leer	$d_6 e_3 f_7 g_2 h_4 (1)$
$c_7 d_2 e_4$ ... Zeile 6 leer	e_4 .... Spalte h leer.
e_6 ... Spalte g leer	

Mit $a_1 b_5$ beginnt also auf dem gewöhnlichen Schachbrette nur die Lösung $a_1 b_5 c_8 d_6 e_3 f_7 g_2 h_4$, welche in der hier eingeführten Ordnung gleichzeitig die erste ist, da man mit $a_1 b_3$ und $a_1 b_4$ gar keine Lösung findet. Der Kürze halber wollen wir daher diese Lösung durch VIII . 1 bezeichnen, indem das Schachbrett durch die römische Ziffer und die Nummer der Lösung selbst durch 1 angedeutet werden soll.

Um alle Lösungen eines Schachbrettes zu erhalten, müfste man der Reihe nach sämtliche Felder der Reihe a, bei jedem derselben die noch unbesetzten Felder der Reihe b, bei jedem derselben wieder die noch unbesetzten Felder der Reihe c versuchen und so lange fortfahren, bis man auf eine Lösung der Aufgabe oder auf eine leere Spalte oder Zeile kommt. Wir werden jedoch sogleich sehen, dafs es nur nötig ist, für die Hälfte der Felder der a-Reihe diese Entwickelung durchzuführen, und dafs sich noch verschiedene Abkürzungen einführen lassen.

§ 5. Drehen und Umlegen (Spiegeln).

Wir wollen jetzt zeigen, wie man aus einer Lösung der Aufgabe andere ableiten kann, und welcher Zusammenhang zwischen solchen Lösungen besteht.

Denken wir uns die soeben für 64 Felder gefundene Lösung $a_1 b_5 c_8 d_6 e_3 f_7 g_2 h_4$, welche in Fig. 9 dargestellt ist, um den Mittelpunkt um 90° im Sinne des Uhrzeigers gedreht, so dafs die erste Spalte links zur ersten Zeile wird, und behalten wir die bisherige Bezeichnung der Reihen bei, so entsteht die Fig. 10, welche die Lösung $a_3 b_6 c_4 d_2 a_8 f_5 g_7 h_1$ darstellt. Durch eine fernere Drehung um 90°, oder durch eine einmalige Drehung (von Fig. 9) um 180°, erhalten wir die Lösung $a_5 b_7 c_2 d_6 e_3 f_1 g_4 h_8$ (Fig. 11), welche durch eine weitere Drehung um 90° in die Lösung $a_8 b_2 c_4 d_1 e_7 f_5 g_3 h_6$ (Fig. 12) übergeht. Aus einer Lösung oder Stellung lassen sich daher durch Drehung derselben um 90°, 180° und 270° im allgemeinen drei neue Lösungen oder Stellungen ableiten.

Fig. 9.

1 . 1.

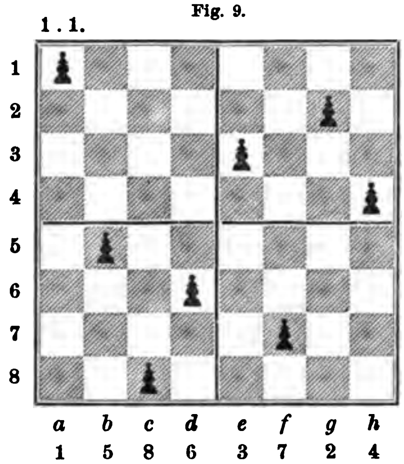
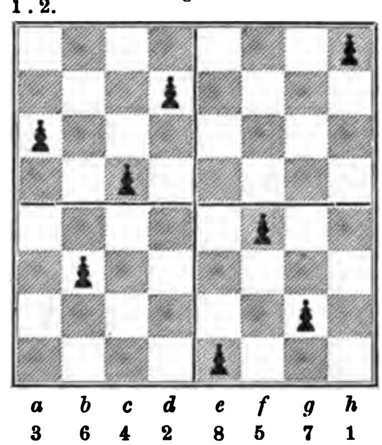
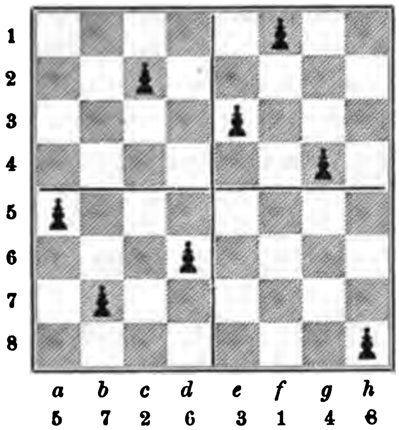


Fig. 10.

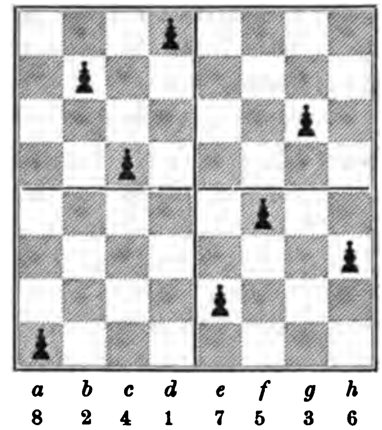
1 . 2.



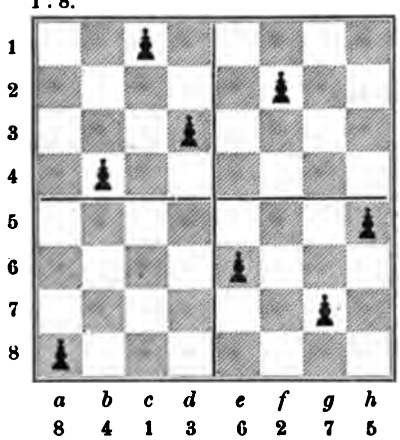
Aus jeder dieser 4 Stellungen erhält man nun eine neue, wenn man jede Stellung um die untere (oder obere) Kante des Schachbrettes umgelegt denkt, oder indem man die wagerechten Reihen in umgekehrter Reihenfolge ordnet, 1.3. Fig. 11.



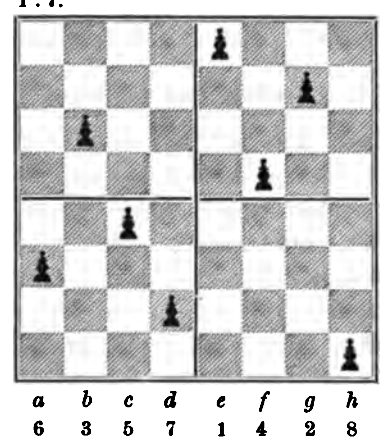
1.4. Fig. 12.



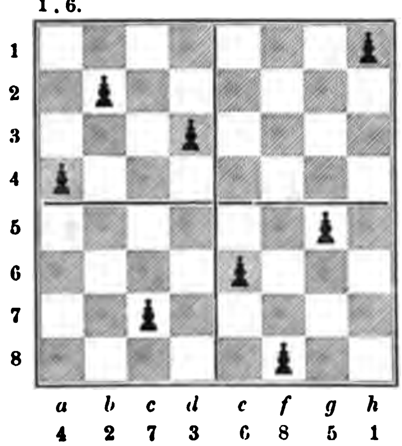
1.8. Fig. 13.



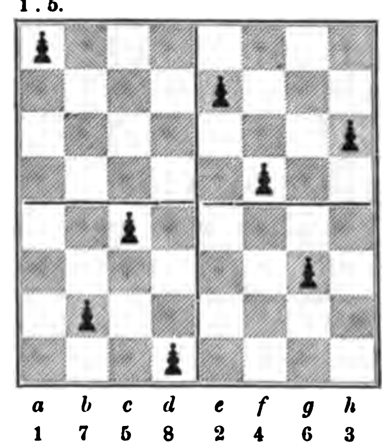
1.7. Fig. 14.



1.6. Fig. 15.



1.5. Fig. 16.



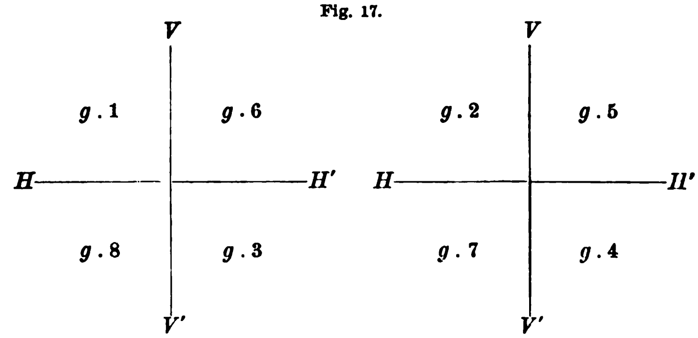
oder auch indem man von jeder Stellung an einem zu den wagerechten Kanten parallelen Spiegel ihr Spiegelbild nimmt. So erhält man durch dieses Umlegen (Spiegeln) aus den Figuren 9 bis 12 der Reihe nach die Figuren 13 bis 16.

Wir sehen also, daſs im allgemeinen 8 Lösungen oder Stellungen in dem Zusammenhange miteinander stehen, daſs aus jeder derselben sich die übrigen durch Drehen und Umlegen ableiten lassen. Wir wollen solche Lösungen als zusammengehörige bezeichnen. Als erste derselben, Grundstellung oder Stammlösung, wollen wir diejenige Stellung annehmen, in welcher a den kleinsten Zeilenzeiger hat, in welcher also das Feld der ersten linken Vertikalreihe am höchsten steht. Haben zwei Stellungen (wie hier Fig. 9 und Fig. 16) dasselbe Feld der Spalte a besetzt, so entscheidet die Spalte b u. s. w. Unter den obigen 8 Stellungen ist also Fig. 9, welche mit $a_1 b_5$ beginnt (während Fig. 16 mit $a_1 b_7$ beginnt), die Grundstellung.

Um die zusammengehörigen Stellungen und den Zusammenhang derselben sofort erkennen zu können, wollen wir jede Stellung mit zwei Zahlen bezeichnen. Die erste, allen zusammengehörigen Stellungen gemeinsame Zahl, die Grundstellungszahl, ist die Zahl der Grundstellung in der Reihe der geordneten Grundstellungen, während die zweite, die Stellungszahl, die einzelnen Stellungen unterscheidet. Die Stellungszahl 1 bezeichnet die Grundstellung selbst, während die Stellungszahlen 2, 3, 4 die durch Drehung um 90°, 180°, 270° aus dieser erhaltenen Stellungen bezeichnen, so dafs die in den Figuren 9 bis 12 dargestellten Lösungen die Bezeichnungen 1 . 1, 1 . 2, 1 . 3, 1 . 4 erhalten. Die Spiegelbilder derselben (von oben nach unten) werden dann der Reihe nach mit 1 . 8, 1 . 7, 1 . 6, 1 . 5 bezeichnet, so dafs die Summe der Stellungszahlen zweier Spiegelbilder (von oben nach unten) stets 9 ist. Diese letztere Bezeichnung rechtfertigt sich auch noch aus folgendem Grunde. Die Stellung 1 . 5 wird aus 1 . 1 auch dadurch erhalten, dafs man letztere um die erste Diagonale umlegt, oder dafs man ihr Spiegelbild in einem zu der ersten Diagonale parallelen Spiegel nimmt. Aus 1 . 5 erhält man dann durch Drehung um 90°, 180° und 270° die Stellungen 1 . 6, 1 . 7 und 1 . 8, so dafs also allgemein durch eine Drehung von 90° die Stellungszahl um 1 erhöht wird, wobei jedoch zu beachten ist, dafs 1 . 4 in 1 . 1 und 1 . 8 in 1 . 5 übergeht.

Man kann aus den ersten vier Stellungen einer Grundstellung die übrigen auch dadurch ableiten, dafs man die Vertikalreihen in umgekehrter Reihenfolge anordnet, oder dafs man die Stellungen nach der Seite umlegt, oder ihr Spiegelbild an einem parallel zu den Vertikalreihen aufgestellten Spiegel nimmt. Durch diese Umlegung oder Spiegelung nach der Seite erhält man aus den Stellungen 1, 2, 3, 4 der Reihe nach die Stellungen 6, 5, 8, 7 und umgekehrt.

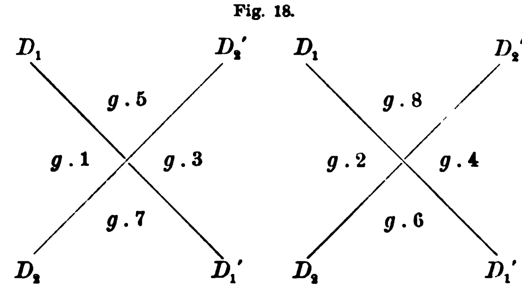
Fig. 17.



Ist in der Figur 17 HH' ein horizontaler, VV' ein vertikaler zur Ebene des Schachbretts senkrecht stehender Spiegel, so ersieht man aus der Figur den Zusammenhang der einzelnen Stellungen durch Spiegelung nach unten und nach der Seite (g ist die Grundstellungszahl).

Bezeichnen ebenso $D_1 D_1'$ und $D_2 D_2'$ (Fig. 18) zwei zur Ebene des Schachbretts senkrechte Spiegel, welche der ersten bezw. zweiten Diagonale parallel sind, so zeigt die Figur ebenfalls den Zusammenhang der durch Spiegelung erhaltenen Stellungen.

Fig. 18.



Bezeichnen wir die Umlegung oder Spiegelung durch einen Doppelpfeil (←|→), in welchem die Pfeile die Richtung der Lichtstrahlen und der sie senkrecht schneidende Strich die Ebene des Spiegels darstellt, so läfst sich der Zusammenhang der 8 Stellungen durch Umlegen oder Spiegeln nach oben und nach der Seite auch durch Fig. 19 veranschaulichen, in welcher der wagerecht liegende Pfeil die Spiegelung nach der Seite, der senkrecht stehende die nach oben andeutet. Ebenso veranschaulicht Fig. 20 den Zusammenhang der einzelnen Stellungen durch Umlegen um die Diagonalen oder Spiegeln an denselben.

Fig. 19.

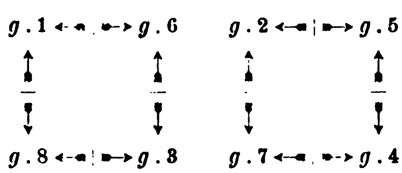
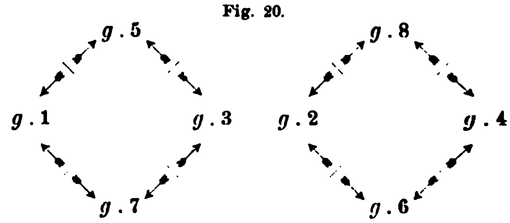


Fig. 20.



Folgende Tabelle zeigt, wie aus jeder der einzelnen Stellungen sich die übrigen ableiten lassen.

Es entstehen aus den Stellungen	1	2	3	4	5	6	7	8
durch Drehung um 90°	2	3	4	1	6	7	8	5
durch Drehung um 180°	3	4	1	2	7	8	5	6
durch Drehung um 270°	4	1	2	3	8	5	6	7
durch Umlegung um die erste Diagonale.	5	8	7	6	1	4	3	2
durch Umlegung nach der Seite.	6	5	8	7	2	1	4	3
durch Umlegung um die zweite Diagonale	7	6	5	8	3	2	1	4
durch Umlegung nach unten	8	7	6	5	4	3	2	1

§ 6. Symmetrische und doppelt-symmetrische Lösungen.

Nicht immer sind, wie es bei der betrachteten Lösung VIII . 1 der Fall war, sämtliche acht zusammengehörige Stellungen verschieden. Es giebt vielmehr Stellungen, in welchen die Damen so gleichmäfsig um die Mitte geordnet sind, dafs durch eine Drehung um 180° wieder

Fig. 21.

1 . 1.

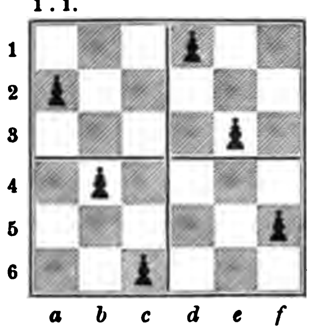


Fig. 22.

4 . 1.

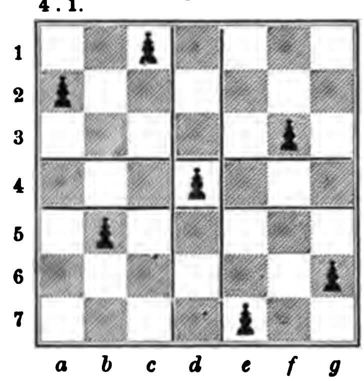
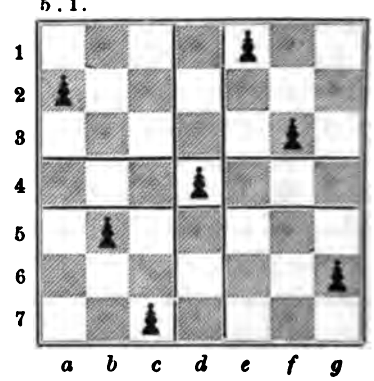


Fig. 23.

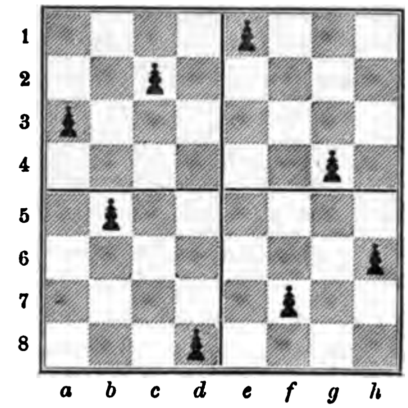
5 . 1.



dieselbe Stellung erscheint. Eine solche Stellung ist z. B. die für das Schachbrett von 36 Feldern gefundene Stellung $a_2 b_4 c_6 d_1 e_3 f_5$, welche in Fig. 21 dargestellt ist. Da bei einer solchen Lösung die Stellungen 1 und 3, 2 und 4, 5 und 7, 6 und 8 völlig gleich sind, so liefert dieselbe nur vier zusammengehörige Lösungen. Wir wollen solche Lösungen **centrisch-symmetrisch** oder kurz **symmetrisch** nennen. Während das Schachbrett VI nur diese **eine** symmetrische (und überhaupt nur diese eine) Grundstellung darbietet, hat das Schachbrett VII **zwei** symmetrische Grundstellungen 4 . 1 $a_2 b_5 c_1 d_4 e_7 f_3 g_6$ (Fig. 22) und 5 . 1 $a_2 b_5 c_7 d_4 e_1 f_3 g_6$ (Fig. 23), die in fünf Feldern übereinstimmen. Das Schachbrett VIII liefert wieder nur **eine** symmetrische Grundstellung 10 . 1 $a_3 b_5 c_2 d_8 e_1 f_7 g_4 h_6$ (Fig. 24), wogegen das Schachbrett IX **vier** (nämlich die Grundstellungen 19, 28, 40 und 41) und das Schachbrett X **drei** symmetrische Grundstellungen (nämlich 33, 78 und 92) darbieten. Die Summe der Zeilenzeiger je zweier gleichweit von der Mitte abstehender Felder ist in einer symmetrischen Stellung stets $n + 1$, und umgekehrt kann man eine symmetrische Stellung daran leicht erkennen.

Fig. 24.

10 . 1.



Bei den Schachbrettern mit ungerader Felderzahl ist in den symmetrischen Stellungen stets das mittelste Feld des Brettes besetzt.

Es giebt ferner Lösungen, bei denen schon eine Drehung um 90^0 dieselbe Lösung wieder erscheinen läfst, so dafs in ihnen die Stellungen 1, 2, 3 und 4 und ebenso 5, 6, 7 und 8 völlig übereinstimmen. Solche Lösungen, welche übrigens nur bei den Schachbrettern von 16 und 25 Feldern vorzukommen scheinen, sollen **doppeltsymmetrische** heifsen. Sie liefern nur je **zwei** zusammengehörige Stellungen. Fig. 25 zeigt die Stellung $a_2 b_4 c_1 d_3$ für das Schachbrett von 16 Feldern, Fig. 26 die Stellung $a_2 b_5 c_3 d_1 e_4$ für das Schachbrett von 25 Feldern. Man übersieht sofort, dafs man durch Drehung aus ihnen keine neuen Stellungen erhält, und dafs sie nur beim Umlegen die zugehörigen Stellungen $a_3 b_1 c_4 d_2$ bezw. $a_4 b_1 c_3 d_5 e_2$ liefern werden.

Fig. 25.

1 . 1.

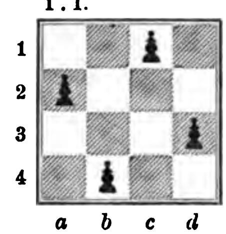
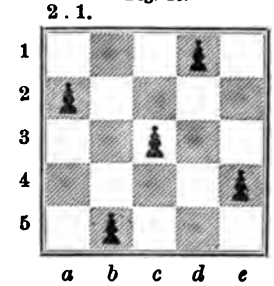


Fig. 26.

2 . 1.



§ 7. Ableitung der Lösungen mit einer Ecke aus Lösungen des nächst kleineren Schachbrettes.

Wenn in einer Lösung des Schachbrettes von n^2 Feldern eine oder beide Diagonalen von Königinnen frei sind, so erhält man durch weiteres Besetzen eines Eckfeldes in der betreffenden Diagonale des durch Hinzunahme der zugehörigen wagerechten und senkrechten Reihe vergröfserten Schachbrettes von $(n + 1)^2$ Feldern Lösungen desselben. Umgekehrt erhält man aus einer Lösung mit einer Ecke von $(n + 1)^2$ Feldern durch Weglassen dieser Ecke und der zugehörenden Horizontal- und Vertikalreihe eine Lösung von n^2 Feldern. Auch sieht man sofort, dafs es keine anderen Lösungen mit Ecken für $(n + 1)^2$ Felder geben kann, als die durch Erweiterung der Lösungen von n^2 Feldern mit freien Diagonalen. Sind also in den Grundstellungen eines Schachbrettes von n^2 Feldern beide Diagonalen stets besetzt, so giebt es keine Lösungen mit Eckfeldern bei $(n + 1)^2$ Feldern. VI hat daher keine Lösungen mit a_1, da in V beide Diagonalen stets besetzt sind.

Aus jeder unsymmetrischen Grundstellung von n^2 Feldern mit einer freien Diagonale erhält man zwei Grundstellungen von $(n+1)^2$ Feldern, indem man das neue Feld an jedes Ende der freien Diagonale ansetzen kann. Jede solche Grundstellung, deren beide Diagonalen frei sind, liefert vier Grundstellungen von $(n+1)^2$ Feldern. Am einfachsten bringt man die Lösung in eine solche Stellung, dafs die freie Diagonale die erste (von oben links nach unten rechts) wird, und besetzt das neue Feld a_1 oben links. Dadurch wird jeder Buchstabe der alten Stellung durch den folgenden ersetzt, und jede Zahl um 1 erhöht. Unter den Lösungen des Schachbrettes VII hat nur die Grundstellung 3 eine, und zwar die Stellung 3 . 2 $a_4 b_7 c_5 d_2 e_6 f_1 g_3$ die erste Diagonale frei; sie liefert nach diesem Verfahren die Stellung VIII . 1 . 1 $a_1 b_5 c_8 d_6 e_3 f_7 g_2 h_4$, während die Stellung VII . 3 . 4 auf dieselbe Weise die Stellung VIII . 2 . 1 $a_1 b_6 c_8 d_3 e_7 f_4 g_2 h_5$ liefert. Will man die neuen Lösungen nicht in der Stellung 1 erhalten, so kann man einfach an die Stellungen VII . 3 . 2 und 4 das Feld h_8 anfügen. Die beiden Grundstellungen VIII . 1 . 1 und 2 . 1 sind die einzigen, welche mit a_1 beginnen.

In den symmetrischen Lösungen von n^2 Feldern mit ungeradem n ist das Mittelfeld, also beide Diagonalen, besetzt; aus ihnen kann man daher keine Lösungen von $(n+1)^2$ Feldern ableiten.

In den symmetrischen Lösungen von n^2 Feldern mit geradem n müssen, wie man leicht sieht, beide Diagonalen von Königinnen frei sein. Die in einem solchen Falle bei unsymmetrischer Stellung sich ergebenden vier Grundstellungen von $(n+1)^2$ Feldern werden sich aber hier auf zwei reduzieren, so dafs jede symmetrische Grundstellung von n^2 Feldern zwei verschiedene Grundstellungen mit Ecken bei $(n+1)^2$ Feldern erzeugt. So erhält man z. B. aus der Grundstellung VI . 1, nämlich aus VI . 1 . 1 $a_2 b_4 c_6 d_1 e_3 f_5$ und VI . 1 . 2 $a_3 b_6 c_2 d_5 e_1 f_4$ die beiden Grundstellungen mit a_1: VII . 1 . 1 $a_1 b_3 c_5 d_7 e_2 f_4 g_6$ und VII . 2 . 1 $a_1 b_4 c_7 d_3 e_6 f_2 g_5$.

Die doppelt-symmetrische Grundstellung IV . 1 liefert nur die eine neue Grundstellung V . 1.

Der Vollständigkeit halber möge hier die folgende Tabelle Platz finden, welche zeigt, aus welchen Stellungen des Schachbrettes VIII, IX, X sich die Grundstellungen mit Ecken für das Schachbrett IX, X, XI ableiten lassen. (Die symmetrischen Grundstellungen sind mit * bezeichnet).

VIII	IX
4 . 1	1 . 1
2	14 . 1
6	10 . 1
7	6 . 1
5 . 2	13 . 1
6	7 . 1
6 . 1	2 . 1
7	5 . 1
7 . 2	8 . 1
4	11 . 1
9 . 1	3 . 1
7	12 . 1
*10 . 1	4 . 1
2	9 . 1

IX	X	IX	X
4 . 2	25 . 1	27 . 2	30 . 1
6	32 . 1	6	28 . 1
17 . 2	23 . 1	36 . 1	4 . 1
4	15 . 1	3	21 . 1
18 . 2	12 . 1	37 . 2	22 . 1
4	19 . 1	4	6 . 1
21 . 1	1 . 1	38 . 1	5 . 1
3	17 . 1	2	20 . 1
22 . 2	31 . 1	3	16 . 1
6	18 . 1	4	7 . 1
24 . 1	2 . 1	39 . 2	14 . 1
3	9 . 1	4	8 . 1
25 . 1	3 . 1	43 . 1	11 . 1
7	24 . 1	3	27 . 1
26 . 2	10 . 1	45 . 1	13 . 1
4	29 . 1	7	26 . 1

X	XI	X	XI	X	XI
5 . 2	35 . 1	51 . 1	5 . 1	76 . 1	14 . 1
6	45 . 1	7	37 . 1	3	23 . 1
7 . 2	22 . 1	52 . 1	6 . 1	*78 . 1	15 . 1
6	38 . 1	3	16 . 1	2	43 . 1
22 . 2	44 . 1	53 . 1	8 . 1	82 . 1	17 . 1
6	48 . 1	7	31 . 1	7	25 . 1
26 . 2	47 . 1	54 . 1	9 . 1	84 . 1	19 . 1
6	46 . 1	3	42 . 1	7	31 . 1
*33 . 1	1 . 1	65 . 1	10 . 1	86 . 1	20 . 1
2	32 . 1	7	41 . 1	3	33 . 1
39 . 1	2 . 1	66 . 1	11 . 1	87 . 2	36 . 1
3	7 . 1	3	29 . 1	4	40 . 1
48 . 1	3 . 1	71 . 1	13 . 1	91 . 2	30 . 1
7	12 . 1	3	26 . 1	4	27 . 1
50 . 1	4 . 1	73 . 2	21 . 1	*92 . 1	24 . 1
7	18 . 1	4	39 . 1	2	34 . 1

§ 8. Abkürzung der Auflösung durch Drehen und Umlegen.

Mit Hilfe der Drehung und Umlegung der Grundstellungen läfst sich das Aufsuchen aller Lösungen eines Schachbrettes bedeutend abkürzen.

Hat man nämlich alle Grundstellungen mit a_1 gefunden (s. § 4 und § 7), so kann man durch Drehen und Umlegen derselben alle Stellungen erhalten, welche irgend eins der vier Eckfelder enthalten. Man wird daher bei der weiteren Untersuchung diese Felder als leer betrachten können. Sind dann die Stellungen mit a_2 gefunden, so wird man beim Aufsuchen der mit a_3 beginnenden neuen Lösungen die Eckfelder und die (a_2 entsprechenden) an die Eckfelder anstofsenden Felder des äufseren Randes fortlassen, wodurch die Auflösung sich mehr und mehr vereinfacht.

Legt man die gefundenen Lösungen stets nach unten um, so findet man z. B. beim Schachbrett von 64 Feldern aus den Lösungen, welche mit a_1, a_2, a_3, a_4 beginnen, diejenigen Lösungen, welche mit a_8, a_7, a_6, a_5 beginnen, so dafs man auch nur die ersteren auf dem Schachbrett selbst aufzusuchen hat. Die mit a_4 beginnenden Lösungen können keine neuen Grundstellungen liefern, da dieselben im äufseren Rande doppelt-symmetrisch sein müfsten, was sich bald als unmöglich zeigt. Ebenso ist es beim Aufsuchen der Grundstellungen für Schachbretter mit ungeradem n nicht nötig, mit dem mittelsten Felde der ersten Vertikalreihe anzufangen, da eine solche Stellung, in welcher nur die mittleren Felder des äufseren Randes besetzt sind, völlig unmöglich ist, weil ein solches Feld die andern drei ausschliefst.

Andrerseits kann das Beibehalten der Eckfelder und der ihnen benachbarten Felder, sowie das Aufsuchen der mit a_5, a_6, a_7, a_8 beginnenden Lösungen auf direktem Wege, eine willkommene Probe dafür darbieten, dafs man alle Lösungen gefunden hat.

§ 9. Hilfsmittel zur Ausführung der Drehungen und Umlegungen.

Um alle diese Drehungen und Umlegungen auf eine bequeme Art ausführen zu können, und um die entstehenden zusammengehörigen Stellungen leicht als solche zu erkennen, habe

Fig. 27.

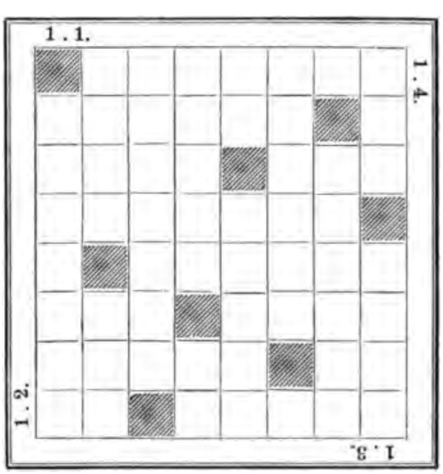
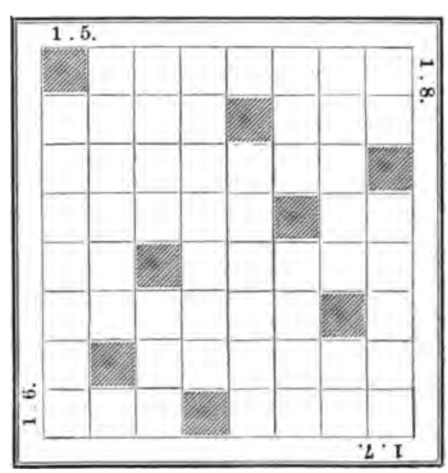


Fig. 28.



ich jede Grundstellung in der dem Schachbrette selbst zu Grunde gelegten Gröfse (etwa 1 cm für die Seite eines Feldes) auf Millimeterpapier aufgezeichnet und die besetzten Felder ausgeschnitten. Legt man ein so ausgeschnittenes oder durchlochtes Schachbrett auf ein anderes von gleicher Gröfse, dessen Felder gehörig bezeichnet sind, so ist es leicht, jede Stellung sofort abzulesen und hinzuschreiben, und zwar stets in der beabsichtigten Ordnung (etwa stets von links nach rechts). Um auch die Nummer der Nebenstellungen sofort ersehen zu können, habe ich über das oberste linke Feld (a_1 in der bisherigen Bezeichnung) die Grundstellungszahl und die Stellungszahl geschrieben, so dafs z. B. das die oben gegebenen acht Stellungen von 64 Feldern enthaltende Blatt auf der Vorderseite das Aussehen der Fig. 27, auf der Rückseite das der Fig. 28 hat, wenn man sich die schwarz gezeichneten Felder ausgeschnitten denkt.

