DIE GEOMETRIE DER LAGE.

DIE

GEOMETRIE DER LAGE.

VORTRÄGE

VON

DR. THEODOR REYE,

O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT STRASSBURG I. E.

ERSTE ABTHEILUNG.

MIT 82 HOLZSCHNITTEN IM TEXT.

DRITTE VERMEHRTE AUFLAGE.

LEIPZIG,

BAUMGÄRTNER'S BUCHHANDLUNG.

1886.

Leipzig, Druck von Grimme & Trömel.

Vorwort zur ersten Auflage der ersten Abtheilung.

Die Vorträge über die Geometrie der Lage, welche ich hiermit der Oeffentlichkeit übergebe, sind in den letzten zwei Jahren allmälig niedergeschrieben worden; zu ihrer Herausgabe wurde ich durch ein Bedürfniss veranlasst, welches seit längerer Zeit am hiesigen Polytechnikum, und vielleicht schon in weiteren Kreisen sich fühlbar macht. Nämlich die wichtigen Constructions-Methoden, mit denen Herr Professor Culmann die Ingenieur-Wissenschaften bereichert hat, und welche in seinem Werke „die graphische Statik" veröffentlicht sind, gründen sich zum grossen Theile auf die neuere Geometrie, und die Kenntniss der letzteren ist daher den Ingenieurschülern unserer Anstalt unentbehrlich geworden. Durch vorliegende Arbeit nun versuche ich dem Mangel eines Lehrbuches abzuhelfen, welches den Studirenden in gedrängter Kürze den erforderlichen Stoff darbietet, und mich bei meinem mündlichen Unterricht unterstützt.

Selbstverständlich musste ich mich der von Herrn Culmann adoptirten Terminologie bedienen, und sogar bis zu einem gewissen Grade dem Lehrgange desjenigen gehaltvollen Werkes folgen, welchem dieselbe entnommen ist, nämlich der „Geometrie der Lage" des Herrn Professor von Staudt. Uebrigens sind die neuen Benennungen, welche Herr von Staudt den älteren Steiner'schen hinzugefügt hat, so glücklich gewählt, dass ich nur in einzelnen Fällen einen anderen Ausdruck vorgezogen hätte; z. B. dem Namen „gerades Gebilde" den von Herrn Paulus [und Göpel] eingeführten Namen „Punktreihe". Und die Art, wie Herr von Staudt, im Gegensatz zu allen übrigen Autoren der neueren Geometrie, diese Wissenschaft begründet, scheint mir so bedeutende Vortheile zu gewähren, dass ich auch ohne anderweitige Veranlassung sie jeder andern vorziehen würde. Es sei mir gestattet, diese meine Ansicht durch wenige Worte zu motiviren.

Dem Ingenieur wie dem Mechaniker und Architekten kommt bei dem Entwerfen seiner Bauwerke die Fähigkeit wesentlich zu statten, sich dieselben zum Voraus räumlich vorzustellen. Soll z. B. eine Brücke über den Strom gespannt werden, so muss zunächst unter den verschiedenen Constructionsarten diejenige gewählt werden, welche den gegebenen Verhältnissen am besten entspricht. Der Ingenieur vergleicht zu dem Ende den langgestreckten Blechbalken mit dem kühn geschwungenen Bogen oder der frei schwebenden Kettenbrücke, sucht sich vorzustellen, wie die Lasten sich hierhin und dorthin bewegen und wie sie auf die Glieder des mächtigen Bauwerks sich vertheilen. Wieder und immer wieder prüft und vergleicht er, denkt sich mehr und mehr in alle Einzelnheiten hinein, bis der ganze Bau in klaren Zügen fertig vor seinem geistigen Auge steht. Und jetzt beginnt der zweite Theil der schöpferischen Arbeit: das Project wird dem Papiere anvertraut, die sämmtlichen Details nach Form und Stärke genau bestimmt. Aber auch jetzt noch muss der Ingenieur und Jeder, der sich mit seinen Ideen vertraut machen will, fortwährend die Vorstellungskraft anspannen, um Dasjenige wirklich zu schauen, was durch die Linien einer dem Laien unverständlichen Zeichnung dargestellt werden soll. — Wie der Techniker, so muss auch der Mathematiker und überhaupt Jeder, der sich mit den Naturwissenschaften beschäftigt, das Vorstellungsvermögen vielfach in Anspruch nehmen; bald soll er complicirte Apparate aus einer dürftigen Skizze begreifen, bald weitläufige Naturprocesse oder verwickelte Bewegungen nach einer blossen Beschreibung sich deutlich machen.

Eine Hauptaufgabe des geometrischen Unterrichts scheint mir nun die zu sein, das Vorstellungsvermögen des Lernenden zu üben und auszubilden; und ich glaube, dass diese Aufgabe am besten auf dem Wege gelöst wird, den Herr von Staudt eingeschlagen hat. Er schliesst nämlich alle mehr oder minder complicirten Rechnungen aus, welche die Vorstellungskraft nicht beanspruchen, zu deren Verständniss vielmehr eine gewisse mechanische Fertigkeit erforderlich ist, die mit der Geometrie an sich wenig zu schaffen hat. Dafür aber gelangt Herr von Staudt durch directe Anschauung zur Erkenntniss der geometrischen Wahrheiten, auf welche er die Geometrie der Lage gründet. Es lässt sich nicht leugnen, dass diese Methode, wie jede andere, ihre eigenthümlichen Schwierigkeiten bietet; und das Staudt'sche Werk, welches offenbar nicht für Anfänger geschrieben ist, besitzt ausserdem noch mehrere, an sich rühmenswerthe Eigenschaften, welche das Studium desselben wesentlich erschweren. Es zeichnet sich namentlich aus durch eine merkwürdige Knappheit des Ausdrucks und eine sehr gedrängte, beinahe wortkarge Darstellung; nur das Nothwendige wird gesagt, selten ein erläuterndes Wort hinzugefügt, und dem Leser bleibt es überlassen, zu den in ihrer ganzen Allgemeinheit aufgestellten Sätzen sich leichter fassliche Beispiele selbst zu bilden. Der Stoff ist sehr schön und systematisch geordnet; z. B. die Lehren von der Projectivität, von der collinearen und reciproken Verwandtschaft, von den involutorischen Gebilden werden vollständig abgehandelt, ehe zur Theorie der Kegelschnitte und der Flächen zweiter Ordnung geschritten wird, und Herr von Staudt erlangt so den Vortheil, die Eigenschaften der Gebilde zweiter Ordnung mit einem Schlage beweisen zu können, während freilich andererseits die Darstellung so abstract wird, dass die Kräfte eines Anfängers bei ihrem Studium gewöhnlich schnell erlahmen. Diese Eigenschaften, welche der wohlverdienten Verbreitung und allgemeinen Anerkennung des Staudt'schen Werkes leider sehr hinderlich gewesen zu sein scheinen, stempeln dasselbe zu einem vorzüglichen Handbuch der neueren Geometrie, auf welches man sich, ähnlich wie in der Geometrie der Alten auf den Euklid, sehr bequem beziehen kann; in meinen für Anfänger geschriebenen Vorträgen musste ich sie vermeiden, um nicht unverständlich zu werden.

Eine andere, dem Lehrgange selbst eigenthümliche Schwierigkeit habe ich absichtlich nicht vermieden, weil sie von Jedem früher oder später überwunden werden muss, welcher die Eigenschaften räumlicher Gebilde begreifen will. Ich meine die schon erwähnte Schwierigkeit, solche Gebilde sich räumlich vorzustellen, eine Schwierigkeit, mit welcher der Anfänger auch bei dem Studium der darstellenden Geometrie und der analytischen Geometrie des Raumes zu kämpfen hat, und deren Ueberwindung ich, wie oben bemerkt, für eine Hauptaufgabe des geometrischen Unterrichts halte. Um dem Leser die Erreichung dieses Zieles zu erleichtern, habe ich meinen Vorträgen Figurentafeln hinzugefügt. Herr von Staudt hat dieses Hülfsmittel nicht benutzt, indem er wohl von ähnlichen Ansichten geleitet sein mag, wie die von Steiner gelegentlich ausgesprochene: „dass stereometrische Betrachtungen nur dann richtig aufgefasst seien, wenn sie rein, ohne alle Versinnlichungsmittel, nur durch die innere Vorstellungskraft angeschaut werden". Allein durch Verschmähung dieser Versinnlichungsmittel, die bei planimetrischen Betrachtungen auch nicht so leicht zu einer unrichtigen Auffassung verleiten, würde ich den Studirenden das Verständniss meiner Vorträge unnöthig erschwert haben.

Indem der von Herrn von Staudt zuerst eingeschlagene Lehrgang die Rechnungen ausschliesst und alle auf Massverhältnissen beruhenden Eigenschaften der geometrischen Gebilde gesondert untersucht, bietet er noch einen Vortheil, den ich sehr hoch anschlagen möchte. Er bringt nämlich das wichtige, so ungemein fruchtbare Princip der Dualität oder Reciprocität, von welchem die ganze Geometrie der Lage beherrscht wird, in seiner vollen Reinheit und in seinem ganzen Umfange zur schönsten Geltung. Kein anderer Lehrgang, der das Mass zu Hülfe nimmt, kann sich dieses Vorzuges rühmen, und zwar einfach deshalb, weil in der Geometrie des Masses jenes Princip nicht allgemein gültig ist. Anerkanntermassen aber bietet die Geometrie Nichts, was für den Anfänger so anregend wäre, ihn so zum Selbstschaffen anspornte, wie das Princip der Reciprocität; und je früher er damit bekannt gemacht wird, desto besser. Dass dieses Gesetz besonders in der Geometrie des Raumes so klar hervortritt, war für mich ein massgebender Grund dafür, die stereometrischen Betrachtungen von den planimetrischen nicht zu trennen. — Die metrischen Relationen, namentlich diejenigen der Kegelschnitte, habe ich übrigens durchaus nicht vernachlässigt, sondern in weiterem Umfange, als dieses von Steiner und Herrn von Staudt geschieht, überall dort entwickelt, wo sie sich als besondere Fälle der allgemeinen Sätze von selbst darboten.

Zu den Kegelschnitten und den übrigen Gebilden zweiter Ordnung, von denen diese erste Abtheilung meiner Vorträge vornehmlich handelt, gelange ich auf einem anderen Wege als Steiner und Herr von Staudt, welcher letztere die Theorie jener Gebilde auf die Lehre von der Collineation und der Reciprocität gründet. Ich hoffe dadurch, dass ich die Gebilde zweiter Ordnung gleich bei der Untersuchung der projectiven einförmigen Grundgebilde einführe, das Verständniss der projectiven Verwandtschaft erleichtert zu haben; zugleich gewinne ich dadurch den Vortheil, den Anfänger auf das schwierigere Studium der Collineation und der Reciprocität allmälig vorbereiten zu können. Steiner hat in seinem höchst anregenden, bahnbrechenden Werke „Systematische Entwickelung etc." die Hülfsmittel geschaffen, deren ich mich vom fünften bis zum zehnten Vortrage vorzugsweise bediene; doch musste ich aus schon berührten Gründen darauf verzichten, gleich Steiner die Kegelschnitte mittelst des Kreises zu definiren.

Zürich, den 8. März 1866.

Der Verfasser.

Vorwort zur dritten Auflage der ersten Abtheilung.

Diese neue Auflage übertrifft die erste an Umfang um zwei Drittel ihrer Bogenzahl. Die bedeutendste, schon in der zweiten Auflage vorgenommene Aenderung besteht in der Hinzufügung einer Sammlung von 223 Aufgaben und Lehrsätzen. Ein Theil dieser Sammlung befand sich zuerst im Anhange der zweiten Abtheilung, ist aber durch zahlreiche neue Aufgaben und nützliche Sätze bedeutend vergrössert worden. Die eilf Abschnitte dieses Theiles entsprechen, mit Ausnahme der beiden über das Princip der reciproken Radien und über die geradlinigen Flächen dritter Ordnung, den mit ihnen gleichnamigen Vorträgen, und ihre Aufgaben und verhältnissmässig leicht zu beweisenden Sätze sind hauptsächlich zur Uebung für Studirende bestimmt. Jedem Anfänger rathe ich dringend, die Constructions-Aufgaben wirklich auszuführen, weil das Verständniss der Geometrie der Lage durch das Zeichnen wesentlich gefördert wird.

Die letzten vier Abschnitte der „Aufgaben und Lehrsätze“ enthalten neue Untersuchungen, welche der ersten Auflage fremd geblieben und in mehreren wesentlichen Punkten meines Wissens zuerst in diesem Buche mit den Hülfsmitteln der synthetischen Geometrie durchgeführt sind. Damit diese Untersuchungen über Polvierecke und Polvierseite und über lineare Systeme und Gewebe von

Kegelschnitten nicht zu umfangreich würden, habe ich für sie eine möglichst knappe Form der Darstellung gewählt. Dadurch und durch Einführung einiger einfacher Begriffe ist es gelungen, die wichtigen Theorien der Büschel, Schaaren, Netze und Schaarschaaren von Kegelschnitten in einem neuen Zusammenhange auf dem engen Raume von einundzwanzig Seiten darzustellen. Durch den Satz des Herrn Stephen Smith, dessen synthetischer Beweis mir erst nach manchen vergeblichen Versuchen gelang, und durch das Gesetz der Reciprocität gestalten sich diese Theorien merkwürdig einfach und übersichtlich.

Den von Staudt'schen Beweis des Fundamentalsatzes der Geometrie der Lage habe ich unter Benutzung der darauf bezüglichen Bemerkungen der Herren F. Klein und Darboux (Math. Annalen, Bd. 17) durch einen einwandfreien ersetzt. Dass in zwei projectiven Grundgebilden einer stetigen Aufeinanderfolge von Elementen des einen wieder eine stetige Folge von Elementen des andern Gebildes entspricht, wurde in der zweiten Auflage bei der Definition des „Beziehens“ ausdrücklich angenommen, wird aber nunmehr (Seite 52) bewiesen auf Grund der von Staudt'schen Definition der Projectivität.

Dem bereitwilligen Entgegenkommen des neuen Herrn Verlegers verdanke ich es, dass dieses Buch jetzt, gleich seinen Italienischen und Französischen Uebersetzungen, mit Holzschnitten im Texte ausgestattet ist.

Strassburg i. E., den 8. September 1886.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichniss.

Einleitung.

Die Mehrzahl von Ihnen, meine Herren, wird bis jetzt von der Geometrie der Lage kaum mehr als den Namen gehört haben. Denn leider ist die Kenntniss dieser bedeutsamen, durch Fülle des Inhalts, Schönheit der Form und Einfachheit der Entwickelungen ausgezeichneten Schöpfung der neuesten Zeit noch sehr wenig verbreitet; und obgleich die neuere Geometrie zu den anregendsten Zweigen der mathematischen Wissenschaften zu rechnen ist, und viele schöne Anwendungen auf die technischen und die Naturwissenschaften zulässt, so ist es ihr doch noch nicht gelungen, in den Schulen allgemein Eingang zu finden. Vielleicht ist es deshalb nicht ohne Nutzen, wenn ich meinen Vorträgen einige Worte über die Stellung voranschicke, welche die Geometrie der Lage den sonstigen Zweigen der Geometrie gegenüber einnimmt, und wenn ich Ihnen hernach einige Sätze und Aufgaben aus der Geometrie der Lage nenne, welche geeignet sind, Ihnen diese Wissenschaft zu kennzeichnen.

Von der Geometrie der Alten und der analytischen Geometrie unterscheidet sich die reine Geometrie der Lage wesentlich dadurch, dass sie von dem Begriff des Masses keinen Gebrauch macht; im Gegensatz zu ihr wird daher die ältere Geometrie auch wohl „Geometrie des Masses" genannt. In der reinen Geometrie der Lage ist z. B. von Halbirungen geradliniger Strecken, von rechten Winkeln und Perpendikeln, von Verhältnissen und Proportionen, von Inhaltsberechnungen nicht die Rede; eben so wenig von trigonometrischen Zahlen, oder gar von analytischen Gleichungen krummer Linien. Denn alle diese Gegenstände der älteren Geometrie setzen Messungen voraus. Am Schlusse jedes grösseren Abschnittes werde ich jedoch von der Geometrie der Lage Anwendungen auf die Geometrie des Masses machen, in denen ich die Planimetrie, sowie gelegentlich einmal den Begriff des Sinus als bekannt voraussetzen werde. Mit gleichschenkligen und gleichseitigen Dreiecken werden wir uns so wenig beschäftigen, wie mit rechtwinkligen; und auch das Rechteck, die regelmässigen Polygone und der Kreis bleiben von unserer Untersuchung, abgesehen von jenen Anwendungen, ausgeschlossen. Nur anhangsweise werden wir vom Mittelpunkt, von den Axen und Brennpunkten der sogenannten Curven II. Ordnung oder Kegelschnitte reden, dagegen aber viel allgemeinere und wichtigere Eigenschaften dieser Linien kennen lernen, als diejenigen, auf welche die meisten Lehrbücher der analytischen Geometrie sich beschränken. Wir werden uns sogar einen neuen Weg zu den Kegelschnitten bahnen müssen, weil wir der Hülfe des Kreiskegels, mittelst dessen die Alten, und der Gleichungen, durch welche die Jünger des Descartes sie definiren, in der Geometrie der Lage entbehren. Dass in meinen Vorträgen keine Rechnungen vorkommen werden, brauche ich nach dem schon Gesagten wohl kaum zu erwähnen; nur in den Anwendungen auf die Geometrie des Masses werden wir bisweilen vom Gleichheitszeichen Gebrauch machen.

Von den geometrischen Kenntnissen, welche in den Schulen gelehrt werden, benutze ich deshalb nur sehr wenige. Dagegen würde Ihnen eine gewisse Uebung in der Fähigkeit, sich geometrische Gebilde auch ohne bildliche Darstellung zur Anschauung zu bringen, von grossem Nutzen sein. Denn es ist mir nicht wohl möglich, jeden Satz, namentlich wenn ein solcher sich auf Gebilde im Raume bezieht, durch Figuren zu erläutern; ich muss Ihrer Vorstellungskraft manchmal Etwas zumuthen. Da diese auch in der darstellenden oder descriptiven Geometrie vielfach in Anspruch genommen wird, so wird Ihnen die Kenntniss der letzteren sehr zu Statten kommen; wie auch umgekehrt die Geometrie der Lage ein vorzügliches Vorstudium bildet für die darstellende Geometrie. Ueberhaupt ist von allen übrigen Zweigen der Geometrie die darstellende am meisten geeignet, das Studium der Geometrie der Lage zu erleichtern, schon weil sie der letzteren sehr nahe verwandt ist. Denn auch in der darstellenden Geometrie kommen weniger Grössenbeziehungen in Betracht, als vielmehr die Lage der Gebilde theils zu einander, theils zu den Projectionsebenen, wobei denn freilich die Benutzung des Kreises und des rechten Winkels nicht verschmäht wird. Vor Allem werden Sie finden, dass die Perspective oder die centrale Projection auch in der Geometrie der Lage eine grosse Rolle spielt, und dass viele in letzterer benutzte Ausdrücke von jener herrühren.

Zu der analytischen Geometrie steht die reine Geometrie in einem gewissen Gegensatze schon durch ihre Methode, welche die aus der Geometrie der Alten Ihnen bekannte synthetische ist. Wir werden von einer kleinen Zahl von „Grundgebilden" ausgehen; die einfachen Beziehungen, welche zwischen diesen sich aufstellen lassen, führen uns dann zu den sogenannten Gebilden zweiter Ordnung, zu denen auch die Kegelschnitte gehören, und lassen zugleich die Haupteigenschaften dieser Gebilde leicht erkennen. Von den Gebilden zweiter Ordnung können wir sodann in derselben Weise zu immer neuen Gebilden fortschreiten. Auf die Analysis, dieses mächtige Werkzeug der modernen Mathematik, müssen wir bei unseren Untersuchungen schon deshalb verzichten, weil wir das Mass nicht benutzen; denn um mit räumlichen Gebilden rechnen zu können, müssen wir sie zuerst durch Zahlen ausdrücken, d. h. ausmessen. Die reine Geometrie wird wegen der in ihr angewendeten Methode vielfach im Gegensatz zu der analytischen mit dem Namen „synthetische Geometrie" bezeichnet.

Eben weil wir in der reinen Geometrie der Lage von Massverhältnissen absehen, sind ihre Sätze und Aufgaben sehr allgemein und umfassend. Z. B. gerade die wichtigsten von denjenigen Eigenschaften der Kegelschnitte, welche in den Lehrbüchern der analytischen Geometrie bewiesen werden, sind ganz specielle Fälle von Sätzen, welche wir später kennen lernen werden. Einige Beispiele mögen dazu dienen, Ihnen auch in dieser Hinsicht den Stoff näher zu charakterisiren, mit welchem wir uns in diesen Vorträgen beschäftigen werden.

Bei dem Entwerfen von Bauwerken und überhaupt bei dem Zeichnen ist nicht selten die Aufgabe zu lösen: „Durch den unzugänglichen Schnittpunkt von zwei (convergirenden) Geraden eine dritte Gerade zu ziehen." Die Geometrie des Masses liefert uns beliebig viele Punkte einer solchen dritten Geraden z. B. mit Hülfe des Satzes, dass auf parallelen Geraden durch irgend drei Transversalen, die sich in einem Punkte schneiden, proportionale Abschnitte gebildet werden. Die Geometrie der Lage giebt uns eine einfachere Lösung an die Hand. Wir nehmen nämlich ausserhalb der beiden gegebenen Geraden a und b (Fig. 1) irgend einen Punkt P an, und legen durch diesen beliebig viele Trans-

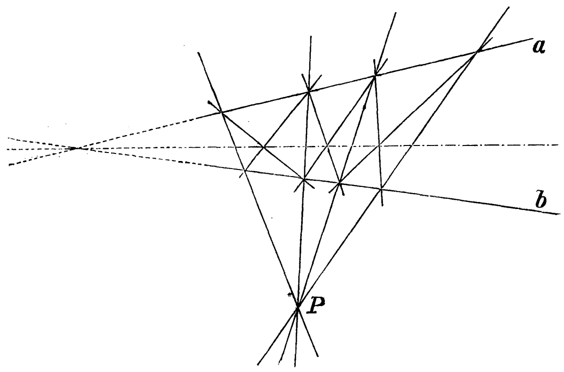

Fig. 1.

versalen. Suchen wir dann in jedem Viereck, welches irgend zwei dieser Transversalen mit a und b bilden, den Schnittpunkt der Diagonalen, so liegen alle diese Schnittpunkte auf einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt von a und b hindurchgeht.*) Der Beweis folgt mit Leichtigkeit aus dem wichtigen Satz über die harmonische Theilung am Viereck, welcher folgendermassen ausgesprochen werden kann. Nimmt man (Fig. 2) auf einer Geraden

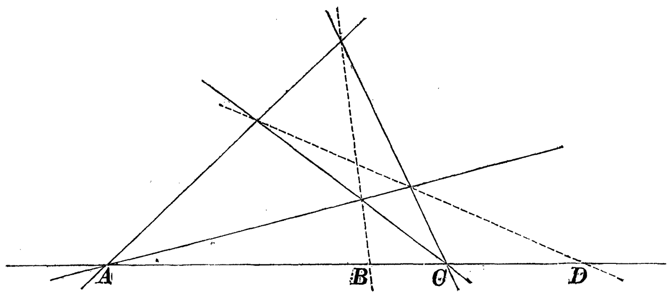

Fig. 2.

---

*) Anfängern empfehle ich sehr, zu diesem Satze und namentlich zu späteren minder einfachen Sätzen die Figur nach den Angaben des Textes selbst zu zeichnen, ohne die von mir gezeichnete vorher anzusehen. Eine allmählig entstehende Figur ist weit leichter aufzufassen, und erläutert auch meistens den darzustellenden Satz weit besser, als eine mit allen Hülfslinien fertig gezeichnete.

drei Punkte A, B, C an, und construirt irgend ein Viereck so, dass zwei Gegenseiten durch A, eine Diagonale durch B und die beiden anderen Gegenseiten durch C gehen, so trifft die zweite Diagonale jene Gerade $\overline{ABC}$ in einem ganz bestimmten vierten Punkte D. Sie können durch Construction verschiedener, den ersten Bedingungen genügender Vierecke leicht eine Bestätigung dafür erhalten, dass wirklich alle zweiten Diagonalen derselben durch jenen vierten Punkt D gehen. Die Punkte A, B, C, D werden vier harmonische Punkte genannt, so dass D von B harmonisch getrennt ist durch die Punkte A und C. In der Feldmesskunst kann jener Satz unter Umständen dazu benutzt werden, eine gerade Linie über ein Hinderniss, z. B. einen Wald, hinaus zu verlängern durch Umgehung desselben.

Von Sätzen über das Dreieck will ich nur den folgenden nennen: Liegen zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ so, dass (Fig. 3) die Verbindungslinien $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$ gleichnamiger Eck-

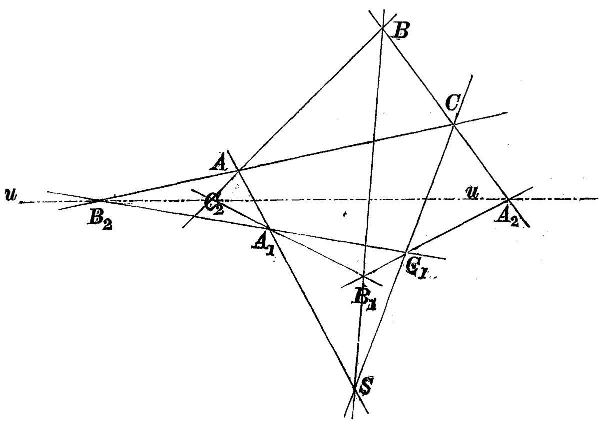

Fig. 3.

punkte sich in einem und demselben Punkte S schneiden, so begegnen sich die gleichnamigen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{A_1B_1}$, $\overline{BC}$ und $\overline{B_1C_1}$, $\overline{CA}$ und $\overline{C_1A_1}$ in drei Punkten C_2, A_2, B_2, welche auf einer Geraden u liegen; und umgekehrt. Die den Satz erläuternde Figur verdient Beachtung als Repräsentant einer Gattung von merkwürdigen, durch eine gewisse Regelmässigkeit ausgezeichneten Configurationen. Sie besteht aus 10 Punkten und 10 Geraden;

auf jeder der letzteren liegen drei von den 10 Punkten, und durch jeden von diesen gehen drei von den 10 Geraden.

Eine andere Reihe von Sätzen knüpft sich an die Curven zweiter Ordnung oder Kegelschnitte. Aus der analytischen Geometrie ist Ihnen bekannt und wird später synthetisch bewiesen werden, dass eine Curve II. Ordnung durch fünf Punkte oder fünf Tangenten völlig bestimmt ist. Aber Sie kennen auch die Weitläufigkeit, welche die wirkliche Berechnung und Construction eines so bestimmten Kegelschnittes bietet. Die Geometrie der Lage beweist nun zwei sehr wichtige Sätze über die Curven II. Ordnung, die es uns ermöglichen, zu fünf gegebenen Punkten oder Tangenten einer solchen Curve beliebig viele neue Punkte resp. Tangenten mit Leichtigkeit zu construiren und so die Curve selbst schnell zu zeichnen. Wer von Ihnen diese Sätze bereits kennt, wird zugleich wissen, wie viele Hülfsmittel ihr Beweis in der analytischen Geometrie fordert. Der erste, von Pascal zuerst aufgestellte Satz sagt aus, dass die drei paar Gegenseiten jedes einer Curve II. Ordnung eingeschriebenen Sechsecks sich in drei Punkten schneiden, welche auf einer Geraden liegen; nach dem zweiten, von Brianchon herrührenden gehen von einem umschriebenen Sechseck die drei Hauptdiagonalen (d. h. Verbindungslinien gegenüberliegender Eckpunkte) allemal durch einen und denselben Punkt. Beide Sätze lassen sich leicht am Kreise prüfen. Sie bemerken, dass in denselben von Grössenverhältnissen des Kegelschnittes, dass von seinem Mittelpunkte, seinen Axen und Brennpunkten nicht die Rede ist. Eben darum aber sind diese Sätze von der grössten Allgemeinheit und Bedeutung, so dass die ganze Theorie der Kegelschnitte auf sie gegründet werden kann. Namentlich lässt sich das wichtige Problem der Tangentenziehung an einem gegebenen Punkt mittelst des Pascal'schen Satzes lösen, selbst wenn der Kegelschnitt nur durch fünf Punkte gegeben ist, ohne vollständig gezeichnet vorzuliegen.

Das Problem der Tangentenziehung an Curven II. Ordnung kann in vielen Fällen mit Hülfe eines Satzes gelöst werden, welcher eine der wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnitte aussagt, dennoch aber in den Lehrbüchern der analytischen Geometrie häufig sich nicht findet, weil sein analytischer Beweis ziemlich verwickelt und wenig geeignet ist, jene Eigenschaft in das rechte Licht zu setzen. Nämlich wenn durch einen Punkt A

(Fig. 4), welcher in der Ebene einer Curve II. Ordnung, jedoch nicht auf der Curve liegt, Secanten an diese gezogen werden, so bestimmen beliebige zwei solche Secanten vier Punkte, wie K, L,

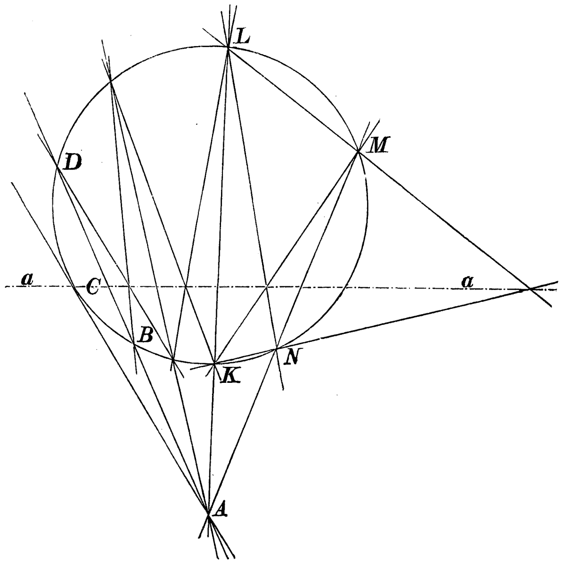

Fig. 4.

M, N auf der Curve. Je zwei von den Secanten verschiedene Verbindungslinien dieser vier Punkte, etwa $\overline{LM}$ und $\overline{NK}$ oder $\overline{KM}$ und $\overline{LN}$, schneiden sich dann in einem Punkte einer bestimmten Geraden a, welche die Polare des gegebenen Punktes A genannt wird. Liegt der Punkt A ausserhalb der Curve, so schneidet seine Polare a die letztere in den Berührungspunkten der beiden Tangenten, welche von A an die Curve gelegt werden können; liegt A innerhalb der Curve, so wird diese von a nicht geschnitten. Sie können diesen Satz benutzen, um durch einen gegebenen Punkt mit alleiniger Anwendung des Lineales Tangenten an einen Kegelschnitt zu ziehen. Auf jeder durch A gelegten Secante liegen noch vier bemerkenswerthe Punkte: nämlich A selbst, sodann der erste Schnittpunkt B mit der Curve, hierauf folgt der Schnittpunkt C mit der Polare a von A und endlich der zweite Schnittpunkt D mit der Curve. Diese vier Punkte A, B, C, D sind vier harmonische Punkte, und die Polare a enthält also jeden Punkt, welcher durch zwei Curvenpunkte harmonisch von A getrennt ist. Die wichtigen Sätze über Mittelpunkt und conjugirte Durchmesser von Kegelschnitten sind ganz specielle Fälle der eben genannten Sätze. Diese letzteren lassen sich mit Leichtigkeit ausdehnen auf die Flächen zweiter Ordnung, weil diese mit einer sie schneidenden Ebene im Allgemeinen eine Curve II. Ordnung gemein haben.

Aus diesen wenigen Beispielen, die ich noch beliebig vermehren könnte, werden Sie schon erkannt haben, mit welchen ganz anderen, aber gewiss nicht weniger wichtigen Sätzen die Geometrie der Lage sich beschäftigt, als z. B. die analytische Geometrie. Ich erinnere Sie noch daran, dass die letztere besonders durch die Winkel, welche die Tangenten der Kegelschnitte mit den Brennstrahlen bilden, oder durch die Abschnitte, welche sie auf den Axen hervorrufen, die Lage der Tangenten zu bestimmen sucht, also Alles auf Massverhältnisse zurückführt. Natürlich rede ich hier nur von den Elementen der analytischen Geometrie, auf welche die meisten Lehrbücher sich beschränken, nicht aber von den höchst fruchtbaren neueren Methoden, deren Dasein vor Allen dem scharfsinnigen Plücker zu danken ist.

Erster Vortrag.

Die Methode des Projicirens und Schneidens. Die sechs Grundgebilde der neueren Geometrie.

Bekanntlich gründen sich die vielen Begriffe, welche in der Geometrie der Alten, der Trigonometrie und der analytischen Geometrie aufgestellt werden, zum grössten Theil auf das Mass; sie können also in der reinen Geometrie der Lage keine Anwendung finden. Es kann deshalb nicht überraschen, dass die neuere Geometrie für ihre Zwecke gleichfalls eine beträchtliche Anzahl eigenthümlicher Begriffe aufgestellt hat, mit denen wir uns in diesem und den nächsten Vorträgen bekannt machen wollen, und die wir fortwährend anwenden müssen.

Der Punkt, die Gerade und die Ebene sind die einfachen „Elemente" der neueren Geometrie. Wir werden in der Regel die Punkte durch grosse lateinische Buchstaben bezeichnen, gerade Linien durch kleine lateinische, und Ebenen durch griechische Buchstaben. Die Geraden, welche wir häufig auch „Strahlen" nennen werden, und die Ebenen betrachten wir immer als allseitig unbegrenzt, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil angegeben wird. Wir können diese Elemente mit einander zu zusammengesetzten Gebilden verbinden, indem wir eines derselben als „Träger" unendlich vieler anderer ansehen. Wir gelangen so zu den sogenannten Grundgebilden der neueren Geometrie. Bevor ich diese erkläre, schicke ich zur Vorbereitung eine kurze Erörterung voraus über die wichtige und häufig von uns anzuwendende Methode des Projicirens und Schneidens.

Wenn wir einen Gegenstand, etwa ein Gebäude, anschauen, so wirft jeder (sichtbare) Punkt desselben einen Strahl in unser Auge, welcher der „Schein" oder auch der „Projectionsstrahl" jenes Punktes genannt wird. Der Schein des ganzen Gebäudes ist also aus vielen Strahlen zusammengesetzt, von denen jeder einen oder mehrere Punkte vom Auge aus „projicirt." Liegt eine Anzahl von Punkten in einer nicht durch das Auge gehenden Geraden, so liegen alle ihre Projectionsstrahlen in derjenigen Ebene, welche vom Auge aus durch diese Gerade gelegt werden kann; jede solche Gerade wird also aus dem Auge durch eine Ebene projicirt, welche der „Schein" oder die „projicirende Ebene" jener Geraden genannt wird. Ebenso wird im Allgemeinen eine Curve durch eine conische Fläche projicirt. Den Schein des Gebäudes können wir nun durch eine Ebene auffangen oder „schneiden", indem wir jeden Projectionsstrahl in einem Punkte und jede projicirende Ebene in einer Geraden schneiden. Wir erhalten dann in der Ebene als „Schnitt" oder „Spur" jenes Scheines ein perspectives Bild, eine „Projection" des Gebäudes, und diese Projection sendet offenbar ganz denselben Schein in das Auge, wie das Gebäude selbst, und ist deshalb auch sehr geeignet, uns eine Vorstellung von letzterem zu verschaffen. Die Photographieen räumlicher Gegenstände sind im Wesentlichen solche perspective ebene Bilder derselben.

Auf diese Art des Projicirens, die unter dem Namen „Centralprojection" bekannt ist, gründet sich die Lehre von der Perspective; und alle anderen Arten des Projicirens, die in der darstellenden Geometrie üblich sind, lassen sich als besondere Fälle dieser einen Art auffassen. Damit z. B., wie in der orthogonalen Projection, die Projectionsstrahlen parallel seien, brauchen wir uns nur das Auge in unendliche Entfernung gerückt zu denken. Auch die Schatten, welche Gegenstände auf Ebenen werfen, wenn sie aus einem endlichen oder unendlich fernen Punkt beleuchtet werden, sind offenbar Nichts weiter, als Projectionen jener Gegenstände, indem nur an die Stelle des Auges der leuchtende Punkt tritt.

Wie man mittelst der Methode des Projicirens und Schneidens durch blose Anschauung wichtige Sätze finden und zugleich beweisen kann, möge ein einfaches Beispiel lehren. Parallele Gerade werden vom Auge aus durch Ebenen projicirt, welche sich alle in einer und derselben Geraden schneiden, nämlich in der durch das Auge gelegten Parallelen; von einer beliebigen Bildebene aber werden diese projicirenden Ebenen in Geraden geschnitten, die alle durch einen Punkt, die Spur jener Schnittlinie, gehen. Folglich müssen in perspectiven Ansichten eines Gebäudes oder sonstigen Gegenstandes die Bilder paralleler Kanten alle nach einem Punkte, ihrem sogenannten Fluchtpunkte, hin convergiren, und nur in einem leicht angebbaren besonderen Falle sind sie ebenfalls parallel. Wir haben damit beiläufig einen bekannten Hauptsatz der Centralperspective aufgestellt und bewiesen.

Wir wollen nun, abgesehen von allen optischen Beziehungen, die soeben benutzten Ausdrücke „Schein, Strahl, projiciren, schneiden" u. s. w. auch ferner anwenden, indem wir statt des Auges einen beliebigen Punkt S und statt des bestimmten Gegenstandes oder Gebäudes ein beliebiges System Ω von Punkten und Geraden im Raume annehmen. Dieses System Ω wird aus S durch ein System von Strahlen und Ebenen projicirt, nämlich jeder Punkt durch einen Strahl und jede nicht durch S gehende Gerade durch eine Ebene. Der Punkt S ist dann als „Träger" aller dieser Strahlen und Ebenen anzusehen, welche zusammen den „Schein" des Systems Ω bilden. Nehmen wir im Raum ein beliebiges System Σ von Ebenen und Geraden an, so wird jede neue Ebene ε dasselbe in einem System von Geraden und Punkten „schneiden", nämlich im Allgemeinen jede Ebene in einer Geraden, und jede Gerade in einem Punkte. Die Ebene ε erscheint dann als „Träger" aller dieser Geraden und Punkte, welche zusammen den „Schnitt" (die „Spur") des Systems Σ ausmachen.

Wir können auch aus Geraden projiciren, und durch Gerade Schnitte hervorrufen. Jeder ausserhalb einer Geraden g gelegene Punkt bestimmt nämlich mit g eine Ebene, oder wird aus g durch eine Ebene „projicirt", und ebenso wird jede Ebene, die nicht durch g geht, von dieser Geraden in einem Punkte „geschnitten." Die Gerade erscheint hiernach bald als Träger von Ebenen, welche in ihr sich schneiden, bald als Träger von Punkten, welche auf ihr liegen.

Durch solche Betrachtungen gelangen wir zu den folgenden sogenannten Grundgebilden, die in der neueren Geometrie eine wichtige Stelle einnehmen.

Die Gesammtheit aller in einer Geraden liegenden Punkte wird eine „Punktreihe" (auch wohl ein „gerades Gebilde") genannt; die einzelnen Punkte der Geraden heissen „Elemente" der Punktreihe. Diese Punkte denken wir uns starr mit einander verbunden, so dass ihre gegenseitige Lage auch dann noch unverändert bleibt, wenn die Gerade, ihr Träger, verschoben wird. Ein von zwei Punkten begrenzter Theil einer Punktreihe heisst eine „Strecke.“

Die Gesammtheit aller durch einen Punkt gehenden und in einer und derselben Ebene liegenden Strahlen soll ein „Strahlenbüschel“ heissen. Der gemeinschaftliche Schnittpunkt der Strahlen heisst der „Mittelpunkt“ des Büschels; die einzelnen, nach beiden Seiten unbegrenzten Strahlen sind die „Elemente“ desselben. Auch hier denken wir uns diese Elemente starr mit einander verbunden.

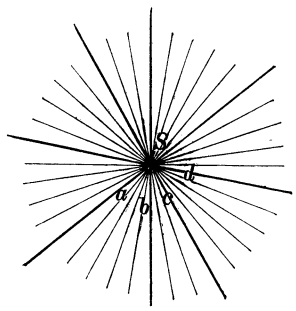

Fig. 5.

Als „Träger“ des Strahlenbüschels kann nach Belieben der Mittelpunkt oder auch die Ebene betrachtet werden, in welcher die Strahlen liegen. Ein von zwei Strahlen als „Schenkeln“ begrenzter Theil eines Strahlenbüschels heisst ein „vollkommener ebener Winkel.“ Derselbe besteht aus zwei „einfachen“ ebenen Winkeln, die Scheitelwinkel zu einander sind. Werden in einem beliebigen Strahlenbüschel S (Fig. 5) irgend vier Strahlen a, b, c, d angenommen, so sind unter diesen zwei paar getrennte Strahlen. Nämlich a und c sind durch b und d von einander getrennt, so dass man in dem Büschel von a nicht auf c übergehen kann, ohne entweder b oder d zu überschreiten.

Die Gesammtheit aller durch eine Gerade gehenden, allseitig unbegrenzten Ebenen wollen wir einen „Ebenenbüschel“ nennen, und die Gerade soll die „Axe“ desselben heissen. Die „Elemente“ des Büschels, d. h. seine Ebenen, denken wir uns, wie bei der Punktreihe die Punkte, starr mit einander verbunden in unveränderlicher gegenseitiger Lage. Ein von zwei Ebenen als „Schenkeln“ begrenzter Theil eines Ebenenbüschels heisst ein „vollkommener Flächenwinkel“, und besteht aus zwei „einfachen“ Flächenwinkeln, die zu einander Scheitelwinkel sind. Unter vier Ebenen eines Büschels sind wieder zwei paar getrennte.

Manchmal, wenn keine Zweideutigkeit möglich ist, werde ich ein Gebilde, welches nur aus einzelnen Punkten und Strecken einer Geraden besteht, eine Punktreihe nennen. Ebenso soll ein Gebilde in einem Büschel, welches nur aus einzelnen Elementen und Winkeln des Büschels besteht, manchmal selbst ein Büschel genannt werden. Dabei wollen wir uns stets erinnern, dass wir abweichend von den gewöhnlichen Erklärungen den Winkel als Theil eines Büschels definirt haben.

Die Punktreihe, den Strahlenbüschel und den Ebenenbüschel bezeichnen wir als die einförmigen Grundgebilde oder Grundgebilde erster Stufe. Die Elemente eines einförmigen Grundgebildes, z. B. die Ebenen eines Ebenenbüschels, haben wir uns als etwas Einfaches vorzustellen, indem wir absehen von den Gebilden (Figuren u. dergl.), deren Träger jene Elemente sein können. Bei dem Strahlenbüschel wird diese Vorstellung dadurch erleichtert, dass wir die Geraden, deren Gesammtheit den Büschel ausmacht, eben mit dem Namen „Strahlen" bezeichnen. Denn unter einem Strahl wird gewöhnlich eine Gerade an und für sich verstanden, abgesehen von den in ihr gelegenen Punkten und durch sie gehenden Ebenen. Leider fehlt uns für die Ebene eine entsprechende zweite Bezeichnung.

Von den Grundgebilden der ersten Stufe können wir uns auch eines mittelst jedes anderen erzeugt denken. So wird eine Punktreihe $ABCD$ (Fig. 6) aus jedem ausserhalb gelegenen Punkte S

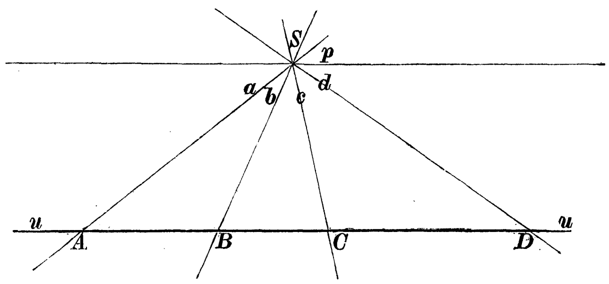

Fig. 6.

durch einen Strahlenbüschel $abcd$ projicirt, von welchem die Punktreihe $ABCD$ ein Schnitt ist. Ebenso wird die Punktreihe $ADCB$ durch den Büschel $adcb$ projicirt. Ein Ebenenbüschel $\alpha\beta\gamma\delta$ wird von jeder nicht durch seine Axe gehenden Ebene in einem Strahlenbüschel $abcd$ geschnitten, dessen Mittelpunkt auf der Axe liegt; jeder Strahlenbüschel wird aus einem nicht in seiner Ebene gelegenen Punkte durch einen Ebenenbüschel projicirt. Endlich wird jeder Ebenenbüschel von einer Geraden, die mit seiner Axe nicht in einer Ebene liegt, in einer Punktreihe geschnitten, nämlich jede Ebene des Büschels in einem Punkte der Punktreihe; und jede

Punktreihe wird aus einer Axe, die mit ihr nicht in einer Ebene liegt, durch einen Ebenenbüschel projicirt. Schon durch diese Beziehungen ist es gerechtfertigt, wenn wir die Punktreihe, den Strahlen- und den Ebenenbüschel als Grundgebilde der gleichen, nämlich der ersten Stufe bezeichnen. Denn wir dürfen uns hiernach vorstellen, dass eine Punktreihe ebenso viele Punkte enthält, wie ein Büschel Strahlen oder Ebenen.

Grundgebilde der zweiten Stufe haben wir zwei: nämlich das ebene Feld und den Strahlenbündel. Die Gesammtheit aller Punkte und Strahlen, die in einer Ebene enthalten sind, nennen wir ein „ebenes System oder Feld"; die Ebene ist der „Träger" desselben. Im ebenen Felde sind hiernach nicht nur Punkte und Strahlen, sondern auch unendlich viele Punktreihen und Strahlenbüschel als Elemente enthalten; denn alle in einer Geraden des Feldes liegenden Punkte bilden zusammen eine Punktreihe, und alle durch einen Punkt gehenden Strahlen des Feldes einen Strahlenbüschel. Mit Recht bezeichnen wir daher das ebene Feld als ein Grundgebilde von höherer Stufe als die einförmigen Grundgebilde. — Ferner nennen wir die Gesammtheit aller Strahlen und Ebenen, die durch einen Punkt im Raume (Mittelpunkt) denkbar sind, einen „Strahlenbündel." In demselben sind nicht nur Strahlen und Ebenen, sondern auch unendlich viele Strahlenbüschel und Ebenenbüschel als Elemente enthalten. Denn alle Ebenen des Bündels, welche sich in einer und derselben Axe schneiden, bilden einen Ebenenbüschel; und ebenso bilden alle Strahlen desselben, welche in einer und derselben Ebene liegen, einen Strahlenbüschel. Der Strahlenbündel ist also wirklich ein Grundgebilde von höherer Stufe, als die einförmigen Grundgebilde. Der Name „Bündel", welcher eine Vielheit von höherer Stufe bezeichnen soll, als der Name „Büschel", ist von v. Staudt gewiss sehr passend gewählt; doch können wir das vorliegende Grundgebilde mit demselben Rechte einen „Ebenenbündel" wie einen „Strahlenbündel" nennen, weil es Ebenen sowohl wie Strahlen als Elemente enthält. Jenachdem die Punkte oder die Geraden der Ebene mehr in Betracht kommen, wird das ebene Feld als „Punktfeld" oder als „Strahlenfeld" bezeichnet.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass wir uns auch im ebenen Felde und im Strahlenbündel die Elemente, aus welchen sie bestehen, als starr mit einander verbunden denken, so dass z. B. im Bündel die gegenseitige Lage der darin enthaltenen

Strahlen, Ebenen und Büschel sich nicht ändert, wenn der Mittelpunkt, welcher der Träger des Bündels ist, bewegt wird.

Wir dürfen uns vorstellen, dass ein Strahlenbündel ebenso viele Strahlen und Ebenen enthält, wie ein ebenes Feld Punkte und Strahlen, und sind deshalb durchaus berechtigt, beide Grundgebilde als zu derselben, zweiten Stufe gehörig zu betrachten. Denn wir können uns den Strahlenbündel mittelst des ebenen Feldes erzeugt denken, und umgekehrt. Projiciren wir nämlich ein ebenes Feld Σ aus einem nicht in ihm gelegenen Punkte S, so dass jeder Punkt P von Σ durch einen Strahl SP von S projicirt wird und jeder Strahl von Σ durch eine Ebene von S, so erhalten wir einen Strahlenbündel S, welcher ein „Schein" des Feldes Σ genannt wird, und von welchem das Feld ein „Schnitt" ist. Um Ihrer Vorstellung zu Hülfe zu kommen, will ich annehmen, Σ sei eine ebene, in bunten Farben prangende, unbegrenzte Landschaft, die sich zu Ihren Füssen ausbreiten möge, und der ausserhalb gelegene Punkt S sei Ihr Auge. Jeder Punkt der Landschaft sendet dann einen Lichtstrahl in Ihr Auge, jede Gerade der Landschaft eine Lichtebene. Und stellen Sie sich diese Strahlen und Ebenen als allseitig unbegrenzt vor, so erhalten Sie als Schein der ganzen Landschaft offenbar einen Strahlenbündel. Wir können weiter schliessen: Jede Punktreihe des ebenen Feldes wird aus S durch einen Strahlenbüschel projicirt, jeder Strahlenbüschel durch einen Ebenenbüschel, jede Curve durch eine conische Fläche des Bündels; oder mit anderen Worten: Der Schein einer Punktreihe, eines Strahlenbüschels oder einer Curve des ebenen Feldes ist resp. ein Strahlenbüschel, ein Ebenenbüschel oder eine conische Fläche des Strahlenbündels. Ebenso wird jede Strecke durch einen ebenen Winkel projicirt, jeder ebene Winkel durch einen Flächenwinkel etc. Betrachten wir umgekehrt den Strahlenbündel als das Ursprüngliche, denken wir uns etwa seinen Mittelpunkt als leuchtenden Punkt, der nach allen Seiten hin farbige Strahlen entsendet, so kann das Feld als Schnitt desselben angesehen werden. Dann wird jeder Strahl des Bündels in einem Punkte des Feldes geschnitten, jede Ebene in einer Geraden, jeder Strahlenbüschel in einer Punktreihe und jeder Ebenenbüschel in einem Strahlenbüschel.

Endlich besteht auch noch ein Grundgebilde der dritten Stufe, nämlich das räumliche System, oder der unbegrenzte Raum mit allen in ihm enthaltenen Punkten, Geraden und Ebenen. Das räumliche System enthält auch unendlich viele Grundgebilde der ersten und zweiten Stufe als Elemente; denn jede Ebene desselben ist der Träger eines Feldes, jeder Punkt der Mittelpunkt eines Strahlenbündels, jede Gerade der Träger einer Punktreihe und zugleich die Axe eines Ebenenbüschels.

Jedem der sechs Grundgebilde, die ich Ihnen soeben erklärt habe, entspricht nun eine besondere Geometrie. Sie werden mir gewiss gern zugestehen, dass es ebenso gut eine Geometrie des Strahlenbündels geben muss, wie eine Geometrie des ebenen Feldes. Denn zu jedem ebenen geometrischen Gebilde können wir ja ein Gebilde im Strahlenbündel construiren, indem wir das ebene Feld aus einem ausserhalb gelegenen Punkte projiciren. Und die Sätze, welche sich von dem ebenen Gebilde aufstellen lassen, können dann in irgend einer Weise auf den Schein desselben im Strahlenbündel übertragen werden. Wir werden Gelegenheit haben, von dieser Methode häufigen Gebrauch zu machen. — Schwieriger ist es schon einzusehen, dass es auch eine Geometrie der einförmigen Grundgebilde, z. B. der Punktreihe oder der Punkte einer Geraden, geben müsse. Aber ich brauche Sie nur an den in der Einleitung angeführten Satz von den vier harmonischen Punkten zu erinnern, um Sie auch hiervon zu überzeugen. Wie ich Ihnen dort als Thatsache anführte, ist durch drei Punkte einer Geraden die Lage des vierten harmonischen Punktes zum Voraus bestimmt. Ferner nenne ich Ihnen den Satz, dass unter vier Strahlen eines Büschels sich zwei paar getrennte Strahlen befinden, um zu beweisen, dass allerdings von einer Geometrie der einförmigen Grundgebilde geredet werden kann, auch ohne dass wir das Mass zu Hülfe nehmen.

Die bisherigen Auseinandersetzungen machen es mir nun schon möglich, in kurzen Worten den Hauptinhalt der Geometrie der Lage anzudeuten. Dieselbe handelt nämlich von den sechs Grundgebilden und ihren Beziehungen zu einander.

Zweiter Vortrag.

Unendlich ferne Elemente. Das Beziehen der Grundgebilde auf einander.

In der Geometrie der Alten werden zwei gerade Linien parallel genannt, wenn sie in derselben Ebene liegen und keinen Punkt mit einander gemein haben. Ebenso heissen zwei Ebenen, oder eine Ebene und eine Gerade parallel, wenn kein Punkt der einen zugleich in der anderen liegt. Die neuere Geometrie fasst den Parallelismus anders auf, und es soll meine nächste Aufgabe sein, Sie mit dieser abweichenden Auffassung, welche v. Staudt die perspective genannt hat, vertraut zu machen. Wir werden geradesweges auf dieselbe geführt, wenn wir zwei Grundgebilde aus einander ableiten, indem wir das eine als Schnitt oder Schein des anderen uns vorstellen.

Wenn eine Gerade u (Fig. 6) mit einem Strahlenbüschel S in einer Ebene liegt, ohne durch den Mittelpunkt desselben zu

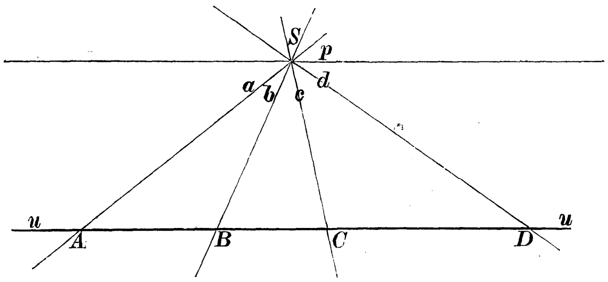

Fig. 6.

gehen, so schneidet sie ihn in einer Punktreihe; nämlich jeder Strahl a, b, c, ... von S wird in einem Punkte A, B, C, ... von u geschnitten. Beschreibt ein Strahl durch Drehung um S in irgend einem Sinne $a\,b\,c$ den Büschel S, so beschreibt gleichzeitig seine Spur auf der Geraden u im Sinne ABC die Punktreihe u, indem dieser Schnittpunkt zuerst von A aus über B sich immer weiter bis ins Unendliche entfernt, und hernach von der entgegengesetzten Seite her wieder aus unendlicher Entfernung zu seiner Anfangslage zurückkehrt. Nach der Auffassung der Alten schneidet der sich drehende Strahl in der einen besonderen Lage p die Gerade u nicht mehr, in welcher er zu u parallel ist, so dass wir dieser Ausnahme wegen nicht allgemein den Satz aufstellen dürfen, dass jede Gerade, die mit u in einer Ebene liegt, einen Punkt mit u gemein hat. In der neueren Geometrie beseitigt man diese Ausnahme, indem man auch zwei parallelen Linien einen gemeinschaftlichen Punkt zuschreibt, nämlich einen „unendlich fernen" Punkt.

Nach der perspectiven Ansicht hat übrigens jede Gerade u nur einen einzigen unendlich fernen Punkt, weil nach einem Axiome Euklid's durch einen ausserhalb gegebenen Punkt S nur ein einziger Parallelstrahl p zu u gezogen werden kann, und weil diesem Parallelstrahl mehr als ein mit u gemeinschaftlicher Punkt nicht wohl zuzuschreiben ist, da auch jeder andere Strahl des Büschels S nur einen Punkt mit u gemein hat. Diese Auffassung bietet der älteren Ansicht gegenüber den Vortheil, dass jetzt viele Sätze ganz allgemein ausgesprochen werden können, bei denen sonst immer Ausnahmen anzuführen waren, und dass manche scheinbar verschiedenen Sätze sich jetzt in einer einzigen Aussage zusammenfassen lassen. Uebrigens werden Sie sich wohl schon in der analytischen Geometrie mit dieser Ansicht befreundet haben; auch dort pflegt man zwei in einer Ebene gelegene Gerade parallel zu nennen, wenn die Coordinaten ihres Schnittpunktes unendlich gross sind, der letztere also in unendlicher Entfernung liegt.

Zu dem unendlich fernen Punkte einer Geraden gelangen wir, indem wir entweder nach der einen oder nach der andern Seite hin uns einen Punkt immer weiter auf der Geraden fortbewegt denken. Der unendlich ferne Punkt liegt also nach beiden Seiten hin auf der Geraden, oder sowohl nach der einen als auch nach der anderen Seite hin; und die Gerade erscheint als geschlossene Linie, deren beide Seiten durch den unendlich fernen Punkt zusammenhängen. Zu diesem Schlusse werden wir gezwungen, sobald wir die vorhin begründete Auffassung zulassen, dass jede Gerade einen, und nur einen unendlich fernen Punkt besitze. Wir werden später sehen, dass in derselben Weise die beiden Zweige einer Hyperbel als im Unendlichen zusammenhängend zu betrachten sind. Auf ganz ähnliche Vorstellungen führt die Analysis, indem sie an häufigen Beispielen zeigt, dass man nicht nur durch Null, sondern auch durch das Unendliche vom Positiven zum Negativen übergehen kann.

Weil wir somit in einer Geraden von einem Punkte zu einem anderen gelangen können, indem wir den unendlich fernen Punkt überschreiten, so gilt jetzt der Satz: Unter vier Punkten einer Punktreihe sind nur zwei paar getrennte, ebenso wie es unter vier Elementen eines Büschels nur zwei paar getrennte giebt. Und wie ein Büschel durch zwei seiner Elemente in zwei vollkommene Winkel (Nebenwinkel) getheilt wird, so wird eine Punktreihe durch zwei ihrer Punkte in zwei Strecken getheilt, von denen jede die „Ergänzung“ der anderen heisst. Eine dieser beiden Strecken enthält den unendlich fernen Punkt der Geraden, falls nicht dieser selbst einen der Grenzpunkte der Strecken bildet. Im letzteren Falle werden die beiden Strecken auch wohl Halbstrahlen genannt.

Um den unendlich fernen Punkt einer Geraden von ihren in der Endlichkeit gelegenen Punkten zu unterscheiden, nennt man den ersteren wohl einen „uneigentlichen“, und die letzteren „eigentliche“ Punkte. Ebenso dürfte die soeben vorgetragene neuere Auffassung des Parallelismus als eine uneigentliche zu bezeichnen sein. Die sämmtlichen Parallelen, welche sich in einer Ebene nach irgend einer Richtung ziehen lassen, haben nur einen unendlich fernen oder uneigentlichen Punkt mit einander gemein, nämlich denjenigen, welchen irgend eine von ihnen mit allen übrigen gemein hat. Die Parallelen können daher auch als ein Büschel aufgefasst werden, dessen Mittelpunkt ein unendlich ferner Punkt der Ebene ist, und den wir künftig einen Parallelstrahlenbüschel nennen wollen, wenn eine Unterscheidung von anderen Strahlenbüscheln wünschenswerth ist. Ebenso ist unter einem Parallelstrahlenbündel die Gesammtheit aller im Raume möglichen parallelen Strahlen von bestimmter Richtung nebst allen durch sie gehenden Ebenen zu verstehen. — Ich mache Sie noch darauf aufmerksam, dass die Aussagen: „Parallele Gerade haben gleiche Richtung“ und „sie enthalten denselben unendlich fernen Punkt“ ganz das Nämliche bedeuten. Durch jede Richtung wird ein unendlich ferner Punkt bestimmt, und umgekehrt durch jeden uneigentlichen Punkt im Raume eine Richtung; wie denn auch durch jede eigentliche Gerade eine Richtung und ein unendlich ferner Punkt bestimmt wird, nämlich der auf ihr enthaltene.

Von allen unendlich fernen Punkten einer Ebene wird angenommen, dass sie in einer unendlich fernen oder „uneigentlichen" Linie liegen. Diese Linie muss als eine Gerade angesehen werden, weil sie von jeder eigentlichen Geraden der Ebene in nur einem Punkte, dem unendlich fernen Punkte der Geraden, geschnitten wird; denn krumme Linien können mit einer Geraden mehr als einen Punkt gemein haben. Ein anderer Grund für diese Ansicht ist der Umstand, dass nach der perspectiven Auffassung zwei parallele Ebenen ihre sämmtlichen unendlich fernen Punkte mit einander gemein haben müssen. Werden sie nämlich von irgend einer dritten Ebene in zwei eigentlichen Geraden geschnitten, so können diese sich in keinem eigentlichen Punkte schneiden; sie sind also, da sie in einer Ebene liegen, parallel und haben folglich einen unendlich fernen Punkt beider Ebenen mit einander gemein. Auf diese Art wird bewiesen, dass jeder unendlich ferne Punkt der einen Ebene auch in der anderen liegt. Weil aber überhaupt je zwei sich schneidende Ebenen immer nur eine einzige Gerade mit einander gemein haben, so schreibt man auch zwei parallelen Ebenen nur eine einzige gemeinschaftliche Gerade zu.

Wie von parallelen Geraden gesagt wird, sie haben dieselbe Richtung, so sagt man auch wohl von parallelen Ebenen, sie haben dieselbe Stellung; gleichwie also in jeder Richtung ein unendlich ferner Punkt liegt, so liegt in jeder Stellung eine unendlich ferne Gerade. Alle parallelen Ebenen, die im Raume in irgend einer Stellung denkbar sind, gehen durch eine und dieselbe unendlich ferne Gerade, nämlich durch diejenige, in welcher irgend eine dieser Ebenen von allen übrigen geschnitten wird. Parallele Ebenen können deshalb als ein Ebenenbüschel aufgefasst werden, dessen Axe eine unendlich ferne Gerade ist; derselbe wird ein Parallel-Ebenenbüschel genannt.

Von den unendlich fernen Punkten und Linien des Raumes wird angenommen, dass sie in einer unendlich fernen oder uneigentlichen Fläche liegen; diese Fläche muss als eine Ebene betrachtet werden, weil sie von jeder eigentlichen Geraden in nur einem Punkte und von jeder eigentlichen Ebene in einer Geraden geschnitten wird. Die unendlich ferne oder „uneigentliche" Ebene ist allen Parallelstrahlenbündeln und allen Parallelebenenbüscheln gemeinschaftlich, weil sie durch die Mittelpunkte der ersteren und die Axen der letzteren geht. Ebenso ist in jeder Ebene die unendlich ferne Gerade ein gemeinschaftlicher Strahl aller in dieser

Ebene gelegenen Parallelstrahlenbüschel, weil sie durch die Mittelpunkte derselben geht. Der unendlich fernen Geraden einer Ebene kann deshalb keine bestimmte Richtung beigelegt werden, sondern sie enthält die Richtung (den unendlich fernen Punkt) jeder Geraden der Ebene.

Auf die unendlich fernen oder uneigentlichen Elemente wird noch einiges Licht geworfen durch die Beziehungen, welche sich zwischen den Grundgebilden aufstellen lassen. Zwei Gebilde heissen nämlich auf einander „bezogen", wenn jedem Element des einen ein Element des anderen zugewiesen ist. Zwei so zu einander gehörige Elemente der Gebilde heissen „einander entsprechende" oder „homologe" Elemente. Wenn zwei Grundgebilde auf ein drittes bezogen sind, so sind sie auch auf einander bezogen. Denn jedem Elemente des dritten entspricht je ein Element der beiden anderen Grundgebilde, und diese beiden Elemente sind dadurch auch einander zugewiesen.

Am einfachsten und anschaulichsten bezieht man zwei ungleichartige Grundgebilde dadurch auf einander, dass man das eine als Schnitt oder Schein des anderen auffasst. Liegt z. B. (Fig. 6) ein Strahlenbüschel S mit einer nicht durch seinen Mittelpunkt gehenden Punktreihe u in einer Ebene, so können wir jedem Strahle des Büschels den auf ihm gelegenen Punkt der Punktreihe zuweisen. Dem Parallelstrahl p von S entspricht dann der unendlich ferne Punkt von u. Wird ein ebenes Feld Σ als Schnitt eines Strahlenbündels S betrachtet, dessen Mittelpunkt ausserhalb Σ liegt, so sind Σ und S in der Art auf einander bezogen, dass jedem Punkte von Σ der durch ihn gehende Strahl von S entspricht, und jeder Geraden von Σ die durch sie gehende Ebene von S. Der zu Σ parallelen Ebene von S entspricht daher die unendlich ferne Gerade von Σ; und jedem in dieser Ebene gelegenen Strahle von S ist sein in Σ liegender unendlich ferner Punkt zugewiesen. Jedem Ebenenbüschel von S entspricht der Strahlenbüschel, in welchem er von Σ geschnitten wird; letzterer ist ein Parallelstrahlenbüschel, wenn die Axe des Ebenenbüschels zu Σ parallel läuft. Ist S ein Parallelstrahlenbündel, liegt also sein Mittelpunkt unendlich fern, so entspricht jedem eigentlichen Punkte von Σ ein eigentlicher Strahl von S, und jedem uneigentlichen Elemente ein uneigentliches Element. Ist Σ die unendlich ferne Ebene und S ein eigentlicher Punkt, so entspricht jedem Strahle von S sein unendlich ferner Punkt, jeder

Ebene ihre unendlich ferne Gerade, jedem Strahlenbüschel eine unendlich ferne Punktreihe, und jedem Ebenenbüschel ein unendlich ferner Strahlenbüschel.

Zwei gleichartige Grundgebilde können am einfachsten dadurch auf einander bezogen werden, dass man sie als Schnitte oder Scheine eines und desselben dritten Grundgebildes betrachtet. So entsprechen einander in zwei Strahlenbüscheln oder Punktreihen, welche Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels sind, je zwei solche Strahlen resp. Punkte, welche in derselben Ebene des Ebenenbüschels liegen. Anderseits können zwei Strahlenbüschel S und S_1 (Fig. 7) auch so auf einander mit Leichtigkeit bezogen werden, dass die Scheine einer und derselben Punktreihe u sind; so dass je zwei Strahlen a und a_1, b und b_1, c und c_1, ... derselben einander entsprechen, welche in einem Punkte der Reihe

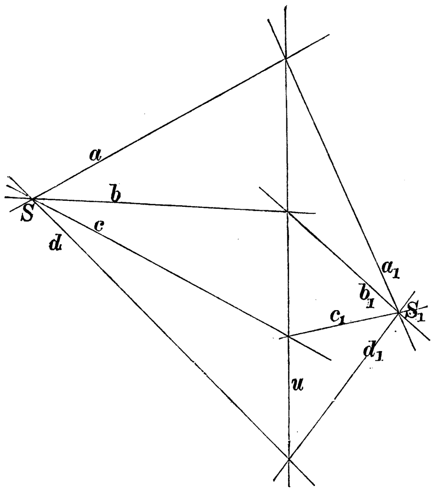

Fig. 7.

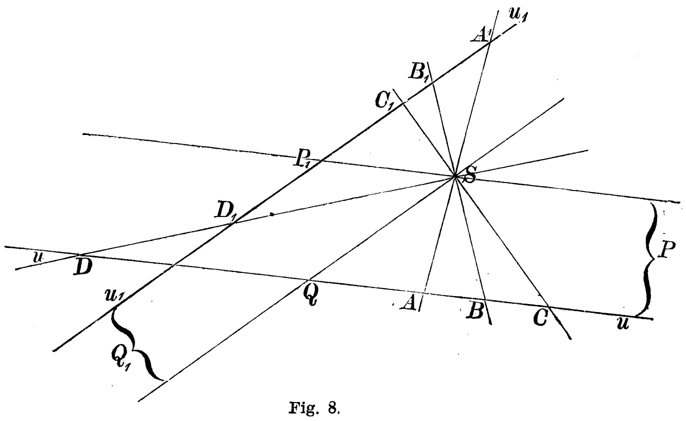

Fig. 8.

sich schneiden. Werden zwei in einer Ebene liegende Punktreihen u und u_1 (Fig. 8) als Schnitte eines Strahlenbüschels

S betrachtet, so ist beachtenswerth, dass dem unendlich fernen Punkte P oder Q_1 der einen im Allgemeinen ein eigentlicher Punkt P_1 resp. Q der anderen Reihe entspricht.

Zwei ebene Felder sind auf einander bezogen, wenn sie Schnitte eines und desselben Strahlenbündels sind. Eine ausgedehnte ebene Landschaft z. B. und das perspective Bild derselben, welches wir erhalten, wenn wir den durch unser Auge gehenden Schein der Landschaft durch irgend eine Ebene, eine verticale etwa, schneiden, sind so auf einander bezogen, dass je zwei Punkte der Landschaft und des Bildes einander entsprechen, wenn sie auf demselben Strahl des durch das Auge gehenden Bündels liegen, also sich mit dem Auge in einer Geraden befinden. Jeder Geraden der Landschaft entspricht eine Gerade des Bildes, und beide Geraden liegen mit dem Auge in einer Ebene. Der unendlich fernen Geraden der Landschaft (dem Horizont) entspricht im Allgemeinen eine eigentliche Gerade des Bildes, und hierin liegt wieder ein Grund, die unendlich ferne Linie einer Ebene als eine gerade Linie aufzufassen. Von zwei in der angegebenen Weise auf einander bezogenen Feldern sagt man wohl auch, das eine sei eine „Projection" des anderen, und der Mittelpunkt des Bündels, welcher von beiden Feldern zugleich ein Schein ist, heisst dann das „Projections-Centrum". Liegt dieser Mittelpunkt unendlich fern, ist also der Bündel ein Parallelstrahlenbündel, so geht diese Art der Projection über in die gewöhnliche Parallelprojection der darstellenden Geometrie.

Zwei Strahlenbündel können dadurch auf einander bezogen werden, dass man sie als Scheine eines und desselben ebenen Feldes auffasst. Jeder Strahl des einen Bündels schneidet dann den entsprechenden Strahl des anderen in einem Punkte des Feldes; ebenso haben je zwei homologe Ebenen der Bündel eine Gerade des Feldes zur Schnittlinie. Die Scheine einer ebenen Landschaft aus zwei verschiedenen Punkten sind solche Bündel.

Die nähere Erörterung dieses Beziehens von zwei Grundgebilden auf einander muss ich vorläufig Ihrer eigenen Forschung überlassen; ich bemerke nur noch, dass die Grundgebilde noch in viel mannigfaltigerer Weise auf einander bezogen werden können. So z. B. können zwei ebene Felder auch dadurch auf einander bezogen werden, dass man sie auf ein und dasselbe dritte Feld bezieht. Um bei einem wiederholt gebrauchten Beispiele zu bleiben, so mögen Sie sich aus zwei verschiedenen Projectionscentren perspective Bilder von einer Landschaft construirt denken. Zwei solche Bilder oder ebene Felder sind dann auch auf einander bezogen, weil jedes auf die Landschaft bezogen ist; und zwar entsprechen zwei Punkte derselben einander, wenn sie von demselben Punkte der Landschaft die Projectionen sind. Einer Geraden des einen Bildes wird dann stets wieder eine Gerade des anderen entsprechen. Solche ebene Felder haben aber im Allgemeinen nicht mehr die besondere Lage gegen einander, welche vorhin erörtert wurde, dass nämlich je zwei einander entsprechende Gerade in einer Ebene liegen, und die Verbindungslinien von je zwei homologen Punkten sich alle in einem bestimmten Punkte schneiden. Wir werden die gegenseitigen Beziehungen von zwei so auf einander bezogenen Feldern später noch genauer zu untersuchen haben. Uebrigens können zwei Felder auch derartig auf einander bezogen werden, dass jeder Geraden des einen eine Curve im anderen entspricht, oder so, dass jedem Punkt des einen Feldes eine Gerade des anderen und umgekehrt jeder Geraden des ersteren ein Punkt des letzteren entspricht. Vor der Hand überlasse ich es Ihrer Einbildungskraft, sich hier die mannigfaltigsten Beziehungen der Grundgebilde unter einander auszudenken.

Dritter Vortrag.

Das Princip der Reciprocität oder Dualität. Einfache und vollständige $n$ecke, $n$seite, $n$kante u. s. w.

Bevor ich die Beziehungen weiter entwickele, welche sich zwischen den Grundgebilden der neueren Geometrie aufstellen lassen, muss ich auf ein geometrisches Princip aufmerksam machen, welches in meinen Vorträgen eine wichtige Stelle einnehmen wird. Denn dasselbe erleichtert das Studium der Geometrie der Lage ausserordentlich dadurch, dass es den umfangreichen Stoff derselben in zwei grosse Gruppen theilt und diese einander gegenüberstellt, so dass von diesen Gruppen die eine sich sofort aus der anderen ergiebt. Dieses „Princip der Reciprocität oder Dualität“ wurde in elementarer Weise zuerst von Gergonne*) begründet, nachdem schon vorher Poncelet**) mittelst der Polarentheorie nachgewiesen hatte, dass zu jedem Raumgebilde ein ihm dual gegenüberstehendes construirt werden kann.

Obwohl das Dualitätsprincip in der Geometrie des Masses nicht recht zur Geltung gebracht werden kann, so giebt es darin doch manche Sätze, die geradezu auf dasselbe hinweisen, und an die ich nur zu erinnern brauche, um Ihnen dieses Princip zum Bewusstsein zu bringen. Im Raume nämlich stehen der Punkt und die Ebene einander als „reciproke Elemente“ gegenüber, so dass jeder Satz der Geometrie der Lage seine Ergänzung in einem anderen findet, den man aus dem ersteren ableitet, indem man die Ausdrücke Punkt und Ebene und daher auch Punktreihe und Ebenenbüschel, Strecke und Flächenwinkel etc. mit einander vertauscht. Gewöhnlich werden zwei solche „reciproke“ Sätze wie die beiden Seiten eines Satzes neben einander gestellt; z. B.:

Zwei Punkte A und B bestimmen eine Gerade $\overline{AB}$, nämlich ihre Verbindungslinie.	Zwei Ebenen α und β bestimmen eine Gerade $\overline{\alpha\beta}$, nämlich ihre Schnittlinie.
Eine Gerade a und ein nicht auf derselben liegender Punkt B bestimmen eine Ebene $\overline{aB}$, welche durch beide geht.	Eine Gerade a und eine nicht durch dieselbe gehende Ebene β bestimmen einen Punkt $\dot{\alpha}\beta$, welcher auf beiden liegt.
Drei Punkte A, B, C, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmen eine Ebene $\overline{ABC}$ (die Verbindungsebene).	Drei Ebenen α, β, γ, die nicht durch eine Gerade gehen, bestimmen einen Punkt $\alpha\dot{\beta}\gamma$ (den Schnittpunkt).
Zwei Gerade a und b, die einen Punkt gemein haben, liegen in einer Ebene $\overline{ab}$.	Zwei Gerade a und b, die in einer Ebene liegen, haben einen Punkt $\dot{a}b$ gemein.

Sie werden, beiläufig gesagt, schon bei diesen wenigen Sätzen bemerken, wie zweckmässig die Einführung der unendlich fernen oder uneigentlichen Elemente in die Geometrie sich erweist. Ohne sie hätten wir alle diese Sätze nicht allgemein aussprechen können, sondern noch specielle Fälle derselben als Ausnahmen besonders hervorheben müssen. Der erste Satz rechts z. B. würde gelautet haben: „Zwei Ebenen α und β bestimmen entweder eine Gerade

*) Gergonne, Annales de Mathématiques T. XVI, 1826.

**) Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1822.

$\overline{\alpha\beta}$, oder sie sind parallel"; während nach der neueren Auffassungsweise auch im letzteren Falle eine Gerade bestimmt wird, nämlich die unendlich ferne Gerade der Ebenen. Ebenso hätten wir bei dem ersten Satz links mehrere Fälle unterscheiden müssen, jenachdem beide gegebene Punkte A und B eigentliche Punkte sind oder nicht. Wir hätten ihn demnach so aussprechen müssen: „Durch zwei (eigentliche) Punkte, oder durch einen Punkt und eine Richtung ist eine Gerade bestimmt"; während nach der perspectiven Ansicht der letztere Fall dem ersteren einfach dadurch untergeordnet ist, dass unter den gegebenen Punkten auch unendlich ferne zugelassen werden. Aehnliche Bemerkungen werden Sie selbst leicht an jeden der übrigen Sätze knüpfen können.

Der Kürze halber nennt man „incident" zwei Gerade, wenn sie sich schneiden, eine Gerade oder Ebene und einen Punkt, wenn dieser in jener liegt, endlich einen Strahl oder Punkt und eine Ebene, wenn letztere durch ersteren geht. Nicht incidente Gerade heissen windschief. Die obigen Sätze nun führen zu folgenden Aufgaben (ersten Grades), die wir künftig als immer ausführbar betrachten werden:

Durch zwei Punkte eine Gerade zu legen.	Die Schnittlinie von zwei Ebenen zu finden.
Durch eine Gerade und einen nicht mit ihr incidenten Punkt eine Ebene zu legen.	Von einer Geraden und einer nicht mit ihr incidenten Ebene den Schnittpunkt zu finden.
Durch drei Punkte eine Ebene zu legen.	Von drei Ebenen den Schnittpunkt zu finden.
Durch zwei incidente Gerade eine Ebene zu legen.	Von zwei incidenten Geraden den Schnittpunkt zu finden.

Zur Uebung will ich noch einige oft benutzte Doppelsätze anführen. Ich rathe Ihnen sehr an, zu der einen Hälfte jedes dieser Doppelsätze die andere reciproke Hälfte selbst abzuleiten.

Sind vier Punkte A, B, C, D gegeben und schneiden sich die Verbindungslinien $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, so liegen die Punkte in einer und derselben Ebene, so dass auch $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, sowie $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ sich schneiden müssen.	Sind vier Ebenen α, β, γ, δ gegeben und schneiden sich die Schnittlinien $\overline{\alpha\beta}$ und $\overline{\gamma\delta}$, so gehen die Ebenen durch einen und denselben Punkt, so dass auch $\overline{\alpha\gamma}$ und $\overline{\beta\delta}$, sowie $\overline{\alpha\delta}$ und $\overline{\beta\gamma}$ sich schneiden müssen.

Wenn von beliebig vielen Geraden je zwei sich schneiden, aber nicht alle

durch einen Punkt gehen, so liegen alle in einer Ebene.	in einer Ebene liegen, so gehen alle durch einen Punkt.

Häufig steht ein Satz sich selbst reciprok gegenüber, wenn Punkt und Ebene in symmetrischer Weise in ihm vorkommen; z. B. die Aufgabe: In einer Ebene durch einen in ihr gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche eine ausserhalb beider gegebene Gerade schneidet. Hier stehen zwei Auflösungen einander reciprok gegenüber:

Entweder verbinde man den Schnittpunkt der Geraden und der Ebene mit dem gegebenen Punkte;	oder man lege durch die Gerade und den gegebenen Punkt eine Ebene und suche deren Schnittlinie mit der gegebenen Ebene.

Auf diese Aufgabe lassen sich die folgenden leicht zurückführen:

Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene Gerade, die mit dem Punkte nicht in einer Ebene liegen, schneidet. Man lege nämlich durch den gegebenen Punkt und eine der gegebenen Geraden eine Ebene,	In einer gegebenen Ebene eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene Gerade, die mit der Ebene nicht einen und denselben Punkt gemein haben, schneidet. Man bestimme den Schnittpunkt der gegebenen Ebene mit einer der gegebenen Geraden,

so ist die Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt.

Die Aufgabe: „Eine Gerade zu ziehen, welche drei gegebene schneidet", steht wieder sich selbst gegenüber. Entweder kann man in der einen Geraden einen Punkt annehmen, oder durch dieselbe eine Ebene legen, und sodann nach den Angaben der vorhergehenden Doppelaufgabe eine Gerade suchen, welche durch diesen Punkt geht, oder aber in dieser Ebene liegt, und die beiden anderen gegebenen Geraden schneidet.

Auch die Grundgebilde können einander als reciproke Gebilde gegenübergestellt werden, z. B. das ebene Feld und der Strahlenbündel schon deshalb, weil ihre Träger, nämlich die Ebene und der Punkt, einander reciprok sind. Es stehen sodann einander gegenüber:

im ebenen Felde:	und im Strahlenbündel:
der Punkt; die Punktreihe; der Strahl als Verbindungslinie von Punkten; der Strahlenbüschel etc.	die Ebene; der Ebenenbüschel; der Strahl als Schnittlinie von Ebenen; der Strahlenbüschel etc.

Ihnen wird hier wie bei manchen früheren Sätzen die Bemerkung sich aufdrängen, dass im Raume die Gerade (oder der Strahl) sich selbst gegenübersteht. Wirklich nimmt die Gerade eine Zwischenstellung ein zwischen den reciproken Elementen Punkt und Ebene. Als Beispiel eines Doppelsatzes, in welchem das ebene Feld und der Strahlenbündel als reciproke Gebilde einander gegenüberstehen, diene der folgende:

Werden zwei Felder dadurch auf einander bezogen, dass man sie als Schnitte eines und desselben Bündels betrachtet, so liegen je zwei einander entsprechende Elemente (Punkte oder Gerade) der Felder auf einem und demselben Elemente (Strahl oder Ebene) des Bündels. Die Schnittlinie der beiden Ebenen fällt mit ihrer entsprechenden Geraden zusammen und entspricht sich selbst; dasselbe gilt von jedem in dieser Geraden befindlichen Punkte. Die beiden ebenen Felder haben also eine Punktreihe „entsprechend gemein“.

Werden zwei Bündel dadurch auf einander bezogen, dass man sie als Scheine eines und desselben Feldes betrachtet, so gehen je zwei einander entsprechende Elemente (Strahlen oder Ebenen) der Bündel durch ein und dasselbe Element (Punkt oder Gerade) des Feldes. Der gemeinschaftliche Strahl der Bündel, welcher ihre Mittelpunkte verbindet, fällt mit seinem entsprechenden zusammen und entspricht sich selbst; dasselbe gilt von jeder durch diesen Strahl gehenden Ebene. Die beiden Bündel haben also einen Ebenenbüschel „entsprechend gemein“.

Wenn nämlich zwei Gebilde auf einander bezogen sind und ein Element des einen mit dem ihm entsprechenden Elemente des anderen zusammenfällt, d. h. identisch ist, so sagt man, „die beiden Gebilde haben dieses Element (Doppelelement) entsprechend gemein“.

Wie im Raume der Punkt und die Ebene, so stehen einander in der Ebene der Punkt und die Gerade, daher auch die Punktreihe und der Strahlenbüschel, die Strecke und der Winkel etc. als reciproke Gebilde gegenüber; ebenso im Strahlenbündel der Strahl und die Ebene, der Strahlenbüschel und der Ebenenbüschel etc. Z. B.:

α_1) Je zwei Punkte einer Ebene bestimmen eine Gerade.

α_2) Je zwei Gerade einer Ebene bestimmen einen Punkt.

α_3) Je zwei Strahlen eines Bündels bestimmen eine Ebene.

α_4) Je zwei Ebenen eines Bündels bestimmen einen Strahl.

Eine ebene Curve kann aufgefasst werden:

β_1) als Inbegriff aller auf ihr liegenden Punkte;	β_2) als Inbegriff aller sie einhüllenden Geraden (Tangenten) (Fig. 9).

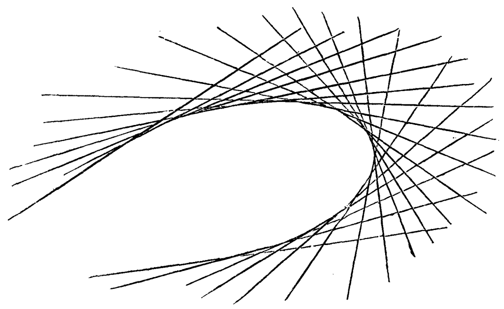

Fig. 9.

Und zwar werden Sie finden, dass in der neueren Geometrie die letztere Auffassung ebenso häufig in Anwendung gebracht wird, wie die erstere. Ebenso kann eine conische Fläche (im Strahlenbündel) aufgefasst werden:

β_3) als Inbegriff aller in ihr liegenden Strahlen;	β_4) als Inbegriff aller sie einhüllenden Ebenen (Berührungsebenen).

Von vier solchen zusammengehörigen Sätzen können immer die beiden auf den Strahlenbündel bezüglichen dadurch aus den beiden übrigen, welche in die Geometrie der Ebene gehören, abgeleitet werden, dass man das ebene Feld aus irgend einem Mittelpunkte durch einen Strahlenbündel projicirt. In der Regel werde ich deshalb künftig nur die beiden planimetrischen Sätze anführen, und es Ihnen überlassen, die übrigen beiden selbst aufzusuchen. Im Raume, wo Punkt und Ebene einander reciprok sind, stehen der erste und letzte (wie α_1 und α_4), sowie der zweite und dritte (wie α_2 und α_3) von je vier solchen Sätzen einander als reciproke Sätze gegenüber.

Das Princip der Reciprocität wird Ihnen im Laufe unserer Untersuchungen noch immer klarer und geläufiger werden; doch kann ich erst nach einer Reihe von Entwickelungen über die einförmigen Grundgebilde den Beweis führen, dass es in der Geometrie der Lage allgemeine Geltung hat, oder dass wirklich jedem Satze derselben ein reciproker Satz entspricht. Bis dahin werde ich meine Vorträge so einrichten, dass reciproke Sätze einander gehörig gegenübergestellt werden, und ihren Beweis werde ich so führen, dass der Dualismus deutlich hervortritt. Doch ist zu dem Ende nothwendig, dass ich Ihnen noch einige reciproke Begriffe vorher entwickele, und namentlich auch einige derjenigen geometrischen Begriffe modificire, die Sie aus der Geometrie des Masses mit herübergebracht haben in die neuere Geometrie.

Ich meine hier besonders den Begriff des $n$ecks. In der neueren Geometrie verstehen wir unter einem „einfachen ebenen $n$eck" in der Regel nicht ein Stück der Ebene, welches von n sich schneidenden Geraden allseitig begrenzt wird, sondern *eine Gruppe von n Punkten einer Ebene und den n Geraden oder Seiten, deren jede zwei aufeinanderfolgende Punkte (Eckpunkte) verbindet.* Diese Punkte denken wir uns dabei in bestimmter Reihenfolge, und nehmen an, dass von ihnen keine drei aufeinanderfolgende in gerader Linie liegen.

Das einfache $n$eck kann auch „einfaches $n$seit" genannt werden; nämlich ein einfaches $n$seit ist eine Gruppe von n Geraden der Ebene (Seiten) und den n Punkten, in denen je zwei aufeinanderfolgende sich schneiden. $n$eck und $n$seit sind reciproke Begriffe; den Verbindungslinien von je zwei nicht aufeinanderfolgenden Eckpunkten (d. h. den Diagonalen) eines einfachen $n$ecks stehen im einfachen $n$seit die Schnittpunkte von je zwei nicht aufeinanderfolgenden Seiten gegenüber. In der Geometrie des Masses, wo unter einem $n$eck ein Stück der Ebene verstanden wird, schliesst man verschlungene $n$ecke, wie das Fünfeck $ABCDE$ (Fig. 10) oder das Sechseck $ABCDEF$ (Fig. 11) in der Regel

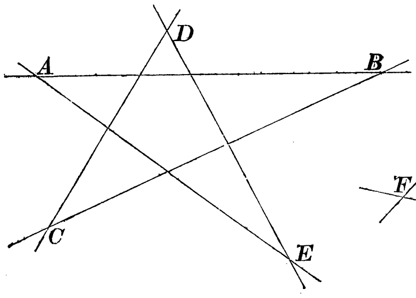

Fig. 10.

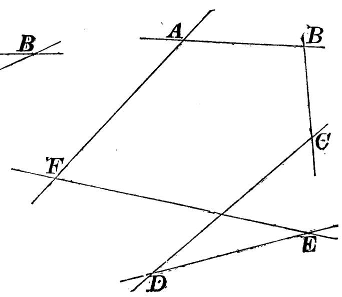

Fig. 11.

aus. Die $n$ecke und $n$seite der neueren Geometrie geben zu einer solchen Unterscheidung um so weniger Anlass, als man sich ihre

Seiten als unbegrenzt vorzustellen hat. Dagegen kann man auch hier von den $2n$ Elementen (Eckpunkten und Seiten) eines einfachen $n$ecks oder $n$seits je zwei solche „einander gegenüberliegend" nennen, welche in dem einen wie im anderen Sinne durch die halbe Anzahl der übrigen Elemente von einander getrennt sind, also allgemein das m^{te} und das $n + m^{te}$ der aufeinanderfolgenden Elemente. So z. B. liegen im Fünfeck $ABCDE$ (Fig. 10) je ein Eckpunkt und eine Seite einander gegenüber, nämlich A und $\overline{CD}$, B und $\overline{DE}$, C und $\overline{EA}$ etc.; im Sechseck oder Sechsseit $ABCDEF$ (Fig. 11) liegen dagegen je zwei Eckpunkte und je zwei Seiten einander gegenüber, nämlich A und D, $\overline{AB}$ und $\overline{DE}$, B und E, $\overline{BC}$ und $\overline{EF}$, u. s. w.

Ausser den einfachen kennt die neuere Geometrie auch noch „vollständige $n$ecke und $n$seite", und gerade an diesen Gebilden lässt sich wiederum das Reciprocitätsgesetz deutlich erkennen. Wir nennen nämlich:

Vollständiges ebenes $n$eck: eine Gruppe von n Punkten der Ebene mit ihren sämmtlichen Verbindungslinien (Seiten), oder was dasselbe ist, ein einfaches $n$eck mit seinen sämmtlichen Diagonalen.

Vollständiges ebenes $n$seit: eine Gruppe von n Geraden der Ebene mit ihren sämmtlichen Schnittpunkten (Eckpunkten), oder was dasselbe ist, ein einfaches $n$seit mit den sämmtlichen Schnittpunkten seiner Seiten.

Hierbei wird angenommen, dass im $n$eck keine drei Eckpunkte auf einer Geraden liegen und im $n$seit keine drei Seiten durch einen Punkt gehen.

In jedem Eckpunkte schneiden sich $n - 1$ Seiten des vollständigen $n$ecks; dieselben gehen durch die übrigen $n - 1$ Eckpunkte. Somit ist $\frac{n(n-1)}{2}$ die Anzahl aller Seiten des vollständigen $n$ecks.

Auf jeder Seite liegen $n - 1$ Eckpunkte des vollständigen $n$seits; durch dieselben gehen die übrigen $n - 1$ Seiten. Somit ist $\frac{n(n-1)}{2}$ die Anzahl aller Eckpunkte des vollständigen $n$seits.

Sie erkennen leicht, dass im vollständigen $n$eck und $n$seit mehrere einfache $n$ecke und $n$seite enthalten sind, sobald $n > 3$ ist. Z. B.:

Ein vollständiges Viereck $ABCD$ (Fig. 12) hat sechs Seiten. Je zwei dieser Seiten, welche nicht

Ein vollständiges Vierseit $abcd$ (Fig. 13) hat sechs Eckpunkte. Je zwei derselben, welche nicht durch einen und denselben Eckpunkt gehen, wie $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, oder $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, oder endlich $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$, sollen „Gegenseiten" des Vierecks heissen, sodass drei paar Gegenseiten vorhanden sind. Auch enthält das vollständige Viereck drei einfache Vierecke $ABCD$, $ACDB$ und $ADBC$, deren Seiten aus je zwei paar Gegenseiten von jenem bestehen.

auf einer und derselben Seite liegen, wie $\overset{\cdot}{ab}$ und $\overset{\cdot}{cd}$, oder $\overset{\cdot}{ac}$ und $\overset{\cdot}{bd}$, oder endlich $\overset{\cdot}{ad}$ und $\overset{\cdot}{bc}$, sollen „Gegenpunkte" des Vierseits heissen, sodass drei paar Gegenpunkte vorhanden sind. Auch enthält das vollständige Vierseit drei einfache Vierseite *abcd*, *acdb* und *adbc*, deren Eckpunkte aus je zwei paar Gegenpunkten von jenem bestehen.

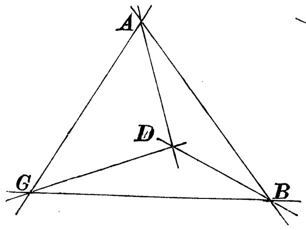

Fig. 12.

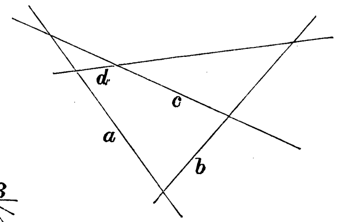

Fig. 13.

Die Gebilde im Strahlenbündel, welche diesen ebenen Gebilden entsprechen, ergeben sich am leichtesten durch Projiciren der letzteren aus einem ausserhalb der Ebene gelegenen Punkte. Jedes ebene *n*eck wird durch ein „*n*kant" und jedes ebene *n*seit durch ein „*n*seit im Strahlenbündel" projicirt. Hiernach ist:

Ein vollständiges *n*kant: eine Gruppe von *n* Strahlen eines Bündels mit ihren sämmtlichen Verbindungsebenen (Seiten), wobei angenommen wird, dass keine drei der *n* Strahlen oder „Kanten" in einer Ebene liegen.

Ein vollständiges *n*seit im Strahlenbündel: eine Gruppe von *n* Ebenen des letzteren mit ihren sämmtlichen Schnittlinien (Kanten), wobei angenommen wird, dass keine drei der *n* Ebenen oder „Seiten" durch eine und dieselbe Gerade gehen.

Es wird Ihnen ein Leichtes sein, die „einfachen" *n*kante und *n*seite im Strahlenbündel hiernach zu definiren, sowie zu den Eigenschaften der ebenen Gebilde analoge Eigenschaften der Gebilde im Strahlenbündel aufzufinden. Ich schliesse diese Reihe von Definitionen mit der Erklärung der analogen räumlichen Gebilde.

Ein vollständiges räumliches $n$eck besteht aus n Punkten (Eckpunkten), von welchen keine vier in einer Ebene liegen, den Geraden (Kanten), von denen jede zwei, und den Ebenen (Flächen), von denen jede drei der n Punkte verbindet.

Ein vollständiges $n$flach besteht aus n Ebenen (Flächen), von welchen keine vier durch einen Punkt gehen, den Geraden (Kanten), in denen je zwei, und den Punkten (Eckpunkten), in denen je drei der n Ebenen sich schneiden.

Ich überlasse es Ihrer eigenen Forschung, die Anzahl der Kanten und Flächen eines räumlichen $n$ecks, sowie der Kanten und Eckpunkte eines $n$flachs zu bestimmen. Ich bemerke nur noch, dass im Raume das Viereck und das Vierflach (oder Tetraeder) nicht von einander verschieden sind, ebenso wenig wie in der Ebene das Dreieck und das Dreiseit. Dass gleichwohl auch bei dem Tetraeder das Reciprocitätsgesetz sich geltend macht, zeigt u. A. der Doppelsatz:

Die vier Eckpunkte und sechs Kanten eines Tetraeders werden aus jedem Punkte, welcher in keiner seiner Flächen liegt, durch die vier Kanten und sechs Seiten eines vollständigen Vierkantes projicirt.

Die vier Flächen und sechs Kanten eines Tetraeders werden von jeder Ebene, welche durch keinen seiner Eckpunkte geht, in den vier Seiten und sechs Eckpunkten eines vollständigen Vierseits geschnitten.

Sie werden hier bemerken, dass im Raume das vollständige ebene $n$eck dem vollständigen $n$seit im Strahlenbündel, und das vollständige ebene $n$seit dem vollständigen $n$kant gegenübersteht, weil Punkt und Ebene reciproke Elemente sind.

Vierter Vortrag.

Das Beziehen vollständiger $n$ecke, $n$seite und $n$kante auf einander. Harmonische Gebilde.

Durch meine bisherigen Vorträge habe ich eine der mir vorliegenden Aufgaben zu lösen gesucht: nämlich die Aufgabe, Sie mit den wichtigsten, der neueren Geometrie eigenthümlichen Begriffen bekannt zu machen. Vielleicht haben Sie diese zahlreichen, an einander gereihten Definitionen manchmal ermüdet; doch war es nothwendig, Ihnen dieselben im Zusammenhange vorzuführen, damit wir später desto ungestörter die reichen Schätze, welche die Geometrie der Lage bietet, zu Tage fördern können.

Nunmehr werden wir zu den ersten eigentlichen Lehrsätzen der neueren Geometrie gelangen; denn die sehr einfachen, bisher angeführten Sätze habe ich mehr gelegentlich, um Ihnen die ungewohnten neuen Begriffe geläufiger zu machen und der Vollständigkeit wegen genannt, als weil sie alle zur Begründung der Geometrie der Lage durchaus nothwendig wären. Dagegen muss ich die Sätze über die harmonischen Punkte, Strahlen und Ebenen, mit einem Wort die Sätze über die harmonischen Gebilde, die ich Ihnen jetzt entwickeln werde, als wirkliche Fundamentalsätze unserer Wissenschaft bezeichnen.

Die Eigenschaften der harmonischen Gebilde, deren ich schon in der Einleitung Erwähnung that, lassen sich am leichtesten beweisen mittelst einiger sehr einfacher Sätze über das Beziehen von $n$ecken, $n$seiten und $n$kanten auf einander. In ähnlicher Weise, wie wir früher die Grundgebilde auf einander bezogen haben, können wir nämlich auch bei diesen Arten von Gebilden jeder Ecke, Seite oder Kante des einen ein entsprechendes Element des anderen zuweisen. Ein Viereck z. B. kann auf ein

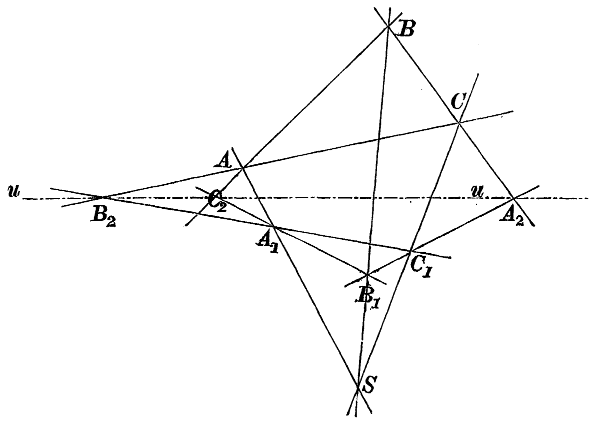

Fig. 3.

zweites bezogen werden, indem wir jedem Eckpunkte des ersteren einen Eckpunkt des letzteren zuweisen; dann wird auch jeder

Seite des ersteren eine Seite des letzteren entsprechen. Hier ergeben sich nun die evidenten Sätze:

Wenn zwei auf einander bezogene Dreiecke ABC (Fig. 3) und $A_1B_1C_1$ in verschiedenen Ebenen liegen, und je zwei homologe Seiten, wie $\overline{AB}$ und $\overline{A_1B_1}$, sich schneiden (natürlich auf der Schnittlinie u der beiden Dreiecksebenen), so bestimmen die Ebenen der drei Paare entsprechender Seiten ein Dreikant, von welchem die beiden Dreiecke Schnitte sind. Die Verbindungslinien $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$ von je zwei homologen Eckpunkten schneiden sich daher in einem Punkte, nämlich in dem Mittelpunkte S dieses Dreikantes.

Wenn zwei aufeinander bezogene Dreikante (oder Dreiseite im Strahlenbündel) verschiedenen Strahlenbündeln angehören, und je zwei homologe Kanten sich schneiden, so bestimmen die drei Schnittpunkte ein Dreieck, von welchem die beiden Dreikante Scheine sind. Die Schnittlinien von je zwei homologen Ebenen (Seiten) der Dreikante liegen daher in der Ebene dieses Dreiecks, dessen Seiten sie sind.

Es wird Ihnen ein Leichtes sein, von jeder Hälfte dieses Doppelsatzes die Umkehrung aufzustellen. Wir finden mit seiner Hülfe:

Wenn zwei auf einander bezogene vollständige Vierecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ (Fig. 14) in verschiedenen Ebenen liegen, deren Schnittlinie u durch keinen der acht Eckpunkte geht, und fünf Seiten a, b, c, d, e des einen Vierecks die ihnen beziehlich entsprechenden Seiten a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 des anderen (auf u) schneiden, so sind die beiden Vierecke Schnitte eines und desselben vollständigen Vierkants, daher auch ihre übrigen beiden Seiten f und f_1 sich schneiden.

Nach dem vorigen Satze schneiden sich nämlich sowohl die Linien $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$, als

Wenn zwei auf einander bezogene vollständige Vierseite verschiedenen Strahlenbündeln angehören, deren gemeinschaftlicher Strahl in keiner der acht Seiten liegt, und fünf Kanten des einen Vierseits die entsprechenden Kanten des anderen schneiden, so sind die beiden Vierseite Scheine eines und desselben vollständigen ebenen Vierseits, daher auch ihre beiden übrigen Kanten sich schneiden.

Die fünf Kanten des einen vollständigen Vierseits, welche von den entsprechenden Kanten des anderen geschnitten werden, bestimmen nämlich zwei im Vier-auch die Linien $\overline{DD_1}$, $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$ in einem Punkte; die Geraden $\overline{AA_1}$ und $\overline{DD_1}$ begegnen sich also im Schnittpunkt S von $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$, dem Mittelpunkt des im Satze angeführten Vierkantes. Und da die Geraden f und f_1 in der durch $\overline{AA_1}$ und $\overline{DD_1}$ bestimmten Ebene liegen, so müssen sie sich gleichfalls schneiden.

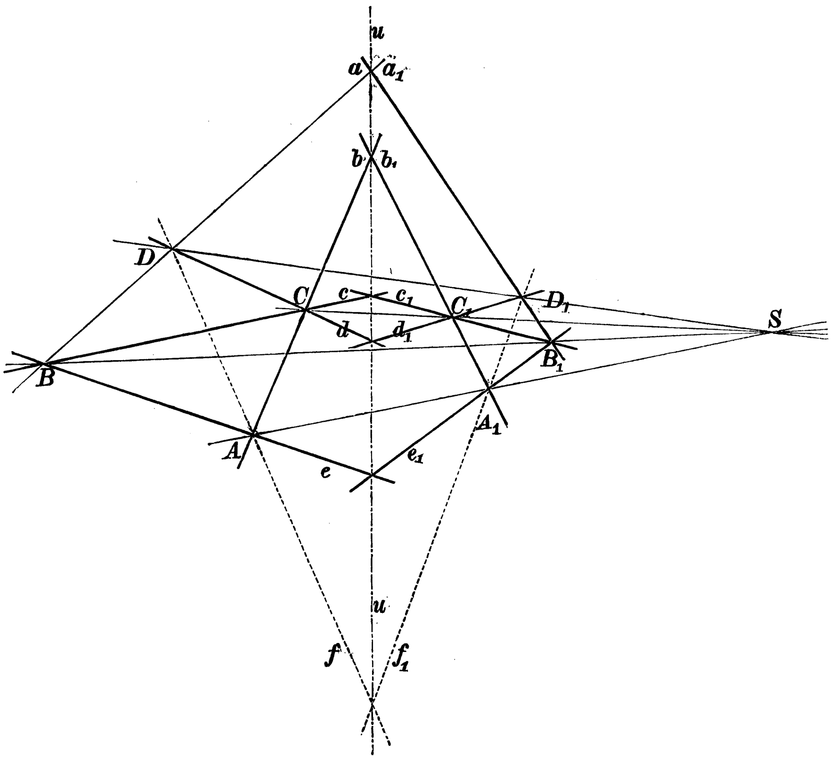

Fig. 14.

seit gelegene Dreiseite, deren Seiten von ihren entsprechenden nach dem vorigen Satze in je drei Seiten eines Dreiecks geschnitten werden. Diese beiden Dreiecke haben aber zwei Seiten gemein; sie liegen daher in einer Ebene und bestimmen das ebene Vierseit, von welchem die gegebenen Vierseite Scheine sind.

Um nicht zu weitläufig zu werden, will ich hier die Untersuchung rechts fallen lassen, und nur eines der links gewonnenen

Ergebnisse benutzen, um die Lehre von den harmonischen Elementen zu begründen. Auch auf diesem Wege werden wir bald genug zu neuen Sätzen gelangen, die einander wie die bisherigen reciprok gegenüberstehen. Wir fanden soeben:

Wenn von zwei auf einander bezogenen vollständigen Vierecken fünf Paare homologer Seiten sich schneiden in Punkten einer Geraden u, *welche durch keinen der acht Eckpunkte geht, so liegt auch der Schnittpunkt des sechsten Paares auf dieser Geraden.*

Dieser Satz gilt nicht blos für den Fall, dass die Vierecke in verschiedenen Ebenen liegen. Denn liegen sie in derselben Ebene, so können wir diesen Fall auf den schon erledigten dadurch zurückführen, dass wir das eine Viereck entweder um die Gerade u drehen aus der gegebenen Ebene heraus, oder es auf eine zweite durch u gelegte Ebene aus einem beliebigen Mittelpunkte projiciren. In beiden Fällen ergiebt sich sofort, dass durch den Schnittpunkt von u mit der sechsten Seite dieses Vierecks auch die sechste Seite des andern Vierecks hindurchgeht. — Ist u eine unendlich ferne Gerade, so lautet beiläufig bemerkt unser Satz: Wenn von zwei auf einander bezogenen vollständigen Vierecken fünf Paare homologer Seiten parallel sind, so laufen auch die letzten beiden Seiten parallel.

Wir können nun folgende Definition aufstellen:

Vier Punkte A, B, C, D *einer Geraden heissen vier harmonische Punkte (und bilden eine harmonische Punktreihe), wenn sie zu einem Viereck solche Lage haben, dass im ersten und im dritten von ihnen je zwei Gegenseiten des Vierecks sich schneiden, und durch den zweiten und den vierten Punkt die beiden Diagonalen desselben gehen.*

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich dann sofort der wichtige Satz:

Durch drei Punkte A, B, C *einer Geraden und ihre Reihenfolge ist der vierte harmonische Punkt* D *völlig bestimmt.*

Nämlich man findet D durch Construction irgend eines Vierecks $KLMN$ (Fig. 15), von welchem eine Diagonale $\overline{LN}$ durch den zweiten Punkt B geht, zwei Gegenseiten $\overline{KL}$ und $\overline{MN}$ aber sich im ersten Punkte A und die anderen beiden Gegenseiten $\overline{LM}$ und $\overline{NK}$ sich im dritten Punkte C schneiden; die zweite Diagonale $\overline{KM}$ geht durch D. Construirt man ein anderes Viereck $K_1L_1M_1N_1$, welches zu A, B und C ähnlich liegt wie $KLMN$, so muss nach dem früheren Satze (S. 37) auch dessen zweite Diagonale $\overline{K_1 M_1}$

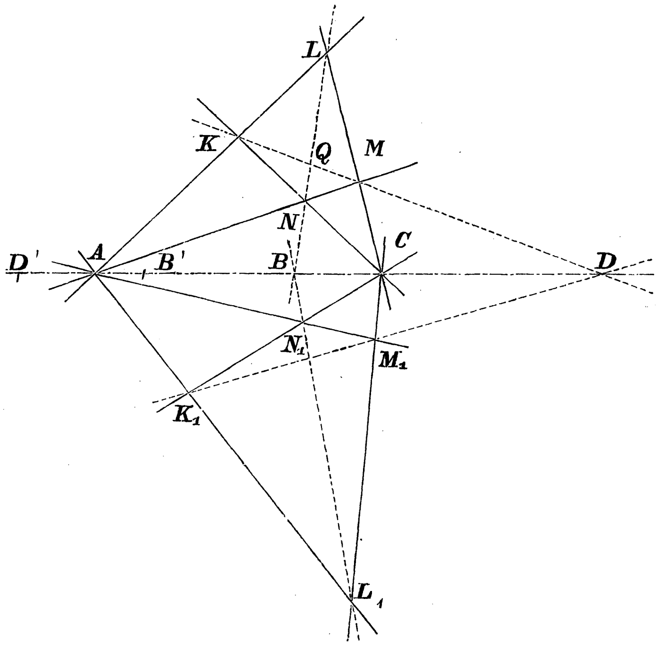

Fig. 15.

(als sechste Seite des vollständigen Vierecks $K_1 L_1 M_1 N_1$) durch den Schnittpunkt D von $\overline{KM}$ und $\overline{ABC}$ gehen.

> *Die Punkte* B *und* D *auf den Diagonalen sind durch die Schnittpunkte* A *und* C *der zwei paar Gegenseiten von einander getrennt, und heissen deshalb „harmonisch getrennt durch* A *und* C*“.*

Projiciren wir nämlich die Punkte A, B, C, D aus einem beliebigen Mittelpunkt auf eine andere Gerade, so sind die Projectionsstrahlen und folglich auch die Projectionen von einem Paare getrennter Punkte durch diejenigen des anderen Paares von einander getrennt. Ist nun Q (Fig. 15) der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{KM}$ und $\overline{LN}$ des Vierecks $KLMN$, so ist $KQMD$ eine Projection von $ABCD$ aus dem Punkte L und $MQKD$ eine solche aus dem Punkte N. Wäre also A nicht von C, sondern etwa von B durch die übrigen beiden Punkte getrennt, so müsste einerseits K von Q, anderseits aber auch M von Q getrennt sein, was unmöglich ist, weil Q nur von einem der drei Punkte K, M, D durch die übrigen beiden getrennt sein kann. Wäre dagegen A von D getrennt, so müsste K von D und zugleich M von D getrennt sein, was ebenfalls unmöglich ist. Folglich muss A von C getrennt sein durch die Punkte B und D.

Aus einem nicht in der Ebene des Vierecks gelegenen Punkte (aus Ihrem Auge z. B.) wird das vollständige Viereck durch ein vollständiges Vierkant projicirt, die harmonische Punktreihe aber durch einen Büschel von vier Strahlen, welche „vier harmonische Strahlen oder ein harmonischer Strahlenbüschel" genannt werden sollen. Dieselben haben die Eigenschaft, dass sie von jeder nicht durch ihren Mittelpunkt gehenden Ebene in vier harmonischen Punkten A_1, B_1, C_1, D_1 geschnitten werden. Denn jede solche Ebene schneidet das vollständige Vierkant in einem Viereck, von welchem zwei Gegenseiten in A_1, zwei andere in C_1 sich schneiden, und dessen letzten beiden Seiten resp. durch B_1 und D_1 gehen.

Werden vier harmonische Punkte aus einer Axe projicirt, die mit ihnen nicht in einer Ebene liegt, so erhalten wir „vier harmonische Ebenen oder einen harmonischen Ebenenbüschel". Jede fünfte Ebene, welche die vier harmonischen Punkte enthält, schneidet zufolge des eben Bewiesenen die vier harmonischen Ebenen in harmonischen Strahlen; und folglich gilt dasselbe auch von jeder beliebigen Schnittebene, die nicht durch die Axe des harmonischen Ebenenbüschels geht. Denn eine solche schneidet die vier harmonischen Strahlen der ersteren Schnittebenen in je vier harmonischen Punkten, durch welche ihre eigenen Schnittlinien mit den harmonischen Ebenen gehen. Hieraus folgt auch, dass jede zu der Axe windschiefe Gerade die vier Ebenen in vier harmonischen Punkten schneidet. Ebenso wird ein harmonischer Strahlenbüschel aus einem nicht in seiner Ebene gelegenen Punkte durch einen harmonischen Ebenenbüschel projicirt. Ueberhaupt können wir folgende Sätze aufstellen:

Vier harmonische Punkte werden aus jeder Geraden durch vier harmonische Ebenen, und aus jedem Punkte durch vier harmonische Strahlen projicirt.	Vier harmonische Ebenen werden von jeder Geraden in vier harmonischen Punkten, und von jeder Ebene in vier harmonischen Strahlen geschnitten.

Vier harmonische Strahlen werden

aus jedem Punkte durch vier harmonische Ebenen projicirt.	von jeder Ebene in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Diese verschiedenen Sätze können wir zusammenfassen zu dem wichtigen Theoreme:

Aus einem harmonischen Grundgebilde ergeben sich durch Projiciren und Schneiden immer wieder harmonische Grundgebilde.

Zugleich erkennen Sie, dass durch drei Elemente eines einförmigen Grundgebildes das vierte harmonische vollständig bestimmt ist, wenn noch angegeben wird, von welchem der ersteren dasselbe getrennt ist. Denn sind die gegebenen Elemente drei Punkte einer Geraden, so führt das vollständige Viereck zu dem vierten harmonischen Punkte. Sind sie dagegen Strahlen oder Ebenen eines Büschels, so schneiden wir denselben durch eine Gerade, und suchen zu den drei Schnittpunkten den vierten harmonischen Punkt. Durch diesen geht dann das gesuchte vierte Element des harmonischen Büschels. Hierdurch ist zugleich die Aufgabe gelöst, zu drei Elementen eines einförmigen Grundgebildes das vierte harmonische zu construiren.

Die Richtigkeit der folgenden Sätze wird Ihnen sofort einleuchten:

Werden drei Ebenen α, β, γ eines Ebenenbüschels von beliebigen Transversalen geschnitten, und wird auf jeder Transversale zu den drei Schnittpunkten der vierte harmonische, von dem Schnittpunkt mit β getrennte Punkt gesucht, so liegen alle diese vierten Punkte in einer Ebene δ, welche zu α, β, γ die vierte harmonische, von β getrennte ist.

Werden drei Punkte A, B, C einer Punktreihe aus beliebigen Axen projicirt, und wird für jede Axe zu den drei projicirenden Ebenen die vierte harmonische bestimmt, welche von der durch B gelegten getrennt ist, so gehen alle diese vierten Ebenen durch einen Punkt D, welcher zu A, B, C der vierte harmonische, von B getrennte Punkt ist.

Statt dieser beiden Sätze, die für den Raum einander reciprok gegenüberstehen, werden Sie leicht zwei entsprechende Sätze für die Ebene aufstellen können, in denen ein Strahlenbüschel die Stelle des Ebenenbüschels vertritt. Ebenso ergeben sich zwei analoge Sätze für den Strahlenbündel.

Bei der Erklärung der harmonischen Punkte A, B, C, D (Fig. 15) mittelst des Vierecks $KLMN$ haben wir einen Unterschied gemacht zwischen den beiden Punkten A und C, in denen die Gegenseiten des Vierecks sich schneiden, und den beiden übrigen B und D, durch welche die Diagonalen gehen. Doch lässt sich zeigen, dass beide Paare von Punkten in der harmonischen Punktreihe ganz die gleiche Rolle spielen. Zunächst leuchtet ein, dass von vier harmonischen Punkten je zwei getrennte mit einander vertauscht werden können, ohne dass die Punkte aufhören, vier harmonische Punkte zu sein; oder: Ist $ABCD$ eine harmonische Punktreihe, so gilt dasselbe von $ADCB$, $CBAD$ und $CDAB$. Denn in jeder dieser Punktreihen gehen durch den ersten und dritten Punkt je zwei Gegenseiten, und durch den zweiten und vierten die Diagonalen des Vierecks $KLMN$. Wenn nun durch den Schnittpunkt Q der Diagonalen (Fig. 16) die Geraden

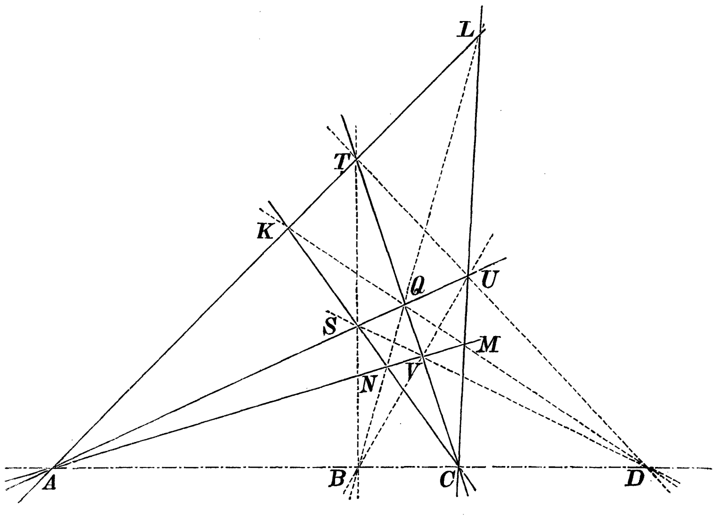

Fig. 16.

$\overline{AQ}$ und $\overline{CQ}$ gezogen werden, so bestimmen diese auf den resp. Seiten $\overline{NK}$, $\overline{KL}$, $\overline{LM}$ und $\overline{MN}$ vier neue Punkte S, T, U und V. Von den Verbindungslinien $\overline{ST}$, $\overline{TU}$, $\overline{UV}$ und $\overline{VS}$ derselben, welche als zweite Diagonalen der Vierecke $KSQT$, $LTQU$, $MUQV$ und $NVQS$ anzusehen sind, gehen aber zwei gegenüberliegende durch B und die übrigen durch D. Wir erhalten also ein Viereck $STUV$, von welchem je zwei Gegenseiten durch B und D, und die Diagonalen durch A und C gehen. Es folgt daraus, dass in einer harmonischen Punktreihe auch die zwei Paare getrennter Punkte mit einander vertauscht werden können, ohne dass die vier Punkte aufhören, harmonische Punkte zu sein, also der Satz:

Ist ABCD *ein harmonisches Gebilde, so sind nicht nur* ADCB, CBAD *und* CDAB *ebenfalls solche, sondern auch* DCBA, DABC, BCDA *und* BADC.

Dieser Satz gilt natürlich auch für harmonische Strahlen und Ebenen, die wir ja mittelst der harmonischen Punkte definirt haben.

Von zwei getrennten Elementen eines harmonischen Gebildes sagen wir, sie seien durch die übrigen beiden Elemente „harmonisch getrennt", einander aber „zugeordnet". Ausserdem werden wir uns manchmal, um einen Satz kürzer und einfacher aussprechen zu können, der Ausdrucksweise bedienen: zwei Elemente eines Gebildes seien durch zwei andere, dem Gebilde nicht angehörige Elemente harmonisch getrennt; nämlich dann, wenn durch letztere in dem Gebilde zwei Elemente bestimmt werden, durch welche die ersteren beiden Elemente harmonisch getrennt sind. Zwei Punkte A und C z. B. heissen harmonisch getrennt durch zwei Ebenen β und δ, wenn diese die Gerade $\overline{AC}$ in zwei solchen Punkten B und D schneiden, dass $ABCD$ vier harmonische Punkte sind, und ebenso heissen β und δ durch A und C harmonisch getrennt, wenn sie durch die beiden Ebenen harmonisch getrennt sind, welche aus ihrer Schnittlinie $\overline{\beta\delta}$ die Punkte A und C projiciren. Für Gebilde in der Ebene gilt z. B. der Doppelsatz:

Durch zwei Gerade und einen ausserhalb gegebenen Punkt ist eine dritte Gerade bestimmt; dieselbe geht durch den Schnittpunkt der beiden ersteren und enthält jeden Punkt, welcher durch die gegebenen Geraden von jenem Punkte harmonisch getrennt ist.

Durch eine Gerade und zwei ausserhalb derselben gegebene Punkte ist ein dritter Punkt bestimmt; derselbe liegt auf der Verbindungslinie der beiden ersteren, und durch ihn geht jede Gerade, welche durch die gegebenen Punkte von jener Geraden harmonisch getrennt ist.

Im Grunde ist dieser Doppelsatz als eine Wiederholung des vorhergehenden (S. 40) anzusehen, wenn letzterer auf Gebilde in der Ebene übertragen wird. Auf dem Satze links und dem nächsten Satze beruht die Lösung der in der Einleitung (S. 3, vergl. Fig. 1) berührten Aufgabe: Durch den unzugänglichen Schnittpunkt von zwei Geraden eine dritte Gerade zu legen.

Nach dem bisher Entwickelten wird es Ihnen jetzt ein Leichtes sein, am vollständigen Viereck und Vierseit folgende Eigenschaften nachzuweisen (vergl. Fig. 15).

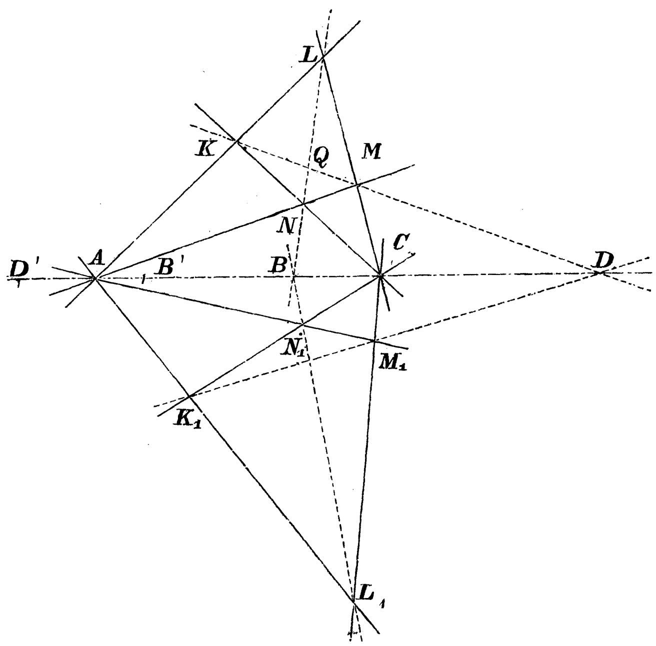

Fig. 15.

Im vollständigen ebenen Viereck sind je zwei Gegenseiten (wie $\overline{KM}$ und $\overline{LN}$) harmonisch getrennt durch die beiden Punkte (A und C), in denen die übrigen Gegenseiten paarweise sich schneiden.

Im vollständigen ebenen Vierseit sind je zwei Gegenpunkte (wie A und C) harmonisch getrennt durch die beiden Geraden ($\overline{KM}$ und $\overline{LN}$), welche die übrigen Gegenpunkte paarweise verbinden.

Ich bemerke hierzu, dass in Fig. 15 nicht nur K, L, M und N als Eckpunkte eines vollständigen Vierecks aufgefasst werden können, sondern auch $\overline{AL}$, $\overline{AN}$, $\overline{CL}$ und $\overline{CN}$ als Seiten eines vollständigen Vierseits, von welchem A und C, K und M, L und N die drei Paare von Gegenpunkten sind.

Bleiben von dem Viereck $KLMN$ (Fig. 15) die beiden Eckpunkte K, L und die Schnittpunkte A und C der zwei paar Gegenseiten ungeändert, indess die Seite $\overline{MN}$ um A sich dreht, so beschreiben die Eckpunkte M und N die resp. Geraden $\overline{CL}$ und $\overline{CK}$;

zugleich drehen sich die beiden Diagonalen um K und L, und bewegen sich die Punkte B und D stetig auf $\overline{AC}$ so, dass sie beständig durch A und C harmonisch getrennt sind. Da nun keiner Lage von B oder D mehr als eine Lage von D resp. B entspricht, so können die Punkte B, D unmöglich bald in dem gleichen, bald in entgegengesetztem Sinne auf $\overline{AC}$ sich bewegen; vielmehr müssen sie sich immer in entgegengesetztem Sinne bewegen, weil sie ja durch A und C getrennt sind und mit C resp. A zusammenfallen, wenn die bewegliche Gerade $\overline{MN}$ in die Lage $\overline{CA}$ resp. $\overline{LA}$ gelangt. Daraus folgt:

Wenn ein Punktenpaar A, C *zwei paar andere Punkte* B, D *und* B′, D′ *harmonisch trennt, so ist* B *von* D *nicht getrennt durch* B′ *und* D′. *Zwei paar Punkte einer Geraden, die sich gegenseitig trennen, können also nicht beide zugleich durch ein drittes Punktenpaar harmonisch getrennt sein.*

Zu zwei Punktenpaaren B, D und B', D' einer Geraden, die sich nicht gegenseitig trennen, giebt es allemal [mindestens] ein drittes Punktenpaar A, C, durch welches B von D und zugleich B' von D' harmonisch getrennt ist. Zum Beweise denken wir uns diejenige Strecke $B'D'$, auf welcher B und D nicht liegen, durch einen Punkt P beschrieben; von den Punkten P_1 und P_2, welche von P durch B' und D' resp. durch B und D harmonisch getrennt sind, beschreibt dann der erstere P_1 die Ergänzung der Strecke $B'D'$ und der letztere P_2 eine in dieser Ergänzung enthaltene Strecke $B_2 D_2$, deren Endpunkte von B' und D' harmonisch getrennt sind durch B und D. Die Punkte P_1 und P_2 bewegen sich in entgegengesetztem Sinne wie P und müssen mindestens einmal sich vereinigen, weil P_1 eine Strecke beschreibt, in welcher die von P_2 durchlaufene Strecke enthalten ist. Bezeichnen wir mit A den Vereinigungspunkt und mit C die zugehörige Lage des Punktes P, so trennen A und C sowohl B von D als auch B' von D' harmonisch.

Metrische Beziehungen harmonischer Gebilde.

Ich darf die Lehre von den harmonischen Gebilden nicht abschliessen, ohne Ihnen, wie ich in der Einleitung versprach, ihre wichtigsten metrischen Beziehungen noch zu entwickeln. Wir gelangen zu denselben am einfachsten mittelst des folgenden Satzes:

Wenn in einer Geraden zwei Punkte A *und* C *von einem dritten* B *gleichen Abstand haben, so sind sie durch diesen und den unendlich fernen Punkt* D *der Geraden harmonisch getrennt, oder* ABCD *sind vier harmonische Punkte.*

Nehmen wir nämlich in einer durch $\overline{ABC}$ gelegten Ebene zwei unendlich ferne Punkte K und M an (Fig. 17), und ziehen

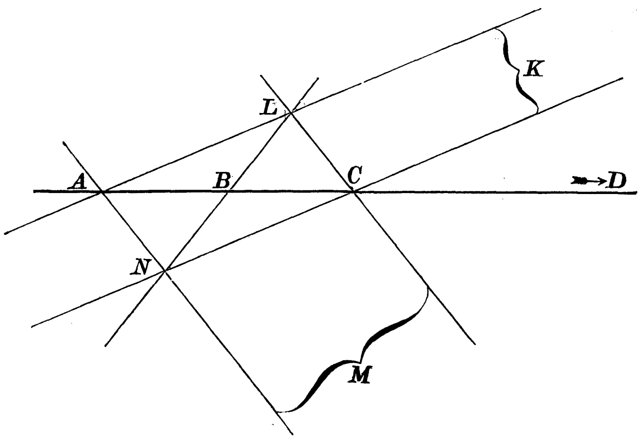

Fig. 17.

nach ihnen durch A und C je zwei Parallele, so schneiden sich letzere in zwei neuen Punkten L und N. Die Gerade $\overline{LN}$ geht dann als zweite Diagonale des Parallelogramms $ALCN$ durch den Halbirungspunkt B der Strecke AC. Von dem Viereck $KLMN$ schneiden sich also zwei Gegenseiten $\overline{KL}$ und $\overline{MN}$ in A, zwei andere $\overline{LM}$ und $\overline{NK}$ in C, die Diagonale $\overline{LN}$ geht durch B und die zweite Diagonale, nämlich die unendlich ferne Gerade $\overline{KM}$, geht durch D, so dass wirklich $ABCD$ vier harmonische Punkte sind.

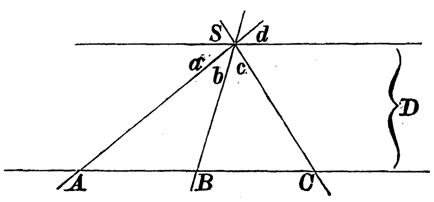

Fig. 18.

Da vier harmonische Punkte $ABCD$, aus einem fünften S durch vier harmonische Strahlen projicirt werden, so folgt hieraus (Fig. 18):

„Zieht man durch die Spitze S eines Dreiecks ASC zwei Ge-
„rade, die eine d parallel und die andere b nach der Mitte der

„Grundlinie AC, so sind dieselben durch die anstossenden „Seiten a und c des Dreiecks harmonisch getrennt."

Ist ASC gleichschenkelig, so steht b senkrecht auf $\overline{AC}$ und folglich auch auf d; auch werden die von a und c gebildeten Nebenwinkel durch b und d halbirt. Also:

„Die Halbirungslinien zweier Nebenwinkel sind durch die „Schenkel derselben harmonisch getrennt und zu einander normal."

Eine Umkehrung dieses Satzes kann so ausgesprochen werden:

„Wenn von vier harmonischen Strahlen zwei getrennte auf ein-„ander senkrecht stehen, so halbiren sie die Winkel zwischen „den anderen beiden Strahlen."

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus folgendem umkehrbaren Satze (Fig. 18):

„Wird ein harmonischer Büschel $abcd$ durch eine Parallele u „zu einem seiner Strahlen geschnitten, so halbirt von den drei „Schnittpunkten mit den übrigen Strahlen der eine den Ab-„schnitt zwischen den beiden anderen."

Die Schnittpunkte von u mit $abcd$ sind nämlich vier harmonische Punkte, und einer derselben liegt unendlich fern.

Diese Sätze, zu welchen sich ähnliche für harmonische Ebenen aufstellen lassen, können zur Lösung einer Reihe von Aufgaben benutzt werden. So z. B. lässt die Aufgabe:

„Zu drei Punkten oder Strahlen den vierten harmonischen zu „construiren"

eine viel einfachere Lösung zu, als diejenige mittelst des vollständigen Vierecks, sobald die Construction von Parallelen und von gleichen Abschnitten zugelassen wird. Denn soll zu den Strahlen b, c, d (Fig. 18) der vierte, von c harmonisch getrennte Strahl a gesucht werden, so schneiden wir b und c durch irgend eine Parallele u zu d in den Punkten B und C, und machen auf dieser $AB = BC$; der durch A gelegte Strahl a des Büschels bcd ist dann der gesuchte. Ist ferner zu den drei Punkten A, B, C (Fig. 19) der vierte, von B harmonisch getrennte Punkt D zu suchen, so tragen wir auf irgend einer durch B gelegten Geraden von B aus zwei gleiche Strecken $\overline{A_1B}$ und $\overline{BC_1}$ ab, bestimmen den Schnittpunkt S der Geraden $\overline{AA_1}$ oder a und $\overline{CC_1}$ oder c, und ziehen durch diesen eine Parallele d zu $\overline{A_1BC_1}$, welche die Gerade $\overline{ABC}$ in dem gesuchten Punkte D schneidet. Denn da A_1, B, C_1 und der unendlich ferne Punkt von $\overline{A_1B}$ vier harmonische Punkte sind, so muss $S\,(A_1BC_1D)$ oder $abcd$

ein harmonischer Büschel, und daher auch $ABCD$ als Schnitt desselben eine harmonische Punktreihe sein.

Wenn eine Strecke AC und deren Mittelpunkt B gegeben sind, so kann mittelst linearer Constructionen durch jeden vierten Punkt K (Fig. 20) eine Parallele zu $\overline{ABC}$ gelegt werden, wie folgt. Wir ziehen die Linien $\overline{KA}$ und $\overline{KC}$, und schneiden diese in resp. L und N mittelst irgend einer durch B gehenden Geraden. Bestimmen wir dann den Schnittpunkt M von $\overline{CL}$ und $\overline{AN}$, so geht durch diesen die gesuchte Parallele. Denn als zweite Diagonale des Vierecks

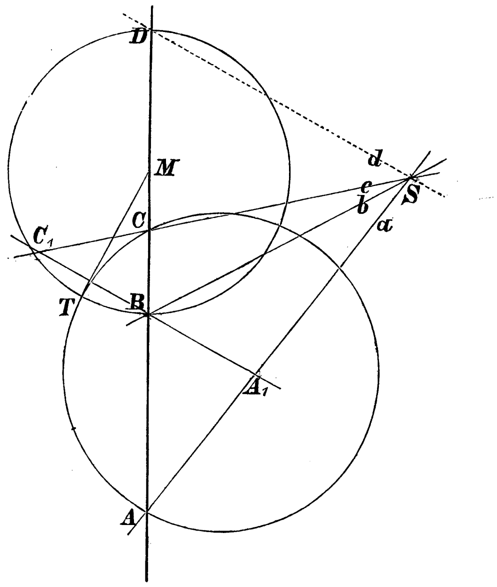

Fig. 19.

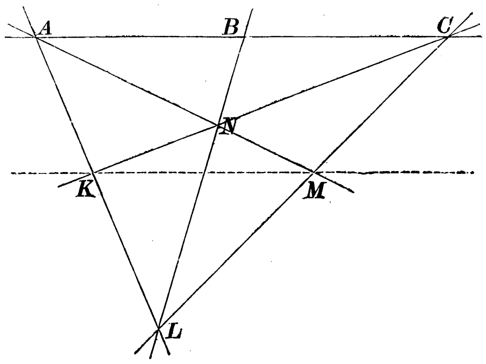

Fig. 20.

$KLMN$ schneidet $\overline{KM}$ die Gerade $\overline{ABC}$ in einem vierten, von B harmonisch getrennten Punkte, welcher aber unendlich fern liegt, weil B die Strecke AC halbirt. Wenn umgekehrt zwei Parallele gegeben sind, so kann jede auf einer derselben liegende Strecke durch lineare Constructionen halbirt werden. Wie diese Constructionen in der Feldmesskunst verwerthet werden können, wird Ihnen ohne Weiteres einleuchten.

Zwischen den Abschnitten, welche durch vier harmonische Punkte $ABCD$ auf einer Geraden gebildet werden, besteht eine interessante Proportion. Wir projiciren, um diese zu finden, die harmonischen Punkte durch irgend einen harmonischen Büschel $abcd$ (Fig. 19), und legen sodann durch B eine Parallele zum Strahle d. Dann begegnet diese den Strahlen a und c in zwei Punkten A_1 und C_1, welche von B gleichen Abstand haben; zugleich entstehen zwei Paare ähnlicher Dreiecke, indem $AA_1B \sim ASD$ und $BC_1C \sim DSC$. Wir erhalten also die Proportionen:

$$\frac{AB}{A_1B} = \frac{AD}{SD} \text{ und } \frac{BC}{BC_1} = \frac{CD}{SD}.$$

Dividiren wir die erstere durch die letztere, und berücksichtigen, dass $A_1B = BC_1$ ist, so folgt:

$$\mathrm{I} \ldots\ldots \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD},$$

oder der Satz:

„Die Strecke AC ist durch den in ihr gelegenen Punkt B in „demselben Verhältniss getheilt, wie durch den äusseren Punkt „D, welcher von B durch A und C harmonisch getrennt ist."

Dieser Satz wird gewöhnlich als Definition der harmonischen Punkte aufgestellt, und zum Ausgangspunkt der Lehre von den harmonischen Punkten gewählt. Es folgt daraus u. A., dass der äussere Punkt D über C hinaus liegt, wenn $AB > BC$ und folglich $AD > CD$ ist, dagegen über A hinaus, wenn $AB < BC$, dass also B und D beide zugleich dem einen der Punkte A und C näher liegen als dem anderen.