Das Ausschneiden, oder besser Durchlochen, der einzelnen Blätter ist zwar eine etwas mühsame Arbeit; dieselbe macht sich jedoch durch die grofse Leichtigkeit, mit welcher auf jedem ganz beliebig bezeichneten Schachbrett (von entsprechender Gröfse) jede einzelne Stellung sofort abgelesen werden kann, und durch die Schnelligkeit und Sicherheit, mit welcher die Drehungen und Spiegelungen ausgeführt werden können, reichlich bezahlt.

§ 10. Ausführung der Drehungen und Spiegelungen für die bisherige Bezeichnung der Felder des Schachbrettes.

Will man ohne dieses Hilfsmittel aus einer Stellung die durch Drehung und Spiegelung entstehenden ableiten, so hat man zu beachten, in welcher Weise die einzelnen Reihen für einander eintreten.

Bei der bisherigen Bezeichnung des Schachbrettes lassen sich am bequemsten die Spiegelung nach unten und die nach der Seite ausführen. Die Spiegelung nach unten erfolgt dadurch, dafs man die Buchstaben unverändert läfst und an Stelle der Zahlen ihre Ergänzung zu $(n+1)$ setzt, während bei einer Spiegelung nach der Seite die Buchstaben in umgekehrter Reihenfolge stehen, die Zahlen aber in derselben Reihenfolge bleiben.

Die Spiegelung über die erste Diagonale beim Schachbrett von 64 Feldern verlangt die Ersetzung der Spaltenzeiger a, b, c, d, e, f, g, h
bezw. durch die Zeilenzeiger 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,
und umgekehrt, während die Spiegelung über die zweite Diagonale die Ersetzung
der Spaltenzeiger a, b, c, d, e, f, g, h
durch die Zeilenzeiger 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,
und umgekehrt, verlangt.

Für eine Drehung um 90° ersetze man
die Buchstaben a, b, c, d, e, f, g, h
durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,
und diese durch h, g, f, e, d, c, b, a.

Für eine Drehung um 180° ersetze man
die Buchstaben a, b, c, d, e, f, g, h
durch h, g, f, e, d, c, b, a
und die Zahlen durch ihre Ergänzungen zu 9 (allgemein zu $n+1$).

Da die symmetrischen Stellungen bei einer Drehung um 180° in einander übergehen, so folgt hieraus, dafs in den symmetrischen Stellungen die Summe je zweier gleichweit von der Mitte (oder den Enden) abstehender Zeilenzeiger gleich 9 (allgemein $n + 1$) ist.

Eine Drehung um 270° endlich erfordert die Ersetzung

der Buchstaben	*a, b, c, d, e, f, g, h*
durch die Zahlen	8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,
und die Ersetzung dieser durch	*h, g, f, e, d, c, b, a.*

Diese Ergebnisse können wir in folgender Übersicht zusammenstellen:

Es gehen über	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	1	2	3	4	5	6	7	8	Stellung *g*.1
durch Drehung um 90° in	1	2	3	4	5	6	7	8	*h*	*g*	*f*	*e*	*d*	*c*	*b*	*a*	*g*.2
„ „ „ 180° in	*h*	*g*	*f*	*e*	*d*	*c*	*b*	*a*	8	7	6	5	4	3	2	1	*g*.3
„ „ „ 270° in	8	7	6	5	4	3	2	1	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*g*.4
durch Spiegelung über die erste Diagonale	1	2	3	4	5	6	7	8	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*g*.5
„ „ nach der Seite	*h*	*g*	*f*	*e*	*d*	*c*	*b*	*a*	1	2	3	4	5	6	7	8	*g*.6
„ „ über die zweite Diagonale	8	7	6	5	4	3	2	1	*h*	*g*	*f*	*e*	*d*	*c*	*b*	*a*	*g*.7
„ „ nach unten	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	8	7	6	5	4	3	2	1	*g*.8

Aus der von links nach rechts geordneten Stellung VIII . 1 . 1 $a_1 b_5 c_8 d_6 e_3 f_7 g_2 h_4$ erhält man durch Drehung um 90°, da hierbei a in 1, 1 in h, also a_1 in h_1 übergeht, da ferner b in 2, 5 in d also b_5 in d_2 übergeht, und indem man in gleicher Weise alle übrigen Felder dreht, die Stellung 1 . 2 . . . $h_1 d_2 a_3 c_4 f_5 b_6 g_7 e_8$, welche, wie man auch an den Zahlen sieht, von oben nach unten geordnet ist. Bei einer Drehung um 180° geht das Feld a_1 über in h_8, b_5 in g_4, c_8 in f_1, und die Stellung 1 . 1 in die Stellung 1 . 3 $h_8 g_4 f_1 e_3 d_6 c_2 b_7 a_5$, welche von rechts nach links geordnet ist.

Ist die Stellung 1 von links nach rechts geordnet, so erhält man nur noch 8 ebenso geordnet, während die Stellungen 3 und 6 von rechts nach links, 2 und 5 von oben nach unten, 4 und 7 von unten nach oben geordnet erhalten werden. Da die Ordnung von links nach rechts durch die Buchstaben angezeigt wird, so ist es natürlich sehr leicht, jede Stellung ohne Ansicht des Brettes in entsprechender Weise zu ordnen.

Wir haben hier hauptsächlich das Schachbrett von 64 Feldern zur Erläuterung benutzt. Man sieht leicht, welche Änderungen in dem Verfahren eintreten, wenn ein beliebiges anderes Schachbrett betrachtet wird.

Zählt man, wie bei der im Schachspiel gebräuchlichen Bezeichnung, die Horizontalreihen von unten nach oben, so mufs man

1) die Drehungen in der der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzten Richtung vornehmen, und
2) die Diagonalen mit einander vertauschen.

§ 11. Bezeichnung der Felder des Schachbretts durch zweizifferige Zahlen. Andere Fassung der Aufgabe.

Bei der bisher benutzten, dem Schachspiel entlehnten, Bezeichnungsart der Felder kann sofort ersehen werden, ob in einer Stellung die Bedingung des Turmes erfüllt ist, da jeder

Buchstabe (als Vertreter der Vertikalreihen) und jede Zahl (als Vertreterin der Horizontalreihen) nur einmal vorkommen darf. Dagegen ist es ohne Ansicht des Brettes nicht so leicht, darüber zu entscheiden, ob auch die Bedingung des Läufers erfüllt ist, d. h. ob in einer Diagonalreihe auch nur ein Feld besetzt ist.

Wir wollen daher eine andere Bezeichnung der Felder einführen, indem wir statt der Buchstaben ebenfalls Zahlen nehmen. Wir wollen nämlich die Felder des Schachbrettes in der Weise mit zweistelligen Zahlen bezeichnen, wie Fig. 29 zeigt, so dafs in den Vertikalreihen die Zahlen mit demselben Zehner und in den Horizontalreihen die Zahlen mit demselben Einer stehen.

Fig. 29.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	11	21	31	41	51	61	71	81
2	12	22	32	42	52	62	72	82
3	13	23	33	43	53	63	73	83
4	14	24	34	44	54	64	74	84
5	15	25	35	45	55	65	75	85
6	16	26	36	46	56	66	76	86
7	17	27	37	47	57	67	77	87
8	18	28	38	48	58	68	78	88

Die Bedingung der Türme, oder die Bedingung, dafs in jeder Vertikal- und in jeder Horizontalreihe nur ein Feld besetzt werden darf, läfst sich dann so aussprechen: Es sollen unter den n^2 zweizifferigen Zahlen, welche mit den Ziffern 1 bis n geschrieben werden können, n Zahlen gesucht werden, so dafs in denselben jeder Zehner und jeder Einer nur einmal vertreten ist.

Betrachten wir ferner die zweiten Diagonalreihen, so finden wir, dafs in jeder derselben die Summe aus der Zahl der Zehner und aus der Zahl der Einer, also die Quersumme dieselbe, für alle aber verschieden ist. Diese Quersumme ist bei 11 gleich 2, bei 12 und 21 ist sie 3, und wächst in jeder folgenden Diagonalreihe um 1, so dafs sie in der zweiten Hauptdiagonale $(n + 1)$, und in der letzten Diagonalreihe $2n$ ist.

Ebenso zeigt sich, dafs in jeder ersten Diagonalreihe die Differenz aus der Zahl der Zehner und der Zahl der Einer, die wir der Quersumme entsprechend die Querdifferenz nennen wollen, dieselbe, für alle aber verschieden ist. Für die erste Hauptdiagonale ist diese Differenz gleich Null, für die auf einer Seite derselben liegenden Diagonalreihen ist sie positiv, für die auf der andern Seite liegenden negativ, wenn wir die Querdifferenzen stets in derselben Weise bilden, dafs also entweder stets die Zehnerzahl oder stets die Einerzahl Minuend ist.

Die Bedingung der Läufer können wir daher auch so aussprechen: Die Quersummen der n zweizifferigen Zahlen unter sich, und ebenso ihre Querdifferenzen unter sich müssen sämtlich verschieden sein.

Sind also a, b, a_1, b_1 vier beliebige Zahlen von 1 bis n und sind $10a + b$ und $10a_1 + b_1$ zwei beliebige Felder einer Lösung, so ergeben sich für diese Zahlen folgende Bedingungen:

$$1)\qquad a \gtrless a_1$$

$$2)\qquad b \gtrless b_1$$

$$3)\qquad (a + b) \gtrless (a_1 + b_1)$$

$$4)\qquad (a - b) \gtrless (a_1 - b_1).$$

Wir erhalten daher bei der eingeführten Bezeichnungsart der Felder folgenden Ausdruck für unsere Aufgabe:

Unter den mit den Ziffern 1 bis n geschriebenen zweizifferigen Zahlen sind n Zahlen von der Eigenschaft zu bestimmen, dafs jeder Zehner und jeder Einer in ihnen nur einmal vorkommt, und dafs sowohl die Quersummen der n Zahlen unter sich, als auch die Querdifferenzen derselben unter sich sämtlich verschieden sind.

Denn hat man n solche Zahlen gefunden, und bestimmt die entsprechenden Felder auf dem nach Fig. 29 bezeichneten Schachbrett, so müssen dieselben eine Lösung ergeben.

Die früher gefundene Stellung VIII. 1 lautet in dieser Bezeichnung

11, 25, 38, 46, 53, 67, 72, 84.

Wie man sieht, kommt jeder Zehner und jeder Einer nur einmal vor. Die Quersummen sind der Reihe nach

2, 7, 11, 10, 8, 13, 9, 12,

also sämtlich verschieden, ebenso sind die Querdifferenzen (wenn wir die Zehner als Minuenden nehmen):

$$0,\ -3,\ -5,\ -2,\ +2,\ -1,\ +5,\ +4,$$

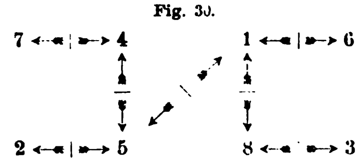
also auch sämtlich von einander verschieden.

Während das Aufsuchen der einzelnen Stellungen grofse Aufmerksamkeit erfordert, lassen sich die zugehörigen Stellungen dagegen leicht finden, wie folgende Übersicht (für das Schachbrett von 64 Feldern) zeigt:

Es geben über	10 20 30 40 50 60 70 80	1 2 3 4 5 6 7 8	$g.1$	$10a+b$
durch Drehung um 90° in	1 2 3 4 5 6 7 8	80 70 60 50 40 30 20 10	$g.2$	$10(9-b)+a$
„ „ „ 180° in	80 70 60 50 40 30 20 10	8 7 6 5 4 3 2 1	$g.3$	$10(9-a)+(9-b)$
„ „ „ 270° in	8 7 6 5 4 3 2 1	10 20 30 40 50 60 70 80	$g.4$	$10b+(9-a)$
durch Umlegen um die erste Diagonale in .	1 2 3 4 5 6 7 8	10 20 30 40 50 60 70 80	$g.5$	$10b+a$
„ „ „ eine vertikale Kante in	80 70 60 50 40 30 20 10	1 2 3 4 5 6 7 8	$g.6$	$10(9-a)+b$
„ „ „ die zweite Diagonale in	8 7 6 5 4 3 2 1	80 70 60 50 40 30 20 10	$g.7$	$10(9-b)+(9-a)$
„ „ „ eine horizontale Kante in	10 20 30 40 50 60 70 80	8 7 6 5 4 3 2 1	$g.8$	$10a+(9-b)$

Besonders einfach gestalten sich hiernach die Umlegungen oder Spiegelungen. Bei dem Umlegen nach unten bleiben die Zehner unverändert und statt der Einer werden ihre Ergänzungen zu 9 gesetzt. Bei dem Umlegen nach der Seite dagegen bleiben die Einer unverändert, während an Stelle der Zehnerzahlen ihre Ergänzungen zu 9 treten. Die Spiegelung über die erste Diagonale wird durch Vertauschen der Zehner- und der Einerziffern bewirkt.

Fig. 30.



Die Figur 30 zeigt, wie aus der Stellung 1 sich die übrigen mit Hilfe dieser drei Operationen leicht ableiten lassen. Durch Vertauschen der Zehner- und Einerziffern erhält man aus der Stellung 1 die Stellung 5, aus beiden durch Ersetzen der Einerzahlen durch ihre Ergänzungen zu 9 die Stellungen 8 und 4. Setzt man in diesen vier Stellungen statt der Zehnerzahlen ihre Ergänzungen zu 9, so erhält man die Stellungen 6, 2, 3 und 7.

(Bei einem Schachbrett von n^2 Feldern treten an Stelle der Ergänzungen zu 9 die Ergänzungen zu $n+1$.)

§ 12. Bezeichnung der Felder und Fassung der Aufgabe mit Beziehung auf die verschiedenen Zahlensysteme.

Man kann der Aufgabe leicht noch eine andere Fassung geben, welche mit den verschiedenen Zahlensystemen zusammenhängt. Wie bei unserem gewöhnlichen (zehnteiligen, dekadischen) Zahlensystem alle Zahlen mit Hilfe von zehn Zahlzeichen oder Ziffern (die Null eingeschlossen) geschrieben werden, indem jede Ziffer in der ersten, zweiten, dritten, $n$ten Stelle vor den Einern das 10fache, 100fache, 1000fache, 10^n-fache, kurz Einheiten höherer Ordnung bedeutet, so kann man auch jede andere Zahl n als Grundzahl annehmen, indem man n^1, n^2, n^3 als Einheiten höherer Ordnung bezeichnet. Man nennt ein solches Zahlensystem nach der Grundzahl 2, 3, 4, . . 10, 11, 12 ein zwei-, drei-, vierteiliges, . . . zehn-, elf-, zwölfteiliges[1]). Zum Schreiben aller Zahlen sind in einem n-teiligem System (einschliefslich der Null) n Ziffern nötig, indem die Grundzahl selbst und ihre Potenzen, die höheren Einheiten, durch 10, 100, 1000 u. s. w. bezeichnet werden. So bedeuten die Zahlen 10, 100, 1000

in dem 4-teiligen System die zehnteiligen Zahlen	4,	4^2,	4^3,
in dem 6-teiligen System „ „ „	6,	6^2,	6^3,
in dem n-teiligen System „ „ „	n,	n^2,	n^3

und die Zahlen 23, 74, 52 sind in dem n-teiligen System $2n + 3$, $7n + 4$, $5n + 2$.

Bezeichnen wir nun die Felder eines Schachbretts, wie Fig. 31 zeigt, so, dafs die einzelnen Vertikal- und Horizontalreihen durch die Zahlen von 0 bis $n - 1$ bezeichnet sind, so sehen wir, dafs auf dem Schachbrett III (von 3^2 Feldern) alle (neun) zweizifferigen Zahlen des dreiteiligen Systems enthalten sind, nämlich:

00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22,

welche den zehnteiligen

00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08

entsprechen, und dafs das Schachbrett X alle (hundert) zehnteiligen Zahlen von 0 bis 99 enthält.

Fig. 31.

		II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
	00	10	20	30	40	50	60	70	80	90
II	01	11	21	31	41	51	61	71	81	91
III	02	12	22	32	42	52	62	72	82	92
IV	03	13	23	33	43	53	63	73	83	93
V	04	14	24	34	44	54	64	74	84	94
VI	05	15	25	35	45	55	65	75	85	95
VII	06	16	26	36	46	56	66	76	86	96
VIII	07	17	27	37	47	57	67	77	87	97
IX	08	18	28	38	48	58	68	78	88	98
X	09	19	29	39	49	59	69	79	89	99

Stellen daher a, b, a_1, b_1 vier beliebige Zahlen von 0 bis $(n - 1)$ (beide einschliefslich) vor, und sollen $na + b$ und $na_1 + b_1$ auf dem Schachbrett von n^2 Feldern zwei in einer Lösung unserer Aufgabe vorkommende Felder bezeichnen, so erhalten wir wieder die vier Bedingungen des § 11.

Wir können die vorliegende Aufgabe daher mit Rücksicht auf Fig. 31 auch so aussprechen:

In dem n-teiligen Zahlensysteme sind n zweizifferige Zahlen (Null als Ziffer gerechnet) anzugeben, in denen die n ersten Ziffern, und ebenso die n zweiten Ziffern

---

1) Vgl. z. B. Reidt, Elemente der Mathematik. 1. Teil. Allgemeine Arithmetik und Algebra. Berlin. Anhang 3.

verschieden sind, und in denen auch die n Quersummen unter sich und die n Querdifferenzen unter sich sämtlich ungleich sind.

Es wird nicht nötig sein, über die Ableitung der zusammengehörigen Stellungen noch etwas hinzuzufügen, da dieselbe ganz ebenso geschieht, wie im vorigen Paragraphen.

§ 13. Abgekürzte Bezeichnung der Lösungen.

Wenn man bei den bisher angewandten Bezeichnungsarten der Schachbretter die Felder der einzelnen Lösungen stets nach den Vertikalreihen von links nach rechts ordnet, also entweder die Buchstaben alphabetisch, oder die zweiziffrigen Zahlen nach den Zehnern (oder den ersten Ziffern), so kann man zur Vereinfachung der Bezeichnung die Buchstaben bezw. die ersten Ziffern, welche ja nur die Spalten oder Vertikalreihen bezeichnen, fortlassen, und nur die Zeilenzahlen hinschreiben. Ein so bezeichnetes Schachbrett stellt Fig. 32 dar. Die Stellung VIII.1.1 z. B. können wir dann kurz so schreiben 1 5 8 6 3 7 2 4.

Mit Berücksichtigung der Fig. 28 läſst sich unserer Aufgabe dann folgender Ausdruck geben:

Die n ersten Zahlen sollen in n Spalten so geordnet werden, daſs sowohl die Summen einer jeden Zahl und ihrer Spaltenzahl unter sich, als auch die Differenzen einer jeden Zahl und ihrer Spaltenzahl unter sich sämtlich ungleich sind.

Hierbei ist es wegen der Spiegelung nach der Seite ohne Einfluſs, ob wir die Spalten von links nach rechts (Fig. 32) oder von rechts nach links (Fig. 33) zählen, so daſs die obige Fassung auch für letztere Bezeichnung gilt.

Ebenso bleibt dieselbe giltig für die dem § 12 entsprechende Bezeichnung in Fig. 34 und 35. Betrachten wir dabei in Fig. 35 die Spaltenzahlen als Ordnungszahlen der betreffenden Stelle, d. h. als Exponenten der Basis des entsprechenden Zahlensystems, so läſst sich die Aufgabe so aussprechen:

Fig. 32.

1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8

Fig. 33.

8	7	6	5	4	3	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8

In dem n-teiligen Zahlensystem sind alle diejenigen n-stelligen Zahlen zu finden, in denen sämtliche n Ziffern (die Null eingeschlossen) verschieden sind, und die so beschaffen sind, daſs sowohl die Summen der Einheiten jeder Ordnung und der Ordnungszahl unter sich, als auch die Differenzen beider Zahlen unter sich sämtlich ungleich sind.

Wir werden in den folgenden Paragraphen noch andere Fassungen der Aufgabe anführen und verweisen hier auf dieselben.

Sind b und b_1 die (allein zu schreibenden) Zeilenzahlen zweier Felder, a und a_1 ihre Spaltenzahlen (Ordnungszahlen), so erhalten wir für dieselben wieder die Bedingungen des § 11.

Fig. 34.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Fig. 35.

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Für die einzelnen Drehungen und Spiegelungen erhalten wir beispielsweise für das Schachbrett VIII in der Bezeichnung der Fig. 32 aus § 11 leicht folgende Regeln:

Drehung um 90°. Setze als neue Spaltenzahlen die Ergänzungen der alten Zeilenzahlen zu 9, und als neue Zeilenzahlen die alten Spaltenzahlen.

Drehung um 180°. Ergänze die Zeilenzahlen zu 9 und schreibe die neuen Zahlen in umgekehrter Reihenfolge.

Drehung um 270°. Mache zu den neuen Spaltenzahlen die Zeilenzahlen und zu den neuen Zeilenzahlen die Ergänzungen der Spaltenzahlen zu 9.

Spiegelung nach unten. Ziehe jede Zeilenzahl von 9 ab.

Spiegelung nach der Seite. Schreibe die Zahlen in umgekehrter Reihenfolge.

Spiegelung an der ersten Diagonale. Vertausche Zeilen- und Spaltenzahlen mit einander.

Spiegelung an der zweiten Diagonale. Vertausche jede Spaltenzahl mit ihrer Zeilenzahl und setze für beide ihre Ergänzungen zu 9.

Um die zusammengehörigen Stellungen aus einer abzuleiten, bedient man sich am besten der aus Fig. 30 leicht abzuleitenden Regel:

Vertausche in der gegebenen Stellung Zeilenzahl und Spaltenzahl, ziehe in den beiden Lösungen die einzelnen Zahlen von 9 ab, und schreibe die so erhaltenen vier Lösungen in umgekehrter Reihenfolge.

§ 14. Übersicht über die bisher veröffentlichten Lösungen der Aufgabe.

Bevor wir zu der geschichtlichen Entwickelung unserer Aufgabe übergehen, scheint es zweckmäfsig, eine Übersicht über die bis jetzt veröffentlichten Lösungen zu geben.

Das Schachbrett IV von 16 Feldern liefert nur eine Grundstellung, welche wegen ihrer doppelten Symmetrie nur 2 Lösungen giebt.

Für das Schachbrett V von 25 Feldern fanden wir 2 Grundstellungen, von denen die eine doppelt-symmetrisch ist, so dafs wir für dasselbe 10 Lösungen erhielten.

Das Schachbrett VI von 36 Feldern hat nur eine, und zwar symmetrische, Grundstellung mit 4 Lösungen.

Für das Schachbrett VII von 49 Feldern findet man 6 Grundstellungen, von denen zwei symmetrisch sind, so dafs die Zahl der Lösungen $4 \cdot 8 + 2 \cdot 4 = 40$ ist.

Das Schachbrett VIII von 64 Feldern endlich hat 12 Grundstellungen, von denen nur eine symmetrisch ist; die Zahl der Lösungen ist daher $11 \cdot 8 + 4 = 92$.

In der beigegebenen Figurentafel I sind die Grundstellungen dieser Schachbretter dargestellt und in den Tabellen 5 bis 9 in der abgekürzten Bezeichnung nach Fig. 32 die sämtlichen Lösungen der Aufgabe mit Beifügung der Grundstellungs- und Stellungszahlen angegeben. Die Lösungen der Schachbretter IV bis VII sind nach den steigenden Zahlen geordnet, während bei dem Schachbrett VIII die erste Hälfte der Lösungen nach steigenden Zahlen, die zweite Hälfte aber in umgekehrtem Sinne geordnet ist. Es stehen somit diejenigen Stellungen, die durch Umlegen nach unten auseinander entstehen, in denen also die Summe je zweier Zahlen in derselben Vertikalreihe gleich 9 ist, neben einander.

§ 15. Die erste Fassung der Aufgabe von Nauck und dessen Lösung.

Die uns beschäftigende Aufgabe ist zuerst für das gewöhnliche Schachbrett gestellt worden. Sie findet sich in der Illustrierten Zeitung (Nr. 361. Leipzig, 1. Juni 1850 unter „Schach") mit der Überschrift: „Eine in das Gebiet der Mathematik fallende Aufgabe von Herrn Dr. Nauck[1]) in Schleusingen", und lautet: „Man kann 8 Schachfiguren, von welchen jede den Rang einer Königin hat, auf dem Schachbrett so aufstellen, dafs keine von einer andern geschlagen werden kann. Unter den vielen Stellungen, welche diese 8 Figuren oder Damen einnehmen können, um dieser Bedingung zu genügen, soll diejenige gesucht werden, bei welcher eine Dame auf b_4 und eine andere auf d_5 steht. Es fragt sich, auf welchen Feldern die übrigen 6 stehen müssen, ohne dafs 2 Damen dieselbe Schlaglinie haben." Weiter heifst es dort:

„Es giebt 60 verschiedene Stellungen, in welchen 8 Damen, ohne dafs ihre Schlaglinien sich treffen, auf dem Brette stehen können. Diese Stellungen hat Herr Dr. Nauck auf mathematischem Wege gefunden und, wie man denken kann, ein schönes und merkwürdiges Gesetz, welchem die Damen sich fügen, entdeckt. Der freundliche Doktor wird die Güte haben, dasselbe mitzuteilen, wenn Freunde des Schachs und der Mathematik für seine Aufgabe sich interessieren."

Nachdem dann in der Nr. 365 (vom 29. Juni 1850) die eingegangenen beiden Lösungen der besonderen Aufgabe, $a_6 b_4 c_1 d_5 e_8 f_2 g_7 h_3$ und $a_7 b_4 c_2 d_5 e_8 f_1 g_3 h_6$ mitgeteilt worden sind, giebt Nauck in Nr. 377 (vom 22. Septbr. 1850) die vollständige Lösung der Aufgabe (für ein Schachbrett von 64 Feldern).

Er führt zuerst die abgekürzte Bezeichnung (§ 13) ein, und giebt dann die 92 Lösungen genau in derselben Form und Ordnung, wie hier in der Tabelle 9 (s. § 14) (nur dafs er die

1) Nach einer Mitteilung des Herrn Gymnasialdirektors Schmieder in Schleusingen (Reg.-Bez. Erfurt) war Nauck dort vom Juni 1839 bis März 1855 als Mathematiker angestellt. Zu dem Programm von 1847 hat er die wissenschaftliche Abhandlung über die harmonischen Proportionen auf der Oberfläche der Kugel geschrieben.

Lösungen alle hinter einander setzt), indem er gleichzeitig die früher gegebene Zahl 60 berichtigt. Er fügt den vier Lösungen, welche durch Drehung aus einander entstehen, denselben Buchstaben bei, und zwar in der Reihe des Auftretens die 24 Buchstaben *a* bis *z*, er nimmt also 24 Grundstellungen an, und betrachtet daher die durch Umlegen erhaltenen Stellungen als wesentlich verschiedene.

Bezeichnung der Grundstellungen.

Die hier angewandte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10*	11	12
Nach Nauck	*a* *d*	*b* *c*	*e* *w*	*f* *q*	*g* *r*	*h* *m*	*i* *v*	*k* *t*	*l* *s*	(*nn*) (*xx*)	*o* *z*	*p* *u*

„Zwei Auflösungen, *nn* und *xx*, sind nicht ohne Grund mit doppelten Buchstaben bezeichnet. Die Figuren stehen hier so symmetrisch, daſs jede Stellung, von den 4 Seiten des Schachbrettes aus betrachtet, doch nur 2 verschiedene Ansichten gewährt. Es fallen hier je 2, welche sonst verschieden zu sein pflegen, in eine zusammen.“

Nauck zeigt dann an je einem Beispiel die Richtigkeit folgender Sätze:

Wenn man irgend eine der 92 Auflösungen rückwärts schreibt, so erhält man jederzeit eine ebenfalls richtige Lösung.

Die Ziffern einer jeden Auflösung ergänzen die einer andern in derselben Reihenfolge zu 9.

Die Ziffern einer jeden Auflösung ergänzen die Ziffern einer andern Auflösung auch in entgegengesetzter Reihenfolge zu 9.

Wie wir aus § 13 wissen, sind dies der Reihe nach die Eigenschaften von zwei Stellungen, welche aus einander durch Spiegelung nach der Seite, durch Spiegelung nach unten, und durch Drehung um 180° entstehen. Nauck kennt also diese Eigenschaften, aber er giebt mit keinem Worte an, in welcher Beziehung diese Stellungen zu einander stehen, und auch nicht, auf welche Weise er zu der Auffindung dieser Sätze gelangt ist. Ferner zeigt er, auf welche Weise man aus einer Auflösung sieben andere ableiten kann, mit folgenden Worten:

„Zu jeder bekannten Auflösung kann man leicht, ohne Ansicht des Brettes, die übrigen drei Auflösungen, welche denselben Buchstaben führen, und auſserdem noch vier andere Auflösungen durch Rechnung finden. Es sei z. B. die Auflösung 42861357 gefunden, so setze man,

	weil die erste Ziffer 4 ist,	die 1 an die 9 — 4, d. h. 5te Stelle,
ferner	weil die zweite Ziffer 2 ist,	die 2 an die 9 — 2, d. h. 7te Stelle,
ebenso	weil die dritte Ziffer 8 ist,	die 3 an die 9 — 8, d. h. 1te Stelle,
	u. s. w.	die 4 an die 9 — 6, d. h. 3te Stelle,
		die 5 an die 9 — 1, d. h. 8te Stelle,
		die 6 an die 9 — 3, d. h. 6te Stelle,
		die 7 an die 9 — 5, d. h. 4te Stelle,
und endlich		die 8 an die 9 — 7, d. h. 2te Stelle.

Hierdurch findet man folgende Auflösung 38471625.“

„Wenn man nun die Ziffern beider Auflösungen rückwärts zu 9 ergänzt, so findet man die beiden noch fehlenden Auflösungen 24683175, 47382516. Dies sind die mit *e* bezeichneten 4 Auflösungen. Ergänzt man nun die Ziffern dieser 4 Auflösungen der Reihe nach zu 9, oder, was genau zu demselben Resultate führt, schreibt man diese 4 Auflösungen rückwärts, so findet man noch 4 Auflösungen, und zwar diejenigen, welche oben den Buchstaben *w* bei sich führen.“

Aus § 13 ersieht man, dafs die erste nicht ganz einfache Operation einer Drehung des Schachbrettes um 90° entspricht, indem man aus der Stellung 3.3 die Stellung 3.4 erhält. Die Ergänzung der Ziffern beider Auflösungen rückwärts zu 9 entspricht einer Drehung um 180°, wodurch man die Stellungen 3.1 und 3.2 erhält. Durch Umlegen dieser 4 Stellungen nach unten oder nach der Seite erhält man die 4 Stellungen 3.5, 3.6, 3.7 und 3.8. Auch hier wird der Grund der verschiedenen Operationen von Nauck nicht einmal gestreift. Es heifst dann zum Schlufs:

„Dieses eine leicht fafsliche Beispiel möge genügen, um denjenigen Lesern, welche nicht Mathematiker sind, einen Begriff davon zu geben, wie die obigen 92 Auflösungen alle auf rein arithmetischem Wege, durch bedingtes Permutieren, gefunden werden konnten. Erst nachdem ich alle Auflösungen gefunden hatte, habe ich zur Kontrolle meiner Rechnung das Schachbrett nachträglich zur Hand genommen.

„Das Sprichwort: 'Probieren geht über Studieren', welches sich oft in der Mechanik bewährt, scheitert gänzlich in der Mathematik. Es gehört gewifs viel Glück und — dies mufs ebenfalls anerkannt werden — auch sehr viel Geschick dazu, um durch Probieren eine grofse Anzahl der obigen Auflösungen zu finden. Aber selbst wenn jemand so viel Glück und Geschick hätte, sie alle zu finden, so würde ihm doch noch etwas sehr Wichtiges fehlen: die Gewifsheit, dafs ihm keine Auflösung entgangen ist[1]). Die Mathematik dagegen liefert nicht nur alle Auflösungen, sobald deren Bildungsgesetz gefunden ist, rasch hinter einander, sondern gewährt auch zugleich die Garantie, dafs es aufser diesen 92 Auflösungen keine einzige weiter giebt.“

Es ist hiernach sehr zu bedauern, dafs Nauck in dem vorliegenden Aufsatze sich in keiner Weise darüber ausspricht, in welcher Weise er die Mathematik bei Aufsuchung der Auflösungen angewandt hat, und wie besonders das bedingte Permutieren zu verstehen ist. Wir sind daher völlig darüber im Unklaren, wie er die einzelnen Stellungen gefunden hat, und wie er zur Kenntnis des Zusammenhanges der einzelnen zusammengehörigen Stellungen gelangt ist.

In Nr. 378 der Illustrierten Zeitung (vom 28. Sept.) findet sich nach Anführung verschiedener Löser noch die Mitteilung von Dr. Nauck, dafs auch ein Blindgeborner sämtliche 92 Stellungen gefunden habe.