In obiger Proportion schreibt man gewöhnlich, weil die gleichen Strecken CD und DC in entgegengesetztem Sinne beschrieben sind, — DC statt CD, so dass sie symmetrischer so lautet:

$$\frac{AB}{BC} = -\frac{AD}{DC}.$$

Ist M der Halbirungspunkt der Strecke BD, so kann die Gleichung I auch geschrieben werden:

$$\frac{AM - BM}{BM - CM} = \frac{AM + MD}{CM + MD},$$

oder wenn BM statt MD gesetzt wird:

$$\frac{AM - BM}{BM - CM} = \frac{AM + BM}{CM + BM}.$$

Durch Ausmultipliciren ergiebt sich hieraus nach sehr einfachen Reductionen:

$$\text{II} \;\ldots\ldots\; (BM)^2 = AM \,.\, CM,$$

oder der bemerkenswerthe Satz:

„BM (und ebenso DM) ist die mittlere Proportionale zwischen „AM und CM."

Auch dieser oft benutzte Satz kann als Definition der harmonischen Punkte gelten.

Legt man durch A und C (Fig. 19) irgend einen Kreis und an diesen durch M eine Tangente MT, so ist nach dem bekannten Satze über die Abschnitte von Kreissecanten:

$$AM \,.\, CM = (TM)^2,$$

und folglich $TM^2 = BM^2 = DM^2$. Der Berührungspunkt T der Tangente liegt also auf dem Kreise, welcher mit dem Radius $BM = MD$ um den Mittelpunkt M beschrieben wird; und dieser Kreis schneidet den anderen rechtwinklig in T, weil sein Radius MT auf seiner Tangente in T normal ist. Also:

„Die Kreise der Ebene, welche durch zwei gegebene Punkte A „und C gehen, werden rechtwinklig geschnitten von jedem Kreise, „von welchem die Endpunkte eines Durchmessers DB harmo- „nisch durch A und C getrennt sind."

Die Lehre von den harmonischen Punkten führt uns also mit Leichtigkeit zu Schaaren von Kreisen, die sich rechtwinklig schneiden, und ebenso kann sie zum Ausgangspunkt für die Untersuchung orthogonaler Kugelschaaren gewählt werden.

Die Umkehrung der Gleichung I, also die Gleichung $\frac{BC}{AB} = \frac{CD}{AD}$ lässt sich auch folgendermassen schreiben:

$$\frac{AC - AB}{AB} = \frac{AD - AC}{AD} \quad \text{oder} \quad \frac{AB - AC}{AB} = \frac{AC - AD}{AD},$$

und gerade dieser letzten Gleichung verdanken die Punkte A, B, C, D den Namen „harmonische" Punkte. Nämlich, wie Ihnen bekannt sein wird, pflegt man von drei Zahlen β, γ, δ zu sagen, sie seien „in stetiger harmonischer Proportion" oder „harmonisch", wenn die Differenz der beiden ersten sich zu der ersten verhält, wie die Differenz der beiden letzten zur letzten, oder wenn:

$$\frac{\beta - \gamma}{\beta} = \frac{\gamma - \delta}{\delta}.$$

Die obige Gleichung zwischen den Abschnitten AB, AC und AD aber hat ganz die Form dieser letzten Gleichung.

Durch Ausführung der Division ergiebt sich schliesslich noch die Gleichung:

$$1 - \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AD} - 1,$$

welche auch in folgender Weise geschrieben werden kann:

$$\text{III} \ldots\ldots\ldots \frac{2}{AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}.$$

Sie werden diese sehr bemerkenswerthe Formel leicht selbst in Worte kleiden können; auch sie wird häufig zur Definition der harmonischen Punkte benutzt.

Aehnliche Gleichungen könnte ich Ihnen entwickeln für die Winkel, welche vier harmonische Strahlen oder Ebenen mit einander bilden. Ich ziehe jedoch vor, dieselben gelegentlich im Anhange zum nächsten grösseren Abschnitte aufzustellen, da sie ohnehin keinen grossen Werth für uns haben.

Wollen Sie übrigens bemerken, dass bei den metrischen Beziehungen der Gebilde das Gesetz der Reciprocität nicht mehr, oder doch nur in einzelnen Fällen zur Geltung kommt. Ein Grund für diese Thatsache ist, dass im Büschel kein Element existirt, welches in Bezug auf die Massverhältnisse eine ähnliche ausgezeichnete Stellung einnähme, wie der unendlich ferne Punkt in der Punktreihe; und in der letzteren kennen wir wiederum keine Strecke, welche durch das Mass so definirt und ausgezeichnet werden könnte, wie im Büschel der rechte Winkel.

Fünfter Vortrag.

Projective Verwandtschaft einförmiger Grundgebilde.

Im gegenwärtigen Vortrage will ich einen bereits früher ausgesprochenen Gedanken wieder aufnehmen und weiter ausführen, den Gedanken nämlich, zwei Grundgebilde auf einander zu „beziehen", so dass jedem Elemente des einen ein Element des anderen entspricht. Als sehr einfache Arten, Grundgebilde der ersten Stufe auf einander zu beziehen, haben sich uns die folgenden dargeboten. Es sind auf einander bezogen:

1) ein Büschel und eine Punktreihe (Fig. 6), oder ein Ebenenbüschel und ein Strahlenbüschel, wenn jedes Element des letzteren Gebildes in dem ihm entsprechenden Elemente des ersteren liegt;
2) zwei Punktreihen, wenn sie Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels sind (Fig. 8);
3) zwei Strahlenbüschel, wenn sie Scheine einer und derselben Punktreihe (Fig. 7), oder Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels, oder beides sind;
4) zwei Ebenenbüschel, wenn sie Scheine eines und desselben Strahlenbüschels sind.

Von zwei in dieser Weise auf einander bezogenen einförmigen Grundgebilden wollen wir nun sagen, sie seien „in perspectiver Lage", oder kürzer, sie seien „perspectiv"; so dass also von zwei ungleichartigen perspectiven Grundgebilden das eine ein Schnitt des anderen ist, zwei gleichartige perspective Grundgebilde dagegen entweder Schnitte oder Scheine eines und desselben dritten Grundgebildes sind.

Werden zwei einförmige Grundgebilde auf ein und dasselbe dritte perspectiv bezogen, z. B. zwei Punktreihen auf eine dritte, so sind sie auch auf einander bezogen, jedoch ohne im Allgemeinen perspective Lage zu haben. Wir gelangen so zu einer zweiten, der sogenannten „schiefen Lage" von zwei auf einander bezogenen Grundgebilden, welche wir aus der perspectiven auch auf folgende Weise ableiten können. Nämlich wir können zwei perspective Grundgebilde gegen einander verschieben; dann bleibt jedem Elemente des einen ein bestimmtes Element des anderen Gebildes zugewiesen, aber die Gebilde verlieren im Allgemeinen ihre perspective Lage.

Wir können noch auf unzählig viele andere Arten zwei Grundgebilde auf einander beziehen, z. B. zwei Strahlenbüschel, indem wir sie als Scheine einer und derselben Curve auffassen. Die vorhin angegebene Art des Beziehens unterscheidet sich nun in einem wichtigen Punkte von allen übrigen, und zwar sowohl wenn die Gebilde in perspectiver, als wenn sie in schiefer Lage sich befinden. Werden nämlich irgend vier harmonische Elemente aus dem einen der beiden Gebilde herausgegriffen, so entsprechen diesen offenbar wieder vier harmonische Elemente in dem anderen Gebilde, weil ja Scheine und Schnitte von harmonischen Gebilden wieder harmonische Gebilde sind. Diese Eigenthümlichkeit findet bei anderen

Arten des Beziehens im Allgemeinen nicht statt, und wir werden so dazu geführt, folgende Definition aufzustellen:

Zwei Grundgebilde heissen projectiv verwandt oder kurz projectiv, wenn sie so auf einander bezogen sind, dass je vier harmonischen Elementen des einen allemal vier harmonische Elemente des anderen entsprechen.

Zwei perspective einförmige Grundgebilde sind demnach auch projectiv; sie sind nur noch ausgezeichnet durch ihre besondere gegenseitige Lage. Die Ausdrücke „conform“ und „homographisch“, welche Paulus und Chasles gebrauchen, sind gleichbedeutend mit projectiv. v. Staudt hat für „projectiv“ das Zeichen $\barwedge$ eingeführt.

Aus der Erklärung der projectiven Verwandtschaft folgt sofort:

Wenn zwei Gebilde zu einem dritten projectiv sind, so sind sie auch zu einander projectiv.

Sind z. B. zwei Punktreihen zu einer und derselben dritten perspectiv, so sind sie zu einander projectiv, haben aber nur in besonderen Fällen perspective Lage. Das Gleiche gilt von beliebigen Grundgebilden erster Stufe.

In zwei projectiven Punktreihen entsprechen vier beliebigen Punkten A, B, C, D *der einen, von welchen die beiden ersten durch die zwei letzten nicht getrennt sind, allemal vier Punkte* A_1, B_1, C_1, D_1, *von welchen das Gleiche gilt.*

Es giebt nämlich in der ersten Reihe zwei Punkte M, N, durch welche sowohl A von B als auch C von D harmonisch getrennt ist (Seite 44), und denselben entsprechen der obigen Definition zufolge in der anderen Reihe zwei Punkte M_1 und N_1, durch welche A_1 von B_1 und zugleich C_1 von D_1 harmonisch getrennt ist. Unmöglich können deswegen die Punkte A_1 und B_1 von einander getrennt sein durch C_1 und D_1 (vgl. Seite 44). — Sind A_1 und C_1 getrennt durch B_1 und D_1, so müssen auch A und C durch B und D getrennt sein; denn die entgegengesetzte Annahme führt zum Widerspruch mit dem soeben bewiesenen Satze.

Wird in der einen Punktreihe eine beliebig grosse Anzahl von Punkten $A, B, C, \ldots, P, Q, \ldots$ so angenommen, dass keine zwei derselben durch die vorhergehenden und nachfolgenden getrennt sind, so entsprechen also diesen Punkten in der anderen, projectiven Reihe ebenso viele Punkte $A_1, B_1, C_1, \ldots, P_1, Q_1, \ldots$, von denen das Gleiche gilt. Folgen die Punkte P, Q, R, ... der ersteren Reihe stetig auf einander, so müssen auch die ihnen entsprechenden

Punkte P_1, Q_1, R_1 ... der letzteren Reihe stetig auf einánder folgen; denn wären etwa P_1 und Q_1 nicht zwei consecutive Punkte dieser Reihe, so gäbe es Punkte U_1, V_1, welche sie trennen, und es müssten auch P und Q von einander getrennt sein durch die entsprechenden Punkte U und V, könnten also nicht stetig auf einander folgen. Analoges gilt von projectiven Strahlen- und Ebenenbüscheln, weil dieselben von beliebigen Transversalen in projectiven Punktreihen geschnitten werden. Es ergiebt sich also der wichtige Satz:

Wenn zwei einförmige Grundgebilde projectiv sind, so entspricht jeder stetigen Aufeinanderfolge von Elementen des einen Gebildes eine stetige Aufeinanderfolge von Elementen des anderen.

Zwei gleichartige projective Grundgebilde können auch „conjectiv“ sein oder „in einander liegen“, das heisst denselben Träger haben. Zwei projective Ebenenbüschel z. B. können mit den Axen auf einander gelegt werden, und ebenso können zwei projective Punktreihen in derselben Geraden liegen, so dass jeder Punkt der Geraden zweimal gedacht werden muss. Für das Folgende ist nun die Untersuchung von grosser Wichtigkeit, wie viele Elemente zwei projective einförmige Grundgebilde, welche in einander liegen, „entsprechend gemein“ haben, d. h. wie oft ein Element des einen Gebildes mit dem ihm entsprechenden Elemente des anderen zusammenfällt. Dass zunächst der Fall möglich ist, in welchem sie ein oder zwei solche „Doppelelemente“ haben, ergiebt sich aus folgendem Satze:

Sind in einer Ebene zwei Büschel S_1 und S_2 (Fig. 21) gegeben, welche Scheine einer und derselben Punktreihe u, also perspectiv sind, und schneiden wir dieselben durch eine Gerade v, so erhalten wir in dieser zwei projective Punktreihen u_1 und u_2, welche die beiden Schnittpunkte von v mit u und mit $\overline{S_1S_2}$ entsprechend gemein haben. Diese beiden Punkte fallen zusammen, wenn $\overline{S_1S_2}$ durch $\dot{uv}$ geht.

Sind in einer Ebene zwei Punktreihen u_1 und u_2 (Fig. 22) gegeben, welche Schnitte eines und desselben Büschels S, also perspectiv sind, und projiciren wir dieselben aus einem Punkte T der Ebene, so wird dieser der Mittelpunkt von zwei projectiven Büscheln, welche die beiden Verbindungslinien von T mit S und mit $\dot{u_1u_2}$ entsprechend gemein haben. Diese beiden Strahlen fallen zusammen, wenn $\dot{u_1u_2}$ auf $\overline{ST}$ liegt.

Zur Erläuterung füge ich hinzu, dass links zwei Punkte A_1 und A_2 von resp. u_1 und u_2 einander entsprechen, wenn $\overline{S_1A_1}$

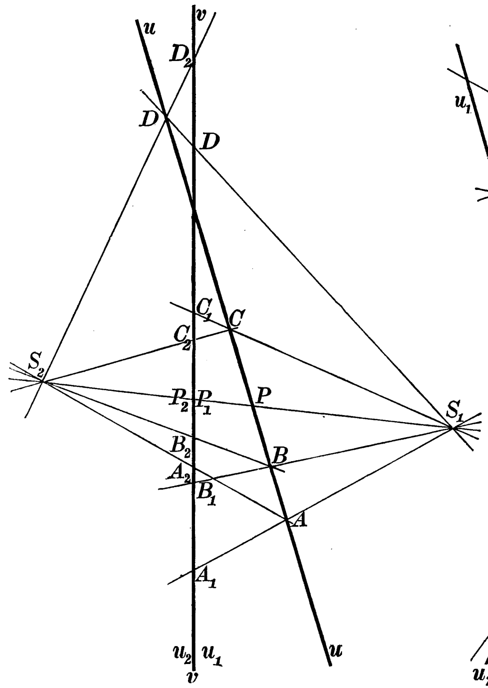

Fig. 21.

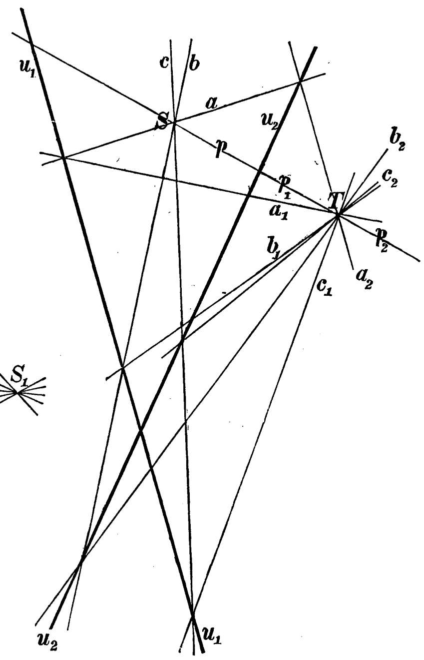

Fig. 22.

und $\overline{S_2A_2}$ in einem Punkte A von u sich schneiden. Den Schnittpunkt uv haben daher die drei Punktreihen u, u_1 und u_2 entsprechend gemein, während u_1 und u_2 auch den Schnittpunkt von v mit dem gemeinsamen Strahl $\overline{S_1S_2}$ der Büschel S_1 und S_2 entsprechend gemein haben.

Wird von zwei projectiven Punktreihen u, u_1 die eine u durch stetige Bewegung eines Punktes P beschrieben, so durchläuft zugleich der entsprechende Punkt P_1 von u_1 diese andere Punktreihe, wenn P und P_1 beständig homologe Punkte bleiben. Nun können aber, wenn u und u_1 auf derselben Geraden liegen, die Punkte P und P_1 sich entweder in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne bewegen (Fig. 23 und 24). Im ersteren Falle

(Fig. 24) nennen wir die Punktreihen „gleichlaufend“, im letzteren (Fig. 23) „entgegengesetzt projectiv.“ Ebenso nennen wir zwei projective Strahlenbüschel S und S_1, welche concentrisch und in derselben Ebene liegen (Fig. 25 und 26), oder zwei projective

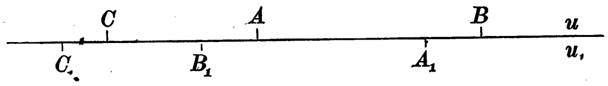

Fig. 23.

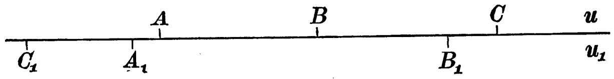

Fig. 24.

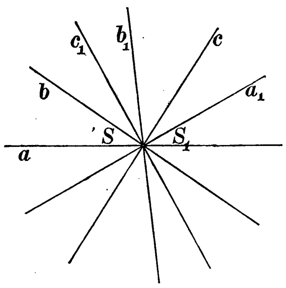

Fig. 25.

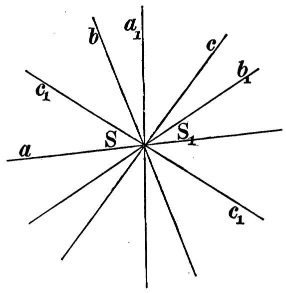

Fig. 26.

Ebenenbüschel, welche dieselbe Axe haben, „gleichlaufend“ (Fig. 26) oder „entgegengesetzt projectiv“ (Fig. 25), jenachdem zwei homologe Elemente, indem sie dieselben beschreiben, sich in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne drehen. In entgegengesetzt projectiven Gebilden erster Stufe (Fig. 23 und 25) müssen die beiden sich entsprechend bewegenden Elemente nothwendig zweimal zusammenfallen; es ergiebt sich:

„Entgegengesetzt projective Grundgebilde erster Stufe haben
„allemal zwei Elemente entsprechend gemein; durch diese sind
„je zwei andere homologe Elemente von einander getrennt.“

Dagegen haben gleichlaufend projective Gebilde nur dann zwei Elemente entsprechend gemein, wenn eine Strecke (resp. ein Winkel) AB des einen ganz in der entsprechenden Strecke (resp. dem entsprechenden Winkel) des anderen liegt (Fig. 24); sie haben in besonderen Fällen nur ein, häufig (Fig. 26) gar kein Element entsprechend gemein. — Zwei projective Punktreihen u, u_1, welche drei Punkte A, B, C entsprechend gemein haben, müssen wegen des vorhergehenden Satzes gleichlaufend projectiv sein.

Wir können nunmehr den folgenden **Fundamentalsatz der Geometrie der Lage** beweisen:

Wenn zwei einförmige projective Grundgebilde drei Elemente A, B, C *entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein, sind also identisch.*

Sind nämlich zunächst die projectiven Grundgebilde zwei Punktreihen u und u_1 (Fig. 27), so muss jeder Punkt, welcher von einem

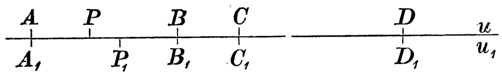

Fig. 27.

der entsprechend gemeinschaftlichen Punkte A, B, C durch die beiden anderen harmonisch getrennt ist, mit seinem entsprechenden zusammenfallen, weil derselbe völlig bestimmt ist, und weil vier harmonischen Punkten von u allemal vier harmonische Punkte von u_1 entsprechen sollen (Definition). Gesetzt nun, es gebe auf derjenigen Strecke AB, welche den Punkt C nicht enthält, einen Punkt P von u, welcher mit dem entsprechenden Punkte P_1 und u_1 nicht zusammenfällt. Lassen wir dann P im Sinne ABC die Punktreihe u durchlaufen, so beschreibt P_1 die u_1 in demselben Sinne und muss sich entweder in B oder vor B in einem Punkte B' mit P vereinigen. Bewegt sich P im entgegengesetzten Sinne CBA, so muss auch P_1 sich im Sinne CBA bewegen und entweder in A oder vor A in einem Punkte A' mit P zusammenfallen. Wir erhalten auf diese Weise eine Strecke $A'B'$, die entweder gleich AB oder ein Theil von AB ist und von welcher kein Punkt, ausgenommen die beiden Endpunkte A' und B', mit seinem entsprechenden zusammenfällt. Das ist aber unmöglich, weil dem Obigen zufolge derjenige Punkt, welcher vom Punkte C durch A' und B' harmonisch getrennt ist, mit seinem entsprechenden zusammenfallen muss. Es folgt daraus, dass die Punktreihen u und u_1 jeden Punkt der Strecke AB entsprechend gemein haben müssen, eben deshalb aber auch jeden anderen Punkt Q der Geraden, weil Q durch A und B von einem Punkte der Strecke AB harmonisch getrennt ist.

Für zwei projective Strahlen- oder Ebenenbüschel, welche drei Elemente entsprechend gemein haben, können wir den Satz entweder ganz analog beweisen; oder noch einfacher, wir führen diesen Fall dadurch auf den vorigen zurück, dass wir durch eine und dieselbe Gerade die Büschel in zwei Punktreihen schneiden. Die letzteren sind dann auch projectiv und haben drei und folglich alle ihre Elemente entsprechend gemein, woraus das Gleiche für die Büschel folgt.

Zwei projective einförmige Grundgebilde können also höchstens zwei Elemente entsprechend gemein haben, wenn nicht jedes Element des einen mit dem entsprechenden Elemente des anderen zusammenfallen soll. Eine andere wichtige Folgerung aus unserem Fundamentalsatze ist:

„Wenn eine Punktreihe zu einem Büschel, oder ein Strahlen- „büschel zu einem Ebenenbüschel projectiv ist, und drei Ele- „mente des ersteren Gebildes in den ihnen entsprechenden Ele- „menten des letzteren liegen, so ist das erstere Gebilde ein „Schnitt des letzteren."

Dasselbe hat nämlich mit demjenigen Schnitte des letzteren, welchen der Träger des ersteren Gebildes erzeugt, drei und folglich alle seine Elemente entsprechend gemein, ist also mit ihm identisch.

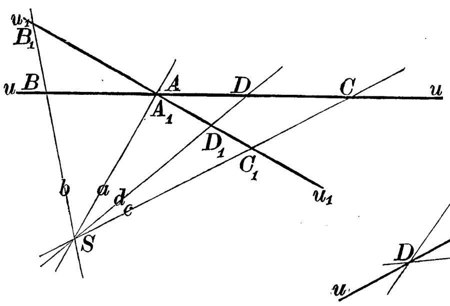

Fig. 28.

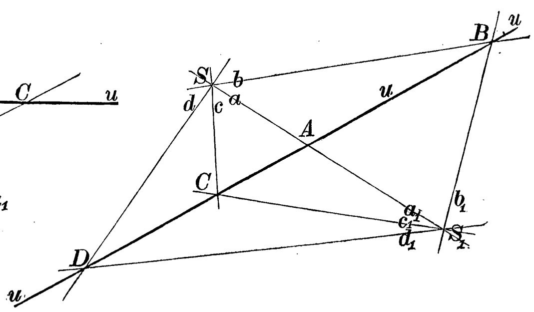

Fig. 29.

Wenn zwei projective Strahlenbüschel S und S_1 (Fig. 29), welche in einerlei Ebene liegen, aber nicht concentrisch sind, den Verbindungs-Strahl a oder a_1 ihrer Mittelpunkte entsprechend gemein haben, so sind sie Scheine einer und derselben

Wenn zwei projective Punktreihen u und u_1 (Fig. 28), welche sich schneiden, ihren Schnittpunkt A oder A_1 entsprechend gemein haben, so sind sie Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels S und somit perspectiv. Denn verbinden wir

Punktreihe u und somit perspectiv. Denn verbinden wir die Punkte B und C, in welchen irgend zwei Strahlen b und c des Büschels S von den ihnen resp. entsprechenden Strahlen b_1 und c_1 von S_1 geschnitten werden, durch eine Gerade $\overline{BC}$ oder u, so sind die beiden Punktreihen, in welchen u die Büschel S und S_1 schneidet, identisch, weil sie projectiv sind und die drei Punkte $\dot{u}a$, $\dot{u}b$ und $\dot{u}c$ oder A, B und C entsprechend gemein haben.

irgend zwei Punkte B und C von u mit den ihnen resp. entsprechenden Punkten B_1 und C_1 von u_1 durch die Geraden b und c, und bezeichnen wir mit S den Schnittpunkt dieser Geraden, so sind die beiden Strahlenbüschel, durch welche aus S die Punktreihen u und u_1 projicirt werden, identisch, weil sie projectiv sind und die drei Strahlen $\overline{SA}$, $\overline{SB}$ und $\overline{SC}$ oder a, b und c entsprechend gemein haben.

Diesem Doppelsatze steht der folgende aus der Geometrie des Strahlenbündels zur Seite:

Wenn zwei projective Ebenenbüschel, deren Axen sich schneiden, die Verbindungsebene dieser Axen entsprechend gemein haben, so sind die Scheine eines und desselben Strahlenbüschels und daher perspectiv. Verbinden wir nämlich irgend zwei Schnittlinien homologer Ebenen mit einander, und schneiden wir durch die Verbindungsebene die beiden Ebenenbüschel, so erhalten wir zwei projective Strahlenbüschel, welche drei Strahlen entsprechend gemein haben und folglich identisch sind.

Wenn zwei projective Strahlenbüschel, welche concentrisch sind, aber in verschiedenen Ebenen liegen, die Schnittlinie dieser Ebenen entsprechend gemein haben, so sind sie Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels und daher perspectiv. Projiciren wir nämlich aus der Schnittlinie von irgend zwei Verbindungsebenen homologer Strahlen die beiden Strahlenbüschel, so erhalten wir zwei projective Ebenenbüschel, welche drei Ebenen entsprechend gemein haben und folglich identisch sind.

Die Beweise dieses und des vorhergehenden Doppelsatzes sind, wie Sie bemerkt haben werden, ganz gleichartig; auch der folgende Satz wird auf die nämliche Art bewiesen.

Zwei projective, aber nicht concentrische Strahlenbüschel S und S_1 (Fig. 29) haben perspective Lage, wenn von den Schnitt-

Zwei projective, aber nicht conjective Punktreihen u und u_1 (Fig. 28) haben perspective Lage, wenn von den Verbindungslinien punkten ihrer homologen Strahlen irgend drei in einer Geraden u liegen. Denn die projectiven Punktreihen, in welchen die beiden Strahlenbüschel von der Geraden u geschnitten werden, haben jene drei Punkte B, C, D und folglich alle ihre Punkte entsprechend gemein; alle Schnittpunkte homologer Strahlen der beiden Büschel liegen folglich auf der Geraden u.

ihrer homologen Punkte irgend drei durch einen Punkt S gehen. Denn die projectiven Strahlenbüschel, durch welche die beiden Punktreihen aus dem Punkte S projicirt werden, haben jene drei Strahlen $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{DD_1}$ und folglich alle ihre Strahlen entsprechend gemein; alle Verbindungslinien homologer Punkte von u und u_1 gehen folglich durch S.

Es wird Ihnen ein Leichtes sein, die analogen Sätze über Strahlen- und Ebenenbüschel im Strahlenbündel aufzustellen und zu beweisen.

Wenn zwei auf einander bezogene Strahlenbüschel in einer Ebene, aber nicht concentrisch liegen, so folgen die Schnittpunkte ihrer homologen Strahlen stetig auf einander; denn wenn ein Strahl durch Drehung um den Mittelpunkt den einen Büschel beschreibt, so dreht sich auch der entsprechende Strahl stetig und beschreibt den anderen Büschel, und der Schnittpunkt der beiden Strahlen beschreibt folglich eine Linie. Sind nun die beiden Strahlenbüschel projectiv, ohne jedoch perspective Lage zu haben, so liegen alle Schnittpunkte ihrer homologen Strahlen in einer Curve, welche dem obigen Satze zufolge mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat. Wir nennen dieselbe wegen dieser Eigenthümlichkeit eine „Curve oder Punktreihe zweiter Ordnung“; von ihr soll die gerade Punktreihe, wo es nöthig erscheint, durch den Namen „Punktreihe erster Ordnung“ unterschieden werden.

Liegen zwei projective Punktreihen schief in einer Ebene, so bilden ebenso die sämmtlichen Verbindungslinien von je zwei homologen Punkten derselben eine stetige Aufeinanderfolge von Strahlen, von welcher durch keinen Punkt mehr als zwei Strahlen gehen. Die Gesammtheit dieser Verbindungslinien bezeichnen wir als einen „Strahlenbüschel zweiter Ordnung“, die gewöhnlichen Strahlenbüschel dagegen, um Zweideutigkeiten zu vermeiden, als Strahlenbüschel „erster Ordnung“.

Die Curven und Strahlenbüschel II. Ordnung sind also folgendermassen durch ihre Entstehungsart definirt:

Zwei projective Strahlenbüschel (erster Ordnung), die schief in einer Ebene liegen, erzeugen eine Curve oder Punktreihe II. Ordnung, indem jeder Strahl des einen den entsprechenden Strahl des anderen Büschels in einem Punkte dieser Curve schneidet.

In keiner Geraden liegen mehr als zwei Punkte einer Curve II. Ordnung.

Zwei projective Punktreihen (erster Ordnung), die schief in einer Ebene liegen, erzeugen einen Strahlenbüschel II. Ordnung, indem jeder Punkt der einen den entsprechenden Punkt der anderen Punktreihe durch einen Strahl dieses Büschels projicirt.

Durch keinen Punkt gehen mehr als zwei Strahlen eines Büschels II. Ordnung.

Ganz analoge Gebilde II. Ordnung werden in einem Bündel durch projective Strahlen- und Ebenenbüschel erzeugt. Ich werde in den nächsten Vorträgen alle diese neuen Gebilde näher untersuchen.

Zu Constructionen der Curven und Strahlenbüschel II. Ordnung gelangen wir, indem wir den folgenden wichtigen Satz beweisen:

Zwei einförmige Grundgebilde können stets in solcher Weise projectiv auf einander bezogen werden, dass man irgend drei Elementen des einen drei beliebige Elemente des anderen Grundgebildes zuweist; zu jedem vierten Elemente des einen kann dann das entsprechende des anderen Gebildes eindeutig bestimmt werden.

Wir können den Beweis dieses Satzes direct aus der Erklärung der projectiven Verwandtschaft schöpfen, und aus dem Satze, dass durch drei Elemente eines einförmigen Grundgebildes ein einziges viertes bestimmt ist, welches von einem der ersteren durch die übrigen beiden harmonisch getrennt ist. Daraus folgt durch ähnliche Betrachtungen wie oben (S. 56), dass durch die drei gegebenen Paare homologer Elemente unendlich viele solche Paare einander zugewiesen sind, und dass in dem einen Gebilde kein Element vorkommt, welchem dadurch nicht ein Element des anderen zugewiesen wäre.

Ich will jedoch den Beweis noch auf andere Weise führen, aber nur für zwei Punktreihen, weil alle anderen Fälle sich auf diesen einen leicht zurückführen lassen. Ist nämlich eines oder jedes der beiden Grundgebilde ein Büschel, so können wir für dasselbe den Schnitt mit einer Geraden, also eine Punktreihe, substituiren.

Sollen nun zunächst zwei in einer Ebene liegende Punktreihen

u und u_1 (Fig. 28) projectiv so auf einander bezogen werden, dass sie den Schnittpunkt A oder A_1 ihrer Träger entsprechend gemein haben, und dass den Punkten B und C von u die resp. Punkte B_1 und C_1 von u_1 entsprechen, so muss die eine Punktreihe eine Projection der anderen sein aus dem Schnitttpunkte S von $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$. Irgend einem vierten Punkte D von u entspricht also in u_1 seine Projection D_1 aus dem Punkte S.

Sollen ferner zwei Punktreihen u und u_1 (Fig. 30), die nicht in derselben Geraden liegen, so auf einander projectiv bezogen

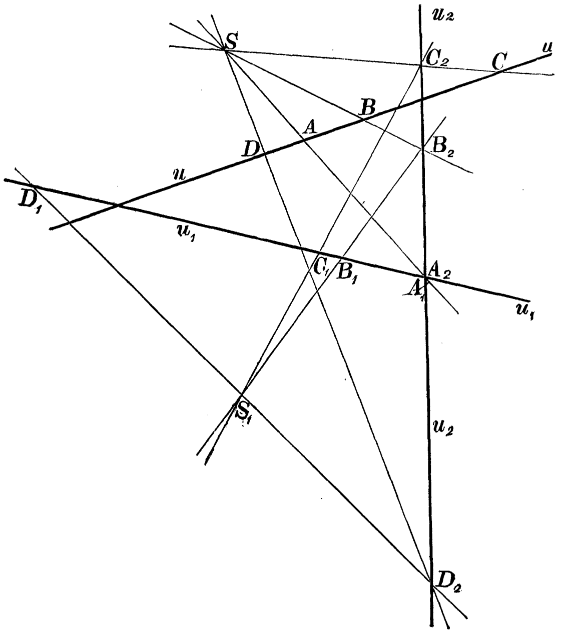

Fig. 30.

werden, dass den Punkten A, B, C von u die resp. Punkte A_1, B_1, C_1 von u_1 entsprechen, so nehmen wir auf einer Verbindungslinie von zwei einander entsprechenden Punkten, z. B. auf $\overline{AA_1}$, einen von A und A_1 verschiedenen Punkt S an, und legen durch A_1 eine von u_1 und $\overline{AA_1}$ verschiedene Gerade u_2, welche die Gerade u schneidet. Projiciren wir dann die Punktreihe u auf u_2 aus dem Mittelpunkte S, und sind A_2, B_2, C_2 die Projectionen von A, B, C, so ist unsere Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt. Denn wir haben nur noch u_1 und u_2 so auf einander projectiv zu beziehen, dass sie ihren Schnittpunkt A_1 oder A_2 entsprechend gemein haben und den Punkten B_1 und C_1 von u_1 die resp. Punkte B_2 und C_2 von u_2 entsprechen. Die Punktreihen u und u_1 können daher als Projectionen einer und derselben dritten Punktreihe u_2 angesehen werden. Um zu irgend einem Punkte D von u den entsprechenden Punkt D_1 in u_1 zu bestimmen, suchen wir zunächst seine Projection D_2 auf u_2, mit deren Hülfe wir dann nach den Regeln des schon erledigten Falles D_1 finden.

Sollen endlich zwei in derselben Geraden liegende Punktreihen u und u_1 (Fig. 23 und 24) projectiv so auf einander bezogen werden, dass den Punkten A, B, C von u die resp. Punkte A_1, B_1, C_1 von u_1 entsprechen, so führen wir diesen Fall auf den vorigen dadurch zurück, das wir u_1 auf irgend eine andere Gerade u_2 projiciren. Fallen irgend zwei einander entsprechende Punkte, z. B. A und A_1, auf einander, so legen wir u_2 am zweckmässigsten durch einen solchen Doppelpunkt, indem dann der vorliegende Fall sogleich auf den ersten zurückgeführt ist.

Aus dieser Untersuchung ergiebt sich der Satz: Zwei projective einförmige Grundgebilde können immer als erstes und letztes in einer Reihe von Gebilden betrachtet werden, deren jedes zu dem folgenden und zu dem vorhergehenden perspective Lage hat. Zwei projective Punktreihen z. B. können angesehen werden als das erste und letzte von vier oder weniger Punktreihen, von denen jede eine Projection der benachbarten ist. Dieser Satz erklärt auch den Ausdruck „projectiv“.

Zugleich ergiebt sich eine Reihe anscheinend verwickelter Sätze auf sehr einfache Weise. Ich nenne von denselben nur die folgenden:

Drehen sich die Seiten a_1, a_2, ..., a_n eines veränderlichen einfachen $n$ecks der Reihe nach um n feste Punkte S_1, S_2, ..., S_n, während $n-1$ Eckpunkte $a_1 a_2$, $a_2 a_3$, ..., $a_{n-1} a_n$ desselben sich auf den resp. festen Geraden u_1, u_2, ..., u_{n-1} bewegen, so beschreibt der letzte

Durchlaufen die Eckpunkte A_1, A_2, ..., A_n eines veränderlichen einfachen $n$ecks der Reihe nach n feste Gerade u_1, u_2, ..., u_n, während $n-1$ Seiten $\overline{A_1 A_2}$, $\overline{A_2 A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1} A_n}$ desselben sich um die resp. festen Punkte S_1, S_2, ..., S_{n-1} drehen, so beschreibt die letzte Seite $\overline{A_n A_1}$

Eckpunkt $a_n a_1$ und jeder andere Schnittpunkt der Seiten des $n$ecks entweder eine Curve II. Ordnung oder eine Gerade, und zwar eine Gerade u. A. dann, wenn die festen Drehpunkte $S_1, S_2, \ldots, S_n$ alle auf einer Geraden g liegen. — Die Seiten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beschreiben nämlich um $S_1, S_2, \ldots, S_n$ Strahlenbüschel, von denen jeder zu dem folgenden perspectiv liegt, indem die Punktreihen $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ die resp. perspectiven Durchschnitte bilden. Folglich sind je zwei dieser Büschel, und namentlich der erste und der letzte, projectiv, und erzeugen eine Curve II. Ordnung, wenn sie nicht etwa perspectiv liegen. Dieser letztere Fall tritt u. A. dann ein, wenn die Mittelpunkte der Büschel auf einer Geraden g liegen; denn diese ist dann sämmtlichen Büscheln entsprechend gemein, weil bei der Bewegung des $n$ecks einmal alle Seiten mit g zusammenfallen.

und ebenso jede Diagonale des $n$ecks entweder einen Strahlenbüschel II. Ordnung, oder sie dreht sich um einen festen Punkt; und zwar tritt der letztere Fall u. A. dann ein, wenn die Geraden $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sich alle in einem Punkte schneiden. — Die Eckpunkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ beschreiben nämlich in $u_1, u_2, \ldots, u_n$ Punktreihen, von denen jede zu der folgenden perspectiv liegt, indem $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ die resp. Projectionscentra bilden. Folglich sind je zwei dieser Punktreihen, und namentlich die erste und die letzte, projectiv, und erzeugen einen Büschel II. Ordnung, wenn sie nicht etwa perspectiv liegen. Dieser letztere Fall tritt u. A. dann ein, wenn die Geraden $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sich in einem Punkte P schneiden; denn diesen haben sie dann alle entsprechend gemein, weil bei der Bewegung des $n$ecks einmal alle Eckpunkte mit P zusammenfallen.

Diese Sätze, von welchen der eine (links) die Verallgemeinerung eines Theorems von Maclaurin und Braikenridge ist und der andere (rechts) von Poncelet herrührt, bieten uns ein Mittel dar, um beliebig viele Punkte einer Curve oder Strahlen eines Büschels II. Ordnung durch lineare Constructionen zu finden. Für $n = 3$ werden diese Constructionen am einfachsten.

Metrische Beziehungen projectiver Grundgebilde der ersten Stufe.

Zwischen den Winkeln und Strecken, welche durch je vier homologe Elemente projectiver Grundgebilde begrenzt werden, besteht eine wichtige Proportion, die ich Ihnen zum Schluss noch entwickeln will. Wir gehen aus von einem Strahlenbüschel S (Fig. 28 und 29) und einer zu ihm perspectiven Punktreihe u. Vier beliebige Strahlen a, b, c, d von S gehen durch ihre entsprechenden Punkte A, B, C, D von u. Die Dreiecke nun, welche von u und jenen Strahlen begrenzt werden, und deren gemeinschaftliche Spitze S ist, haben gleiche Höhe; ihre Flächen verhalten sich daher, wie die in u liegenden Grundlinien, so dass z. B.

$$\frac{\Delta ASB}{\Delta ASD} = \frac{AB}{AD} \text{ und } \frac{\Delta CSB}{\Delta CSD} = \frac{CB}{CD}.$$

Der Inhalt eines Dreiecks ist aber gleich dem halben Product aus zwei Seiten in den Sinus des eingeschlossenen Winkels. Bezeichnen wir also allgemein mit (pq) den Winkel zwischen zwei Strahlen p und q, so erhalten wir für die vier Dreiecke die Werthe:

$$\begin{aligned}
\Delta ASB &= \tfrac{1}{2} AS \,.\, SB \,.\, \sin(ab);\\
\Delta ASD &= \tfrac{1}{2} AS \,.\, SD \,.\, \sin(ad);\\
\Delta CSB &= \tfrac{1}{2} CS \,.\, SB \,.\, \sin(cb);\\
\Delta CSD &= \tfrac{1}{2} CS \,.\, SD \,.\, \sin(cd);
\end{aligned}$$

und wenn diese Werthe in obige Proportionen eingesetzt und die gemeinschaftlichen Factoren in Zähler und Nenner gegen einander aufgehoben werden, so folgt:

$$\frac{SB \,.\, \sin(ab)}{SD \,.\, \sin(ad)} = \frac{AB}{AD} \text{ und } \frac{SB \,.\, \sin(cb)}{SD \,.\, \sin(cd)} = \frac{CB}{CD}.$$

Dividiren wir endlich die erste dieser Gleichungen durch die zweite, so ergiebt sich die gesuchte Proportion in folgender Form:

$$\text{I} \;\ldots\ldots\; \frac{\sin(ab)}{\sin(ad)} : \frac{\sin(cb)}{\sin(cd)} = \frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD}.$$

Jedes Glied dieser Proportion ist ein Verhältniss; z. B. $\frac{CB}{CD}$ ist das Verhältniss der beiden Strecken, in welche die Strecke BD durch den Punkt C (der in Fig. 28 ausserhalb BD liegt) getheilt wird, und $\frac{\sin(cb)}{\sin(cd)}$ ist das Sinusverhältniss der beiden Winkel, in welche der Winkel (bd) durch den Strahl c getheilt wird. Sowohl die linke als auch die rechte Seite der Gleichung ist also ein Verhältniss zwischen zwei Verhältnissen, oder ein sogenanntes „Doppelverhältniss". Sie erkennen leicht die besondere Art, in welcher die vorliegenden Doppelverhältnisse gebildet sind. Das Doppelverhältniss rechts zwischen den von A, B, C und D begrenzten Strecken z. B. wird dadurch gewonnen, dass wir die

Verhältnisse, nach welchen die von zweien dieser Punkte begrenzte Strecke BD von jedem der beiden übrigen Punkte getheilt wird, in einander dividiren; und ganz analog ist das andere Doppelverhältniss zwischen den Sinus zusammengesetzt. Auch folgt aus der Ableitung unserer Gleichung, dass es gleichgültig ist, welche Strecke und welchen Winkel wir als getheilt ansehen, wenn nur beide Doppelverhältnisse in gleicher Weise gebildet werden; denn eine andere Wahl unserer vier Dreiecke würde uns zu folgender Gleichung geführt haben:

$$\frac{\sin (ad)}{\sin (ac)} : \frac{\sin (bd)}{\sin (bc)} = \frac{AD}{AC} : \frac{BD}{BC},$$

und es kann Ihnen nicht schwer fallen, noch mehr ähnliche Gleichungen für dieselben Punkte und Strahlen aufzustellen.

Bemerkenswerth ist nun, dass diese Gleichungen gültig bleiben, wenn wir die Punktreihe u in irgend eine andere schiefe Lage gegen den Strahlenbüschel bringen. Auch werden auf jeder anderen Geraden u_1 (Fig. 28), welche in A_1, B_1, C_1, D_1 die resp. Strahlen a, b, c, d schneidet, Strecken gebildet, für welche die mit I analoge Gleichung gilt:

$$\text{II} \ldots\ldots \frac{\sin (ab)}{\sin (ad)} : \frac{\sin (cb)}{\sin (cd)} = \frac{A_1 B_1}{A_1 D_1} : \frac{C_1 B_1}{C_1 D_1};$$

und ebenso werden A, B, C und D aus jedem von S verschiedenen Punkte S_1 (Fig. 29) durch vier solche Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 projicirt, dass

$$\text{III} \ldots\ldots \frac{\sin (a_1 b_1)}{\sin (a_1 d_1)} : \frac{\sin (c_1 b_1)}{\sin (c_1 d_1)} = \frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD}.$$

Ein Doppelverhältniss zwischen vier Elementen einer Punktreihe oder eines Strahlenbüschels I. Ordnung ändert also seinen Werth nicht, wenn jene Elemente durch die entsprechenden Elemente eines perspectiven geraden Gebildes oder Büschels ersetzt werden. (Vgl. die Collectiones des Pappus, liber VII, 129.)

Da wir nun zwei projective einförmige Grundegebilde immer als erstes und letztes von einer Reihe von Grundgebilden ansehen können, deren jedes zum folgenden perspectiv liegt, so folgt:

Sind zwei Grundgebilde projectiv, so ist jedes Doppelverhältniss zwischen irgend vier Elementen des einen gleich dem analogen Doppelverhältniss zwischen den entsprechenden vier Elementen des anderen Grundgebildes.

Sind z. B. u und u_1 zwei projective Punktreihen, und entsprechen den Punkten A, B, C, D von u die resp. Punkte

A_1, B_1, C_1, D_1 von u_1, so besteht zwischen den Abschnitten, welche von diesen Punkten gebildet werden, die Proportion:

$$\text{IV} \ldots \frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} = \frac{A_1 B_1}{A_1 D_1} : \frac{C_1 B_1}{C_1 D_1}.$$

Steiner hat den obigen Satz bei der Definition der projectiven Verwandtschaft benutzt, und auf diese Weise seiner „systematischen Entwickelung etc." die Rechnung mit Doppelverhältnissen zu Grunde gelegt. Der Satz gilt auch für Ebenenbüschel; denn die Winkel zwischen den Ebenen eines solchen werden in einem Strahlenbüschel gemessen, dessen Ebene zur Axe des Ebenenbüschels senkrecht steht, und welcher zu dem letzteren perspectiv ist.

Hier ist schliesslich noch der Ort, um die metrischen Beziehungen der Winkel eines harmonischen Strahlen- oder Ebenenbüschels anzugeben. Sind a, b, c, d dessen Elemente und A, B, C, D (Fig. 19) die vier harmonischen Punkte, in welchen sie von irgend einer Geraden geschnitten werden, so ergiebt sich für letztere $\frac{AB}{BC} = -\frac{AD}{DC}$ (S. 48), und daher aus I die gesuchte Beziehung:

$$\text{V} \ldots \frac{\sin(ab)}{\sin(bc)} = -\frac{\sin(ad)}{\sin(dc)}.$$

Sechster Vortrag.

Curven, Büschel und Kegel zweiter Ordnung.

Im letzten Vortrage sind wir zu folgenden wichtigen Ergebnissen gelangt:

Wenn zwei projective Strahlenbüschel in einer Ebene, aber weder concentrisch noch perspectiv liegen, so bilden die Schnittpunkte ihrer homologen Strahlen eine Curve oder Punktreihe zweiter Ordnung, die mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat.

Wenn zwei projective Punktreihen in einer Ebene, aber weder in derselben Geraden noch perspectiv liegen, so bilden die Verbindungslinien ihrer homologen Punkte einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung, der mit keinem Büschel I. Ordnung mehr als zwei Strahlen gemein hat.

Um Ihnen von diesen Gebilden zweiter Ordnung sogleich eine bestimmte Vorstellung zu verschaffen, führe ich schon jetzt an, dass die Curven II. Ordnung identisch sind mit den Kegelschnitten, also auch erhalten werden, wenn ein gewöhnlicher Kreiskegel durch eine Ebene geschnitten wird. Ein Strahlenbüschel II. Ordnung aber besteht aus den Tangenten eines solchen Kegelschnittes. Den Beweis für diese Behauptungen werde ich später führen.

Obigen beiden Sätzen aus der ebenen Geometrie entsprechen die folgenden aus der Geometrie des Strahlenbündels:

Wenn zwei projective Ebenenbüschel, deren Axen sich schneiden, nicht perspectiv liegen, so bilden die Schnittlinien ihrer homologen Ebenen einen **Kegel II. Ordnung**, welcher mit keiner Ebene mehr als zwei dieser Schnittlinien gemein hat. Der Schnittpunkt der beiden Axen, durch welchen alle Strahlen des Kegels gehen, heisst der „Mittelpunkt" des Kegels.

Wenn zwei projective Strahlenbüschel, deren Ebenen sich schneiden, concentrisch, aber nicht perspectiv liegen, so bilden die Verbindungsebenen ihrer homologen Strahlen einen **Ebenenbüschel II. Ordnung**, welcher mit keinem Ebenenbüschel I. Ordnung mehr als zwei Ebenen gemein hat. Das Centrum der Strahlenbüschel, durch welches alle Ebenen des Büschels II. Ordnung gehen, heisst der „Mittelpunkt" dieses Ebenenbüschels.

Den Kegel und den Ebenenbüschel II. Ordnung können wir mittelst der Curve und des Strahlenbüschels II. Ordnung erzeugen, indem wir diese aus irgend einem nicht in ihrer Ebene gelegenen Punkte projiciren. Denn die beiden projectiven Strahlenbüschel S und S_1 (Fig. 31 und 33), durch welche eine Curve II. Ordnung erzeugt wird, werden aus einem solchen Punkte O (z. B. aus Ihrem Auge) durch zwei projective Ebenenbüschel projicirt, welche einen durch die Curve gehenden Kegel II. Ordnung mit dem Mittelpunkt O erzeugen. Und ebenso werden aus O die beiden projectiven Punktreihen u und u_1 (Fig. 32), welche einen Strahlenbüschel II. Ordnung erzeugen, durch zwei projective Strahlenbüschel projicirt, und diese wiederum erzeugen einen Ebenenbüschel II. Ordnung, der durch jenen Strahlenbüschel geht und O zum Mittelpunkte hat. Umgekehrt wird jeder Kegel II. Ordnung von einer nicht durch seinen Mittelpunkt gehenden Ebene in einer Curve

II. Ordnung geschnitten; denn die beiden projectiven Ebenenbüschel, welche den Kegel erzeugen, werden in zwei projectiven Strahlenbüscheln geschnitten, welche jene Schnittcurve erzeugen. Wenn also mehr als zwei Strahlen des Kegels in einer Ebene lägen, so würden auch mehr als zwei Punkte dieser Schnittcurve in einer Geraden liegen, was nach dem zu Anfang wiederholten Satz unmöglich ist. Analoges werden Sie leicht von den Ebenenbüscheln II. Ordnung beweisen können. Zugleich erkennen Sie die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Jede Curve und jeder Strahlenbüschel II. Ordnung wird aus einem nicht in derselben Ebene gelegenen Punkte durch einen Kegel resp. einen Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt.

Jeder Kegel und jeder Ebenenbüschel II. Ordnung wird von einer nicht durch den Mittelpunkt gehenden Ebene in einer Curve resp. einem Strahlenbüschel II. Ordnung geschnitten.

Sie ersehen hieraus, dass alle Resultate, die wir für die ebenen Gebilde II. Ordnung gewinnen, sich sofort durch Projiciren auf die analogen Gebilde im Strahlenbündel übertragen lassen. Ich beschränke mich daher fürs Erste auf die Untersuchung der Curven und Strahlenbüschel II. Ordnung, und schicke folgende Bemerkung voraus:

Die Curve k II. Ordnung, welche durch zwei projective Strahlenbüschel S und S_1 (Fig. 31) erzeugt wird, geht durch die Mittelpunkte der letzteren. Denn dem Strahle $\overline{SS_1}$ oder p des Büschels S, d. h. der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte, entspricht, weil die Büschel nicht perspectiv liegen, im Büschel S_1 ein von $\overline{S_1S}$ verschiedener Strahl p_1. Der Schnittpunkt von p und p_1, nämlich S_1, gehört also der Curve k an, und ebenso S.

Der Strahlenbüschel K II. Ordnung, welcher durch zwei projective Punktreihen u und u_1 (Fig. 32) erzeugt wird, enthält auch die Geraden u und u_1, in welchen die Punktreihen liegen. Denn dem Punkte uu_1 oder P der Punktreihe u, d. h. dem Schnittpunkte beider Geraden, entspricht, weil die Punktreihen nicht perspectiv liegen, in u_1 ein von u_1u verschiedener Punkt P_1. Die Verbindungslinie $\overline{PP_1}$ oder u_1 gehört also dem Büschel K an, und ebenso u.

Links ist p_1 (Fig. 31) der einzige durch S_1 gehende Strahl, welcher mit der Curve k nur einen Punkt, nämlich S_1, gemein hat. Jeder von p_1 verschiedene Strahl a_1 des Büschels S_1 wird von dem ihm entsprechenden, von p verschiedenen Strahle a in einem zweiten, nicht mit S_1 identischen Punkte der Curve k ge-

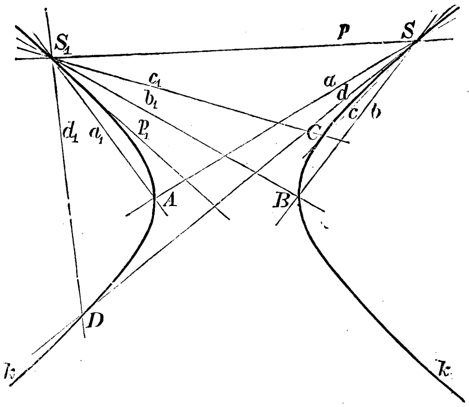

Fig. 31.

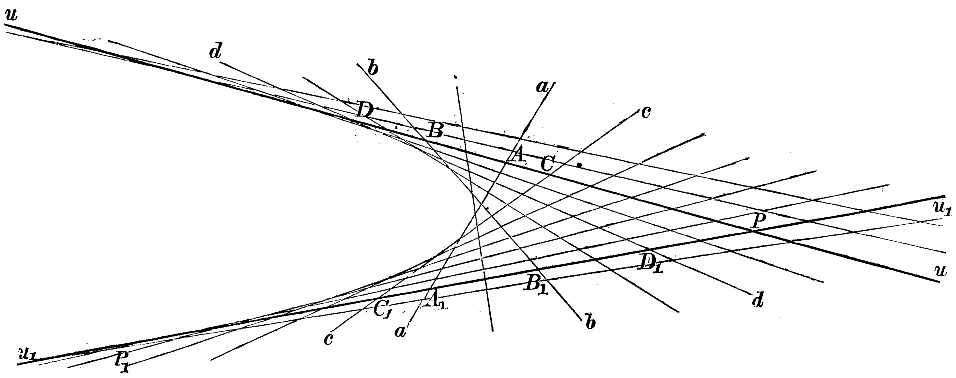

Fig. 32.

schnitten. Wir sagen deshalb, der Strahl p_1 „berühre" in S_1 die Curve k, oder er sei eine „Tangente" von k. — Ebenso ist rechts (Fig. 32) P_1 der einzige Punkt von u_1, durch welchen nur ein Strahl von K, nämlich u_1 selbst, hindurchgeht. Denn durch jeden anderen Punkt A_1 von u_1 geht noch ein zweiter Strahl $\overline{A_1A}$ von K, weil A nicht mit P, und also $\overline{A_1A}$ nicht mit u_1 zusammenfallen kann. Wir nennen deshalb P_1 einen „Berührungspunkt" des Büschels K im Strahle u_1, und können daher den Satz aufstellen:

Dem gemeinschaftlichen Strahle der beiden projectiven Strahlenbüschel entspricht in jedem der Büschel eine Tangente der von ihnen erzeugten Curve II. Ordnung.

Dem gemeinschaftlichen Punkte der beiden projectiven Punktreihen entspricht in jeder derselben ein Berührungspunkt des von ihnen erzeugten Büschels II. Ordnung.

Wie wir uns erinnern, können zwei einförmige Grundgebilde auf eine einzige Art projectiv so auf einander bezogen werden, dass drei bestimmten Elementen des einen drei willkürlich angenommene Elemente des anderen entsprechen. Wollen wir also eine Curve II. Ordnung mittelst projectiver Strahlenbüschel erzeugen, so können wir nicht nur die Mittelpunkte S und S_1 der letzteren (s. Fig. 31), sondern noch drei weitere Punkte der Curve, nämlich die Schnittpunkte von drei Paaren entsprechender Strahlen der Büschel, in einer durch $\overline{SS_1}$ gehenden Ebene willkürlich annehmen. Fällt einer dieser drei Schnittpunkte mit S zusammen, so ist von der Curve die Tangente im Punkte S gegeben; und das Gleiche kann bei S_1 eintreten. — Um einen Strahlenbüschel II. Ordnung mittelst projectiver Punktreihen zu erzeugen, können wir nicht nur die Träger u und u_1 der letzteren (s. Fig. 32), sondern noch drei weitere Strahlen des Büschels, nämlich die Verbindungslinien von drei Paaren entsprechender Punkte der Punktreihen, in einer durch u und u_1 gehenden Ebene willkürlich annehmen. Fällt eine dieser Verbindungslinien mit u zusammen, so ist von dem Büschel II. Ordnung der Berührungspunkt im Strahle u gegeben; und dasselbe kann bei u_1 eintreten. Die Aufgaben:

Eine Curve II. Ordnung zu construiren, von welcher gegeben sind fünf Punkte, oder vier Punkte und die Tangente an einem derselben S, oder drei Punkte und die Tangenten an zwei derselben S und S_1,

Einen Büschel II. Ordnung zu construiren, von welchem gegeben sind fünf Strahlen, oder vier Strahlen und der Berührungspunkt in einem derselben u, oder drei Strahlen und die Berührungspunkte in zwei derselben u und u_1,

sind folglich ausführbar; und zwar sind sie zurückgeführt auf die folgenden Aufgaben:

Zwei projective Strahlenbüschel S und S_1 sind durch drei Paare einander entsprechender Strahlen a und a_1, b und b_1, c und c_1 gegeben; es sollen be-

Zwei projective Punktreihen u und u_1 sind durch drei Paare einander entsprechender Punkte A und A_1, B und B_1, C und C_1 gegeben; es sollen beliebig

liebig viele Punkte der Curve k II. Ordnung construirt werden, welche sie mit einander erzeugen.

viele Strahlen des Büschels K II. Ordnung construirt werden, welchen sie erzeugen.

Diese Aufgaben gehen darauf hinaus, zu jedem beliebigen vierten Elemente des einen Grundgebildes das entsprechende des anderen zu finden; denn damit ist zugleich ein neues Element des von beiden erzeugten Gebildes II. Ordnung bestimmt. Ich könnte Sie also auf die im letzten Vortrag (S. 61) angegebene Construction verweisen. Doch will ich das vorliegende Problem noch einmal in einer mehr symmetrischen Weise lösen, besonders weil sich mehrere wichtige Sätze an die Auflösung knüpfen. Dieselbe besteht darin, dass wir zu den gegebenen Grundgebilden ein drittes aufsuchen, welches zu jedem der ersteren perspective Lage hat; nämlich*):

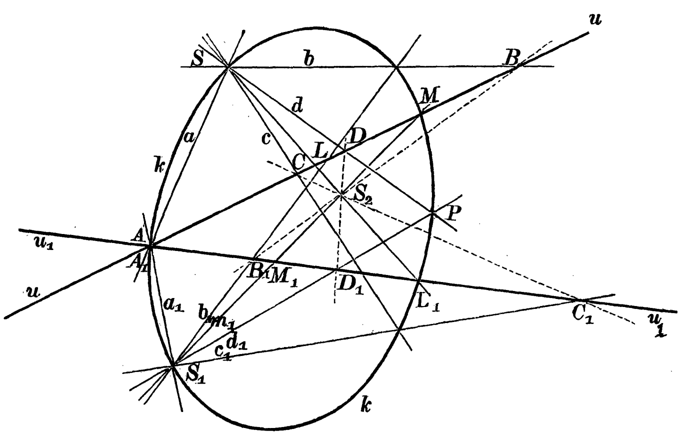

Fig. 33.

Durch den Schnittpunkt $\dot{a}a_1$ von irgend zwei einander entsprechenden Strahlen a und a_1 der projectiven Büschel S und S_1 (Fig. 33) legen wir zwei

In der Verbindungslinie AA_1 von irgend zwei einander entsprechenden Punkten A und A_1 der projectiven Punktreihen u und u_1 (Fig. 34) nehmen wir

*) Ich wiederhole bei dieser Gelegenheit meinen Rath, dass der Anfänger die Figuren selber zeichne nach den Angaben des Textes, weil dadurch die Auffassung wesentlich erleichtert wird.

Gerade u und u_1, von denen die erste u den Büschel $S\,(abc)$ in einer Punktreihe $u\,(ABC)$ und die zweite u_1 den Büschel $S_1(a_1 b_1 c_1)$ in einer Punktreihe $u_1(A_1 B_1 C_1)$ schneidet. Als Schnitte projectiver Büschel sind diese Punktreihen u und u_1 auch zu einander projectiv. Sie liegen aber sogar perspectiv, weil in ihrem Schnittpunkte zwei homologe Punkte A und A_1 vereinigt sind (S. 57). Sie sind also Schnitte desjenigen Strahlenbüschels S_2, in dessen Mittelpunkt die Strahlen $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$ sich schneiden.

Um nun zu irgend einem

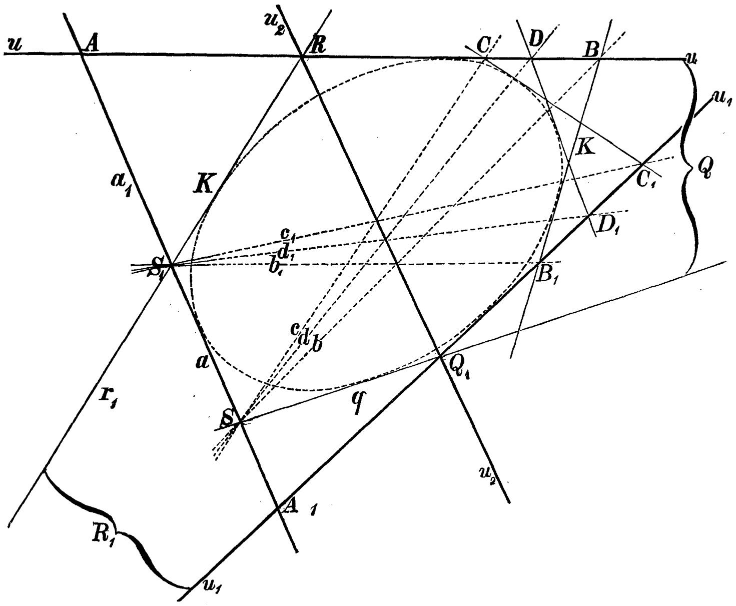

Fig. 34.

die Mittelpunkte S und S_1 von zwei Strahlenbüscheln an, von denen der erste $S\,(abc)$ die Punktreihe $u\,(ABC)$, und der zweite $S_1\,(a_1 b_1 c_1)$ die Punktreihe $u_1\,(A_1 B_1 C_1)$ projicirt. Als Scheine projectiver Punktreihen sind diese Strahlenbüschel S und S_1 auch zu einander projectiv. Sie liegen aber sogar perspectiv, weil in der Verbindungslinie $\overline{SS_1}$ ihrer Mittelpunkte zwei homologe Strahlen a und a_1 vereinigt sind (S. 57). Sie sind also Scheine derjenigen Punktreihe u_2, welcher die Schnittpunkte bb_1 und cc_1 angehören.

Strahle d des Büschels S den entsprechenden d_1 von S_1 zu finden, projiciren wir den Schnittpunkt $\dot{d u}$ oder D aus dem Punkte S_2 auf die Gerade u_1 nach D_1; dann ist $\overline{D_1 S_1}$, der gesuchte Strahl d_1. Der Punkt $\dot{d d_1}$ oder P liegt auf der Curve k II. Ordnung.

Um nun zu irgend einem Punkte D von u den entsprechenden D_1 von u_1 zu finden, schneiden wir die Gerade $\overline{DS}$ oder d durch u_2, und projiciren den Schnittpunkt aus S_1 durch den Strahl d_1 auf die Gerade u_1. Die Projection $\dot{d_1 u_1}$ ist der gesuchte Punkt D_1. Der Strahl $\overline{DD_1}$ gehört zu dem Büschel K II. Ordnung.*)

Hiermit sind zugleich folgende Aufgaben gelöst:

Auf einem beliebigen Strahle von S (oder S_1) den zweiten, von S (resp. S_1) verschiedenen Schnittpunkt mit der Curve II. Ordnung zu finden.

Durch einen beliebigen Punkt von u (oder u_1) den zweiten, vou u (resp. u_1) verschiedenen Strahl des Büschels II. Ordnung zu legen.

Indem wir auf die eben angegebene Weise auch zu dem gemeinsamen Strahle der Büschel, oder anderseits zu dem Schnittpunkte der Punktreihen die beiden entsprechenden Strahlen resp. Punkte suchen, lösen wir die Aufgabe:

An den Mittelpunkten von zwei projectiven Strahlenbüscheln die Tangenten der von ihnen erzeugten Curve II. Ordnung zu construiren.

Auf zwei projectiven Punktreihen, die einen Büschel II. Ordnung erzeugen, die Berührungspunkte dieses Büschels zu finden.

Ein weiteres wichtiges Resultat ergiebt sich in folgender Weise aus unserer Construction. Ziehen wir einerseits links (Fig. 33) den Strahl $\overline{S_1 S_2}$ oder m_1, welcher in M_1 und M von resp. u_1 und u geschnitten wird, so entspricht demselben in S der Strahl $\overline{SM}$; denn wenn D_1 mit M_1 zum Zusammenfall gebracht wird, so fallen zugleich D und P mit M zusammen. Also ist M derjenige Punkt, in welchem die Curve k zum zweiten Male von u geschnitten wird. Ebenso liegt der Punkt L_1, in welchem u_1 zum zweiten Male die Curve k schneidet, auf der Geraden $\overline{SS_2}$. Ich erinnere Sie hierbei, dass die willkürlich gewählten Geraden u und u_1 keiner weiteren Bedingung unterworfen

*) In Fig. 34 ist der Büschel K II. Ordnung angedeutet durch die von ihm eingehüllte Curve.

sind, als dass sie sich in einem Punkte der Curve k schneiden. — Verbinden wir anderseits rechts (Fig. 34) den Schnittpunkt $u_1 u_2$ oder Q_1 mit S, so liegt auf dieser Geraden der Punkt Q von u, welcher dem Punkte Q_1 von u_1 entspricht, oder $\overline{SQ_1}$ ist ein Strahl des Büschels K II. Ordnung; und ebenso ist der Strahl $\overline{S_1R}$, welcher aus S_1 den Schnittpunkt von u und u_2 projicirt, ein Strahl von K. Da wir S und S_1 willkürlich auf einem Strahle a des Büschels K gewählt haben, so ist damit die Doppelaufgabe gelöst:

Auf irgend einer Geraden u, welche eine Curve k II. Ordnung in einem gegebenen Punkte A schneidet, den zweiten Schnittpunkt mit k zu finden.	Durch irgend einen Punkt S, welcher auf einem gegebenen Strahle a eines Büschels K II. Ordnung liegt, den zweiten Strahl dieses Büschels zu ziehen.