§ 16. Gaufs' Formulierung der Aufgabe und Auflösung durch methodisches Probieren.

Inzwischen hatte auch C. F. Gaufs die Aufgabe in Nr. 361 der Illustrierten Zeitung (vom 1. Juni) gelesen; die beiden Lösungen der besonderen Aufgabe in Nr. 365 (vom 29. Juni) waren ihm jedoch entgangen. In einem Briefe an Schumacher vom 1. Sept. 1850 teilt er diesem die Aufgabe mit und sagt zum Schlufs: „Ich habe nach einigen Versuchen den speziellen Fall leicht gelöst.“ (Als Lösung giebt er in einer Figur nur die eine: 64158273.) „Aber zusammen finde ich nicht 60, sondern 76 verschiedene Auflösungen.“ In seiner Antwort vom 4. Sept. bezeichnet Schumacher das Schachproblem als sehr interessant, „weil es schwieriger

1) Nauck meint hier natürlich ein Probieren ohne einen bestimmten Plan. Wir haben in § 4 gesehen, dafs man durch ein planmäfsiges Probieren diese Gewifsheit erlangen kann. Siehe auch § 16.

ist, als es auf den ersten Blick scheint", und bittet um die Erlaubnis, die Auflösungen von Gaufs einem Freunde mitteilen zu dürfen.

Darauf schreibt Gaufs am 12. Sept.: „Rücksichtlich der in meinem letzten Briefe erwähnten Aufgabe mufs ich bemerken, dafs die Anzahl der von mir gefundenen Auflösungen nicht 76, sondern 72 beträgt; mit Gewifsheit kann ich jedoch nicht verbürgen, dafs weiter keine möglich sind. Für die spezielle Aufgabe, wo b_4 und d_5 vorgeschrieben sind, habe ich nur die Eine Ihnen mitgeteilte gefunden. Die 72 Auflösungen reduzieren sich übrigens auf nur 9 wesentlich verschiedene, indem jede Auflösung 8 Variationen repräsentiert. Es gehen nämlich zuerst aus jeder Auflösung durch Drehung um 90°, 180° und 270°, oder was dasselbe ist, indem man der Reihe nach jede der Quadratseiten unten stellt, 3 andere hervor, und jede dieser Auflösungen liefert in ihrem Spiegelbilde, oder was dasselbe ist, auf der Rückseite des Papiers eine neue. Bei einer mehr oder weniger symmetrischen Aufstellung wäre es denkbar, dafs die 8 Variationen sich auf nur 4 oder 2 oder Eine reduzierten. Allein von dem letzten und vorletzten Fall kann ich sagen, dafs sie mit den Bedingungen der Aufgabe unvereinbar sind; hingegen die Möglichkeit einer solchen Symmetrie, wo die 8 Variationen auf 4 zusammenschmelzen, kann ich noch nicht unbedingt verneinen, ich hatte wirklich kurz vor Absendung meines letzten Briefes gemeint, eine solche Auflösung gefunden zu haben (daher die 76 anstatt 72), gleich nach Absendung des Briefes, als ich die Stellung genau besah, fand ich, dafs sie unrichtig war."

Man sieht, wie überaus klar Gaufs den Zusammenhang der zusammengehörigen Lösungen erkannt und beschrieben hat.

In seiner Antwort vom 24. Sept. sucht Schumacher, der die am 21. Sept. veröffentlichte Lösung von Nauck nicht gelesen hatte, die Zahl der Lösungen unter allerlei Voraussetzungen abzuleiten, deren Unhaltbarkeit ihm selbst jedoch später wahrscheinlich wird.

Gaufs zeigt in seinem folgenden Briefe vom 27. Sept. die Irrigkeit dieser Voraussetzungen und auch der aus denselben gezogenen Schlüsse und fährt dann fort: „Das Merkwürdigste aber, was ich noch zu berichten habe, ist, dafs der Aufsteller der Aufgabe (ein gewisser Dr. Nauck irgendwo in Thüringen) in Nr. 377 der Illustrierten Zeitung vom 21. Sept. selbst seine früher gegebene Zahl 60 widerrufen und sie auf 92 gesetzt hat, die er auch alle hat abdrucken lassen. Es giebt nämlich 11 nicht-symmetrische (à 8 Variationen) und Eine symmetrische (à 4 Variationen). Ich schreibe ihnen die 12 wesentlich verschiedenen hier her. Sie bemerken leicht, dafs die Zahlen blofs die Numerierung der Horizontalreihen sind, in welche die Königin in den auf einander folgenden Vertikalreihen zu placieren ist.

1) 15863724,	4) 25713864,	7) 26831475,	10) 35281746,
2) 16837425,	5) 25741863,	8) 27368514,	11) 35841726,
3) 24683175,	6) 26174835,	9) 27581463,	12) 36258174.

„Herr Nauck behauptet nun, dafs es aufser den 92 (wovon diese 12 der Kern sind) weiter keine gebe; da er aber nicht angiebt, auf welche Weise er sich die Gewifsheit verschafft hat, so kann man, da er früher irrig 60 angab, wohl einstweilen noch zweifeln. Schwer ist es übrigens nicht, durch ein methodisches Tatonnieren [Probieren] sich diese Gewifsheit zu verschaffen, wenn man eine oder ein paar Stunden daran wenden will." Es folgt dann die in § 4 mitgeteilte Vorschrift, auf einer präparierten Tafel diese Versuche auszuführen. „Ohne Tafel können auch die blofsen Zahlen dazu dienen, woneben ich folgendes bemerke.

„Die Aufgabe läfst sich so aussprechen. Man soll die 8 Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in eine solche Ordnung bringen, dafs

1) wenn man der geordneten Reihe nach sie resp. um 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 vergröfsert, lauter ungleiche Summen erscheinen;

2) dafs auch, wenn man der Reihe nach 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 addiert, lauter ungleiche Summen erscheinen.

„Es sind z. B. diese Summen bei Auflösung 1):

2, 7, 11, 10, 8, 13, 9, 12 oder geordnet 2, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 alle ungleich; und
9, 12, 14, 11, 7, 10, 4, 5 oder geordnet 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 14 alle ungleich."

Man sieht sofort die Übereinstimmung dieser Bedingungen mit den von uns in § 11 und § 13 angegebenen. Für die Quersummen der zweizifferigen Zahlen, oder die Summen der Zahlen und ihrer Spaltenzahlen ist es an und für sich klar. Wenn aber die Differenzen, welche man erhält, wenn man von den Zeilenzahlen der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 subtrahiert, sämtlich verschiedcn sind, so sind natürlich auch die gleichwertigen Summen, welche man erhält, wenn man zu den Zeilenzahlen der Reihe nach die Zahlen — 1, — 2, — 3, — 4, — 5, — 6, — 7, — 8 addiert, sämtlich verschieden, und ebenso die Summen, welche man erhält, wenn man zu den Zeilenzahlen die um 9 gröfseren Zahlen

8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1

addiert.

Gaufs äufsert sich in seinem Briefe nicht darüber, auf welche Weise er zur Aufstellung dieser Fassung gelangt ist. Schumacher spricht sich über die Begründung derselben in seiner Antwort vom 5. Oktober[1]) folgendermafsen aus:

„Die willkürliche Versetzung der Zahlen 1 bis 8 drückt die Bedingung schon aus, dafs keine Dame die andere als Turm angreife. Die Addition mit 1, 2, 3, . . . 8, dafs keine Dame die andere in absteigender Linie als Läufer angreife, die Addition von 8, 7, 6, . . . 2, 1, dafs dies nicht in aufsteigender[2]) Linie geschehe, wenn nämlich bei keiner Addition gleiche Summen vorkommen. Kommen gleiche Summen vor, so weifs man unmittelbar, welche Damen sich als Läufer angreifen."

Gaufs erläutert weiterhin das methodische Probieren mit folgenden Worten:

„Das Tatonnieren ist nun sehr leicht. Z. B. ich versuche den Anfang 1 . 3 . . . zu komplettieren. Vermöge jener 2 Bedingungen wird in der dritten Reihe nicht 2 und nicht 4 stehen dürfen, also nur 5, 6, 7 oder 8. Es müssen also die Anfänge

1 . 3 . 5 . . ., 1 . 3 . 6 . . ., 1 . 3 . 7 . . ., 1 . 3 . 8 . . .

durchprobiert werden. Ich fange an mit 1 . 3 . 5. Vermöge jener Bedingungen darf am vierten Platz nicht 4 und nicht 6 stehen. Es bleiben also blofs übrig 2, 7, 8, oder es sind durchzuprobieren die Anfänge

1 . 3 . 5 . 2 . . ., 1 . 3 . 5 . 7 . . ., 1 . 3 . 5 . 8 . . .

1) Mit diesem Briefe Schumachers schliefst der Briefwechsel. (Schumacher starb am 28. Dezbr. 1850.)

2) Hierbei sind, wie im Schachspiel üblich, die Horizontalreihen von unten nach oben gezählt. In der hier gewählten Zählweise wären die Ausdrücke zu vertauschen.

Ich fange wieder an mit 1.3.5.2, wo infolge jener Bedingungen am fünften Platz nicht stehen dürfen 6 und 7. Es bleiben also bloſs die Anfänge

1.3.5.2.6 und 1.3.5.2.8.

Die Berücksichtigung obiger Bedingungen ergiebt, daſs bei dem Anfange 1.3.5.2.6 auf dem sechsten Platz 4, 7, 8 nicht stehen dürfen. Es fällt also dieser Anfang weg. Ebenso darf auch für Anfang 1.3.5.2.8 auf dem sechsten Platz weder 4 noch 6 noch 7 stehen. Es fällt also auch dieser Anfang weg. Der Anfang 1.3.5.2 ist also überhaupt unzulässig. Ebenso verfährt man mit 1.3.5.7 und 1.3.5.8, die beide sich als unzulässig ausweisen. Es ist folglich überhaupt der Anfang 1.3.5 unzulässig, und man wird ebenso 1.3.6, 1.3.7, 1.3.8 durchprobieren.“

§ 17. Gauſs' Bezeichnung der Felder durch komplexe Zahlen.

In demselben Briefe (vom 27. September) gelangt Gauſs dann noch zu einer Darstellung der Aufgabe, welche mit der in § 11 behandelten groſse Ähnlichkeit hat. Er führt dieselbe auf das Gebiet der komplexen Zahlen über.

Fig. 36.

$1+i$	$2+i$	$3+i$	$4+i$	$5+i$	$6+i$	$7+i$	$8+i$
$1+2i$	$2+2i$	$3+2i$	$4+2i$	$5+2i$	$6+2i$	$7+2i$	$8+2i$
$1+3i$	$2+3i$	$3+3i$	$4+3i$	$5+3i$	$6+3i$	$7+3i$	$8+3i$
$1+4i$	$2+4i$	$3+4i$	$4+4i$	$5+4i$	$6+4i$	$7+4i$	$8+4i$
$1+5i$	$2+5i$	$3+5i$	$4+5i$	$5+5i$	$6+5i$	$7+5i$	$8+5i$
$1+6i$	$2+6i$	$3+6i$	$4+6i$	$5+6i$	$6+6i$	$7+6i$	$8+6i$
$1+7i$	$2+7i$	$3+7i$	$4+7i$	$5+7i$	$6+7i$	$7+7i$	$8+7i$
$1+8i$	$2+8i$	$3+8i$	$4+8i$	$5+8i$	$6+8i$	$7+8i$	$8+8i$

Nehmen wir zur Bezeichnung der Vertikalreihen die reellen Zahlen, und zur Bezeichnung der Horizontalreihen die rein imaginären Zahlen, so erhalten wir eine Bezeichnung der Felder, wie sie Fig. 36 zeigt. Diese Form hatte Gauſs im Auge, wenn er sagt:

„Am elegantesten ist es, die Sachen so einzukleiden, daſs sie den komplexen Zahlen angehören. Es heiſst dann: Man soll 8 verschiedene komplexe Zahlen $a+bi$ finden, so daſs

1) sowohl a als b eine der 8 reellen positiven Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bedeutet,

2) daſs jeder Wert von a nur einmal vorkommt, und ebenso jeder Wert von b,

3) daſs die 8 Werte, welche $a+b$ bei jeder der komplexen Zahlen erhält, ungleich sind, und

4) daſs ebenso die 8 Werte von $a-b$ ungleich sind.“

Diese Bedingungen stimmen mit denen des § 11 völlig überein.

„Es läſst sich dann der Zusammenhang der 8 zusammengehörigen Auflösungen zierlich so vorstellen:

$$\begin{array}{c}\text{Durch Stellung}\\ \text{auf die vier}\\ \text{Quadratseiten}\end{array}\left\{\begin{matrix} a+bi & a+(9-b)i \\ b+(9-a)i, & b+ai \\ 9-a+(9-b)i, & 9-a+bi \\ 9-b+ai, & 9-b+(9-a)i \end{matrix}\right\}\begin{array}{c}\text{Spiegelbilder}\\ \text{[der links stehenden}\\ \text{nach unten].“}\end{array}$$

Wenn nämlich $a+bi$ ein beliebiges Feld des Schachbrettes ist, so erhält man auf diese Weise alle durch Drehen oder Umlegen durch dasselbe besetzten Felder.

Fig. 37.

$3+3i$	$2+3i$	$1+3i$	$3i$	$-1+3i$	$-2+3i$	$-3+3i$
$3+2i$	$2+2i$	$1+2i$	$2i$	$-1+2i$	$-2+2i$	$-3+2i$
$3+i$	$2+i$	$1+i$	i	$-1+i$	$-2+i$	$-3+i$
3	2	1	0	-1	-2	-3
$3-i$	$2-i$	$1-i$	$-i$	$-1-i$	$-2-i$	$-3-i$
$3-2i$	$2-2i$	$1-2i$	$-2i$	$-1-2i$	$-2-2i$	$-3-2i$
$3-3i$	$2-3i$	$1-3i$	$-3i$	$-1-3i$	$-2-3i$	$-3-3i$

Fig. 38.

$3+3i$	$2+3i$	$1+3i$	$-1+3i$	$-2+3i$	$-3+3i$
$3+2i$	$2+2i$	$1+2i$	$-1+2i$	$-2+2i$	$-3+2i$
$3+i$	$2+i$	$1+i$	$-1+i$	$-2+i$	$-3+i$
$3-i$	$2-i$	$1-i$	$-1-i$	$-2-i$	$-3-i$
$3-2i$	$2-2i$	$1-2i$	$-1-2i$	$-2-2i$	$-3-2i$
$3-3i$	$2-3i$	$1-3i$	$-1-3i$	$-2-3i$	$-3-3i$

Da bei der geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen eine Drehung um 90° um den Nullpunkt einer Multiplikation mit $i = \sqrt{-1}$ entspricht, und so eine Drehung um 90°, 180°, 270° mit gröfster Leichtigkeit ausgeführt werden kann, so dürfen wir uns nicht wundern, dafs Gaufs auch hier den Nullpunkt in die Mitte verlegt.

Für ein ungerades n (z. B. $n = 7$) würde man dann die in Fig. 37 dargestellte Bezeichnung des Schachbrettes nehmen können, während für ein gerades n die Fig. 38 (für $n = 6$) ein so bezeichnetes Schachbrett darstellen würde, da die reellen und die rein imaginären Zahlen hier nicht auftreten dürfen. Gleichmäfsiger gestaltet sich die Bezeichnung der Felder noch, wenn wir die geraden Zahlen ganz ausschliefsen, wie Fig. 39 (S. 28) zeigt. Diese Form meint Gaufs, wenn er weiter sagt:

„Noch eleganter ist es, wenn man für a und b nicht die reellen positiven, sondern die ungeraden positiven und negativen Zahlen, $-7, -5, -3, -1, +1, +3, +5, +7$ wählt."

Die oben aufgestellten Bedingungen 2), 3), 4) bleiben unverändert in Gültigkeit.

Die 8 Variationen eines Feldes $a + bi$ in den 8 verschiedenen Stellungen sind:

$$(g.1)\ a + bi, \quad (g.2)\ -b + ai, \quad (g.3)\ -a - bi, \quad (g.4)\ b - ai,$$
$$(g.8)\ a - bi, \quad (g.7)\ -b - ai, \quad (g.6)\ -a + bi, \quad (g.5)\ b + ai,$$

worin je zwei Felder, die durch Spiegelung nach unten aus einander entstehen, unter einander gestellt, und durch je zwei konjugierte Zahlen bezeichnet sind.

„Ist also eine der komplexen Zahlen n, ihre Adjunkte (konjugierte Zahl) n', so sind alle 8 Variationen:

$$(g.1)\ n; \quad (g.2)\ in; \quad (g.3)\ -n; \quad (g.4)\ -in;$$
$$(g.8)\ n'; \quad (g.5)\ in'; \quad (g.6)\ -n'; \quad (g.7)\ -in'."$$

Fig. 39.

$7+7i$	$5+7i$	$3+7i$	$1+7i$	$-1+7i$	$-3+7i$	$-5+7i$	$-7+7i$
$7+5i$	$5+5i$	$3+5i$	$1+5i$	$-1+5i$	$-3+5i$	$-5+5i$	$-7+5i$
$7+3i$	$5+3i$	$3+3i$	$1+3i$	$-1+3i$	$-3+3i$	$-5+3i$	$-7+3i$
$7+i$	$5+i$	$3+i$	$1+i$	$-1+i$	$-3+i$	$-5+i$	$-7+i$
$7-i$	$5-i$	$3-i$	$1-i$	$-1-i$	$-3-i$	$-5-i$	$-7-i$
$7-3i$	$5-3i$	$3-3i$	$1-3i$	$-1-3i$	$-3-3i$	$-5-3i$	$-7-3i$
$7-5i$	$5-5i$	$3-5i$	$1-5i$	$-1-5i$	$-3-5i$	$-5-5i$	$-7-5i$
$7-7i$	$5-7i$	$3-7i$	$1-7i$	$-1-7i$	$-3-7i$	$-5-7i$	$-7-7i$

In seiner Theoria residuorum biquadraticorum[1]) nennt Gaufs die vier durch Multiplikation mit i auseinander entstehenden Zahlen verwandte Zahlen (numeros associatos), während er alle 8 zusammengehörige (numeros nexos) nennt. Die gemeinsame Norm (d. i. das Produkt einer jeden komplexen Zahl mit der ihr konjugierten) ist $a^2 + b^2$. Statt der 8 Zahlen erhält man nur 4, wenn entweder $a = \pm b$ (wie es in den beiden Hauptdiagonalen der Figg. 30 bis 32 der Fall ist), oder wenn eine der beiden Zahlen a oder b gleich Null ist (wie es bei den Schachbrettern von n^2 Feldern mit ungeradem n in der mittleren Vertikal- und in der mittleren Horizontalreihe der Fall ist, wie Fig. 37 zeigt).

Hiermit schliefst der Brief von Gaufs, und mit dem schon erwähnten Briefe Schumachers vom 5. Oktober 1850 der Briefwechsel zwischen beiden berühmten Männern.

§ 18. Natanis Fassung der Aufgabe.

Unsere Aufgabe findet sich dann wieder erwähnt in Natanis Wörterbuch[2]) unter „Rösselsprung". Natani giebt der Aufgabe dort folgenden mathematischen Ausdruck:

„Es sind 8 Felder gegeben, deren Reihenfolge durch eine darüber geschriebene Zahl angezeigt ist, welche wir Ordnungszahl nennen. Es soll in jedes der 8 Felder eine andere der ersten 8 natürlichen Zahlen derart geschrieben werden, dafs die Differenz zweier darunter nicht gleich der Differenz ihrer Ordnungszahlen ist. (Steht also im dritten Felde eine 4, so darf z. B. im fünften Felde weder eine 6 noch eine 2 stehen, weil $4 - 2 = 6 - 4 = 5 - 3$ ist.)"

„Bedeuten dann die Ordnungszahlen die Felder einer Columne des Schachbretts und die Zahlen der Felder selbst die Stelle, welche die betreffende Königin in ihrer Horizontalreihe einnimmt, so giebt die nach diesem Gesetz gebildete Zahlenreihe die Stellung der 8 Königinnen."

1) Gaufs, Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda. Societati regiae tradita 1831 Apr. 15. In Gaufs' Werke, Göttingen 1876. 2. Bd. S. 102.

2) Natani, Mathematisches Wörterbuch, begonnen von Hoffmann. Berlin 1867. Band 6. S. 349.

Die Fassung der Aufgabe ist, streng genommen, nicht ganz richtig, wie schon aus dem Beispiel hervorgeht. Die Differenz der Ordnungszahlen ist $3 - 5 = -2$; eine 4 im 3. Felde würde daher im 5. Felde nur eine 6 ausschliefsen, da $4 - 6 = -2$ ist; für die 2 im 5. Felde ist diese Differenz aber $4 - 2 = +2$. Es mufs daher heifsen: Die Differenz zweier Felderzahlen darf weder gleich der **positiven** noch gleich der **negativen** Differenz ihrer Ordnungszahlen sein. Dasselbe ergiebt sich auch leicht aus unserer in § 11 und § 13 aufgestellten Fassung.

Sind nämlich b und b_1 zwei Felderzahlen (dort Zeilenzahlen), a und a_1 ihre Ordnungszahlen (Spaltenzahlen), so fanden wir die beiden Bedingungen: $(a+b) \gtrless (a_1+b_1)$, $(a-b) \gtrless (a_1-b_1)$, aus denen wir leicht die beiden folgenden

$$(a - a_1) \gtrless (b_1 - b_1) \qquad (a - a_1) \gtrless (b - b_1)$$

oder auch
$$(a - a_1) \gtrless \pm (b - b_1)$$

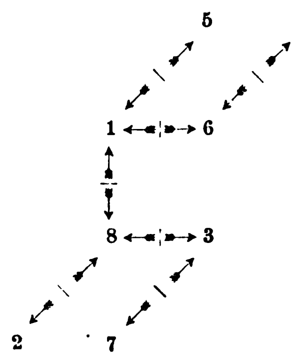
oder endlich
$$(b - b_1) \gtrless \pm (a - a_1)$$

ableiten können.

Natani zeigt dann, wie man aus einer Stellung durch Drehung und Spiegelung noch im allgemeinen sieben andere ableiten kann und fährt fort:

„Zahlentheoretisch drückt sich der Zusammenhang dieser 8 Stellungen so aus: Man kann aus einer Auflösung sieben andere gewinnen, indem man 1) die Ordnung der Felder umkehrt, 2) statt der Zahlen in den Feldern ihre Differenzen von 9 nimmt, diese ist dann wieder umzukehren, so dafs man jetzt 4 Zahlenreihen hat, 3) endlich kann man in jeder dieser 4 Reihen die Zahlen in den Feldern mit den Ordnungszahlen vertauschen."

Fig. 40.



Die Fig. 40 zeigt, wie man nach den Figg. 19 und 20 durch diese Operationen aus der Stellung 1 die übrigen erhält.

Über die Auffindung der Lösungen äufsert sich Natani nicht, er sagt nur: „Um die Auflösungen der Aufgabe zu ermitteln, giebt es wohl keine andere Verfahrungsweise als Ausschliefsung der Anordnungen, welche der Aufgabe nicht entsprechen, wobei sich allerdings mancherlei Erleichterungen ergeben."

§ 19. Günthers Bezeichnung der Felder und Lösung der Aufgabe mit Hilfe der Determinanten.

Eine historisch-kritische Übersicht über die in den vorhergehenden Paragraphen dargestellten Auflösungen, in welcher jedoch Naucks Anteil an der Lösung nicht genug gewürdigt zu sein scheint, giebt Günther[1]) in einem Aufsatze: „Zur mathematischen Theorie des Schachbretts".[2]) Günther betont darin mit Recht, dafs durch die verschiedenen Fassungen der

1) Dr. Siegmund Günther, Professor der Erdkunde an der technischen Hochschule in München.

2) Archiv der Mathematik und Physik. Gegründet von Grunert, fortgesetzt von Hoppe. 1874. 56. Teil. Seite 281 bis 292.

Aufgabe von Gaufs (und Natani), so richtig und elegant sie auch sein mögen, doch die eigentliche Lösung kaum wesentlich gefördert wird. Zu der von Gaufs angegebenen Lösung durch Probieren (§ 16 am Ende) bemerkt Günther: „Es ist nicht zu leugnen, dafs die hier gegebene Vorschrift verhältnismäfsig schnell zum Ziele führt; dagegen wird man aber auch gestehen müssen, dafs sie die gröfste Aufmerksamkeit erfordert. Es ist eine ganz kombinatorische Operation, bei der successive alles Untaugliche ausgeschieden wird, etwa in der Art des Siebes des Eratosthenes. Es wäre nur noch nötig, sie dahin zu vervollkommnen, dafs bei ihrer Anwendung gar keine besondere Genauigkeit mehr nötig, vielmehr das Tatonnement völlig mechanisch wäre."

Weiter zeigt Günther, dafs die Aufgabe, n Türme auf einem Schachbrett von n^2 Feldern schlagfrei aufzustellen, mit der Aufgabe zusammenfällt, alle Glieder einer Determinante von $n$ten Grade zu entwickeln, da jedes Glied derselben ja aus jeder Horizontal- und aus jeder Vertikalreihe je einen Faktor enthält. Die Aufgabe für n Damen erfordert dann die Ausscheidung aller derjenigen Glieder, in welchen Glieder einer und derselben Diagonalreihe vorkommen.

Während bei den bisher angewandten Bezeichnungsarten der einzelnen Felder die Entscheidung darüber, ob in einer aufgeschriebenen Stellung die Bedingung des Läufers erfüllt ist, grofse Aufmerksamkeit und stete Überlegung erfordert, legt Günther eine Bezeichnung zu Grunde, welche dieses sofort erkennen läfst. Er giebt nämlich den Feldern einer und derselben ersten Diagonalreihe stets denselben Buchstaben, und den Feldern derselben zweiten Diagonalreihe dieselbe Zahl.

Günther hat die in Fig. 41 dargestellte Bezeichnung der Felder gewählt, welche die Annehmlichkeit hat, dafs sie nach rechts und unten beliebig fortgesetzt werden kann. Während

Fig. 41.

a_1	c_2	e_3	g_4	i_5	l_6
b_2	a_3	c_4	e_5	g_6	i_7
d_3	b_4	a_5	c_6	e_7	g_8
f_4	d_5	b_6	a_7	c_8	e_9
h_5	f_6	d_7	b_8	a_9	c_{10}
k_6	h_7	f_8	d_9	b_{10}	a_{11}

Fig. 42.

a_6	b_7	c_8	d_9	e_{10}	f_{11}
b_5	c_6	d_7	e_8	f_9	g_{10}
c_4	d_5	e_6	f_7	g_8	h_9
d_3	e_4	f_5	g_6	h_7	i_8
e_2	f_3	g_4	h_5	i_6	k_7
f_1	g_2	h_3	i_4	k_5	l_6

Fig. 43.

f_1	g_2	h_3	i_4	k_5	l_6
e_2	f_3	g_4	h_5	i_6	k_7
d_3	e_4	f_5	g_6	h_7	i_8
c_4	d_5	e_6	f_7	g_8	h_9
b_5	c_6	d_7	e_8	f_9	g_{10}
a_6	b_7	c_8	d_9	e_{10}	f_{11}

aber die zweiten Diagonalreihen von oben links an der Reihe nach durch die Zahlen von 1 bis $2n - 1$ bezeichnet werden, springen bei den ersten Diagonalreihen die Buchstaben von einer Seite der ersten Diagonale auf die andere über, was manche Unbequemlichkeit hat. Wollte man auf die bequeme Vergröfserung verzichten, so könnte man auch die Bezeichnung nehmen, wie sie Fig. 42, oder deren Spiegelbild nach unten Fig. 43 andeutet.

Die Lösung nun, welche Günther für unsere Aufgabe giebt und deren Richtigkeit nach dem Vorhergehenden von selbst einleuchtet, ist folgende:

„Man entwickele sämtliche Glieder der Determinante Fig. 41, und streiche von diesen Gliedern alle diejenigen weg, welche entweder den nämlichen Buchstaben oder den nämlichen Index mehr als einmal enthalten; alle übrig bleibenden genügen unserer Bedingung."

Über die Anwendung dieser Vorschrift heifst es dann weiter: „Die Operation des Eliminierens aller unstatthaften Verbindungen hat einen möglichst hohen Grad von Einfachheit erhalten, und die Darstellung aller überhaupt zur Prüfung kommenden Verbindungen ist ebenfalls eine rein mathematische Aufgabe einfachster Natur. Könnte freilich die Auflösung einer Determinante nur dadurch geschehen, dafs man in der Weise der Elementarvorschriften verführe, so wäre nichts wesentliches gewonnen; der Fortschritt gegen die Behandlung von Gaufs liegt aber wohl darin, dafs man die Berechnung aller Glieder einer Determinante durch successive Zerlegung in Unterdeterminanten anf ganz mechanische Weise ausführen kann, ohne dafs dabei das Übersehen irgend eines Gliedes denkbar ist.“

So einfach die obige Vorschrift ist, so weitschweifig wird ihre Anwendung für einigermafsen grofse n. Günther begnügt sich daher auch damit, die Schachbretter von 9, 16, 25 Feldern zu untersuchen, für welche er 6, 24, 120 Glieder zu entwickeln hat. Für $n = 8$ hätte man die Hälfte von 8! Glieder, also 20160 Glieder aufzuschreiben, um 46 brauchbare zu finden.

Diese Methode bedarf vielmehr noch einer kleinen Verbesserung. Die grofse Schwerfälligkeit der Auflösung beruht darin, dafs auch die unbrauchbaren Glieder alle mitberechnet werden sollen. Da man aber nur diejenigen Glieder haben will, welche ungleiche Buchstaben und ungleiche Zahlen enthalten, so mufs man in den Unterdeterminanten sofort diejenigen Elemente streichen oder durch Nullen ersetzen, welche mit den vor der Unterdeterminante stehenden Elementen gleiche Buchstaben oder gleiche Zahlen haben, da diese Elemente zum Auffinden der gesuchten Stellungen nichts beitragen können. Dadurch nähert sich dann dieses Verfahren der in § 4 angegebenen Lösung von Gaufs.

Auf die Frage, ob sich für die Anzahl der möglichen Lösungen auf dem allgemeinen Schachbrett von n^2 Feldern ein independenter Ausdruck gewinnen lasse, geht Günther nicht näher ein, er sagt nur: „Obwohl diese Aufgabe sicher nicht zu den unlösbaren gehört, so zeigen doch schon die bekannten Formeln, mittelst deren man die Anzahl der 2, 3, ... p Diagonalterme enthaltenden Glieder zu bestimmen vermag, wie ungeheuer kompliziert die Ausdrücke bei diesem ähnlichen, aber ungleich verwickelteren Problem sich gestalten müssen.“

§ 20. Glaisher's Verbesserung der Methode Günthers. Anwendung auf Schachbretter von 25, 36, 49, 64 Feldern.

Die angedeutete Verbesserung der Güntherschen Methode ist zuerst von Glaisher[1]) angegeben worden. Derselbe zeigt zuerst, dafs aus allen Lösungen eines Schachbrettes von n^2 Feldern, welche kein a enthalten, durch Anhängen des in der ersten Hauptdiagonalreihe folgenden Gliedes a_{2n+1} sich sofort alle Lösungen mit a_{2n+1} (mit einer Ecke) ableiten lassen[2]), dafs aus diesen durch Ersetzen einer jeden Zahl durch ihre Ergänzung zu $2n$ (d. i. Umlegen um die zweite Diagonale) alle Lösungen mit a_1 erhalten werden. Durch Spiegelung nach der Seite (Glaisher wendet nur diese an) erhält er dann die übrigen Lösungen, in denen Eckfelder vorkommen. So erhält er aus den beiden Lösungen

$$\text{IV} \quad c_2 e_5 d_3 b_6 \text{ und } e_3 b_2 c_6 d_5$$

1) J. W. L. Glaisher, M. A. (Professor an der Universität zu Cambridge). On the problem of the Eight Queens. Philosophical Magazine for December 1874. (11 Seiten.)

2) Siehe § 7.

Fig. 44.

a_1	c_2	e_3	g_4	k_5
b_2	a_3	c_4	e_5	g_6
d_3	b_4	a_5	c_6	e_7
f_4	d_5	b_6	a_7	c_8
h_5	f_6	d_7	b_8	a_9

für das Schachbrett von 25 Feldern Fig. 44 die Lösungen

V $c_2e_5d_3b_6a_9$ und $e_3b_2c_6d_5a_9$

und aus diesen durch Ergänzung der Indices zu 10 die neuen

$c_8e_5d_7b_4a_1$ und $e_7b_8c_4d_5a_1$.