Auch die beiden überaus fruchtbaren Sätze des Pascal und des Brianchon, deren ich in der Einleitung Erwähnung that, ergeben sich wie von selbst aus unserer Construction. Bestimmen wir links zu den fünf Punkten S, S_1, A, M und L_1 der Curve k noch irgend einen sechsten Punkt P (Fig. 33), so liegt zufolge der Construction von P der Schnittpunkt D von $\overline{SP}$ und u mit dem Schnittpunkte D_1 von $\overline{S_1P}$ und u_1 in einer durch S_2 gehenden Geraden. Aber D, D_1 und S_2 sind diejenigen Punkte, in welchen die Gegenseiten des Sechsecks SPS_1MAL_1 sich schneiden. — Construiren wir anderseits rechts (Fig. 34) zu den fünf Strahlen u, u_1, $\overline{SS_1}$, $\overline{SQ_1}$ und $\overline{S_1R}$ des Büschels K II. Ordnung noch einen sechsten Strahl $\overline{DD_1}$, so müssen nach der Construction die Geraden $\overline{SD}$ und $\overline{S_1D_1}$ sich auf der Geraden $\overline{Q_1R}$ oder u_2 schneiden. Diese drei durch einen und denselben Punkt gehenden Geraden sind aber die Hauptdiagonalen, d. h. die Verbindungslinien gegenüberliegender Eckpunkte des Sechsecks $SS_1RDD_1Q_1$. Wir haben somit folgende Lehrsätze bewiesen:

Lehrsatz des Pascal:*)	Lehrsatz des Brianchon:
In jedem einfachen Sechseck, welches einer Curve II. Ordnung eingeschrieben ist, schneiden sich die drei paar Gegenseiten in drei Punkten einer Geraden.	In jedem einfachen Sechseck, welches von sechs Strahlen eines Büschels II. Ordnung gebildet wird, schneiden sich die drei Haupt-Diagonalen in einem Punkte.

*) Pascal entdeckte diese fundamentale Eigenschaft von sechs Punkten eines Kegelschnittes 1639 im Alter von 16 Jahren. Brianchon veröffentlichte seinen ebenso fundamentalen Satz 1806 im Journal de l'Ecole polytechnique, Cahier 13.

Streng genommen haben wir freilich noch ein Bedenken zu beseitigen, welches bei dem Beweise dieser Sätze sich geltend macht. Die beiden hier in Frage kommenden Sechsecke enthalten Elemente, die nicht willkürlich gewählt sind; denn links z. B. sind wohl die Eckpunkte A, M, L_1 und P, nicht aber S und S_1 willkürlich gewählte Punkte der Curve k. Es ist aber denkbar, dass die Mittelpunkte S und S_1 der projectiven Strahlenbüschel, durch welche die Curve erzeugt ist, durch besondere Eigenschaften sich auszeichnen, dass z. B. der Lehrsatz des Pascal nur für solche eingeschriebene Sechsecke gilt, zu deren Eckpunkten auch S und S_1 gehören. Wir wollen nun dieses Bedenken erledigen durch den Nachweis, dass je zwei andere Punkte der Curve ebensowohl wie S und S_1 die Mittelpunkte von zwei projectiven Strahlenbüscheln sein können, welche die Curve erzeugen, dass also S und S_1 durch zwei beliebige andere Curvenpunkte ersetzt werden können. Analoges gilt rechts von den Geraden u und u_1, welche in dem Sechseck des Brianchon als Seiten vorkommen.

Denken wir uns im Pascal'schen Sechseck SPS_1MAL_1 (Fig. 33) die sämmtlichen Eckpunkte ausser A fest, und nur diesen auf der Curve fortgleitend, so dreht sich $\overline{L_1A}$ oder u_1 um L_1 und $\overline{MA}$ oder u um M, und die Punkte D_1 und D gleiten fort auf den festen Geraden d_1 und d, jedoch so, dass die Gerade $\overline{DD_1}$ stets durch den festen Punkt S_2 geht. Denn der Pascal'sche Satz gilt für ein jedes so entstehende Sechseck. Folglich beschreiben D_1 und D zwei perspective Punktreihen d_1 und d, welche Schnitte des Strahlenbüschels S_2 sind. Und zugleich beschreiben u_1 und u um resp. L_1 und M zwei projective Strahlenbüschel, welche nämlich Scheine sind von den perspectiven Punktreihen d_1 und d. Wir können also die Curve k auch als Erzeugniss der projectiven Strahlenbüschel L_1 und M auffassen, deren Mittelpunkte zwei willkürliche Punkte der Curve sind. — Denken Sie sich ebenso im Sechseck $SS_1RDD_1Q_1$ (Fig. 34) des Brianchon die Seite SS_1 bewegt, während die übrigen Seiten unverändert bleiben, so jedoch, dass $\overline{SS_1}$ nicht aufhört, ein Strahl des Büschels K II. Ordnung zu sein; dann beschreibt S_1 eine Punktreihe S_1R oder r_1 und S eine zu r_1 projective Punktreihe SQ_1 oder q. Denn der Schnittpunkt der Hauptdiagonalen $\overline{S_1D_1}$ und $\overline{SD}$ bewegt sich auf der festen Geraden Q_1R und beschreibt in dieser eine Punktreihe u_2, zu welcher q und r_1 perspectiv liegen. Wir können uns also den Büschel II. Ordnung auch durch die projectiven Punktreihen q und r_1 erzeugt denken. Hiermit ist bewiesen, dass die Lehrsätze des **Pascal** und des **Brianchon** allgemein gültig sind, und zugleich sind wir zu folgendem **Fundamentalsatze** über die Curven und Strahlenbüschel II. Ordnung gelangt:

Eine Curve II. Ordnung wird aus beliebigen zwei ihrer Punkte durch projective Strahlenbüschel projicirt, wenn nämlich je zwei solche Strahlen der Büschel einander entsprechend genannt werden, welche durch denselben Punkt der Curve gehen.

Ein Strahlenbüschel II. Ordnung wird von beliebigen zwei seiner Strahlen in projectiven Punktreihen geschnitten, wenn nämlich je zwei solche Punkte der Punktreihen einander entsprechend genannt werden, welche auf demselben Strahle des Büschels liegen.

Wir werden diese Sätze später benutzen, um auch die Gebilde II. Ordnung auf einander und auf die einförmigen Grundgebilde projectiv zu beziehen, ähnlich wie wir für letztere projective Beziehungen aufgestellt haben. Zu dem Ende stellen wir auf Grund dieser Sätze folgende Definitionen auf:

Vier Punkte einer Curve II. Ordnung heissen „harmonische Punkte", wenn sie aus irgend einem und folglich aus jedem fünften Punkte der Curve durch vier harmonische Strahlen projicirt werden.

Vier Strahlen eines Büschels II. Ordnung heissen „harmonische Strahlen", wenn sie von irgend einem und folglich von jedem fünften Strahle des Büschels in vier harmonischen Punkten geschnitten werden.

Durch drei Punkte einer Curve oder drei Strahlen eines Büschels II. Ordnung ist der vierte harmonische eindeutig bestimmt und kann leicht construirt werden, sobald noch angegeben ist, von welchem der gegebenen drei Punkte oder Strahlen er getrennt sein soll.

Indem wir Bezug nehmen auf einen früheren Satz über die Tangenten der Curven und die Berührungspunkte der Büschel II. Ordnung (S. 70), folgern wir aus dem Fundamentalsatze:

Durch jeden Punkt einer Curve II. Ordnung geht eine Tangente derselben.

Auf jedem Strahl eines Büschels II. Ordnung liegt ein Berührungspunkt desselben.

Jede Curve II. Ordnung wird also von einer Schaar von Tangenten eingehüllt, und jeder Strahlenbüschel II. Ordnung umhüllt eine Reihe von Berührungspunkten. Es wird eine Aufgabe meines nächsten Vortrages sein, Ihnen zu zeigen, dass jene Schaar von Tangenten und diese Reihe von Berührungspunkten Nichts weiter sind, als ein Strahlenbüschel und eine Punktreihe II. Ordnung.

Andere sehr wichtige Eigenschaften der Curven und Büschel II. Ordnung sind in folgenden Sätzen ausgesprochen, die wir oft benutzen werden:

Zwei Curven II. Ordnung fallen zusammen, wenn sie entweder fünf Punkte, oder vier Punkte und die Tangente an einem derselben S, oder drei Punkte und die Tangenten an zwei derselben S und S_1 gemein haben.

Denn projiciren wir die sämmtlichen Punkte der beiden Curven aus dem gemeinschaftlichen Punkte S durch einen Büschel, so sind zu diesem die beiden Strahlenbüschel projectiv, welche aus dem gemeinschaftlichen Punkte S_1 die beiden Curven projiciren. Letztere Büschel aber sind identisch, weil sie drei Strahlen entsprechend gemein haben; nämlich jeden Strahl, welcher nach einem von S und S_1 verschiedenen gemeinschaftlichen Punkt der Curven geht, sodann den Strahl $\overline{S_1 S}$, wenn in S die Curven eine gemeinschaftliche Tangente besitzen, und endlich die Tangente in S_1, wenn diese den Curven gemeinschaftlich ist. Jeder Strahl von S projicirt also einen gemeinschaftlichen Punkt der beiden Curven.

Zwei Strahlenbüschel II. Ordnung fallen zusammen, wenn sie entweder fünf Strahlen, oder vier Strahlen und den Berührungspunkt in einem derselben u, oder drei Strahlen und die Berührungspunkte in zwei derselben u und u_1 gemein haben.

Denn schneiden wir die sämmtlichen Strahlen der beiden Büschel durch den gemeinschaftlichen Strahl u in einer Punktreihe, so sind zu dieser die beiden Punktreihen projectiv, in welchen durch den gemeinschaftlichen Strahl u_1 die beiden Büschel geschnitten werden. Letztere Punktreihen sind aber identisch, weil sie drei Punkte entsprechend gemein haben; nämlich jeden Punkt, welcher in einem von u und u_1 verschiedenen gemeinschaftlichen Strahle der Büschel liegt, sodann den Punkt $\dot{u u_1}$, wenn in u die Büschel einen gemeinschaftlichen Berührungspunkt haben, und endlich den Berührungspunkt in u_1, wenn dieser den Büscheln gemeinschaftlich ist. Durch jeden Punkt von u geht also noch ein gemeinschaftlicher Strahl der Büschel.

Siebenter Vortrag.

Folgerungen aus den Lehrsätzen des Pascal und des Brianchon.

Die wichtigen Eigenschaften, welche wir von den Secksecken in der Curve und im Strahlenbüschel II. Ordnung bewiesen haben, führen uns zu mehreren nicht minder wichtigen Sätzen über ebensolche Fünfecke, Vierecke und Dreiecke. Der Ableitung dieser Sätze muss ich einige Bemerkungen über die Tangenten der Curven und die Berührungspunkte der Büschel II. Ordnung voranschicken.

Wir haben jede Gerade p_1 (Fig. 31), welche mit einer Curve II. Ordnung in einer Ebene liegt und mit ihr nur einen Punkt S_1 gemein hat, eine Tangente der Curve am Punkte S_1 genannt, und gefunden, dass durch jeden Punkt der Curve eine einzige Tangente möglich ist. Jeder andere durch S_1 gehende Strahl a_1 der Ebene schneidet die Curve in noch einem zweiten Punkte A. Drehen wir den Strahl a_1 um S_1, so durchläuft sein Schnittpunkt A die Curve, und nähert sich dem Punkte S_1 ins Unbegrenzte, wenn a_1 der Tangente p_1 unbegrenzt näher kommt. Die Tangente stellt sich hiernach dar als die Grenzlage der Verbindungslinie von zwei einander unendlich nahe kommenden (consecutiven) Curvenpunkten, und zwar lässt sich diese Definition anwenden auf die Tangenten nicht allein der Curven II. Ordnung, sondern auch ganz beliebiger Curven. — Analog haben wir jeden Punkt P_1 (Fig. 32), durch welchen nur ein Strahl u_1 eines Büschels K II. Ordnung hindurchgeht, einen Berührungspunkt des letzteren im Strahle u_1 genannt, und gefunden, dass auf jedem Strahle des Büschels K ein einziger Berührungspunkt liegt. Durch jeden anderen Punkt A_1 von u_1 geht also noch ein zweiter Strahl a des Büschels. Bewegen wir A_1 auf u_1 fort, so durchläuft a den Büschel K, und nähert sich dem Strahle u_1 ins Unbegrenzte, wenn A_1 dem Punkte P_1 unbegrenzt näher kommt. Der Berührungspunkt stellt sich hiernach dar als die Grenzlage des Schnittpunktes von zwei einander unendlich nahe kommenden Strahlen des Büschels.

Wenn also in einem Seckseck, welches einer Curve II. Ordnung eingeschrieben ist, irgend zwei benachbarte Eckpunkte einander unbegrenzt sich nähern, so tritt an die Stelle der sie verbindenden Seite eine Tangente der Curve; und wenn in einem Seckseck, dessen Seiten aus Strahlen eines Büschels II. Ordnung bestehen, zwei benachbarte Seiten einander unbegrenzt sich nähern, so tritt an die Stelle des Eckpunktes, in welchem sie sich schneiden, ein Berührungspunkt des Büschels. Jenachdem nun ein, zwei oder drei Paare benachbarter Elemente zusammenfallen, geht das Sechseck über in ein Fünfeck, ein Viereck oder ein Dreieck. Für das Fünfeck lauten hiernach die Lehrsätze des Pascal und des Brianchon, wie folgt:

In jedem einer Curve II. Ordnung eingeschriebenen Fünfeck liegen die Schnittpunkte von zwei Paaren nicht benachbarter Seiten mit demjenigen dritten Punkte in einer Geraden, in welchem die fünfte Seite von der Tangente des gegenüberliegenden Eckpunktes geschnitten wird (Fig. 35).

In jedem, von Strahlen eines Büschels II. Ordnung gebildeten Fünfeck schneiden sich die Diagonalen, welche irgend zwei Paare von Eckpunkten verbinden, in einem Punkte derjenigen Geraden, welche den fünften Eckpunkt mit dem Berührungspunkte der gegenüberliegenden Seite verbindet (Fig. 36).

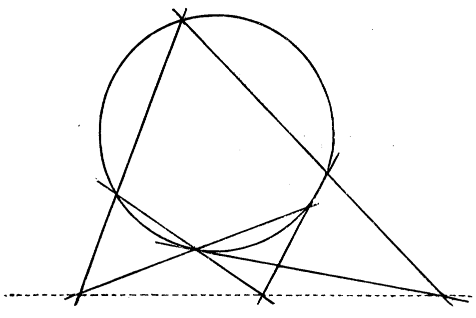

Fig. 35.

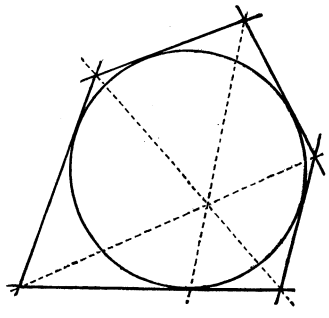

Fig. 36.

Dieser Doppelsatz enthält die Lösung der beiden Aufgaben:

Wenn fünf beliebige Punkte einer Curve II. Ordnung gegeben sind, die Tangenten in denselben mittelst des Lineals zu zeichnen.

Wenn fünf beliebige Strahlen eines Büschels II. Ordnung gegeben sind, die Berührungspunkte in denselben mittelst des Lineals zu zeichnen.

Für das Viereck erhalten wir die folgenden Sätze (Fig. 37):

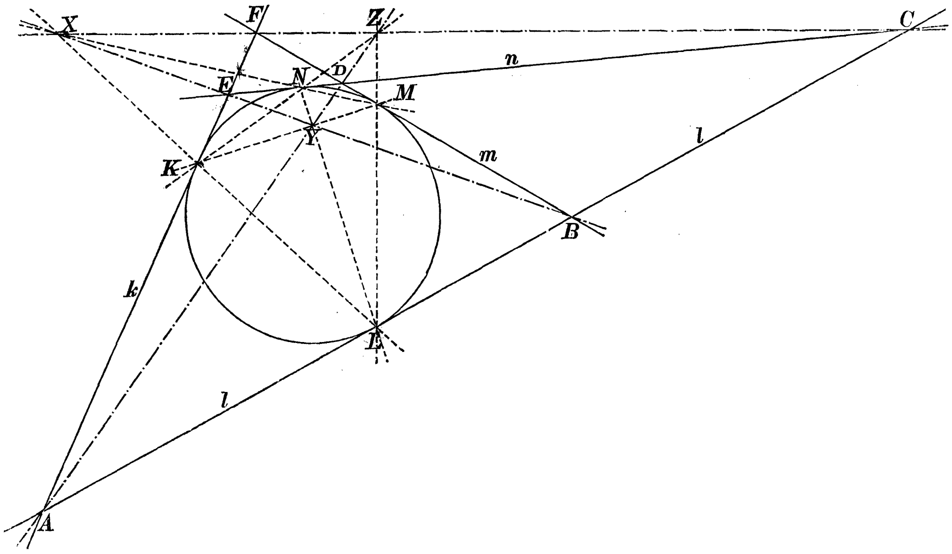

Fig. 37.

In jedem einer Curve II. Ordnung eingeschriebenen Viereck liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten mit demjenigen der Tangenten von irgend zwei gegenüberliegenden Eckpunkten in einer Geraden.

In jedem von Strahlen eines Büschels II. Ordnung gebildeten Viereck schneiden sich die Diagonalen und die Verbindungslinie der Berührungspunkte von irgend zwei Gegenseiten in einem Punkte.

Für das Dreieck endlich ergiebt sich Folgendes:

Die drei Punkte, in welchen die Seiten eines beliebigen, einer Curve II. Ordnung eingeschriebenen Dreiecks von den Tangenten der gegenüberliegenden Eckpunkte geschnitten werden, liegen auf einer Geraden.

Die drei Geraden, welche die Eckpunkte eines von Strahlen eines Büschels II. Ordnung gebildeten Dreiecks mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, schneiden sich in einem Punkte.

Alle diese Sätze, welche auch zur Lösung einer Reihe einfacher Aufgaben (namentlich derjenigen von Seite 70) benutzt werden können, lassen sich auch direct, ohne Benutzung des Sechsecks ableiten. Ich will Ihnen beispielsweise für das Viereck diesen directen Beweis geben, weil derselbe uns zugleich neue merkwürdige Eigenschaften projectiver Grundgebilde aufschliesst, und weil ich zudem die Sätze über das Viereck zu weiteren Folgerungen benutzen will.

Um in zwei projectiven Strahlenbüscheln S und S_1 (Fig. 33) zu jedem Strahle des einen den entsprechenden Strahl des anderen leicht auffinden zu können, haben wir einen dritten Strahlenbüschel S_2 bestimmt, der zu jedem der ersteren perspectiv liegt. Zu dem Ende schnitten wir S und S_1 in den resp. Punktreihen u und u_1 mittelst zwei Gerader, die wir durch den Schnittpunkt A von irgend zwei homologen Strahlen a und q_1 der gegebenen Büschel legten. Da diese Punktreihen perspectiv liegen, so ist der Strahlenbüschel S_2, von welchem sie beide Schnitte sind, der gesuchte.

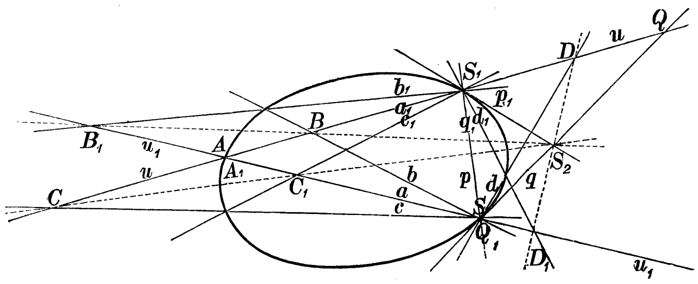

Fig. 38.

Diese Schlüsse gelten auch dann noch, wenn u mit a_1 und u_1 mit a zusammenfällt (Fig. 38), so dass also die Punkte ba_1 und b_1a (d. h. B und B_1) oder ca_1 und c_1a (d. h. C und C_1) u. s. w., in welchen zwei einander entsprechende Strahlen a und a_1 von je zwei anderen b und b_1 oder c und c_1 wechselsweise geschnitten werden, mit einem festen Punkte S_2 in einer Geraden liegen. Wird durch diesen Punkt S_2 irgend eine Gerade $\overline{DD_1}$ gelegt, welche in D und D_1 die resp. Strahlen a_1 und a schneidet, so sind $\overline{SD}$ und $\overline{S_1D_1}$ entsprechende Strahlen der Büschel S und S_1. Bringen wir nun D_1 mit S zum Zusammenfall, so geht $\overline{SD}$ in $\overline{SS_2}$ oder q über, so dass diesem Strahl von S der Strahl $\overline{S_1S}$ oder q_1 entspricht, welcher die Mittelpunkte der Büschel S und S_1 verbindet. Die Gerade $\overline{SS_2}$ oder q ist also eine Tangente der von S und S_1 erzeugten Curve II. Ordnung, und ebenso $\overline{S_1S_2}$ oder p_1. Der feste Punkt S_2 ist somit der Durchschnittspunkt der beiden Tangenten q und p_1 in S und S_1, d. h. der beiden

Strahlen, welche in jedem der Büschel S und S_1 dem gemeinschaftlichen Strahle $\overline{SS_1}$ entsprechen. Wir gelangen deshalb immer zu demselben Punkte S_2, mögen wir nun mit a und a_1, oder mit irgend einem anderen Paare (b und b_1 oder c und c_1) homologer Strahlen die resp. Geraden u_1 und u zusammenfallen lassen. Das heisst: Jede Gerade, welche zwei solche Punkte (bc_1 und cb_1) verbindet, in denen irgend zwei Paare (b, b_1 und c, c_1) homologer Strahlen sich wechselsweise schneiden, geht durch den Punkt S_2.

Um in zwei projectiven Punktreihen u und u_1 (Fig. 34) zu jedem Punkte der einen den entsprechenden Punkt der anderen leicht auffinden zu können, haben wir in folgender Weise eine dritte Punktreihe u_2 bestimmt, welche zu jeder der gegebenen perspectiv liegt. Wir projicirten u und u_1 durch die resp. Strahlenbüschel S und S_1, deren Mittelpunkte wir auf der Verbindungslinie a von irgend zwei homologen Punkten A und A_1 der gegebenen Punktreihen annahmen. Da diese Strahlenbüschel perspectiv liegen, so ist die Punktreihe u_2, von welcher sie beide Scheine sind, die gesuchte.

Lassen wir nun S mit A_1 und S_1 mit A zusammenfallen (Fig. 39), so geht u_2 durch diejenigen beiden Punkte von u und

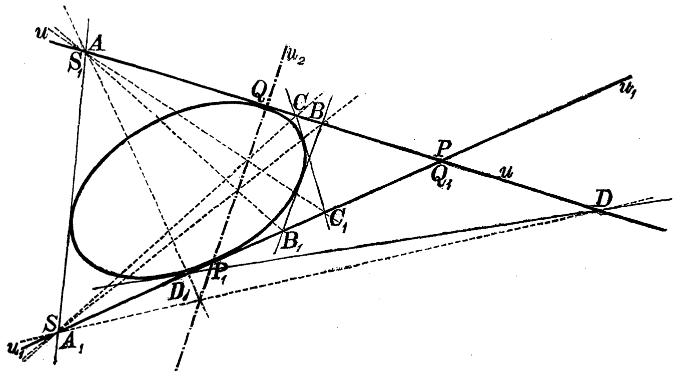

Fig. 39.

u_1, welche dem Schnittpunkte uu_1 entsprechen. Zwei beliebige Punkte D und D_1, die einander entsprechen, werden nämlich aus resp. A_1 und A durch zwei Strahlen A_1D und AD_1 projicirt, die sich auf der Geraden u_2 schneiden. Offenbar aber fällt dieser Schnittpunkt und folglich auch D_1 mit dem Punkte u_1u_2 oder P_1 zusammen, wenn D mit uu_1 oder P zum Zusammenfall gebracht wird, so dass u_2 wirklich durch den einen (und ebenso durch den anderen) der beiden Punkte P_1 und Q geht, welche dem Schnittpunkte PQ_1 von u und u_1 entsprechen. Mit anderen Worten: u_2 verbindet die in u und u_1 liegenden Berührungspunkte des Strahlenbüschels II. Ordnung, welcher durch die beiden Punktreihen erzeugt wird. - Wir gelangen deshalb immer zu derselben Geraden u_2, mögen wir nun mit A und A_1, oder mit irgend einem anderen Paare (B und B_1 oder C und C_1) homologer Punkte die resp. Mittelpunkte S_1 und S zusammenfallen lassen. Jeder Schnittpunkt von zwei solchen Strahlen ($\overline{BC_1}$ und $\overline{B_1C}$), durch welche irgend zwei Paare (B, B_1 und C, C_1) entsprechender Punkte sich wechselsweise projiciren, liegt auf der Geraden u_2.

Die eben gewonnenen Ergebnisse lassen sich in folgendem Doppelsatze einander gegenüberstellen:

Die beiden Punkte ab_1 und a_1b, in welchem irgend zwei Paare a, a_1 und b, b_1 homologer Strahlen der projectiven Büschel S und S_1 sich wechselseitig schneiden, liegen mit dem Schnittpunkte S_2 derjenigen beiden Strahlen in einer Geraden, welche dem gemeinschaftlichen Strahle $\overline{SS_1}$ der Büschel entsprechen.

Die beiden Geraden $\overline{AB_1}$ und $\overline{A_1B}$, durch welche irgend zwei Paare A, A_1 und B, B_1 homologer Punkte der projectiven Punktreihen u und u_1 sich wechselseitig projiciren, schneiden sich auf der Verbindungslinie u_2 derjenigen beiden Punkte, welche dem gemeinschaftlichen Punkte uu_1 der Punktreihen entsprechen.

Sie werden in diesen Sätzen sofort diejenigen über das Viereck in der Curve und im Strahlenbüschel II. Ordnung erkennen, wenn ich noch folgende Bemerkungen hinzufüge:

In der Curve II. Ordnung, welche durch die Büschel S und S_1 erzeugt wird, bilden die Punkte S, aa_1, S_1 und bb_1 ein eingeschriebenes Viereck, in welchem a und b_1, sowie a_1 und b Gegenseiten sind, während in S_2 sich die beiden Tangenten schneiden, welche in den gegenüberliegenden Eckpunkten S und S_1 die Curve berühren.

In dem Strahlenbüschel II. Ordnung, welchen die Punktreihen u und u_1 erzeugen, bilden die Strahlen u, $\overline{AA_1}$, u_1 und $\overline{BB_1}$ ein Viereck, in welchem A und B_1, sowie A_1 und B gegenüberliegende Eckpunkte sind, während auf u_2 die beiden, den Gegenseiten u und u_1 angehörenden Berührungspunkte des Büschels II. Ordnung liegen.

Dass die obigen Sätze ganz besonders geeignet sind, uns zu jedem Elemente des einen von zwei projectiven einförmigen Grundgebilden das entsprechende Element des anderen zu liefern, liegt auf der Hand. Denn wenn z. B. in zwei projectiven Punktreihen u und u_1 (Fig. 39) drei Paare entsprechender Punkte gegeben sind, so lässt sich aus diesen die Gerade u_2 sofort ableiten, welche dann jedem Punkte von u den entsprechenden von u_1 sehr einfach zuweist.

Die soeben wiederholt bewiesenen Sätze vom Viereck in der Curve und im Strahlenbüschel II. Ordnung lassen sich auch in der folgenden allgemeineren Form aussprechen (Fig. 37):

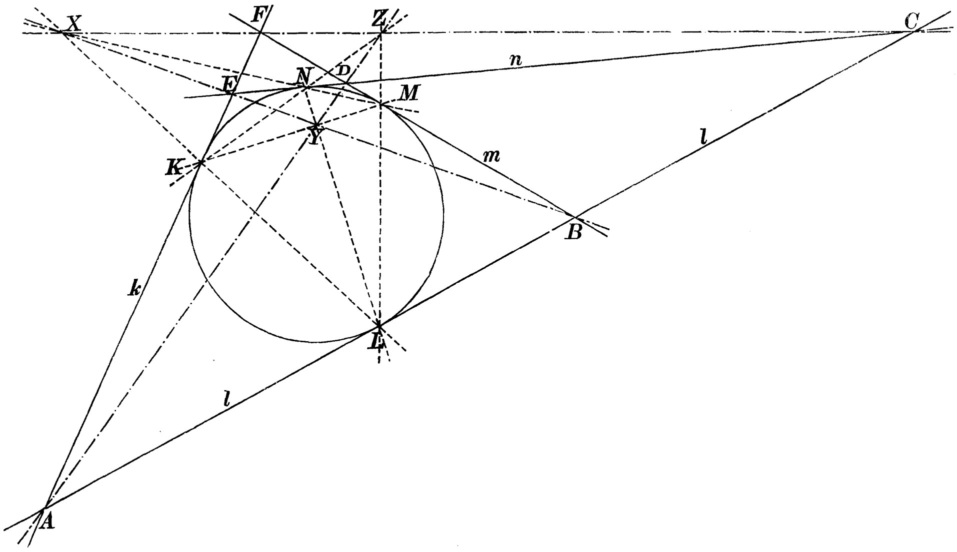

Fig. 37.

Bilden vier Punkte K, L, M, N einer Curve II. Ordnung ein vollständiges Viereck, und ihre Tangenten k, l, m, n ein vollständiges Vierseit, so liegen in den Verbindungslinien der drei Punkte X, Y, Z, in welchen die Gegenseiten des Vierecks sich schneiden, je zwei Gegenpunkte des Vierseits.

Bilden vier Strahlen k, l, m, n eines Büschels II. Ordnung ein vollständiges Vierseit, und ihre Berührungspunkte K, L, N, N ein vollständiges Viereck, so gehen durch die Schnittpunkte X, Y, Z der drei Geraden (Diagonalen), welche die Gegenpunkte des Vierseits verbinden, je zwei Gegenseiten des Vierecks.

Denn die früher aufgestellten Sätze gelten links für jedes der drei einfachen Vierecke, aus denen das vollständige Viereck $KLMN$, und rechts für jedes der drei einfachen Vierseite, aus denen das vollständige Vierseit $klmn$ zusammengesetzt ist.

In dieser Fassung sagt aber der Satz links offenbar ganz dasselbe aus wie der Satz rechts; denn beide sagen aus, dass das Dreieck, dessen Seiten je zwei Gegenpunkte des Vierseits verbinden, identisch ist mit dem Dreieck XYZ, in dessen Eckpunkten je zwei Gegenseiten des Vierecks sich schneiden. Hat aber umgekehrt ein Viereck $KLMN$ zu einem ihm umschriebenen Vierseit $klmn$ diese Lage, so kann sowohl eine Curve II. Ordnung construirt werden, welche die Geraden k, l, m, n in den Punkten K, L, M, N berührt, als auch ein Büschel II. Ordnung, welcher die Punkte K, L, M, N in den Strahlen k, l, m, n zu Berührungspunkten hat. Denn zufolge unseres Satzes hat eine Curve II. Ordnung, welche durch die Punkte K, L, M, N hindurchgeht, und in K die Gerade k berührt, auch die Geraden l, m, n zu Tangenten; und es muss der Büschel II. Ordnung, welcher die Strahlen k, l, m, n enthält, und in k den Punkt K zum Berührungspunkte hat, auch die Punkte L, M, N zu Berührungspunkten haben. Vier Tangenten einer Curve II. Ordnung nebst ihren vier Berührungspunkten können daher stets als vier Strahlen eines Büschels II. Ordnung nebst ihren vier Berührungspunkten angesehen werden.

Eine Curve II. Ordnung, welche durch drei Berührungspunkte K, L, M eines Büschels II. Ordnung geht und in zwei K und L dieser Punkte die zugehörigen Strahlen k und l des Büschels zu Tangenten hat, geht folglich auch durch jeden vierten Berührungspunkt N des Büschels und hat den zugehörigen Strahl n des letzteren zur Tangente. Umgekehrt enthält ein Büschel II. Ordnung jede Tangente einer Curve II. Ordnung, sobald er drei solche enthält und die Berührungspunkte von zwei derselben auf der Curve liegen. Wir haben also folgende schöne Beziehung zwischen den Curven und Büscheln II. Ordnung:

Die Tangenten einer Curve II. Ordnung bilden einen Strahlenbüschel II. Ordnung.

Die Berührungspunkte eines Strahlenbüschels II. Ordnung bilden eine Curve II. Ordnung.

Seiner Wichtigkeit wegen beweise ich diesen Doppelsatz noch einmal auf andere Art, wobei sich noch eine neue interessante Eigenschaft der Curve II. Ordnung ergeben wird. Möge von den vier Eckpunkten K, L, M, N (Fig. 37) eines der Curve

II. Ordnung eingeschriebenen Vierecks der eine K sich auf der Curve bewegen, indess die übrigen drei nebst ihren resp. Tangenten l, m, n ihre Lage nicht ändern. Dann gleitet die Tangente k des Punktes K auf der Curve fort, und auch ihre Schnittpunkte E und A mit den resp. Tangenten n und l bewegen sich. Es ist aber leicht zu erkennen, dass E und A bei dieser Bewegung zwei projective Punktreihen in resp. n und l beschreiben, dass also die Tangente k einen Strahlenbüschel II. Ordnung durchläuft. Denn die beiden Diagonalen $\overline{EB}$ und $\overline{AD}$ des Vierseits k, l, m, n schneiden sich stets in einem Punkte Y der festen Geraden $\overline{LN}$, und beschreiben folglich um die festen Eckpunkte B und D zwei perspective Strahlenbüschel; und von diesen sind die Punktreihen n und l, welche die Punkte E und A beschreiben, Schnitte. Damit ist der Satz links bewiesen, und der Satz rechts kann ganz analog bewiesen werden.

Auch die Gerade $\overline{MK}$ geht durch den Punkt Y und beschreibt bei der Bewegung des Punktes K einen Strahlenbüschel um den festen Punkt M, welcher zu dem von $\overline{BE}$ beschriebenen Büschel B perspectiv und folglich auch zu der von E beschriebenen Punktreihe n projectiv ist. Daraus folgt, wenn K alle Punkte der Curve durchläuft:

Sind von einer Curve II. Ordnung ein beliebiger fester Punkt M *und eine beliebige feste Tangente* n *gegeben, und weisen wir jedem Strahle von* M, *welcher einen beliebigen Punkt* K *der Curve projicirt, denjenigen Punkt von* n *zu, durch welchen die Tangente* k *des Punktes* K *hindurchgeht, so sind der Strahlenbüschel* M *und die Punktreihe* n *projectiv auf einander bezogen.*

Dieser Satz, den Chasles seinem Traité des Sections coniques an die Spitze gestellt hat, ist in der Ebene sich selbst reciprok, da ja, wie eben bewiesen wurde und wie aus ihm selbst folgt, die Tangenten einer Curve II. Ordnung stets einen Büschel II. Ordnung bilden. Ich will jetzt nur eine Folgerung aus demselben ziehen, nämlich:

„Die Tangenten an vier harmonischen Punkten einer Curve „II. Ordnung sind vier harmonische Tangenten."

Sie werden nämlich von jeder fünften Tangente in vier harmonischen Punkten geschnitten, weil ihre vier Berührungspunkte aus jedem fünften Punkte der Curve durch vier harmonische Strahlen projicirt werden.

Den Satz, dass ein Büschel II. Ordnung von irgend zwei seiner Strahlen in projectiven Punktreihen geschnitten wird, können wir nunmehr auch so aussprechen:

„Der Büschel aller Tangenten einer Curve II. Ordnung wird von „je zwei dieser Tangenten in projectiven Punktreihen geschnitten."

Ebenso kann der Lehrsatz des Brianchon auch in folgender Fassung demjenigen des Pascal gegenübergestellt werden:

„Von jedem einer Curve II. Ordnung „umschriebenen" Sechseck „(dessen Seiten die Curve berühren) schneiden sich die drei „Hauptdiagonalen in einem Punkte."

Und zwar wird er, sowie die Sätze über das Fünfeck, Viereck und Dreieck im Strahlenbüschel II. Ordnung, gewöhnlich in dieser Form ausgesprochen.

Ich begnüge mich damit, Ihnen noch einige der früher bewiesenen Sätze nebst ihren reciproken in dieser neuen Form vorzuführen, jedoch übertragen auf die Gebilde II. Ordnung im Strahlenbündel. Nach früheren Sätzen (Seite 68) wird jede Curve und jeder Strahlenbüschel II. Ordnung aus einem nicht in derselben Ebene gelegenen Punkte durch einen Kegel resp. einen Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt. Jede Tangente der Curve wird durch eine Ebene projicirt, welche mit dem Kegel nur einen Strahl gemein hat, und deshalb „Berührungsebene" desselben heisst. Ebenso wird jeder Berührungspunkt des Strahlenbüschels II. Ordnung durch einen sogenannten „Berührungsstrahl" des Ebenenbüschels projicirt, durch welchen nur eine Ebene des letzteren geht. Da auch umgekehrt jeder Kegel und jeder Ebenenbüschel II. Ordnung durch eine nicht den Mittelpunkt enthaltende Ebene in einer Curve resp. einem Strahlenbüschel II. Ordnung geschnitten wird, so folgt:

Die Berührungsebenen eines Kegels II. Ordnung bilden einen Ebenenbüschel II. Ordnung.	Die Berührungsstrahlen eines Ebenenbüschels II. Ordnung bilden einen Kegel II. Ordnung.
Die Strahlen eines Kegels II. Ordnung werden aus je zwei unter ihnen durch projective Ebenenbüschel projicirt (vgl. S. 76).	Die Berührungsebenen eines Kegels II. Ordnung werden von je zwei unter ihnen in projectiven Strahlenbüscheln geschnitten.

Aehnlich wie früher (Seite 76) können wir daher folgende Definitionen aufstellen:

Vier Strahlen eines Kegels II. Ordnung heissen „harmonische Strahlen", wenn sie aus irgend einem und folglich aus	Vier Berührungsebenen eines Kegels II. Ordnung heissen „harmonische Berührungsebenen", wenn sie von irgend einer und

jedem fünften Strahle der Fläche durch vier harmonische Ebenen projicirt werden. | folglich von jeder fünften in vier harmonischen Strahlen geschnitten werden.

Die Lehrsätze des Pascal und des Brianchon lauten für den Kegel II. Ordnung:

In jedem einem Kegel II. Ordnung eingeschriebenen Sechskant schneiden sich die drei Paar Gegenseiten in drei Geraden, welche in einer Ebene liegen.

In jedem einem Kegel II. Ordnung umschriebenen Sechskant schneiden sich die drei Haupt-diagonal-Ebenen in einer Geraden.

Es wird eine nützliche Uebung für Sie sein, wenn Sie auch die übrigen wichtigen Sätze, welche wir für ebene Gebilde bewiesen haben, auf die entsprechenden Gebilde im Strahlenbündel übertragen.

Ich kehre noch einmal zu den Curven II. Ordnung zurück, um aus dem Satze, dass sie mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte gemein haben, für ihren Verlauf in der Ebene eine bemerkenswerthe Folgerung zu ziehen. Zufolge dieses Satzes hat nämlich eine solche Curve mit der unendlich fernen Geraden ihrer Ebene entweder gar keinen Punkt gemein, oder einen Punkt, in welchem sie von der unendlich fernen Geraden berührt wird, oder endlich zwei Schnittpunkte. Im ersten Falle sind alle Punkte der Curve eigentliche Punkte und alle ihre Tangenten eigentliche Strahlen der Ebene, und die Curve wird eine „Ellipse“ genannt (s. Figg. 33 bis 39). Im zweiten Falle erstreckt sich die Curve mit zwei Aesten ins Unendliche, indem sie dem Punkte zustrebt, in welchem die unendlich ferne Gerade sie berührt; sie heisst dann eine „Parabel“ (s. Fig. 32). Im dritten Falle besteht die Curve aus zwei krummen Linien, deren jede mit zwei Aesten den beiden unendlich fernen Punkten zustrebt, durch welche die beiden krummen Linien mit einander zusammenhängen; die Curve heisst in diesem Falle eine „Hyperbel“ (Fig. 31). Weil die unendlich ferne Gerade der Ebene die Hyperbel schneidet, so sind alle Tangenten der letzteren, insbesondere auch die Tangenten der beiden unendlich fernen Curvenpunkte, eigentliche Strahlen der Ebene. Es giebt also zwei Tangenten, welchen sich die Hyperbel im Unendlichen anschmiegt, und welche die „Asymptoten“ derselben genannt werden.

Dieselben drei Arten von Curven II. Ordnung können wir auch aus jedem Kegel II. Ordnung herausschneiden, dessen Mittelpunkt nicht unendlich fern liegt. Eine durch den Mittelpunkt gelegte Ebene Σ hat nämlich mit dem Kegel entweder nur diesen Punkt gemein, oder sie berührt ihn in einem Strahle s, oder endlich sie schneidet ihn in zwei Strahlen p und q. Jede zu Σ parallele Ebene Σ_1 schneidet im ersten Falle alle Strahlen des Kegels in eigentlichen Punkten und den Kegel selbst in einer Ellipse. Im zweiten Falle ist die Schnittcurve eine Parabel, weil der parallele Strahl s in einem unendlich fernen Punkte von Σ_1 geschnitten wird; und zwar ist die Schnittlinie von Σ_1 mit der Berührungsebene Σ die unendlich ferne Tangente der Parabel. Endlich im dritten Falle ist die Schnittcurve eine Hyperbel, weil die zwei Strahlen p und q in ihren unendlich fernen Punkten von Σ_1 geschnitten werden. Die Ebenen, welche in p und q den Kegel berühren, werden von Σ_1 in den Asymptoten der Hyperbel geschnitten; und die Hyperbel besteht aus zwei krummen Linien, weil beide Hälften des Kegels von Σ_1 geschnitten werden. Wir können die Hyperbel wie jede Curve II. Ordnung als eine in sich zurücklaufende, geschlossene Curve auffassen, weil jeder eigentliche Kegel, durch welcher eine solche Curve projicirt wird, eine geschlossene, in sich zurücklaufende Fläche ist.

Zwei projective Strahlenbüschel, die schief in einer Ebene liegen, erzeugen eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem kein Paar einander entsprechender Strahlen, oder ein Paar oder zwei Paare parallel laufen. Wird also der eine Strahlenbüschel so in der Ebene verschoben, dass er mit dem andern concentrisch wird, jedoch ohne dass seine Strahlen ihre Richtung ändern, so haben diese concentrischen Büschel im ersten Falle keinen, im zweiten Falle einen und im dritten zwei Strahlen entsprechend gemein. Der letztere Fall tritt namentlich dann ein, wenn die Büschel entgegengesetzt projectiv sind. Wir werden hiernach in vielen Fällen sofort erkennen können, ob eine durch genügend viele Bedingungen, z. B. durch fünf ihrer Punkte bestimmte Curve II. Ordnung eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist.

Schwieriger ist diese Untersuchung, wenn die Curve durch Tangenten gegeben ist, oder durch zwei projective Punktreihen, welche den umhüllenden Büschel II. Ordnung erzeugen. Doch erkennen Sie sofort, dass zwei projective Punktreihen dann und nur dann die sämmtlichen Tangenten einer Parabel erzeugen, wenn ihre unendlich fernen Punkte einander entsprechen; denn nur in diesem Falle ist die unendlich ferne Gerade der Ebene eine jener Tangenten. Man nennt zwei projective Punktreihen, deren unendlich fernen Punkte einander entsprechen, projectiv „ähnlich“. Werden sie in perspective Lage gebracht, indem

(Fig. 40) irgend zwei einander entsprechende eigentliche Punkte derselben auf einander gelegt werden, so stellen sie sich als

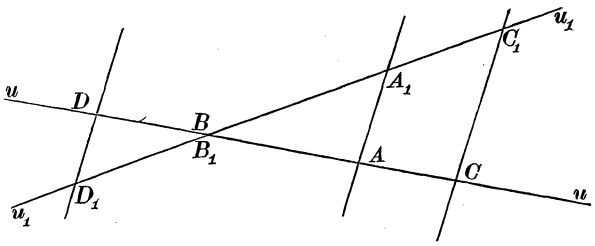

Fig. 40.

Schnitte eines Parallelstrahlenbüschels dar, indem ihr Projectionsmittelpunkt auf dem unendlich fernen Strahle, also selbst unendlich fern liegt. Beiläufig ergiebt sich für die Parabeltangenten die metrische Beziehung:

„Je zwei Tangenten u und u_1, einer Parabel werden von den „übrigen $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{DD_1}$, ... proportional getheilt" (Fig. 32).

Daraus erklärt sich auch der Ausdruck „projectiv ähnlich".

Bei dieser Gelegenheit will ich noch folgende Sätze anführen:

„Bewegen sich die Eckpunkte eines Dreiecks so auf drei in „einer Ebene gegebenen Geraden, dass zwei Seiten desselben „ihre Richtung nicht ändern, so beschreibt die dritte Seite ent- „weder auch einen Parallelstrahlenbüschel, oder einen Büschel „II. Ordnung, der eine Parabel umhüllt."

Denn durch die Parallelstrahlenbüschel, welche die ersten beiden Dreiecksseiten beschreiben, werden zwei von den Punktreihen der drei gegebenen Geraden auf die dritte und folglich auf einander projectiv ähnlich bezogen.

„Sind eine Punktreihe u und ein Strahlenbüschel S, die in „derselben Ebene liegen, projectiv auf einander bezogen, und „zieht man durch jeden Punkt von u eine Parallele zu dem ent- „sprechenden Strahle von S, so schneiden sich diese Parallelen „entweder in einem Punkte, oder sie umhüllen eine Parabel."

Schneiden wir nämlich den Strahlenbüschel S durch die unendlich ferne Gerade der Ebene, so erhalten wir eine unendlich ferne Punktreihe, welche zu u projectiv ist. Liegt dieselbe nicht perspectiv zu u, so erzeugt sie mit u einen Strahlenbüschel II. Ordnung, welcher auch die unendlich ferne Gerade enthält, und folglich eine Parabel umhüllt.

Wird eine Curve II. Ordnung aus einem unendlich fernen Punkte projicirt, der nicht in ihrer Ebene liegt, so erhalten wir einen Kegel mit unendlich fernem Mittelpunkt, dessen Strahlen also parallel sind. Derselbe wird ein „Cylinder“ II. Ordnung genannt. Zwei projective Ebenenbüschel mit parallelen Axen erzeugen demnach entweder einen Parallelstrahlenbüschel oder einen Cylinder II. Ordnung. Wir theilen die Cylinder ein in elliptische, parabolische und hyperbolische, jenachdem sie von irgend einer und folglich von jeder Ebene, die nicht durch ihren unendlich fernen Mittelpunkt geht, in Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln geschnitten werden, oder was dasselbe ist, jenachdem sie keinen, einen oder zwei unendlich ferne Strahlen enthalten.

Achter Vortrag.

Pol und Polare in Bezug auf Curven zweiter Ordnung.*)

Die Sätze über Vierecke, welche einer Curve II. Ordnung eingeschrieben oder auch umschrieben sind, führen uns zu einer Reihe sehr wichtiger Eigenschaften dieser Curven, von denen ich Ihnen schon in der Einleitung einzelne angegeben habe. Wir gelangen zu denselben durch folgende Betrachtung:

Ist in der Ebene einer Curve II. Ordnung ein Punkt U gegeben (Figg. 41 und 42), der nicht auf der Curve selbst liegt, und legen wir durch denselben zwei die Curve schneidende Gerade oder Secanten $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, so können wir diese als Diagonalen eines der Curve eingeschriebenen einfachen Vierecks $ABCD$ betrachten. Die zwei paar Gegenseiten $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ und $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ dieses Vierecks schneiden sich dann in je einem Punkte P resp. Q, die Tangenten a und c in zwei gegenüberliegenden Eckpunkten A und C schneiden sich in einem dritten Punkte R, und diese drei Schnittpunkte P, Q und R liegen in einer Ge-

*) Die Polarentheorie der Kegelschnitte wird meistens irrthümlich La Hire zugeschrieben. Wir verdanken sie Desargues, der sie 1639 in seinem „Brouillon project d'une atteinte ....“ entwickelte (Vgl. Desargues Oeuvres, réunies par Poudra, Paris 1864, T. I.). Uebrigens beweist schon Apollonius, Conicorum lib. III prop. XXXVII, dass der Schnittpunkt zweier Tangenten eines Kegelschnittes von den Punkten der Berührungssehne harmonisch getrennt ist durch die Curve.

raden u. Auf derselben Geraden schneiden sich auch die Tangenten b und d, welche in den Eckpunkten B und D construirt werden können (vgl. die Sätze über das eingeschriebene Viereck Seite 80 und 84).

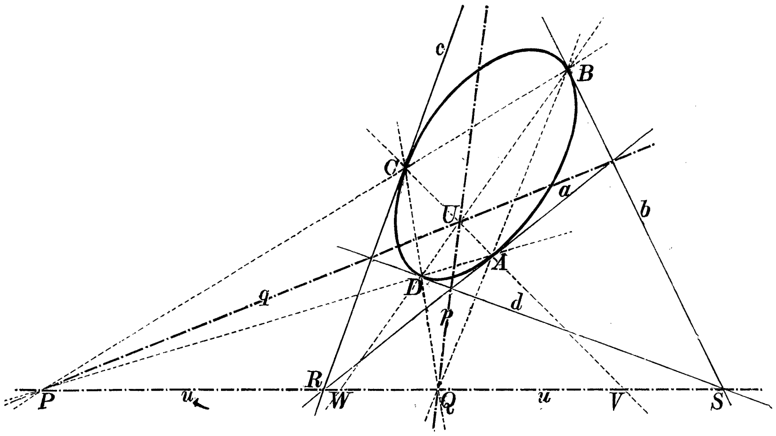

Fig. 41.

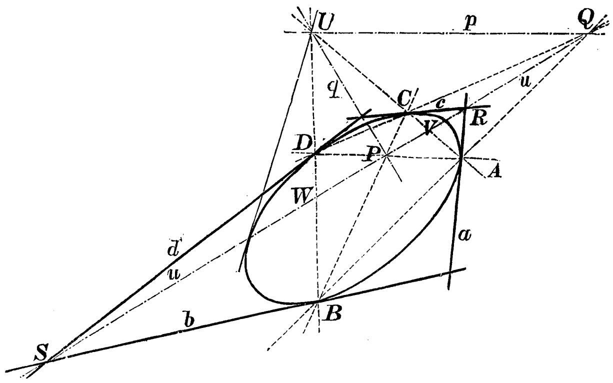

Fig. 42.

Bezeichnen wir nun durch V und W die Schnittpunkte der Geraden u mit resp. $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, so erkennen Sie sofort, dass V von U harmonisch getrennt ist durch die Punkte A und C. Denn von dem Viereck $PBQD$ schneiden sich je zwei Gegenseiten in A und C, während die Diagonale $\overline{BD}$ durch U und die Diagonale $\overline{PQ}$ durch V geht. Ebenso sind U und W harmonisch getrennt durch B und D. Die Gerade u wird also auch gefunden, indem wir nur eine Secante $\overline{AC}$ durch U legen, auf dieser den Punkt V suchen, welcher durch die Curvenpunkte A und C harmonisch von U getrennt ist, und denselben mit dem Schnittpunkte R der beiden in A und C construirten Tangenten verbinden. Und wie auch die zweite Secante $\overline{BD}$ durch U gelegt werden möge, so müssen doch stets auf der Geraden u, welche schon durch die Punkte V und R völlig bestimmt ist, folgende Punkte liegen:

1) die Schnittpunkte P und Q der Gegenseiten des Vierecks $ABCD$,
2) der Schnittpunkt S der beiden in B und D construirten Tangenten,
3) der Punkt W, welcher von U durch die Punkte B und D harmonisch getrennt ist.

Wir wollen U den „Pol" der so bestimmten Geraden u nennen, und umgekehrt u die „Polare" des Punktes U. Die Polare eines gegebenen Punktes bezüglich einer Curve II. Ordnung kann man hiernach auf verschiedene Art, und zwar durch lineare Constructionen leicht finden. Umgekehrt kann der Pol U einer gegebenen Geraden u construirt werden, indem man aus zwei beliebigen Punkten R und S derselben zwei paar Tangenten a, c und b, d an die Curve II. Ordnung legt (Figg. 41 und 42). Durch den Pol U gehen dann:

1) die Diagonalen des einfachen Vierseits $abcd$,
2) die Verbindungslinien $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ der Berührungspunkte jedes Tangentenpaares,
3) die beiden Strahlen, von denen der eine durch a und c, der andere durch b und d harmonisch getrennt ist von u.

Denn der Schnittpunkt U von $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ ist der Pol von u, weil seine Polare nach dem Obigen mit u zusammenfällt, da auf ihr die Schnittpunkte der in A und C, sowie in B und D construirten Tangentenpaare liegen. Ferner sind die Geraden $\overline{RU}$ und u harmonisch getrennt durch a und c, weil die Punkte U und V jener beiden Geraden durch die Berührungspunkte A und C dieser Tangenten harmonisch getrennt sind; und ebenso ist $\overline{SU}$ von u harmonisch getrennt durch b und d, so dass die Behauptung 3) bewiesen ist. Die Richtigkeit der Behauptung 1) folgt unmittelbar aus dem früher bewiesenen Satze (Seite 80) über das umschriebene Vierseit.

Wenn die Polare u eines Punktes U (Fig. 42) die Curve II. Ordnung schneidet, so wird die Curve von den beiden Geraden berührt, welche den Punkt U mit den Schnittpunkten verbindet. Denn hätte eine dieser Geraden mit der Curve noch einen zweiten Punkt gemein, so müsste derselbe von dem ersten Schnittpunkte harmonisch getrennt sein durch U und u, und dieser erste Schnittpunkt könnte also nicht auf u liegen. Die Gerade u ist also in diesem Falle die „Berührungssehne" des Punktes U, d. h. die Gerade, welche die Berührungspunkte der beiden, aus U an die Curve II. Ordnung gelegten Tangenten verbindet.

Alle diese Ergebnisse können wir in folgendem Doppelsatze zusammenfassen:

Wenn durch einen Punkt U, welcher in der Ebene einer Curve II. Ordnung, aber nicht auf derselben liegt, beliebig viele Secanten durch die Curve gelegt werden, und man bestimmt:

1) in jedem der Curve eingeschriebenen einfachen Viereck, welches irgend zwei dieser Secanten zu Diagonalen hat, die Schnittpunkte der Gegenseiten,
2) auf jeder Secante den Punkt, welcher von U durch die beiden Curvenpunkte harmonisch getrennt ist,
3) den gemeinschaftlichen Punkt der beiden Tangenten, welche in den Schnittpunkten einer jeden Secante die Curve berühren,
4) wenn von U Tangenten an die Curve gezogen werden können, die Berührungspunkte derselben,

so liegen alle diese Punkte auf

Wenn von beliebig vielen Punkten einer Geraden u, welche in der Ebene einer Curve II. Ordnung liegt, aber dieselbe nicht berührt, je zwei Tangenten an die Curve gezogen werden, und man bestimmt:

1) in jedem der Curve umschriebenen einfachen Vierseit, dessen Gegenseiten von zwei solchen Tangentenpaaren gebildet werden, die Diagonalen,
2) für jeden Punkt von u die Gerade, welche durch die beiden Tangenten der Curve harmonisch von u getrennt ist,
3) die Gerade, welche die Berührungspunkte eines jeden Tangentenpaares verbindet,
4) wenn u die Curve schneidet, die beiden Tangenten in den Schnittpunkten,

so gehen alle diese Geraden durch einen Punkt U, welcher der Pol der Geraden u in Be-einer Geraden u, welche die Polare des Punktes U in Bezug auf die Curve II. Ordnung genannt wird.

zug auf die Curve II. Ordnung genannt wird.

Liegt ein Punkt A auf der Curve II. Ordnung, und ist a die Tangente in diesem Punkte, so soll a die Polare von A heissen und umgekehrt A der Pol von a. Dieser Fall kann als Grenzfall des vorigen betrachtet werden. Hierdurch und durch das Vorhergehende ist also jedem Punkte der Ebene eine Polare in Bezug auf die Curve II. Ordnung zugeordnet, und umgekehrt jeder Geraden ein Pol.

Wenn in der Ebene einer Curve II. Ordnung ein Punkt gegeben ist, so wollen wir sagen, derselbe liege „ausserhalb" oder „innerhalb" der Curve, jenachdem durch ihn zwei oder keine Tangenten an die Curve gelegt werden können. Die sämmtlichen Punkte einer Tangente liegen also ausserhalb der Curve; nur der Berührungspunkt liegt „auf" der Curve. Jede Gerade, welche in der Ebene der Curve liegt, enthält unendlich viele Punkte, welche ausserhalb der Curve liegen, weil die Gerade mit jeder Tangente einen Punkt gemein hat; und zwar folgen diese Punkte stetig auf einander, weil die Tangenten stetig aufeinander folgen. Alle Punkte einer Geraden, welche innerhalb der Curve liegen, folgen daher auch stetig auf einander. Wenn also die Verbindungslinie von zwei ausserhalb der Curve gelegenen Punkten die Curve schneidet, so sind diese Punkte nicht durch die Schnittpunkte von einander getrennt, sondern man kann auf der ausserhalb der Curve liegenden Strecke der Geraden von A nach B gelangen (nöthigenfalls, indem man durch den unendlich fernen Punkt hindurchgeht), ohne einen Curvenpunkt zu überschreiten. Ebenso sind zwei innerhalb der Curve liegende Punkte nicht durch die Curve von einander getrennt, sondern liegen auf einer von der Curve eingeschlossenen Strecke ihrer Verbindungslinie. Von zwei Punkten dagegen, welche durch die Curve von einander getrennt sind, liegt der eine innerhalb, der andere ausserhalb der Curve; denn sie können nach dem eben Bewiesenen weder beide innerhalb, noch beide ausserhalb der Curve liegen. Also:

„Eine Ebene wird durch eine in ihr liegende Curve II. Ordnung „in zwei Theile zerlegt. Von einem beliebigen Punkte des „einen Theils kann man zu jedem anderen Punkte desselben „Theiles, dagegen zu keinem Punkte des anderen Theiles ge-

„langen, ohne die Curve zu überschreiten. Die Punkte des „einen Theiles liegen ausserhalb der Curve, und es lassen sich „von ihnen je zwei Tangenten an die Curve ziehen; die Punkte „des anderen Theiles liegen innerhalb der Curve, und durch sie „gehen keine Tangenten."

Ein innerhalb der Curve gelegener Punkt ist somit von jedem Punkte seiner Polare harmonisch getrennt durch die Curve, und jede durch ihn gelegte Gerade schneidet die Curve in zwei Punkten, während seine Polare nicht von der Curve geschnitten wird. Ein ausserhalb der Curve gelegener Punkt R dagegen ist nicht von jedem Punkte seiner Polare durch die Curve getrennt; zieht man durch R die beiden Tangenten an die Curve, so begrenzen dieselben auf der Polare die Strecke der Punkte, welche von R harmonisch getrennt sind. Die Curve nebst allen von ihr eingeschlossenen Punkten ist in dem einen der beiden vollkommenen Winkel enthalten, welche von zwei beliebigen Tangenten gebildet werden.

Wir werden von diesen Sätzen, die Ihnen vielleicht als selbstverständlich erscheinen, aber nach meiner Ansicht des Beweises gleichwohl bedurften, später mehrfach Gebrauch machen. Zunächst beweise ich mit ihrer Hülfe folgenden Hauptsatz der Polarentheorie:

Die Polaren der Punkte einer Geraden u gehen durch den Pol U dieser Geraden. Liegt ein Punkt von u innerhalb der Curve II. Ordnung, so ist er der von U harmonisch getrennt, und seine Polare muss deshalb durch U gehen. Liegt aber irgend ein Punkt R von u (Figg. 41 und 42) ausserhalb der Curve, so kann man durch ihn zwei Tangenten an die Curve ziehen. Und die Gerade, welche den Berührungspunkt der einen dieser Tangenten mit U verbindet, ist die Polare von R, weil ihr Pol sowohl auf u als auch auf jener Tangente liegen muss.

Die Pole der Strahlen eines Punktes U liegen auf der Polare u dieses Punktes. Wenn ein Strahl von U die Curve II. Ordnung schneidet, so erhält man den Pol derselben, indem man an den Schnittpunkten Tangenten construirt und deren Schnittpunkt sucht. Dieser aber liegt, wie vorhin bewiesen, auf der Polare u von U. Schneidet aber irgend ein Strahl von U die Curve nicht, so liegt sein Pol innerhalb der Curve, ist also von jedem Punkte des Strahles und folglich auch von U harmonisch getrennt, also wieder auf u gelegen. Berührt endlich

Liegt endlich ein Punkt von u auf der Curve, so ist die Tangente in demselben seine Polare; diese aber geht gleichfalls durch U.

ein Strahl von U die Curve, so liegt der Berührungspunkt auf u und ist zugleich der Pol jenes Strahles.

Von zwei Punkten der Ebene liegt hiernach entweder keiner oder jeder in der Polare des andern; und von zwei beliebigen Geraden der Ebene geht entweder keine oder jede durch den Pol der andern.

Durch diese und die vorhergehenden Sätze ist das Princip der Reciprocität, auf welches ich später noch einmal zurückkommen werde, wenigstens für das ebene Feld oder überhaupt für Grundgebilde der zweiten Stufe bewiesen. Denn zu jedem ebenen Gebilde können wir mit Hülfe einer Curve II. Ordnung ein reciprokes ebenes Gebilde construiren, indem wir zu jedem Punkte des ersteren die Polare, zu jeder Geraden den Pol bestimmen. Daher wird es künftig genügen, wenn ich für ebene Gebilde von je zwei reciproken Sätzen immer nur den einen beweise.

Mit Hülfe der Polaren hat Brianchon seinen Lehrsatz aus demjenigen des Pascal abgeleitet. Zu jeder Seite eines der Curve II. Ordnung eingeschriebenen Sechsecks bestimmte er nämlich den Pol, indem er in den beiden auf der Seite gelegenen Eckpunkten Tangenten construirte und deren Schnittpunkt suchte (Fig. 43).

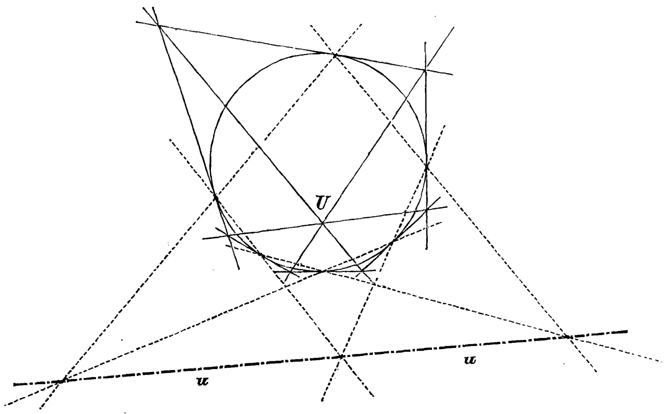

Fig. 43.

Den Seiten und Eckpunkten des eingeschriebenen Sechsecks entsprechen also die Eckpunkte und Seiten eines umschriebenen Sechsecks; und der Schnittpunkt von zwei beliebigen Seiten des ersteren hat zur Polare die Verbindungslinie der entsprechenden Eckpunkte des letzteren. Da nun die drei Punkte, in welchen die drei Paar Gegenseiten des eingeschriebenen Sechsecks sich schneiden, in einer Geraden u liegen, so gehen auch die drei Geraden, welche die drei Paar Gegenpunkte des umschriebenen Sechsecks verbinden, durch einen Punkt U, den Pol jener Geraden u.

Sie ersehen schon aus dieser einen Anwendung, welcher Nutzen aus der Polarentheorie gezogen werden kann. Mit Hülfe einer Curve II. Ordnung kann jetzt z. B. zu jeder ebenen Curve ein Strahlenbüschel gefunden werden, welcher jener Curve reciprok ist, indem jeder Punkt der Curve einen Strahl des Büschels zur Polare hat. Und den Eigenschaften der Curve werden Eigenschaften des Büschels entsprechen. Wir werden später noch allgemeinere Beziehungen dieser Art zu untersuchen haben.

Sind P und Q zwei beliebige Punkte einer Geraden u (Figg. 41 und 42), so gehen dem obigen Hauptsatze zufolge ihre Polaren p und q durch den Pol U von u. Wir wollen nun P irgendwo auf u, dagegen Q im Schnittpunkte von u und p annehmen; dann bilden P, Q und U die Eckpunkte, und ihre Polaren p, q und u die ihnen gegenüberliegenden Seiten eines Dreiecks. Dasselbe wird ein „Poldreieck der Curve II. Ordnung“ genannt; jeder Eckpunkt desselben ist der Pol der ihm gegenüberliegenden Seite. Für solche Poldreiecke gilt, wie ohne Weiteres einleuchtet, der Doppelsatz (vgl. auch Fig. 37).

Die drei Paar Gegenseiten jedes vollständigen Vierecks, welches einer Curve II. Ordnung eingeschrieben ist, schneiden sich in den Eckpunkten eines Poldreiecks der Curve.	Die drei Paar Gegenpunkte jedes vollständigen Vierseits, welches einer Curve II. Ordnung umschrieben ist, liegen auf den Seiten eines Poldreiecks der Curve (Seite 93).

Zu jedem Poldreieck PQU können unendlich viele der Curve eingeschriebene Vierecke construirt werden, deren drei paar Gegenseiten sich in P, Q und U schneiden. Man lege durch P eine Secante $\overline{BC}$ an die Curve (Figg. 41 und 42), verbinde die beiden Curvenpunkte B und C derselben mit dem Punkte U und bringe die Geraden $\overline{BU}$ und $\overline{CU}$ in resp. D nnd A zum zweiten Male mit der Curve zum Durchschnitt; dann ist $ABCD$ eines jener unendlich vielen eingeschriebenen Vierecke, wie Sie leicht selbst beweisen werden.

Werden nun von dem eingeschriebenen Viereck die Eckpunkte A und C nebst dem Punkte U festgehalten, der Punkt P aber auf der Polare u von U verschoben, so bewegt sich der Eckpunkt B auf der Curve; die Geraden $\overline{PB}$ und $\overline{QB}$ beschreiben folglich um die Mittelpunkte C und A zwei projective Strahlenbüschel, und die Punkte P und Q beschreiben zwei projective Punktreihen, welche Schnitte jener Strahlenbüschel sind. Wir schliessen daraus, dass der Strahlenbüschel, welchen die Polare $\overline{UQ}$ oder p des Punktes P um U beschreibt, während P die Punktreihe u durchläuft, zu dieser Punktreihe projectiv ist. Also:

Wenn ein Punkt P *eine Punktreihe* u *durchläuft, so beschreibt zugleich seine Polare* p *einen Strahlenbüschel* U, *welcher zu der Punktreihe projectiv ist.*

Durch diesen Satz wird die Abhängigkeit, in welcher eine beliebige Figur zu ihrer Polarfigur steht, näher angegeben. Wir schliessen z. B. aus demselben Folgendes:

„Sind in einer Ebene zwei Curven II. Ordnung $\varkappa$ und λ ge„geben, und bestimmen wir zu jedem Punkte der einen $\varkappa$ die „Polare in Bezug auf die andere Curve λ, so umhüllen alle „diese Polaren eine dritte Curve II. Ordnung.“

Denn denken wir uns $\varkappa$ durch zwei projective Strahlenbüschel U und V erzeugt, so entsprechen diesen zwei Punktreihen u und v, welche zu den Büscheln, und folglich auch zu einander projectiv sind. Diese Punktreihen erzeugen den Büschel II. Ordnung, welcher jene dritte Curve II. Ordnung umhüllt.

In der Theorie der Curven II. Ordnung werden noch die folgenden Bezeichnungen häufig angewendet:

Zwei Punkte der Ebene heissen c o n j u g i r t bezüglich einer Curve II. Ordnung, wenn der eine und folglich jeder auf der Polare des anderen liegt.	Zwei Gerade der Ebene heissen c o n j u g i r t bezüglich einer Curve II. Ordnung, wenn die eine und folglich jede durch den Pol der anderen geht.

Ein Punkt ist also jedem Punkte seiner Polare, und eine Gerade ist jeder durch ihren Pol gehenden Geraden conjugirt. Die Eckpunkte und ebenso die Seiten jedes Poldreiecks der Curve sind paarweise conjugirt. Ein auf der Curve II. Ordnung liegender Punkt ist sich selbst conjugirt, weil er auf seiner Polare, der Tangente, liegt; und eine Tangente der Curve ist sich selbst conjugirt, weil sie durch ihren Pol, den Berührungspunkt, geht.

Wenn die Verbindungslinie von zwei conjugirten Punkten A und B die Curve II. Ordnung schneidet, so sind A und B durch die beiden Schnittpunkte harmonisch getrennt. Denn die Polare von A geht durch B und enthält alle Punkte, die von A durch zwei Curvenpunkte harmonisch getrennt sind.

Wenn aus dem Schnittpunkte von zwei conjugirten Geraden a und b Tangenten an die Curve II. Ordnung möglich sind, so sind a und b durch diese Tangenten harmonisch getrennt. Denn der Pol von a liegt auf b und durch ihn gehen alle Strahlen, die von a durch zwei Tangenten der Curve harmonisch getrennt sind.

Die Curve II. Ordnung schliesst deshalb von jedem Poldreieck einen Eckpunkt ein und die übrigen beiden aus; sie schneidet zwei Seiten des Poldreiecks, nicht aber die dritte.

Aus der Erklärung der conjugirten Punkte und Geraden folgt weiter:

Wenn zwei Punkte A und B demselben dritten C conjugirt sind, so ist die Gerade $\overline{AB}$ die Polare von C. Denn die Polare von C muss sowohl durch A als auch durch B gehen.

Wenn zwei Gerade a und b derselben dritten c conjugirt sind, so ist ihr Schnittpunkt $\dot{ab}$ der Pol von c. Denn dieser Pol muss sowohl auf a als auch auf b liegen.

Sind u und v zwei nicht conjugirte Gerade der Ebene, so können wir jedem Punkte P von u den ihm conjugirten Punkt P_1 von v zuweisen; die Punktreihen u und v sind dadurch auf einander projectiv bezogen. Denn v erscheint dann als Schnitt des Strahlenbüschels U, welcher aus den Polaren der sämmtlichen Punkte von u besteht und (nach Seite 99) zu der Punktreihe u projectiv ist. Die Verbindungslinien von je zwei conjugirten Punkten P und P_1 der Geraden u und v bilden also einen Strahlenbüschel I. oder II. Ordnung, jenachdem der Schnittpunkt $\dot{uv}$ sich selbst conjugirt ist (d. h. auf der Curve II. Ordnung liegt), oder nicht. Da P den beiden Punkten P_1 und U conjugirt ist, so ist $\overline{P_1 U}$ die Polare von P, und $\overline{PP_1}$ der Geraden $\overline{P_1 U}$ conjugirt. Jenen Strahlenbüschel I. oder II. Ordnung erhalten wir also auch, wenn wir durch jeden Punkt P_1 von v denjenigen Strahl legen, welcher der Geraden $\overline{P_1 U}$ conjugirt ist.

Sind andererseits U und V zwei nicht conjugirte Punkte der Ebene, so können wir jedem Strahle p von U den ihm conjugirten Strahl p_1 von V zuweisen; die Strahlenbüschel U und V sind dadurch projectiv auf einander bezogen. Denn U ist dann ein

Schein der Punktreihe v, welcher die Pole der sämmtlichen Strahlen von V angehören, und welche zu dem Strahlenbüschel V projectiv ist. Die Büschel U und V erzeugen daher eine Punktreihe erster oder zweiter Ordnung, jenachdem der gemeinschaftliche Strahl $\overline{UV}$ sich selbst conjugirt ist (d. h. die gegebene Curve II. Ordnung berührt), oder nicht. Da p_1 den beiden Strahlen p und v conjugirt ist, so ist $\overset{\cdot}{pv}$ der Pol von p_1, und der Punkt $\overset{\cdot}{p_1p}$ dem Punkte $\overset{\cdot}{pv}$ conjugirt. Jene Punktreihe I. oder II. Ordnung erhalten wir auch, wenn wir in jedem Strahle p von U denjenigen Punkt bestimmen, welcher zu dem Punkte $\overset{\cdot}{pv}$ conjugirt ist. Daraus folgen die Sätze:

Sind in der Ebene einer Curve II. Ordnung eine Gerade v und ein nicht auf derselben liegender Punkt U gegeben, und

bestimmen wir in jedem Strahle von U denjenigen Punkt, welcher dem Schnittpunkte des Strahles mit der Geraden v conjugirt ist, so liegen alle diese Punkte in einer Curve II. Ordnung; dieselbe geht durch den Pol V der Geraden v, durch U und die Berührungspunkte der beiden Tangenten, die von U an die gegebene Curve II. Ordnung etwa gezogen werden können. Nur wenn v durch einen dieser Berührungspunkte geht, also die Gerade $\overline{UV}$ eine Tangente der gegebenen Curve II. Ordnung ist, erhalten wir eine Punktreihe I. statt einer Curve II. Ordnung.*)

wird durch jeden Punkt von v derjenige Strahl gelegt, welcher der Verbindungslinie jenes Punktes mit dem Punkte U conjugirt ist, so umhüllen alle diese Strahlen eine Curve II. Ordnung; dieselbe berührt die Polare u des Punktes U, ferner v und die Tangenten der beiden Punkte, in denen die gegebene Curve II. Ordnung etwa von v geschnitten wird. Nur wenn U auf einer dieser beiden Tangenten liegt, also der Punkt $\overset{\cdot}{uv}$ der gegebenen Curve II. Ordnung angehört, erhalten wir einen Strahlenbüschel I. Ordnung statt der Tangenten einer Curve II. Ordnung.

*) Als besonderer Fall des Satzes links ist der folgende zu erwähnen:
„Die Halbirungspunkte derjenigen Sehnen einer Curve II. Ordnung, welche „nach einem beliebig gegebenen eigentlichen Punkte convergiren, liegen „auf einer anderen Curve II. Ordnung.“
Die Gerade v liegt in diesem Falle unendlich fern, und jeder der Halbirungspunkte ist durch die Curve von einem unendlich fernen Punkte harmonisch getrennt, also demselben conjugirt.

Werden also links die gegebene Curve II. Ordnung und der Punkt U festgehalten, so entspricht jedem Punkt der Ebene ein conjugirter Punkt, welcher mit dem ersteren auf einem Strahle von U liegt; jeder Geraden dagegen entspricht im Allgemeinen eine Curve II. Ordnung. Werden ebenso rechts die gegebene Curve II. Ordnung und die Gerade v festgehalten, so entspricht jedem Strahl der Ebene ein conjugirter Strahl, welcher den ersteren in einem Punkte von v schneidet; jedem Strahlenbüschel I. Ordnung entspricht dagegen im Allgemeinen ein Büschel II. Ordnung. Wir gelangen auf diese Weise zu zwei besonderen Fällen der sogenannten „geometrischen Verwandtschaft zweiten Grades“.

Aus unserer Beweisführung (Seite 100 und 101) ergeben sich noch folgende Sätze:

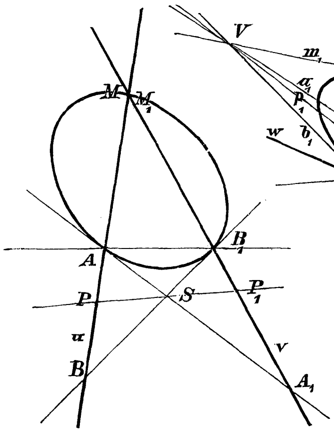

Fig. 44.

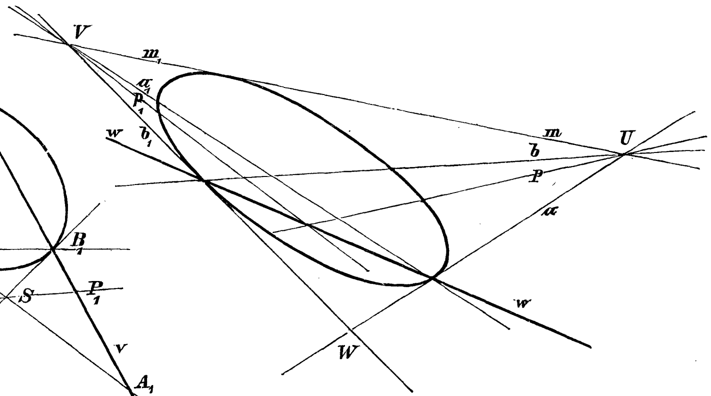

Fig. 45.

Ist ein Dreieck AMB_1 (Fig. 44) einer Curve II. Ordnung eingeschrieben, so schneidet jede Gerade, welche der einen Seite $\overline{AB_1}$ conjugirt ist, die beiden anderen Seiten in zwei conjugirten Punkten. Und wenn umgekehrt eine Gerade von zwei Seiten des Dreiecks in conjugirten Punkten ge-

Ist ein Dreieck UVW (Fig. 45) einer Curve II. Ordnung umschrieben, so wird jeder Punkt, welcher dem einen Eckpunkte W conjugirt ist, aus den beiden anderen Eckpunkten durch zwei conjugirte Strahlen projicirt. Und wenn umgekehrt ein Punkt aus zwei Eckpunkten des Dreiecks schnitten wird, so geht sie durch den Pol der dritten Seite. | durch conjugirte Strahlen projicirt wird, so liegt er auf der Polare des dritten Eckpunktes.

Die Punktreihen $\overline{AM}$ oder u und $\overline{B_1M}$ oder v (Fig. 44) sind nämlich perspectiv auf einander bezogen, wenn jedem Punkte von u sein conjugirter Punkt in v als entsprechender zugewiesen wird; denn der gemeinschaftliche Punkt M von u und v ist sich selbst conjugirt. Der Mittelpunkt S des von u und v erzeugten Strahlenbüschels muss aber auf der in A construirten Tangente liegen, weil der Schnittpunkt A_1 derselben mit v dem Punkte A conjugirt ist; und ebenso liegt S auf der Tangente des Punktes B_1. Folglich ist S der Pol von $\overline{AB_1}$, und jede durch S gelegte Gerade schneidet u und v in zwei conjugirten Punkten. — Den Satz rechts können Sie ganz analog beweisen; seine Richtigkeit folgt aber auch aus dem Princip der Reciprocität.

Ich schliesse diese Reihe von Sätzen mit dem Beweise des folgenden, welcher sich umkehren lässt:

„Wird eine Curve II. Ordnung von zwei conjugirten Strahlen „$\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ geschnitten (Fig. 46), so sind die Schnittpunkte

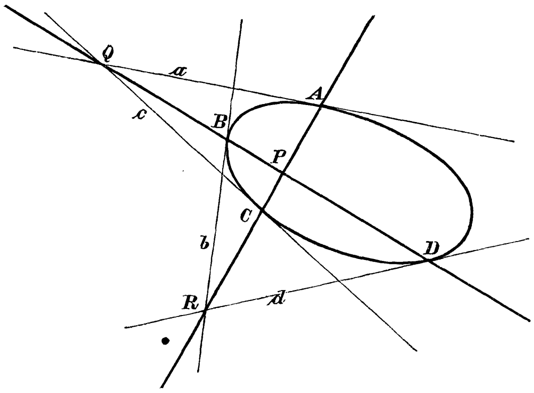

Fig. 46.

„A, B, C, D vier harmonische Punkte, und die Tangenten a, „b, c, d derselben vier harmonische Tangenten der Curve."

Der Pol Q von $\overline{AC}$, in welchem die Tangenten a und c sich schneiden, muss auf der Geraden $\overline{BD}$ liegen, weil diese zu $\overline{AC}$ conjugirt sein soll; ebenso liegt der Schnittpunkt R von b und d

auf $\overline{AC}$. Bezeichnen wir noch mit P den Schnittpunkt von $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, so sind P, B, Q, D vier harmonische Punkte und $\overline{RQ}$, b, $\overline{RP}$, d vier harmonische Strahlen. Also sind auch die Strahlen $\overline{CA}$, $\overline{CB}$, c, $\overline{CD}$ vier harmonische Strahlen, und die Punkte ca, cb, C, cd vier harmonische Punkte; d. h. die Punkte A, B, C, D werden aus C und folglich aus jedem Punkte der Curve durch vier harmonische Strahlen projicirt, und die Tangenten a, b, c, d werden von c und folglich von jeder Tangente in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Alle für die Curve II. Ordnung soeben aufgestellten Sätze lassen sich wieder sofort auf den Kegel II. Ordnung übertragen, weil letzterer durch eine Ebene, die nicht den Mittelpunkt enthält, in einer Curve II. Ordnung geschnitten wird. Ich wiederhole hier nur folgenden Satz:

„Ist in einem Strahlenbündel ein Kegel II. Ordnung und ein „~~ein~~ nicht auf demselben gelegener Strahl s gegeben, und legt „man durch s beliebig viele, den Kegel schneidende Ebenen, „bestimmt sodann:

„1) in jeder Ebene den Strahl, welcher von s durch den Kegel harmonisch getrennt ist,

„2) die gemeinschaftliche Gerade der beiden Ebenen, welche den Kegel in den Schnittlinien jeder Ebene berühren,

„3) in jedem dem Kegel eingeschriebenen Vierkant, dessen Diagonalebenen irgend zwei jener durch s gelegten Ebenen sind, die Schnittlinien der Gegenseiten,

„4) den Berührungsstrahl jeder Berührungsebene, welche durch s an den Kegel gelegt werden kann,

„so liegen alle diese Strahlen in einer Ebene Σ, welche die „Polarebene des Strahles s genannt wird."

Ich überlasse es Ihnen, auch die übrigen Sätze der Polarentheorie auf den Kegel zu übertragen, und bemerke nur noch, dass s der „Polstrahl" der Ebene Σ bezüglich des Kegels II. Ordnung genannt wird.

Neunter Vortrag.

Durchmesser und Axen der Curven zweiter Ordnung. Gleichungen derselben.

Aus den Sätzen über Pol und Polare ergiebt sich:
„Die Halbirungspunkte paralleler Sehnen einer Curve II. Ord-
„nung liegen auf einer Geraden, welche ein Durchmesser der
„Curve genannt wird“ (vergl. Fig. 47).

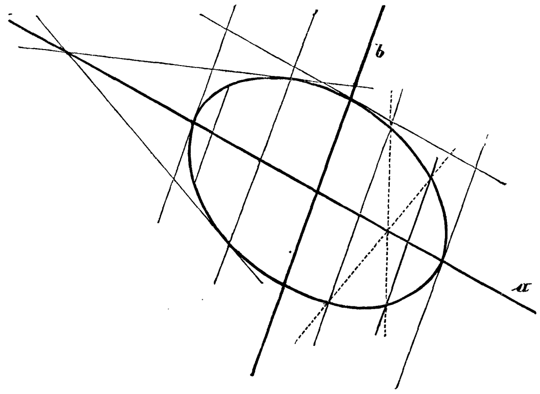

Fig. 47.

Denn da alle diese Halbirungspunkte durch die Curve harmonisch getrennt sind von dem unendlich fernen Punkte der parallelen Sehnen, so liegen sie auf der Polare dieses Punktes. Zugleich ergiebt sich:

Die Polare jedes unendlich fernen Punktes ist ein Durchmesser der Curve II. Ordnung. Derselbe halbirt alle ihm conjugirten Sehnen.

Auf dem Durchmesser liegen auch die Berührungspunkte der beiden ihm conjugirten Tangenten, wenn solche vorhanden sind. Je zwei Tangenten, die in den Endpunkten einer dem Durchmesser conjugirten Sehne die Curve II. Ordnung berühren, schneiden sich in einem Punkte des Durchmessers (Seite 94).

Wir fanden früher (Seite 96), dass die Polaren der Punkte einer Geraden sich im Pole dieser Geraden schneiden. Für die Durchmesser einer Curve II. Ordnung lautet dieser Satz:

Die Durchmesser einer Curve II. Ordnung schneiden sich in einem Punkte, nämlich im Pole der unendlich fernen Geraden.

Ist die Curve eine Parabel, so wird dieselbe von der unendlich fernen Geraden berührt, und der Berührungspunkt selbst ist (nach Seite 95) der Pol der unendlich fernen Geraden; also:

„Die Durchmesser einer Parabel sind parallel, und gehen durch „den unendlich fernen Punkt der Parabel.“

Ist dagegen die Curve eine Ellipse oder Hyperbel, so ist der Pol der unendlich fernen Geraden ein eigentlicher Punkt; derselbe heisst der „Mittelpunkt“ der Curve II. Ordnung, weil ihm folgende Eigenschaft zukommt:

„Jede Sehne einer Curve II. Ordnung, welche durch den Mittel- „punkt geht, wird in letzterem halbirt.“

Der Mittelpunkt nämlich ist von dem unendlich fernen Punkte der Sehne harmonisch getrennt durch die beiden Punkte, welche die Sehne mit der Curve II. Ordnung gemein hat.

Die Parabel hat keinen Mittelpunkt, wie sich aus folgendem Satze ergiebt:

„Wenn zwei Sehnen einer Curve II. Ordnung sich gegenseitig „halbiren, so ist ihr Schnittpunkt der Pol der unendlich fernen „Geraden, und die Sehnen selbst sind folglich Durchmesser der „Curve.“

Die Richtigkeit dieses Satzes erkennen Sie daraus, dass jener Schnittpunkt von den unendlich fernen Punkten der Sehnen durch die Curve harmonisch getrennt ist. Da nun der Pol der unendlich fernen Geraden in Bezug auf eine Parabel identisch ist mit dem unendlich fernen Punkte der Parabel, so giebt es keine zwei Parabelsehnen, die einander halbiren.

„Im Mittelpunkte einer Hyperbel schneiden sich die Asymp- „toten derselben“;

denn durch den Pol einer Geraden gehen allemal die Tangenten derjenigen Punkte, welche die Gerade mit der Curve II. Ordnung gemein hat. — Der Mittelpunkt einer Hyperbel liegt ausserhalb, derjenige der Ellipse innerhalb der Curve (Seite 95).

Zu jedem Durchmesser einer Ellipse oder Hyperbel giebt es einen conjugirten Durchmesser; von zwei conjugirten Durchmessern geht jeder durch den unendlich fernen Pol des anderen.

„Zwei conjugirte Durchmesser einer Ellipse oder Hyperbel „bilden mit der unendlich fernen Geraden allemal ein Poldreieck „der Curve. Jede Sehne der Curve, welche zu dem einen von „zwei conjugirten Durchmessern parallel läuft, wird durch den „anderen halbirt";

denn sie geht durch den Pol des letzteren. Schneidet von zwei conjugirten Durchmessern der eine die Curve, so sind die Tangenten in den beiden Schnittpunkten dem anderen Durchmesser parallel. Hiernach kann zu jedem Durchmesser leicht der conjugirte gefunden werden.

„Von jedem einer Curve II. Ordnung umschriebenen Parallelogramm sind die Diagonalen zwei conjugirte Durchmesser."

„Von jedem einer Curve II. Ordnung eingeschriebenen Parallelogramm sind die Seiten zwei conjugirten Durchmessern „parallel."

Die Diagonalen sowohl des eingeschriebenen als auch des umschriebenen Parallelogramms (Fig. 48) sind Durchmesser der Curve,

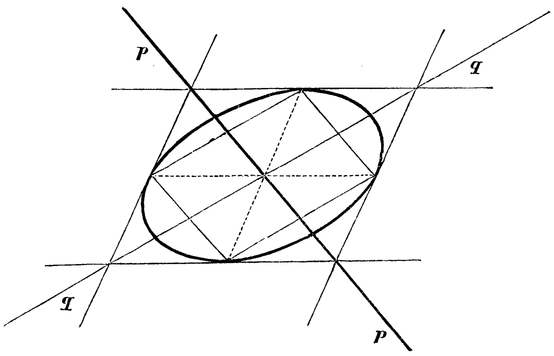

Fig. 48.

weil ihr Schnittpunkt die unendlich ferne Gerade zur Polare hat (Seite 94). Ziehen wir durch diesen Schnittpunkt zwei Parallelen p, q zu den Seiten des eingeschriebenen Parallelogramms, so halbirt jede derselben dasjenige Paar Gegenseiten, welches der anderen parallel ist; p und q sind also zwei conjugirte Durchmesser. Auf p und q liegen auch die Pole der vier Seiten des eingeschriebenen Parallelogramms; oder p und q sind die Diagonalen desjenigen umschriebenen Vierecks, dessen Seiten die Curve II. Ordnung in den Eckpunkten des eingeschriebenen Vierecks berühren. Dieses umschriebene Viereck ist aber ein Parallelogramm, weil die Tangenten an den Endpunkten einer Durchmessersehne parallel sind, und zwar kann es als ein ganz beliebiges, der Curve umschriebenes Parallelogramm betrachtet werden.

Der letzte Satz lässt sich auch so aussprechen:

„Die beiden Sehnen, welche einen beliebigen Punkt einer Ellipse „oder Hyperbel mit den Endpunkten einer Durchmessersehne ver„binden, sind zwei conjugirten Durchmessern der Curve parallel." Sind also von einer Curve II. Ordnung zwei paar conjugirte Durchmesser und ein Punkt gegeben, so kann man leicht fünf weitere Punkte der Curve finden. Man ziehe denjenigen Durchmesser, welcher durch den gegebenen Punkt P geht, und bestimme dessen zweiten Schnittpunkt Q mit der Curve auf Grund des Satzes, dass PQ durch den Mittelpunkt halbirt wird. Ueber PQ als Diagonale construire man ferner zwei Parallelogramme, deren Seiten je einem Paare conjugirter Durchmesser parallel sind; dann liegen die zwei paar neuen Eckpunkte dieser Parallelogramme ebenfalls auf der Curve II. Ordnung. Ebenso können von einer Curve II. Ordnung leicht sechs Tangenten angegeben werden, wenn eine solche und zwei paar conjugirte Durchmesser bekannt sind.

„Wenn je zwei conjugirte Durchmesser einer Curve II. Ordnung „auf einander senkrecht stehen, so „ist die Curve ein Kreis."

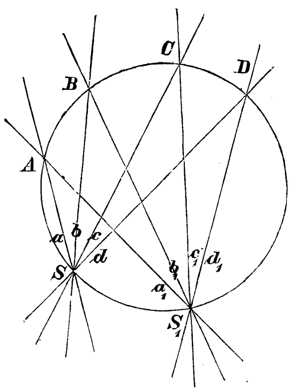

Fig. 49.

Denn in diesem Falle stehen die Seiten jedes eingeschriebenen Parallelogramms senkrecht aufeinander; das Parallelogramm ist also ein Rechteck und seine Diagonalen, d. h. zwei beliebige und somit alle Durchmessersehnen der Curve haben gleiche Länge.

Dass der Kreis eine Curve II. Ordnung ist, folgt auch aus der Eigenschaft desselben, dass Peripheriewinkel, die auf demselben Bogen stehen (wie $\angle ASB$ und $\angle AS_1B$, Fig. 49), gleich sind. Denn hiernach wird der Kreis erzeugt durch zwei Strahlenbüschel S und S_1, die gleich und daher auch projectiv sind. Ebenso lässt sich direct zeigen, dass die Tangenten eines Kreises einen Büschel II. Ordnung bilden. Die Kegelschnitte der Alten, nämlich die Curven, in welchen Kegel mit kreisförmiger Basis durch Ebenen geschnitten werden, sind hiernach Curven II. Ordnung; denn ein Kreiskegel wird aus je zwei seiner Strahlen durch projective Ebenenbüschel projicirt. Wir werden später zeigen, dass nicht blos jeder Kegelschnitt eine Curve II. Ordnung, sondern auch umgekehrt jede Curve II. Ordnung ein Kegelschnitt ist, oder dass durch jede Curve II. Ordnung Kegel gelegt werden können, die kreisförmige Schnittlinien haben.

Da sich die projectiven Eigenschaften des Kreises auf diese einfache Weise ergeben, so haben die meisten Autoren, welche wie Steiner und Chasles die neuere Geometrie durch die Rechnung begründen, den Kreis zum Ausgangspunkt für die Untersuchung der Curven II. Ordnung gewählt. Bei diesem Lehrgange ist jedoch der Nachweis erforderlich, dass durch projective einförmige Grundgebilde keine anderen Curven II. Ordnung als die Kegelschnitte erzeugt werden können. Denn gäbe es noch andere, so müssten für diese alle für den Kreis aufgestellten Sätze noch besonders bewiesen werden, z. B. die Sätze, dass sie aus je zwei ihrer Punkte durch projective Strahlenbüschel projicirt, und dass ihre Tangentenbüschel von je zwei Tangenten in projectiven Punktreihen geschnitten werden. Wenn nämlich auch diese Sätze für den Kreis bewiesen sind, so lassen sie sich direct doch nur auf Schnitte von Kreiskegeln ausdehnen.

„Enthält eine Curve II. Ordnung mehr als ein Paar con-
„jugirter Durchmesser, die aufeinander senkrecht stehen, so ist
„sie ein Kreis."

Denn ziehen wir durch die Endpunkte A und B einer Durchmessersehne Parallelen zu zwei auf einander senkrechten conjugirten Durchmessern, so erhalten wir ein Rechteck, welches der Curve II. Ordnung und zugleich einem Kreise eingeschrieben ist. Jedes zweite Paar rechtwinkliger conjugirter Durchmesser liefert uns ein zweites solches Rechteck über derselben Diagonale $\overline{AB}$. Der Kreis hat also im genannten Falle mit der gegebenen Curve II. Ordnung ausser A und B noch mindestens vier Punkte gemein, und fällt daher ganz mit ihr zusammen (Seite 77).

Stehen zwei conjugirte Durchmesser auf einander senkrecht, so sollen sie die „Axen", und ihre Schnittpunkte mit der Curve II. Ordnung sollen die „Scheitelpunkte" der letzteren heissen.

Nur der Kreis hat mehr als ein Paar Axen, indem je zwei conjugirte Durchmesser ein Axenpaar bilden. Um die Aufgabe zu lösen:

„Von einer Ellipse oder Hyperbel die Axen zu construiren", verfahren wir wie folgt. Wir beschreiben über einem Durchmesser AB der Curve (Fig. 50) aus deren Mittelpunkte einen Kreis, welcher die Tangenten an den Endpunkten jenes Durchmessers und daher auch die Curve schneidet. Jeder von den beiden Halbkreisen, in welche der Kreis durch den Durchmesser zerfällt, liegt dann theilweise innerhalb, theilweise ausserhalb der Curve, und hat daher noch einen Schnittpunkt mit dieser gemein. Die vier Schnittpunkte des Kreises mit der Curve sind die Eckpunkte eines eingeschriebenen Rechtecks, zu dessen Seiten die gesuchten Axen parallel laufen.

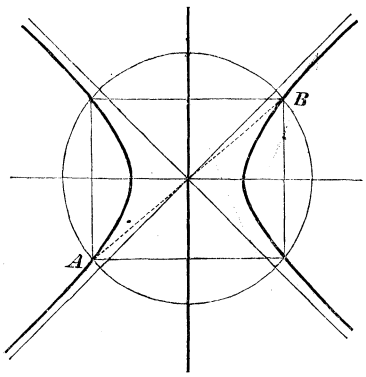

Fig. 50.

Es folgt aus dieser Construction:

„Die Ellipse sowohl wie die Hyperbel hat ein Paar Axen."

Eine Axe kann auch definirt werden als ein Durchmesser der Curve II. Ordnung, welcher senkrecht steht auf den ihm conjugirten und durch ihn halbirten Sehnen. Die Parabel hat nur eine Axe; dieselbe enthält die Mittelpunkte aller Sehnen, welche zu der gemeinschaftlichen Richtung der Durchmesser senkrecht sind. Durch jede Axe zerfällt eine Curve II. Ordnung in zwei symmetrische Hälften.

Zwei conjugirte Gerade sind (Seite 100) harmonisch getrennt durch die beiden Tangenten, welche durch ihren Schnittpunkt an die Curve II. Ordnung gezogen werden können. Also:

„Je zwei conjugirte Durchmesser der Hyperbel sind durch die
„Asymptoten harmonisch getrennt. Der eine derselben schneidet
„daher die Hyperbel, der andere nicht. Die Axen der Hyperbel
„halbiren die Winkel zwischen den Asymptoten" (Seite 46).

Auf jeder Geraden, welche zu dem einen von zwei conjujirten Durchmessern parallel läuft, wird daher von den Asymptoten eine Strecke eingeschlossen, deren Mittelpunkt auf dem anderen Durchmesser liegt (Seite 46). Schneidet oder berührt die Gerade die Curve, so fällt der Mittelpunkt der auf ihr enthaltenen Sehne oder andererseits der Berührungspunkt zusammen mit dem Mittelpunkte jener Strecke. Daher die Sätze (vergl. Fig. 52):

„Auf jeder Secante einer Hyperbel sind die beiden Ab-„schnitte, welche zwischen der Curve und ihren Asymptoten „liegen, einander gleich."

„Der Abschnitt einer Hyperbel-Tangente, welcher zwischen „den Asymptoten liegt, wird im Berührungspunkte halbirt."

Der erste dieser Sätze kann zu einer sehr einfachen Construction einer Hyperbel benutzt werden, von welcher die Asymptoten und ein eigentlicher Punkt gegeben sind. Auf jeder durch den Punkt gelegten Secante kann sofort der zweite Hyperbelpunkt gefunden werden.

Die Hyperbel wird nur von einer ihrer Axen in zwei Scheitelpunkten geschnitten; die Ellipse hat vier Scheitelpunkte, da sie von jeder ihrer beiden Axen geschnitten wird; die Parabel hat nur einen eigentlichen Scheitelpunkt, weil sie von ihrer Axe zum zweiten Male im unendlich fernen Punkte geschnitten wird.

Eine Hyperbel wird g l e i c h s e i t i g genannt, wenn ihre Asymptoten auf einander senkrecht stehen. Die Winkel zwischen je zwei conjugirten Durchmessern der gleichseitigen Hyperbel werden (Seite 46) durch die Asymptoten halbirt. Wenn sonach ein Durchmesser sich um den Mittelpunkt dreht, so dreht sich sein conjugirter Durchmesser in entgegengesetztem Sinne, jedoch so, dass die beiden von den Durchmessern beschriebenen Büschel symmetrisch gleich werden. Die projectiven Strahlenbüschel, durch welche die gleichseitige Hyperbel aus den Endpunkten einer Durchmessersehne projicirt wird, sind auch einander gleich; denn je zwei einander entsprechende Strahlen derselben sind zu zwei conjugirten Durchmessern parallel (Seite 108), weil sie sich in einem Punkte der Hyperbel schneiden.

Wird der Halbirungspunkt D einer Parabelsehne $\overline{AB}$ (Fig. 51) verbunden mit dem Schnittpunkte C der in A und B construirten Tangenten, so ist die Verbindungslinie ein Durchmesser der Parabel: denn sie ist die Polare des unendlich fernen Punktes von $\overline{AB}$ (Seite 93). Nun sind aber C und D harmonisch getrennt durch die beiden Schnittpunkte von $\overline{CD}$ mit der Parabel, und einer dieser Schnittpunkte liegt unendlich fern. Der andere Schnittpunkt E halbirt also die Strecke $\overline{CD}$; oder:

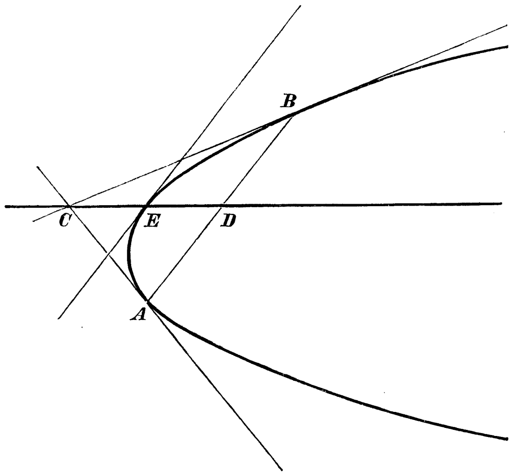

Fig. 51.

„Die Gerade, welche den Pol einer Parabelsehne mit dem „Halbirungspunkte derselben verbindet, wird durch die Parabel „halbirt."

Auf gleiche Weise ergiebt sich, dass durch eine Hyperbel die beiden Geraden halbirt werden, welche parallel zu den Asymptoten aus einem beliebigen Punkte der Ebene an die Polare dieses Punktes gezogen werden können.

Dieses sind die wichtigsten metrischen Beziehungen, welche sich aus der Polarentheorie der Curven II. Ordnung schon jetzt ergeben. Aber auch aus den Sätzen über eingeschriebene und umschriebene Vierecke und Dreiecke lassen sich für diese Curven einige nicht unwichtige metrische Relationen ableiten, insbesondere aus dem Satze (vergl. S. 80):

„Die beiden Diagonalen eines der Curve II. Ordnung umschrie- „benen Vierecks BB_1D_1D schneiden sich in einem Punkte S, „welcher mit den beiden Berührungspunkten von je zwei Gegen- „seiten in einer Geraden liegt."

Ist die Curve eine Hyperbel, und werden (wie in Fig. 52) die zwei Paar Gegenseiten des Vierecks gebildet von den Asymptoten und irgend zwei Tangenten derselben, so liegt S auf der unendlich fernen Geraden und die beiden Diagonalen $\overline{BD_1}$ und $\overline{B_1D}$

laufen parallel. Die Dreiecke D_1DB und D_1B_1B, welche dieselbe Grundlinie D_1B haben, sind folglich inhaltsgleich, und ebenso die

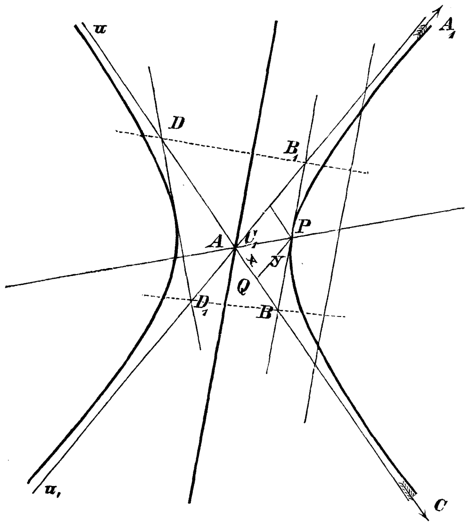

Fig. 52.

Dreiecke D_1AD und B_1AB, welche sich von jenen um das gemeinschaftliche Dreieck D_1AB unterscheiden. Also:

„Die Dreiecke, welche von den Asymptoten einer Hyperbel mit „beliebigen Tangenten derselben gebildet werden, sind inhalts-„gleich."

Die parallelen Diagonalen $\overline{BD_1}$ und $\overline{B_1D}$ und der Mittelpunkt A begrenzen auf den Asymptoten proportionale Abschnitte; wir haben:

$$AB : AD_1 = AD : AB_1 \text{ oder } AB \,.\, AB_1 = AD \,.\, AD_1,$$

d. h. das Product der Abschnitte, welche eine Tangente $\overline{BB_1}$ (oder $\overline{DD_1}$) auf den beiden Asymptoten bildet, ist constant. Wir wollen nun durch den Berührungspunkt P der Tangente eine Parallele PQ zu der einen Asymptote bis an die andere ziehen. Dann ergiebt sich, weil P den Abschnitt BB_1 der Tangente halbirt (Seite 111):

$$QP \text{ oder } y = \tfrac{1}{2}\, AB_1 \text{ und } AQ \text{ oder } x = \tfrac{1}{2}\, AB.$$

Da nun $AB \,.\, AB_1$ sich nicht ändert, wenn die Tangente $\overline{BB_1}$ in andere Lage gebracht wird, so bleibt auch $x \,.\, y$ constant, wo auch der Punkt P auf der Parabel liegen möge. Also:

„Wählt man die Asymptoten einer Hyperbel zu Axen eines „Systems paralleler Coordinaten, so ist die Gleichung der „Hyperbel $xy = \text{Const.}$"

Damit ist die synthetische Theorie der Hyperbel mit der analytischen in Verbindung gebracht.

In den Elementen der analytischen Geometrie pflegt man die Ellipse und die Hyperbel durch Parallel-Coordinaten auf zwei conjugirte Durchmesser zu beziehen. Indem wir dieses Verfahren auf unsere Curven zweiter Ordnung anwenden, beweisen wir ohne grosse Mühe ihre Identität mit den analytisch durch Gleichungen dargestellten Curven zweiten Grades.

Von den conjugirten Durchmessern $\overline{OX}$ und $\overline{OY}$ (Fig. 53) schneidet mindestens der eine, $\overline{OX}$, die Curve II. Ordnung (Seite 110),

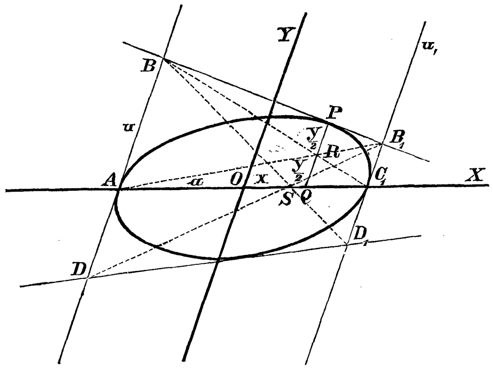

Fig. 53.

und die Tangenten u und u_1 der beiden Schnittpunkte A und C_1 sind dem anderen Durchmesser $\overline{OY}$ parallel. Wir beweisen nun zunächst den Satz:

„Das Product der Strecken AB und C_1B_1, welche eine beliebige „Tangente $\overline{BB_1}$ der Curve II. Ordnung auf den beiden parallelen „Tangenten u und u_1 abschneidet, ist constant."

Nämlich die drei Tangenten bilden mit irgend einer vierten $\overline{DD_1}$ ein der Curve umschriebenes Viereck, dessen Diagonalen $\overline{BD_1}$ und $\overline{B_1D}$ sich in einem Punkte S des Durchmessers AC_1 schneiden, und aus der Proportion $AB : C_1D_1 = AD : C_1B_1$, die daraus sich ergiebt, folgt sofort, dass $AB \,.\, C_1B_1$ gleich $AD \,.\, C_1D_1$, also constant ist. Dieses constante Product ist positiv, etwa $= + b^2$, wenn die Curve eine Ellipse ist; und zwar ist b der auf $\overline{OY}$ liegende Halbmesser der Ellipse, wie man leicht findet, wenn man $\overline{DD_1}$ parallel zu $\overline{OX}$ zieht. Im Fall der Hyperbel ist $AB \,.\, C_1B_1$ negativ, etwa $= -b^2$, weil die Strecken AB und C_1B_1 entgegengesetzten Sinn haben; und b ist die absolute Grösse der Strecken, welche jede der beiden Asymptoten auf den parallelen Tangenten u und u_1 abschneidet.

Die drei Tangenten u, u_1 und $\overline{BB_1}$, von welchen die letztere im Punkte P die Curve berühren möge, bilden nun ein umschriebenes Dreieck, von welchem B, B_1 und der unendlich ferne Punkt des Durchmessers OY die Eckpunkte sind; die drei Geraden, welche diese Eckpunkte mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, schneiden sich folglich in einem Punkte (Seite 80), d. h. der Schnittpunkt R der Geraden $\overline{BC_1}$ und $\overline{B_1A}$ liegt auf der Ordinate y oder PQ des Punktes P. Weil aber:

$$\frac{QR}{AB} = \frac{QC_1}{AC_1} = \frac{PB_1}{BB_1} = \frac{RP}{AB},$$

so muss $QR = RP = \frac{1}{2}\,QP = \frac{1}{2}\,y$ sein.

Die Gleichung der Curve II. Ordnung ergiebt sich nun, wenn wir die beiden Seiten der Gleichungen:

$$\frac{QR}{AB} = \frac{QC_1}{AC_1} \text{ und } \frac{QR}{C_1B_1} = \frac{AQ}{AC_1}$$

mit einander multipliciren und sodann $QR = \frac{1}{2}\,y$, $AB \,.\, C_1B_1 = \pm b^2$, $AC_1 = 2 \,.\, AO = 2\,a$ und $OQ = x$, also auch $QC_1 = a - x$ und $AQ = a + x$ setzen; wir erhalten dann:

$$\pm \frac{y^2}{4b^2} = \frac{a^2 - x^2}{4a^2} \text{ oder } \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

und zwar gilt das obere Vorzeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel. Dieser Gleichung genügen die Coordinaten x, y eines beliebigen Punktes P der Curve II. Ordnung, wenn diese auf zwei conjugirte Durchmesser bezogen wird.

Ist die Curve eine Parabel, so pflegt man zur Ordinatenaxe eine beliebige Tangente $\overline{OY}$ (Fig. 54) zu wählen, und zur Abscissenaxe den Durchmesser $\overline{OX}$, welcher durch den Berührungspunkt O von $\overline{OY}$ geht. Irgend zwei andere Tangenten $\overline{AP}$ und $\overline{AP_1}$, welche $\overline{OY}$ in B und B_1 schneiden, bilden nun zwei Gegenseiten eines Tangentenvierecks, von welchen $\overline{OY}$ und die unendlich ferne Gerade der Ebene die anderen beiden Gegenseiten sind; und der Schnittpunkt S der beiden Diagonalen dieses Vierecks liegt folglich auf den beiden Geraden $\overline{PP_1}$ und $\overline{OX}$, welche die

Berührungspunkte der zwei paar Gegenseiten verbinden. Da hiernach das Viereck $ABSB_1$ ein Parallelogramm ist und die Drei-

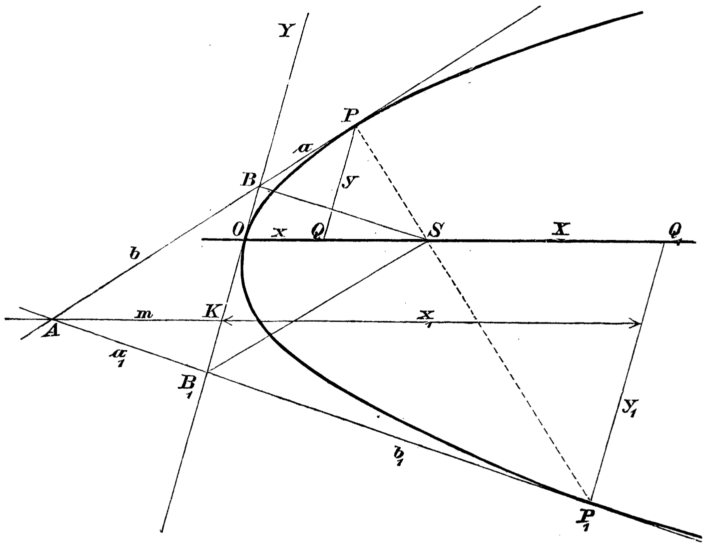

Fig. 54.

ecke BPS und B_1SP_1 ähnlich sind, ausserdem die Ordinaten PQ und Q_1P_1 oder y und y_1 der resp. Punkte P und P_1 parallel laufen, so ergiebt sich:

$$\frac{y}{y_1} = \frac{PS}{SP_1} = \frac{BP}{B_1S} = \frac{BP}{AB} \text{ und ebenso } \frac{y}{y_1} = \frac{BS}{B_1P_1} = \frac{AB_1}{B_1P_1}.$$

Beiläufig folgt hieraus:

$$\frac{BP}{AB} = \frac{AB_1}{B_1P_1} \text{ oder } \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1},$$

also der schon früher bewiesene Satz, dass zwei beliebige Tangenten AP und AP_1 der Parabel von den übrigen proportional getheilt werden.

Ist nun $AK \parallel \overline{OX}$ und K auf $\overline{OY}$ gelegen, so ergiebt sich:

$$\frac{AK}{OQ_1} = \frac{AB_1}{B_1P_1} = \frac{y}{y_1} \text{ und } \frac{OQ}{AK} = \frac{BP}{AB} = \frac{y}{y_1},$$

und hieraus durch Multiplication:

$$\frac{OQ}{OQ_1} = \frac{y^2}{y_1^2} \text{ oder } \frac{x}{x_1} = \frac{y^2}{y_1^2};$$

d. h. „die Abscissen x und x_1 der beiden Parabelpunkte P und P_1
„verhalten sich zu einander wie die Quadrate der Ordinaten.“
Gewöhnlich schreibt man diese Gleichung der Parabel in der Form $y^2 = 2\,p\,x$, indem man $\frac{y_1^2}{x_1} = 2\,p$ setzt.

Zehnter Vortrag.

Regelschaaren und Regelflächen zweiter Ordnung.

Durch projective einförmige Grundgebilde, welche entweder in derselben Ebene liegen, oder demselbem Strahlenbündel angehören, gelangen wir zu den Curven, Büscheln und Kegeln II. Ordnung. Wir wollen jetzt untersuchen, ob zwei beliebig zu einander liegende, projective Grundgebilde erster Stufe nicht noch andere als die genannten Gebilde II. Ordnung erzeugen können. Zunächst finden wir:

Ein Strahlenbüschel S erzeugt mit einer zu ihm projectiven Punktreihe u denselben Ebenenbüschel I. oder II. Ordnung wie mit dem Büschel, durch welchen u aus dem Mittelpunkte von S projicirt wird. Denn die Ebene, welche irgend einen Punkt von u mit dem entsprechenden Strahle des ersteren Büschels verbindet, geht auch durch den entsprechenden Strahl des letzteren.

Ein Strahlenbüschel S erzeugt mit einem zu ihm projectiven Ebenenbüschel u dieselbe Punktreihe I. oder II. Ordnung wie mit dem Büschel, in welchem u durch die Ebene von S geschnitten wird. Denn der Punkt, in welchem irgend eine Ebene von u von dem entsprechenden Strahle des ersteren Büschels geschnitten wird, liegt auch auf dem entsprechenden Strahle des letzteren.

Zwei projective Strahlenbüschel, die beliebig im Raume liegen, erzeugen (wenigstens unmittelbar) kein neues Gebilde. Denn im Allgemeinen liegen zwei beliebige, einander entsprechende Strahlen nicht in einer Ebene, haben also auch keinen Schnittpunkt gemein. Ebenso erzeugen eine Punktreihe und ein zu derselben projectiver

Ebenenbüschel kein neues Gebilde, weil ein Punkt des ersteren mit der entsprechenden Ebene des letzteren kein drittes Element bestimmt.

Neue Gebilde erhalten wir folglich nur noch durch zwei projective Punktreihen oder Ebenenbüschel, die beliebig im Raume liegen. Seien u und u_1 zwei projective Punktreihen, die nicht in einer Ebene liegen, so erzeugen dieselben eine Schaar von Strahlen V, von denen jeder zwei homologe Punkte der Punktreihen verbindet. Keine zwei Gerade dieser „Regelschaar" liegen in einer Ebene; denn sonst würden zwei Punkte von u und ebenso zwei Punkte von u_1 in der Ebene liegen und folglich u und u_1 selbst, gegen die Annahme. Die sämmtlichen Strahlen der Regelschaar erfüllen eine krumme Fläche (Figg. 55 und 56), welche eine „Regelfläche" genannt wird, und folgende Eigenschaften hat:

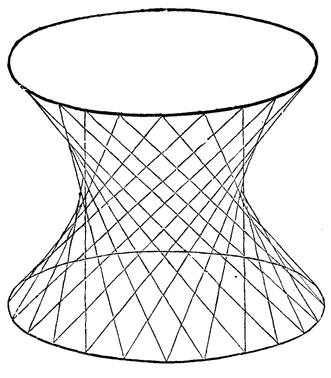

Fig. 55.

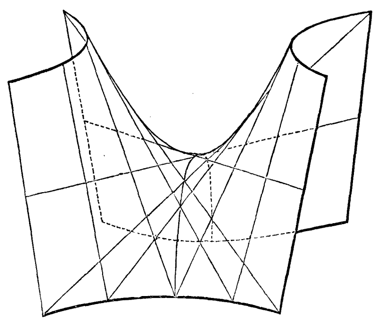

Fig. 56.

„Die Regelfläche wird noch von einer zweiten Schaar U von „Geraden erfüllt. Jede Gerade der einen Schaar wird von jeder „Geraden der anderen Schaar geschnitten; dagegen liegen keine „zwei Gerade aus einer und derselben Schaar in einer Ebene."

Jeder Punkt, welcher auf einem Strahle der einen Schaar liegt, ist auch auf einem Strahle der anderen Schaar enthalten.

Jede Ebene, welche durch einen Strahl der einen Schaar geht, enthält auch einen Strahl der anderen Schaar.

Seien nämlich v, v_1, v_2 irgend drei Strahlen der Schaar V, so dass jeder dieser Strahlen zwei einander entsprechende Punkte von u und u_1 verbindet, und sei u_2 eine Gerade, welche ebenfalls jene drei Strahlen v, v_1, v_2 schneidet. Projiciren wir dann die Punktreihen u und u_1 aus der Axe u_2, so erhalten wir zwei projective Ebenenbüschel, welche drei Ebenen $\overline{u_2 v}$, $\overline{u_2 v_1}$ und $\overline{u_2 v_2}$, und folglich alle ihre Ebenen entsprechend gemein haben (vergl. Seite 56). Somit liegen je zwei homologe Punkte von u und u_1 mit u_2 in einer Ebene, und u_2 wird daher von jedem Strahle der Regelschaar V geschnitten. Dasselbe gilt von jeder anderen Geraden u_3, welche die drei Strahlen v, v_1, v_2 schneidet. Also:

„Die Regelschaar U besteht aus allen Geraden, welche drei be-„liebige Strahlen v, v_1, v_2 der Regelschaar V schneiden. Ebenso „besteht die Schaar V aus allen Geraden, welche drei Strahlen „u, u_1, u_2 der Schaar U schneiden."

Jeder Strahl der einen Schaar soll ein „Leitstrahl" der anderen Schaar heissen; jede der beiden Schaaren heisst die „Leitschaar" der anderen.

Die Regelfläche kann also in doppelter Weise durch eine Gerade beschrieben werden, indem diese an drei festen Geraden, von denen keine zwei in einer Ebene liegen, hingleitet. Die drei festen Geraden sind Leitstrahlen der Regelschaar, welche von der beweglichen Geraden beschrieben wird. Jeden Punkt eines Leitstrahls trifft die bewegliche Gerade einmal; und in jede Ebene, welche durch einen Leitstrahl gelegt werden kann, fällt sie einmal hinein (vergl. Seite 27). Die vorhin aufgestellten Sätze sind hierdurch bewiesen.

Zwei projective Ebenenbüschel u und u_1, deren Axen nicht in einer Ebene liegen, erzeugen ebenfalls eine Regelschaar V. Dieselbe erhalten wir auch mittelst der projectiven Punktreihen u, u_1, von denen die erstere ein Schnitt des Büschels u_1 mit der Geraden u ist, und die letztere ein Schnitt des Büschels u mit der Geraden u_1. Denn jede Gerade, in welcher zwei entsprechende Ebenen jener Büschel sich schneiden, verbindet auch zwei entsprechende Punkte dieser Punktreihen.

Eine Regelschaar wird von je zwei ihrer Leitstrahlen in projectiven Punktreihen geschnitten.	Eine Regelschaar wird aus je zwei ihrer Leitstrahlen durch projective Ebenenbüschel projicirt.

Denn seien w, w_1, w_2 drei Leitstrahlen der Regelschaar, so dass jeder Strahl der letzteren von w, w_1, w_2 geschnitten wird. Wir erhalten alsdann beliebig viele Strahlen der Regelschaar, indem wir entweder durch w_2 beliebig viele Ebenen legen, und in jeder derselben die beiden Punkte verbinden, in welchen w und w_1

von ihr geschnitten werden, oder indem wir in w_2 beliebig viele Punkte annehmen, und die Schnittlinie der beiden Ebenen aufsuchen, welche jeder dieser Punkte mit w und w_1 bestimmt. Die Regelschaar wird also von den beiden Leitstrahlen w und w_1 in zwei Punktreihen geschnitten, welche zu dem Ebenenbüschel w_2 perspectiv liegen; zugleich wird sie aus w und w_1 durch zwei Ebenenbüschel projicirt, welche zu der Punktreihe w_2 perspectiv liegen, und folglich projectiv sind.

„Vier Strahlen einer Regelschaar sollen harmonische „Strahlen genannt werden, wenn sie von einem und folglich „von jedem Leitstrahle der Schaar in vier harmonischen Punkten „geschnitten, also auch aus jedem Leitstrahle durch vier harmonische Ebenen projicirt werden.“

Sind nämlich w und w_1 zwei Leitstrahlen der Regelschaar, so sind durch letztere die Punktreihen w und w_1 projectiv auf einander bezogen; und wenn irgend vier Strahlen der Regelschaar von w in harmonischen Punkten geschnitten werden, so sind folglich auch ihre Schnittpunkte mit w_1 vier harmonische. Zugleich aber werden die vier Strahlen aus w_1 durch vier harmonische Ebenen projicirt; denn diese Ebenen gehen durch die vier in w liegenden harmonischen Schnittpunkte.

Durch drei Strahlen a, b, c im Raume, von denen keine zwei in einer Ebene liegen, ist ein vierter harmonischer Strahl d bestimmt, welcher von einem jener drei, z. B. von b, getrennt ist. Suchen wir auf irgend einer Geraden, welche die drei gegebenen schneidet, zu den Schnittpunkten den vierten harmonischen Punkt, so liegt dieser auf d. Ueberhaupt ist d ein vierter Strahl der Regelschaar, zu welcher die Strahlen a, b, c gehören, und ist in dieser durch a und c harmonisch getrennt von b.

Wenn eine Gerade mehr als zwei Punkte mit einer Regelfläche gemein hat, so fällt sie ganz in letztere hinein; denn sie schneidet dann mehr als zwei Gerade der einen Schaar, muss also ein Leitstrahl dieser Schaar sein und der zweiten Regelschaar angehören. Wegen dieser Eigenschaft wird die Regelfläche zum Unterschiede von anderen geradlinigen Flächen auch wohl eine „Regelfläche zweiter Ordnung“ genannt. Eine Ebene, welche die Regelfläche in einem Strahle u der einen Schaar und folglich (nach Seite 118) auch noch in einem Strahle v der anderen Schaar schneidet, hat deshalb ausser den Geraden u und v keinen Punkt P mit der Fläche gemein. Denn sonst würde jede Gerade, welche durch P geht, und u und v in je einem Punkte schneidet, der Regelfläche angehören, die ganze Ebene also mit letzterer zusammenfallen, was unmöglich ist. Da nun jede dritte Gerade der Ebene, welche durch den Schnittpunkt von u und v hindurchgeht, nur diesen Schnittpunkt $\dot{u}v$ mit der Regelfläche gemein hat, also dieselbe berührt, so wollen wir sagen, „die Regelfläche werde von der Ebene im Punkte $\dot{u}v$ berührt".

„Die Anzahl der Berührungsebenen, die durch eine Gerade an „die Regelfläche gelegt werden können, ist gleich der Anzahl „der Punkte, welche die Gerade mit der Regelfläche gemein „hat. Die Regelfläche ist von der zweiten Classe".

Denn da in jeder solchen Berührungsebene ein Strahl der einen (und auch ein Strahl der anderen) Regelschaar enthalten ist, so hat die gegebene Gerade mit diesem Strahle einen Schnittpunkt gemein. Es fallen aber keine zwei solche Schnittpunkte auf einander, weil keine zwei Strahlen einer Regelschaar in einerlei Ebene liegen. Daraus folgt, dass eine Gerade ganz in die Regelfläche hineinfällt, wenn in ihr mehr als zwei Berührungsebenen derselben sich schneiden.

Denken Sie sich eine Regelschaar durch zwei projective Ebenenbüschel erzeugt, und diese durch eine beliebige Ebene Σ geschnitten, so erhalten Sie in der Ebene zwei projective Strahlenbüschel, und jeder Schnittpunkt von irgend zwei homologen Strahlen der letzteren liegt auf einem Strahle der Regelschaar. Denken Sie sich dagegen die Regelschaar durch zwei projective Punktreihen erzeugt, und projiciren Sie diese aus einem beliebigen Punkte S, so erhalten Sie zwei concentrische projective Strahlenbüschel, und jede Verbindungsebene von irgend zwei homologen Strahlen der letzteren geht durch einen Strahl der Regelschaar. Daraus ergiebt sich der erste Theil der Sätze:

Eine Regelschaar wird durch jede Ebene Σ, welche keinen Strahl derselben enthält, in einer Curve II. Ordnung geschnitten. Die Ebenen, welche die Regelfläche in den Punkten einer solchen Curve II. Ordnung berühren, bilden einen Ebenenbüschel II Ordnung.

Eine Regelschaar wird aus jedem Punkte S, welcher auf keinem Strahle derselben liegt, durch einen Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt. Die Punkte, in welchen die Regelfläche von den Ebenen eines solchen Büschels berührt wird, liegen auf einer Curve II. Ordnung.

Um die zweite Hälfte zunächst des Satzes rechts zu beweisen, legen wir durch drei von den Berührungspunkten eine Ebene. Dieselbe schneidet den Ebenenbüschel in einem Strahlenbüschel II. Ordnung, von welchem jene drei Punkte Berührungspunkte sind, und welcher eine Curve II. Ordnung einhüllt. Aber diese Curve II. Ordnung ist identiseh mit derjenigen, in welcher die Regelfläche von der Ebene geschnitten wird, weil beide Curven die drei Berührungspunkte und deren drei Tangenten gemein haben. Ganz analog wird der Satz links bewiesen, indem man durch den Schnittpunkt von irgend drei Berührungsebenen einen Büschel von Berührungsebenen an die Regelfläche legt.

Eine Regelfläche II. Ordnung soll ein „einfaches oder einschaliges Hyperboloid" heissen (Fig. 55), wenn sie keine unendlich ferne Gerade enthält, sondern mit der unendlich fernen Ebene eine Curve II. Ordnung gemein hat. Dagegen wird sie ein „hyperbolisches Paraboloid" genannt (Fig. 56), wenn die eine und folglich (Seite 118) jede ihrer beiden Regelschaaren einen unendlich fernen Strahl besitzt. Jede der beiden Regelschaaren eines hyperbolischen Paraboloides wird von je zwei ihrer Leitstrahlen in projectiv „ähnlichen" Punktreihen geschnitten, deren unendlich ferne Punkte einander entsprechen. Ein hyperbolisches Paraboloid wird auch beschrieben durch eine Gerade, welche an zwei „windschiefen," d. h. sich nicht schneidenden, festen Geraden u und u_1 hingleitet, dabei aber einer festen Ebene parallel bleibt, welche die Richtung von u oder u_1 nicht enthält. Denn die bewegliche Gerade schneidet nicht nur u und u_1, sondern ausserdem die unendlich ferne Gerade der gegebenen Ebene; sie beschreibt also eine Regelfläche, welche einen und folglich noch einen zweiten unendlich fernen Strahl enthält. Das hyperbolische Paraboloid wird von jeder Ebene, welche durch keinen Strahl desselben geht, in einer Hyperbel, und nur wenn die Ebene eine ganz bestimmte Richtung enthält, in einer Parabel geschnitten. Die Schnittcurve II. Ordnung geht nämlich durch die beiden Punkte, in welchen die unendlich fernen Strahlen der Fläche von der Ebene geschnitten werden, und diese Punkte fallen nur dann zusammen, wenn die Ebene den gemeinschaftlichen Punkt der unendlich fernen Strahlen enthält.

Das einschalige Hyperboloid wird nicht, wie das hyperbolische Paraboloid, von der unendlich fernen Ebene berührt, sondern von derselben in einer Curve II. Ordnung geschnitten. Die Berührungsebenen in den unendlich fernen Punkten des Hyperboloides sind daher sämmtlich eigentliche Ebenen, welche (nach Seite 121) sich in einem Punkte S schneiden und einen Ebenenbüschel II. Ordnung bilden. Der von letzterem eingehüllte Kegel S II. Ordnung schmiegt sich dem Hyperboloid an in seiner unendlich fernen Curve, und wird der „Asymptotenkegel" desselben genannt. Jeder Strahl des Asymptotenkegels läuft zu je einem Strahle der beiden Regelschaaren parallel, indem er den unendlich fernen Punkt desselben enthält. Eine beliebige Ebene, welche durch keinen Strahl des einfachen Hyperboloides hindurchgeht, schneidet dasselbe in einer Hyperbel, Parabel oder Ellipse, jenachdem sie mit der unendlich fernen Curve des Hyperboloides zwei Punkte, einen oder keinen Punkt gemein hat, oder was dasselbe ist, jenachdem sie zu zwei Strahlen, oder nur zu einem oder zu keinem Strahle des Asymptotenkegels parallel ist.

Ich füge noch folgenden Satz hinzu, der sich aus dem Bisherigen ergiebt:

„Wird zu jedem Strahle einer Regelschaar eine Parallele durch „einen beliebig gegebenen Punkt gelegt, so liegen alle diese „Parallelen in einer Asymptoten-Ebene oder in einem Kegel „II. Ordnung, jenachdem die Regelschaar einem hyperboli„schen Paraboloid oder einem einschaligen Hyperboloid an„gehört."

Ein hyperbolisches Paraboloid wird „gleichseitig" genannt, wenn die Strahlen seiner beiden Regelschaaren zu zwei auf einander senkrechten Ebenen parallel laufen. Jede Regelschaar des gleichseitigen Paraboloides enthält einen Strahl, welcher die Leitebene und damit jeden Strahl der anderen Schaar rechtwinklig schneidet.

Eilfter Vortrag.

Projective Verwandtschaft von Elementargebilden.

Durch projective einförmige Grundgebilde können fünf Gebilde zweiter Ordnung erzeugt werden, wie wir gesehen haben, nämlich die Curve oder Punktreihe II. Ordnung, der Strahlen-und der Ebenenbüschel II. Ordnung, der Kegel II. Ordnung und die Regelschaar. Es ist zweckmässig, mit von Staudt diese fünf Gebilde II. Ordnung und die drei einförmigen Grundgebilde zusammenzufassen unter dem gemeinschaftlichen Namen Elementargebilde. Zu den Elementargebilden gehören dann zwei Punktgebilde, nämlich die Punktreihen I. und II. Ordnung, ferner zwei Ebenengebilde, nämlich die Ebenenbüschel I. und II. Ordnung, und endlich vier Strahlengebilde, nämlich die Strahlenbüschel I. und II. Ordnung, der Kegel II. Ordnung und die Regelschaar.

Mein gegenwärtiger Vortrag nun wird Ihnen zeigen, dass wir auch diese Elementargebilde in analoger Weise auf einander beziehen können wie die einförmigen Grundgebilde. Das Gebiet unserer Untersuchungen erweitert sich dadurch bedeutend; namentlich erkennen Sie sofort, dass wir auf diese Weise zu einer grossen Anzahl neuer Punkt-, Strahlen- und Ebenen-Gebilde gelangen, die ebenso bemerkenswerthe Eigenschaften besitzen, wie die bisher betrachteten. Zugleich aber werden wir zu weiteren wichtigen Sätzen über die Gebilde II. Ordnung geführt, welche auf anderem Wege schwerlich so leicht sich ergeben möchten.

Zunächst erinnere ich Sie an folgende früher aufgestellte Sätze, welche auch als Definitionen der harmonischen Elemente in Gebilden II. Ordnung aufgefasst werden können:

Vier harmonische Punkte einer Curve II. Ordnung werden aus jedem fünften Punkte der Curve durch vier harmonische Strahlen projicirt (Seite 76).

Vier harmonische Strahlen eines Kegels II. Ordnung werden aus jedem fünften Strahle des Kegels durch vier harmonische Ebenen projicirt (Seite 87).

Vier harmonische Ebenen eines Ebenenbüschels II. Ordnung werden von jeder fünften Ebene des Büschels in vier harmonischen Strahlen geschnitten (Seite 87).

Vier harmonische Strahlen eines Strahlenbüschels II. Ordnung werden von jedem fünften Strahle des Büschels in vier harmonischen Punkten geschnitten (Seite 76).

„Vier harmonische Strahlen einer Regelschaar werden von „jedem Leitstrahle der Schaar in vier harmonischen Punkten „geschnitten, und aus jedem Leitstrahle durch vier harmonische „Ebenen projicirt“ (Seite 120).

Wir können nun die früher (Seite 52) aufgestellte Definition der projectiven Verwandtschaft von Grundgebilden auch auf die Elementargebilde überhaupt ausdehnen, indem wir sagen:

Zwei Elementargebilde heissen projectiv, wenn sie so auf einander bezogen sind, dass je vier harmonischen Elementen des einen Gebildes vier harmonische Elemente des anderen entsprechen. Es folgt aus dieser Definition, dass zwei Elementargebilde zu einander projectiv sind, sobald sie zu einem und demselben dritten projectiv sind.

Auch den Begriff der perspectiven Lage einförmiger Grundgebilde können wir ausdehnen auf Elementargebilde überhaupt, indem wir sagen:

Zwei ungleichartige projective Elementargebilde heissen perspectiv, wenn jedes Element des einen in dem entsprechenden Elemente des anderen liegt.

Eine Punktreihe II. Ordnung z. B. liegt perspectiv zu einem durch sie gehenden Kegel, wenn jedem Strahle des letzteren der auf ihm liegende Punkt der ersteren zugewiesen ist. Eine Punktreihe II. Ordnung wird ferner aus jedem ihrer Punkte durch einen zu ihr perspectiven Strahlenbüschel projicirt; ein Strahlenbüschel II. Ordnung wird von jedem seiner Strahlen in einer zu ihm perspectiven Punktreihe geschnitten, und ebenso eine Regelschaar von jedem ihrer Leitstrahlen, u. s. w. Denn zwei Elementargebilde, von welchen das eine mittelst des anderen in solcher Weise erzeugt ist, sind projectiv, weil vier harmonischen Elementen des einen allemal vier harmonische Elemente des anderen entsprechen. Wird jedem Punkte einer Curve II. Ordnung seine Tangente zugewiesen, so ist die Curve auf den sie einhüllenden Strahlenbüschel perspectiv bezogen; denn in je vier harmonischen Punkten wird die Curve von vier harmonischen Strahlen des Büschels berührt (Seite 86). Zwei Curven II. Ordnung sind daher projectiv auf einander bezogen, wenn die beiden sie einhüllenden Strahlenbüschel zu einander projectiv sind.

Zwei Gebilde II. Ordnung können dadurch projectiv auf einander bezogen werden, dass man zwei zu ihnen perspective einförmige Grundgebilde projectiv auf einander bezieht. Zwei projective Elementargebilde können folglich (nach Seite 62) stets als erstes und letztes in einer Reihe von Elementargebilden betrachtet werden, deren jedes zum folgenden perspective Lage hat. Auch können zwei Elementargebilde auf eine einzige Art projectiv auf einander bezogen werden, so dass drei gegebenen Elementen des einen beziehungsweise drei gegebene Elemente des andern entsprechen; denn dieser Satz ist für einförmige Grundgebilde bereits bewiesen.