Durch seitliche Spiegelung d. i. durch Ersetzen der r^{ten} Spalte von rechts durch die r^{te} Spalte von links erhält er dann die 4 Lösungen

$$g_4a_3e_7b_6h_5,\ e_3g_6b_4a_7h_5,\ f_4a_3d_7c_6k_5,\ d_3f_6c_4a_7k_5.$$

Damit sind alle Lösungen, in denen Eckfelder vorkommen können, gefunden, und beim Aufsuchen der folgenden Glieder werden daher die vier Ecken durch Nullen oder Punkte ersetzt[1]). Da die Lösungen, welche mit g_4 beginnen, sich durch seitliche Spiegelung aus denen mit c_2 ableiten lassen müssen, so wird die Unterdeterminante mit g_4 keine neuen Lösungen liefern können; da ferner nach Auffindung aller Stellungen mit c_2 durch Drehung um 90°, 180°, 270° diejenigen mit g_6, b_8 und f_4 und durch Spiegelung die mit g_4, c_8, f_6 und b_2 erhalten werden können, so reduziert sich die weitere Entwickelung auf die zweier Determinanten vierten Grades:

$$\begin{vmatrix} \cdot & c_2 & e_3 & g_4 & \cdot \\ b_2 & a_3 & c_4 & e_5 & g_6 \\ d_3 & b_4 & a_5 & c_6 & e_7 \\ f_4 & d_5 & b_6 & a_7 & c_8 \\ \cdot & f_6 & d_7 & a_8 & \cdot \end{vmatrix} = c_2 \begin{vmatrix} b_2 & c_4 & e_5 & g_6 \\ d_3 & a_5 & c_6 & e_7 \\ f_4 & b_6 & a_7 & c_8 \\ \cdot & d_7 & b_8 & \cdot \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} \cdot & a_3 & e_5 & \cdot \\ d_3 & b_4 & c_6 & e_7 \\ \cdot & d_5 & a_7 & \cdot \\ \cdot & f_6 & b_8 & \cdot \end{vmatrix}.$$

In der ersten Unterdeterminante werden nun noch alle Elemente gestrichen, welche c oder 2 enthalten, ebenso in der zweiten diejenigen Elemente, welche e oder 3 enthalten, so daſs die weitere Entwickelung nunmehr an folgenden Unterdeterminanten geschieht:

$$c_2 \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & e_5 & g_6 \\ d_3 & a_5 & \cdot & c_7 \\ f_4 & b_6 & a_7 & \cdot \\ \cdot & d_7 & b_8 & \cdot \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & b_4 & c_6 & \cdot \\ \cdot & d_5 & a_7 & \cdot \\ \cdot & f_6 & b_8 & \cdot \end{vmatrix}.$$

Da die Unterdeterminante von e_3 mit drei leeren Reihen natürlich keine Lösung liefern kann, so haben wir nur die erstere zu entwickeln. Sie liefert die beiden Produkte:

$$c_2e_5 \begin{vmatrix} d_3 & \cdot & \cdot \\ f_4 & b_6 & \cdot \\ \cdot & d_8 & \cdot \end{vmatrix} + c_2g_6 \begin{vmatrix} d_3 & a_5 & \cdot \\ f_4 & \cdot & a_7 \\ \cdot & d_7 & b_8 \end{vmatrix},$$

wenn in den Unterdeterminanten wieder die entsprechenden Elemente durch Nullen ersetzt sind. Die erste Unterdeterminante verschwindet, und die zweite liefert die einzige mit c_2 beginnende

1) Siehe § 8.

Lösung $c_2 g_6 a_5 f_4 b_8$. „Da diese nur die Glieder c_2, g_6, b_8, f_4 und a_5, das Mittelfeld, enthält, so liefert sie durch Drehen keine neue Lösung; die einzige andere Lösung ist daher ihr Spiegelbild $g_4 b_2 a_5 c_8 f_6$." Damit sind die 10 Lösungen des Schachbretts von 25 Feldern gefunden.

Da diese alle den Buchstaben a enthalten, so giebt es für 36 Felder keine Lösungen mit Ecken; eine Zerlegung nach c_2 und e_3 liefert nur eine Lösung, welche symmetrisch ist und daher durch Drehung nur eine andere liefert, während beide durch Spiegelung je eine neue liefern. Für 36 Felder giebt es daher nur 4 Lösungen.

Aus diesen werden dann, da sie kein a enthalten, die 4 Stellungen mit a_{13} für 49 Felder, aus diesen durch Spiegelung vier neue, und aus diesen 8 noch andere 8 durch Umlegen um die zweite und erste Diagonale abgeleitet. Die Entwickelung nach c_2 liefert die andern 4 Grundstellungen, aus denen dann durch Drehen und Reflektieren alle Stellungen gefunden werden, deren es für 49 Felder im ganzen 40 giebt.

Die Ableitung der zusammengehörigen Stellungen geschieht auf folgende Weise.

Eine Drehung um 90° wird bewirkt, indem man jeden Buchstaben durch den gleichweit von der ersten Diagonale auf der andern Seite derselben abstehenden (den zugeordneten) ersetzt und dieses Feld dann seitwärts spiegelt. Eine Drehung um 180° erfordert die Vertauschung jedes Buchstaben durch den zugeordneten und gleichzeitige Ergänzung des Index zu $2n$; die Drehung um 270° wird ausgeführt, indem man erst um 90° und dann noch um 180° dreht. Die vier reflektierten Stellungen werden dann aus diesen vier erhalten entweder durch seitliche Spiegelung derselben, oder dadurch, dafs man jeden Buchstaben durch den zugeordneten ersetzt (Spiegelung oder Umlegen um die erste Diagonale), oder auch dadurch, dafs man statt jeder Zahl ihre Ergänzung zu $2n$ setzt (Umlegen um die zweite Diagonale).

Glaisher leitet dann auf gleiche Weise die Lösungen ab, welche sich für 64 Felder ergeben, und bestätigt die von Nauck angegebene Zahl 92.

§ 21. Die Methode von De la Noë nach Lucas.

In einem Aufsatze von Lucas: „Le problème des huit reines" in der Revue scientifique[1]) werden Günthers und Glaishers Arbeiten kurz erwähnt und mitgeteilt, dafs schon im Jahre 1867 die Herren Parmentier und de la Noë nach einer besonderen Methode die Aufgabe gelöst hätten, ohne von den bereits gefundenen Lösungen etwas zu wissen. Es wird zuerst gezeigt, wie aus einer Stellung eines Schachbrettes von 64 Feldern durch Drehung um 90°, 180°, 270° drei andere entstehen, und wie sich diese in der abgekürzten Bezeichnung durch achtstellige Zahlen aus einander ableiten lassen. Weiter wird dann gezeigt, wie aus diesen 4 Lösungen (solutions adjointes) durch Umkehrung der Ordnung der horizontalen oder der vertikalen Reihen (Spiegelung) vier neue Lösungen (solutions renversées) entstehen.

Lucas zeigt dann, dafs der Gang der Königin die Resultierende aus dem Gange des Turmes und des Läufers ist, dafs sich die Aufgabe der 8 Türme durch Permutieren lösen läfst,

1) La Revue scientifique de la France et de l'étranger. Janvier 1880 à Juillet 1880. Paris 1880. S. 948 bis 953

während die der 8 Läufer bedeutend schwieriger ist, und giebt der Aufgabe den folgenden arithmetischen Ausdruck, über den § 18 zu vergleichen ist:

Résoudre le problème des huit reines revient à trouver tous les nombres de huit chiffres, formés des huit premiers chiffres, tous différents, mais dans un ordre quelconque, de telle sorte que la différence de deux d'entre eux soit distincte de la différence des rangs qu'ils occupent: c'est ainsi que le problème a été posé naguère par M. Lionnet dans les Nouvelles Annales de Mathématiques.

Es wird dann Günthers Methode kurz erläutert und zum Schlusse dieser Erläuterung heifst es: „Trotz aller von Günther und Glaisher bei dieser Frage aufgewendeten Geschicklichkeit scheint die Aufgabe der neun oder der zehn Königinnen auf dem Schachbrett von 81 und 100 Feldern durch diese Methode fast unzugänglich."

Die Methode von de la Noë besteht in der in § 2 angedeuteten Zerlegung des Schachbretts in Ränder (bandes). Derselbe besetzt zuerst ein Feld des inneren Vierecks mit einer Königin, und stellt dann im folgenden Rande soviel Königinnen als möglich auf alle mögliche Arten auf, wobei Stellungen, welche aus andern durch Drehung oder Spiegelung entstehen können, nicht weiter untersucht werden. Hierauf stellt man auf dem dann folgenden Rande möglichst viele Königinnen auf und findet, dafs eine Stellung, bei welcher die beiden innersten Ränder besetzt sind, nicht möglich ist (für 64 Felder und für kleinere Schachbretter)[1]).

Indem man nun wieder ein Feld des inneren Vierecks besetzt, den folgenden Rand aber leer läfst, und auf dem dritten 3 Königinnen aufstellt, findet man durch Besetzen des äufseren Randes mit den übrigen vier die 4 einfachen Stellungen, welche dem Typus 1 0 3 4 entsprechen. Indem man dann weiter das innere Viereck freiläfst, und drei, zwei, eine Königin auf dem folgenden Rande aufstellt, findet man die Stellungen vom Typus 0 3 1 4, 0 2 3 3, 0 2 2 4, 0 1 3 4, und endlich durch Freilassung der inneren beiden Ränder und Besetzen der beiden folgenden mit je 4 Königinnen erhält man die symmetrische Stellung vom Typus 0 0 4 4.

Die folgende kleine Tabelle enthält nach der hier eingeführten Bezeichnung der Grundstellungen für die Schachbretter IV bis VIII eine Zusammenstellung derselben mit ihren Typen. (Die symmetrischen Grundstellungen sind durch *, die doppelt-symmetrischen durch ** bezeichnet.)

Schachbrett	Grundstellung	Typus			
IV	1**			0	4
V	1		0	2	3
	2**		1	0	4
VI	1*		0	2	4

Schachbrett	Grundstellung	Typus			
VII	1	0	1	3	3
	2	0	1	3	3
	3	0	1	2	4
	4*	1	0	2	4
	5*	1	0	2	4
	6	0	2	1	4

Schachbrett	Grundstellung	Typus				Schachbrett	Grundstellung	Typus			
VIII	1	0	2	3	3	VIII	7	0	2	2	4
	2	0	2	3	3		8	0	3	1	4
	3	0	2	2	4		9	0	2	2	4
	4	0	1	3	4		10*	0	0	4	4
	5	1	0	3	4		11	1	0	3	4
	6	1	0	3	4		12	1	0	3	4

1) Das Schachbrett von 100 Feldern hat jedoch 10 Grundstellungen, in denen beide innerste Ränder mit je einer Königin besetzt sind. Siehe Tabelle 15, Typus 17) und 18).

Zur bequemeren Übersicht stellen wir für die Schachbretter VII und VIII auch noch die verschiedenen Typen mit den zu ihnen gehörenden Grundstellungen zusammen:

VII

Typen					Grundstellungen
1)	0	1	2	4	3
2)	0	1	3	3	1 . 2
3)	0	2	1	4	6
4)	1	0	2	4	4* . 5*

VIII

Typen					Grundstellungen
1)	0	0	4	4	10*
2)	0	1	3	4	4
3)	0	2	2	4	3 . 7 . 9
4)	0	2	3	3	1 . 2
5)	0	3	1	4	8
6)	1	0	3	4	5 . 6 . 11 . 12

Anmerkung. In Tabelle 14 und Tabelle 15 sind für die Schachbretter von 81 und 100 Feldern die Grundstellungen und Typen in ganz gleicher Weise wie hier zusammengestellt.

§ 22. Die von mir angewandte Methode für Günthers Bezeichnungsart.

In seiner Determinantentheorie führt Günther[1]) die Lösung der vorliegenden Aufgabe als instruktives Beispiel für die Anwendung der Determinanten an, und giebt nach der in § 19 angeführten Methode die Lösungen für 16 Felder. Durch diese Stelle erhielt ich im Jahre 1875 die erste Kenntnis von der Aufgabe. Da dieselbe mich interessierte, so dehnte ich allmählich die Auflösung derselben auf 25, 36, 49, 64 Felder aus. Als ich die von mir gefundene Anzahl der Grundstellungen und der Lösungen Herrn Prof. Günther mitteilte, erfuhr ich, dafs auch Gaufs für 64 Felder die von mir gefundene Zahl 92 angegeben habe. Ich suchte zwar noch die Lösungen für 81 Felder, glaubte aber, dafs die Lösung der Aufgabe anderweitig jedenfalls auch schon weiter fortgeführt sei, und liefs dieselbe ganz liegen.

Im Frühjahr vorigen Jahres kam ich erst wieder auf meine Auflösungen zurück und wandte mich mit einer Frage über den jetzigen Stand der Lösung an Herrn Prof. Günther. Bereitwilligst verwies mich derselbe auf seine Abhandlung in Grunerts Archiv und übersandte mir die oben erwähnten Arbeiten von Glaisher und Lucas, aus denen ich ersah, dafs die Lösung der Aufgabe über 64 Felder hinaus noch nicht veröffentlicht war. Da die Zahl der Grundstellungen mit einer Ecke für 10 . 10 Felder, welche auf die in § 7 angegebene Weise gefunden wurden, 32 betrug, während für 9 . 9 Felder 14 solcher Grundstellungen vorhanden waren, und ich so erwarten durfte, dafs die Zahl der Lösungen für 10 . 10 Felder das Doppelte oder Dreifache der Lösungen für 9 . 9 Felder nicht bedeutend übersteigen würde, entschlofs ich mich, die Auflösung auch für 100 Felder zu suchen.

Von Günthers Bezeichnung der Felder und der Lösung durch Determinanten ausgehend fand ich bald die § 19 angedeuteten und von Glaisher zuerst veröffentlichten Abkürzungen, die sich bei längerer Anwendung dieser Methode ganz von selbst ergeben. Ich zerlegte also die Determinanten in Unterdeterminanten, und diese dann weiter, bis ich auf Determinanten kam, die sich leicht übersehen liefsen; dabei strich ich diejenigen Elemente durch, welche mit den

1) Dr. Siegmund Günther (Privatdocent am Polytechnikum zu München), Lehrbuch der Determinanten-Theorie für Studierende. Erlangen 1875. Kap. II, § 11 (S. 46).

vor der Unterdeterminante stehenden Elementen gleiche Buchstaben oder gleiche Zahlen hatten, und ersetzte sie beim folgenden Hinschreiben durch einen wagerechten Strich. Später ersparte ich das Hinschreiben und Ausstreichen der überflüssigen Elemente durch die in § 4 beschriebenen Sterne.

Hat man z. B. für das Schachbrett VII aus den Lösungen von VI nach § 7 die Lösungen mit a_1 abgeleitet und für die weitere Untersuchung die Ecken gestrichen, so hat man noch die mit b_2 und d_3 beginnenden Lösungen zu suchen. Für b_2 bleiben in der zweiten Spalte noch d_5, f_6, h_7, k_8; und in der dritten Spalte für $b_2 d_5$ noch c_3, f_8, h_9, für $b_2 f_6$ noch e_3, a_5, h_9, für $b_2 h_7$ noch c_3, a_5 und für $b_2 k_8$ noch e_3, a_5, d_7. Im ganzen sind daher für folgende 17 Produkte die Unterdeterminanten vierten Grades zu bilden:

1) $b_2 d_5 c_3$	4) $b_2 f_6 e_3$	7) $b_2 h_7 c_3$	10) $b_2 k_8 a_5$	13) $d_3 f_6 h_9$	16) $d_3 k_8 c_4$
2) $b_2 d_5 f_8$	5) $b_2 f_6 a_5$	8) $b_2 h_7 a_5$	11) $b_2 k_8 d_7$	14) $d_3 h_7 c_4$	17) $d_3 k_8 b_6$.
3) $b_2 d_5 h_9$	6) $b_2 f_6 h_9$	9) $b_2 k_8 e_3$	12) $d_3 f_6 c_4$	15) $d_3 h_7 b_6$	

Man erhält also:

$$\begin{vmatrix} \times & c_2 & e_3 & g_4 & i_5 & l_6 & \times \\ b_2 & a_3 & c_4 & e_5 & g_6 & i_7 & l_8 \\ d_3 & b_4 & a_5 & c_6 & e_7 & g_8 & i_9 \\ f_4 & d_5 & b_6 & a_7 & c_8 & e_9 & g_{10} \\ h_5 & f_6 & d_7 & b_8 & a_9 & c_{10} & e_{11} \\ k_6 & h_7 & f_8 & d_9 & b_{10} & a_{11} & c_{12} \\ \times & k_8 & h_9 & f_{10} & d_{11} & b_{12} & \times \end{vmatrix} = b_2 d_5 c_3 \begin{vmatrix} c_6 & - & g_8 & i_9 \\ - & - & a_{11} & c_{12} \\ - & a_9 & c_{10} & - \\ f_{10} & - & - & - \end{vmatrix} + b_2 d_5 f_8 \begin{vmatrix} g_4 & - & l_6 & - \\ c_6 & e_7 & - & i_9 \\ - & a_9 & c_{10} & e_{11} \\ - & - & - & - \end{vmatrix} + b_2 d_5 h_9 \begin{vmatrix} g_4 & - & l_6 & - \\ c_6 & e_7 & g_8 & - \\ - & - & c_{10} & e_{11} \\ - & - & a_{11} & c_{12} \end{vmatrix} + \cdots$$

Die erste Unterdeterminante hat in der vierten Zeile nur das Element f_{10}, und in der zweiten Spalte nur das Element a_9, die daher beide in einer etwaigen Lösung vorhanden sein müssen; für sie bleibt in der dritten Spalte nur noch das Element g_8 und in der vierten c_{12}; wir erhalten also als neue Lösung

$$3\,.\,1 \quad b_2 d_5 c_3 f_{10} a_9 g_8 c_{12}.$$

Die zweite Unterdeterminante ist in der vierten Zeile leer, sie kann also keine Lösung geben.

Die dritte Unterdeterminante hat in der zweiten Spalte nur e_7; für e_7 ist in der ersten Spalte nur noch g_4 und in der vierten nur noch c_{12} verfügbar, welches aber c_{10} in der dritten Spalte ausschliefst, so dafs dieselbe dann kein Element mehr enthält. Wir erhalten daher keine Lösung der Aufgabe, so dafs mit $b_2 d_5$ nur die eine neue Lösung 3 . 1 sich ergiebt.

Während für kleinere Schachbretter das in § 4 angegebene Verfahren mit Hilfe der Sterne allein am schnellsten und bequemsten zum Ziele führt, erfordert dasselbe bei den gröfseren Brettern das Auflegen von so viel Sternen, dafs die Uebersicht darunter leidet. Ich habe es bei denselben nur für die ersten drei oder vier Vertikalreihen angewendet, die noch bleibende Unterdeterminante dann aufgeschrieben und weiter untersucht.

Bei der Untersuchung der Unterdeterminanten zeigt sich der grofse Vorzug der Güntherschen Bezeichnungsweise der Felder. Da nämlich in denselben die Elemente einer Zeile oder Spalte stets wieder in einer Zeile oder Spalte auftreten, so macht es nicht die geringste Schwierigkeit, dieselben in jeder Unterdeterminante wieder zu erkennen. Dagegen ist die Lage der Elemente, welche einer Diagonalreihe angehören, durch die ausgefallenen Reihen ganz verschoben, so dafs man nur bei dieser Bezeichnung die Elemente einer früheren Diagonalreihe leicht und sicher erkennen kann.

Für das Schachbrett VIII hat man zur Ableitung der mit b_2 und d_3 beginnenden neuen Lösungen 26 Unterdeterminanten fünften Grades zu untersuchen, für das Schachbrett IX schon 134 Unterdeterminanten fünften Grades, während für das Schachbrett X die Zahl der Unterdeterminanten sechsten Grades 296 beträgt, um die mit b_2, d_3, f_4 beginnenden Lösungen zu finden.

Bei der Untersuchung dieser Unterdeterminanten benutzte ich Papier, welches durch Linien in kleine Quadrate geteilt ist, und um das weitere Zerlegen in Unterdeterminanten niedrigeren Grades und stets erneutes Hinschreiben derselben zu ersparen, wandte ich zu dem Papier passende Kreuze an, welche, auf ein Feld gelegt, dessen Zeile und Spalte bedeckten, da Sterne wegen der Verschiebung der Diagonalreihen hier nicht zu verwenden waren.

Während Glaisher die Determinanten nach den Elementen der Horizontalreihen zerlegt, wählte ich hierzu die Elemente der Vertikalreihen, da beim Aufschreiben einer Lösung die einzelnen Elemente sofort ihre Stellung in der betreffenden Vertikalreihe andeuten. Ich ordnete auch jede aufgefundene Lösung stets nach den Vertikalreihen, so dafs eine übersichtliche Reihenfolge derselben dadurch sich von selbst ergab. Dagegen giebt Glaisher die Lösungen stets so, wie er sie bei der Drehung oder der Spiegelung erhält, bald also von oben nach unten oder umgekehrt, bald von links nach rechts oder umgekehrt, so dafs eine Übersicht über die Lösungen schwerer zu gewinnen ist. Hierbei leisteten mir die in § 9 beschriebenen durchlochten Grundstellungen die besten Dienste.

§ 23. Zusammenstellung der Resultate. Die Auflösungen für 81 und 100 Felder.

Die folgende Tabelle enthält eine kurze Zusammenstellung der von mir gefundenen Zahlen.

Schachbrett	Zahl der Felder	Anzahl der Grundstellungen: doppelt symmetr.	einfach symmetr	unsymmetrisch	insgesamt	Gesamtzahl der Lösungen
IV	4 . 4	1			1	1 . 2 = 2
V	5 . 5	1		1	2	1 . 2 + 1 . 8 = 10
VI	6 . 6		1		1	1 . 4 = 4
VII	7 . 7		2	4	6	2 . 4 + 4 . 8 = 40
VIII	8 . 8		1	11	12	1 . 4 + 11 . 8 = 92
IX	9 . 9		4	42	46	4 . 4 + 42 . 8 = 352
X	10 . 10		3	89	92	3 . 4 + 89 . 8 = 724

Die Zahlen für die Schachbretter bis zu 64 Feldern sind wohl als durchaus sicher zu betrachten, da sie von verschiedenen Seiten gefunden worden sind, während die Zahlen für die Schachbretter IX und X hier zum erstenmal veröffentlicht werden, und daher als noch nicht ganz feststehend betrachtet werden können.

An der Richtigkeit der Zahl der Lösungen für 81 Felder habe ich nur geringe Zweifel. Bei der Aufsuchung der Lösungen verfuhr ich in folgender Weise. Um die für das Schachbrett VIII gefundenen Lösungen (mit freien Diagonalen) zu kontrollieren, suchte ich zuerst für

Fig. 45.

a_1	c_2	e_3	g_4	i_5	l_6	n_7	p_8	r_9
b_2	a_3	c_4	e_5	g_6	i_7	l_8	n_9	p_{10}
d_3	b_4	a_5	c_6	e_7	g_8	i_9	l_{10}	n_{11}
f_4	d_5	b_6	a_7	c_8	e_9	g_{10}	i_{11}	l_{12}
h_5	f_6	d_7	b_8	a_9	c_{10}	e_{11}	g_{12}	i_{13}
k_6	h_7	f_8	d_9	b_{10}	a_{11}	c_{12}	e_{13}	g_{14}
m_7	k_8	h_9	f_{10}	d_{11}	b_{12}	a_{13}	c_{14}	e_{15}
o_8	m_9	k_{10}	h_{11}	f_{12}	d_{13}	b_{14}	a_{15}	c_{16}
q_9	o_{10}	m_{11}	k_{12}	h_{13}	f_{14}	d_{15}	b_{16}	a_{17}

das Schachbrett IX in nebenstehender Bezeichnung (Fig. 45) die Lösungen mit a_1. Darauf suchte ich die mit b_2 beginnenden Stellungen mit Beibehaltung der Ecken, dann die mit d_3 beginnenden Grundlösungen, indem ich die Ecken und die an sie anstofsenden Felder der äufsern Reihen fortstrich, und schliefslich die mit f_4 beginnenden mit Weglassung auch der folgenden, d_3 entsprechenden, Elemente in dem äufsern Rande. Nachdem ich nun für die gefundenen 46 Grundstellungen die durchlochten Schachbretter angefertigt hatte, suchte ich durch Drehen und Umlegen alle Lösungen einer jeden Grundstellung in Gestalt von neunstelligen Zahlen, um sie nach diesen bequemer zu ordnen, und dann auch in der Güntherschen Bezeichnung, und versah jede mit der Grundstellungs- und Stellungszahl, so dafs ich im Stande war, leicht entscheiden zu können, ob eine gefundene Lösung schon bekannt war. Zur Probe suchte ich nun mit Beibehaltung aller Felder alle Lösungen, welche mit d_3, f_4, h_5 beginnen, und fand nur die schon bekannten wieder.

Nachdem ich mich so überzeugt halten durfte, für 81 Felder alle Lösungen gefunden zu haben, suchte ich aus ihnen für 100 Felder zuerst (nach § 7) die Lösungen mit a_1, darauf auf dem nach Fig. 46 bezeichneten Schachbrett die mit b_2, mit d_3 und mit f_4 beginnenden neuen Lösungen mit Weglassung der durch Drehen und Umlegen zu findenden Lösungen. Von den so gefundenen 92 Grundstellungen fertigte ich wieder die durchlochten Schachbretter an, bildete sämtliche 724 Lösungen in zehnstelligen Zahlen und ordnete sie, um dann ähnliche Proben, wie bei IX, vorzunehmen. Trotzdem ist es sehr wohl möglich, dafs mir bei der grofsen Menge der zu untersuchenden Determinanten einige Grundstellungen entgangen sind.

Fig. 46.

a_1	c_2	e_3	g_4	i_5	l_6	n_7	p_8	r_9	t_{10}
b_2	a_3	c_4	e_5	g_6	i_7	l_8	n_9	p_{10}	r_{11}
d_3	b_4	a_5	c_6	e_7	g_8	i_9	l_{10}	n_{11}	p_{12}
f_4	d_5	b_6	a_7	c_8	e_9	g_{10}	i_{11}	l_{12}	n_{13}
h_5	f_6	d_7	b_8	a_9	c_{10}	e_{11}	g_{12}	i_{13}	l_{14}
k_6	h_7	f_8	d_9	b_{10}	a_{11}	c_{12}	e_{13}	g_{14}	i_{15}
m_7	k_8	h_9	f_{10}	d_{11}	b_{12}	a_{13}	c_{14}	e_{15}	g_{16}
o_8	m_9	k_{10}	h_{11}	f_{12}	d_{13}	b_{14}	a_{15}	c_{16}	e_{17}
q_9	o_{10}	m_{11}	k_{12}	h_{13}	f_{14}	d_{15}	b_{16}	a_{17}	c_{18}
s_{10}	q_{11}	o_{12}	m_{13}	k_{14}	h_{15}	f_{16}	d_{17}	b_{18}	a_{19}

Auf den beigefügten Tafeln habe ich die Grundstellungen sämtlich dargestellt, so dafs man mit ihrer Hilfe für jede beliebige Bezeichnung der Felder die entsprechende Lösung leicht ablesen kann. Tafel I enthält die bis jetzt allein veröffentlichten Lösungen der Schachbretter IV, V, VI, VII und VIII, die Tafeln II und III diejenigen des Schachbrettes IX, und die Tafeln IV bis VII die des Schachbrettes X.

Die beigegebenen Tabellen 5 bis 13 enthalten die Lösungen teils in der abgekürzten Bezeichnung als $n$stellige Zahlen, teils in der Güntherschen Bezeichnung, beide nach steigenden Zahlen der einzelnen Vertikalreihen geordnet mit Beifügung der Grundstellungs- und Stellungszahl. Für die Schachbretter IV bis VIII sind sämtliche Lösungen in beiden Bezeichnungen gegeben; beim Schachbrett VIII sind die Lösungen der zweiten Hälfte so neben die der ersten Hälfte gestellt, dafs die Spiegelbilder (an der unteren Kante) neben einander stehen, wie die beigefügten Stellungsnummern zeigen. Für die Schachbretter IX und X habe ich daher nur die erste Hälfte der Lösungen angegeben, da die der andern Hälfte in 9- und 10-stelligen Zahlen leicht hinzuschreiben sind. Für IX habe ich auch die erste Hälfte der Lösungen in Günthers Bezeichnung gegeben, für X dagegen nur die Grundstellungen. Endlich habe ich noch für das Schachbrett XI die 48 Grundstellungen mit einer Ecke nebst ihrem Spiegelbilde an der ersten Diagonale beigefügt.

Bei den Schachbrettern IV bis IX bezeichnete ich der gewöhnlichen Zählweise entsprechend die erste Horizontalreihe mit 1, die zweite mit 2 u. s. w., bei den Schachbrettern X und XI bezeichnete ich dagegen die erste Zeile mit 0, die zweite mit 1, die zehnte mit 9, und die elfte bei XI durch *z* (als Zeichen für zehn), da ich auf diese Weise die Lösungen beider als 10- und 11-stellige Zahlen darstellen konnte.

In den Tabellen 14 und 15 sind für die Grundstellungen von IX und X noch die Typen von de la Noë angegeben. (S. § 21.)

§ 24. Vorkommen der einzelnen Felder in den Grundstellungen und in allen Lösungen.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie oft jedes einzelne Feld sowohl in allen Grundstellungen als auch in allen Lösungen eines Schachbrettes besetzt ist, indem wir in jedes einzelne Feld die betreffende Zahl einschreiben wollen. Für die kleinen Schachbretter erhält man diese Zahlen leicht durch Abzählen an den geordneten Lösungen. So findet man für die Schachbretter IV, V, VI und VII leicht folgende Zusammenstellungen für alle Lösungen:

IV.

	1	1	
1			1
1			1
	1	1	

V.

2	2	2	2	2
2	2	2	2	2
2	2	2	2	2
2	2	2	2	2
2	2	2	2	2

VI.

	1	1	1	1	
1		1	1		1
1	1			1	1
1	1			1	1
1		1	1		1
	1	1	1	1	

VII.

4	7	6	6	6	7	4
7	4	6	6	6	4	7
6	6	6	4	6	6	6
6	6	4	8	4	6	6
6	6	6	4	6	6	6
7	4	6	6	6	4	7
4	7	6	6	6	7	4

Man übersieht leicht die symmetrische Anordnung der Zahlen in den einzelnen Quadranten und den Grund derselben.

Für die gröfseren Schachbretter erscheint es bequemer, nur für die Grundstellungen diese Zahlen durch Abzählen zu suchen, und aus diesen dann die Zahlen für alle Lösungen abzuleiten. Man mufs dazu alle auf denjenigen 8 Feldern stehenden Zahlen, welche durch Drehen und Umlegen auf einander fallen, zu einander addieren, und die Summe auf jedes der 8 Felder schreiben, so dafs die 8 zusammengehörigen Felder stets dieselbe Zahl haben. Auf den beiden Diagonalen, auf welchen nur vier Felder zusammengehören, sind diese Zahlen daher zu verdoppeln. Die bei den symmetrischen Grundstellungen sich ergebenden Zahlen sind durch 2 zu dividieren (bei den doppelt-symmetrischen durch 4).

Für die Schachbretter VIII und IX finden wir so folgende Zahlen.

VIII. Die 12 Grundstellungen.

Die 11 unsymmetrischen.

2		1	1	4	2	1	
7		1				3	
2		1	2	3		1	2
	1		2	1	3		4
	4	1	1		1		4
	4	1	2			3	1
	2	2	1	1	2	3	
		4	2	2	3		

Die eine symmetrische.

				1			
		1					
1							
						1	
	1						
							1
					1		
			1				

VIII. Alle 92 Lösungen.[1])

4	8	16	18	18	16	8	4
8	16	14	8	8	14	16	8
16	14	4	12	12	4	14	16
18	8	12	8	8	12	8	18
18	8	12	8	8	12	8	18
16	14	4	12	12	4	14	16
8	16	14	8	8	14	16	8
4	8	16	18	18	16	8	4

IX. Die 46 Grundstellungen.

Die 42 unsymmetrischen.

14		4	6	3	4	8	3	
20	1	1	4	3	6	2	5	
7	3	1	8	9	2	3	5	4
1	9	2	2	5	4	7	4	8
	13	2	1	3	4	5	3	11
	7	5	5		7	6	3	9
	5	9	3	3	3	1	10	8
	4	11	5	3	6	5	6	2
		7	8	13	6	5	3	

Die 4 symmetrischen.

		1	1		1	1		
2		1				1		
2					2			
	1						3	
				4				
	3						1	
			2					2
		1				1		2
		1	1		1	1		

IX. Alle 352 Lösungen.

28	30	47	44	54	44	47	30	28
30	32	44	48	44	48	44	32	30
47	44	28	38	38	38	28	44	47
44	48	38	36	20	36	38	48	44
54	44	38	20	40	20	38	44	54
44	48	38	36	20	36	38	48	44
47	44	28	38	38	38	28	44	47
30	32	44	48	44	48	44	32	30
28	30	47	44	54	44	47	30	28

Xª.

32 unsymmetrische Grundstellungen

32									
				2	3	9	11	5	2
	4		4	5	6	4	3	4	2
	11	5		2	3	7	1	1	2
	4		2		2	4	8	9	3
	10	5	2	1		1	3	4	6
	1	7	6	8	2		2	2	4
	2	4	1	5	2	2		6	10
		8	6	2	7	3	3		3
		3	11	7	7	2	1	1	

34 unsymmetrische u. 1 symmetrische Grundstellung.

		1	5	5	4*	3	13	3	
34*									
		6	8	3	1	6*	5	3	2
	4*		3	1	6	3	2	7	8
	7	2		3	4	5	4*	3	6
	8	3*	2		6	4	4	3	4
	2	3	5	6		3	1	5*	9
	4	8	3*	3	3		3	9	1
	9	6	2	3	4	5		1	4*
		5	6	10*	6	5	2		

1) Diese Tabelle giebt schon Nauck (s. § 15).

Für das Schachbrett X leitete ich diese Zahlen in folgender Weise ab. Zuerst bildete ich die zwei vorhergehenden und die zwei folgenden Täfelchen für die mit a_1, b_2, d_3, f_4 beginnenden Grundstellungen, in denen ich der Kürze halber die bei letzteren drei vorkommende eine symmetrische Grundstellung durch einen Stern bezeichne.

X^b.

18 unsymmetrische u. 1 symmetrische Grundstellung.

			5*	6	2	3	2		
		4	2	1	1		5*	5	
18*									
		1	1	4*		2	2	4	4
	5				2	7	1	*	3
	7*	3		3	1		1	1	2
	1	1	1		5*	2	2		6
	4	3	2			1	3	2	3*
	1	5*	1		3		2	6	
		1	6	4	4	3*			

5 unsymmetrische u. 1 symmetrische Grundstellung.

				2*	3				
	2		1			*		2	
		1			1	1		2*	
5*									
		2*	2						1
	1					1	2*		1
						1		1	3*
	2*	1				1	1		
		1	1*			1	2		
			1	3	1*				

Durch Übereinanderlegen derselben erhielt ich dann die folgenden beiden Täfelchen:

X. Die 89 unsymmetrischen Grundstellungen.

32		1	10	13	9	6	15	3	
34	2	4	3	3	4	9	16	12	2
18	4	7	12	8	8	11	8	9	4
5	15	6	4	7	9	12	5	12	14
	16	4	4	3	8	16	13	12	13
	26	11	4	4	7	6	10	8	13
	4	11	12	14	7	6	5	8	22
	12	16	6	8	5	4	7	17	14
	10	20	10	5	14	9	7	7	7
		9	24	24	18	10	3	1	

X. Die 3 symmetrischen Grundstellungen.

			1	1	1				
1						1	1		
1						1		1	
1	1			1					
		1					1	1	
	1	1					1		
					1			1	1
	1		1						1
		1	1						1
				1	1	1			

Aus diesen beiden ergab sich durch Drehen und Umlegen endlich das folgende:

X. Alle 724 Lösungen.

64	48	65	93	92	92	93	65	48	64
48	62	91	72	89	89	72	91	62	48
65	91	76	61	69	69	61	76	91	65
93	72	61	68	68	68	68	61	72	93
92	89	69	68	44	44	68	69	89	92
92	89	69	68	44	44	68	69	89	92
93	72	61	68	68	68	68	61	72	93
65	91	76	61	69	69	61	76	91	65
48	62	91	72	89	89	72	91	62	48
64	48	65	93	92	92	93	65	48	64

In jedem Täfelchen mufs natürlich die Summe der Zahlen in allen Horizontalreihen und in allen Vertikalreihen dieselbe, nämlich gleich der in demselben dargestellten Lösungen sein. Die Summen der in den einzelnen Diagonalreihen besetzten Felder ist im folgenden Paragraphen angegeben.

§ 25. Zahl der weifsen und der schwarzen Felder in den Grundstellungen und in allen Lösungen.

Günther führt in seiner Abhandlung[1]) eine Stelle aus Lange[2]) an, welche lautet: „Bemerkenswert ist noch, dafs bei jeder Reihe die eine Hälfte der 8 Damen auf weifsen, die andere Hälfte auf schwarzen Feldern steht, durch welche Regelmäfsigkeit gewissermafsen die Natur des Läufers, der in der Dame steckt, ihren Ausdruck findet."

Nach dieser Bemerkung könnte es scheinen, als ob bei allen Schachbrettern, wenigstens bei denen mit geradem n, eine solche Gesetzmäfsigkeit vorhanden sei. Das ist jedoch nur noch bei dem Schachbrett von 4^2 Feldern der Fall. Bei dem Schachbrett VI sind dagegen stets 2 besetzte Felder von einer, und die andern 4 von der andern Farbe, und bei dem Schachbrett X sind stets 6 von der einen und 4 von der andern Farbe. Bei den Schachbrettern von n^2 Feldern mit ungeradem n ist der Unterschied der besetzten weifsen und der besetzten schwarzen Felder nicht nur gleich 1, sondern auch gleich 3, wie wir gleich noch näher sehen werden.

Besonders bei der Bildung der zusammengehörigen Stellungen zeigt sich ein Unterschied zwischen den Schachbrettern von n^2 Feldern mit geradem n und denen mit ungeradem n. Ist n gerade, so geht durch Drehung einer Stellung um 90° ein weifses Feld stets in ein schwarzes über und umgekehrt. Es wird daher die Summe der besetzten weifsen Felder in den 8 (oder 4 oder 2) zusammengehörigen Stellungen stets gleich der Summe der besetzten schwarzen Felder, und daher allgemein die Summe der weifsen besetzten Felder in allen Lösungen eines

1) a. a. O. § 3.

2) Lange, Lehrbuch des Schachspiels. Halle 1865. S. 199.

solchen Schachbretts gleich der Summe der schwarzen Felder in allen Lösungen sein. So sind in den 2 Lösungen des Schachbretts IV im ganzen 8, also 4 weifse und 4 schwarze Felder, in den 4 Lösungen des Schachbretts VI im ganzen 24, also 12 weifse und 12 schwarze Felder besetzt, während in den 92 Lösungen von VIII im ganzen $8 \cdot 92 = 736$, also 368 weifse und ebenso viele schwarze, in den 724 Lösungen des Schachbretts X aber 3620 weifse und ebenso viele schwarze Felder besetzt sind.

Ist dagegen n ungerade, so tritt bei einer Drehung um 90° und bei einer Spiegelung an einer Seite des Quadrats an die Stelle eines weifsen Feldes wieder ein weifses und an die Stelle eines schwarzen wieder ein schwarzes. Während bei geradem n die Anzahl der besetzten weifsen Felder durch Drehung um 90° in die der schwarzen übergeht, bleibt hier die Summe der weifsen Felder in allen 8 zusammengehörigen Stellungen stets die gleiche, ebenso die der schwarzen Felder. Wenn wir daher annehmen, dafs die erste Diagonale (von oben links nach unten rechts) stets weifse Felder enthalte, so hat bei dem Schachbrett V die unsymmetrische Grundstellung 3 weifse und 2 schwarze, die doppelt-symmetrische dagegen 1 weifses und 4 schwarze Felder, so dafs in allen 10 Lösungen $8 \,.\, 3 + 2 = 26$ weifse und $8 \,.\, 2 + 4 \,.\, 2 = 24$ schwarze Felder besetzt sind. Bei dem Schachbrett VII hat die zweite Grundstellung 5 weifse und 2 schwarze Felder, die übrigen 5 (unter denen 2 symmetrische sind) haben je 3 weifse und je 4 schwarze Felder, so dafs die Summe aller weifsen besetzten Felder $8.5 + 3.8.3 + 2.4.3 = 136$ ist, während die Summe der schwarzen $8 \,.\, 2 + 3 \,.\, 8 \,.\, 4 + 2 \,.\, 4 \,.\, 4 = 144$ ist. Das Schachbrett IX hat in den meisten Grundstellungen 5 weifse und 4 schwarze Felder, nämlich in den 4 symmetrischen und in 36 unsymmetrischen; in den übrigen 6 unsymmetrischen aber (nämlich in den Grundstellungen 20, 21, 22, 23, 25 und 36) sind 3 weifse und 6 schwarze Felder, so dafs die Anzahl der weifsen Felder in allen Lösungen $36 \,.\, 8 \,.\, 5 + 4 \,.\, 4 \,.\, 5 + 6 \,.\, 8 \,.\, 3 = 1664$, die der schwarzen $35 \,.\, 8 \,.\, 4 + 4 \,.\, 4 \,.\, 4 + 6 \,.\, 8 \,.\, 6 = 1504$ ist.

Wir können die hier gefundenen Zahlen auch aus den im vorigen Paragraphen gefundenen Felderzahlen ableiten und so die einen durch die anderen kontrollieren.

Da nämlich in der ersten, dritten, fünften u. s. w. Diagonalreihe weifse, in der zweiten, vierten, sechsten u. s. w. schwarze Felder stehen, so erhalten wir durch Addition aller Felderzahlen der ungeraden Diagonalreihen alle weifsen, durch die der geraden Diagonalreihen alle schwarzen Felder, während die Summen der besetzten Felder in den einzelnen Diagonalreihen aus den Täfelchen des vorigen Paragraphen für alle Lösungen leicht erhalten werden.

So sind für das Schachbrett IV

in den Diagonalreihen	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
	0, 2, 2, 0, 2, 2, 0 besetzte Felder.
Daher ist die Zahl der weifsen Felder	$0 + 2 + 2 + 0 = 4$;
und die Zahl der schwarzen Felder	$2 + 0 + 2 = 4$.

Bei dem Schachbrett V sind in den Diagonalreihen

	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
	2, 4, 6, 8, 10, 8, 6, 4, 2 besetzte Felder.
Weifse Felder	$2 + 6 + 10 + 6 + 2 = 26$.
Schwarze Felder	$4 + 8 + 8 + 4 = 24$.

6*

Das Schachbrett VI hat in den Diagonalreihen

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11	
	0,	2,	2,	4,	4,	0,	4,	4,	2,	2,	0	besetzte Felder.

Weifs sind $0 + 2 + 4 + 4 + 2 + 0 = 12.$

Schwarz sind $2 + 4 + 0 + 4 + 2 = 12.$

Ferner findet man für die Diagonalreihen der gröfseren Schachbretter der Reihe nach die folgenden Zahlen der besetzten Felder, wobei wir nur bis zur Hauptdiagonalreihe gehen, da nach dieser dieselben Zahlen in umgekehrter Reihenfolge sich wiederholen:

VII	4,	14,	16,	24,	30,	34,	36;			
VIII	4,	16,	48,	64,	56,	72,	76,	64;		
IX	28,	60,	126,	176,	232,	252,	302,	264,	288;	
X	64,	96,	192,	368,	404,	484,	570,	548,	580,	628.

Aus diesen Zahlen findet man dann die oben schon gegebenen Zahlen der weifsen und der schwarzen Felder. (Es mag noch bemerkt werden, dafs nach Günthers Bezeichnung die weifsen Felder ungerade, die schwarzen gerade Zahlen als Indices haben).

§ 26. Zusammenhängende Lösungen für die verschiedenen Schachbretter.

Es giebt bei den meisten Schachbrettern verschiedene Lösungen, welche in eine andere Lösung übergehen, wenn man eine äufsere Reihe auf die entgegengesetzte Seite des Schachbretts stellt. Dies wird nämlich dann der Fall sein, wenn das besetzte Feld dieser Reihe in seiner neuen Lage freie Diagonalreihen vorfindet. Wir wollen solche Lösungen zusammenhängende Lösungen nennen. Um zu untersuchen, ob eine Lösung mit einer andern zusammenhängt, mufs man jede der vier äufsern Reihen auf die andere Seite des Brettes stellen und sehen, ob diese Umstellung zu einer Lösung führt.

Bei dem Schachbrett IV ist eine solche Umstellung nicht möglich.

Bei den Lösungen des Schachbretts V kann man dagegen jede äufsere Reihe wegnehmen und auf der andern Seite ansetzen. Setzt man z. B. in der Lösung 1 . 1

die oberste Reihe unten an, so erhält man 1 . 4,
die unterste Reihe oben an, so erhält man 1 . 3,
die erste linke Reihe nach rechts, so erhält man 1 . 2,
die erste rechte Reihe nach links, so erhält man 2 . 5**.

Dies Verfahren kann man bei jeder Lösung wiederholen. Setzt man z. B. in der Lösung 1 . 1 die jedesmalige vorderste Vertikalreihe rechts an, so erhält man nach einander die Lösungen

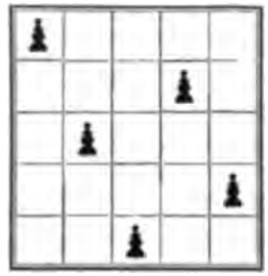
	13524,	35241,	52413,	24135,	41352,	13524,
d. i.	1 . 1,	1 . 2,	1 . 4,	1 . 3,	2 . 5**,	1 . 1.

Setzt man dagegen die oberste Reihe stets nach unten, so erhält man nacheinander durch wiederholte Erniedrigung jeder Zahl um 1:

13524,	52413,	41352,	35241,	24135,	13524
1 . 1,	1 . 4,	2 . 5**,	1 . 2,	1 . 3,	1 . 1.

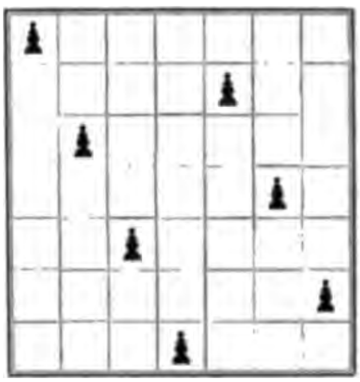
Wir wollen diese Eigentümlichkeit auf nebenstehende Weise verauschaulichen:

Das linke Schachbrett zeigt die Grundstellung V.1.1; in das rechte sind die Lösungen eingeschrieben, deren linke obere Ecke in dem entsprechenden Felde der Figur links beginnt. Man hat dann rechts und unten so viele Reihen von links und von oben anzusetzen, als zur Bildung des betreffenden Schachbretts nötig sind.



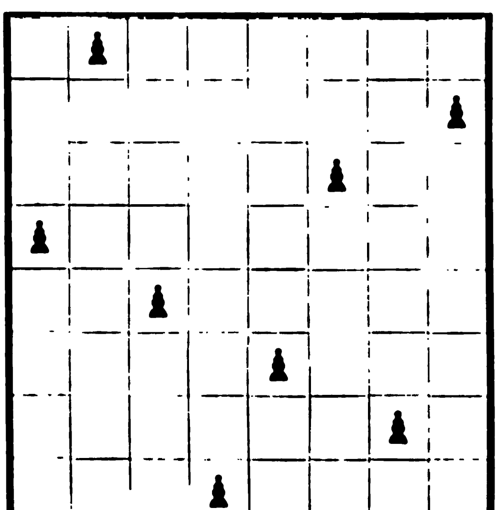
1.1	1.2	1.4	1.3	2.5
1.4	1.3	2.5	1.1	1.2
2.5	1.1	1.2	1.4	1.3
1.2	1.4	1.3	2.5	1.1
1.3	2.5	1.1	1.2	1.4

Die einzige Grundstellung des Schachbretts VI läfst keine derartige Umstellung zu, dagegen hängen bei dem Schachbrett VII die vier Grundstellungen 1, 2, 4*, 6 auf ganz ähnliche Weise zusammen, wie wir es bei den Lösungen des Schachbretts V gesehen haben, und wie es folgende Figuren zeigen:



1.1	2.2	4.2	2.4	1.3	6.7	6.5
2.4	1.3	6.7	6.5	1.1	2.2	4.2
6.5	1.1	2.2	4.2	2.4	1.3	6.7
4.2	2.4	1.3	6.7	6.5	1.1	2.2
6.7	6.5	1.1	2.2	4.2	2.4	1.3
2.2	4.2	2.4	1.3	6.7	6.5	1.1
1.3	6.7	6.5	1.1	2.2	4.2	2.4

Bei dem Schachbrett VIII hängen 7 Grundstellungen in folgender Weise zusammen:



8.6	1.1						
		2.3					
			11.8	4.5			
			6.6	3.4			
			1.6	8.1			
		2.8					
4.2	11.3						
3.7	6.1						

Wie man aus dieser Darstellung sieht, mufs man bei mehreren Lösungen, um zu einer mit ihr zusammenhängenden zu gelangen, zwei äufsere Reihen gleichzeitig ansetzen. Um

z. B. aus 1 . 1 die Lösung 2 . 3 zu erhalten, mufs man die erste linke Reihe nach rechts und die oberste Reihe nach unten ansetzen; dasselbe ist nötig, um aus 2 . 3 die Lösung 11 . 8, und aus ihr dann 3 . 4 zu erhalten. In welcher Weise man aus der Darstellung einer Lösung durch eine achtstellige Zahl die übrigen abzuleiten vermag, zeigt folgende Zusammenstellung:

8 . 6	4	1	5	8	6	3	7	2				
1 . 1		1	5	8	6	3	7	2	4			
2 . 3			4	7	5	2	6	1	3	8		
11 . 8				6	4	1	5	8	2	7	3	
4 . 5					4	1	5	8	2	7	3	6
6 . 6				5	3	8	4	7	1	6	2	
3 . 4					3	8	4	7	1	6	2	5
1 . 6				4	2	7	3	6	8	5	1	
8 . 1					2	7	3	6	8	5	1	
2 . 8			8	3	1	6	2	5	7	4		
11 . 3		3	7	2	8	5	1	4	6			
4 . 2	6	3	7	2	8	5	1	4				
6 . 1		2	6	1	7	4	8	3	5			
3 . 7	5	2	6	1	7	4	8	3				

Auf den Zusammenhang dieser 7 Grundstellungen hat zuerst Lucas[1]) hingewiesen und gezeigt, wie man aus einer Lösung die übrigen ableiten kann. Die figürliche Darstellung der Lösungen ist dort jedoch eine andere.

Die andern 5 Grundstellungen des Schachbretts VIII lassen keine Umstellung zu.

Bei dem **Schachbrett IX** haben wir drei Gruppen von je 11, je 8 und je 5 Grundstellungen, welche, wie die Gruppe VIII, eine gewisse Aehnlichkeit darin zeigen, dafs sie über das ganze Schachbrett sich ausdehnen, und eine **Periode** zeigen, indem an die letzte Stellung die erste sich wieder anschliefst. Diese drei Gruppen sind, wenn wir nur die Grundstellungs- und Stellungszahlen angeben, die folgenden:

16.8	25.3							
		36.1	15.8					
		9.5	4.6					
		4.6	9.7					
		15.6	36.3					
				25.1	16.6			
						30.2	43.3	34.8
						21.7	41.5	21.5
						34.6	43.1	30.4

13.3	20.5	5.5						
			2.3					
			17.3					
			17.1					
			2.1					
				5.7	20.7	13.1		
							7.7	22.7
							27.3	27.1
							22.5	7.5

8.8			
26.8			
	18.4		
	18.2		
		26.6	
		8.6	
	11.8		
	28.6		
	11.6		

1) a. a. O. S. 952.

Aufserdem hängen noch zusammen:

1.1	10.6
14.4	6.7

4.1	9.2
9.4	4.3

während jede der drei Grundstellungen 24.1, 35.1, 38.1 mit ihrer Stellung 3 zusammenhängt.

Bei dem Schachbrett X endlich habe ich die folgenden Gruppen zusammenhängender Lösungen gefunden:

79.1	68.6	53.5	9.1						
				2.3	60.7	37.8			30.6
							54.4	28.4	
							83.2	59.8	
							70.5	35.5	

63.2	66.1								
40.7	14.5								
		8.7	39.8	20.5	16.6				
		57.3	64.4	5.8	7.7				

71.2	86.1
75.7	56.1

			25.6	
55.3	67.4	32.4		32.2
			25.8	

		17.6
61.4	1.8	

		11.2
41.2	27.4	

		19.6
47.3	12.8	

		26.2
48.4	13.8	

		31.6
50.4	18.4	

42.3
78.1
42.1

73.4
92.5
73.2

3.1	
	24.7

4.1	
	21.3

6.1	
	22.3

10.1	
	29.3

15.1	
	23.3

77.2	
	69.6

34.2
38.7

43.2
49.7

76.4
87.5

Die erste Gruppe, welche allein periodisch ist, umfafst 14, die zweite 12 und die folgenden 4, 3 und 2 Grundstellungen, so dafs noch 21 Grundstellungen vorhanden sind, welche keine derartige Umstellung zulassen.

Zum Schlusse gebe ich dem Wunsche Ausdruck, dafs diese kleine Abhandlung Veranlassung geben möge, die von mir für 9.9 und für 10.10 Felder hier zuerst gegebenen Lösungen zu prüfen und nötigenfalls zu berichtigen.

Wenn so für eine gröfsere Zahl von Schachbrettern die Aufgabe sicher gelöst sein wird, läfst sich vielleicht auch die Lösung der allgemeinen Aufgabe in Angriff nehmen.

Tabellen.

Die Grundstellungen und Stellungen mit den laufenden Nummern der einzelnen Lösungen.

Die Lösungen der einzelnen Schachbretter nach steigenden Zahlen geordnet.

De la Noës Typen der Grundstellungen.

Die Grundstellungen und Stellungen mit den laufenden Nummern der einzelnen Lösungen.

Tabelle 1 bis 4.

Tabelle 1.

Schachbrett VII. Laufende Nummern der Lösungen (40).

Grundstellung Nr.	Nummern der Stellungen 1	8	2	7	3	6	4	5
1	1	40	22	19	6	35	38	3
2	2	39	14	27	15	26	37	4
3	5	36	23	18	8	33	29	12
*4	7	34	28	13	7	34	28	13
*5	9	32	16	25	9	32	16	25
6	10	31	20	21	17	24	11	30

Tabelle 2.

Schachbrett VIII. Laufende Nummern der Lösungen (92).

Grundstellung Nr.	Nummern der Stellungen 1	8	2	7	3	6	4	5
1	1	92	22	71	60	33	89	4
2	2	91	15	78	42	51	90	3
3	5	88	41	52	36	57	28	65
4	6	87	74	19	54	39	64	29
5	7	86	73	20	70	23	45	48
6	8	85	77	16	37	56	80	13
7	9	84	27	66	31	62	46	47
8	10	83	50	43	63	30	12	81
9	11	82	32	61	72	21	44	49
*10	14	79	38	55	14	79	38	55
11	17	76	25	68	26	67	35	58
12	18	75	59	34	53	40	24	69

Tabelle 3.

Schachbrett IX. Laufende Nummern der Lösungen (erste Hälfte 176).

Grundstellung Nr.	Nummern der Stellungen 1	8	2	7	3	6	4	5
1	1			72	165			10
2	2			67	119			4
3	3		172			139		16
4	5			166	66			18
5	6			44	62			11
6	7			34	108			17
7	8		136			78		14
8	9		169		145			26
9	12		123		127			25
10	13		134			76		21
11	15		93		88			20
12	19			50	152			22
13	23			74	143			27
14	24			128		156		28
15	29			150	35			61
16	30			113	153			107
17	31		176		71		105	
18	32		95		154		149	
*19	33		102		33		102	
20	36		146		58		55	
21	37		122		141		99	
22	38			86		142		109
23	39		174			133		110
24	40		175		83		101	
25	41		171			130	100	
26	42		84		90			151
27	43			112	155			59
*28	45			60	45			60
29	46		126			91		64
30	47			65	164			106
31	48		80		103		56	
32	49			160		97		111
33	51		94		157		147	
34	52			144		170		63
35	53		163		104		57	
36	54		116		168		148	
37	68		173			131	79	
38	69		167		129		84	
39	70		98		117		82	
*40	73		140		73		140	
*41	75			132	75			132
42	77			135		114	162	
43	85		89			158	118	
44	87			125		120	92	
45	96		161			138		121
46	115		124		137			159

Die mit * versehenen Grundstellungen sind symmetrisch.

Tabelle 4.

Schachbrett X. Laufende Nummern der Lösungen (erste Hälfte 362).

Grundstellung Nr.	Nummern der Stellungen							
	1	8	2	7	3	6	4	5
1	1		321		224			47
2	2			313	139			45
3	3			315		333		46
4	4		302		295			35
5	5			319	207			51
6	6		208		299			18
7	7		209		294			38
8	8		213		158			41
9	9		266		76			26
10	10		248		352			59
11	11		247		338			40
12	12			343	259			61
13	13			335		344		16
14	14		307		138			53
15	15		122		303			52
16	17		231		118			28
17	19		264		72			39
18	20		239			137		44
19	21		124		152			33
20	22		328		133			54
21	23		361		98			42
22	24			217	134			55
23	25		214		163			62
24	27			77		265		37
25	29		200			90		64
26	30			153	197			36
27	31		308		141			49
28	32		293			145		57
29	34		143		140			48
30	43			342		183		58
31	50			227		285		60
32	56			323		71		63
*33	65		359		65		359	
34	66			204		314	174	
35	67		203		252		165	
36	68			336		154	263	
37	69		123			330	167	
38	70		326			241		182
39	73			275	91			179
40	74			274	81		166	
41	75			273	93		169	
42	78		220		228		168	
43	79		306		298			181
44	80		296		270		110	
45	82		325			250	362	
46	83		360		95		176	
47	84		222		267		112	
48	85			117	216			271
49	86			190		349	173	
50	87			155		230		180
51	88		301			246	358	
52	89		142		144		172	
53	92			345		272	111	
54	94		136			238		277
55	96			225		198	175	
56	97			223		219		276
57	99		115			312	171	
58	100		147		243			278
59	101			261	320			113
60	102		282		215		177	
61	103		193		297		269	
62	104		192		236			279
63	105			351		341		178
64	106		286		202		268	
65	107		280			221	357	
66	108		284		329		170	
67	109		188			128	356	
68	114		355		290		160	
69	116		251		162		196	
70	119			331	148			234
71	120		304		311		150	
72	121			339	258			348
73	125		206		218			291
74	126		205		254			347
75	127			189		354		233
76	129		201		226			332
77	130		256		195		309	
*78	131			232	131			232
79	132			237		288		253
80	135		310		149			235
81	146			186		260	346	
82	151			305		211		292
83	156		353		353		229	
84	157			324		185		350
85	159		161			262		199
86	164		194			340	212	
87	184			318	245			289
88	191		242			327		283
89	210		300		255		281	
90	240		317		257		287	
91	244		337		334		316	
*92	249			322	249			322

Die Lösungen der Schachbretter.

Tabelle 5 bis 13.

Tabelle 5.

Die Lösungen des Schachbrettes IV.

Bezeichnung nach Figur 32	Grundstellung und Stellung	Bezeichnung nach Günther, Figur 44
2 4 1 3	**1.1.2.3.4	$b_2\ d_5\ e_3\ c_6$
3 1 4 2	**1.5.6.7.8	$d_3\ c_2\ b_6\ e_5$

Tabelle 6.

Die Lösungen des Schachbrettes V.

Bezeichnung nach Figur 32	Grundstellung und Stellung	Bezeichnung nach Günther, Figur 44
13 5 24	1.1	$a_1\ b_4\ d_7\ e_5\ c_8$
4 2 53	1.5	$d_5\ c_4\ b_8\ e_7$
24 1 35	1.3	$b_2\ d_5\ e_3\ c_6\ a_9$
5 3 14	**2.1.2.3.4	$f_8\ a_5\ g_4\ c_8$
31 4 25	1.7	$d_3\ c_2\ b_6\ e_5\ a_9$
5 2 41	1.2	$f_6\ c_4\ a_7\ i_5$
41 3 52	**2.5.6.7.8	$f_4\ c_2\ a_5\ b_8\ g_6$
2 5 31	1.6	$a_3\ d_7\ c_6\ i_5$
52 4 13	1.4	$h_5\ a_3\ b_6\ g_4\ e_7$
3 1 42	1.8	$b_4\ e_3\ a_7\ g_6$

Tabelle 7.

Die Lösungen des Schachbrettes VI.

Bezeichnung nach Figur 32	Grundstellung und Stellung	Bezeichnung nach Günther, Figur 41
246 135	*1.1.3	$b_2\ d_5\ f_8\ g_4\ e_7\ c_{10}$
362 514	*1.2.4	$d_3\ h_7\ c_4\ b_8\ i_5\ e_9$
415 263	*1.5.7	$f_4\ c_2\ d_7\ e_5\ b_{10}\ g_8$
531 642	*1.6.8	$h_5\ b_4\ e_3\ d_9\ c_8\ i_7$

Tabelle 8.

Die Lösungen des Schachbrettes VII.

Laufende Nr.	Bezeichnung nach Figur 32	Grundstellung und Stellung	Bezeichnung nach Günther, Figur 45
1)	135 7 246	1.1	$a_1\ b_4\ d_7\ f_{10}\ g_6\ e_9\ c_{12}$
2)	47 3 625	2.1	$d_5\ h_9\ c_6\ b_{10}\ i_7\ e_{11}$
3)	52 6 374	1.5	$f_6\ c_4\ d_9\ e_7\ b_{12}\ g_{10}$
4)	64 2 753	2.5	$h_7\ b_6\ e_5\ d_{11}\ c_{10}\ i_9$
5)	241 7 536	3.1	$b_2\ d_5\ e_3\ f_{10}\ a_9\ g_8\ c_{12}$
6)	6 1 357	1.3	$f_8\ g_4\ e_7\ c_{10}\ a_{13}$
7)	51 4 736	*4.1.3	$f_6\ e_3\ a_7\ d_{11}\ g_8\ c_{12}$
8)	3 1 746	3.3	$a_5\ g_4\ d_{11}\ e_9\ c_{12}$
9)	7 4 136	*5.1.3	$h_9\ a_7\ i_5\ g_8\ c_{12}$
10)	63 7 415	6.1	$h_7\ a_5\ f_{10}\ c_8\ l_6\ e_{11}$
11)	75 3 164	6.4	$k_8\ d_7\ c_6\ i_5\ a_{11}\ g_{10}$
12)	316 2 574	3.5	$d_3\ c_2\ f_8\ e_6\ a_9\ b_{12}\ g_{10}$
13)	4 275	*4.5.7	$a_7\ g_6\ b_{12}\ e_{11}$
14)	57 2 461	2.2	$f_6\ h_9\ e_5\ c_8\ a_{11}\ n_7$
15)	62 5 147	2.3	$h_7\ c_4\ b_8\ i_5\ e_9\ a_{13}$
16)	72 4 615	*5.2.4	$k_8\ c_4\ a_7\ b_{10}\ l_6\ e_{11}$
17)	4 1 526	6.3	$b_6\ g_4\ a_9\ i_7\ c_{12}$
18)	413 6 275	3.7	$f_4\ c_2\ a_5\ d_9\ g_6\ b_{12}\ e_{11}$
19)	5 2 637	1.7	$d_7\ e_5\ b_{10}\ g_8\ a_{13}$
20)	27 5 316	6.2	$a_3\ h_9\ b_8\ e_7\ l_6\ c_{12}$
21)	61 3 572	6.7	$h_7\ e_3\ c_6\ a_9\ b_{12}\ l_8$
22)	73 6 251	1.2	$k_8\ a_5\ d_9\ g_6\ c_{10}\ n_7$
23)	5 2 613	3.2	$d_7\ e_5\ b_{10}\ l_6\ i_9$
24)	514 7 362	6.6	$h_5\ c_2\ b_6\ f_{10}\ e_7\ a_{11}\ l_8$
25)	6 4 273	*5.5.7	$f_8\ a_7\ g_6\ b_{12}\ i_9$
26)	26 3 741	2.6	$a_3\ f_8\ c_6\ d_{11}\ e_9\ n_7$
27)	31 6 427	2.7	$b_4\ e_3\ d_9\ c_8\ i_7\ a_{13}$
28)	72 4 613	*4.2.4	$k_8\ c_4\ a_7\ b_{10}\ l_6\ i_9$
29)	6 314	3.4	$d_9\ e_7\ l_6\ g_{10}$
30)	613 5 724	6.5	$k_6\ c_2\ a_5\ b_8\ d_{11}\ i_7\ g_{10}$
31)	25 1 473	6.8	$a_3\ d_7\ g_4\ c_8\ b_{12}\ i_9$
32)	31 4 752	*5.6.8	$b_4\ e_3\ a_7\ d_{11}\ c_{10}\ l_8$
33)	5 7 142	3.6	$d_7\ f_{10}\ i_5\ e_9\ l_8$
34)	7 4 152	*4.6.8	$h_9\ a_7\ i_5\ c_{10}\ l_8$
35)	42 7 531	1.6	$d_5\ c_4\ f_{10}\ a_9\ g_8\ n_7$
36)	7 1 352	3.8	$h_9\ g_4\ e_7\ c_{10}\ l_8$
37)	724 6 135	2.4	$m_7\ a_3\ b_6\ d_9\ i_5\ g_8\ e_{11}$
38)	36 2 514	1.4	$b_4\ f_8\ e_5\ a_9\ l_6\ g_{10}$
39)	41 5 263	2.8	$d_5\ e_3\ b_8\ g_6\ a_{11}\ i_9$
40)	53 1 642	1.8	$f_6\ a_5\ g_4\ b_{10}\ e_9\ l_8$

Tabelle 9.