Sollen z. B. zwei Punktreihen II. Ordnung k und k_1 (Fig. 57), die in einer Ebene liegen, projectiv so auf einander bezogen wer-

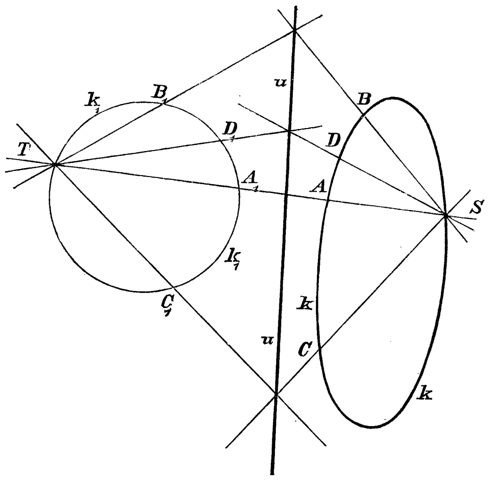

Fig. 57.

den, dass den Punkten A, B, C von k die resp. Punkte A_1, B_1, C_1 von k_1 entsprechen, so bezeichnen wir mit S und T_1 die beiden Punkte von k und k_1, welche aus A resp. A_1 durch den Strahl $\overline{AA_1}$ projicirt werden, und projiciren sodann die Punktreihen aus S und T_1 durch zwei Strahlenbüschel $S\ (ABC\ldots)$ und $T_1(A_1B_1C_1\ldots)$. Letztere sind zu den Punktreihen und folglich zu einander projectiv und liegen, weil sie den Strahl $\overline{AA_1}$ entsprechend gemein haben, perspectiv. Je zwei homologe Punkte D und D_1 der beiden Punktreihen werden also aus S resp. T_1 durch zwei Strahlen projicirt, die sich auf einer bestimmten Geraden u schneiden.

„Wenn zwei gleichartige projective Elementargebilde, z. B. „zwei Punktreihen II. Ordnung, in einander liegen, so haben „sie entweder alle oder höchstens zwei Elemente entsprechend „gemein.“

Denn identische Elementargebilde sind zugleich projectiv.

Zwei Curven II. Ordnung, die in derselben Ebene liegen und	Zwei Curven II. Ordnung, die in derselben Ebene liegen und

einen Punkt S gemein haben, sind projectiv auf einander bezogen, wenn je zwei Punkte derselben einander zugewiesen werden, die mit S in einer Geraden liegen. Denn beide Curven sind alsdann perspectiv zu dem Strahlenbüschel S. Jeden von S verschiedenen gemeinschaftlichen Punkt haben die Curven entsprechend gemein; den Punkt S jedoch nur dann, wenn sie in ihm eine gemeinschaftliche Tangente haben, also sich in S berühren.

eine gemeinschaftliche Tangente s haben, sind projectiv auf einander bezogen, wenn je zwei Tangenten derselben einander zugewiesen werden, die sich in einem Punkte von s schneiden. Denn die Büschel II. Ordnung, welche die Curven einhüllen, sind alsdann perspectiv zu der Punktreihe s. Die Curven haben jede von s verschiedene gemeinschaftliche Tangente entsprechend gemein; s selbst aber nur dann, wenn sie sich in einem Punkte von s berühren.

Zwei von einander verschiedene Curven II. Ordnung, welche in der links angegebenen Weise auf einander bezogen sind, haben höchstens drei Punkte entsprechend gemein. Denn wenn sie ausser S noch vier gemeinschaftliche Punkte haben, oder anderseits noch drei gemeinschaftliche Punkte und eine gemeinschaftliche Tangente in S, so sind sie identisch (nach Seite 77). Ebenso können rechts die beiden Curven höchstens drei Tangenten entsprechend gemein haben. Wir werden so zu dem Doppelsatze geführt:

Wenn zwei projective Curven II. Ordnung vier Punkte A, B, C, S entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Punkte entsprechend gemein, und sind folglich identisch.

Wenn zwei projective Curven II. Ordnung vier Tangenten entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Tangenten entsprechend gemein, und sind folglich identisch.

Wir beweisen den Satz links wie folgt. Die beiden Curven können nur auf eine einzige Art so auf einander bezogen werden, dass den drei Punkten A, B, C der einen dieselben drei Punkte A, B, C der anderen entsprechen. Dieses geschieht aber, indem wir beide Curven auf den Strahlenbüschel S perspectiv beziehen. Sollen nun die Curven auch den Punkt S entsprechend gemein haben, so haben sie in ihm eine gemeinschaftliche Tangente und sind folglich identisch (Seite 77). — Der Satz rechts ergiebt sich aus dem anderen mittelst des Princips der Reciprocität, welches wir ja für die Ebene bereits bewiesen haben; doch kann ich Ihnen als nützliche Uebung nur empfehlen, einen directen Beweis für denselben aufzusuchen.

Werden die Curven aus einem beliebigen Mittelpunkte durch zwei projective Kegel projicirt, so erhalten wir für diese einen ganz analogen Doppelsatz. Ist eine Curve II. Ordnung projectiv zu einer Regelschaar oder einem Kegel II. Ordnung, und liegen mehr als drei Punkte der Curve auf den ihnen entsprechenden Strahlen, so ist die Curve perspectiv zu der Regelschaar oder Kegelfläche; denn sie ist identisch mit dem Schnitte derselben, welcher in ihrer Ebene liegt, weil sie zu demselben projectiv ist und mit ihm mehr als drei Punkte entsprechend gemein hat. Ebenso hat ein Ebenenbüschel II. Ordnung zu einem Strahlenbüschel II. Ordnung oder zu einer Regelschaar, die zu ihm projectiv sind, perspective Lage, wenn mehr als drei seiner Ebenen durch die ihnen entsprechenden Strahlen gehen. Projiciren wir nämlich das Strahlengebilde II. Ordnung aus dem Mittelpunkte des Ebenenbüschels, so erhalten wir einen zweiten Ebenenbüschel II. Ordnung, welcher mit dem ersten identisch ist; denn er ist zu demselben projectiv, und hat mehr als drei Ebenen mit ihm entsprechend gemein.

Hierher gehört auch der Beweis der Sätze:

Zwei Kegel II. Ordnung, welche verschiedene Mittelpunkte haben, und in der Verbindungslinie s ihrer Mittelpunkte von einer und derselben Ebene berührt werden, schneiden sich in einer Curve II. Ordnung.

Beziehen wir nämlich die Kegel perspectiv auf den Ebenenbüschel s, so haben sie den Strahl s entsprechend gemein; je zwei andere homologe Strahlen der Kegel aber haben einen Punkt gemein, weil sie in einer (durch s gehenden) Ebene liegen. Die Verbindungsebene von irgend drei Schnittpunkten homologer Strahlen schneidet die Kegel in zwei projectiven Curven II. Ord-

Zwei Curven II. Ordnung, welche in verschiedenen Ebenen liegen, und die Schnittlinie s ihrer Ebenen in einem und demselben Punkte berühren, liegen auf einem Kegel II. Ordnung.

Beziehen wir die Strahlenbüschel II. Ordnung, welche die Curven umhüllen, perspectiv auf die Punktreihe s, so haben sie den Strahl s entsprechend gemein (vergl. Seite 127); je zwei andere homologe Strahlen der Büschel liegen in einer Ebene, weil sie sich auf s schneiden. Aus dem Schnittpunkte von irgend drei Verbindungsebenen homologer Strahlen werden die nung, welche identisch sind, weil sie nicht nur jene drei Schnittpunkte, sondern auch einen Punkt von s entsprechend gemein haben.

Büschel durch zwei projective Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt, welche identisch sind, weil sie jene drei Ebenen sowie eine durch s gehende Ebene entsprechend gemein haben.

Einfacher noch lässt sich der Beweis so führen. Legen wir links durch drei gemeinschaftliche Punkte der Kegel eine Ebene, so haben die beiden in ihr liegenden Schnittcurven diese drei Punkte gemein, ausserdem aber den Schnittpunkt von s mit der Ebene. Und da beide Curven in letzterem Punkte von der Geraden berührt werden, in welcher die gemeinschaftliche Berührungsebene der Kegel geschnitten wird, so fallen diese Schnittcurven zusammen (Seite 77). Aehnlich ergiebt sich der Satz rechts.

Beiläufig folgt noch, dass jede Curve II. Ordnung auch als Schnitt von Kreiskegeln betrachtet werden kann. Denn man kann auf unzählige Arten einen Kreis und eine gegebene Curve II. Ordnung in solche Lage bringen, dass sie sich berühren aber verschiedene Ebenen haben, also auch auf einem und demselben Kegel liegen. Die Curven II. Ordnung sind also mit den „Kegelschnitten" der Alten identisch, und dürfen deshalb im Folgenden auch mit diesem Namen bezeichnet werden.

Wenn ein Büschel S I. Ordnung mit einer zu ihm projectiven Curve σ II. Ordnung in einer Ebene, jedoch nicht zu derselben perspectiv liegt, so gehen höchstens drei Strahlen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte der Curve, mindestens aber ein Strahl.

Wenn eine Punktreihe I. Ordnung mit einem zu ihm projectiven Strahlenbüschel II. Ordnung in einer Ebene, jedoch nicht zu demselben perspectiv liegt, so liegen höchstens drei Punkte der Punktreihe auf den ihnen entsprechenden Strahlen des Büschels, mindestens aber ein Punkt.

Denn jeder zu der Curve σ perspective Büschel S_1 ist zu dem Büschel S projectiv, und erzeugt mit ihm im Allgemeinen eine zweite Curve II. Ordnung, die mit der ersten jeden Punkt gemein haben muss, welcher auf dem ihm entsprechenden Strahle von S liegt. Gehen also mehr als drei Strahlen von S durch ihre entsprechenden Punkte von σ, so haben die beiden Curven ausser S_1 noch mindestens vier Punkte gemein, sind also identisch, und S liegt perspectiv zu σ. — Da jede Curve II. Ordnung ihre

Ebene in zwei getrennte Theile zerlegt, so müssen die beiden Curven, falls sie nicht zusammenfallen, sich entweder in ihrem gemeinschaftlichen Punkte S_1 berühren, oder in S_1 und mindestens einem zweiten Punkte P schneiden, indem die eine Curve theils innerhalb, theils ausserhalb der anderen liegt. Im letzteren Falle entsprechen die Strahlen $\overline{SP}$ und $\overline{S_1P}$ einander, und $\overline{SP}$ geht folglich durch den ihm entsprechenden Punkt P der Curve σ; im ersteren Falle entspricht dem Strahle $\overline{SS_1}$ von S die gemeinschaftliche Tangente in S_1 und folglich der auf $\overline{SS_1}$ liegende Punkt S_1 der Curve σ. Also liegt mindestens ein Punkt der Curve auf dem ihm entsprechenden Strahle des Büschels.

Ganz analoge Sätze gelten für die Gebilde I. und II. Ordnung im Strahlenbündel. Wir ziehen daraus den Schluss:

Sind ein einförmiges Grundgebilde und ein Elementargebilde II. Ordnung projectiv auf einander bezogen, und gehen mehr als drei Elemente des einen Gebildes durch die ihnen entsprechenden Elemente des anderen, so liegen die beiden Gebilde perspectiv, d. h. jedes Element des einen Gebildes geht durch das ihm entsprechende Element des anderen.

Ist das Gebilde II. Ordnung eine Regelschaar, das andere Gebilde also entweder eine Punktreihe oder ein Ebenenbüschel I. Ordnung, so können wir schon dann schliessen, dass dieselben perspectiv liegen, wenn drei Strahlen der Regelschaar durch die entsprechenden drei Punkte der Punktreihe gehen oder aber in den entsprechenden Ebenen des Büschels liegen. Denn der Träger der Punktreihe resp. die Axe des Ebenenbüschels ist alsdann ein Leitstrahl der Regelschaar (Seite 119), weil sie drei Strahlen der letzteren schneidet.

Wie wichtig diese Sätze sind, mögen Sie aus den Folgerungen abnehmen:

Ein Ebenenbüschel I. Ordnung erzeugt mit einer zu ihm projectiven Regelschaar oder Kegelfläche II. Ordnung im Allgemeinen eine „Raumcurve III. Ordnung", welche mit jeder Ebene mindestens einen Punkt und höchstens drei Punkte gemein hat.

Eine Punktreihe I. Ordnung und eine Regelschaar oder ein Strahlenbüschel II. Ordnung, die zu einander projectiv sind, erzeugen im Allgemeinen einen „Ebenenbüschel III. Ordnung", welcher mit jedem Punkte mindestens eine Ebene und höchstens drei Ebenen gemein hat.

Denn eine Ebene schneidet die Regelschaar oder Kegelfläche in einer zu ihr perspectiven Punktreihe II. Ordnung, von welcher im Allgemeinen höchstens drei Punkte auf den entsprechenden Ebenen des Büschels liegen.

Wenn eine Punktreihe I. Ordnung u und eine zu ihr projective Punktreihe k II. Ordnung in einer Ebene liegen, so bilden die Verbindungslinien ihrer homologen Punkte einen „Strahlenbüschel dritter Ordnung"; derselbe hat mit einem beliebigen Büschel I. Ordnung der Ebene mindestens einen und höchstens drei Strahlen gemein.

Wenn ein Strahlenbüschel I. Ordnung und ein zu ihm projectiver Strahlenbüschel II. Ordnung in einer Ebene liegen, so bilden die Schnittpunkte ihrer homologen Strahlen eine „Linie dritter Ordnung"; dieselbe hat mit einer beliebigen Geraden der Ebene mindestens einen und höchstens drei Punkte gemein.

Denn ist S ein beliebiger zu u perspectiver und folglich zu k projectiver Büschel I. Ordnung, so gehen höchstens drei Strahlen von S durch die entsprechenden Punkte von k, mindestens aber ein Strahl.

Haben die Punktreihen u und k I. und II. Ordnung einen Punkt P entsprechend gemein, so ist jeder durch P gehende Strahl als Verbindungslinie von zwei (zusammenfallenden) homologen Punkten zu betrachten, und der Strahlenbüschel dritter Ordnung enthält den Büschel I. Ordnung P. Die folgenden Sätze sind deshalb nicht als Ausnahmen, sondern als besondere Fälle des eben bewiesenen Satzes zu betrachten.

Wenn eine Punktreihe I. Ordnung u und eine zu ihr projective Punktreihe II. Ordnung k zwei Punkte A, B entsprechend gemein haben, so erzeugen sie einen Strahlenbüschel I. Ordnung.

Wenn ein Strahlenbüschel I. Ordnung und ein zu ihm projectiver Strahlenbüschel II. Ordnung zwei Strahlen entsprechend gemein haben, so erzeugen sie eine Punktreihe I. Ordnung.

Möge noch dem Punkte C von u der Punkt C_1 von k entsprechen, und sei S derjenige Punkt von k, welcher aus C_1 durch den Strahl $\overline{C_1C}$ projicirt wird. Beziehen wir dann u und k perspectiv auf den Strahlenbüschel S, so sind sie auf einander projectiv so bezogen, dass den drei Punkten A, B, C von u die resp. drei Punkte A, B, C_1 von k entsprechen. Weil aber (Seite 125) die projective Verwandtschaft von u und k durch die drei Paare homologer Punkte eindeutig bestimmt ist, so bilden die Verbin-

9*

dungslinien homologer Punkte wirklich einen Strahlenbüschel S I. Ordnung, dessen Mittelpunkt auf der Curve k liegt.

Durch eine Curve II. Ordnung und zwei Gerade a, b, welche mit der Curve je einen Punkt gemein haben, aber weder mit ihr noch mit einander in einer Ebene liegen, ist eine zu der Curve perspective Regelschaar bestimmt, von welcher die beiden Geraden Leitstrahlen sind.

Nämlich die beiden zu der Curve perspectiven Ebenenbüschel a, b erzeugen die Regelschaar.

Durch einen Ebenenbüschel II. Ordnung und zwei Gerade a, b, welche aus dem Mittelpunkte des Büschels durch zwei Ebenen desselben projicirt werden und sich nicht schneiden, ist eine zu dem Büschel perspective Regelschaar bestimmt, von welcher die beiden Geraden Leitstrahlen sind. Nämlich die beiden zu dem Ebenenbüschel perspectiven Punktreihen a, b erzeugen die Regelschaar.

Die Leitschaar der Regelschaar enthält die Geraden a, b und ist ebenfalls zu der Curve resp. dem Ebenenbüschel II. Ordnung perspectiv.

Wenn eine Punktreihe I. und eine Curve II. Ordnung projectiv sind und einen Punkt A entsprechend gemein haben, aber nicht in einer Ebene liegen, so erzeugen sie eine zu ihnen perspective Regelschaar.

Wenn zwei Ebenenbüschel I. und II. Ordnung projectiv sind und eine Ebene entsprechend gemein haben, aber nicht in einem Bündel liegen, so erzeugen sie eine zu ihnen perspective Regelschaar.

Mögen (links) den Punkten A, B, C der Punktreihe die Punkte A, B_1, C_1 der Curve entsprechen; dann ist die zu der Curve perspective Regelschaar, welcher die Geraden $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ angehören, auch zu der Punktreihe perspectiv, weil die drei Punkte A, B, C der letzteren in den ihnen entsprechenden Strahlen der Regelschaar liegen (Seite 130). Der Beweis rechts ist ganz analog zu führen.

Aus einem beliebigen Punkte, welcher nicht in der Ebene der Curve liegt, wird diese durch einen Kegel II. Ordnung, die Regelschaar aber durch einen Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt. Und von einer beliebigen Ebene wird der Ebenenbüschel II. Ordnung in einem Strahlenbüschel II. Ordnung, die Regelschaar aber in einer Punktreihe II. Ordnung geschnitten. Daraus ergiebt sich:

Wenn eine Punktreihe I. und ein Kegel II. Ordnung projectiv sind, und ein Punkt der ersteren auf dem entsprechenden Strahle des letzteren liegt, so erzeugen die beiden Gebilde einen zu ihnen perspectiven Ebenenbüschel II. Ordnung.

Wenn ein Ebenenbüschel I. und ein Strahlenbüschel II. Ordnung projectiv sind, und eine Ebene des ersteren durch den entsprechenden Strahl des letzteren geht, so erzeugen die beiden Büschel eine zu ihnen perspective Punktreihe II. Ordnung.

Dieser Satz führt unmittelbar zu dem folgenden, wenn berücksichtigt wird, dass jede Curve II. Ordnung als Schnitt eines Kegels II. Ordnung aufgefasst werden kann:

Wenn eine Punktreihe I. und eine Curve II. Ordnung projectiv sind, in einer Ebene liegen und einen Punkt entsprechend gemein haben, so erzeugen sie einen zu ihnen perspectiven Strahlenbüschel II. Ordnung.

Wenn zwei Strahlenbüschel I. und II. Ordnung projectiv sind, in einer Ebene liegen und einen Strahl entsprechend gemein haben, so erzeugen sie eine zu ihnen perspective Curve II. Ordnung.

„Zwei projective Regelschaaren abc und $a_1b_1c_1$, von welchen „jede die Leitschaar der anderen ist, erzeugen eine Curve und einen „Ebenenbüschel II. Ordnung, die beide zu ihnen perspectiv sind.“ Die beiden Regelschaaren können nämlich nur auf eine Art projectiv so auf einander bezogen werden, dass den Strahlen a, b, c der einen Schaar die resp. Strahlen a_1, b_1, c_1 der anderen Schaar entsprechen. Dieses geschieht aber, wenn je zwei Strahlen einander zugewiesen werden, welche die Verbindungsebene der drei Punkte aa_1, bb_1, cc_1 in einem und demselben Punkte schneiden oder aus dem Schnittpunkte der drei Ebenen $\overline{aa_1}$, $\overline{bb_1}$, $\overline{cc_1}$ durch eine und dieselbe Ebene projicirt werden.

„Von zwei projectiven Regelschaaren oder Kegeln II. Ordnung „schneiden sich höchstens vier paar homologe Strahlen, falls „nicht je zwei homologe Strahlen derselben sich schneiden.“

Wenn nämlich von zwei projectiven Regelschaaren irgend zwei homologe Strahlen in einer Ebene ε liegen, so projicire man die beiden Schaaren aus ihren in ε liegenden Leitstrahlen durch zwei Ebenenbüschel. Fallen die beiden Leitstrahlen nicht zusammen, so erzeugen diese Büschel, da sie die Ebene ε entsprechend gemein haben, einen Strahlenbüschel S erster Ordnung. Die Strahlen von S schneiden je zwei homologe Strahlen der Regelschaaren, und letztere werden von der Ebene von S in zwei projectiven

Curven II. Ordnung geschnitten, welche entweder höchstens drei oder alle ihre Punkte entsprechend gemein haben; diese entsprechend gemeinschaftlichen Punkte aber sind die Schnittpunkte von je zwei homologen Strahlen der Regelschaaren, und umgekehrt. Fallen jene beiden Leitstrahlen zusammen, so schneiden sie die Regelschaaren in zwei projectiven Punktreihen, welche entweder höchstens zwei oder alle ihre Punkte entsprechend gemein haben; zugleich werden die Regelschaaren aus den beiden identischen Leitstrahlen durch Ebenenbüschel projicirt, welche entweder höchstens zwei oder alle ihre Ebenen entsprechend gemein haben. In jeder dieser Ebenen aber, sowie in jedem jener entsprechend gemeinschaftlichen Punkte schneiden sich zwei homologe Strahlen der Regelschaaren. — Ganz analog beweist man den Satz, wenn an die Stelle von einer oder jeder der beiden Regelschaaren ein Kegel II. Ordnung tritt. Wir schliessen daraus:

Es giebt im Allgemeinen höchstens vier Punkte, in denen je vier homologe Ebenen von vier beliebigen projectiven Ebenenbüscheln I. Ordnung sich schneiden.

Von vier projectiven Punktreihen I. Ordnung liegen im Allgemeinen höchstens vier Gruppen homologer vier Punkte in je einer Ebene.

Die Ebenenbüschel erzeugen nämlich paarweise projective Regelschaaren oder Kegel II. Ordnung, für welche der vorhergehende Satz gilt; es schneiden sich folglich je vier homologe Ebenen der Büschel in einem Punkte, sobald fünf oder mehr Gruppen homologer vier Ebenen existiren, die durch je einen Punkt gehen.

Zwei projective Curven II. Ordnung, welche in einander liegen, erzeugen entweder einen zu ihnen perspectiven Strahlenbüschel II. Ordnung, oder es giebt einen Punkt, der mit je zwei homologen Punkten der Curven in einer Geraden liegt.

Zwei projective Strahlenbüschel II. Ordnung, welche in einander liegen, erzeugen entweder eine zu ihnen perspective Curve II. Ordnung, oder es giebt eine Gerade, auf welcher je zwei homologe Strahlen der Büschel sich schneiden.

Jede zu der einen Curve perspective Regelschaar erzeugt nämlich mit ihrer Leitschaar, die wir auf die andere Curve perspectiv beziehen, einen Ebenenbüschel II. Ordnung, welcher zu allen vier Gebilden perspectiv ist; und jenachdem der Mittelpunkt dieses Büschels ausserhalb oder auf der Ebene der Curve liegt, entsteht der erstere oder der letztere der beiden im Satze genannten Fälle. — Wenn also von den Geraden, welche je zwei homologe Curvenpunkte verbinden, irgend drei durch einen und denselben Punkt U gehen (Figg. 60 und 61, Seite 139), so schneiden sie sich alle in diesem Punkte.

Zwei projective Curven $ABCD$ und ABC_1D_1 II. Ordnung, welche zwei Punkte A und B entsprechend gemein haben, aber nicht in derselben Ebene liegen, erzeugen ein zu ihnen perspectives Strahlengebilde II. Ordnung, nämlich entweder eine Regelschaar oder einen Kegel II. Ordnung.

Zwei zu einander projective Ebenenbüschel II. Ordnung, welche zwei Ebenen entsprechend gemein haben, aber nicht concentrisch sind, erzeugen ein zu ihnen perspectives Strahlengebilde II. Ordnung, nämlich entweder eine Regelschaar oder einen Strahlenbüschel II. Ordnung.

Denn die zu der Curve $ABCD$ perspective Regelschaar oder Kegelfläche, welcher die Strahlen $\overline{CC_1}$ und $\overline{DD_1}$ angehören, ist auch zu der Curve ABC_1D_1 perspectiv (Seite 128). Die Curven erzeugen einen Kegel, wenn ihre Tangenten in C und C_1 die Gerade $\overline{AB}$ in einem und demselben Punkte schneiden. Denn erzeugten die Curven auch in diesem Falle eine Regelschaar, so würde die Verbindungsebene jener Tangenten ausser dem Strahle $\overline{CC_1}$ der Regelschaar noch einen Leitstrahl derselben enthalten (Seite 118), und daher mit einer oder jeder der Curven noch einen von C oder C_1 verschiedenen, auf diesem Leitstrahl liegenden Punkt gemein haben, was unmöglich ist. Hieraus folgt:

Zwei Curven II. Ordnung, die in verschiedenen Ebenen liegen und von der Schnittlinie dieser Ebenen ein und dasselbe Stück AB einschliessen, können durch zwei Kegel II. Ordnung verbunden werden.

Zwei nicht concentrische Kegel II. Ordnung, welche einem und demselben Flächenwinkel eingeschrieben sind, schneiden sich in zwei Curven II. Ordnung.

Denn die Curven lassen sich auf zweifache Art projectiv so auf einander beziehen, dass sie die Endpunkte A, B ihrer gemeinschaftlichen Sehne entsprechend gemein haben, und dass die Tangenten von zwei anderen homologen Punkten C und C_1 sich in einem Punkte der $\overline{AB}$ schneiden.

Wir sind jetzt in den Stand gesetzt, folgenden Satz über die perspective Lage von Elementargebilden zweiter Ordnung zu beweisen:

Wenn eine Curve und ein Büschel II. Ordnung oder ein Kegel und ein Ebenenbüschel II. Ordnung projectiv sind, und fünf Elemente A, B, C, D, E *des ersteren Gebildes in den ihnen entsprechenden Elementen* α, β, γ, δ, ε *des letzteren liegen, so haben die beiden Gebilde perspective Lage.*

Wir wollen annehmen, das erstere Gebilde sei eine Curve II. Ordnung u, und das letztere ein Ebenenbüschel II. Ordnung S; auf diesen Fall lassen sich nämlich alle übrigen zurückführen. Wir brauchen dann nur zu zeigen, dass ein Strahlengebilde construirt werden kann, welches gleichzeitig zu der Curve und zum Ebenenbüschel perspectiv ist; denn damit ist bewiesen, dass jeder Punkt der Curve auf der ihm entsprechenden Ebene des Büschels liegt.

Ist die Ebene u der Curve ein Element des Büschels S, so erhalten wir in ihr (als Schnitt mit S) einen zu S perspectiven Büschel I. Ordnung $u(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)$, welcher auch zur Curve $u(ABCDE)$ perspectiv liegt, weil mehr als drei Strahlen desselben durch die ihnen entsprechenden Curvenpunkte gehen (Seite 130); der Punkt S liegt daher auf der Curve. Und umgekehrt, wenn S auf der Curve liegt, so projiciren wir letztere aus S durch einen Büschel I. Ordnung $S(ABCDE)$, welcher auch zum Ebenenbüschel $S(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)$ perspectiv ist, weil mehr als drei Strahlen desselben in den ihnen entsprechenden Ebenen von S liegen; die Ebene u gehört daher dem Ebenenbüschel S als Element an. — Liegt aber der Punkt S nicht auf der Curve, und gehört folglich deren Ebene u nicht zu dem Ebenenbüschel S, so sei A_1 derjenige Curvenpunkt, welcher aus A durch die Ebene α projicirt wird, also der zweite Schnittpunkt dieser Ebene und der Curve, welcher mit A zusammenfällt, wenn die Curve von α berührt wird. Durch A_1 ziehen wir in der Ebene α eine von $\overline{AA_1}$ verschiedene Gerade g, und projiciren aus dieser die Curve II. Ordnung durch einen Ebenenbüschel I. Ordnung $g(ABCDE)$. Derselbe ist zu dem Ebenenbüschel II. Ordnung S projectiv und erzeugt mit ihm eine zu beiden perspective Regelschaar (Seite 132), weil er mit ihm die Ebene α entsprechend gemein hat; und diese Regelschaar ist auch zu der Curve II. Ordnung perspectiv, weil vier Strahlen der ersteren durch die ihnen entsprechenden Punkte der letzteren gehen (Seite 128).

Wenn eine Curve II. Ordnung $ABCDE$ und eine Regelschaar $abcde$ zu einander projectiv,	Wenn ein Ebenenbüschel II. Ordnung und eine Regelschaar zu einander projectiv,

aber nicht perspectiv sind, und zwei Punkte A, B der Curve in den ihnen entsprechenden Strahlen a, b der Regelschaar liegen, so erzeugen die beiden Gebilde einen zu ihnen perspectiven Ebenenbüschel II. Ordnung.

aber nicht perspectiv sind, und zwei Ebenen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Strahlen der Regelschaar gehen, so erzeugen die Gebilde eine zu ihnen perspective Punktreihe II. Ordnung.

Die drei Ebenen $\overline{Cc}$, $\overline{Dd}$, $\overline{Ee}$, welche die Punkte C, D, E der Curve mit ihren entsprechenden Strahlen c, d, e der Regelschaar verbinden, schneiden sich in einem Punkte; der Ebenenbüschel aber, welcher aus diesem Schnittpunkte die Regelschaar $abcde$ projicirt, ist auch zu der Curve $ABCDE$ perspectiv.

Zwei projective Curven II. Ordnung, welche in derselben Ebene liegen und zwei Punkte entsprechend gemein haben, erzeugen entweder einen zu ihnen perspectiven Büschel II. Ordnung, oder es giebt einen Punkt, der auf keiner der beiden Curven, aber mit je zwei homologen Punkten derselben in einer Geraden liegt.

Zwei projective Strahlenbüschel II. Ordnung, welche zwei Strahlen entsprechend gemein haben, erzeugen entweder eine zu ihnen perspective Punktreihe II. Ordnung, oder es giebt eine Gerade, welche keinem der Büschel angehört, aber von je zwei homologen Strahlen derselben in einem und demselben Punkte geschnitten wird.

Nämlich jede Regelschaar, welche zu der einen Curve perspectiv ist, erzeugt mit der anderen einen Ebenenbüschel II. Ordnung, und dieser wird von der Curvenebene im Allgemeinen in einem Strahlenbüschel II. Ordnung geschnitten. Nur wenn der Mittelpunkt des Ebenenbüschels in der Ebene der Curven liegt, tritt der letzte Fall des Satzes ein.

Liegen zwei projective Curven II. Ordnung in einer Ebene, ohne dass sie Punkte entsprechend gemein haben, so erzeugen sie einen Strahlenbüschel höherer Ordnung, von welchem im Allgemeinen höchstens vier Strahlen durch einen Punkt gehen. Gehen nämlich durch einen Punkt S der Ebene mehr als vier dieser Strahlen, so gehen durch denselben unendlich viele derselben, weil ein Ebenenbüschel II. Ordnung, welcher den Punkt S zum Mittelpunkt hat und zu einer der beiden Curven II. Ordnung perspectiv ist (etwa eine zu derselben perspective Regelschaar projicirt), auch zu der anderen Curve perspective Lage hat. Ebenso erzeugen zwei projective Strahlenbüschel II. Ordnung, die in einer

Ebene liegen, eine Curve höherer (nämlich vierter) Ordnung, welche im Allgemeinen mit keiner Geraden mehr als vier Punkte gemein hat. Wir müssen darauf verzichten, schon hier diese und andere Erzeugnisse projectiver Elementargebilde II. Ordnung eingehend zu besprechen.

Zwölfter Vortrag.

Involutionen.

Wenn zwei gleichartige Elementargebilde u und u_1 (z. B. zwei Punktreihen) projectiv sind und in einander liegen, so kann jedes Element P ihres gemeinschaftlichen Trägers sowohl zu dem einen Gebilde u, als auch zu dem anderen u_1 gerechnet werden, und es entsprechen ihm folglich zwei andere Elemente, eines in u_1 und das andere in u. Im Allgemeinen sind diese beiden dem P entsprechenden Elemente von einander verschieden (wie in Fig. 58, wo den Punkten P, Q, R von u die resp. Punkte P_1, Q_1, R_1 von u_1 entsprechen); doch ist es auch möglich, dass dieselben zusammenfallen (wie in Fig. 59), so dass dem Elemente P ein an-

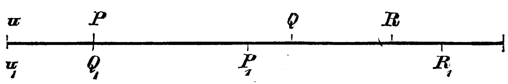

Fig. 58.

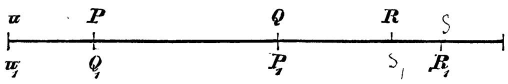

Fig. 59.

deres P_1 doppelt entspricht. Dem Elemente P des ersten Gebildes u entspricht dann das Element P_1 des zweiten u_1, und dem Elemente P des zweiten u_1 entspricht ebenfalls das Element P_1 des ersten Gebildes u.

„Wenn die projectiven Gebilde u und u_1 nicht alle ihre „Elemente entsprechend gemein haben, aber jedes Element

„derselben einem anderen doppelt entspricht, so wollen wir „sagen, die Gebilde haben involutorische Lage oder sie „liegen involutorisch. Ebenso heissen zwei ungleichartige „projective Gebilde, z. B. eine Punktreihe und ein Strahlen-„büschel, involutorisch, wenn das eine mit einem Schnitt „oder Schein des anderen involutorisch liegt.“

Z. B. zwei projective Punktreihen II. Ordnung, welche auf derselben Curve liegen, haben involutorische Lage (Figg. 60 und 61), wenn drei und folglich (Seite 134) alle Verbindungslinien von je zwei homologen Punkten sich in einem Punkte schneiden; dagegen liegen sie nicht involutorisch, wenn sie einen zu ihnen perspectiven Strahlenbüschel II. Ordnung erzeugen. Weist man jedem Punkte einer Geraden u, welche in der Ebene einer Curve II. Ordnung liegt, aber dieselbe nicht berührt, seine Polare bezüglich dieser Curve zu, so erhält man einen Strahlenbüschel, welcher nicht blos projectiv auf die Punktreihe u bezogen ist, sondern auch zu derselben involutorische Lage hat (Seite 99 und 97).

Wir können nun folgenden Satz beweisen:

„Zwei zu einander projective Punktreihen II. Ordnung, welche „auf derselben Curve liegen, haben involutorische Lage, wenn „in ihnen irgend einem Punkte A ein anderer Punkt A_1 doppelt „entspricht.“

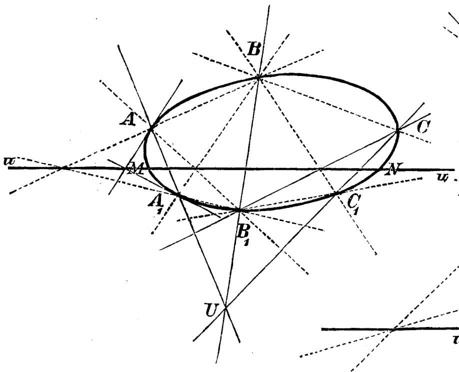

Fig. 60.

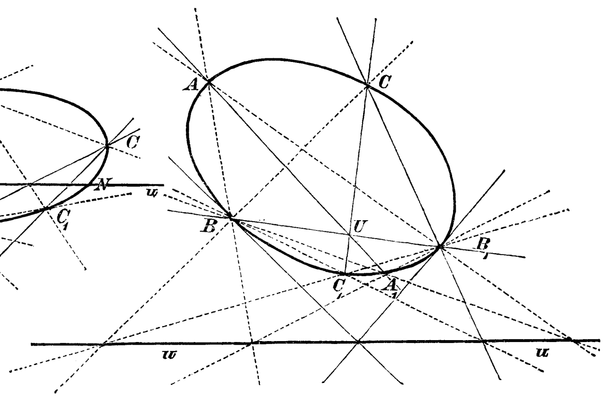

Fig. 61.

Seien B und B_1 (Figg. 60 und 61) zwei beliebige andere einander entsprechende Punkte der Punktreihen, so dass den Punkten A,

A_1, B der einen Punktreihe die resp. Punkte A_1, A, B_1' der anderen zugewiesen sind; sei ferner U der Schnittpunkt von $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$, und u dessen Polare in Bezug auf die Curve II. Ordnung. Die beiden Strahlenbüschel $B_1(AA_1B)$ und $B(A_1AB_1)$, welche aus den Punkten B_1 und B die resp. Punktreihen AA_1B und A_1AB_1 projiciren, sind alsdann perspectiv zu der Punktreihe u. Denn sie sind zu den Punktreihen II. Ordnung und folglich zu einander projectiv, und weil sie den Strahl $\overline{B_1B}$ oder $\overline{BB_1}$ entsprechend gemein haben, so sind sie Scheine einer und derselben Punktreihe I. Ordnung; diese aber liegt in u, weil (Seite 94) der Schnittpunkt der homologen Strahlen $\overline{B_1A}$ und $\overline{BA_1}$, sowie derjenige von $\overline{B_1A_1}$ und $\overline{BA}$ auf der Geraden u enthalten ist. Je zwei andere Curvenpunkte C und C_1, welche mit U in einer Geraden liegen, werden ebenso durch zwei Paare homologer Strahlen der zu u perspectiven Büschel B und B_1 projicirt, und sind daher zwei einander doppelt entsprechende Punkte der Punktreihen II. Ordnung. Hieraus und aus früher (Seite 94) aufgestellten Sätzen folgt:

„Wenn zwei projective Curven II. Ordnung involutorisch liegen, „so schneiden sich die sämmtlichen Verbindungslinien homologer „Punkte in einem und demselben Punkte U, und die sämmt„lichen Schnittpunkte homologer Tangenten liegen auf der „Polare u dieses Punktes U. Die Gerade u wird die Involu„tionsaxe und der Punkt U das Involutionscentrum der „Curven genannt."

Die beiden Strahlenbüschel II. Ordnung, durch welche zwei involutorisch liegende Curven II. Ordnung eingehüllt werden, haben ebenfalls involutorische Lage, denn die Tangenten von je zwei einander entsprechenden Punkten entsprechen einander gleichfalls in doppelter Weise. Die Strahlenbüschel werden daher auch von jedem ihrer Strahlen in zwei involutorisch liegenden Punktreihen I. Ordnung geschnitten. Ebenso werden zwei involutorisch liegende Curven II. Ordnung aus jedem ihrer Punkte durch zwei involutorisch liegende Strahlenbüschel I. Ordnung projicirt, aus jedem ausserhalb ihrer Ebene gelegenen Punkte aber durch zwei involutorisch liegende Kegel. Eine Regelschaar, welche zu der einen Curve perspectiv ist, liegt zu der anderen involutorisch, u. s. w.

Wir können hiernach den einen der vorhin aufgestellten Sätze auf alle Elementargebilde ausdehnen, indem wir sagen:

Zwei gleichartige Elementargebilde, welche projectiv sind und in einander liegen, haben involutorische Lage, wenn irgend zwei Elemente derselben einander doppelt entsprechen.

Sind nämlich die beiden Elementargebilde zwei conjective Strahlengebilde, so construiren wir zwei conjective, zu ihnen perspective Punktreihen II. Ordnung. Da diese letzteren involutorische Lage haben, weil zwei Punkte derselben einander doppelt entsprechen, so müssen auch die beiden Strahlengebilde involutorisch liegen. Sind aber die Elementargebilde zwei Ebenenbüschel oder Punktreihen, so construiren wir zwei zu ihnen perspective und in einander liegende Strahlengebilde, und weil dann die letzteren, wie soeben bewiesen, involutorische Lage haben, so gilt dasselbe von den ersteren.

Zwei involutorisch liegende gleichartige Gebilde werden sehr häufig als ein einziges „involutorisches" Gebilde, als eine sogenannte „Involution" aufgefasst; die Elemente dieser Involution nennt man dann „paarweise einander zugeordnet" oder „conjugirt" oder „involutorisch gepaart". So z. B. sind die Punkte einer Geraden u, die beliebig in der Ebene einer Curve II. Ordnung angenommen ist, involutorisch gepaart, wenn je zwei hinsichtlich der Curve conjugirte Punkte derselben einander zugeordnet werden (Seite 139). Ebenso bilden u. A. die Paare conjugirter Durchmesser einer Curve II. Ordnung eine Strahleninvolution. Wir können ferner sagen:

In einer involutorischen Curve II. Ordnung (Figg. 60 und 61) liegen je zwei einander zugeordnete Punkte mit einem nicht auf der Curve gelegenen Punkte in einer Geraden, und je zwei einander zugeordnete Tangenten schneiden sich auf der Polare jenes Punktes bezüglich der Curve II. Ordnung.

In einem involutorischen Kegel II. Ordnung liegen je zwei einander zugeordnete Strahlen mit einer nicht auf dem Kegel gelegenen Geraden in einer Ebene, und je zwei einander zugeordnete Berührungsebenen schneiden sich auf der Polarebene jener Geraden bezüglich des Kegels.

Der Satz links ist nur eine Wiederholung des Seite 140 bewiesenen; und der Satz rechts ergiebt sich aus jenem, wenn der Kegel II. Ordnung durch eine beliebige Ebene in einer Curve II. Ordnung geschnitten wird. Haben nämlich zwei Elementargebilde perspective Lage, und sind die Elemente des einen involutorisch gepaart, so sind dadurch auch die Elemente des anderen involutorisch gepaart.

„Will man die Elemente eines Elementargebildes involutorisch „paaren, so darf man zwei Paare A, A_1 und B, B_1 zugeord- „neter Elemente willkürlich annehmen; dadurch aber ist jedem „Elemente des Gebildes ein anderes zugeordnet.“

Die Involution entsteht nämlich aus zwei in einander liegenden Gebilden, welche projectiv so auf einander bezogen werden, dass den drei Elementen A, A_1, B des einen die resp. Elemente A_1, A, B_1 des anderen entsprechen; aber diese Beziehung ist nur auf eine einzige Art möglich.

Ist die Involution eine Punktreihe II. Ordnung, so kann zu jedem fünften Punkte C der zugeordnete C_1 leicht gefunden werden mit Hülfe des Involutionscentrums U (Figg. 60 u. 61), in welchem $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$ sich schneiden, oder auch mit Hülfe der Involutionsaxe. Analoges gilt von dem Kegel II. Ordnung. Sind die Strahlen einer Regelschaar involutorisch zu paaren, so schneiden wir dieselbe in einer Curve II. Ordnung und brauchen dann nur die Punkte der letzteren involutorisch zu paaren. Die Strahlen eines Büschels I. Ordnung S (Fig. 62) werden involutorisch gepaart, wenn man eine zu dem Büschel perspective Curve II. Ordnung construirt, z. B. einen durch den Mittelpunkt S gehenden Kreis, und die Punkte dieser Curve einander paarweise zuordnet. Aehnlich können wir mit jedem anderen Elementargebilde verfahren. Die Elemente eines einförmigen Grundgebildes lassen sich übrigens auch ohne Hülfe der Gebilde II. Ordnung involutorisch paaren.

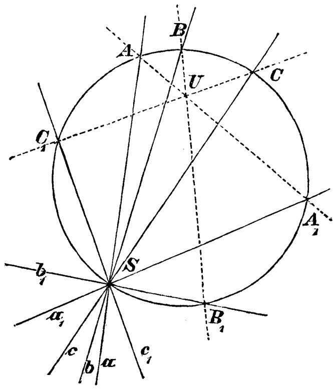

Fig. 62.

Zwei involutorisch liegende, gleichartige Elementargebilde, z. B. zwei involutorische Punktreihen II. Ordnung (Figg. 60 und 61), sind gleichlaufend oder entgegengesetzt projectiv, jenachdem zwei einander zugeordnete Elemente A und A_1 durch irgend zwei andere B und B_1 getrennt sind oder nicht. Im ersteren Falle (Fig. 61) bewegen sich zwei homologe Elemente, von denen das eine das Gebilde AA_1B und das andere zugleich das Gebilde A_1AB_1 beschreibt, in demselben Sinne, und können nie zusammentreffen; im letzteren Falle (Fig. 60) bewegen sie sich in entgegengesetztem

Sinne, und müssen zweimal auf einander fallen. Wir wollen jedes Element, welches zwei involutorisch liegende Gebilde entsprechend gemein haben, ein „Doppel- oder Ordnungselement" derjenigen Involution nennen, welche aus jenen beiden zusammengesetzt ist; es gilt dann der Satz:

„Eine Involution hat keine oder zwei Doppel-Elemente und „heisst elliptisch oder hyperbolisch, jenachdem zwei conjugirte „Elemente desselben durch irgend zwei andere getrennt sind „oder nicht. In jedem Doppel-Elemente fallen zwei einander „zugeordnete Elemente der Involution zusammen."

Liegt das Involutionscentrum U einer involutorischen Curve II. Ordnung ausserhalb der letzteren (Fig. 60), so hat die Curve zwei Doppelpunkte M, N, nämlich die Berührungspunkte der beiden Tangenten, welche aus U an die Curve gezogen werden können. Die Involutionsaxe u schneidet in diesen Punkten die Curve, weil u die Polare von U ist (Seite 94).

„Die Doppelelemente M, N einer Involution sind durch „je zwei einander zugeordnete Elemente A, A_1 harmonisch „getrennt."

Es genügt, wenn dieser Satz für eine involutorische Curve II. Ordnung bewiesen wird, da jeder andere Fall auf diesen zurückgeführt werden kann. Sei B, B_1 ein zweites Paar einander zugeordneter Punkte (Fig. 60); dann schneiden sich die Gegenseiten des einfachen Vierecks ABA_1B_1 in zwei hinsichtlich der Curve conjugirten Punkten (Seite 99), welche durch M und N harmonisch von einander getrennt sind. Die Strahlen $\overline{BA}$, $\overline{BM}$, $\overline{BA_1}$, $\overline{BN}$ sind also vier harmonische Strahlen, weil sie vier harmonische Punkte projiciren und folglich sind die Ordnungspunkte M und N in der Curve harmonisch getrennt durch die Punkte A und A_1. Dasselbe folgt aus einem Satze von Seite 103, da $\overline{MN}$ und $\overline{AA_1}$ conjugirte Strahlen sind.

Um die Elemente eines Elementargebildes involutorisch zu paaren, können wir auch die beiden Doppelelemente M, N, oder ein Doppelelement M und ein Paar zugeordneter Elemente A, A_1 beliebig annehmen; dadurch aber ist zu jedem Elemente das zugeordnete völlig bestimmt. Denn im ersteren Falle sind je zwei Elemente des Gebildes einander zugeordnet, welche durch M und N harmonisch getrennt sind; im letzteren Falle aber kann das zweite Doppelelement N sofort bestimmt werden, da es von M durch A

und A_1 harmonisch getrennt ist, und dieser Fall ist dann auf den vorigen zurückgeführt.

Die bisherigen Sätze über die involutorischen Gebilde sind von solcher Wichtigkeit und werden so häufige Anwendung finden, dass es wohl gerechtfertigt erscheint, wenn wir einige derselben noch einmal auf mehr elementarem Wege beweisen; zumal da sich hierbei noch neue nützliche Sätze ergeben werden. Wir gehen dabei von folgender Erklärung aus:

„Zwei Gebilde $ABCDE\ldots$ und $A_1B_1C_1D_1E_1\ldots$, welche nur „aus einzelnen Elementen von zwei Elementargebilden u und u_1 „bestehen, sollen projectiv genannt werden, wenn die Gebilde „u und u_1 projectiv so auf einander bezogen werden können, „dass den Elementen A, B, C, D, E, ... von u die resp. Ele- „mente A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 ... von u_1 entsprechen. Wir be- „nutzen das Zeichen $\barwedge$ für projectiv."

Sind z. B. u und u_1 zwei Punktreihen I. Ordnung, die in einer Ebene, aber nicht in derselben Geraden liegen, so ist nur dann $ABCDE\ldots \barwedge A_1B_1C_1D_1E_1\ldots$, wenn die Geraden $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{DD_1}$, $\overline{EE_1}$, ... entweder durch einen und denselben Punkt gehen, oder eine Curve II. Ordnung berühren, von welcher auch u und u_1 zwei Tangenten sind.*)

Ein „Wurf" ABCD, *d. h. ein Gebilde, welches aus vier Elementen eines Elementargebildes besteht, ist projectiv zu jeder aus ihm abgeleiteten Permutation, welche entsteht, wenn zwei von den vier Elementen, sowie auch die beiden übrigen vertauscht werden; oder es ist:*

$$ABCD \barwedge BADC \barwedge CDAB \barwedge DCBA.$$

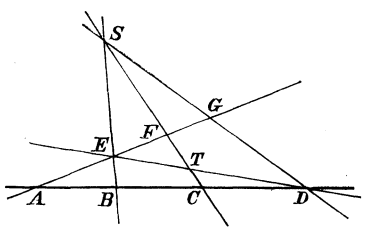

Fig. 63.

Sei $ABCD$ ein Wurf auf einer Geraden, auf welchen Fall alle übrigen Fälle sich zurückführen lassen, und sei z. B. zu beweisen, dass $ABCD \barwedge CDAB$ ist. Wir projiciren $ABCD$ aus einem beliebigen Punkte S (Fig. 63) auf eine durch A gehende Gerade, und nennen $AEFG$ diese Pro-

---

*) Die Beziehung $ABCD \barwedge A_1B_1C_1D_1$ bedeutet auch, wie früher (Seite 65) gezeigt wurde, dass zwischen den Abschnitten der Geraden u und u_1 die Proportion besteht: $\frac{AB}{AD}:\frac{CB}{CD}=\frac{A_1B_1}{A_1D_1}:\frac{C_1B_1}{C_1D_1}$.

jection, bezeichnen ausserdem mit T den Schnittpunkt von $\overline{CF}$ und $\overline{DE}$. Dann ist:

$ABCD$	eine	Projection	von	$AEFG$	aus	dem	Mittelpunkte	S,
$AEFG$	„	„	„	$CTFS$	„	„	„	D,
$CTFS$	„	„	„	$CDAB$	„	„	„	E.

Es ist also:

$$ABCD \barwedge AEFG \barwedge CTFS \barwedge CDAB$$

und folglich $\qquad ABCD \barwedge CDAB.$

Ebenso lassen sich die übrigen Beziehungen beweisen. Wir folgern daraus:

„Ist $abcd \barwedge ABCD$, so ist auch $abcd \barwedge BADC \barwedge CDAB$ $\barwedge DCBA$.“*)

Zugleich aber ergiebt sich der schon früher (Seite 141) auf anderem Wege bewiesene Satz, dass nämlich zwei in einander liegende projective Elementargebilde involutorische Lage haben, wenn irgend zwei Elemente derselben, A und A_1, einander doppelt entsprechen. Denn wenn noch dem beliebigen Elemente B des einen Gebildes das Element B_1 des anderen entspricht, so dass den Elementen A, A_1, B des ersteren die resp. Elemente A_1, A, B_1, des letzteren zugewiesen sind, so folgt aus der Relation:

$$AA_1BB_1 \barwedge A_1AB_1B,$$

---

*) Mit Hülfe dieses wichtigen Satzes pflegt man u. A. die folgenden bemerkenswerthen Lehrsätze zu beweisen:

Die sechs Eckpunkte von zwei beliebigen Poldreiecken einer Curve k^2 II. Ordnung liegen auf einer zweiten Curve II. Ordnung, welcher unendlich viele Poldreiecke der ersteren eingeschrieben werden können.	Die sechs Seiten von zwei beliebigen Poldreiecken einer Curve II. Ordnung berühren eine zweite Curve II. Ordnung, welcher unendlich viele Poldreiecke der ersteren umschrieben werden können.

Seien nämlich ABC und DEF die beiden Poldreiecke, von deren sechs Eckpunkten keine drei in einer Geraden liegen mögen. Dann sind die Strahlenbüschel $A(BCEF)$ und $D(CBFE)$ projectiv (Seite 100), weil in Bezug auf k^2 den vier Strahlen $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ des ersteren die resp. Strahlen $\overline{DC}$, $\overline{DB}$, $\overline{DF}$, $\overline{DE}$ des letzteren conjugirt sind. Aus $A(BCEF) \barwedge D(CBFE)$ folgt aber $A(BCEF) \barwedge D(BCEF)$, und es liegen demnach die sechs Punkte A, B, C, D, E, F auf einer Curve II. Ordnung, wie der Satz links behauptet. Sind nun D' und E' zwei Punkte dieser Curve, welche bezüglich der zuerst angenommenen Curve k^2 conjugirt sind und folglich einem Poldreieck $D'E'F'$ von k^2 als Eckpunkte angehören, so liegt auch der Eckpunkt F' auf der durch A, B, C, D, E, F gehenden Curve II. Ordnung; denn mit dieser Curve hat die durch A, B, C, D', E', F' gehende fünf und folglich alle Punkte gemein. — Auf ähnliche Art ist der Satz rechts zu beweisen.

dass auch dem Element B_1 des ersteren Gebildes das Element B des letzteren entspricht, oder dass je zwei Elemente B und B_1 einander doppelt entsprechen.

Eine Folgerung, die wir schon früher hätten aufstellen können, ist diese:

„Eine Punktreihe I. Ordnung u liegt involutorisch zu einem ihr „projectiven Büschel S, wenn der Mittelpunkt des letzteren „ausserhalb u liegt und von irgend zwei Punkten P und P_1 „der Punktreihe jeder auf demjenigen Strahle des Büschels „liegt, welcher dem anderen Punkte entspricht.“

Denn der Schnitt des Büschels mit der Geraden ist projectiv zu u und hat mit u involutorische Lage, weil die Punkte P und P_1 einander doppelt entsprechen. Auf ähnliche Weise erkennt man, wann ein Ebenenbüschel zu einer Punktreihe oder einem Strahlenbüschel involutorisch liegt.

Der Satz, dass je zwei conjugirte Elemente A, A_1 einer Involution durch die Doppelelemente M, N derselben, wenn solche vorhanden, harmonisch getrennt sind, lässt sich ebenfalls elementar beweisen. Sei die Involution $M \,.\, N \,.\, AA_1$ entstanden aus zwei projectiven Punktreihen I. Ordnung, die involutorisch liegen; dann entsprechen den Punkten M, A, N, A_1 der einen Reihe die Punkte M, A_1, N, A der anderen, weil M und N beiden Punktreihen entsprechend gemein sind, und A und A_1 einander doppelt entsprechen. Es ist also $MANA_1 \,\overline{\wedge}\, MA_1NA$. Projiciren wir nun $MANA_1$ aus einem beliebigen Punkte S (Fig. 64) auf eine durch M gehende Gerade, und bezeichnen mit $MRKT$ die Projection, so ist diese zu $MANA_1$ und folglich auch zu MA_1NA projectiv, also $MRKT \,\overline{\wedge}\, MA_1NA$. Diese projectiven Gebilde haben aber den Punkt M entsprechend gemein und liegen folglich perspectiv; d. h. die Geraden $\overline{RA_1}$, $\overline{KN}$, $\overline{TA}$ schneiden sich in einem und demselben Punkte Q. Wir erhalten somit ein Viereck $QRST$, von welchem je zwei Gegenseiten sich in A und A_1 schneiden, während die Diagonalen beziehungsweise durch M und N gehen; die Punkte $MANA_1$ sind also wirklich vier harmonische Punkte.

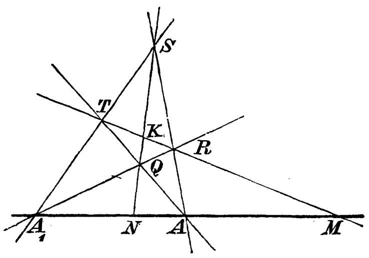

Fig. 64.

Eine Gruppe von drei Elementenpaaren $AA_1 \,.\, BB_1 \,.\, CC_1$ einer Involution heisst ebenfalls eine Involution im engeren und ursprünglichen Sinne des Wortes. Die sechs Elemente derselben sind nicht unabhängig von einander, weil ja in einer Involution zu jedem Elemente das zugeordnete bestimmt ist, sobald zwei paar zugeordnete Elemente gegeben sind, und weil je zwei Gebilde projectiv sind, welche wie AA_1BC und $A_1AB_1C_1$, oder AB_1C_1C und A_1BCC_1 in symmetrischer Weise aus jenen sechs Elementen zusammengesetzt werden. Umgekehrt folgt aus der Beziehung $AA_1BC \barwedge A_1AB_1C_1$, dass die drei Elementenpaare A, A_1; B, B_1; C, C_1 eine Involution $AA_1 \,.\, BB_1 \,.\, CC_1$ bilden; denn in den projectiven Gebilden AA_1BC und $A_1AB_1C_1$ entsprechen die Elemente A und A_1 einander doppelt, und folglich auch die Elemente B und B_1, sowie C und C_1. Ein Doppelelement M oder N kann in der Involution die Stelle eines Elementenpaares vertreten; so z. B. ist $M \,.\, AA_1 \,.\, BB_1$ eine Involution, wenn $MAA_1B \barwedge MA_1AB_1$. Ebenso ist $M \,.\, N \,.\, AA_1$ eine Involution, wenn $MANA_1$ projectiv zu MA_1NA, also ein harmonisches Gebilde ist.

Wir können nun folgenden Doppelsatz beweisen:

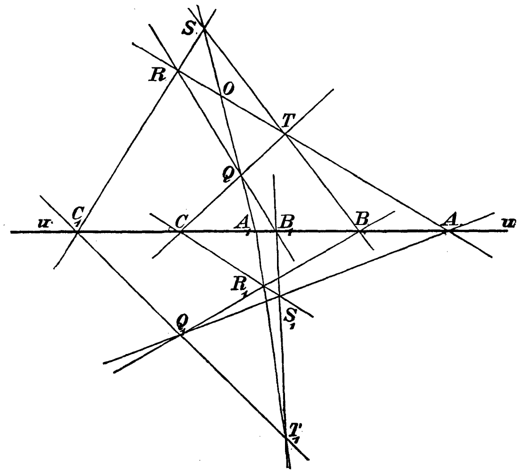

Fig. 65.

Die drei paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks $QRST$ (Fig. 65) werden von

Die drei paar Gegenpunkte eines vollständigen Vierseits werden aus jedem Punkte, der mit jeder Geraden u, die mit dem Viereck in einer Ebene liegt aber durch keinen Eckpunkt geht, in drei Punktenpaaren einer Involution geschnitten.

dem Vierseit in einer Ebene aber auf keiner der vier Seiten liegt, durch drei Strahlenpaare einer Involution projicirt.

Möge u die Seiten $\overline{RT}$ und $\overline{SQ}$, $\overline{ST}$ und $\overline{QR}$, $\overline{QT}$ und $\overline{RS}$ in den resp. Punkten A und A_1, B und B_1, C und C_1 schneiden, und sei O der Schnittpunkt von $\overline{QS}$ und $\overline{RT}$. Dann ist $ATOR$ eine Projection sowohl von ACA_1B_1 aus dem Mittelpunkte Q, als auch von ABA_1C_1 aus dem Mittelpunkte S, und daher

$$ACA_1B_1 \barwedge ATOR \barwedge ABA_1C_1.$$

Ausserdem aber ergiebt sich, wenn A mit A_1, sowie B mit C_1 vertauscht wird (Seite 144):

$$ABA_1C_1 \barwedge A_1C_1AB.$$

Folglich ist auch:

$$ACA_1B_1 \barwedge A_1C_1AB,$$

und $AA_1 \,.\, BB_1 \,.\, CC_1$ eine Involution. Denn werden zwei in u liegende Punktreihen projectiv so auf einander bezogen, dass den Punkten A, C, A_1 des ersten die resp. Punkte A_1, C_1, A des zweiten entsprechen, so liegen die Gebilde involutorisch, weil A und A_1 einander doppelt entsprechen, und B_1 und B entsprechen einander wegen der Beziehung $ACA_1B_1 \barwedge A_1C_1AB$.

Sind nun von einer involutorischen Punktreihe u zwei Punktenpaare A, A_1 und B, B_1 gegeben, und soll zu einem beliebigen fünften Punkte C der zugeordnete C_1 gesucht werden, so können wir ohne Benutzung der Gebilde II. Ordnung folgendermaassen verfahren. Wir construiren ein vollständiges Viereck, von welchem zwei Gegenseiten durch resp. A und A_1, zwei andere durch resp. B und B_1 gehen, eine fünfte Seite aber C enthält; dann trifft die sechste Seite den gesuchten Punkt C_1.

Zwei so construirte Vierecke $QRST$ und $Q_1R_1S_1T_1$ haben zu der Involution $AA_1 \,.\, BB_1 \,.\, CC_1$ wesentlich verschiedene Lagen, wenn ihre durch A, B, C gehenden Seiten in dem einen Viereck sich in einem Eckpunkte T schneiden, während sie in dem anderen ein Dreieck $Q_1R_1S_1$ bilden; ihre sechsten Seiten aber gehen gleichwohl beide durch C_1 (Fig. 65). Liegen die beiden Vierecke in verschiedenen Ebenen, so bilden ihre acht Eckpunkte zwei Tetraeder $QRST_1$ und $Q_1R_1S_1T$, welche einander sowohl um- als auch eingeschrieben sind. Ist das eine Tetraeder gegeben, so kann das andere hiernach leicht auf unendlich viele Weisen construirt werden.

Sind zwei Punkte M und N der Geraden u sowohl durch A und A_1 als auch durch B und B_1, also durch zwei paar Gegenseiten des Vierecks $QRST$ harmonisch getrennt, so sind sie auch durch C und C_1, d. h. durch das dritte paar Gegenseiten harmonisch getrennt. Denn M und N sind dann die Doppelpunkte der Involution $AA_1 \,.\, BB_1 \,.\, CC_1$.

„Wenn einem einfachen Viereck $QRST$ (Fig. 66) eine Curve „II. Ordnung umschrieben ist, so bilden die drei Paare von

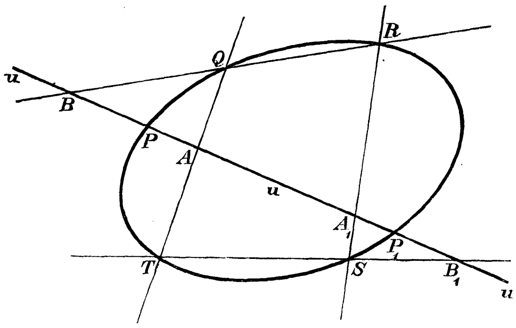

Fig. 66.

„Punkten, in welchen eine durch keinen Eckpunkt gehende „Gerade u die Curve und die zwei paar Gegenseiten des Vier„ecks schneidet, eine Involution. (Lehrsatz des Desargues.)"
Denn es werde u von den Seiten $\overline{TQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ und $\overline{ST}$ in den resp. Punkten A, B, A_1, B_1 geschnitten, von der Curve aber in den Punkten P und P_1. Dann sind die beiden Büschel, durch welche die Curvenpunkte P, R, P_1, T aus Q und S projicirt werden, projectiv (Seite 76), und folglich auch die Punktreihen PBP_1A und $PA_1P_1B_1$, in welchen diese Büschel durch die Gerade u geschnitten werden. Da nun $PA_1P_1B_1 \barwedge P_1B_1PA_1$ (Seite 144), so folgt auch:

$$PBP_1A \barwedge P_1B_1PA_1,$$

d. h. $PP_1 \,.\, AA_1 \,.\, BB_1$ ist eine Involution.

Ein ganz analoger Satz gilt für die Curven II. Ordnung, welche einem einfachen Vierseit eingeschrieben sind, also die Seiten desselben berühren. Weil aber ein involutorisches einförmiges Gebilde schon durch zwei Elementenpaare A, A_1 und B, B_1 bestimmt ist, so gilt auch folgender Doppelsatz:

Die einem Viereck umschriebenen Curven II. Ordnung werden von einer Geraden u, die in der Ebene des Vierecks liegt, aber durch keinen Eckpunkt desselben geht, in Punktenpaaren einer Involution geschnitten. In ihren beiden Doppelpunkten wird u von zwei jener Curven berührt.

An die einem Vierseit eingeschriebenen Curven II. Ordnung gehen durch einen Punkt S, welcher in der Ebene des Vierseits aber auf keiner Seite liegt, tangirende Strahlenpaare einer Involution. Die Doppelstrahlen von S berühren in diesem Punkte zwei jener Curven.

Jenachdem solche Doppelelemente vorhanden sind oder nicht, giebt es zwei oder gar keine Curven II. Ordnung, welche einem

Viereck umschrieben sind und zugleich eine in dessen Ebene beliebig gegebene Gerade u berühren.

Vierseit eingeschrieben sind und zugleich durch einen in dessen Ebene beliebig gegebenen Punkt gehen.

Zugleich ist die Aufgabe, diese Curven II. Ordnung zu construiren, zurückgeführt auf die folgende: „In einer Involution die Doppelelemente zu bestimmen.“ Mit dieser Aufgabe zweiten Grades werden wir uns in einem der nächsten Vorträge beschäftigen.

Ist im Satze links die Gerade u unendlich fern, so ergiebt sich insbesondere Folgendes:

„Durch vier eigentliche Punkte einer Ebene können entweder „zwei oder gar keine Parabeln gelegt werden.“

Dreizehnter Vortrag.

Metrische Relationen von Involutionen. Brennpunkte der Curven zweiter Ordnung.*)

Seien A, A_1; B, B_1; C, C_1 (Figg. 67 und 68) drei Punktenpaare einer involutorischen Punktreihe I. Ordnung, so dass (nach

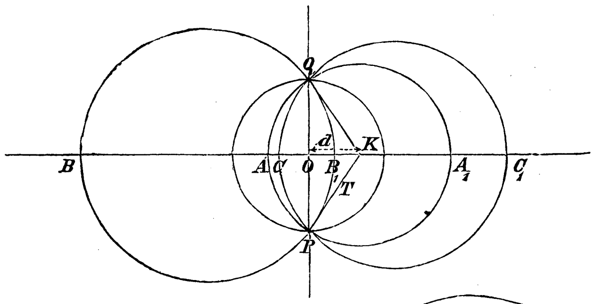

Fig. 67.

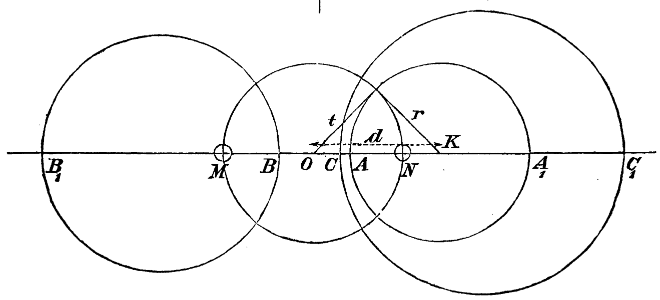

Fig. 68.

Seite 147) unter Anderem die Beziehung stattfindet: $AA_1BC_1 \barwedge A_1AB_1C$; dann gilt (Seite 66) für die Abschnitte, welche die sechs Punkte unter einander bilden, folgende Proportion:

$$\frac{AA_1}{AC_1} : \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{A_1A}{A_1C} : \frac{B_1A}{B_1C}.$$

*) Die wichtigeren Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte ausser den auf die Leitlinien bezüglichen und der fundamentalen, welche wir unten zur Definition der Brennpunkte benutzen, waren schon dem Apollonius bekannt. (Vgl. conicorum liber III, prop. 45 u. flgde.).

Wir können statt derselben auch die folgende schreiben:

$$\frac{AA_1}{AC_1} : \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{AA_1}{CA_1} : \frac{AB_1}{CB_1};$$

denn es ist $A_1A = -AA_1$; $A_1C = -CA_1$ u. s. w., weil je zwei solche Abschnitte gleiche Länge, aber entgegengesetzten Sinn haben. Werden alle Divisoren nebst dem Factor AA_1 fortgeschafft, so ergiebt sich die Gleichung

$$\text{I} \; \ldots \; AB_1 \, . \, BC_1 \, . \, CA_1 = AC_1 \, . \, BA_1 \, . \, CB_1.$$

Diese Formel findet sich ganz beiläufig schon in den Collectiones des Pappus, liber VII, prop. 130.

Die Beziehung $AA_1BC_1 \barwedge A_1AB_1C$ verliert ihre Gültigkeit nicht, wenn in derselben irgend zwei conjugirte Punkte vertauscht werden; dasselbe gilt daher von der Gleichung I. Durch Vertauschung von C mit C_1 z. B. erhalten wir folgende Gleichung:

$$\text{I}_a \; \ldots \; AB_1 \, . \, BC \, . \, C_1A_1 = AC \, . \, BA_1 \, . \, C_1B_1;$$

und in derselben Weise ergeben sich aus I noch andere ähnlich gebaute Gleichungen. Ganz analoge Gleichungen lassen sich auch für die Sinus der Winkel aufstellen, welche die sechs Elemente einer Involution im Büschel I. Ordnung mit einander bilden.

Die Gleichungen I und I_a vereinfachen sich wesentlich, wenn einer der sechs Punkte, z. B. C_1, ins Unendliche rückt. Sein zugeordneter Punkt C fällt dann zusammen mit dem sogenannten Mittelpunkte der involutorischen Punktreihe, d. h. mit demjenigen Punkte O, welcher dem unendlich fernen Punkte zugeordnet ist. Zugleich nähern sich die Verhältnisse:

$$\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{AC_1 - AB}{AC_1} = 1 - \frac{AB}{AC_1}$$

$$\text{und } \frac{C_1A_1}{C_1B_1} = \frac{C_1B_1 - A_1B_1}{C_1B_1} = 1 - \frac{A_1B_1}{C_1B_1}$$

unbegrenzt dem Werthe Eins, weil AC_1 und C_1B_1 ins Unendliche wachsen, AB und A_1B_1 dagegen endliche Abschnitte sind. Die Gleichungen I und I_a gehen also in folgende über:

$$AB_1 \, . \, OA_1 = BA_1 \, . \, OB_1$$

$$\text{und } AB_1 \, . \, BO = AO \, . \, BA_1.$$

Durch Division entsteht hieraus:

$$\frac{OA_1}{BO} = \frac{OB_1}{AO},$$

und diese Gleichung lässt sich sofort auf die Form bringen:

$$\text{II} \; \ldots \; OA \, . \, OA_1 = OB \, . \, OB_1;$$

d. h.: „Das Product der Abschnitte, welche zwei conjugirte Punkte „(A und A_1 oder B und B_1 etc.) einer involutorischen

„Punktreihe I. Ordnung mit dem Mittelpunkte O derselben „bilden, ist constant.“

Hat die Punktreihe zwei Doppelpunkte M und N (Fig. 68), in welchen also je zwei conjugirte Punkte zusammenfallen, so folgt aus II:

$$\text{III} \ldots . \; OA \,.\, OA_1 = (OM)^2 = (ON)^2.$$

Der Mittelpunkt O halbirt also den Abschnitt MN zwischen den Doppelpunkten. Zugleich sagt diese Gleichung aus (Seite 49), dass M und N durch A und A_1 harmonisch getrennt sind, was wir schon wissen.

Jenachdem das Product $OA \,.\, OA_1$ positiv (gleich einem Quadrat $[OM]^2$) oder negativ ist, sind Doppelpunkte vorhanden oder nicht. Im ersteren Falle liegen A und A_1 auf der gleichen, im letzteren Falle auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpunktes O. Dasselbe ergiebt sich aus einem früheren Satze (Seite 143).

Beschreiben wir über jedem Abschnitte AA_1, BB_1, CC_1 etc., welcher von zwei conjugirten Punkten der Involution begrenzt wird, einen Kreis, dessen Durchmesser der Abschnitt ist, und bezeichnen wir mit r den Radius eines beliebigen dieser Kreise, z. B. desjenigen über AA_1, und mit d den Abstand seines Mittelpunktes K vom Punkte O. Dann ist (Figg. 67 und 68):

$$OA = OK - AK = d - r$$
$$\text{und } OA_1 = OK + KA_1 = d + r,$$

und folglich:

$$OA \,.\, OA_1 = (d - r)\;(d + r) = d^2 - r^2.$$

Hat die Involution zwei Doppelpunkte M, N (Fig. 68), ist sie also hyperbolisch, so liegt O ausserhalb des Kreises und $d^2 - r^2$ bedeutet das Quadrat der Tangente t, die von O an den Kreis gelegt werden kann; denn t und r sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem d die Hypotenuse ist. Die Länge dieser Tangente ist nach Gleichung II dieselbe für alle über den Abschnitten construirten Kreise, und zwar nach III gleich der halben Länge des Abschnittes MN zwischen den Ordnungspunkten. Wird also aus dem Mittelpunkte O ein Kreis über MN beschrieben, so schneidet dieser die über AA_1, BB_1, CC_1 etc. construirten Kreise unter rechten Winkeln. Es lässt sich sogar zeigen, dass die letzteren Kreise von jedem durch M und N gelegten Kreise rechtwinklig geschnitten werden (vergl. Seite 49).

Ist die Involution elliptisch, d. h. hat sie keine Doppelpunkte (Fig. 67), so liegt ihr Mittelpunkt O innerhalb des über AA_1

beschriebenen Kreises, und $d^2 - r^2$ ist negativ. Wird dann durch O senkrecht zu AA_1 eine Sehne PQ dieses Kreises gezogen, so bildet jede Hälfte OP oder OQ dieser Sehne mit d zusammen die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem r die Hypotenuse ist, so dass $d^2 + (OP)^2 = r^2$ oder $d^2 - r^2 = -(OP)^2 = -(OQ)^2$ ist. Die Länge dieser Sehnenhälften bleibt aber nach Gleichung II dieselbe für alle über den Abschnitten AA_1, BB_1, CC_1 etc. construirten Kreise, und letztere gehen somit alle durch P und Q. Die Winkel APA_1, BPB_1, CPC_1 etc. sind daher Rechte, und wir erhalten den Satz:

„Hat eine involutorische Punktreihe I. Ordnung keine Doppel-
„punkte, so giebt es in jeder durch sie gelegten Ebene zwei
„Punkte P und Q, aus welchen sie durch rechtwinklige
„Strahleninvolutionen projicirt wird; je zwei conjugirte Strahlen
„dieser Involutionen stehen auf einander senkrecht.“

Dass die über AA_1, BB_1, CC_1 etc. construirten Kreise durch jeden Punkt gehen, in welchen irgend zwei von ihnen sich schneiden, kann auch aus folgendem Satze geschlossen werden:

„Eine Strahleninvolution ist rechtwinklig, wenn irgend zwei
„Strahlen a, b derselben mit ihren zugeordneten a_1, b_1 rechte
„Winkel bilden.“

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt daraus, dass die Strahlen eines Büschels S nur auf eine einzige Art involutorisch gepaart werden können, so dass seine Strahlen a und a_1, sowie b und b_1 einander zugeordnet sind. Dieses geschieht aber, wenn jedem Strahle von S der zu ihm senkrechte Strahl zugeordnet wird.

Hierher gehört auch der Satz:

„Werden einer Curve II. Ordnung beliebig viele rechtwinklige
„Dreiecke so eingeschrieben, dass die Scheitelpunkte der rechten
„Winkel in einem Punkte S zusammenfallen, so schneiden sich
„die Hypotenusen alle in einem Punkte.“

Durch die rechtwinklige Strahleninvolution S werden nämlich die Curvenpunkte involutorisch gepaart (vergl. Seite 141).

Ist in der Ebene einer Curve k II. Ordnung ein Strahlenbüschel U I. Ordnung gegeben, dessen Mittelpunkt nicht auf der Curve liegt, so sind die Strahlen von U involutorisch gepaart, wenn je zwei in Bezug auf k conjugirte Strahlen einander zugeordnet werden (Seite 139). Wenn die so entstehende Strahleninvolution rechtwinklig ist, so hat ihr Mittelpunkt eine besondere Bedeutung für die Curve II. Ordnung, und soll ein „Brennpunkt“

der letzteren heissen. Wir können also folgende Definition aufstellen:

„Jeder **Brennpunkt** einer Curve II. Ordnung hat solche Lage, „dass je zwei hinsichtlich der Curve conjugirte Strahlen desselben sich rechtwinklig schneiden.“

Ein Brennpunkt kann nicht ausserhalb der Curve II. Ordnung liegen; denn sonst hätte die Strahleninvolution, deren Mittelpunkt er ist, zwei Doppelstrahlen, nämlich die durch ihn gehenden beiden Tangenten der Curve. Jeder Brennpunkt F liegt auf einer Axe der Curve II. Ordnung; nämlich der durch F gelegte Durchmesser ist eine Axe, weil er senkrecht steht auf der durch F gehenden, ihm conjugirten Sehne. Die Verbindungslinie von zwei Brennpunkten F und F_1 einer Curve II. Ordnung ist eine Axe der Curve, weil sie zu den beiden Senkrechten, die in F und F_1 auf ihr errichtet werden können, conjugirt ist, ihr Pol also mit dem unendlich fernen Schnittpunkte dieser Senkrechten zusammenfällt (vergl. Seite 110).

Vom Kreise ist der Mittelpunkt ein Brennpunkt. Zwei Strahlen, die in Bezug auf einen Kreis conjugirt sind, schneiden sich nur dann rechtwinklig, wenn einer oder jeder von ihnen ein Durchmesser ist; woraus leicht zu erkennen ist, dass der Kreis ausser dem Mittelpunkte keinen Brennpunkt haben kann. Von der folgenden Untersuchung soll der Kreis ausgeschlossen werden.

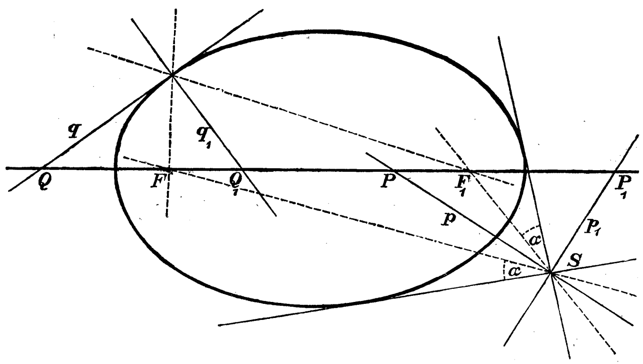

Fig. 69.

Zu einer Geraden p in der Ebene einer Curve II. Ordnung giebt es eine conjugirte normale Gerade p_1 (Fig. 69), nämlich die Senkrechte, welche von ihrem Pole auf sie gefällt werden kann.

Sei nun a eine Axe der Curve II. Ordnung, und möge dieselbe von p und p_1 unter schiefen Winkeln in den resp. Punkten P und P_1 geschnitten werden; dann steht jeder Strahl des Büschels P senkrecht auf dem ihm conjugirten Strahle des Büschels P_1. Die Büschel P und P_1 sind nämlich projectiv auf einander bezogen, wenn jedem Strahle des einen der ihm conjugirte Strahl des anderen zugewiesen ist (Seite 100); da aber, wenn A den unendlich fernen Pol der Axe a bedeutet, die drei Strahlen a, $\overline{PA}$, p von P ihre resp. conjugirten Strahlen $\overline{P_1A}$, a und p_1 von P_1 rechtwinklig schneiden, so erzeugen P und P_1 einen Kreis über dem Durchmesser PP_1, und je zwei conjugirte Strahlen dieser Büschel sind auf einander senkrecht. Hieraus folgt die erste Hälfte des Satzes:

„In einer Axe a einer Curve II. Ordnung giebt es zu jedem „Punkte P einen Punkt P_1, so dass je zwei conjugirte Strahlen, „welche durch resp. P und P_1 gehen, sich rechtwinklig schnei-„den. Werden je zwei solche Punkte einander zugeordnet, so „sind die Punkte der Axe a involutorisch gepaart."

Die zweite Hälfte dieses Satzes ergiebt sich aus Folgendem. Wir beziehen die beiden Parallelstrahlenbüschel, von denen der eine die Richtung des Strahles p und der andere diejenige des Strahles p_1 hat, projectiv auf einander (Seite 100), indem wir jedem Strahle des einen Büschels den ihm conjugirten Strahl des anderen zuweisen. Die Gerade a wird von diesen Büscheln in zwei projectiven Punktreihen geschnitten, diese aber liegen involutorisch, weil je zwei Punkte derselben, wie P und P_1, einander doppelt entsprechen.

„Hat diese Involution a zwei Doppelpunkte, so ist jeder der-„selben ein Brennpunkt der Curve II. Ordnung; hat a keine „Doppelpunkte, so ist jeder der beiden Punkte, aus welchen a „durch eine rechtwinklige Strahleninvolution projicirt wird „(Seite 154), ein Brennpunkt der Curve."

Denn je zwei conjugirte Strahlen eines solchen Punktes schneiden sich rechtwinklig. Im letzteren Falle liegen die Brennpunkte in der von a verschiedenen Axe der Curve II. Ordnung, und bilden die Doppelpunkte einer in dieser zweiten Axe liegenden Involution, welche auf dieselbe Weise entsteht wie die erstere.

Keine Curve II. Ordnung hat mehr als zwei Brennpunkte; denn jede Verbindungslinie von zwei Brennpunkten ist eine Axe der Curve, und nur der Kreis hat mehr als zwei Axen. Diejenige

Axe a einer Ellipse oder Hyperbel, auf welcher die beiden Brennpunkte der Curve liegen, wird die „Hauptaxe", die andere wird die „Nebenaxe" genannt.

„Umschreibt man einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypo-
„tenuse in der Nebenaxe einer Curve II. Ordnung liegt und
„dessen Katheten conjugirt sind, einen Kreis, so schneidet der-
„selbe die Hauptaxe in den Brennpunkten der Curve."

Dieser Satz folgt sofort aus der zweiten Hälfte des vorhergehenden Satzes.

Die Hyperbel wird von ihrer Hauptaxe geschnitten; denn auf derjenigen Axe, von welcher sie nicht geschnitten wird, können die Brennpunkte nicht liegen, weil sie von der Curve eingeschlossen sind. Die Brennpunkte einer Ellipse oder Hyperbel haben vom Mittelpunkt der Curve gleichen Abstand (Seite 45); denn in der Involution a, deren Doppelpunkte die Brennpunkte sind, ist der Mittelpunkt dem unendlich fernen Punkte zugeordnet, weil die Nebenaxe der Curve allen zu ihr normalen Geraden conjugirt ist. Ueberhaupt sind die Brennpunkte harmonisch getrennt durch je zwei conjugirte Gerade, welche sich rechtwinklig schneiden.

Ist die Curve II. Ordnung eine Parabel, also a die Axe derselben, so haben die beiden projectiven Parallelstrahlenbüschel, von denen vorhin die Rede war, die unendlich ferne Gerade entsprechend gemein; denn dieselbe ist, als Tangente der Parabel, sich selbst conjugirt In der Involution a fällt also der eine Doppelpunkt zusammen mit dem unendlich fernen Punkt, welcher sonach als (uneigentlicher) Brennpunkt der Parabel anzusehen ist. Die Parabel hat demnach nur einen eigentlichen Brennpunkt, welcher als zweiter Doppelpunkt von a den Abschnitt zwischen je zwei einander zugeordneten Punkten P und P_1 halbirt.

Seien nun F und F_1 die beiden Brennpunkte einer Curve II. Ordnung, von denen der eine unendlich fern in der Richtung der parallelen Durchmesser liegt, wenn die Curve eine Parabel ist. Je zwei conjugirte Gerade $\overline{SP}$ und $\overline{SP_1}$, die auf einander senkrecht stehen (Fig. 69), sind dann durch die Punkte F und F_1 und folglich auch durch die Strahlen $\overline{SF}$ und $\overline{SF_1}$ harmonisch getrennt; sie halbiren daher die Winkel zwischen $\overline{SF}$ und $\overline{SF_1}$ (Seite 46). Ist S ein Punkt der Curve, so berührt eine der Geraden $\overline{SP}$ und $\overline{SP_1}$ die Curve; liegt S ausserhalb der Curve, so halbiren $\overline{SP}$ und $\overline{SP_1}$ auch die Winkel zwischen den beiden Tangenten, welche von S an die Curve gezogen werden können, weil diese gleichfalls durch $\overline{SP}$ und $\overline{SP_1}$ harmonisch getrennt sind (Seite 100). Wir erhalten somit die Sätze:

„Jede Tangente einer Curve II. Ordnung bildet gleiche Winkel „mit den beiden Geraden, welche ihren Berührungspunkt mit „den Brennpunkten der Curve verbinden. Wenn zwei Kegel„schnitte die nämlichen Brennpunkte haben (confocal sind), so „schneiden sich folglich die beiden Tangenten eines jeden „eigentlichen Punktes, den sie mit einander gemein haben, „rechtwinklig."

„Wird der Schnittpunkt von zwei Tangenten verbunden mit „den Brennpunkten einer Curve II. Ordnung, so bildet die eine „Verbindungslinie mit der einen Tangente denselben Winkel wie „die andere Tangente mit der andern Verbindungslinie."

Die Polare f eines Brennpunktes F der Curve II. Ordnung wird „Directrix" oder „Leitlinie" der Curve genannt; es giebt deren zwei bei der Ellipse und der Hyperbel, und eine eigentliche bei der Parabel. Für letztere nun gilt der Satz:

„Zwei Parabeltangenten $\overline{PA}$ und $\overline{PB}$ stehen auf einander senk„recht, wenn ihr Schnittpunkt P auf der Leitlinie liegt."

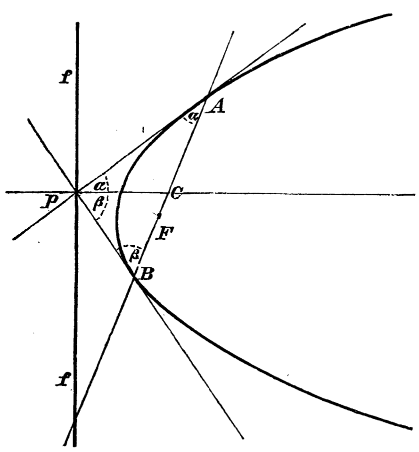

Fig. 70.

In diesem Falle nämlich geht die Polare von P durch den Brennpunkt F (Fig. 70), sie enthält die Berührungspunkte A und B der beiden Tangenten, und jede dieser Tangenten bildet deshalb mit $\overline{AB}$ dieselben Winkel wie mit einem beliebigen Durchmesser. Folglich ist in dem Dreieck APB die Summe der Winkel A und B gleich der Summe der Winkel, welche $\overline{PA}$ und $\overline{PB}$ mit dem durch P gehenden Durchmesser PC bilden, also gleich dem Winkel P, und weil die Winkel A, B und P zusammen zwei Rechte ausmachen, so muss P ein rechter Winkel sein.

Andere bemerkenswerthe Eigenschaften der Brennpunkte einer

Curve II. Ordnung ergeben sich aus ihrer Definition, wonach je zwei conjugirte Strahlen eines Brennpunktes sich rechtwinklig schneiden; u. A. gilt der Satz:

„Der Abschnitt einer Tangente, welcher zwischen dem Berüh-
„rungspunkte und einer Directrix liegt, wird aus dem zugehö-
„rigen Brennpunkte durch einen rechten Winkel projicirt.“

Die Schenkel dieses Winkels sind nämlich zwei conjugirte Strahlen des Brennpunktes F, weil der Punkt, in welchem die Tangente von der Directrix f geschnitten wird, die Verbindungslinie von F mit dem Berührungspunkte zur Polare hat.

Seien $\overline{TA}$ und $\overline{TB}$ zwei beliebige Tangenten einer Curve

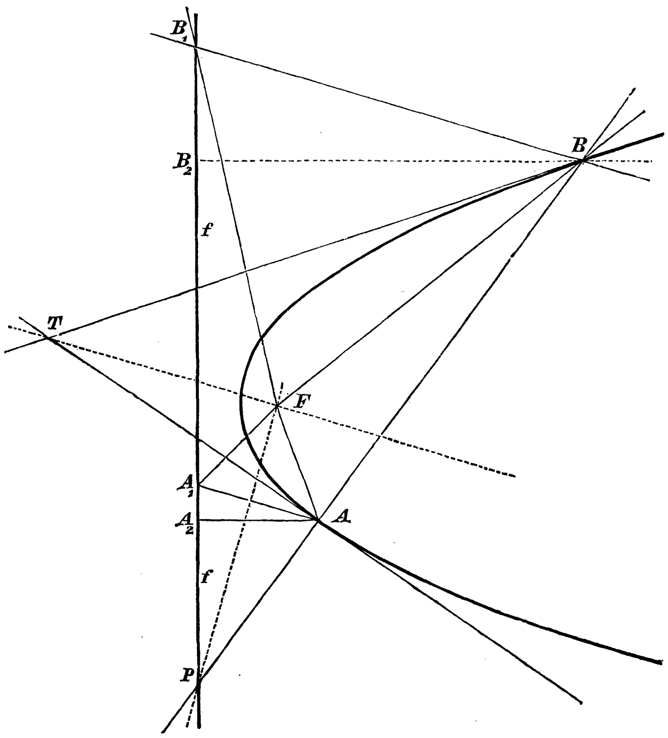

Fig. 71.

II. Ordnung (Fig. 71), sei also $\overline{AB}$ die Polare des Punktes T; dann ist der Schnittpunkt P von $\overline{AB}$ und f der Pol der Geraden $\overline{TF}$, und $\overline{PF}$ steht senkrecht zu $\overline{TF}$, weil diese beiden Strahlen conjugirt sind. Zugleich sind $\overline{FA}$ und $\overline{FB}$ harmonisch getrennt durch $\overline{FT}$ und $\overline{FP}$, weil A und B harmonisch getrennt sind durch P und $\overline{FT}$. Folglich werden die von $\overline{FA}$ und $\overline{FB}$ gebildeten Nebenwinkel halbirt durch $\overline{FT}$ und $\overline{FP}$ (Seite 46); oder:

„Wird ein Brennpunkt einer Curve II. Ordnung verbunden mit „den Berührungspunkten, sowie mit dem Schnittpunkte von zwei „Tangenten, so bildet die letztere Verbindungslinie gleiche „Winkel mit den beiden ersteren.“

Werden durch A und B (Fig. 71) zwei Parallele zu $\overline{FT}$ gezogen, welche in resp. A_1 und B_1 die Directrix f schneiden, so sind auch A_1 und B_1 harmonisch getrennt durch P und $\overline{FT}$. Die Winkel zwischen $\overline{FA_1}$ und $\overline{FB_1}$ werden daher ebenfalls halbirt durch $\overline{FT}$ und $\overline{FP}$. Hieraus folgt sogleich, dass die Dreiecke A_1AF und B_1BF gleiche Winkel haben und ähnlich sind, dass also die Proportion gilt:

$$FA : AA_1 = FB : BB_1.$$

Die Abschnittte AA_1 und BB_1 bilden gleiche Winkel mit der Directrix f, und sind deshalb proportional zu den Senkrechten AA_2 und BB_2, welche aus A und B auf f gefällt werden können, so dass wir auch haben:

$$FA : AA_2 = FB : BB_2.$$

Hier sind A und B zwei ganz beliebige Curvenpunkte; also gilt der Satz:

„Die Abstände eines beliebigen Punktes der Curve II. Ordnung „von einem Brennpunkte und von der zugehörigen Directrix „haben ein constantes Verhältniss zu einander“ (Pappus).

Für die Parabel ist der Werth dieses Verhältnisses gleich der Einheit, die beiden Abstände sind einander gleich; denn der Scheitelpunkt ist eben so weit entfernt vom Brennpunkte wie von der Directrix, weil er durch beide harmonisch getrennt ist vom unendlich fernen Parabelpunkt. Mit Benutzung der Scheitelpunkte beweisen Sie leicht, dass der Werth jenes Verhältnisses kleiner ist als eins bei der Ellipse, und grösser als eins bei der Hyperbel; und da eine Curve II. Ordnung durch jede ihrer Axen in zwei symmetrische Hälften zerfällt, so hat das Verhältniss denselben Werth für den einen wie für den anderen Brennpunkt und dessen Directrix. Sind also r und r_1 die Abstände irgend eines Curvenpunktes A von den beiden Brennpunkten F und F_1 (Fig. 72 und 73), d und d_1 seine Abstände von den zugehörigen beiden Leit-

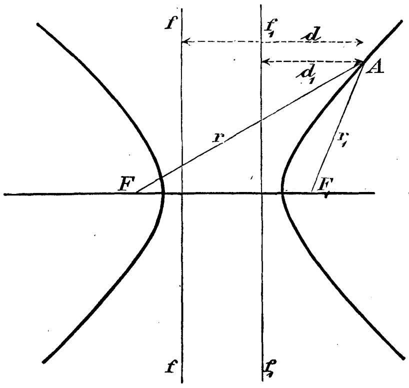

Fig. 72.

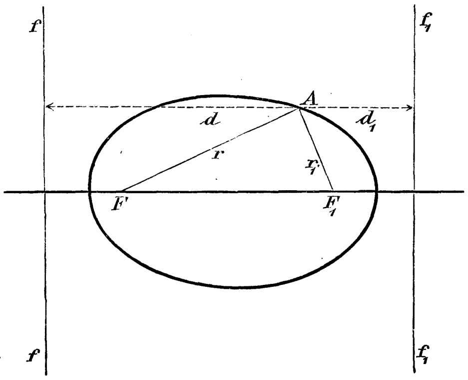

Fig. 73.

linien f und f_1, so ist

$$\frac{r}{d} = \frac{r_1}{d_1} = \text{Const.},$$

wo auch der Punkt A liegen möge. Es folgt hieraus, dass auch $\frac{r \pm r_1}{d \pm d_1}$ diesem constanten Verhältnisse gleich ist. Bei der Ellipse ist aber $d + d_1$ und bei der Hyperbel $d - d_1$ constant, nämlich gleich dem Abstande der beiden Leitlinien von einander; also muss für die Ellipse die Summe $r + r_1$, und für die Hyperbel die Differenz $r - r_1$ constant sein, d. h.:

„Die Summe der Abstände eines beliebigen Punktes einer El- „lipse von den Brennpunkten derselben ist constant."

„Die Differenz der Abstände eines beliebigen Punktes einer „Hyperbel von den Brennpunkten derselben ist constant."

Ohne Mühe werden Sie finden, dass diese constante Summe oder Differenz gleich ist dem Abschnitte $2a$ zwischen den Scheitelpunkten der Hauptaxe, und dass die Ellipse von ihrer Hauptaxe ein grösseres Stück einschliesst, als von der Nebenaxe.

Wenn zwei Punkte zu einer Geraden symmetrisch liegen, d. h. wenn ihre Verbindungslinie auf der Geraden senkrecht steht und von ihr halbirt wird, so heisst der eine der „Gegenpunkt" des anderen bezüglich der Geraden. Für die Ellipse und die Hyperbel nun gilt der Satz:

„Die Gegenpunkte eines Brennpunktes F_1 bezüglich aller Tan-
„genten einer Ellipse oder Hyperbel liegen auf einem Kreise
„vom Radius $2a$, welcher den anderen Brennpunkt F zum
„Mittelpunkt hat.“

Ist nämlich G der Gegenpunkt von F_1 bezüglich einer beliebigen Tangente, deren Berührungspunkt A sei (Fig. 74), so liegen F,

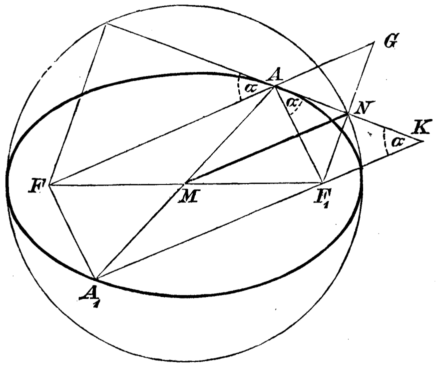

Fig. 74.

A und G in einer Geraden, weil $\overline{AF_1}$ und folglich auch $\overline{AG}$ mit der Tangente dieselben Winkel bildet wie $\overline{AF}$ (Seite 158). Und da ausserdem die Punkte F_1 und G von A gleiche Abstände haben, so ist FG gleich der Summe (resp. Differenz) von FA und F_1A, also constant $= 2a$, wie oben behauptet wurde. — Der Fusspunkt N des von F_1 auf die Tangente gefällten Perpendikels ist der Halbirungspunkt von F_1G, und der Mittelpunkt M der Curve halbirt die Strecke F_1F; folglich ist MN parallel zu FG und gleich $\frac{1}{2}FG$, also $MN = a$; d. h.:

„Die Fusspunkte aller Perpendikel, welche von den Brennpunkten
„einer Ellipse oder Hyperbel auf deren Tangenten gefällt werden
„können, liegen auf einem Kreise, welcher den Abschnitt zwi-
„schen den Scheitelpunkten der Hauptaxe zum Durchmesser hat.“

Betrachtet man die Parabel als Grenzfall der Ellipse oder Hyperbel, z. B. als eine Ellipse, von welcher ein Brennpunkt unendlich fern liegt, so gelangt man zu folgendem Satze:

„Die Fusspunkte aller Perpendikel, welche vom Brennpunkte F
„einer Parabel auf deren Tangenten gefällt werden können,
„liegen auf der Scheiteltangente der Parabel.“

Um ihn zu beweisen, legen wir durch den Schnittpunkt N der Scheiteltangente $\overline{NS}$ und einer beliebigen Tangente $\overline{NA}$ (Fig. 75) eine Parallele $\overline{NF_1}$ zur Axe und eine Gerade $\overline{NF}$ nach dem

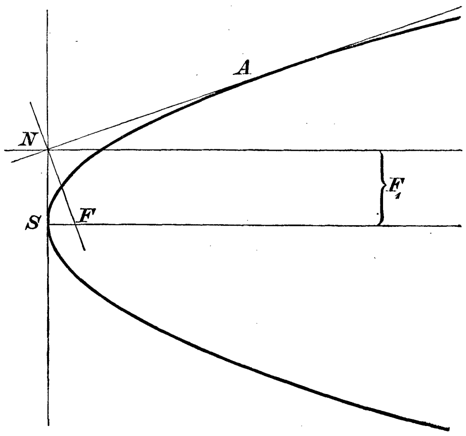

Fig. 75.

Brennpunkte; dann sind die Winkel FNA und SNF_1 gleich (Seite 158), weil $\overline{NF_1}$ den zweiten, unendlich fernen Brennpunkt der Parabel enthält; und da SNF_1 ein rechter Winkel ist, so muss auch FNA ein solcher sein.

Diese Sätze geben uns zugleich Mittel an die Hand, die Brennpunkte einer Curve II. Ordnung auf einfache Weise zu construiren. Eine sehr einfache Construction für die Ellipse oder Hyperbel ist noch die folgende. Man construire in den beiden Scheitelpunkten der Hauptaxe die Tangenten; dieselben schneiden jede dritte Tangente in zwei Punkten P, Q, welche aus jedem Punkte der Hauptaxe durch zwei conjugirte Strahlen projicirt werden (Seite 102). Um also die Brennpunkte zu erhalten, für welche diese beiden conjugirten Strahlen auf einander senkrecht stehen müssen, beschreibe man über PQ als Durchmesser einen Kreis; die Schnittpunkte desselben mit der Hauptaxe sind die gesuchten beiden Brennpunkte (Apollonius).

Werden zwei Tangenten $\overline{TA}$ und $\overline{TB}$ einer Curve II. Ordnung von einer dritten in den resp. Punkten A_1 und B_1 geschnitten, und sind A, B und C die resp. drei Berührungspunkte, und F ein eigentlicher Brennpunkt der Curve (Fig. 76), so gelten für die Winkel, durch welche die Abschnitte der Tangenten aus F

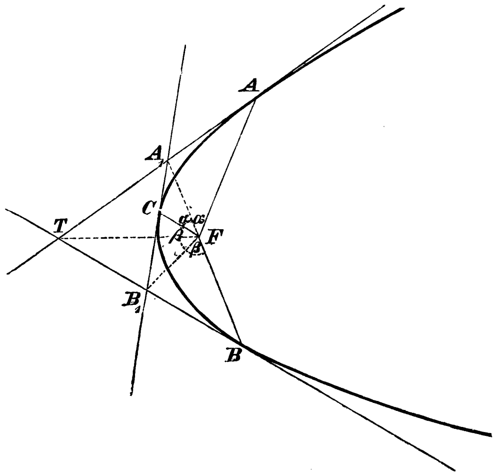

Fig. 76.

projicirt werden, folgende Gleichungen (Seite 160):

$$\angle B_1FC = \angle BFB_1 = \tfrac{1}{2} \angle BFC,$$
$$\angle CFA_1 = \angle A_1FA = \tfrac{1}{2} \angle CFA;$$

folglich: $\angle B_1FC + \angle CFA_1 = \frac{1}{2}(\angle BFC + \angle CFA),$

oder: $\angle B_1FA_1 = \angle BFT = \angle TFA.$

Bleiben also die ersten beiden Tangenten $\overline{TA}$ und $\overline{TB}$ fest, so hat der Winkel B_1FA_1, durch welchen der von ihnen begrenzte Abschnitt A_1B_1 der dritten Tangente aus dem Brennpunkte F projicirt wird, eine unveränderliche Grösse, wie auch die dritte Tangente angenommen werden mag. Rollt die dritte Tangente auf der Curve fort, so beschreiben A_1 und B_1 zwei projective Punktreihen in den festen Tangenten, die Strahlen $\overline{FA_1}$ und $\overline{FB_1}$ aber zwei gleiche Strahlenbüschel um F; also:

„Die projectiven Punktreihen, in welchen irgend zwei Tan-
„genten einer Curve II. Ordnung die übrigen schneiden, werden
„aus jedem Brennpunkte der Curve durch zwei gleiche und gleich-
„laufend projective Büschel projicirt."

Dieser Satz gilt auch dann, wenn die Curve II. Ordnung eine Parabel oder ein Kreis, und zugleich der Brennpunkt der unendlich ferne Punkt der ersteren, oder der Mittelpunkt des letzteren ist. Sind von einer Curve II. Ordnung drei Tangenten und ein Brennpunkt gegeben, so können hiernach leicht beliebig viele andere Tangenten construirt werden.

Ist die Curve II. Ordnung eine Parabel, so kann die bewegliche Tangente $\overline{A_1 B_1}$ auch in das Unendliche rücken, und die Geraden $\overline{FA_1}$ und $\overline{FB_1}$ bilden folglich dieselben Winkel mit einander wie die festen Tangenten $\overline{TA}$ und $\overline{TB}$. Das Viereck $B_1 T A_1 F$ ist demnach ein Kreisviereck, und:

„Jeder Kreis, welcher einem Tangentendreieck $B_1 T A_1$ einer „Parabel umschrieben ist, geht durch den Brennpunkt F der „Parabel."

Wenn man also den vier Dreiecken, welche von den Seiten eines Vierseits gebildet werden, Kreise umschreibt, so haben diese einen Punkt mit einander gemein, nämlich den Brennpunkt der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel.

Ist die Curve II. Ordnung eine Hyperbel, und sind die beiden festen Tangenten $\overline{TA}$ und $\overline{TB}$ ihre Asymptoten, also A und B ihre unendlich fernen Punkte, so laufen $\overline{TB}$ und $\overline{FB}$ parallel und der Winkel $B_1 F A_1 = BFT$ ist gleich dem einen der beiden Winkel, welche die Asymptote $\overline{TB}$ mit der Hauptaxe $\overline{FT}$ bildet; dem anderen ist der Winkel $A_1 F_1 B_1$ gleich, durch welchen $A_1 B_1$ aus dem zweiten Brennpunkte F_1 projicirt wird. Folglich sind $B_1 F A_1$ und $A_1 F_1 B_1$ zwei Nebenwinkeln gleich, und $B_1 F A_1 F_1$ ist ein Kreisviereck. Also:

„Die beiden Brennpunkte einer Hyperbel liegen mit den Punkten, „in welchen eine beliebige Tangente die beiden Asymptoten „schneidet, auf einem Kreise. Die Mittelpunkte dieses Kreises „und der Hyperbel liegen mit denselben beiden Schnittpunkten „auf einem zweiten Kreise."

Vierzehnter Vortrag.

Aufgaben zweiten Grades. Imaginäre Elemente.

Unsere Untersuchungen haben uns mehrfach zu Aufgaben geführt, welche im Allgemeinen zwei Lösungen zulassen, und nicht mit alleiniger Anwendung linearer Constructionen gelöst werden können, sondern die Benutzung eines Gebildes zweiter Ordnung verlangen. Hierher gehört u. A. die Aufgabe: „diejenigen Punkte zu bestimmen, welche zwei in einander liegende projective Punktreihen entsprechend gemein haben“, sowie die folgende: „von einem involutorischen Elementargebilde die Doppelelemente zu bestimmen“. Alle solche Aufgaben lassen sich auf die folgende zurückführen:

„Zwei Punktreihen II. Ordnung k und k_1, die in derselben Curve „liegen, sind projectiv auf einander bezogen; ihre entsprechend „gemeinschaftlichen Punkte sollen bestimmt werden.“

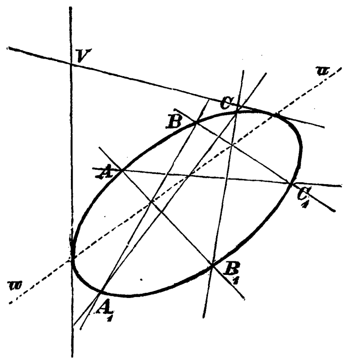

Fig. 77.

Seien A, B, C (Fig. 77) drei beliebige Punkte von k, und A_1, B_1, C_1 die ihnen entsprechenden Punkte von k_1. Projiciren wir dann aus A die Punktreihe k_1 und ebenso aus A_1 die Punktreihe k, so erhalten wir zwei projective Büschel $A(A_1 B_1 C_1)$ und $A_1(ABC)$, welche den Strahl $\overline{AA_1}$ entsprechend gemein haben. Die Schnittpunkte von je zwei homologen Strahlen der Büschel liegen folglich auf einer Geraden u, nämlich auf derjenigen, welche den Schnittpunkt von $\overline{AB_1}$ und $\overline{A_1B}$ verbindet mit dem Schnittpunkte von $\overline{AC_1}$ und $\overline{A_1C}$. Die Punkte aber, welche u mit der Curve II. Ordnung gemein hat, sind die gesuchten, denn die Punktreihen k und k_1 haben jeden dieser Punkte entsprechend gemein. Jenachdem also u die Curve schneidet, berührt oder gar nicht trifft, erhalten wir zwei solche Punkte, oder einen, oder gar keinen Punkt.

Zufolge des Pascal'schen Lehrsatzes liegt auf der Geraden u auch der Schnittpunkt der Geraden $\overline{BC_1}$ und B_1C; denn auf der Geraden u schneiden sich die drei paar Gegenseiten des Sechsecks $AB_1CA_1BC_1$, welches der Curve II. Ordnung eingeschrieben ist. Zu derselben Geraden u gelangen wir also auch, wenn wir die projectiven Punktreihen k_1 und k aus den resp. Punkten B und B_1 oder aus C und C_1 durch zwei perspective Strahlenbüschel projiciren. Sind überhaupt P, Q irgend zwei Punkte von k und P_1, Q_1 die ihnen entsprechenden Punkte von k_1, so liegt der Schnittpunkt von $\overline{PQ_1}$ und $\overline{P_1Q}$ auf der Geraden u. Wenn also drei Punkte von k nebst den entsprechenden Punkten von k_1 gegeben sind, so kann die Gerade u ohne Schwierigkeit construirt werden.

Liegen die Punktreihen k und k_1 involutorisch, bilden sie also eine Involution, so ist u die Involutionsaxe, und die Curve wird von ihr in den beiden Doppelpunkten geschnitten, wenn die Involution solche hat. In diesem Falle brauchen wir nur zwei Paare zugeordneter Punkte A, A_1 und B, B_1 zu kennen, um u zu construiren; denn den Punkten A, B, A_1 von k entsprechen sodann die resp. Punkte A_1, B_1, A von k_1, und u geht durch die beiden Punkte, in welchen die Geraden $\overline{AB_1}$ und $\overline{AB}$ von den resp. Geraden $\overline{A_1B}$ und $\overline{A_1B_1}$ geschnitten werden (Figg. 60 und 61). Der Pol von u, in welchem sich die Geraden $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$ schneiden, ist das Involutionscentrum, und wenn aus demselben zwei Tangenten an die Curve gezogen werden können, so berühren diese die Curve in den Doppelpunkten der Involution.

Auf die soeben gelöste Aufgabe lassen sich nun die verschiedenen Fälle der folgenden allgemeineren Aufgabe leicht zurückführen:

„Von zwei projectiven Elementargebilden, die in einander liegen,
„die entsprechend gemeinschaftlichen Elemente zu bestimmen.“

Sind z. B. die Elementargebilde zwei Kegel oder zwei Regelschaaren, so schneiden wir sie durch eine beliebige Ebene in zwei projectiven Punktreihen, die in derselben Curve II. Ordnung liegen; sind sie zwei Strahlenbüschel II. Ordnung, so liegen auch die Punktreihen II. Ordnung, welche von denselben eingehüllt werden, in einander, und sind projectiv: wir brauchen also nur die Punkte zu bestimmen, welche diese Punktreihen entsprechend gemein haben, um sofort die gesuchten beiden Strahlen, die Tangenten dieser Punkte, zu erhalten. Liegen zwei projective Strahlenbüschel I. Ordnung concentrisch und in einer Ebene, so schneiden wir sie durch eine Curve II. Ordnung, welche durch ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt geht, in zwei projectiven Punktreihen k und k_1; die beiden Strahlen, welche die Büschel entsprechend gemein haben, gehen dann durch die beiden Punkte, welche k und k_1 entsprechend gemein haben. Sind die beiden projectiven Elementargebilde zwei Punktreihen v und v_1 (Fig. 78), die in der-

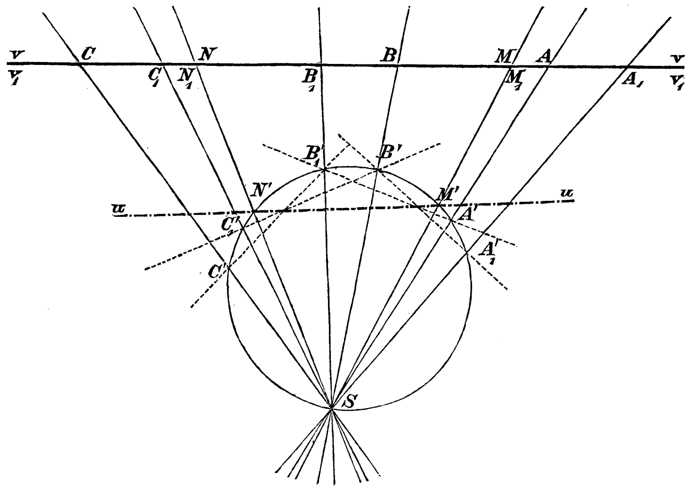

Fig. 78.

selben Geraden liegen, so wird dieser Fall auf den eben erledigten zurückgeführt, indem wir die Punktreihen aus einem beliebigen Punkte S durch zwei concentrische Strahlenbüschel projiciren. Wir legen also durch S eine Curve II. Ordnung, z. B. einen Kreis, in der Ebene $\overline{Sv}$, und projiciren irgend drei Punkte A, B, C von v und die ihnen entsprechenden Punkte A_1, B_1, C_1 von v_1 aus dem Punkte S auf diese Curve. Wir erhalten so die resp. Curvenpunkte A', B', C' und A'_1, B'_1, C'_1, und bestimmen sofort die Gerade u, auf welcher die Schnittpunkte von $\overline{A'B'_1}$ und $\overline{A'_1B'}$, von $\overline{B'C'_1}$ und $\overline{B'_1C'}$, sowie von $\overline{C'A'_1}$ und $\overline{C'_1A'}$ liegen. Wird dann die Curve II. Ordnung von u in zwei Punkten M' und N' geschnitten, so projiciren wir diese aus dem Punkte S auf die Gerade v, und erhalten so die beiden Punkte M und N von v, welche mit ihren entsprechenden Punkten M_1 und N_1 von v_1 zusammenfallen. Hat die Curve II. Ordnung nur einen oder keinen Punkt mit u gemein, so erhalten wir nur einen oder keinen entsprechend gemeinschaftlichen Punkt der Punktreihen v und v_1.

Für die Büschel und die Kegel II. Ordnung lässt sich die allgemeine Aufgabe auch direct, ohne Benutzung der Curven II. Ordnung lösen; für die einförmigen Grundgebilde können wir sie daher lösen mit Hülfe eines beliebigen Elementar-Gebildes II. Ordnung. Die bequemste Lösung ist jedoch die soeben gegebene, weil sich Curven II. Ordnung mittelst des Cirkels leicht construiren lassen.

Bekanntlich sind zahlreiche Fortschritte der Mathematik innig verknüpft mit dem Bestreben, durch Erweiterung vorhandener oder Einführung neuer Begriffe Ausnahmen von allgemeinen Sätzen und Regeln zu beseitigen und verschiedene Sätze unter einem Gesichtspunkte zu vereinigen. So wurde die Arithmetik durch die negativen, durch die irrationalen und endlich durch die imaginären Zahlen wesentlich bereichert, und ohne die letzteren würde der wichtige Satz, dass eine Gleichung n^{ten} Grades n Wurzeln hat, mit allen seinen zahlreichen Anwendungen z. B. in der analytischen Geometrie, geradezu falsch sein. Ebenso erwies sich die Einführung der unendlich fernen Elemente in die neuere Geometrie als höchst fruchtbar.

Die Aufgaben zweiten Grades nun haben den ersten Anlass gegeben, auch in die synthetische Geometrie „imaginäre" Punkte, Gerade und Ebenen einzuführen; und zwar ist es eines der grossen Verdienste von Staudt's, die Theorie der imaginären Elemente rein geometrisch begründet und zu einem hohen Grade der Vollkommenheit gebracht zu haben. Es liegt aber in der Natur der Sache, dass diese Theorie in der synthetischen wie in der analytischen Geometrie auf die Anschaulichkeit verzichten muss; deshalb beschränke ich mich hier darauf, nur die Anfangsgründe der Lehre vom geometrisch Imaginären Ihnen vorzutragen.

Wir definiren die imaginären Elemente durch folgenden Satz, welcher zugleich die Ergebnisse der vorhergehenden Untersuchung zusammenfasst:

„Zwei projective Elementargebilde, die in einander liegen, aber „nicht identisch sind, haben zwei reelle oder conjugirt imaginäre „Elemente (die aber auch zusammenfallen können) entsprechend „gemein."

Wir nennen also die beiden entsprechend gemeinschaftlichen

Elemente „imaginär“, so oft sie nicht reell vorhanden sind; in allen meinen früheren Vorträgen war nur von „reellen“ Elementen die Rede. Eine Involution hat hiernach allemal zwei (reelle oder imaginäre) Doppelelemente. Auch können wir sagen:

Eine Curve II. Ordnung hat mit jeder reellen Geraden ihrer Ebene zwei Punkte gemein;	Von einer Curve II. Ordnung gehen durch jeden reellen Punkt ihrer Ebene zwei Tangenten;

und nur dann, wenn die verschiedenen, in diesem Doppelsatze zusammengefassten Fälle getrennt werden sollen, fügen wir hinzu:

diese beiden Punkte sind imaginär oder reell oder sie fallen zusammen, jenachdem die Gerade ganz ausserhalb der Curve liegt oder dieselbe schneidet oder berührt.	diese beiden Tangenten sind imaginär oder reell oder sie fallen zusammen, jenachdem der Punkt innerhalb oder ausserhalb oder auf der Curve liegt.

Wenn die Curve II. Ordnung und die Gerade vollständig gegeben sind, so wollen wir ihre beiden gemeinschaftlichen Punkte als bestimmt ansehen. Sind aber z. B. nur fünf Punkte A, B, C, D, E der Curve gegeben, so denken wir uns letztere durch zwei projective Strahlenbüschel $A(CDE)$ und $B(CDE)$ erzeugt; dieselben werden von der Geraden in zwei projectiven Punktreihen geschnitten, welche jene beiden Punkte entsprechend gemein haben. Die beiden Punkte können nach den obigen Regeln bestimmt werden, wenn irgend eine Curve II. Ordnung vollständig gegeben ist. Wir können auf diese Weise auch entscheiden, von welcher Art eine durch fünf Punkte bestimmte Curve II. Ordnung ist; denn

„Eine Curve II. Ordnung ist eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel, „jenachdem die beiden Punkte, welche sie mit der unendlich „fernen Geraden gemein hat, reell oder imaginär sind oder „zusammenfallen.“

Auch die folgenden Aufgaben zweiten Grades können mittelst derselben Methode gelöst werden:

Von einer Curve II. Ordnung sind gegeben

vier Punkte und die Tangente von einem derselben, oder drei Punkte und die Tangenten von zwei derselben; die beiden Punkte sollen bestimmt werden, welche sie mit einer beliebigen reellen Geraden ihrer Ebene gemein hat.	vier Tangenten und der Berührungspunkt von einer derselben, oder drei Tangenten und die Berührungspunkte von zwei derselben; die beiden Tangenten sollen bestimmt werden, welche durch einen beliebigen reellen Punkt ihrer Ebene gehen.

Sollen die gemeinschaftlichen Punkte einer Geraden und einer Curve II. Ordnung, von welcher fünf Tangenten gegeben sind, bestimmt werden, so suchen wir zunächst die Berührungspunkte der Tangenten, und führen so diese Aufgabe auf die vorhin gelöste zurück.

Die beiden conjugirt imaginären Doppelelemente einer elliptischen Involution $AA_1 . BB_1 \ldots$ werden von v. Staudt dadurch unterschieden, dass er mit dem Gebilde einen bestimmten in ihm enthaltenen Sinn ABA_1 oder A_1BA verbindet. Auch ohne hierauf näher einzugehen, können wir auf Grund des Vorhergehenden folgende Sätze und Definitionen aufstellen:

Ein imaginärer Punkt liegt allemal auf einer reellen Geraden; dieselbe enthält auch den conjugirt imaginären Punkt.	Eine imaginäre Ebene geht allemal durch eine reelle Gerade; durch dieselbe geht auch die conjugirt imaginäre Ebene.

Eine imaginäre Gerade „erster Art“ geht allemal durch einen reellen Punkt und liegt in einer reellen Ebene mit ihrer conjugirt imaginären Geraden; nämlich der Punkt und die Ebene sind die Träger der projectiven Büschel I. Ordnung, welche die beiden conjugirt imaginären Geraden entsprechend gemein haben.

Zwei projective Regelschaaren II. Ordnung, die in einander liegen, haben entweder zwei reelle Gerade, die auch zusammenfallen können, oder zwei conjugirt imaginäre Gerade „zweiter Art“ entsprechend gemein. Von den imaginären Geraden erster Art unterscheiden sich diese Geraden zweiter Art dadurch, dass sie von keiner reellen Ebene in einem reellen Punkte geschnitten und aus keinem reellen Punkte durch eine reelle Ebene projicirt werden können. Eine reelle Ebene nämlich schneidet die beiden projectiven Regelschaaren in zwei projectiven Punktreihen I. oder II. Ordnung, die in einander liegen und nur dann einen reellen Punkt entsprechend gemein haben, wenn die Regelschaaren eine durch ihn gehende reelle Gerade entsprechend gemein haben. Es giebt also eine Art von imaginären Punkten oder Ebenen, dagegen zwei Arten von imaginären Geraden.

Wenn wir von Punkten, Geraden und Ebenen schlechthin reden, so verstehen wir darunter wie früher reelle Elemente, falls nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird oder aus dem Zusammenhange sich ergiebt. Dieses gilt insbesondere auch von den folgenden Aufgaben zweiten Grades.

„In einer Ebene sind zwei einfache $n$ecke gegeben; es soll ein

„drittes construirt werden, welches dem einen der gegebenen „eingeschrieben, dem andern umschrieben ist." Oder, um bestimmter zu reden: „Ein $n$eck zu construiren, dessen Eck„punkte der Reihe nach in n gegebenen Geraden u_1, u_2, „u_3, ... , u_n liegen, und dessen Seiten der Reihe nach durch „n gegebene Punkte S_1, S_2, S_3, ... , S_n der Ebene gehen."

Wir projiciren aus dem Punkte S_1 die Punktreihe u_1 auf die Gerade u_2, dann aus S_2 die Punktreihe u_2, d. h. die Projection von u_1, auf die Gerade u_3, ferner aus dem Punkte S_3 die Punktreihe u_3 auf u_4 u. s. w., und endlich aus S_n die Punktreihe u_n auf u_1. Wir erhalten so $n + 1$ projective Punktreihen, von denen jede eine Projection der vorhergehenden ist, und von denen die erste und die letzte in einer und derselben Geraden u_1 liegen. Jeder Punkt nun, welchen die erste und die letzte Punktreihe entsprechend gemein haben, kann als erster Eckpunkt des gesuchten $n$ecks angenommen werden, und giebt sofort eine Lösung der Aufgabe. Im Allgemeinen sind also höchstens zwei $n$ecke möglich, die der Aufgabe genügen. Wenn in besonderen Fällen die beiden in u_1 liegenden projectiven Punktreihen mehr als zwei und folglich alle ihre Punkte entsprechend gemein haben, so erhalten wir unendlich viele Lösungen der Aufgabe. — Die Bedingung, dass die Geraden u_1, u_2, u_3, ... , u_n mit den Punkten S_1, S_2, S_3, ... , S_n in einer und derselben Ebene liegen sollen, ist übrigens nicht nothwendig; es genügt, wenn S_1 mit u_1 und u_2 in einer Ebene liegt, ebenso S_2 mit u_2 und u_3 u. s. w., sowie endlich S_n mit u_n und u_1. Die gegebenen beiden $n$ecke können also auch sogenannte windschiefe $n$ecke sein.

Hierher gehört auch die Aufgabe:

„Eine Gerade zu finden, welche vier gegebene Gerade a, b, c, d „schneidet, wenn von diesen letzteren keine zwei in einer Ebene „liegen."

Wir beziehen die Ebenenbüschel a und b perspectiv auf die Punktreihe c, und schneiden dieselben durch d in zwei projectiven Punktreihen. Durch jeden Punkt, welchen die letzteren entsprechend gemein haben, geht eine Gerade, welche auch von a, b und c geschnitten wird, indem sie in zwei homologen Ebenen der Büschel a und b liegt. Gehören die Geraden a, b, c, d einer und derselben Regelschaar an, so hat die Aufgabe unendlich viele Lösungen; im allgemeinen Fall dagegen zwei. Wir können die Aufgabe auch so aussprechen:

„Eine Regelfläche II. Ordnung ist durch drei Gerade a, b, c „ihrer einen Regelschaar gegeben; es sollen die Punkte bestimmt „werden, welche sie mit einer beliebigen vierten Geraden d gemein hat.“

Eine der wichtigeren Aufgaben zweiten Grades ist die folgende:

„Zwei Involutionen liegen in einander; es sollen zwei Elemente „bestimmt werden, welche in beiden Involutionen einander zugeordnet sind.“

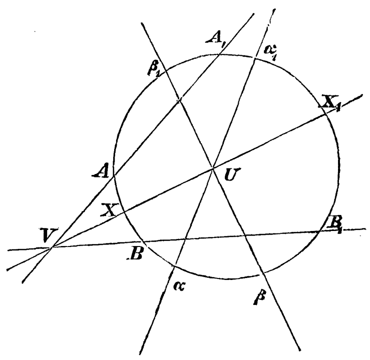

Fig. 79.

Liegen zunächst die beiden Involutionen in derselben Curve II. Ordnung, sind etwa (Fig. 79) einerseits den Punkten α und β der Curve die resp. Punkte α_1 und β_1 zugeordnet, andererseits aber den Punkten A und B die resp. Punkte A_1 und B_1, so suchen wir die beiden Involutionscentra U und V, so dass mit U je zwei conjugirte Punkte der einen, und mit V je zwei solche der anderen Punktreihe in einer Geraden liegen. Wird dann die Gerade $\overline{UV}$ von der Curve II. Ordnung in zwei Punkten X und X_1 geschnitten, so sind diese in beiden Involutionen einander zugeordnet. Berührt $\overline{UV}$ die Curve, so ist der Berührungspunkt von jeder der beiden Involutionen ein Doppelpunkt. Liegt endlich $\overline{UV}$ ganz ausserhalb der Curve, so giebt es keinen reellen Punkt, welcher in beiden Involutionen sich selbst oder einem anderen Punkte zugeordnet wäre. Dieser letzte Fall kann aber nur dann eintreten, wenn die Involutionen je zwei reelle Doppelpunkte haben, also beide hyperbolisch sind, weil nur dann die Punkte U und V ausserhalb der Curve liegen; und da die Polaren von U und V sich innerhalb der Curve schneiden müssen, nämlich im Pole von $\overline{UV}$, so sind ausserdem die Doppelpunkte der einen Punktreihe durch diejenigen der anderen getrennt.

Betrifft die Aufgabe zwei concentrische Strahleninvolutionen, so schneiden wir diese durch eine Curve II. Ordnung, welche durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt der Büschel geht; und auf ähnliche Weise können wir jeden beliebigen Fall unserer allgemeinen Aufgabe auf den eben erledigten zurückführen. Das zuletzt gewonnene Resultat gilt deshalb nicht blos für zwei Punktinvolutionen, die in derselben Curve II. Ordnung liegen, sondern kann allgemein so ausgesprochen werden:

„Wenn zwei Involutionen in einander liegen, so giebt es in „denselben zwei Elemente, welche sowohl in der einen als auch „in der anderen Involution einander zugeordnet sind; diese Ele„mente sind nur dann (conjugirt) imaginär, wenn beide Invo„lutionen hyperbolisch, und die Doppelemente der einen durch „diejenigen der anderen getrennt sind. Wenn die beiden zwei„fach conjugirten Elemente sich vereinigen, so haben die Invo„lutionen ein gemeinschaftliches Doppelelement."

Sind z. B. die Involutionen zwei Strahlenbüschel I. Ordnung und ist die eine rechtwinklig (Seite 154), so folgt als specieller Fall dieses Satzes:

„In jedem involutorischen Strahlenbüschel I. Ordnung giebt es „zwei einander zugeordnete reelle Strahlen, die auf einander „senkrecht stehen; dieselben heissen die Axen des Büschels."

Wir haben so aufs Neue den Satz bewiesen, dass eine Ellipse oder Hyperbel zwei zu einander senkrechte conjugirte Durchmesser, d. h. zwei Axen besitzt (vgl. Seite 110); denn ihre Durchmesser bilden eine Involution, wenn je zwei conjugirte Durchmesser einander zugeordnet werden. Natürlich gehört dieses Ergebniss in die Geometrie des Masses, und ebenso die hieran sich knüpfende Aufgabe zweiten Grades:

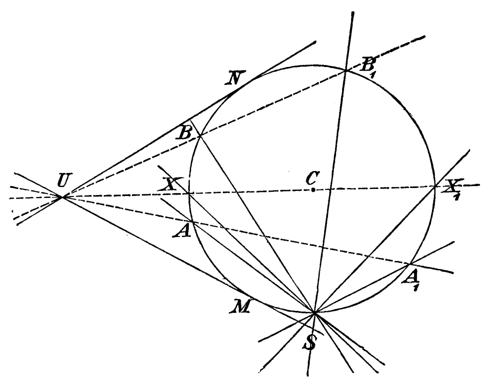

Fig. 80.

„Von einer Curve „II. Ordnung sind „zwei paar conjugirte „Durchmesser gegeben; die Axen „der Curve sind zu „construiren."

Durch den Mittelpunkt S der Curve (Fig. 80), in welcher die gegebenen Durchmesser sich schneiden, legen wir einen beliebigen Kreis, welcher das eine Paar conjugirter Durchmesser in den

Punkten A und A_1, das andere Paar in den Punkten B und B_1 schneiden möge. Dann werden die Punkte des Kreises mittelst des Durchmesserbüschels involutorisch gepaart, und der Punkt U, in welchem $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$ sich schneiden, ist das Involutionscentrum, mit welchem je zwei einander zugeordnete Punkte des Kreises in einer Geraden liegen. Verbinden wir also U mit dem Mittelpunkte C des Kreises durch eine Gerade, so schneidet diese den Kreis in zwei einander zugeordneten Punkten X und X_1, welche aus S durch die gesuchten beiden Axen $\overline{SX}$ und $\overline{SX_1}$ projicirt werden. — Liegt U ausserhalb des Kreises, so besitzt derselbe zwei reelle Doppelpunkte M und N; dieselben werden aus U durch zwei Tangenten des Kreises projicirt, aus S aber durch die Asymptoten der Hyperbel, welcher die gegebenen conjugirten Durchmesser angehören (Seite 110). — Wie können (nach Seite 154) die Axen construirt werden, wenn statt des Kreises eine beliebige durch S gehende Curve II. Ordnung gegeben ist?

Im Folgenden werden wir mehrfach die Aufgabe zu lösen haben:

„In einem involutorischen Strahlenbüschel sind zwei conjugirte „Strahlen so zu bestimmen, dass sie durch zwei in der Ebene „gegebene Punkte harmonisch getrennt sind."

Damit diese Aufgabe nicht unmöglich werde, setzen wir voraus, dass die gegebenen Punkte M und N nicht mit dem Mittelpunkte S des Strahlenbüschels in einer Geraden liegen, und dass durch keinen derselben ein Doppelstrahl des Büschels gehe. Projiciren wir dann die involutorische Punktreihe, von welcher M und N die Doppelpunkte sind, aus dem Punkte S durch einen zweiten involutorischen Büschel, so haben wir nur diejenigen beiden Strahlen zu suchen, welche in jedem der beiden Büschel einander zugeordnet sind. — Auch diese Aufgabe lässt sich auf andere Elementargebilde übertragen, und in verschiedene Formen kleiden. Statt des Büschels S könnte z. B. in der Geraden $\overline{MN}$ eine involutorische Punktreihe gegeben sein; liegt dann von den Punkten M und N der eine N unendlich fern, so lautet die Aufgabe:

„In einer Punktinvolution I. Ordnung sind zwei einander zu- „geordnete Punkte zu bestimmen, welche von einem beliebig in „der Geraden gegebenen Punkte M gleichen Abstand haben."

In einer Ebene ist ein Dreieck ABC und eine Strahleninvolution I. Ordnung F gegeben,

In einer Ebene ist ein Dreieck und eine Punktinvolution I. Ordnung gegeben, von welcher von welcher kein Doppelstrahl durch einen Eckpunkt des Dreiecks geht. Es soll dem Dreieck eine Curve II. Ordnung so umschrieben werden, dass je zwei einander zugeordnete Strahlen der Involution F hinsichtlich der Curve conjugirt sind.

kein Doppelpunkt in einer Seite des Dreiecks liegt. Es soll dem Dreieck eine Curve II. Ordnung so eingeschrieben werden, dass je zwei einander zugeordnete Punkte der Involution hinsichtlich der Curve conjugirt sind.

Damit die Aufgabe möglich sei, darf der Mittelpunkt der Strahleninvolution F mit keinem Eckpunkte des Dreiecks ABC (Fig. 81) zusammenfallen; wir dürfen daher annehmen, dass min-

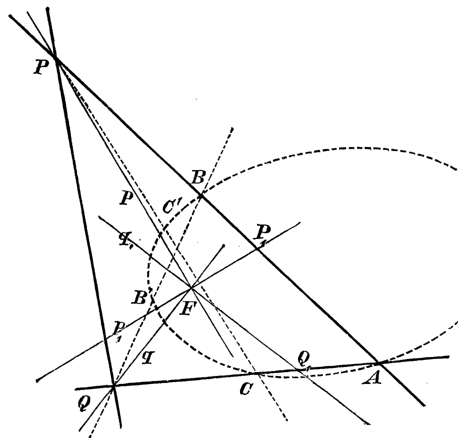

Fig. 81.

destens zwei Seiten des letzteren, etwa $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ nicht durch F gehen. Auf jeder dieser Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ muss es einen Punkt geben, dessen Polare in Bezug auf die gesuchte Curve, falls letztere existirt, durch F geht; und da derselbe von seiner Polare durch die Curve harmonisch getrennt ist, anderseits aber je zwei einander zugeordnete Strahlen von F hinsichtlich der gesuchten Curve II. Ordnung conjugirt sind, so finden wir ihn wie folgt. Wir bestimmen in der Involution F zwei einander zugeordnete Strahlen p und p_1 so, dass sie durch die Punkte A und B, zwei andere q und q_1 so, dass sie durch die Punkte A und C harmonisch getrennt sind (Fig. 81). Sind diese Strahlen imaginär, so giebt es keine reelle Curve II. Ordnung, welche die Bedingungen erfüllt, doch tritt dieser Fall nur dann ein, wenn die Involution F zwei reelle Doppelstrahlen hat, die durch A und B oder auch durch A und C von einander getrennt sind (Seite 174). Möge $\overline{AB}$ von den Strahlen p und p_1 in den resp. Punkten P und P_1 geschnitten werden, und $\overline{AC}$ von q und q_1 in den resp. Punkten Q und Q_1. Dann können und müssen wir eine der folgenden Annahmen machen:

1) P und Q seien die Pole von resp. p_1 und q_1;
2) P und Q_1 seien die Pole von resp. p_1 und q;
3) P_1 und Q seien die Pole von resp. p und q_1;
4) P_1 und Q_1 seien die Pole von resp. p und q.

Jede dieser vier Annahmen führt zu einer Lösung der gegebenen Aufgabe. Wenn z. B. die erste Annahme gemacht wird, so suchen wir auf der Geraden $\overline{PC}$ den Punkt C', welcher durch P und dessen Polare p_1 harmonisch von C getrennt ist, und ebenso auf $\overline{QB}$ den Punkt B', welcher von B harmonisch getrennt ist durch Q und dessen Polare q_1. Diejenige Curve II. Ordnung, welche durch die fünf Punkte $ABCB'C'$ geht, und von welcher nach den früher angegebenen Methoden noch beliebig viele Punkte bestimmt werden können, befriedigt dann alle Bedingungen. Denn sie ist dem Dreieck ABC umschrieben; und da durch P und p_1 zwei Paar Curvenpunkte A, B und C, C' harmonisch getrennt sind, so ist P der Pol von p_1, also der Strahl $\overline{FP}$ oder p dem Strahle p_1 conjugirt, ebenso aber auch q dem Strahle q_1, so dass je zwei einander zugeordnete Strahlen der Involution F hinsichtlich der Curve conjugirt sind.

Hat die Involution F zwei reelle Ordnungsstrahlen, welche also von der gesuchten Curve II. Ordnung berührt werden, so können wir die eben gelöste Aufgabe auch so aussprechen:

Um ein gegebenes Dreieck eine Curve II. Ordnung zu beschreiben, welche zwei in derselben Ebene gegebene Gerade berührt.	Einem gegebenen Dreieck eine Curve II. Ordnung einzuschreiben, welche durch zwei gegebene Punkte geht.

Zugleich aber lehrt die obige Construction, dass diese Doppelaufgabe nur dann vier reelle Auflösungen hat, wenn links die beiden Geraden durch keine zwei Eckpunkte und rechts die beiden Punkte durch keine zwei Seiten des Dreiecks getrennt sind. Im andern Falle giebt es gar keine reelle Lösung.

Hat die Involution F imaginäre Ordnungsstrahlen, so hat die Aufgabe vier Lösungen. Dieser Fall tritt u. A. dann ein, wenn die Involution rechtwinklig, also F ein Brennpunkt der gesuchten Curve ist (wie in Fig. 81 angenommen wurde); beiläufig haben wir also auch die Aufgabe gelöst:

„Die vier Curven II. Ordnung zu bestimmen, welche einem „gegebenen Dreieck umschrieben sind, und einen gegebenen „Punkt zum Brennpunkt haben."

Möge zum Schluss eine Aufgabe hier Platz finden, welche zwar nicht vom zweiten Grade, aber doch den zuletzt erörterten nahe verwandt ist, nämlich:

In einer Ebene seien ein Dreieck ABC und eine involutorische Punktreihe I. Ordnung u gegeben, so jedoch, dass kein Doppelpunkt von u auf einer Seite des Dreiecks liegt, und u durch keinen Eckpunkt des Dreiecks geht. Es soll dem Dreieck eine Curve II. Ordnung umschrieben werden, so dass je zwei einander zugeordnete Punkte von u hinsichtlich der Curve conjugirt sind.