Die Lösungen des Schachbrettes VIII von 64 Feldern.

Laufende Nr.	Bezeichnung nach Figur 32	Grundstellung und Stellung	Bezeichnung nach Günther, Figur 45	Laufende Nr.	Bezeichnung nach Figur 32	Grundstellung und Stellung	Bezeichnung nach Günther, Figur 45
1)	1586 3724	1.1	$a_1\ f_6\ k_{10}\ d_9\ e_7\ b_{12}\ l_8\ i_{11}$	92)	8413 6275	1.8	$o_8\ d_5\ c_3\ c_6\ b_{10}\ i_7\ a_{13}$
2)	683 7425	2.1	$h_7\ k_{10}\ c_6\ d_{11}\ e_9\ l_8\ g_{12}$	91)	316 2574	2.8	$b_4\ e_3\ d_9\ g_6\ c_{10}\ a_{13}$
3)	746 8253	2.5	$k_8\ b_6\ d_9\ f_{12}\ i_7\ e_{11}\ l_{10}$	90)	253 1746	2.4	$a_3\ d_7\ c_6\ i_5\ b_{12}\ g_{10}$
4)	58 2463	1.5	$d_7\ h_{11}\ g_6\ e_9\ c_{12}\ l_{10}$	89)	41 7536	1.4	$b_6\ g_4\ d_{11}\ c_{10}\ i_9$
5)	2468 3175	3.1	$b_2\ d_5\ f_8\ h_{11}\ e_7\ l_6\ a_{13}\ g_{12}$	88)	7531 6824	3.8	$m_7\ f_6\ a_5\ g_4\ b_{10}\ d_{13}\ l_8$
6)	571 3864	4.1	$f_6\ h_9\ g_4\ e_7\ d_{13}\ c_{12}\ i_{11}$	87)	428 6135	4.8	$d_5\ c_4\ h_{11}\ b_{10}\ l_6\ i_9$
7)	4 1863	5.1	$a_7\ i_5\ d_{13}\ c_{12}\ l_{10}$	86)	5 8136	5.8	$b_8\ f_{12}\ l_6\ i_9$
8)	617 4835	6.1	$h_7\ e_3\ f_{10}\ c_8\ d_{13}\ i_9\ g_{12}$	85)	382 5164	6.8	$b_4\ k_{10}\ e_5\ a_9\ l_6\ c_{12}$
9)	83 1475	7.1	$k_{10}\ c_6\ i_5\ e_9\ a_{13}\ g_{12}$	84)	16 8524	7.8	$e_3\ d_9\ f_{12}\ c_{10}\ l_4$
10)	736 8514	8.1	$k_8\ a_5\ d_9\ f_{12}\ c_{10}\ n_7\ i_{11}$	83)	263 1485	8.8	$a_3\ f_8\ c_6\ i_5\ e_9\ b_{14}$
11)	58 1463	9.1	$d_7\ h_{11}\ i_5\ e_9\ c_{12}\ l_{10}$	82)	41 8536	9.8	$b_6\ g_4\ f_{12}\ c_{10}\ i_9$
12)	.861 3574	8.4	$m_9\ f_8\ g_4\ e_7\ c_{10}\ a_{13}\ i_{11}$	81)	138 6425	8.5	$c_2\ a_5\ h_{11}\ b_{10}\ e_9\ l_4$
13)	3175 8246	6.5	$d_3\ c_2\ h_9\ b_8\ f_{12}\ i_7\ g_{10}\ e_{13}$	80)	6824 1753	6.4	$k_6\ m_9\ c_4\ a_7\ i_5\ b_{12}\ e_{11}$
14)	528 1746	*10.1.3	$f_6\ c_4\ h_{11}\ i_5\ b_{12}\ g_{10}\ e_{13}$	79)	471 8253	*10.6.8	$d_5\ h_9\ g_4\ f_{12}\ i_7\ e_{11}$
15)	6471	2.2	$b_{10}\ e_9\ a_{13}\ p_8$	78)	3528	2.7	$e_7\ c_{10}\ l_4$
16)	71 4286	6.7	$h_9\ g_4\ c_8\ i_7\ b_{14}\ e_{13}$	77)	28 5713	6.2	$c_4\ h_{11}\ a_9\ b_{12}\ n_7$
17)	84 1726	11.1	$k_{10}\ a_7\ i_5\ b_{12}\ l_8\ e_{13}$	76)	15 8273	11.8	$e_3\ b_8\ f_{12}\ i_7\ a_{13}$
18)	625 8174	12.1	$h_7\ c_4\ b_8\ f_{12}\ l_6\ a_{13}\ i_{11}$	75)	374 1825	12.8	$b_4\ h_9\ a_7\ i_5\ d_{13}\ l_8$
19)	7 1485	4.7	$f_{10}\ i_5\ e_9\ b_{14}\ g_{12}$	74)	2 8514	4.2	$e_5\ f_{12}\ c_{10}\ n_7$
20)	5184	5.7	$a_9\ l_6\ b_{14}\ i_{11}$	73)	4815	5.2	$c_8\ d_{13}\ n_7$
21)	41 8572	9.6	$b_6\ g_4\ f_{12}\ c_{10}\ a_{13}\ n_9$	72)	58 1427	9.3	$d_7\ h_{11}\ i_5\ e_9\ l_4$
22)	2 8571	1.2	$e_5\ f_{12}\ c_{10}\ a_{13}\ p_8$	71)	7 1428	1.7	$f_{10}\ i_5\ e_9\ l_8$
23)	81 4752	5.6	$k_{10}\ g_4\ c_8\ b_{12}\ e_{11}\ n_9$	70)	18 5247	5.3	$e_3\ h_{11}\ a_9\ i_7\ g_{10}$
24)	5724	12.4	$a_9\ b_{12}\ l_8\ i_{11}$	69)	4275	12.5	$c_8\ i_7\ a_{13}$
25)	2 4175	11.2	$e_5\ c_8\ l_6\ a_{13}\ g_{12}$	68)	7 5824	11.7	$f_{10}\ a_9\ d_{13}\ l_8$
26)	728 5146	11.3	$k_8\ c_4\ h_{11}\ a_9\ l_6\ g_{10}\ e_{13}$	67)	271 4853	11.6	$a_3\ h_9\ g_4\ c_8\ d_{13}\ e_{11}$
27)	6415	7.2	$b_{10}\ e_9\ n_7\ g_{12}$	66)	3584	7.7	$e_7\ c_{10}\ b_{14}$
28)	847 1625	3.4	$m_9\ b_6\ f_{10}\ i_5\ a_{11}\ l_8\ g_{12}$	65)	152 8374	3.5	$c_2\ d_7\ e_5\ f_{12}\ g_8\ a_{13}$
29)	4158 2736	4.5	$f_4\ c_2\ d_7\ h_{11}\ g_6\ b_{12}\ i_9\ e_{13}$	64)	5841 7263	4.4	$h_3\ m_9\ b_6\ g_4\ d_{11}\ i_7\ c_{12}$
30)	6372	8.6	$b_{10}\ g_8\ a_{13}\ n_9$	63)	3627	8.3	$e_7\ a_{11}\ l_4$
31)	258 6137	7.3	$a_3\ d_7\ h_{11}\ b_{10}\ l_6\ i_9\ c_{14}$	62)	741 3862	7.6	$k_8\ b_6\ g_4\ e_7\ d_{13}\ c_{12}$
32)	73 6815	9.2	$h_9\ c_6\ b_{10}\ d_{13}\ n_7\ g_{12}$	61)	26 3184	9.7	$c_4\ d_9\ e_7\ l_6\ b_{14}$
33)	51	1.6	$e_{11}\ p_8$	60)	48	1.3	g_{10}
34)	5 1863	12.7	$b_8\ i_5\ d_{13}\ c_{12}\ l_{10}$	59)	4 8136	12.2	$a_7\ f_{12}\ l_6\ i_9$
35)	85 7136	11.4	$k_{10}\ b_8\ d_{11}\ l_6\ i_9\ e_{13}$	58)	14 2863	11.5	$e_3\ a_7\ g_6\ d_{13}\ c_{12}$
36)	6 1357	3.3	$d_9\ i_5\ g_8\ e_{11}\ c_{14}$	57)	3 8642	3.6	$c_6\ f_{12}\ a_{11}.\ g_{10}$
37)	615 2837	6.3	$h_7\ e_3\ b_8\ g_6\ d_{13}\ i_9\ c_{14}$	56)	384 7162	6.6	$b_4\ k_{10}\ a_7\ d_{11}\ l_6\ c_{12}$
38)	82 7135	*10.2.4	$k_{10}\ e_5\ d_{11}\ l_6\ i_9\ g_{12}$	55)	17 2864	*10.5.7	$e_3\ f_{10}\ g_6\ d_{13}\ c_{12}$
39)	3 1752	4.6	$c_6\ i_5\ b_{12}\ e_{11}\ n_9$	54)	6 8247	4.3	$d_9\ f_{12}\ i_7\ g_{10}$
40)	718 5263	12.6	$k_8\ e_3\ h_{11}\ a_9\ i_7\ c_{12}\ l_{10}$	53)	281 4786	12.3	$a_3\ k_{10}\ g_4\ c_8\ b_{12}\ i_9$
41)	38 2516	3.2	$a_5\ h_{11}\ g_6\ c_{10}\ n_7\ e_{13}$	52)	61 7483	3.7	$f_8\ g_4\ d_{11}\ e_9\ b_{14}$
42)	52 6138	2.3	$d_7\ e_5\ b_{10}\ l_6\ i_9\ a_{15}$	51)	47 3861	2.6	$b_6\ f_{10}\ e_7\ d_{13}\ c_{12}$
43)	3 1682	8.7	$c_6\ i_5\ a_{11}\ b_{14}\ n_9$	50)	6 8317	8.2	$d_9\ f_{12}\ g_8\ n_7$
44)	813 6275	9.4	$m_9\ c_3\ c_6\ b_{10}\ i_7\ a_{13}\ g_{12}$	49)	186 3724	9.5	$c_2\ k_{10}\ d_9\ e_7\ b_{12}\ l_8$
45)	5 7263	5.4	$b_8\ d_{11}\ i_7\ c_{12}\ l_{10}$	48)	4 2736	5.5	$a_7\ g_6\ b_{12}\ i_9$
46)	53 1726	7.4	$d_7\ c_6\ i_5\ b_{12}\ l_8\ e_{13}$	47)	46 8273	7.5	$b_6\ d_9\ f_{12}\ i_7\ a_{13}$

Tabelle 10.

Lösungen des Schachbrettes IX von 81 Feldern. Erste Hälfte.

Bezeichnung nach Figur 32	Grundstellung und Stellung	Bezeichnung nach Günther, Figur 46	Laufende Nr.	Bezeichnung nach Figur 32	Grundstellung und Stellung	Bezeichnung nach Günther, Figur 46
368 2 4975	1.1	$a_1\ b_4\ f_8\ h_{11}\ g_6\ e_9\ d_{15}\ c_{14}\ i_{13}$	45)	2617 5 3948	*28.1.3	$b_2\ h_7\ e_3\ f_{10}\ a_9\ g_8\ d_{15}\ i_{11}\ c_{16}$
72 8 5946	2.1	$h_9\ e_5\ f_{12}\ c_{10}\ d_{15}\ i_{11}\ g_{14}$	46)	9 5 8473	29.1	$k_{12}\ a_9\ d_{13}\ g_{10}\ c_{14}\ n_{11}$
86 9 2574	3.1	$k_{10}\ d_9\ h_{13}\ i_4\ e_{11}\ c_{14}\ l_{12}$	47)	31 8 4975	30.1	$a_5\ g_4\ f_{12}\ e_9\ d_{15}\ c_{14}\ i_{13}$
28 6 9357	2.5	$d_5\ c_4\ h_{11}\ b_{10}\ f_{14}\ i_9\ g_{12}\ e_{15}$	48)	93 5 8417	31.1	$m_{11}\ c_6\ a_9\ d_{13}\ g_{10}\ p_8\ e_{15}$
63 9 2857	4.1	$f_8\ c_6\ h_{13}\ i_7\ b_{14}\ g_{12}\ e_{15}$	49)	751 9 4683	32.1	$k_8\ d_7\ g_4\ h_{13}\ e_9\ c_{12}\ a_{15}\ n_{11}$
8 2 5897	5.1	$h_{11}\ g_6\ c_{10}\ i_9\ b_{16}\ e_{15}$	50)	8 1 4639	12.7	$h_{11}\ i_5\ e_9\ c_{12}\ l_{10}\ a_{17}$
73 8 2596	6.1	$h_9\ c_6\ f_{12}\ i_7\ e_{11}\ b_{16}\ g_{14}$	51)	96 3 1485	33.1	$m_{11}\ d_9\ e_7\ l_6\ g_{10}\ a_{15}\ i_{13}$
9 2 5863	7.1	$k_{12}\ g_6\ c_{10}\ b_{14}\ e_{13}\ n_{11}$	52)	814 7 9635	34.1	$m_9\ e_3\ a_7\ d_{11}\ f_{14}\ c_{12}\ l_{10}\ i_{13}$
83 9 7526	8.1	$k_{10}\ c_6\ h_{13}\ b_{12}\ e_{11}\ n_9\ g_{14}$	53)	53 9 6417	35.1	$d_7\ c_6\ h_{13}\ a_{11}\ g_{10}\ p_8\ e_{15}$
26 9 3847	1.5	$f_6\ c_4\ d_9\ h_{13}\ g_8\ b_{14}\ i_{11}\ e_{15}$	54)	69 3 1475	36.1	$f_8\ k_{12}\ e_7\ l_6\ g_{10}\ c_{14}\ i_{13}$
72 6 3948	5.5	$h_9\ e_5\ b_{10}\ g_8\ d_{15}\ i_{11}\ c_{16}$	55)	953 8 4716	20.4	$o_{10}\ d_7\ c_6\ f_{12}\ e_9\ a_{13}\ p_8\ g_{14}$
9 3 8246	9.1	$k_{12}\ e_7\ d_{13}\ l_8\ i_{11}\ g_{14}$	56)	63 5 8147	31.4	$f_8\ c_6\ a_9\ d_{13}\ n_7\ i_{11}\ e_{15}$
4 2863	10.1	$c_8\ i_7\ b_{14}\ e_{13}\ n_{11}$	57)	7 4185	35.4	$d_{11}\ e_9\ n_7\ a_{15}\ i_{13}$
92 6 8374	7.5	$m_{11}\ e_5\ b_{10}\ d_{13}\ i_9\ c_{14}\ l_{12}$	58)	4 7 1358	20.3	$a_7\ d_{11}\ l_6\ i_9\ g_{12}\ c_{16}$
6 4 2837	11.1	$d_9\ c_8\ i_7\ b_{14}\ l_{10}\ e_{15}$				
29 7 4835	3.5	$h_7\ c_4\ k_{12}\ d_{11}\ e_9\ b_{14}\ l_{10}\ i_{13}$	59)	3147 9 2586	27.5	$d_3\ c_2\ b_6\ f_{10}\ h_{13}\ i_7\ e_{11}\ a_{15}\ g_{14}$
42 7 9358	6.5	$b_6\ e_5\ d_{11}\ f_{14}\ i_9\ g_{12}\ c_{16}$	60)	68 5 2497	*28.5.7	$f_8\ h_{11}\ a_9\ i_7\ g_{10}\ b_{16}\ e_{15}$
8 3975	4.5	$f_{12}\ g_8\ d_{15}\ c_{14}\ i_{13}$	61)	72 8 6495	15.5	$h_9\ e_5\ f_{12}\ a_{11}\ g_{10}\ b_{16}\ i_{13}$
83 7 4295	12.1	$k_{10}\ c_6\ d_{11}\ e_9\ l_8\ b_{16}\ i_{13}$	62)	5 8 2469	5.3	$b_8\ f_{12}\ i_7\ g_{10}\ e_{13}\ a_{17}$
5 2 4973	11.5	$b_8\ g_6\ e_9\ d_{15}\ c_{14}\ n_{11}$	63)	84 9 7526	34.5	$k_{10}\ a_7\ h_{13}\ b_{12}\ e_{11}\ n_9\ g_{14}$
95 2 8374	10.5	$m_{11}\ b_8\ g_6\ d_{13}\ i_9\ c_{14}\ l_{12}$	64)	97 5 2864	29.5	$m_{11}\ f_{10}\ a_9\ i_7\ b_{14}\ e_{13}\ l_{12}$
46 9 2538	12.5	$k_8\ b_6\ d_9\ h_{13}\ i_7\ e_{11}\ l_{10}\ c_{16}$	65)	528 1 4796	30.7	$f_6\ c_4\ h_{11}\ i_5\ e_9\ a_{13}\ b_{16}\ g_{14}$
8 3 5926	13.1	$h_{11}\ e_7\ c_{10}\ d_{15}\ n_9\ g_{14}$	66)	7469	4.3	$b_{12}\ g_{10}\ e_{13}\ a_{17}$
9625	14.1	$f_{14}\ c_{12}\ n_9\ i_{13}$	67)	71 4 2869	2.7	$h_9\ g_4\ c_8\ i_7\ b_{14}\ e_{13}\ a_{17}$
58 2 9364	9.5	$d_7\ h_{11}\ g_6\ f_{14}\ i_9\ e_{13}\ l_{12}$	68)	82 9 6174	37.1	$k_{10}\ e_5\ h_{13}\ a_{11}\ n_7\ c_{14}\ l_{12}$
42 7 9635	8.5	$m_9\ b_6\ e_5\ d_{11}\ f_{14}\ c_{12}\ l_{10}\ i_{13}$	69)	7146	38.1	$b_{12}\ n_7\ i_{11}\ g_{14}$
53 6 9247	13.5	$d_7\ c_6\ b_{10}\ f_{14}\ l_8\ i_{11}\ e_{15}$	70)	92 4 7186	39.1	$m_{11}\ e_5\ c_8\ b_{12}\ n_7\ a_{15}\ g_{14}$
9 7246	14.5	$h_{13}\ b_{13}\ l_8\ i_{11}\ g_{14}$	71)	4 1 7268	17.3	$a_7\ i_5\ b_{12}\ l_8\ e_{13}\ c_{16}$
			72)	627 1 4859	1.7	$h_7\ c_4\ f_{10}\ i_5\ e_9\ b_{14}\ g_{12}\ a_{17}$
17 9 6358	15.1	$b_2\ d_5\ e_3\ f_{10}\ h_{13}\ a_{11}\ i_8\ g_{12}\ c_{16}$	73)	9 5 1847	*40.1.3	$k_{12}\ a_9\ l_6\ b_{14}\ i_{11}\ e_{15}$
71 3 9685	16.1	$h_9\ g_4\ e_7\ f_{14}\ c_{12}\ a_{15}\ i_{13}$	74)	81 4 7529	13.7	$k_{10}\ g_4\ c_8\ b_{12}\ e_{11}\ n_9\ a_{17}$
83 9 6157	17.1	$k_{10}\ c_6\ h_{13}\ a_{11}\ n_7\ g_{12}\ e_{15}$	75)	5 9247	*41.1.3	$a_9\ f_{14}\ l_8\ i_{11}\ e_{15}$
97 3 1685	18.1	$m_{11}\ f_{10}\ e_7\ l_6\ c_{12}\ a_{15}\ i_{13}$	76)	2 4 9751	10.6	$e_5\ c_8\ f_{14}\ a_{13}\ g_{12}\ r_9$
5 3168	*19.1.3	$a_9\ g_8\ n_7\ e_{13}\ c_{16}$	77)	5 1 9724	42.1	$b_8\ i_5\ f_{14}\ a_{13}\ n_9\ l_{12}$
71 3 8649	6.7	$f_6\ h_9\ g_4\ e_7\ d_{13}\ c_{12}\ i_{11}\ a_{17}$	78)	2 9741	7.6	$g_6\ f_{14}\ a_{13}\ i_{11}\ r_9$
4 1 3968	15.3	$a_7\ i_5\ g_8\ d_{15}\ e_{13}\ c_{16}$	79)	91 8 4275	37.4	$m_{11}\ g_4\ f_{12}\ e_9\ l_8\ c_{14}\ i_{13}$
9 3 6418	20.1	$k_{12}\ e_7\ a_{11}\ g_{10}\ p_8\ c_{16}$	80)	2 5 7418	31.2	$e_5\ a_9\ b_{12}\ g_{10}\ p_8\ c_{16}$
4 8136	21.1	$c_8\ d_{13}\ n_7\ l_{10}\ g_{14}$	81)	8 1475	38.4	$f_{12}\ l_6\ g_{10}\ c_{14}\ i_{13}$
81 3 6974	22.1	$k_{10}\ g_4\ e_7\ a_{11}\ d_{15}\ c_{14}\ l_{12}$	82)	5 8 1427	39.4	$b_8\ f_{12}\ l_6\ g_{10}\ n_9\ e_{15}$
9 6374	23.1	$h_{13}\ a_{11}\ i_9\ c_{14}\ l_{12}$	83)	7 1 4258	24.3	$f_{10}\ i_5\ e_9\ l_8\ g_{12}\ c_{16}$
6 9 3147	24.1	$d_9\ h_{13}\ g_8\ n_7\ i_{11}\ e_{15}$	84)	2 4815	26.2	$g_6\ e_9\ b_{14}\ p_8\ i_{13}$
74	25.1	$c_{14}\ l_{12}$	85)	4 1825	43.1	$c_8\ l_6\ b_{14}\ n_9\ i_{13}$
94 1 8637	26.1	$m_{11}\ a_7\ i_5\ d_{13}\ c_{12}\ l_{10}\ e_{15}$	86)	724 8 1596	22.7	$k_8\ c_4\ a_7\ f_{12}\ l_6\ e_{11}\ b_{16}\ g_{14}$
13 7 9485	27.1	$h_7\ e_3\ c_6\ d_{11}\ f_{14}\ g_{10}\ a_{15}\ i_{13}$	87)	8 5 9164	44.1	$h_{11}\ a_9\ f_{14}\ n_7\ e_{13}\ l_{12}$
7 4 8359	5.7	$f_{10}\ c_8\ d_{13}\ i_9\ g_{12}\ a_{17}$	88)	6 4159	11.3	$b_{10}\ c_9\ n_7\ g_{12}\ a_{17}$

Tabelle 10.

Lösungen des Schachbrettes IX von 81 Feldern. Erste Hälfte (Fortsetzung und Schlufs).

Laufende Nr.	Bezeichnung nach Figur 32	Grundstellung und Stellung	Bezeichnung nach Günther
89)	3742 9 5186	43.2	$d_3\ k_8\ b_6\ e_5\ h_{13}\ c_{10}\ n_7\ a_{15}\ g_{14}$
90)	6158	26.3	$a_{11}\ n_7\ g_{12}\ c_{16}$
91)	8 5 9162	29.6	$h_{11}\ a_9\ f_{14}\ n_7\ e_{13}\ p_{10}$
92)	91 5 2864	44.4	$m_{11}\ g_4\ a_9\ i_7\ b_{14}\ e_{13}\ l_{12}$
93)	4 2 5861	11.2	$a_7\ g_6\ c_{10}\ b_{14}\ e_{13}\ r_9$
94)	824 9 7516	33.2	$m_9\ c_4\ a_7\ h_{13}\ b_{12}\ e_{11}\ p_8\ g_{14}$
95)	47 9 2516	18.2	$b_6\ f_{10}\ h_{13}\ i_7\ e_{11}\ p_8\ g_{14}$
96)	61 9 2574	45.1	$f_8\ g_4\ h_{13}\ i_7\ e_{11}\ c_{14}\ l_{12}$
97)	4 9 1572	32.6	$a_7\ h_{13}\ l_6\ e_{11}\ c_{14}\ p_{10}$
98)	9 2 5147	39.2	$k_{12}\ g_6\ c_{10}\ n_7\ i_{11}\ e_{15}$
99)	925 8 1746	21.4	$o_{10}\ c_4\ b_8\ f_{12}\ l_6\ a_{13}\ i_{11}\ g_{14}$
100)	41 8 6275	25.4	$b_6\ g_4\ f_{12}\ a_{11}\ l_8\ c_{14}\ i_{13}$
1)	2 8 6175	24 4	$e_5\ f_{12}\ a_{11}\ n_7\ c_{14}\ i_{13}$
2)	8 5 2617	*19.2.4	$h_{11}\ a_9\ i_7\ c_{12}\ p_8\ e_{15}$
3)	62 5 7148	31.3	$f_8\ e_5\ a_9\ b_{12}\ n_7\ i_{11}\ c_{16}$
4)	4 1 7528	35.3	$a_7\ i_5\ b_{12}\ e_{11}\ n_9\ c_{16}$
5)	8 2 4175	17.4	$h_{11}\ g_6\ e_9\ n_7\ e_{14}\ i_{13}$
6)	4136 9 2857	30.5	$f_1\ c_2\ a_3\ d_9\ h_{13}\ i_7\ b_{14}\ g_{12}\ e_{15}$
7)	52 9 7386	16.5	$d_7\ e_5\ h_{13}\ b_{12}\ i_9\ a_{15}\ g_{14}$
8)	8 2 7369	6.3	$h_{11}\ g_6\ b_{12}\ i_9\ e_{13}\ a_{17}$
9)	9 2 6887	22.5	$k_{12}\ g_6\ a_{11}\ b_{14}\ l_{10}\ e_{15}$
110)	79 2 6835	23.5	$h_9\ k_{12}\ g_6\ a_{11}\ b_{14}\ l_{10}\ i_{13}$
1)	96 3 7285	32.5	$m_{11}\ d_9\ e_7\ b_{12}\ l_8\ a_{15}\ i_{13}$
2)	258 1 3697	27.7	$a_3\ d_7\ h_{11}\ i_5\ g_8\ c_{12}\ b_{16}\ e_{15}$
3)	73 1 8596	16.7	$h_9\ c_6\ i_5\ d_{13}\ e_{11}\ b_{16}\ g_{14}$
4)	9 1 5863	42.6	$k_{12}\ i_5\ c_{10}\ b_{14}\ e_{13}\ n_{11}$
5)	8536	46.1	$d_{13}\ e_{11}\ l_{10}\ g_{14}$
6)	83 9 7516	36.2	$k_{10}\ c_6\ h_{13}\ b_{12}\ e_{11}\ p_8\ g_{14}$
7)	93 6 8157	39.3	$m_{11}\ c_6\ b_{10}\ d_{13}\ n_7\ g_{12}\ e_{15}$
8)	5 1 8637	43.4	$b_8\ i_5\ d_{13}\ c_{12}\ l_{10}\ e_{15}$
9)	615 2 8379	2.3	$h_7\ e_3\ b_8\ g_6\ d_{13}\ i_9\ c_{14}\ a_{17}$
120)	9 5 8273	44.6	$k_{12}\ a_9\ d_{13}\ l_8\ c_{14}\ n_{11}$
1)	7 3825	45.5	$d_{11}\ g_8\ b_{14}\ n_9\ i_{13}$
2)	39 2 5817	21.2	$a_5\ k_{12}\ g_6\ c_{10}\ b_{14}\ p_8\ e_{15}$
3)	8571	9.2	$d_{13}\ e_{11}\ c_{14}\ r_9$
4)	7 1825	46.2	$d_{11}\ l_6\ b_{14}\ n_9\ i_{13}$
5)	82 5 1973	44.7	$k_{10}\ e_5\ a_9\ l_6\ d_{15}\ c_{14}\ n_{11}$
6)	7913	29.2	$b_{12}\ d_{15}\ p_8\ n_{11}$
7)	7 1359	9.3	$d_{11}\ l_6\ i_9\ g_{12}\ a_{17}$
8)	3 1 7529	14.7	$c_6\ i_5\ b_{12}\ e_{11}\ n_9\ a_{17}$
9)	93 1 8257	38.3	$m_{11}\ c_6\ i_5\ d_{13}\ l_8\ g_{12}\ e_{15}$
130)	713 9 6852	25.6	$k_8\ e_3\ c_6\ h_{13}\ a_{11}\ b_{14}\ g_{12}\ p_{10}$
1)	6 9 2853	37.6	$d_9\ h_{13}\ i_7\ b_{14}\ g_{12}\ n_{11}$
2)	8 5 2936	*41.5.7	$h_{11}\ a_9\ i_7\ d_{15}\ l_{10}\ g_{14}$

Laufende Nr.	Bezeichnung nach Figur 32	Grundstellung und Stellung	Bezeichnung nach Gü[nther]
133)	4736 9 1852	23.6	$f_4\ k_8\ a_3\ d_9\ h_{13}\ l_6$
4)	8 2 5961	10.2	$h_{11}\ g_8\ c_{1}$
5)	6 1925	42.7	$b_{10}\ l_6$
6)	2951	7.2	i_7
7)	52 9 1386	46.3	$d_7\ e_5\ h_{13}\ l_6$
8)	688	45.6	
9)	6831	3.6	a_{11}
140)	92 5 8136	*40.2.4	$m_{11}\ e_5\ a_9\ d_{12}$
1)	6 1358	21.3	$b_{10}\ l_6$
2)	6 3 1852	22.6	$d_9\ e_7\ l_6$
3)	815 7 2639	13.3	$m_9\ e_3\ b_8\ d_{11}\ i_7$
4)	53 1 6297	34.7	$d_7\ c_6\ i_5\ a_{11}$
5)	7269	8.3	b_{12}
6)	936 2 7518	20.2	$o_{10}\ a_8\ d_9\ g_5\ b_{12}$
7)	53 1 6827	33.4	$d_7\ c_6\ i_5\ a_{11}$
8)	7286	36.4	b_{12}
9)	8 1 3627	18.4	$h_{11}\ i_5\ g_4$
150)	5164 2 8397	15.7	$h_5\ c_1\ f_8\ a_7\ g_6\ d_{12}$
1)	84 2 7963	26.5	$k_{10}\ a_7\ g_8\ b_{12}$
2)	6 3 7249	12.3	$d_9\ e_7\ b_{12}$
3)	241 7 9368	16.3	$a_3\ b_6\ g_4\ d_{11}\ f_{14}$
4)	9 7 3168	18.3	$k_{12}\ d_{11}\ g_4$
5)	61 3 7948	27.3	$f_8\ g_4\ e_7\ b_{12}$
6)	9 3 8471	14.6	$k_{12}\ e_7\ d_{13}$
7)	7 4138	33.3	$d_{11}\ e_9$
8)	81 4 7963	43.6	$k_{10}\ g_4\ c_8\ b_{12}$
9)	7 9364	46.5	$d_{11}\ f_{14}$
160)	3 7 4196	32.7	$c_8\ d_{11}\ e_9$
1)	9164	45.2	f_{14}
2)	91 6 8374	42.4	$m_{11}\ g_4\ b_{10}\ d_{11}$
3)	6 3 7418	35.2	$d_9\ e_7\ b_{12}$
4)	316 2 9748	30.3	$b_4\ e_3\ d_9\ g_6\ f_{14}$
5)	8 2479	1.3	$f_{12}\ i_7$
6)	7 2 8649	4.7	$f_{10}\ g_6\ d_{11}$
7)	69 2 8147	38.2	$f_8\ k_{12}\ g_6\ d_{11}$
8)	7 1428	36.3	$d_{11}\ l_6$
9)	2481	8.2	i_7
170)	4182	34.6	e_9
1)	84 2 9617	25.2	$k_{10}\ a_7\ g_8\ f_{14}$
2)	7 9261	3.2	$d_{11}\ f_{14}$
3)	6 2 9147	37.2	$d_9\ g_6\ f_{14}$
4)	714	23.2	
5)	94 2 8617	24.2	$m_{11}\ a_7\ g_8\ d_{11}$
6)	6 8 2417	17.2	$d_9\ f_{12}\ i_7$

Tabelle 11.

Lösungen des Schachbrettes X von 100 Feldern (erste Hälfte).

Laufende Nr.	Bezeichnung nach Figur 34	Grundstellung und Stellung	Laufende Nr.	Bezeichnung nach Figur 34	Grundstellung und Stellung	Laufende Nr.	Bezeichnung nach Figur 34	Grundstellung und Stellung
1	02579 48136	1.1	41	06817 42953	8.5	81	14970 36258	40.3
2	86 93147	2.1	42	27 13594	21.5	82	15269 08473	45.1
3	74	3.1	43	52 97413	30.1	83	74038	46.1
4	869 31475	4.1	44	951 84273	18.5	84	97 48306	47.1
5	03582 97146	5.1	45	07168 24935	2.5	85	720 84936	48.1
6	691 84275	6.1	46	9 24835	3.5	86	6 39084	49.1
7	2 81475	7.1	47	85 29364	1.5	87	807 42963	50.1
8	5 81427	8.1	48	368 14952	29.5	88	69 02473	51.1
9	7 14258	9.1	49	5924	27.5	89	926 83047	52.1
10	24815	10.1	50	86 29514	31.1	90	16428 39750	25.6
11	41825	11.1	51	418 29635	5.5	91	70 39258	39.3
12	847 92516	12.1	52	516 93842	15.5	92	827 93504	53.1
13	61 92574	13.1	53	8 63924	14.5	93	930 74258	41.3
14	9 25147	14.1	54	28 13964	20.5	94	50 84273	54.1
15	968 24175	15.1	55	4936	22.5	95	2 03748	46.3
16	04619 73825	13.5	56	82 93641	32.1	96	17286 49053	55.1
17	93 18257	16.1	57	963 18524	28.5	97	480 59263	56.1
18	716 92853	6.5	58	08497 31625	30.5	98	582 03649	21.3
19	92 61358	17.1	59	516 92473	10.5	99	928 53064	57.1
20	6 31852	18.1	60	29 74136	31.5	100	30 48526	58.1
21	958 13627	19.1	61	613 79425	12.5	1	18074 29635	59.1
22	05369 28147	20.1	62	27 14953	23.5	2	279 35046	60.1
23	71428	21.1	63	09468 27135	32.5	3	96 30475	61.1
24	86 29147	22.1	64	647 18253	25.5	4	490 35726	62.1
25	96 82417	23.1	65	13579 02468	*33.1.8	5	502 96374	63.1
26	716 82493	9.5	66	728 59064	34.1	6	29 30746	64.1
27	26 81493	24.1	67	94 85026	35.1	7	79 02463	65.1
28	41 82963	16.5	68	864 90572	36.1	8	629 74035	66.1
29	93 82461	25.1	69	968 52074	37.1	9	93 04752	67.1
30	827 31946	26.1	70	14609 58273	38.1	110	19268 30475	44.4
31	9 63147	27.1	71	39 28570	32.6	1	630 28574	53.4
32	49 73162	28.1	72	83 70259	17.8	2	724 80536	47.4
33	05861 37942	19.5	73	706 92538	39.1	3	20584 97316	59.5
34	926 83147	29.1	74	36 92058	40.1	4	24179 63085	68.1
35	06157 93824	4.5	75	52 96038	41.1	5	85 96307	57.2
36	358 19427	26.5	76	8 20369	9.3	6	693 50817	69.1
37	97 14258	24.5	77	639	24.7	7	708 31695	48.7
38	417 92853	7.5	78	92 58036	42.1	8	18 60359	16.3
39	71 85293	17.5	79	809 36275	43.1	9	805 96137	70.1
40	815 92473	11.5	80	39 75206	44.1	120	19 63075	71.1

Tabelle 11 (Fortsetzung).

Lösungen des Schachbrettes X von 100 Feldern (erste Hälfte).

Laufende Nr.	Bezeichnung nach Figur 34	Grundstellung und Stellung	Laufende Nr.	Bezeichnung nach Figur 34	Grundstellung und Stellung	Laufende Nr.	Bezeichnung nach Figur 34	Grundstellung und Stellung
121	24830 97516	72.1	161	28174 69053	85.2	201	35291 68074	76.2
2	9 61570	15.2	2	94 60357	69.3	2	6 07418	64.3
3	5 91607	37.2	3	571 30649	23.3	3	41807	35.2
4	973 16850	19.2	4	91 60374	86.1	4	714 08692	34.7
5	25190 84736	73.1	5	29185 30746	35.4	5	91 62084	74.2
6	890 84716	74.1	6	368 15704	40.4	6	8024	73.2
7	703 69184	75.1	7	80 46157	37.4	7	820 71469	5.3
8	40 39681	67.6	8	518 40736	42.4	8	9 61740	6.2
9	90 84136	76.1	9	63704	41.4	9	71460	7.2
130	3 04186	77.1	170	613 07485	66.4	210	49 02716	89.1
1	803 69147	*78.1.3	1	30 41857	57.4	1	6172	82.6
2	714	79.1	2	1 85047	52.4	2	35920 74186	86.4
3	7 31649	22.3	3	40 85713	49.4	3	4 71860	8.2
4	9 46137	80.1	4	80 41753	34.4	4	41 72680	23.2
5	13 69704	54.2	5	704 15863	55.4	5	6 02718	60.3
6	40	18.6	6	13 86405	46.4	6	36051 97248	48.3
7	7 03649	20.3	7	41 30685	60.4	7	8 17429	22.7
8	47 03169	14.3	8	30479 26815	63.5	8	251 90847	73.3
9	60 31479	2.3	9	681 74295	39.5	9	95 08471	56.6
140	1 37049	29.3	180	95 18427	50.5	220	18407	42.2
1	3 07149	27.3	1	751 96824	43.5	1	420 97581	65.6
2	941 86307	52.2	2	91 52864	38.5	2	91 57208	47.2
3	70	29.2	3	31479 25860	30.6	3	814 70295	56.7
4	61 37048	52.3	4	80 97526	87.1	4	5 02479	1.3
5	26137 94850	28.6	5	649 08572	84.6	5	51 40792	55.7
6	75 09483	81.1	6	85 20974	81.7	6	90247	76.3
7	97 58804	58.2	7	95 08427	83.3	7	2 07419	31.7
8	830 49157	70.3	8	728 64905	67.2	8	914 70258	42.3
9	5 09147	80.3	9	48 05926	75.7	9	24 70815	83.4
150	938 04175	71.4	190	58 04692	49.7	230	51	50.6
1	27160 94853	82.1	1	90 25864	88.1	1	8 14750	16.2
2	368 14059	19.3	2	6 25804	62.2	2	37048 15926	*78.5.7
3	508 14639	26.7	3	849 75206	61.2	3	9 15286	75.5
4	9 46831	36.6	4	52 97046	86.2	4	81 46925	70.5
5	18 40396	50.7	5	9 60247	77.3	5	5 16924	80.5
6	9 40386	83.1	6	958 47026	69.4	6	246 90518	62.3
7	80 94613	84.1	7	35086 27149	26.3	7	8 05916	79.7
8	1 40369	8.3	8	94 68271	55.6	8	61	54.6
9	905 14683	85.1	9	6 47182	85.5	9	15960	18.2
160	38 04615	68.4	200	281 74690	25.2	240	9 08516	90.1

Tabelle 11 (Schlufs).

Lösungen des Schachbrettes X von 100 Feldern (erste Hälfte).

Laufende Nr.	Bezeichnung nach Figur 34	Grundstellung und Stellung	Laufende Nr.	Bezeichnung nach Figur 34	Grundstellung und Stellung	Laufende Nr.	Bezeichnung nach Figur 34	Grundstellung und Stellung
241	37285 90641	38.6	282	41396 85207	60.2	323	46825 19703	38.2
2	6 90514	88.2	3	509 68273	88.5	4	7 13509	32.7
3	37415 96028	58.3	4	29 68307	66.2	5	30915	84.7
4	9 06825	91.1	5	92 68370	31.6	6	31 79205	45.2
5	20 91586	87.3	6	792 85306	64.2	7	52 09713	88.6
6	6851	51.6	7	6 20835	90.4	8	931 82570	20.2
7	9 51860	11.2	8	30852	79.6	9	52 07318	66.3
8	61580	10.2	9	802 79635	87.5	330	47025 86931	37.6
9	80 91526	*92.1.3	290	963 02857	68.3	1	35 81926	70.7
250	6251	45.6	1	42086 19753	73.5	2	86 19253	76.5
1	925 14086	69.2	2	96 83175	82.5	3	139 68520	3.6
2	41 50268	35.3	3	581 36970	28.2	4	08526	91.3
3	38049 15726	79.5	4	70369	7.3	5	62 08359	13.7
4	251 90647	74.3	5	6 03179	4.3	6	58093	36.7
5	79 05146	89.3	6	96 13708	44.2	7	9 20835	91.2
6	91 64075	77.2	7	30718	61.3	8	85 20369	11.3
7	419 05726	90.3	8	736 09158	43.3	9	302 86915	72.7
8	20 96157	72.3	9	51 80369	6.3	340	6 19582	86.6
9	70 25169	12.3	300	91 30685	89.2	1	69 20581	63.6
260	90 57162	81.6	1	42831 79605	51.2	2	86 20519	30.7
1	620 51497	59.7	2	9 75160	4.2	3	502 68319	12.7
2	41 50972	85.6	3	57 13069	15.3	4	29 16830	13.6
3	39085 26174	36.4	4	9 16037	71.2	5	82 03691	53.7
4	258 17460	17.2	5	61 30975	82.7	6	902 58613	81.4
5	418 62750	24.6	6	9 15703	43.2	7	48026 19753	74.5
6	28 61750	9.2	7	936 81570	14.2	8	31 79625	72.5
7	615 20748	47.3	8	51 86370	27.2	9	93 62751	49.6
8	41 70285	64.4	9	3 80716	77.4	350	6 27135	84.5
9	742 05186	61.4	310	61 58073	80.2	1	137 02596	63.7
270	6158	44.3	1	3 08157	71.3	2	57 20369	10.3
1	40386 19257	48.5	2	46035 82971	57.6	3	192 57036	83.2
2	539 72861	53.6	3	57 13829	2.7	4	6 30752	75.6
3	736 81592	41.7	4	95 82731	34.6	5	359 16027	68.2
4	51 86392	40.7	5	157 03829	3.7	6	49053 17286	67.4
5	2 81396	39.7	6	97 03825	91.4	7	302 71685	65.4
6	92 58136	56.5	7	30285	90.2	8	86175	51.4
7	6 31852	54.5	8	302 79185	87.7	9	82 71605	*33.2.4
8	835 79162	58.5	9	7 18529	5.7	360	531 68207	46.2
9	52 69713	62.5	320	52918	59.3	1	72860	21.2
280	41382 79605	65.2	1	92 58170	1.2	2	702 86135	45.4
1	96 80275	89.4	2	802 79135	*92.5.7			

Tabelle 12.

Die 92 Grundstellungen des Schachbrettes X von 100 Feldern.

	Bezeichnung nach Günther (Fig. 46)											Bezeichnung nach Günther (Fig. 46)									
1.1	a_1	b_4	f_6	h_{11}	k_{14}	c_{10}	d_{15}	n_9	l_{12}	g_{16}	47.1	b_2	h_7	a_5	m_{13}	f_{12}	c_{10}	d_{15}	i_{11}	r_9	g_{16}
2.1				k_{12}	d_{11}	h_{15}	g_{10}	n_9	i_{13}	e_{17}	48.1			k_{10}	c_6	i_5	f_{14}	e_{11}	d_{17}	l_{12}	g_{16}
3.1									c_{16}	l_{14}	49.1					d_{11}	e_9	f_{16}	p_8	a_{17}	l_{14}
4.1			m_{11}	f_{10}	k_{14}	e_9	l_8	g_{12}	c_{16}	i_{15}	50.1			m_{11}	g_4	f_{12}	c_{10}	i_6	d_{17}	e_{15}	n_{13}
5.1	a_1	d_5	f_8	k_{12}	e_7	h_{15}	b_{14}	n_9	i_{13}	g_{16}	51.1				f_{10}	k_{14}	l_6	i_9	g_{12}	c_{16}	n_{13}
6.1			h_9	m_{13}	g_6	f_{14}	e_{11}	l_{10}	c_{16}	i_{15}	52.1			o_{12}	c_6	d_{11}	f_{14}	g_{10}	p_8	i_{13}	e_{17}
7.1					e_7	f_{14}	l_8	g_{12}	c_{16}	i_{15}	53.1	b_2	k_8	m_{11}	c_6	f_{12}	h_{15}	g_{10}	e_{13}	r_9	l_{14}
8.1					b_{10}	f_{14}	l_8	g_{12}	n_{11}	e_{17}	54.1			o_{12}	d_9	i_5	f_{14}	e_{11}	l_{10}	c_{16}	n_{13}
9.1					f_{12}	i_7	e_{11}	l_{10}	g_{14}	e_{18}	55.1	b_2	m_9	a_5	k_{12}	d_{11}	c_{10}	f_{16}	p_8	g_{14}	n_{13}
10.1						g_8	e_{11}	b_{16}	p_{10}	i_{15}	56.1			d_7	k_{12}	i_5	a_{11}	f_{16}	l_{10}	e_{15}	n_{13}
11.1						c_{10}	l_8	b_{16}	n_{11}	i_{15}	57.1			o_{12}	c_6	h_{13}	a_{11}	g_{10}	p_8	c_{15}	l_{14}
12.1			m_{11}	b_8	f_{12}	h_{15}	i_9	e_{13}	p_{10}	g_{16}	58.1				a_7	i_5	c_{10}	d_{15}	e_{13}	n_{11}	g_{16}
13.1				f_{10}	g_6	h_{15}	i_9	e_{15}	c_{16}	l_{14}	59.1	b_2	o_{10}	e_3	h_{11}	a_9	g_8	f_{16}	c_{14}	l_{12}	i_{15}
14.1					k_{14}	g_8	c_{12}	n_9	i_{13}	e_{17}	60.1			a_5	h_{11}	k_{14}	e_9	c_{12}	p_8	i_{13}	g_{16}
15.1			o_{12}	f_{10}	h_{13}	g_8	e_{11}	n_9	c_{16}	i_{15}	61.1				m_{13}	d_{11}	e_9	n_7	g_{12}	c_{16}	i_{15}
16.1	a_1	f_6	h_9	m_{13}	c_8	i_7	d_{15}	l_{10}	g_{14}	e_{17}	62.1			d_7	m_{13}	i_5	e_9	c_{12}	a_{15}	n_{11}	g_{16}
17.1			k_{10}	m_{13}	e_7	b_{12}	l_8	i_{11}	g_{14}	c_{18}	63.1			f_8	g_4	e_7	h_{15}	a_{13}	i_{11}	c_{16}	l_{14}
18.1					d_{11}	e_9	l_8	b_{16}	g_{14}	p_{12}	64.1				c_6	k_{14}	e_9	n_7	a_{15}	i_{13}	g_{16}
19.1			o_{12}	d_9	h_{13}	i_7	g_{10}	c_{14}	n_{11}	e_{17}	65.1				h_{11}	k_{14}	l_6	i_9	g_{12}	e_{15}	n_{13}
20.1	a_1	h_7	b_6	f_{10}	k_{14}	g_8	d_{15}	n_9	i_{13}	e_{17}	66.1			h_9	c_6	k_{14}	d_{13}	e_{11}	p_8	l_{12}	i_{15}
21.1						d_{13}	l_8	g_{12}	n_{11}	c_{18}	67.1				m_{13}	c_8	l_6	e_{11}	a_{15}	g_{14}	p_{12}
22.1				k_{12}	d_{11}	g_8	f_{16}	n_9	i_{13}	e_{17}	68.1	d_3	f_6	c_4	h_{11}	k_{14}	b_{12}	g_{10}	p_8	a_{17}	i_{15}
23.1				m_{13}	d_{11}	f_{14}	i_9	g_{12}	p_{10}	e_{17}	69.1			h_9	m_{13}	c_8	a_{11}	n_7	b_{16}	p_{10}	e_{17}
24.1			k_{10}	c_6	d_{11}	f_{14}	l_8	g_{12}	b_{18}	n_{13}	70.1			m_{11}	g_4	b_{10}	h_{15}	a_{13}	n_9	l_{12}	e_{17}
25.1				m_{13}	c_8	f_{14}	i_9	g_{12}	e_{15}	r_{11}	71.1				e_5	k_{14}	b_{12}	g_{10}	p_8	c_{16}	i_{15}
26.1			m_{11}	c_6	f_{12}	e_9	l_8	d_{17}	i_{13}	g_{16}	72.1				a_7	i_5	h_{15}	b_{14}	e_{13}	p_{10}	g_{16}
27.1					k_{14}	b_{12}	g_{10}	n_9	i_{13}	e_{17}	73.1	d_3	h_7	c_4	m_{13}	i_5	f_{14}	e_{11}	a_{15}	l_{12}	g_{16}
28.1				b_8	k_{14}	d_{13}	g_{10}	n_9	e_{15}	p_{12}	74.1			b_6	m_{13}	i_5	f_{14}	e_{11}	a_{15}	p_{10}	g_{16}
29.1			o_{12}	c_6	d_{11}	f_{14}	g_{10}	n_9	i_{13}	e_{17}	75.1			k_{10}	g_4	c_8	b_{12}	f_{16}	n_9	a_{17}	l_{14}
30.1	a_1	k_8	m_{11}	d_9	e_7	h_{15}	b_{14}	g_{12}	p_{10}	n_{13}	76.1				m_{13}	i_5	f_{14}	e_{11}	n_9	l_{12}	g_{16}
31.1	a_1	m_9	b_6	k_{12}	d_{11}	g_8	f_{16}	e_{13}	p_{10}	l_{14}	77.1					c_8	l_6	e_{11}	n_9	a_{17}	g_{16}
32.1			f_8	k_{12}	e_7	h_{15}	g_{10}	c_{14}	i_{13}	r_1[1]	78.1			m_{11}	g_4	c_8	b_{12}	f_{16}	n_9	i_{13}	e_{17}
33.1	b_2	d_5	f_8	h_{11}	k_{14}	l_6	i_9	g_{12}	e_{15}	c_{18}	79.1								a_{15}	p_{10}	l_{14}
34.1			k_{10}	c_6	h_{13}	a_{11}	f_{16}	p_8	e_{15}	l_{14}	80.1					k_{14}	c_{10}	a_{13}	n_9	l_{12}	e_{17}
35.1				m_{13}	a_9	f_{14}	c_{12}	p_8	n_{11}	g_{16}	81.1	d_3	k_8	c_4	h_{11}	b_{10}	l_6	f_{16}	g_{12}	a_{17}	n_{13}
36.1			m_{11}	f_{10}	a_9	h_{15}	n_7	e_{13}	c_{16}	p_{12}	82.1	d_3	m_9	c_4	f_{10}	i_5	h_{15}	e_{11}	b_{16}	g_{14}	n_{13}
37.1			o_{12}	f_{10}	h_{13}	a_{11}	i_9	p_8	c_{16}	l_{14}	83.1			f_8	e_5	k_{14}	c_{10}	n_7	i_{11}	a_{17}	g_{16}
38.1	b_2	f_6	h_9	g_4	k_{14}	a_{11}	d_{15}	l_{10}	c_{16}	n_{13}	84.1				k_{12}	i_5	h_{15}	e_{11}	c_{14}	p_{10}	n_{13}
39.1			k_{10}	g_4	d_{11}	h_{15}	i_9	e_{13}	l_{12}	c_{18}	85.1			o_{12}	g_4	b_{10}	i_7	e_{11}	c_{14}	a_{17}	n_{13}
40.1				a_7	d_{11}	h_{15}	i_9	p_8	g_{14}	c_{18}	86.1	d_3	o_{10}	f_8	m_{13}	g_6	b_{12}	n_7	i_{11}	c_{16}	l_{14}
41.1				d_9	e_7	h_{15}	a_{13}	p_8	l_{12}	c_{18}	87.1	f_4	a_3	d_7	k_{12}	i_5	h_{15}	b_{14}	c_{13}	n_{11}	g_{16}
42.1				m_{13}	e_7	a_{11}	d_{15}	p_8	l_{12}	g_{16}	88.1			k_{10}	m_{13}	i_5	g_8	c_{12}	b_{16}	e_{15}	l_{14}
43.1			m_{11}	g_4	k_{14}	e_9	a_{13}	l_{10}	c_{16}	i_{15}	89.1	f_4	h_7	m_{11}	b_8	k_{14}	l_6	i_9	a_{15}	p_{10}	g_{16}
44.1				a_7	k_{14}	d_{13}	c_{15}	l_{10}	r_9	g_{16}	90.1	f_4	m_9	a_5	b_8	k_{14}	l_6	d_{15}	e_{13}	p_{10}	g_{16}
45.1	b_2	h_7	a_5	f_{10}	k_{14}	l_6	d_{15}	g_{12}	c_{16}	n_{13}	91.1			d_7	e_5	k_{14}	l_6	a_{13}	b_{16}	n_{11}	i_{15}
46.1						d_{13}	e_{11}	p_8	l_{12}	c_{18}	92.1				k_{12}	i_5	h_{15}	l_8	e_{13}	n_{11}	g_{16}

Tabelle 13.

Die Lösungen des Schachbrettes XI von 121 Feldern, welche mit 0 beginnen.

Laufende Nr.	Bezeichnung nach Figur 34	Grundstellung und Stellung	Laufende Nr.	Bezeichnung nach Figur 34	Grundstellung und Stellung
1	0 2 4 6 8 z 1 3 5 7 9	1.1	49	0 6 4 2 z 8 3 1 9 7 5	34.1
2	5 8 1 7 z 3 6 4 9	2.1	50	7 z 3 9 2 5 8 1	35.1
3	6 8 3 1 9 5 z 4 7	3.1	51	8 3 1 9 2 5	36.1
4	9 1 8 5 3 z 7 4	4.1	52	8 2 5 1 9 4 z 7 3	26.5
5	7 z 1 3 5 8 4	5.1	53	7 9 3 1 4 z 5	37.1
6	z 3 7 9 4 1 5 8	6.1	54	5 2 9 3 z 7 4 1	38.1
7	7 5 8 1 4 z 3 6 9	7.1	55	z 2 4 9 1 3 5 7	39.1
8	9 3 8 z 4 6 1 5	8.1	56	9 2 z 8 3 1 4 7 5	40.1
9	z 6 1 9 5 3 8 4	9.1	57	5 8 1 4 2 7 z 3	29.5
10	9 6 8 z 1 3 5 7 4	10.1	58	7 2 8 3 1 4 z 5	41.1
11	7 3 z 8 5 1 4 6	11.1	59	z 5 7 1 3 8 2 4 9	31.5
12	0 3 5 8 1 9 4 2 7 z 6	12.1	60	0 7 3 6 2 z 1 9 5 8 4	34.5
13	9 2 z 7 4 1 8 6	13.1	61	8 z 1 4 2 5 9	37.5
14	6 8 z 1 9 5 2 4 7	14.1	62	9 5 2 4	40.5
15	9 1 4 7 z 2 5 8	15.1	63	9 1 z 4 2 8 5	30.5
16	z 7 2 4 8 1 5 9	16.1	64	8 6 2 z 5 1 4 9	42.1
17	8 2 7 1 z 5 9 6 4	17.1	65	z 6 2 9 5 1 8 4	43.1
18	6 2 9 5 1 4 z 7	18.1	66	4 1 8 6 3 z 2 5 9	18.5
19	9 1 z 5 7 2 4	19.1	67	6 8 z 1 3 5 2 9	41.5
20	9 6 z 2 7 1 4 8 5	20.1	68	8 5 9 1 z 2 6 3	39.5
21	0 4 1 7 9 2 8 5 3 z 6	2.5	69	z 5 2 9 3 6 8 1	44.1
22	z 6 2 9 5 3 8	4.5	70	5 1 8 z 3 6 9 2 4	20.5
23	6 8 z 2 7 9 1 3 5	21.1	71	2 6 1 z 4 9 3 8	25.5
24	9 3 z 8 2 5 7 1	22.1	72	8 z 3 9 6 4 1	45.1
25	7 1 6 2 z 8 3 5 9	12.5	73	8 1 9 4 2 z 3 6	23.5
26	9 6 2 z 1 3 5 8	23.1	74	z 2 4 8 3 9 6 1	46.1
27	8 1 5 9 2 6 z 3 7	15.5	75	9 2 5 8 1 3 z 6 4	38.5
28	5 9 1 z 2 6 3 7	24.1	76	4 6 1 z 2 5 3 8	31.5
29	0 5 1 4 9 7 2 z 3 6 8	3.5	77	6 2 z 1 3 5 8 4	43.5
30	8 6 3 9 2 4 z 7	7.5	78	0 8 1 4 7 9 2 5 z 6 3	6.5
31	z 7 4 2 9 6 3	9.5	79	9 7 z 3 6 2 5	11.5
32	3 1 z 7 9 4 2 8 6	17.5	80	3 5 z 2 9 6 4 7 1	47.1
33	9 7 2 4 1 z 8 6	25.1	81	4 1 7 2 z 6 9 3 5	13.5
34	z 7 4 1 9 2 6 8	26.1	82	5 1 6 9 2 4 7 z 3	16.5
35	7 2 z 8 1 4 9 3 6	27.1	83	2 9 7 4 1 3 z 6	42.5
36	9 1 3 8 z 2 4 6	24.5	84	z 3 7 9 4 6 1	48.1
37	3 8 4 1 z 2 6	28.1	85	7 4 1 9 6 3	43.5
38	z 6 3 1 8 4 2 9	29.1	86	9 1 z 2 6 3 7 4	21.5
39	8 1 9 7 2 z 3 6 4	14.5	87	0 9 1 4 7 z 8 2 5 3 6	8.5
40	2 7 z 3 1 9 4 6	30.1	88	7 5 3 1 z 8 6 4 2	32.5
41	6 9 3 1 4 7 z 2	31.1	89	0 z 3 5 8 2 9 6 1 7 4	48.5
42	9 1 z 7 3 8 2 4 6	19.5	90	6 9 2 8 1 4 7 5	45.5
43	z 4 9 3 8 2 7 1 6	32.1	91	4 6 9 3 1 8 2 5 7	38.5
44	0 6 1 7 2 8 3 9 4 z 5	1.5	92	7 5 2 9 1 6 8 3	46.5
45	z 8 2 4 9 3 5	5.5	93	5 2 8 3 7 9 1 6 4	47.5
46	3 9 4 2 5	10.5	94	7 2 4 8 1 9 6 3	44.5
47	3 7 z 4 9 1 5 2 8	33.1	95	7 4 1 8 2 9 6 3 5	22.5
48	9 7 1 z 2 5 8 4	27.5	96	5 2 8 1 3 9 6 4	35.5

z ist hier das Zeichen für zehn.

De la Noë's Typen.

Tabelle 14.

Schachbrett von 81 Feldern.

Grundstellung	Typus	Grundstellung	Typus	Grundstellung	Typus
1	0 1 1 4 3	17	0 1 1 3 4	33	0 1 2 2 4
2	0 1 1 4 3	18	0 0 3 2 4	34	0 1 2 2 4
3	0 1 1 4 3	*19	1 0 2 2 4	35	0 1 3 1 4
4	0 0 2 4 3	20	0 1 3 1 4	36	0 0 3 2 4
5	0 1 2 3 3	21	0 1 1 3 4	37	0 1 0 4 4
6	0 0 3 3 3	22	0 1 1 3 4	38	0 0 1 4 4
7	0 1 1 4 3	23	0 1 1 3 4	39	0 1 1 3 4
8	0 0 3 3 3	24	0 1 1 3 4	*40	1 0 0 4 4
9	0 0 2 4 3	25	0 1 1 3 4	*41	1 0 0 4 4
10	0 1 1 4 3	26	0 1 1 3 4	42	0 1 1 3 4
11	0 2 0 4 3	27	0 0 3 2 4	43	0 1 1 3 4
12	0 1 2 3 3	*28	1 0 2 2 4	44	1 0 0 4 4
13	0 1 2 3 3	29	1 0 1 3 4	45	0 0 2 3 4
14	0 0 3 3 3	30	0 1 1 3 4	46	0 0 2 3 4
15	0 1 2 2 4	31	1 0 2 2 4		
16	0 0 3 2 4	32	0 1 2 2 4		

	Typen	Grundstellungen
1)	0 0 1 4 4	38
2)	0 0 2 3 4	45. 46
3)	0 0 2 4 3	4. 9
4)	0 0 3 2 4	16. 18. 27. 36
5)	0 0 3 3 3	6. 8. 14
6)	0 1 0 4 4	37
7)	0 1 1 3 4	17. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 30. 39. 42. 43
8)	0 1 1 4 3	1. 2. 3. 7. 10
9)	0 1 2 2 4	15. 32. 33. 34
10)	0 1 2 3 3	5. 12. 13
11)	0 1 3 1 4	20. 35
12)	0 2 0 4 3	11
13)	1 0 0 4 4	*40. *41. 44
14)	1 0 1 3 4	29
15)	1 0 2 2 4	*19. *28. 31

Tabelle 15.

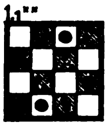
Schachbrett von 100 Feldern.

Grundstellung	Typus	Grundstellung	Typus	Grundstellung	Typus
1	1 0 2 4 3	32	0 1 3 3 3	63	0 1 3 2 4
2	0 2 1 4 3	*33	0 0 4 2 4	64	0 1 3 2 4
3	0 2 1 4 3	34	1 0 2 3 4	65	0 0 4 2 4
4	0 2 1 4 3	35	1 1 1 3 4	66	0 1 3 2 4
5	0 0 3 4 3	36	1 1 1 3 4	67	0 2 2 2 4
6	0 1 2 4 3	37	1 1 1 3 4	68	0 2 1 3 4
7	0 0 3 4 3	38	1 0 2 3 4	69	1 1 1 3 4
8	1 0 2 4 3	39	0 1 3 2 4	70	1 1 0 4 4
9	0 1 3 3 3	40	0 2 2 2 4	71	0 2 0 4 4
10	0 1 3 3 3	41	0 2 2 2 4	72	0 1 2 3 4
11	1 0 2 4 3	42	1 0 2 3 4	73	0 1 1 4 4
12	0 1 3 3 3	43	0 2 1 3 4	74	0 1 2 3 4
13	0 1 2 4 3	44	0 2 2 2 4	75	0 2 1 3 4
14	0 2 1 4 3	45	0 1 2 3 4	76	0 1 1 4 4
15	0 2 1 4 3	46	0 2 2 2 4	77	0 2 1 3 4
16	0 1 2 4 3	47	1 0 3 2 4	*78	0 2 0 4 4
17	0 1 3 3 3	48	0 1 2 3 4	79	0 2 1 3 4
18	0 2 1 4 3	49	0 2 2 2 4	80	1 1 0 4 4
19	0 2 1 4 3	50	1 0 2 3 4	81	1 0 2 3 4
20	0 1 2 4 3	51	0 1 2 3 4	82	0 2 0 4 4
21	0 1 3 3 3	52	0 2 1 3 4	83	1 0 2 3 4
22	0 1 2 4 3	53	0 1 3 2 4	84	0 1 2 3 4
23	0 1 3 3 3	54	0 2 1 3 4	85	1 1 1 3 4
24	0 1 3 3 3	55	1 1 1 3 4	86	0 1 2 3 4
25	0 1 3 3 3	56	1 0 2 3 4	87	0 0 3 3 4
26	0 1 2 4 3	57	1 1 1 3 4	88	0 1 2 3 4
27	0 2 1 4 3	58	1 1 1 3 4	89	0 1 2 3 4
28	0 2 1 4 3	59	1 0 3 2 4	90	0 1 2 3 4
29	0 2 1 4 3	60	0 2 2 2 4	91	0 1 1 4 4
30	0 1 3 3 3	61	0 2 2 2 4	*92	0 0 2 4 4
31	0 1 3 3 3	62	0 2 2 2 4		

	Typen	Grundstellungen
1)	0 0 2 4 4	*92
2)	0 0 3 3 4	87
3)	0 0 3 4 3	5. 7
4)	0 0 4 2 4	*33. 65
5)	0 1 1 4 4	73. 76. 91
6)	0 1 2 3 4	45. 48. 51. 72. 74. 84. 86. 88. 89. 90
7)	0 1 2 4 3	6. 13. 16. 20. 22. 26.
8)	0 1 3 2 4	39. 53. 63. 64. 66
9)	0 1 3 3 3	9. 10. 12. 17. 21. 23. 24. 25. 30. 31. 32.
10)	0 2 0 4 4	71. *78. 82
11)	0 2 1 3 4	43. 52. 54. 68. 75. 77. 79
12)	0 2 1 4 3	2. 3. 4. 14. 15. 18. 19. 27. 28. 29
13)	0 2 2 2 4	40. 41. 44. 46. 49. 60. 61. 62. 67
14)	1 0 2 3 4	34. 38. 42. 50. 56. 81. 83
15)	1 0 2 4 3	1. 8. 11
16)	1 0 3 2 4	47. 59
17)	1 1 0 4 4	70. 80
18)	1 1 1 3 4	35. 36. 37. 55. 57. 58. 69. 85

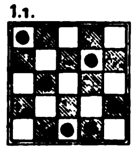
Vier Königinnen auf dem
hachbrette von 16 Feldern

1.1**

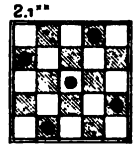


V. Fünf Königinnen auf dem Schachbrette
von 25 Feldern.

1.1.

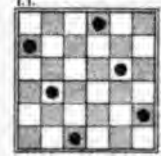


2.1**



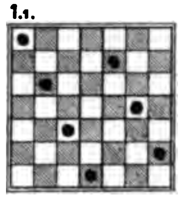
VI. Sechs Königinnen auf dem
Schachbrette von 36 Feldern.

1.1*

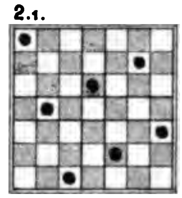


. Sieben Königinnen
f dem Schachbrette
von 49 Feldern.

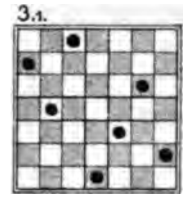
1.1.



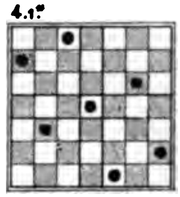
2.1.



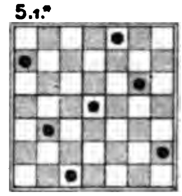
3.1.



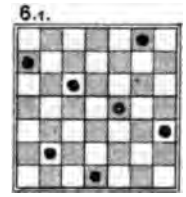
4.1*



5.1*

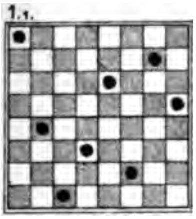


6.1.

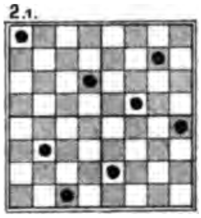


VIII. Acht Königinnen auf dem Schachbrette von 64 Feldern.

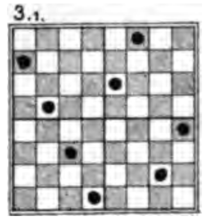
1.1.



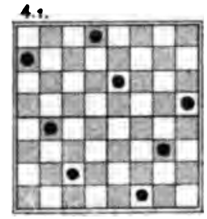
2.1.



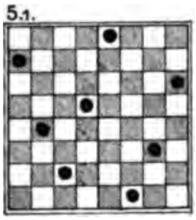
3.1.



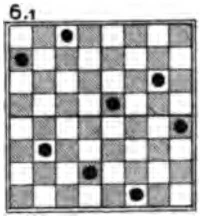
4.1.



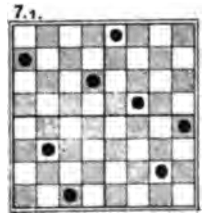
5.1.



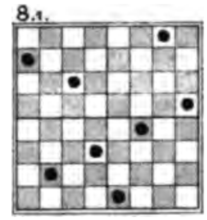
6.1.



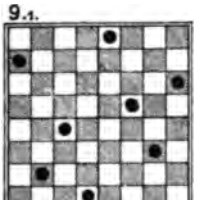
7.1.



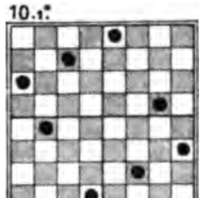
8.1.



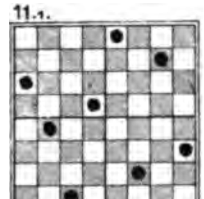
9.1.



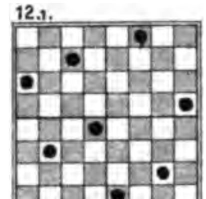
10.1*



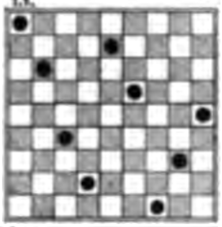
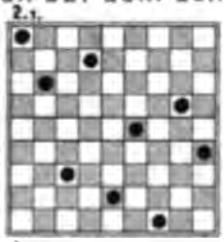
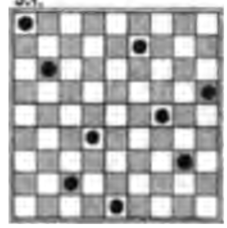
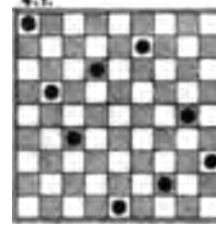
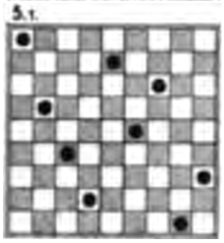
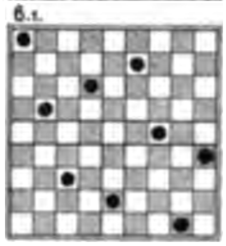
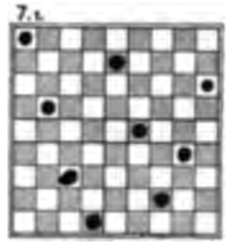
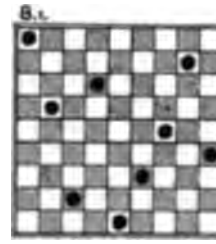
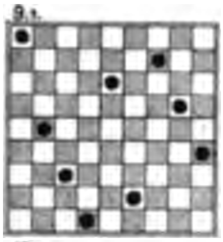
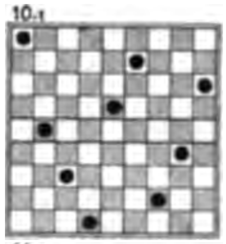
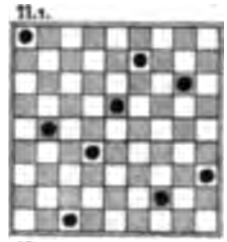
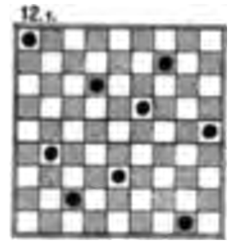
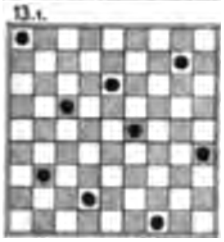
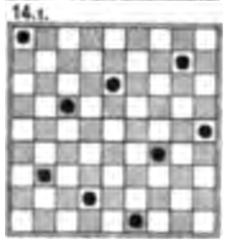
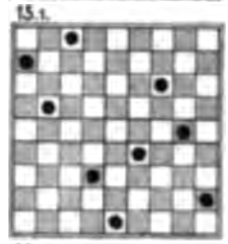
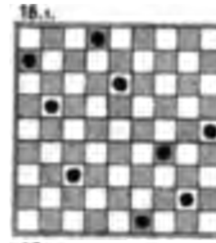
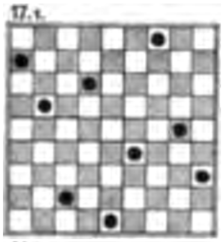
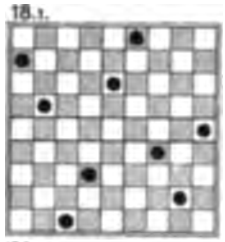
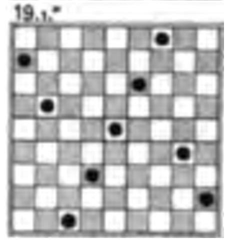
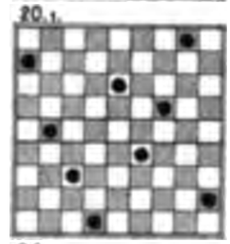
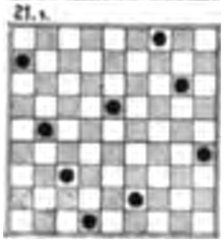
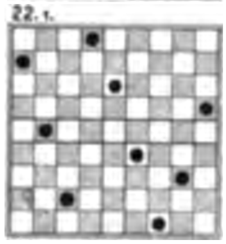
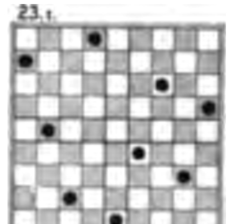
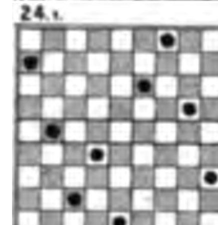
11.1.



12.1.

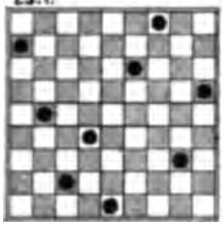


IX Neun Koniginnen auf dem Schachbrette von 81 Feldern.

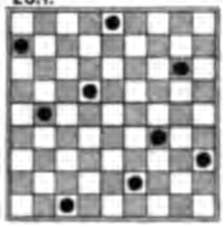
1.t.

2.t.

3.t.

4.t.

5.t.

6.t.

7.t.

8.t.

9.t.

10.t.

11.t.

12.t.

13.t.

14.t.

15.t.

16.t.

17.t.

18.t.

19.t.*

20.t.

21.t.

22.t.

23.t.

24.t.


IX. Neun Königinnen auf dem Schachbrette von 81 Feldern.

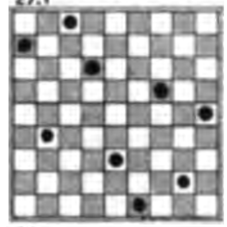
25.1.



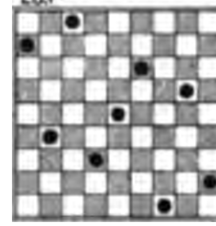
26.1.



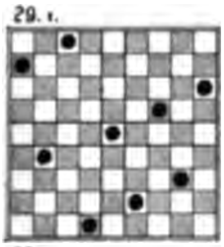
27.1



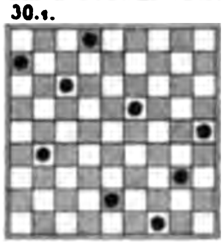
28.1.*



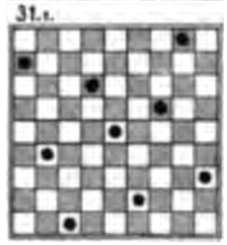
29.1.



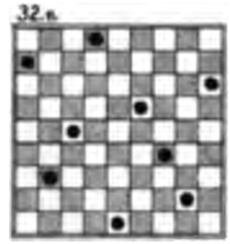
30.1.



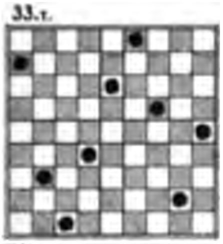
31.1.



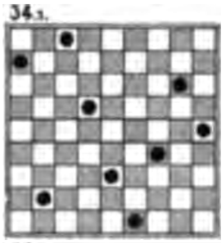
32.8.



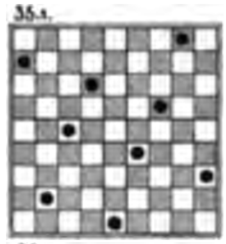
33.1.



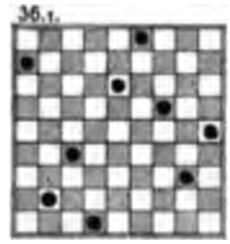
34.1.



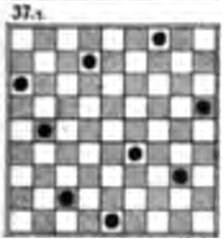
35.1.



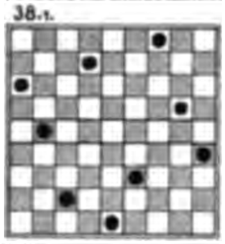
36.1.



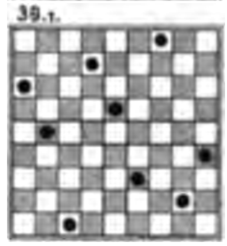
37.1.



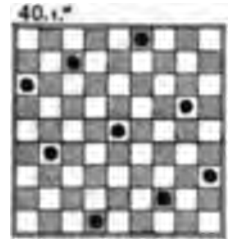
38.1.



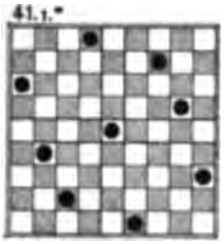
39.1.



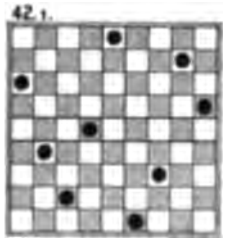
40.1.*



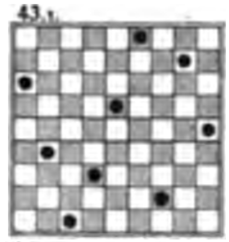
41.1.*



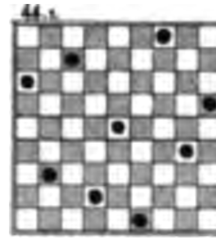
42.1.



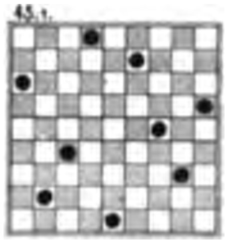
43.1.



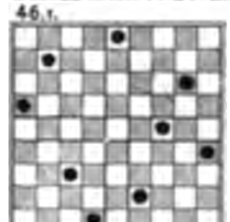
44.1.



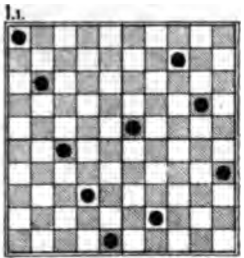
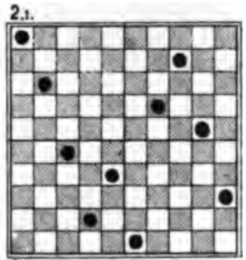
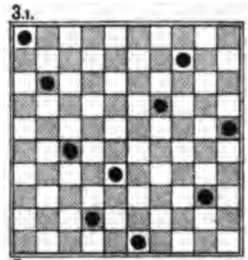
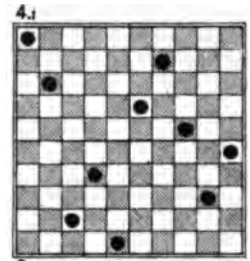
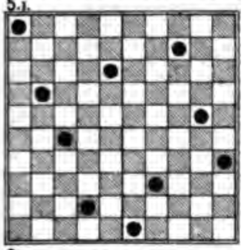
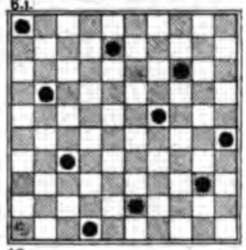
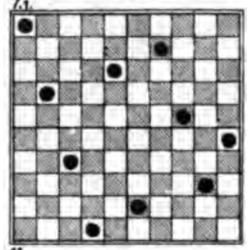
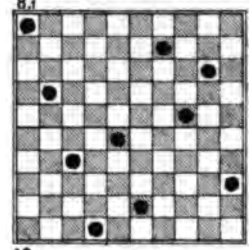
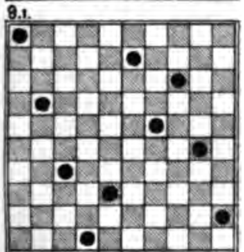
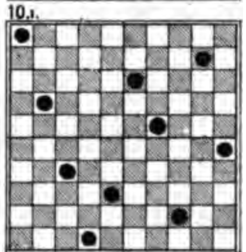
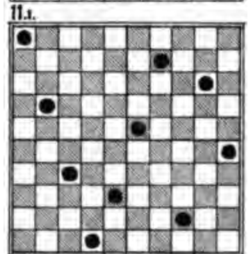
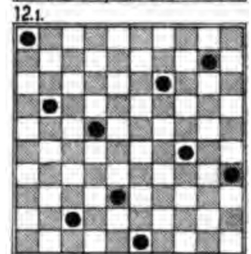
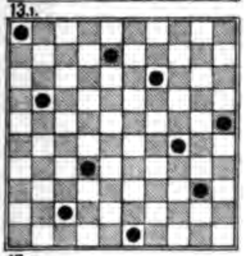
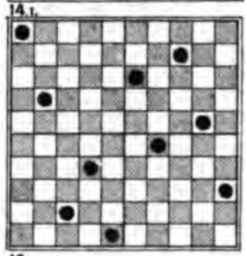
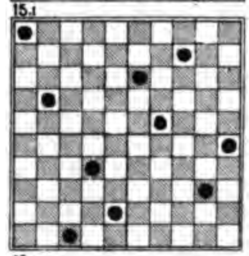
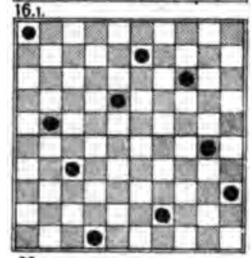
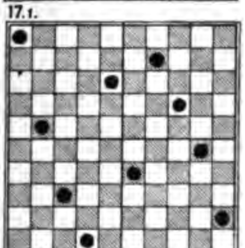
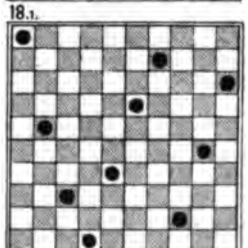
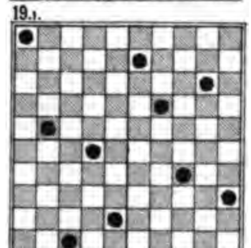
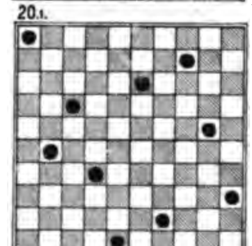
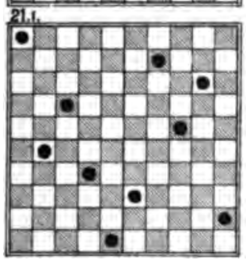
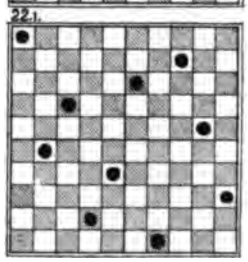
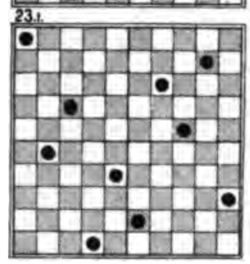
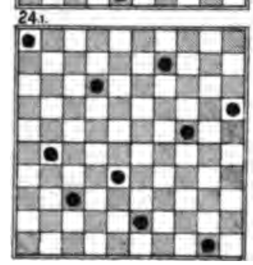
45.1.



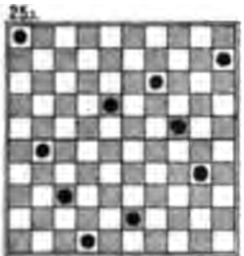
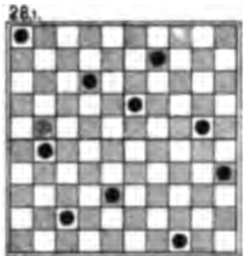
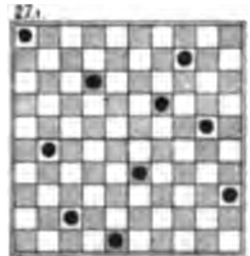
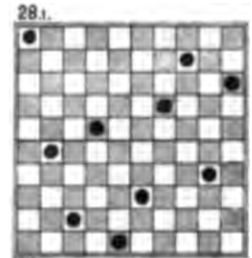
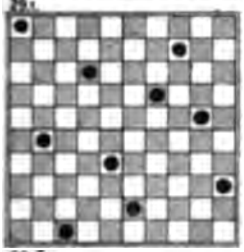
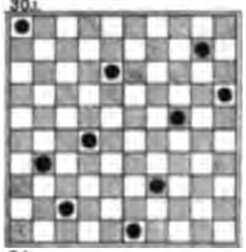
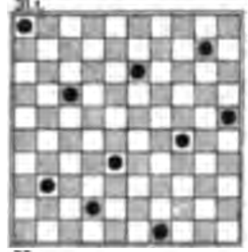
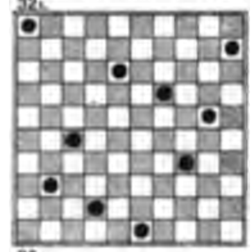
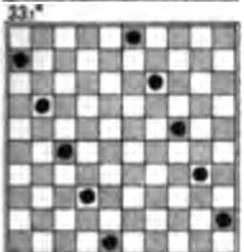
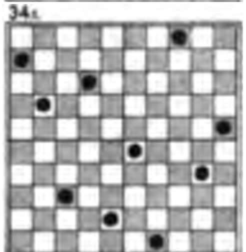
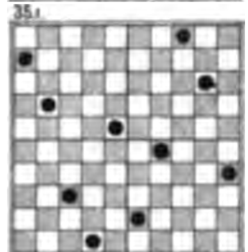
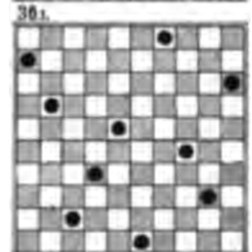
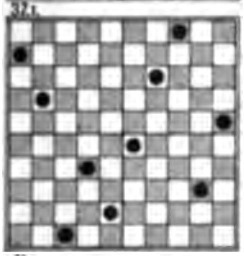
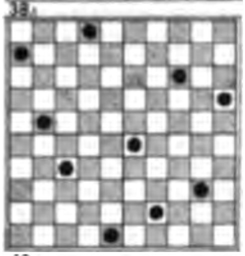
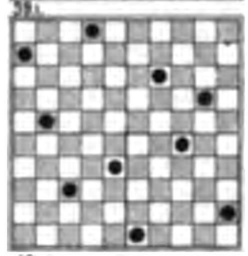
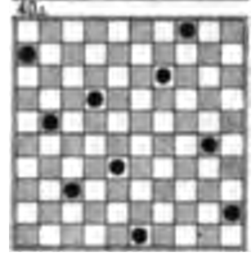
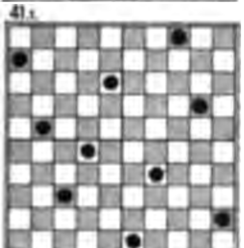
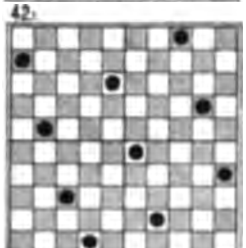
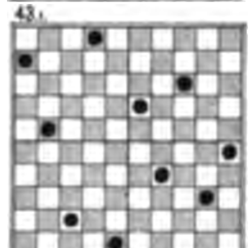
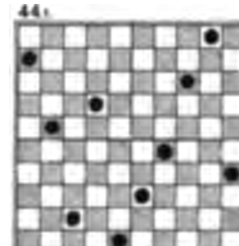
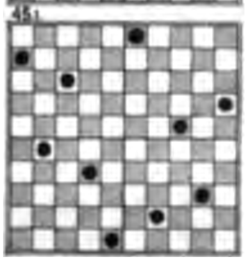
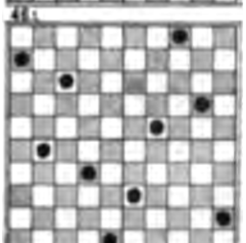
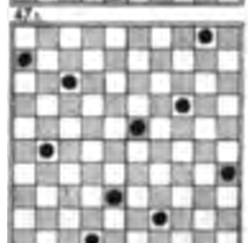
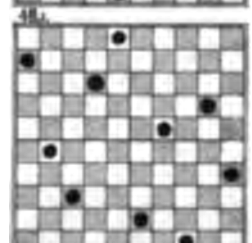
46.1.



X. Zehn Königinnen auf dem Schachbrette von 100 Feldern.

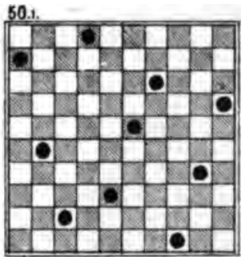
1.1.

2.1.

3.1.

4.1

5.1.

6.1.

7.1.

8.1

9.1.

10.1.

11.1.

12.1.

13.1.

14.1.

15.1

16.1.

17.1.

18.1.

19.1.

20.1.

21.1.

22.1.

23.1.

24.1.


X. Zehn Königinnen auf dem Schachbrette von 100 Feldern.

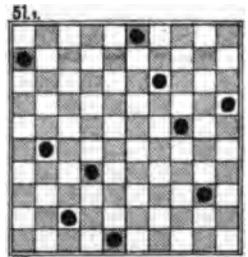
25.

26.

27.

28.

29.

30.

31.

32.

33.*

34.

35.

36.

37.

38.

39.

40.

41.

42.

43.

44.

45.

46.

47.

48.


ın Königinnen auf dem Schachbrette von 100 Feldern.

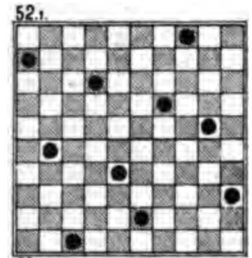
50.1.



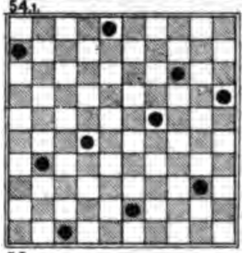
51.1.



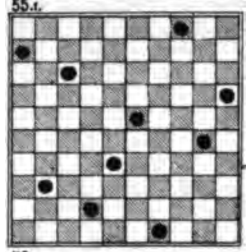
52.1.



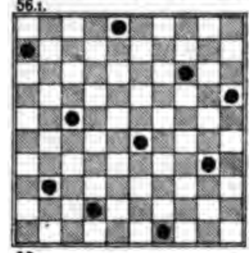
54.1.



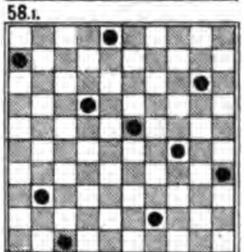
55.1.



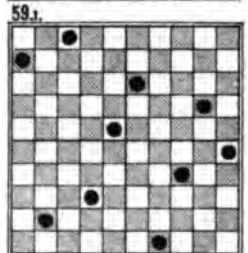
56.1.



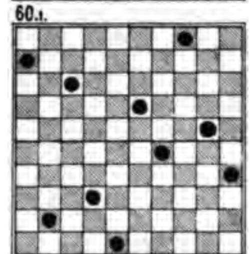
58.1.



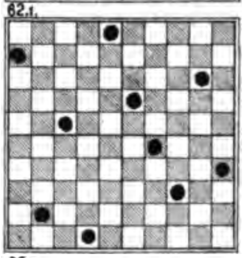
59.1.



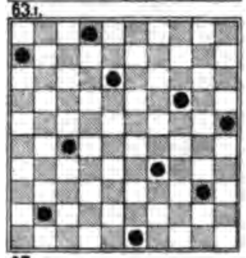
60.1.



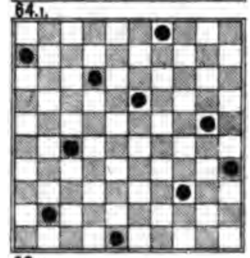
62.1.



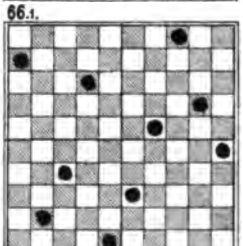
63.1.



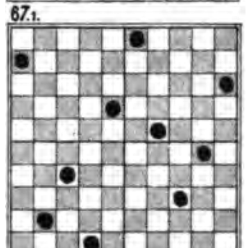
64.1.



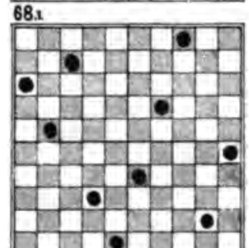
66.1.



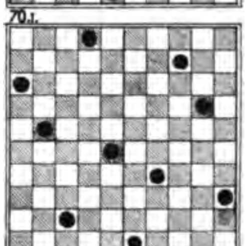
67.1.



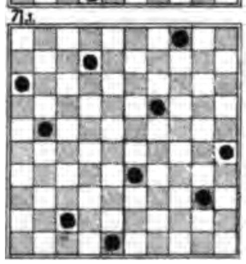
68.1.



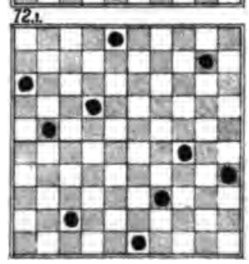
70.1.



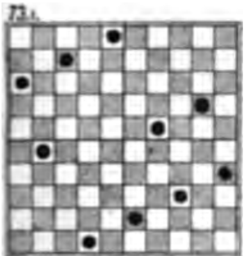
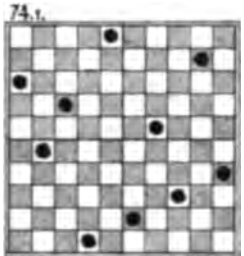
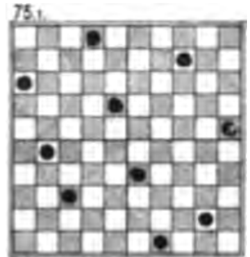
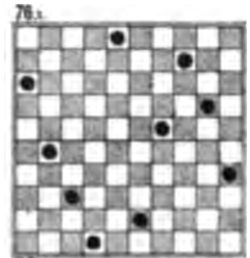
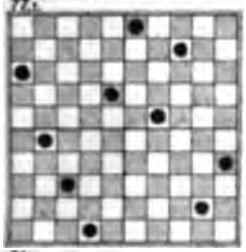
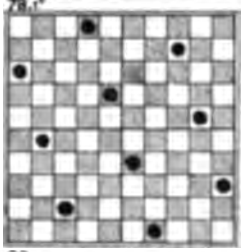
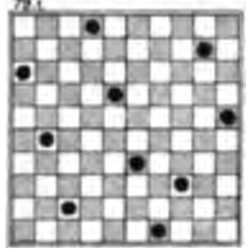
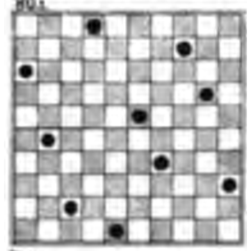
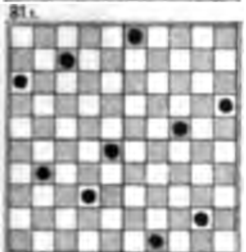
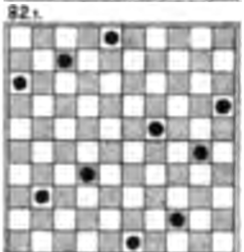
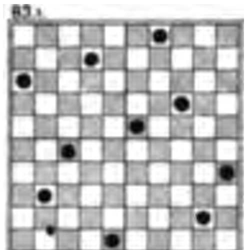
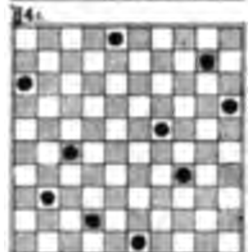
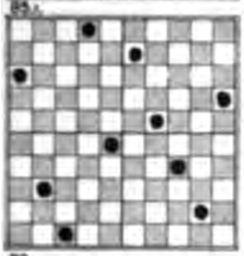
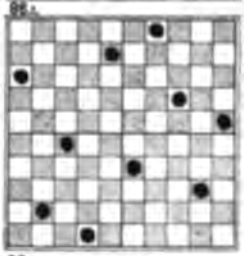
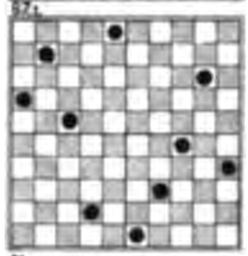
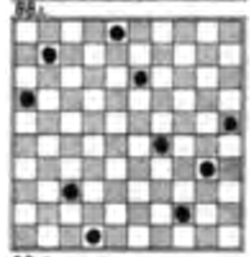
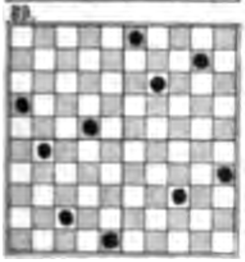
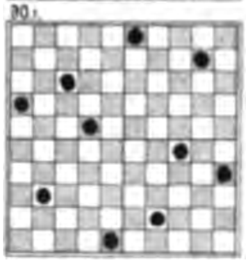
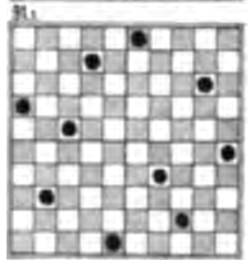
71.1.



72.1.



X. Zehn Königinnen auf dem Schachbrette von 100 Feldern.

73.

74.

75.

76.

77.

78.*

79.

80.

81.

82.

83.

84.

85.

86.

87.

88.

89.

90.

91.

92.*