In einer Ebene seien ein Dreieck und ein involutorischer Strahlenbüschel I. Ordnung S gegeben, so jedoch, dass kein Doppelstrahl von S durch einen Eckpunkt des Dreiecks geht, und der Mittelpunkt von S auf keiner Seite des Dreiecks liegt. Es soll dem Dreieck eine Curve II. Ordnung so eingeschrieben werden, dass je zwei einander zugeordnete Strahlen von S hinsichtlich der Curve conjugirt sind.

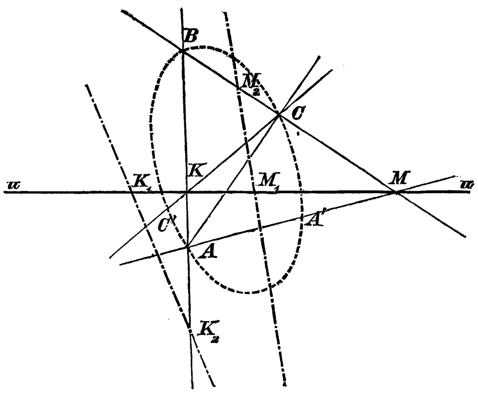

Fig. 82.

Seien den Punkten K und M (Fig. 82), in denen u von resp. $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ geschnitten wird, die resp. Punkte K_1 und M_1 der involutorischen Punktreihe u zugeordnet; sei ferner K_2 derjenige Punkt von $\overline{AB}$, welcher durch die Curvenpunkte A und B harmonisch getrennt ist von K, und M_2 derjenige Punkt von $\overline{BC}$, welcher durch B und C harmonisch getrennt ist von M. Bezüglich der gesuchten Curve ist dann $\overline{K_1 K_2}$ die Polare des Punktes K, weil sowohl K_1 als auch K_2 dem Punkte K conjugirt ist; und ebenso ist $\overline{M_1 M_2}$ die Polare von M. Ist also C' der Punkt, welcher durch K und $\overline{K_1 K_2}$ harmonisch gestrennt ist von C, und ebenso A' der Punkt, welcher durch M und $\overline{M_1 M_2}$ harmonisch getrennt ist von A, so geht die gesuchte Curve durch die fünf Punkte A, B, C, A', C'. Wirklich sind, wie verlangt wurde, die Punkte K und K_1 (und ebenso M und M_1) hinsichtlich dieser Curve conjugirt, weil K von der Geraden $\overline{K_1 K_2}$ sowohl durch die Curvenpunkte A und B, als auch durch C und C' harmonisch getrennt und folglich der Pol von $\overline{K_1 K_2}$ ist.

Wir können die soeben gelösten Aufgaben auch wie folgt aussprechen (vergl. Seite 170):

Durch fünf Punkte der Ebene, von welchen drei reell und die übrigen beiden entweder reell oder conjugirt imaginär sind, und von denen keine drei in einer Geraden liegen, eine Curve II. Ordnung zu legen.	Einem ebenen Fünfeck, von dessen Seiten drei reell und die übrigen beiden entweder reell oder conjugirt imaginär sind, eine Curve II. Ordnung einzuschreiben.

Jede dieser beiden Aufgaben hat eine reelle Lösung.

Fünfzehnter Vortrag.

Hauptaxen und Symmetrie-Ebenen, Focalaxen und cyclische Ebenen eines Kegels zweiter Ordnung.

Die Polarentheorie des Kegels II. Ordnung folgt ohne Weiteres, wie schon früher (Seite 104) hervorgehoben wurde, aus derjenigen der Curve II. Ordnung. Anders verhält es sich aber mit den Sätzen der Geometrie des Masses, welche aus der Polarentheorie abgeleitet werden können; dieselben lassen sich keinesweges von den Curven II. Ordnung durch die Methoden des Projicirens und Schneidens auf die Kegel II. Ordnung übertragen, sind auch zum Theil für diese von anderer Art als für jene, und müssen für die Kegel besonders entwickelt werden. Doch werden uns hierbei die früheren Untersuchungen häufig als Vorbild dienen.

Wird im Strahlenbündel ein Kegel II. Ordnung angenommen, so sind in Bezug auf denselben einer beliebigen Ebene ε des Bündels alle Ebenen conjugirt, welche durch den Polstrahl e von ε gehen. Verbinden wir e mit dem zu ε normalen Strahle des Bündels, so erhalten wir eine Ebene ε', welche zu ε conjugirt und zugleich normal ist. Im Allgemeinen giebt es zu einer beliebigen Ebene ε des Bündels nur eine solche „conjugirte Normalebene" ε'; nur wenn eine Ebene α zu ihrem Polstrahle a rechtwinklig ist, sind alle ihr conjugirten Ebenen α' zu ihr normal. In diesem Falle halbiren α und a die Winkel, welche von irgend zwei mit a in einer Ebene liegenden Strahlen des Kegels gebildet werden; denn a und α sind zu einander normal und trennen die beiden Strahlen harmonisch (Seite 104 und 46). Die Strahlen des Kegels II. Ordnung liegen also paarweise symmetrisch zu der Ebene α, und wir können α eine „Symmetrie-Ebene des Kegels" nennen; ihr Polstrahl a wird gewöhnlich eine „Hauptaxe" des Kegels genannt. Eine Symmetrie-Ebene des Kegels steht also auf der ihr zugeordneten Hauptaxe, d. h. auf ihrem Polstrahle senkrecht.

Wenn eine Ebene ε sich um einen Strahl s des Bündels dreht, so beschreibt ihr Polstrahl e in der Polarebene von s, und der zu ihr normale Strahl in der zu s normalen Ebene des Bündels einen Strahlenbüschel. Die beiden so beschriebenen Strahlenbüschel sind aber zu dem Ebenenbüschel s und folglich auch zu einander projectiv und erzeugen im Allgemeinen einen Ebenenbüschel II. Ordnung. Also:

„Wenn von zwei conjugirten Normalebenen des Bündels die „eine ε sich um eine Axe s dreht, so beschreibt die andere ε' „im Allgemeinen einen Ebenenbüschel II. Ordnung, welcher die „Polarebene von s bezüglich des gegebenen Kegels und die zu „s normale Ebene des Bündels enthält."

Nur dann dreht auch ε' sich um eine Axe s', wenn die beiden projectiven Strahlenbüschel perspective Lage, also einen Strahl a entsprechend gemein haben. In diesem Falle liegt s in einer Symmetrie-Ebene α, von welcher a der Polstrahl (die zugeordnete

Hauptaxe) ist; und weil α die conjugirte Normalebene von der Ebene $\overline{sa}$ ist, so muss auch s' in α liegen. Also:

„In einer Symmetrie-Ebene α des Kegels II. Ordnung ist jedem „Strahle s des Bündels ein Strahl s' zugeordnet, so dass je zwei „zu einander normale Ebenen der Büschel s und s' bezüglich „des Kegels conjugirt sind."

Dieser Satz ist demjenigen analog, mit dessen Hülfe wir früher (Seite 156) zu den Brennpunkten einer Curve II. Ordnung gelangt sind. Er wird uns zu den sogenannten Focalaxen des Kegels II. Ordnung führen; doch müssen wir vorher die Frage erledigen, ob und wie viele Symmetrie-Ebenen bei einem Kegel II. Ordnung existiren. Wir wollen zunächst beweisen, dass der Kegel mindestens eine Symmetrie-Ebene besitzt.

Sei Σ der Ebenenbüschel, welchen die conjugirten Normalebenen aller durch einen Strahl s des Bündels gehenden Ebenen bilden. Ist derselbe von der I. Ordnung, so ist das Vorhandensein einer Symmetrie-Ebene schon bewiesen (s. o.); wir nehmen deshalb an, Σ sei von der II. Ordnung. Zu diesem Ebenenbüschel gehört jede Symmetrie-Ebene des gegebenen Kegels als conjugirte Normalebene der durch s und die zugeordnete Hauptaxe gehenden Ebene. Alle Ebenen η nun, welche den von Σ eingehüllten Kegel in zwei Strahlen schneiden, sind von den übrigen Ebenen φ des Bündels getrennt durch die Berührungsebenen dieses Kegels (vergl. Seite 95). Ist also t die Gerade, in welcher die conjugirten Normalebenen einer Ebene η und einer Ebene φ sich schneiden, so bilden die conjugirten Normalebenen aller durch t gehenden Ebenen einen Ebenenbüschel T I. oder II. Ordnung, welcher mit Σ mindestens zwei und höchstens vier reelle Ebenen gemein hat. Eine dieser gemeinschaftlichen Ebenen ist die conjugirte Normalebene von $\overline{st}$; jede andere aber ist zu zwei verschiedenen ihr conjugirten Ebenen, nämlich zu je einer der Büschel s und t, normal und folglich auch zu ihrem Polstrahle, in welchem diese beiden Ebenen sich schneiden. Und da jede zu ihrem Polstrahle normale Ebene eine Symmetrie-Ebene des gegebenen Kegels II. Ordnung ist, so giebt es mindestens eine und im Allgemeinen höchstens drei Symmetrie-Ebenen.

Jeder Kegel II. Ordnung besitzt also mindestens eine Symmetrie-Ebene α und eine ihr zugeordnete Hauptaxe a; wir können aber leicht zeigen, dass sich in der Hauptaxe a allemal noch zwei Symmetrie-Ebenen rechtwinklig schneiden. Wenn man nämlich in der Symmetrie-Ebene α je zwei Strahlen des Bündels einander zuordnet, welche bezüglich des Kegels II. Ordnung conjugirt sind, so erhält man eine Strahleninvolution, deren Axen b und c zwei Hauptaxen des Kegels sind; denn z. B. der Strahl b ist conjugirt und zugleich normal zu c und zu a, seine Polarebene $\overline{ca}$ ist folglich zu b normal, und somit eine Symmetrie-Ebene des Kegels. Ist insbesondere die Strahleninvolution α rechtwinklig, so ist demnach jeder Strahl derselben eine Hauptaxe und jede durch a gehende Ebene eine Symmetrie-Ebene des Kegels. Man überzeugt sich leicht, dass in diesem besonderen Falle der Kegel II. Ordnung ein Rotationskegel, also ein gerader Kreiskegel ist, welcher a zur Rotationsaxe hat. Wir haben so bewiesen:

„Ein Kegel II. Ordnung hat im Allgemeinen drei Symmetrie-„Ebenen, welche sich in den drei Hauptaxen a, b, c recht-„winklig schneiden, also ein rechtwinkliges Poldreikant des „Kegels bilden. Nur der Rotations-Kegel hat nicht drei, son-„dern unendlich viele Symmetrie-Ebenen, welche bis auf eine „einzige durch die Rotationsaxe gehen.“

Wir wollen nun zu dem Satze zurückkehren, welcher uns vorhin an die Lehre von den Brennpunkten der Curven II. Ordnung erinnerte. Zunächst setzen wir fest:

„Die Axe f jedes Ebenenbüschels I. Ordnung, von welchem „je zwei zu einander normale Ebenen hinsichtlich eines Kegels „II. Ordnung conjugirt sind, soll eine Focalaxe des Kegels „heissen.“

Wenn also eine Ebene sich um eine Focalaxe f dreht, so beschreibt ihre conjugirte Normalebene gleichfalls den Büschel f, und die Axe f muss folglich (Seite 180) in einer Symmetrie-Ebene des Kegels liegen. Eine Hauptaxe ist, wie leicht einzusehen, nur dann zugleich Focalaxe des Kegels, wenn dieser ein Rotationskegel und die Hauptaxe seine Rotationsaxe ist. Die Rotations-Kegel, welche wir fortan ausschliessen, haben übrigens nur je eine Focalaxe, nämlich eben die Rotationsaxe. — Die Verbindungsebene von zwei reellen Focalaxen f und f' ist eine Symmetrie-Ebene des Kegels; weil sie den beiden durch f und f' gehenden und zu ihr normalen Ebenen conjugirt ist. Durch keine Focalaxe kann an den Kegel eine reelle Berührungsebene gelegt werden (vergl. Seite 155).

Eine Symmetrie-Ebene α des Kegels II. Ordnung wird nun von zwei beliebigen conjugirten Normalebenen in zwei solchen

Strahlen s und s' geschnitten, dass jede durch s gehende Ebene zu einer durch s' gehenden conjugirt und normal ist (Seite 181). Die beiden Büschel s und s' conjugirter Normalebenen sind aber projectiv, und werden von einer zweiten Symmetrie-Ebene β in zwei projectiven Strahlenbüscheln geschnitten. Letztere haben involutorische Lage, weil je zwei homologe Strahlen derselben in der nämlichen Beziehung wie s und s' zu einander stehen, und die Doppelstrahlen des involutorischen Strahlenbüschels β sind Focalaxen des Kegels. Sind die Doppelstrahlen imaginär, so giebt es (vergl. Seite 154) zwei Axen, aus welchen der involutorische Büschel β durch rechtwinklige Ebenenbüschel projicirt wird und welche zwei reelle Focalaxen des Kegels sind. Mehr als zwei reelle Focalaxen kann der Kegel nicht haben, weil die Verbindungsebene von zwei reellen Focalaxen allemal eine Symmetrie-Ebene ist, und diese nicht mehr als zwei Focalaxen enthalten kann, und weil nur bei dem Rotationskegel eine Focalaxe zugleich Hauptaxe ist.

Durch die beiden reellen Focalaxen f und f' des Kegels II. Ordnung sind je zwei conjugirte Normalebenen harmonisch getrennt; denn diese schneiden die Symmetrie-Ebene $\overline{ff'}$ in zwei zugeordneten Strahlen der Involution, von welcher f und f' die Doppelstrahlen sind. Insbesondere sind durch f und f' auch die übrigen beiden Symmetrie-Ebenen harmonisch getrennt; die von f und f' gebildeten Winkel werden folglich von zwei Hauptaxen halbirt. Wir können hiernach die drei Hauptaxen des Kegels wie folgt unterscheiden: die erste steht auf der Ebene $\overline{ff'}$ senkrecht und liegt ausserhalb des Kegels, die zweite liegt innerhalb und die dritte ausserhalb des Kegels in der Ebene $\overline{ff'}$. Von den drei Symmetrie-Ebenen enthält die erste die beiden reellen Focalaxen f und f', die zweite liegt ganz ausserhalb des Kegels und die dritte schneidet ebenso wie die erste den Kegel in zwei reellen „Scheitel-Strahlen"; die zweite und dritte Symmetrie-Ebene enthalten je zwei conjugirt-imaginäre Focalaxen des Kegels.

Die Halbirungsebenen der Flächenwinkel, welche von zwei Berührungsebenen des Kegels gebildet werden, sind conjugirte Normalebenen und somit harmonisch getrennt durch die beiden Focalaxen f und f'; sie halbiren also auch die Winkel der beiden Ebenen, welche die Schnittlinie t der beiden Berührungsebenen mit f und f' verbinden. Ebenso beweist man den Satz (vergl. Seite 158):

„Jede Berührungsebene eines Kegels II. Ordnung bildet gleiche „Winkel mit den beiden Ebenen, welche ihren Berührungs- „strahl mit den Focalaxen des Kegels verbinden. Zwei con- „focale Kegel II. Ordnung schneiden sich in ihren gemeinschaft- „lichen Strahlen rechtwinklig.“

Ist g der Gegenstrahl von f bezüglich der einen von zwei Berührungsebenen, die sich in einem Strahle t schneiden, und g' derjenige von f' bezüglich der anderen, so bilden die Ebenen $\overline{tg}$ und $\overline{tf'}$ dieselben Winkel mit einander wie $\overline{tf}$ und $\overline{tg'}$; und weil ausserdem $\sphericalangle tg = \sphericalangle tf$ und $\sphericalangle tf' = \sphericalangle tg'$ ist, so sind die beiden Dreikante gtf' und ftg' congruent und können durch Drehung um ihre gemeinschaftliche Kante t zur Deckung gebracht werden. Die Kantenwinkel gf' und fg' sind daher gleich; aber nur der eine derselben ändert seine Lage, nicht jedoch seine Grösse, wenn die eine der beiden Berührungsebenen an dem Kegel fortrollt. Daraus folgt:

„Die Gegenstrahlen einer Focalaxe f bezüglich aller Berührungs- „ebenen des Kegels II. Ordnung liegen auf einem Rotations- „Kegel, welcher die zweite Focalaxe f' zur Rotationsaxe hat.“

Nach dem vorletzten Satze muss jeder dieser Gegenstrahlen mit der anderen Focalaxe und dem Berührungsstrahle der zugehörigen Berührungsebene in einer Ebene liegen; und da der Berührungsstrahl mit der ersten Focalaxe dieselben Winkel bildet, wie mit ihrem Gegenstrahle, so ergiebt sich noch:

„Die Summe resp. Differenz der beiden Winkel, welche ein be- „liebiger Strahl des Kegels mit den beiden Focalaxen f und f' „bildet, ist constant.“

Jenachdem Sie den einen oder den anderen der beiden Nebenwinkel benutzen, welche der Strahl mit der einen Focalaxe bildet, erhalten Sie eine constante Summe oder eine constante Differenz. Aus dem Satze folgt, dass der Kegel von seiner ersten Symmetrie-Ebene $\overline{ff'}$ einen grösseren Winkel einschliesst als von der dritten.

Von einer zu der Focalaxe f normalen Ebene wird der Kegel in einer Curve II. Ordnung geschnitten, von welcher ein Brennpunkt auf f liegt; denn je zwei bezüglich der Curve conjugirte Strahlen dieses Punktes schneiden sich rechtwinklig, weil sie in zwei conjugirten Normalebenen von f liegen. Wir können deshalb zwei früher bewiesene Sätze (Seite 160 und 164) ohne Weiteres in folgender Form auf den Kegel übertragen:

„Wird eine Focalaxe f eines Kegels II. Ordnung verbunden „mit den Berührungsstrahlen und mit der Schnittlinie von zwei „Berührungsebenen, so bildet die letztere Verbindungsebene „gleiche Winkel mit den beiden ersteren.“

„Die projectiven Strahlenbüschel, in welchen zwei Berüh-„rungsebenen eines Kegels II. Ordnung die übrigen schneiden, „werden aus jeder Focalaxe f der Fläche durch zwei gleiche „und gleichlaufend projective Ebenenbüschel projicirt.“

Sei k die Curve II. Ordnung, in welcher der Kegel von einer zu f normalen Ebene geschnitten wird, t eine Tangente derselben und F ihr auf f liegender Brennpunkt. Eine durch f senkrecht zu t gelegte Ebene schneidet dann t in einem Punkte des Kreises, welcher k in den Scheitelpunkten ihrer Hauptaxe berührt (S. 162); sie schneidet zugleich die durch t gehende Berührungsebene des Kegels in der rechtwinkligen Projection von f. Daraus folgt:

„Projicirt man die Focalaxen f, f' eines Kegels K^2 II. Ordnung „rechtwinklig auf die Berührungsebenen desselben, so liegen „ihre Projectionen auf einem Kegel II. Ordnung, welcher K^2 in „den zwei Scheitelstrahlen der Ebene ff' berührt und von den „zu f oder f' normalen Ebenen in Kreisen geschnitten wird.“

Wir wenden uns nunmehr zu den „cyclischen Ebenen“ der Kegel II. Ordnung, welche in gewisser Hinsicht den Focalaxen reciprok sind und folgendermassen definirt werden können:

„Die Ebene jedes Strahlenbüschels I. Ordnung, von welchem „je zwei zu einander normale Strahlen hinsichtlich eines Kegels „II. Ordnung conjugirt sind, ist eine cyclische Ebene des Kegels.“

Man nennt diese Ebene deshalb eine „cyclische“, weil jede zu ihr parallele Schnittcurve des Kegels ein Kreis ist; nämlich der Mittelpunkt einer solchen Curve II. Ordnung liegt auf dem Polstrahle der Ebene, und je zwei conjugirte Durchmesser der Curve sind zu einander normal, weil sie zu zwei conjugirten Strahlen jenes Strahlenbüschels parallel laufen. Eine Symmetrie-Ebene ist demnach nur dann zugleich cyclische Ebene des Kegels, wenn dieser ein Rotationskegel, und wenn seine Rotationsaxe die zu der Symmetrie-Ebene normale Hauptaxe ist. Der Rotationskegel, welchen wir wiederum ausschliessen wollen, hat übrigens nur diese eine cyclische Ebene.

Eine cyclische Ebene kann mit dem Kegel keinen reellen Strahl gemein haben, weil kein reeller Strahl der Ebene sich selbst conjugirt ist. Zwei cyclische Ebenen schneiden sich in einer

Hauptaxe, nämlich in einer Geraden, zu welcher in jeder der Ebenen ein Strahl conjugirt und normal ist. Bezeichnen wir überhaupt zwei Strahlen des Bündels, welchem der Kegel angehört, als „conjugirte Normalstrahlen", wenn sie zu einander normal und hinsichtlich des Kegels conjugirt sind, so ist leicht einzusehen, dass zu jedem Strahle l des Bündels (die drei Hauptaxen ausgenommen) nur ein conjugirter Normalstrahl l' existirt; in l' nämlich schneiden sich die Polarebene und die Normalebene des Strahles l.

Wenn nun der Strahl l im Bündel einen beliebigen Strahlenbüschel ε beschreibt, so beschreiben seine Polar- und seine Normalebene zwei zu ε projective Ebenenbüschel, und es ergiebt sich:

„Wenn ein Strahl l im Bündel sich in einer Ebene ε bewegt, „so beschreibt sein conjugirter Normalstrahl l' im Allgemeinen „einen Kegel II. Ordnung, welcher durch den Polstrahl und die „Normale der Ebene ε, ausserdem aber durch die drei Haupt-„axen des gegebenen Kegels geht. Nur dann beschreibt auch l' „einen Büschel I. Ordnung ε', wenn ε durch eine der drei „Hauptaxen geht, und in diesem Falle enthält auch ε' diese „Hauptaxe."

Nämlich in diesem Specialfalle liegen die beiden zu ε projectiven Ebenenbüschel perspectiv. Die Beziehung zwischen den conjugirten Normalstrahlen des Bündels ist eine involutorische zweiten Grades, welche ebenso wie diejenige zwischen den conjugirten Normalebenen zur Bestimmung der Hauptaxen des Kegels II. Ordnung benutzt werden kann. Sie führt zu allen cyclischen Ebenen des Kegels, d. h. zu allen denjenigen Ebenen ε, welche mit den zugehörigen Ebenen ε' zusammenfallen.

Die Ebenen einer Hauptaxe a sind paarweise einander zugeordnet, so dass je zwei conjugirte Normalstrahlen l und l' allemal in zwei zugeordneten Ebenen ε und ε' von a liegen; und zwar sind die beiden Büschel ε und ε' conjugirter Normalstrahlen, wie aus dem Vorhergehenden sich ergiebt, zu einander projectiv. Aus einer zweiten Hauptaxe b werden diese Büschel durch zwei projective Ebenenbüschel projicirt, welche involutorische Lage haben; denn je zwei homologe Ebenen derselben stehen in derselben Wechselbeziehung zu einander, wie die Ebenen ε und ε'. Die beiden Doppelebenen dieser Involution b aber sind cyclische Ebenen des gegebenen Kegels II. Ordnung, wie ohne Weiteres einleuchtet.

Durch jede der drei Hauptaxen gehen also zwei cyclische Ebenen des Kegels; dieselben sind jedoch conjugirt-imaginär für zwei der

Hauptaxen, und nur in der dritten Hauptaxe schneiden sich zwei reelle cyclische Ebenen $\varkappa$ und $\varkappa'$ (vgl. S. 183). Denn gäbe es mehr als zwei, etwa drei reelle cyclische Ebenen, so müssten sich dieselben in den drei Hauptaxen schneiden, also mit den Symmetrie-Ebenen zusammenfallen, was nach früheren Bemerkungen unmöglich ist. Also:

„Es giebt zwei Büschel paralleler Ebenen, welche einen belie-„bigen Kegel II. Ordnung in Kreisen schneiden; diese Büschel „enthalten je eine der beiden reellen cyclischen Ebenen $\varkappa$ und $\varkappa'$ „des Kegels."

Durch $\varkappa$ und $\varkappa'$ sind zwei Hauptaxen und überhaupt je zwei conjugirte Normalstrahlen harmonisch getrennt; denn dieselben liegen in zwei conjugirten Ebenen des involutorischen Büschels, von welchem $\varkappa$ und $\varkappa'$ die Doppelelemente sind. Von den drei Symmetrie-Ebenen des Kegels halbiren folglich zwei die von den cyclischen Ebenen $\varkappa$ und $\varkappa'$ gebildeten Flächenwinkel, die dritte steht auf $\varkappa$ und $\varkappa'$ normal. — Da die Halbirungslinien der Winkel, welche von irgend zwei Strahlen des Kegels gebildet werden, zwei conjugirte Normalstrahlen, also durch $\varkappa$ und $\varkappa'$ harmonisch getrennt sind, so ergiebt sich der Satz:

„Bringt man die Verbindungsebene von zwei beliebigen Strahlen „des Kegels mit den cyclischen Ebenen zum Durchschnitt, so „bildet die eine Schnittlinie mit dem einen Strahle denselben „Winkel, wie der andere Strahl mit der anderen Schnittlinie."

Ebenso leicht beweist man:

„Der ebene Winkel, welchen die cyclischen Ebenen auf irgend „einer Berührungsebene des Kegels begrenzen, wird von dem „Berührungsstrahle halbirt. Zwei concyclische Kegel berühren „folglich ihre gemeinschaftlichen Tangentialebenen in je zwei „zu einander senkrechten Strahlen."

Zwei conjugirte Normalstrahlen sind harmonisch getrennt durch die Berührungsebenen von je zwei Strahlen des Kegels, welche mit einem von ihnen in einer Ebene liegen; hieraus können Sie ohne Schwierigkeit die Folgerung ziehen:

„Bringt man eine cyclische Ebene zum Durchschnitt mit zwei „Berührungsebenen des Kegels und mit der Verbindungsebene „der beiden Berührungsstrahlen, so bildet die letztere Schnitt-„linie gleiche Winkel mit den beiden ersteren."

Nehmen Sie noch eine dritte, bewegliche Berührungsebene zu Hülfe, so können Sie (nach Analogie von Seite 164) weiter schliessen;

„Die Ebenen, durch welche ein beweglicher Strahl des Kegels „II. Ordnung aus zwei festen Strahlen desselben projicirt wird, „begrenzen auf jeder der beiden reellen cyclischen Ebenen „Winkel von constanter Grösse. Zwei projective Ebenenbüschel, „welche den Kegel erzeugen, werden folglich von jeder cycli„schen Ebene in zwei projectiv gleichen Strahlenbüscheln ge„schnitten."

Die meisten dieser Sätze über die cyclischen Ebenen und noch manche andere lassen sich auch aus analogen Sätzen über die Focalaxen der Kegel II. Ordnung ableiten, wenn man rechtwinklig auf einander bezogene Strahlenbündel zu Hülfe nimmt. Wir nennen zwei Bündel S und S_1 rechtwinklig auf einander bezogen, wenn jeder Ebene des einen der zu ihr normale Strahl des anderen zugewiesen ist, also auch jedem Ebenenbüschel des einen ein zu ihm projectiver Strahlenbüschel des anderen, dessen Ebene auf der Axe des Ebenenbüschels normal ist. Vier harmonischen Ebenen des einen Bündels entsprechen demnach allemal vier harmonische Strahlen des anderen, welche beziehlich zu jenen Ebenen normal sind. Zwei Elemente des Bündels S bilden dieselben Winkel mit einander, wie die ihnen entsprechenden Elemente des Bündels S_1.

Den Strahlen eines Kegels II. Ordnung im Bündel S entsprechen dann aber die Berührungsebenen eines Kegels II. Ordnung in S_1; denken wir uns jenen Kegel durch zwei projective Ebenenbüschel erzeugt, so erscheint dieser als Erzeugniss der entsprechenden beiden projectiven Strahlenbüschel. Zwei Strahlen, welche durch den einen Kegel harmonisch getrennt sind, entsprechen ferner zwei Ebenen, welche durch zwei Berührungsebenen des anderen Kegels harmonisch getrennt sind; woraus folgt, dass überhaupt conjugirten Elementen allemal conjugirte Elemente entsprechen. Zwei zu einander normalen Strahlen oder Ebenen, welche bezüglich des einen Kegels conjugirt sind, entsprechen demnach zwei zu einander normale Ebenen resp. Strahlen, welche conjugirt sind bezüglich des anderen Kegels. Und jeder cyclischen Ebene des einen Kegels entspricht folglich eine Focalaxe des anderen, desgleichen jeder Symmetrie-Ebene eine Hauptaxe. Wir können deshalb die Eigenschaften der Focalaxen ohne Weiteres in solche der cyclischen Ebenen eines Kegels II. Ordnung übersetzen, und erhalten so beispielsweise den Satz (vergl. Seite 184):

„Die Summe resp. Differenz der beiden Winkel, welche eine

„beliebige Berührungsebene des Kegels mit den beiden cyclischen „Ebenen bildet, ist constant.“

Sind zwei rechtwinklig auf einander bezogene Kegel II. Ordnung gegeben, so entspricht jeder von dem einen Kegel ausgeschlossenen Ebene ein zu ihr normaler, von dem anderen Kegel eingeschlossener Strahl. Und wenn von allen ebenen Winkeln, welche der zweite Kegel einschliesst, derjenige der grösste ist, in welchem die reellen Focalaxen f, f' liegen, so muss folglich von allen Flächenwinkeln, welche den ersteren Kegel ausschliessen, der seine cyclischen Ebenen enthaltende der grösste sein. Da nun in der That ein Kegel II. Ordnung von seiner ersten Symmetrie-Ebene $\overline{ff'}$ einen grösseren Winkel einschliesst als von der dritten (Seite 184), so finden wir:

„Die cyclischen Ebenen $\varkappa$ und $\varkappa'$ eines Kegels II. Ordnung „schneiden sich in der dritten Hauptaxe, welche mit der zweiten „Hauptaxe und den beiden reellen Focalaxen in einer Ebene, „aber ausserhalb des Kegels liegt.“

Die beiden ersten Symmetrie-Ebenen des Kegels halbiren demnach die von $\varkappa$ und $\varkappa'$ gebildeten Flächenwinkel, dagegen ist die dritte Symmetrie-Ebene zu $\varkappa$ und $\varkappa'$ normal.

Ein Kegel II. Ordnung und eine mit ihm concentrische Kugel haben mit einander einen „sphaerischen Kegelschnitt“ gemein. Die Kugel schneidet jede Symmetrie-Ebene des Kegels in einer „Axe“ des sphaerischen Kegelschnittes, jede cyclische Ebene in einer „cyclischen Linie“, jede Berührungsebene in einer „Tangente“, jede Hauptaxe in zwei „Mittelpunkten“ und jede Focalaxe des Kegels in zwei „Brennpunkten“ des sphaerischen Kegelschnittes.

Der sphaerische Kegelschnitt ist eine Zwillingscurve, d. h. er besteht aus zwei getrennten, gleichen Linien, deren Punkte einander paarweise diametral auf der Kugel gegenüberliegen. Im Allgemeinen hat er drei paar Mittelpunkte, in denen seine drei Axen sich rechtwinklig schneiden, ferner zwei reelle cyclische Linien und zwei paar reelle Brennpunkte. Durch die vier Brennpunkte und die beiden Mittelpunkte, in denen die cyclischen Linien sich schneiden, geht die erste Axe; die zweite Axe liegt ganz ausserhalb des Kegelschnittes und hat mit der ersten jene beiden Mittelpunkte gemein; die dritte Axe schneidet die beiden cyclischen Linien rechtwinklig und enthält ebenso wie die erste zwei paar reelle Scheitelpunkte des Kegelschnittes. In einem besonderen Falle besteht der sphaerische Kegelschnitt aus zwei gleichen Kugelkreisen.

Alle Eigenschaften des Kegels II. Ordnung, welche sich auf seine Symmetrie-Ebenen, Hauptaxen, Focalaxen und cyclischen Ebenen beziehen, können auf den sphaerischen Kegelschnitt übertragen werden. So ergiebt sich u. A.:

„Bewegt sich ein Eckpunkt eines sphaerischen Dreiecks „so auf der Kugel, dass der Umfang des Dreiecks constant „bleibt, so beschreibt er einen sphaerischen Kegelschnitt, wel-„cher die anderen beiden Eckpunkte zu Brennpunkten hat" (S. 184).

„Bewegt sich eine Seite eines sphaerischen Dreiecks so, „dass die Fläche desselben constant bleibt, so umhüllt sie einen „sphaerischen Kegelschnitt, von welchem die anderen beiden „Dreiecksseiten die cyclischen Linien sind."

Constructions-Aufgaben und Lehrsätze.

Harmonische Gebilde.

1. Zu drei Elementen eines einförmigen Grundgebildes das vierte harmonische zu construiren (Seite 40 und 46).

2. Nach dem (unzugänglichen) Schnittpunkte von zwei Geraden aus einem gegebenen Punkte eine dritte Gerade zu ziehen (Seite 3 und 42).

3. Ohne Benutzung des Cirkels eine Strecke AC zu halbiren, wenn eine Parallele der Geraden $\overline{AC}$ gegeben ist (Seite 47).

4. In der Ebene sind gegeben ein Parallelogramm und eine beliebige Strecke AC; ohne Hülfe des Cirkels soll AC halbirt und zu $\overline{AC}$ eine Parallele construirt, sodann AC ver-n-facht oder in n gleiche Theile zerlegt werden (Seite 45).

5. Sind A, B, C, D vier harmonische Punkte und beschreibt man über dem Durchmesser AC einen Kreis, von welchem S ein beliebiger Punkt ist, so wird derjenige Kreisbogen, welcher innerhalb des Winkels BSD liegt, entweder von A oder von C halbirt (Seite 46).

6. Zwischen den Schenkeln a, b eines Winkels ist eine Gerade AB so zu ziehen, dass sie in einem gegebenen Punkte P halbirt wird, oder auch so, dass der Punkt A die Strecke PB halbirt (Seite 46).

7. Wenn zwei Punkte von einem dritten durch je zwei Gegenkanten eines Tetraëders harmonisch getrennt sind, so sind sie von einander durch das dritte paar Gegenkanten harmonisch getrennt. Denn die Ebene der drei Punkte schneidet das Tetraëder in einem vollständigen Vierseit, dessen Diagonalen in den drei Punkten sich schneiden.

Projective Verwandtschaft einförmiger Grundgebilde.

8. Zwei Punktreihen u, u_1 werden perspectiv auf einander bezogen und sodann in schiefe Lage gebracht, also beliebig gegen einander verschoben. Es sind die Verbindungslinien ihrer homologen Punkte zu zeichnen, und damit der von u und u_1 erzeugte Strahlenbüschel II. Ordnung.

9. Zwei Strahlenbüschel werden perspectiv auf einander bezogen und sodann in schiefe Lage gebracht, z. B. gegen einander verdreht; die von ihnen erzeugte Curve II. Ordnung, auf welcher die Schnittpunkte ihrer homologen Strahlen liegen, ist zu zeichnen.

10. Zwei Punktreihen u und u_1 liegen perspectiv zu einer dritten u_2; der von u und u_1 erzeugte Büschel II. Ordnung ist zu zeichnen.

11. Zwei Strahlenbüschel S und S_1 liegen perspectiv zu einem dritten S_2; die von ihnen erzeugte Curve II. Ordnung ist zu zeichnen.

12. Von zwei projectiven Punktreihen u und u_1 sind drei paar homologe Punkte AA_1, BB_1 und CC_1 gegeben; zu einem beliebigen Punkte D von u ist der entsprechende Punkt D_1 von u_1 zu construiren (Seite 60 und 71), überhaupt ist der von u und u_1 erzeugte Strahlenbüschel I. oder II. Ordnung zu zeichnen. Der erste Theil der Aufgabe ist auch für den Fall auszuführen, wenn u und u_1 in derselben Geraden liegen.

13. Zu der vorhergehenden Aufgabe die reciproke aufzustellen und auszuführen (Seite 71).

14. Zwei projective Strahlenbüschel oder Punktreihen in perspective Lage zu bringen (Seite 57).

15. Eine Punktreihe und einen zu ihr projectiven Strahlenbüschel in perspective Lage zu bringen.

16. Liegen die Eckpunkte eines einfachen Sechsecks AC_1 BA_1 CB_1 abwechselnd auf zwei Geraden u und u_1, etwa A, B, C auf u und A_1, B_1, C_1 auf u_1, so liegen auch die Schnittpunkte A_2, B_2, C_2 der drei paar Gegenseiten desselben auf einer Geraden u_2 (Seite 83). Dieser Satz findet sich schon in den Collectiones von Pappus, lib. VII. — Die den Satz erläuternde Figur ist ebenso wie die früher (Seite 5) besprochene Fig. 3 wegen ihrer Regelmässigkeit beachtenswerth; sie besteht nämlich aus neun Punkten, die zu dreien auf neun Geraden liegen, und diese neun Geraden gehen zu dreien durch jene neun Punkte. Durch dieselbe Figur wird auch der reciproke Satz dargestellt. Wie lautet dieser?

17. In dem einen von zwei perspectiven Strahlenbüscheln sollen zwei zu einander normale Strahlen construirt werden, welchen in dem anderen Büschel zwei gleichfalls zu einander normale Strahlen entsprechen. Aus der Auflösung dieser Aufgabe folgt:

18. In zwei projectiven Strahlenbüscheln, deren Mittelpunkte nicht unendlich fern liegen, giebt es allemal zwei einander entsprechende rechte Winkel.

19. Liegen ein Strahlenbüschel S und ein Ebenenbüschel u perspectiv, so steht die Axe des letzteren normal auf einem der beiden zu einander rechtwinkligen Strahlen von S, welchen in u zwei zu einander rechtwinklige Ebenen entsprechen. Von dieser Bemerkung ausgehend, findet man, dass die folgenden beiden Aufgaben je zwei Lösungen haben.

20. Gegeben ein Strahlenbüschel S und ein zu ihm projectiver Ebenenbüschel u; es soll:

a. durch irgend einen Punkt eine Ebene gelegt werden, welche den Büschel u in einem mit S congruenten Strahlenbüschel schneidet;

b. eine Axe construirt werden, aus welcher der Büschel S durch einen mit u congruenten Ebenenbüschel projicirt wird.

21. Einen Strahlenbüschel S und einen Ebenenbüschel u in solche gegenseitige Lage zu bringen, dass drei gegebene Ebenen α, β, γ des letzteren durch drei gegebene Strahlen a, b, c des ersteren gehen (Aufg. 20).

22. Die Mantelfläche $\alpha\beta\gamma$ eines dreiseitigen Prismas in einem Dreieck abc zu schneiden, welches einem gegebenen Dreieck $a_1 b_1 c_1$ ähnlich ist. Diese Aufgabe kann auf die vorhergehende zurückgeführt werden.

Curven, Büschel und Kegel zweiter Ordnung.

23. Von einer Curve II. Ordnung sind gegeben fünf Punkte, oder vier Punkte und die Tangente von einem derselben, oder drei Punkte und die Tangenten von zwei derselben; die Curve zu construiren mittelst projectiver Strahlenbüschel (Seite 71—73).

24. Von einem Büschel II. Ordnung sind gegeben fünf Strahlen, oder vier Strahlen und der Berührungspunkt von einem derselben, oder drei Strahlen und die Berührungspunkte von zwei derselben; den Büschel zu construiren mittelst projectiver Punktreihen (Seite 71—73).

25. Die drei Aufgaben 23 mit Hülfe des Pascal'schen Satzes zu lösen, und namentlich:

a. auf beliebigen Geraden, welche durch je einen schon bekannten Curvenpunkt gehen, jedesmal den zweiten Curvenpunkt zu bestimmen;

b. an jedem gegebenen oder construirten Punkte der Curve die Tangente zu zeichnen (Seite 79).

26. Die drei Aufgaben 24 mit Hülfe des Lehrsatzes von Brianchon zu lösen, und namentlich:

a. durch beliebige Punkte eines schon bekannten Strahles jedesmal den zweiten Strahl des Büschels II. Ordnung zu ziehen;

b. in jedem gegebenen oder construirten Strahle des Büschels den Berührungspunkt zu bestimmen (Seite 79).

Anmerkung. Die Aufgaben 25 und 26 enthalten nicht nur eine grosse Zahl besonderer Aufgaben, sondern jede derselben lässt sich ausserdem auf verschiedene Arten lösen, indem man ausser den Sätzen über das Sechseck in der Curve oder im Büschel II. Ordnung auch diejenigen über das Fünfeck, Viereck oder Dreieck benutzen kann. Als specielle Fälle der Aufgaben 25 und 26 nennen wir die folgenden drei:

27. Eine Hyperbel zu zeichnen, von welcher ausser den beiden Asymptoten noch entweder ein Punkt oder eine Tangente gegeben ist.

28. Eine Parabel zu zeichnen, von welcher gegeben sind entweder vier Tangenten, oder drei Tangenten und der Berührungspunkt von einer derselben, oder zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten.

29. Eine Hyperbel zu zeichnen, von welcher drei Punkte und die Richtungen der beiden Asymptoten gegeben sind.

Wie ordnen sich die Aufgaben 27, 28, 29 den Aufgaben 23 und 24 unter?

30. Zu beweisen, dass der Kreis eine Curve II. Ordnung ist, und dass seine Tangenten einen Büschel II. Ordnung bilden. Unter welchem Winkel wird derjenige Abschnitt einer beweglichen Kreis-Tangente, welcher zwischen zwei gegebenen Tangenten liegt, vom Mittelpunkte aus gesehen?

31. Eine Punktreihe u und ein Büschel S I. Ordnung liegen in einer Ebene und sind projectiv auf einander bezogen; dann umhüllen die Normalen, welche aus den Punkten von u auf die entsprechenden Strahlen von S gefällt werden können, eine Parabel, falls sie nicht alle durch einen Punkt gehen (vergl. Seite 90). Die Parabel wird auch von u berührt.

32. Wenn ein Winkel von gegebener Grösse sich so in der Ebene bewegt, dass sein Scheitelpunkt eine Gerade u beschreibt und der eine Schenkel um einen gegebenen Punkt S sich dreht, so umhüllt der andere Schenkel eine Parabel; dieselbe wird von u berührt.

33. Ein veränderliches Dreieck ASA_1 bewegt sich so in der Ebene, dass die Endpunkte A, A_1 der Grundlinie zwei Gerade u, u_1 beschreiben und der Winkel an der Spitze S ohne Aenderung seiner Grösse um seinen Scheitelpunkt sich dreht. Dann umhüllt die Grundlinie $\overline{AA_1}$ eine Curve II. Ordnung, welche auch von u und u_1 berührt wird. (Nach Seite 164 ist S ein Brennpunkt dieser Curve.)

34. Die Grundlinie AA_1 eines veränderlichen Dreiecks APA_1 sei der Grösse nach gegeben und gleite auf einer festen Geraden u hin, während die anderen beiden Seiten $\overline{PA}$ und $\overline{PA_1}$ sich um zwei feste Punkte S und S_1 drehen. Dann beschreibt die Spitze P eine Hyperbel, welche durch S und S_1 geht und die Gerade u zur Asymptote hat.

35. Drehen sich zwei Winkel ab und a_1b_1 von gegebener Grösse in ihrer Ebene dergestalt um ihre festen Scheitel S und S_1, dass der Schnittpunkt $\dot{a}a_1$ von zweien ihrer Schenkel eine Gerade beschreibt, so bewegt sich jeder der übrigen drei Schnittpunkte $\dot{b}b_1$, $\dot{a}b_1$, $a_1\dot{b}$ ihrer Schenkel auf einer durch S und S_1 gehenden Curve II. Ordnung (Newton's organische Beschreibung der Kegelschnitte).

36. Fällt man auf die Ebenen eines Ebenenbüschels a Normalen aus einem beliebigen Punkte P, so liegen deren Fusspunkte auf einem Kreise; derselbe hat das von P auf die Axe a gefällte Perpendikel zum Durchmesser, und seine Ebene steht auf a senkrecht. — Daraus folgt:

37. Legt man durch die Schenkel a, a_1 eines schiefen Winkels alle möglichen Paare normaler Ebenen, so schneiden sich diese Ebenenpaare in den Strahlen eines durch a und a_1 gehenden Kegels II. Ordnung. Jede zu a oder a_1 normale Ebene schneidet diesen Kegel in einem Kreise, und jede zur Ebene $\overline{aa_1}$ normale Ebene schneidet ihn in einer Curve II. Ordnung, von welcher in $\overline{aa_1}$ eine Axe liegt.

38. Den im letzten Satze genannten Kegel II. Ordnung erhält man auch mit Hülfe einer Ebene α, die im Punkte $a\overset{\cdot}{}a_1$ auf a_1 senkrecht steht. Lässt man nämlich einen rechten Winkel, dessen Scheitelpunkt $a\overset{\cdot}{}\alpha$ ist, sich so bewegen, dass seine Ebene stets durch die Gerade a geht und der eine Schenkel die Ebene α beschreibt, so muss der andere Schenkel jenen Kegel II. Ordnung beschreiben.

39. Wenn zwei concentrische Strahlenbüschel, deren Ebenen sich unter schiefen Winkeln schneiden, so auf einander bezogen werden, dass je zwei homologe Strahlen auf einander senkrecht stehen, so erzeugen sie einen Ebenenbüschel II. Ordnung. Oder mit anderen Worten: Wenn ein rechter Winkel sich so um seinen Scheitel dreht, dass seine Schenkel in zwei bestimmten Ebenen sich bewegen, so umhüllt seine Ebene einen Kegel II. Ordnung, welcher auch von jenen beiden Ebenen berührt wird.

40. Fällt man auf die Berührungsebenen eines Kegels II. Ordnung aus einem beliebigen Punkte Normalen, so liegen diese auf einem zweiten Kegel II. Ordnung. Nämlich jene Berührungsebenen werden durch zwei projective Strahlenbüschel erzeugt, und aus diesen können sofort zwei projective Ebenenbüschel I. Ordnung abgeleitet werden, welche den zweiten Kegel erzeugen.

41. Der geometrische Ort eines Punktes S, aus welchem ein ebenes Viereck $KLMN$ durch einen harmonischen Strahlenbüschel $S(KLMN)$ projicirt wird, ist eine dem Viereck umschriebene Curve II. Ordnung (Seite 76). Construirt man zu $\overline{NK}$, $\overline{NL}$ und $\overline{NM}$ den vierten harmonischen Strahl n, so berührt derselbe im Punkte N die Curve, welche hiernach leicht construirt werden kann.

42. Der geometrische Ort einer Geraden u, von welcher ein ebenes Vierseit $klmn$ in einer harmonischen Punktreihe $u(klmn)$ geschnitten wird, ist ein Büschel II. Ordnung, welchem die vier Geraden k, l, m, n angehören (Seite 76). Der Berührungspunkt des Strahles n ist von $n\overset{\cdot}{}l$ harmonisch getrennt durch $n\overset{\cdot}{}k$ und $n\overset{\cdot}{}m$.

43. Wir wollen mit v. Staudt eine Gruppe von vier in bestimmter Reihenfolge angenommenen Elementen A, B, C, D eines einförmigen Grundgebildes einen „Wurf" nennen. Auch sollen zwei Würfe $ABCD$ und $abcd$ „projectiv" genannt werden, wenn die beiden Grundgebilde, in welchen sie liegen, projectiv so auf einander bezogen werden können, dass den Elementen A, B, C, D des einen die Elemente a, b, c, d des anderen entsprechen.

Die Sätze 41 und 42 lassen sich dann folgendermassen verallgemeinern:

44. Sei $abcd$ ein gegebener Wurf (bestehend etwa aus vier Strahlen eines Büschels I. Ordnung); dann liegen alle Punkte S, aus welchen ein beliebiges Viereck $KLMN$ durch einen zu $abcd$ projectiven Wurf $S(KLMN)$ projicirt wird, auf einer dem Viereck umschriebenen Curve II. Ordnung. Wie construirt man deren Tangente im Punkte N? (Vgl. Nr. 41.)

45. Sei $ABCD$ ein gegebener Wurf, dann berühren alle Geraden u, von welchen ein ebenes Vierseit $klmn$ in einem zu $ABCD$ projectiven Wurfe $u(klmn)$ geschnitten wird, eine dem Vierseit eingeschriebene Curve II. Ordnung. Wie construirt man den Punkt, in welchem diese Curve von n berührt wird? (Vgl. Nr. 42.)

46. Wenn zwei Dreiecke ABC und $D_1E_1F_1$ einer Curve II. Ordnung k^2 eingeschrieben sind, so sind sie auch einer Curve II. Ordnung umschrieben; und umgekehrt. Nämlich die Würfe $A(BCE_1F_1)$ und $D_1(BCE_1F_1)$ sind projectiv, weil sie in den projectiven die Curve k^2 erzeugenden Büscheln A und D_1 einander entsprechen. Ist nun $B_1C_1E_1F_1$ der Schnitt des Büschels $A(BCE_1F_1)$ mit der Geraden $\overline{E_1F_1}$, und $BCEF$ derjenige des Büschels $D_1(BCE_1F_1)$ mit der Geraden $\overline{BC}$, so sind auch $B_1C_1E_1F_1$ und $BCEF$ projective Würfe; die sechs Seiten der Dreiecke, nämlich $\overline{BC}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{E_1F_1}$, $\overline{EE_1}$ und $\overline{FF_1}$, sind also wirklich sechs Strahlen eines Büschels II. Ordnung. — Die Umkehrung des Satzes wird analog bewiesen.

Pol und Polare; Durchmesser der Curven zweiter Ordnung.

47. Bezüglich einer Curve II. Ordnung von einer gegebenen Figur die Polarfigur zu zeichnen, d. h. von ihren Punkten die Polaren und von ihren Geraden die Pole zu construiren (Seite 93). Beispiele: ein Polygon und eine beliebige krumme Linie.

48. An eine gegebene Curve II. Ordnung aus einem beliebigen Punkte Tangenten zu ziehen ohne Benutzung des Cirkels (Seite 94).

49. Bewegen sich zwei veränderliche Tangenten einer Curve II. Ordnung so,

dass die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte eine zweite Curve II. Ordnung einhüllt, so beschreibt ihr Schnittpunkt eine dritte Curve II. Ordnung.

dass ihr Schnittpunkt eine zweite Curve II. Ordnung durchläuft, so umhüllt die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte eine dritte Curve II. Ordnung (S. 99).

50. Durch lineare Constructionen die Polare eines Punktes oder den Pol einer Geraden hinsichtlich einer Curve II. Ordnung zu bestimmen, welche durch fünf Bedingungen, z. B. durch fünf Punkte oder fünf Tangenten, gegeben ist, aber nicht gezeichnet vorliegt. (Vgl. Nr. 23—26.)

51. Eine Curve II. Ordnung sei gegeben durch fünf Bedingungen, z. B. durch vier Tangenten und den Berührungspunkt von einer derselben oder durch drei Punkte und die Tangenten von zwei derselben. Es sollen beliebig viele Durchmesser und der Mittelpunkt der Curve construirt werden. (Nr. 50.)

52. Von einer gegebenen Curve II. Ordnung ist eine Sehne so zu construiren, dass sie in einem gegebenen Punkte P halbirt wird.

53. Alle Sehnen einer Curve II. Ordnung, welche von einer beliebig gegebenen Sehne halbirt werden, umhüllen eine Parabel (Seite 90).

54. Von einer Ellipse oder Hyperbel sind gegeben zwei paar conjugirte Durchmesser und entweder ein Punkt oder eine Tangente; beliebig viele Punkte oder Tangenten der Curve zu construiren (Seite 108).

55. Von einer Curve II. Ordnung sind gegeben zwei Punkte oder zwei Tangenten und ein paar conjugirte Durchmesser, oder auch drei Punkte oder Tangenten und der Mittelpunkt; die Curve zu construiren (Seite 106 und 108).

56. Eine Parabel zu construiren, wenn von ihr gegeben sind drei Punkte oder Tangenten und die Richtung der Durchmesser (Seite 106), oder aber zwei Punkte oder Tangenten und die Axe.

57. Eine Parabel ist gegeben durch vier Tangenten; die Axe zu construiren.

58. Eine Curve II. Ordnung zu construiren, wenn von ihr drei Punkte oder Tangenten und eine Axe gegeben sind.

59. Eine Hyperbel zu construiren aus den Asymptoten und einem Punkte oder einer Tangente (Seite 111 und 113).

60. Von einer gegebenen Curve II. Ordnung die Axen zu zeichnen (Seite 110).

61. Für wie viele Punkte oder Tangenten zählt bei der Bestimmung einer Curve II. Ordnung a) der Mittelpunkt, b) eine Axe derselben, c) ein Paar conjugirter Durchmesser, d) ein Poldreieck, f) ein Punkt und seine Polare, g) ein Paar conjugirter Punkte oder Strahlen, h) ein Durchmesser.

62. Fällt man aus einem Punkte S auf alle Durchmesser einer Curve k^2 II. Ordnung Normalen, so schneiden diese die resp. conjugirten Durchmesser in den Punkten einer durch S und den Mittelpunkt von k^2 gehenden, gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten mit den Axen von k^2 parallel laufen. Auf dieser Hyperbel liegen die Fusspunkte aller durch S gehenden Normalen von k^2 (Apollonius). An eine Curve II. Ordnung können deshalb aus keinem Punkte ihrer Ebene mehr als vier Normalen gezogen werden.

63. Es seien S und S_1 zwei Punkte einer Curve II. Ordnung, die auf einem beliebigen Durchmesser liegen, und u, u_1 zwei Gerade der Ebene, die irgend zwei conjugirten Durchmessern der Curve parallel sind. Projicirt man dann die Curve aus S und S_1 auf resp. u und u_1, so erhält man (Seite 108) zwei projectiv ähnliche Punktreihen u, u_1, die also proportional getheilt sind. Eine bekannte, sehr einfache Construction der Ellipse oder Hyperbel gründet sich auf diesen Satz.

64. Projicirt man eine Parabel aus einem ihrer Punkte auf irgend einen Durchmesser u und zugleich aus ihrem unendlich fernen Punkte auf eine beliebige Gerade u_1, so erhält man in u und u_1 zwei projectiv ähnliche Punktreihen. Hieraus folgt eine sehr einfache Parabel-Construction.

65. Sind in einer Ebene zwei Curven II. Ordnung gegeben, so hat in Bezug auf dieselben jeder Punkt A der Ebene zwei Polaren, und wir können den Schnittpunkt A_1 dieser Polaren dem Punkte A zuordnen. Die beiden Polaren von A_1 gehen dann durch A, und je zwei einander zugeordnete Punkte, wie A und A_1, sind hinsichtlich beider Curven conjugirt. Ebenso können wir je zwei Strahlen der Ebenen einander zuordnen, welche in Bezug auf beide Curven II. Ordnung conjugirt sind. Ich behaupte nun (vergl. Seite 99):

Den Punkten einer Geraden sind im Allgemeinen die Punkte eines Curve II. Ordnung zugeordnet. Alle Curven II. Ord-	Den Strahlen eines Punktes sind im Allgemeinen die Tangenten einer Curve II. Ordnung zugeordnet. Alle Curven II. Ord-

nung, welche auf diese Art den Geraden der Ebene zugeordnet sind, haben mindestens einen Punkt und höchstens drei Punkte U, V, W mit einander gemein. Die beiden Polaren jedes solchen gemeinschaftlichen Punktes fallen zusammen, sodass dem Punkte alle Punkte einer Geraden zugeordnet sind.

nung, deren Tangenten den Strahlen je eines Punktes zugeordnet sind, haben mindestens eine und höchstens drei Tangenten u, v, w mit einander gemein. Die beiden Pole von jeder solchen gemeinschaftlichen Tangente fallen zusammen, sodass der Tangente alle Strahlen eines Punktes zugeordnet sind.

Sind die gegebenen beiden Curven II. Ordnung einem Viereck umschrieben, so schneiden sich dessen drei paar Gegenseiten in den Punkten U, V, W. Diese drei Punkte sind die Eckpunkte und die Geraden u, v, w sind die Seiten eines gemeinschaftlichen Poldreiecks der beiden Curven.

66. In der Ebene einer Curve k^2 II. Ordnung können je zwei Strahlen einander zugeordnet werden, welche sich rechtwinklig schneiden und zugleich hinsichtlich der Curve k^2 conjugirt sind. Den Strahlen eines eigentlichen Punktes S, der auf keiner Axe der Curve liegt (Seite 156), sind dann die Tangenten einer Parabel zugeordnet (Nr. 31), welche auch von der Polare des Punktes S und von den Axen der Curve k^2 berührt wird. Von jeder gemeinschaftlichen Tangente der Parabel und der Curve k^2 wird die letztere in dem Fusspunkte einer von S an k^2 gezogenen Normale berührt. (Vergl. Nr. 62).

67. Werden in einem Bündel ein Kegel K^2 II. Ordnung und ein bestimmter Strahl u angenommen, so können je zwei Strahlen a, a_1 desselben einander zugeordnet werden, welche in Bezug auf K^2 conjugirt sind und mit u in einer Ebene liegen. Beschreibt dann a eine Ebene α, so beschreibt a_1 einen Kegel II. Ordnung, welcher durch u und den Polstrahl der Ebene α geht und mit K^2 jeden in α und in der Polarebene von u liegenden Strahl von K^2 gemein hat (vergl. Seite 101). — Wie lautet der reciproke Satz?

68. Die in Nr. 65, 66 und 67 besprochenen geometrischen Beziehungen gehören zu den „Verwandtschaften zweiten Grades“, von welchen in der zweiten Abtheilung ausführlicher die Rede sein wird; sie können benutzt werden zur Verwandlung einfacher Gebilde in complicirtere. Von diesen Verwandtschaften verdient die unter dem Namen „Princip der reciproken Radien“ bekannte hier einen besonderen Platz; denn sie ist nicht blos für die synthetische Geometrie, sondern auch für gewisse Untersuchungen der mathematischen Physik und der Functionentheorie von grosser Wichtigkeit. Dieses Verwandlungs-Princip stellt sich dar als ein sehr specieller Fall einer früher (Seite 101) angegebenen Verwandtschaft zweiten Grades, wie Sie gleich bemerken werden.

Das Princip der reciproken Radien.

69. In Bezug auf einen Kreis vom Radius r und dem Mittelpunkte M heissen zwei Punkte P, P_1 „invers", wenn sie mit M in einer Geraden liegen und hinsichtlich des Kreises conjugirt sind. Diese inversen Punkte P, P_1 sind durch die Endpunkte eines Kreisdurchmessers harmonisch getrennt, und es ist folglich (Seite 49):

$$MP \,.\, MP_1 = r^2 \text{ oder } MP = \frac{r^2}{MP_1}.$$

Das Product der Radii vectores von zwei inversen Punkten ist also constant, oder der Radius vector eines beliebigen Punktes P ist demjenigen seines inversen Punktes P_1 umgekehrt proportional. Deshalb hat dieses Abbildungsverfahren der „Inversion" von Liouville*) den Namen „Princip der reciproken Radien" erhalten; M heisst das „Inversionscentrum", und r^2 die „Potenz" der reciproken Radien. Jedem von dem Kreise eingeschlossenen Punkte ist ein ausserhalb gelegener Punkt und jedem unendlich fernen Punkte der Ebene ist der Mittelpunkt M invers; die Punkte der Kreislinie fallen mit ihren inversen zusammen.

70. Die Polare des Punktes P in Bezug auf den gegebenen Kreis steht in dem inversen Punkte P_1 auf $\overline{MP}$ senkrecht. Zu den Punkten P, Q, R, . . . einer beliebigen Geraden g findet man also die inversen Punkte P_1, Q_1, R_1, . . . , indem man aus dem Pole G von g auf die resp. Geraden $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, $\overline{MR}$, . . . Normalen fällt. Daraus folgt:

„Einer beliebigen Geraden g ist ein Kreis γ invers, dessen zu g
„normaler Durchmesser von M und dem Pole G der Geraden
„begrenzt wird."

Umgekehrt ist jedem durch M gehenden Kreise γ eine Gerade g invers; denn der Verbindungslinie von zwei Punkten A, B, deren

*) Liouville in seinem „Journ. de Mathématiques", I. Série T. XII. p. 265.

inverse A_1, B_1 auf γ liegen, ist ein Kreis invers, welcher durch A_1, B_1 und M geht und folglich mit γ identisch ist. Möbius*) nennt wegen dieser Eigenthümlichkeit die vorliegende Verwandtschaft zweiten Grades eine „Kreisverwandtschaft“.

71. Zieht man zu der Geraden g eine Parallele durch das Inversionscentrum M, so berührt dieselbe in M den zu g inversen Kreis γ, weil sie ebenso wie g auf dem Durchmesser MG von γ senkrecht steht. Wir schliessen daraus:

„Zwei beliebige Gerade f und g der Ebene schneiden sich unter
„denselben Winkeln, wie die ihnen inversen Kreise φ und γ.“

Zwei unendlich kleine inverse Dreiecke haben demnach gleiche Winkel und sind ähnlich; oder mit anderen Worten:

„Durch Inversion wird die Ebene conform auf sich selbst ab-
„gebildet, sodass die kleinsten Theile von je zwei inversen Fi-
„guren ähnlich sind.“

Nur auf den unendlich kleinen Theil der Ebene, welcher dem Mittelpunkte M zunächst liegt, findet dieser Satz keine Anwendung.

72. Weil eine Gerade auch als Kreis von unendlich grossem Radius aufgefasst werden kann, so dürfen wir den Satz, dass jedem durch M gehenden Kreise eine Gerade zugeordnet ist, und seine Umkehrung (Nr. 70) als Specialfälle des folgenden Satzes ansehen:

„Jedem Kreise $\varkappa$ ist ein Kreis $\varkappa_1$ invers; M ist ein Aehnlich-
„keitspunkt von $\varkappa$ und $\varkappa_1$.“

Um diesen allgemeineren Satz zu beweisen, nehmen wir auf $\varkappa$ einen festen Punkt P und einen beweglichen Q an, und bezeichnen mit P_1 und Q_1 die beiden zu ihnen inversen Punkte, mit P' und Q' dagegen die Punkte, in welchen $\varkappa$ von den resp. Secanten $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ zum zweiten Male geschnitten wird. Dann ist wegen des Satzes über die Abschnitte von Kreissecanten:

$$MP \,.\, MP' = MQ \,.\, MQ',$$

und wegen des Princips der reciproken Radien:

$$MP \,.\, MP_1 = MQ \,.\, MQ_1 \; (= r^2);$$

folglich auch:

$$MP' : MP_1 = MQ' : MQ_1 \text{ und } \Delta\, MP'Q' \sim \Delta\, MP_1Q_1.$$

Wenn also Q und damit zugleich Q' den Kreis $\varkappa$ durchläuft, so

*) Moebius in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Leipzig 1855, Bd. II, S. 531—595, und in den Berichten über die Verhandlungen derselben Gesellschaft von 1853, S. 14—24.

beschreibt Q_1 eine zu $\varkappa$ ähnliche und ähnlich liegende Curve, d. h. gleichfalls einen Kreis $\varkappa_1$. Und zwar ist M ein Aehnlichkeitspunkt, und Q' und Q_1, sowie P' und P_1 sind „homologe" Punkte der beiden Kreise $\varkappa$ und $\varkappa_1$.

73. „Jeder Kreis, welcher durch zwei inverse Punkte P, P_1 „geht, ist sich selbst invers und schneidet den zuerst ange- „nommenen Kreis, dessen Punkte mit ihren inversen zusammen- „fallen, rechtwinklig."

Denn er hat mit dem ihm inversen Kreise die Punkte P, P_1 und zwei zu sich selbst inverse Punkte gemein, und wird in den letzteren von zwei durch M gehenden Geraden berührt, weil $MP \,.\, MP_1 = r^2$ ist.

74. Denkt man sich in der Ebene zwei Punktfelder P, Q, R, ... und P_1, Q_1, R_1, ..., die zu einander invers sind, und dreht man sodann das eine derselben um den Mittelpunkt M, bis jeder von seinen Punkten einen Halbkreis beschrieben hat, so liegen wiederum je zwei inverse Punkte, wie P und P_1 oder Q und Q_1, mit M auf einer Geraden, aber auf entgegengesetzten Seiten von M; und es ist wie früher:

$$MP \,.\, MP_1 = MQ \,.\, MQ_1 = MR \,.\, MR_1 = \ldots\ldots = \text{Const.},$$

aber die „Potenz", d. h. das constante Product der Radii vectores inverser Punkte hat nicht mehr einen positiven, sondern einen negativen Werth. Wir erhalten so einen zweiten Fall der Inversion, welcher sich von dem ersteren auch dadurch unterscheidet, dass kein Punkt der Ebene mit seinem inversen zusammenfällt. Auch in diesem zweiten Falle ist die Ebene conform auf sich selbst abgebildet, jeder Geraden ist ein durch M gehender Kreis invers, und überhaupt jedem Kreise $\varkappa$ ein Kreis $\varkappa_1$; der Mittelpunkt M der reciproken Radien ist auch in diesem Falle Aehnlichkeitspunkt von je zwei inversen Kreisen.

75. Auch die Punkte des Raumes können durch Inversion einander paarweise zugeordnet werden, indem man den Mittelpunkt M und den positiven oder negativen Werth der Potenz willkürlich annimmt. Am Leichtesten ist diese Verallgemeinerung durchzuführen, indem man zunächst die Punkte einer beliebig durch M gelegten Ebene einander zuordnet und sodann diese Ebene um eine durch M gehende Axe dreht. Zwei inverse Punkte der Ebene stellen dann bei jeder Lage derselben zwei inverse Punkte des Raumes vor.

76. Dreht man die Ebene um die durch M gehende Centrale von zwei inversen Kreisen, so beschreiben die letzteren zwei Kugeln; also:

„Jeder Kugel $\varkappa$ ist eine Kugel $\varkappa_1$ invers; M ist ein Aehnlichkeitspunkt von $\varkappa$ und $\varkappa_1$ (Nr. 72). Jeder Ebene Γ ist eine durch M gehende Kugel invers, die in M von einer zu Γ parallelen Ebene berührt wird."

Der letzte Theil dieses Satzes ist als Specialfall des ersten anzusehen, aber auch leicht besonders zu beweisen. — Weiter ergiebt sich daraus:

„Zwei beliebige Ebenen des Raumes schneiden sich unter denselben Winkeln, wie die ihnen inversen Kugeln."

Zwei unendlich kleine inverse Tetraëder haben demnach gleiche Flächenwinkel und folglich auch gleiche Kantenwinkel; sie sind (wie einige Ueberlegung lehrt) ähnlich, wenn die Potenz der reciproken Radien negativ, und symmetrisch ähnlich, wenn sie positiv ist. Weil demnach ihre homologen Flächen allemal ähnlich sind, so ergiebt sich:

„Zwei inverse Flächen sind conform auf einander abgebildet."

77. Um hiernach eine Kugel $\varkappa$ auf einer beliebigen Ebene Σ conform abzubilden, wähle man zum Inversionscentrum M einen der beiden Punkte von $\varkappa$, deren Berührungsebenen zu Σ parallel sind, und setze die Potenz gleich dem Product der beiden Abschnitte MP und MP_1, welche $\varkappa$ und Σ auf irgend einer durch M gelegten Geraden bilden. Der Ebene Σ ist dann eine Kugel invers, welche mit der gegebenen $\varkappa$ die Punkte P und M, sowie die Berührungsebene in M gemein hat und folglich mit $\varkappa$ zusammenfällt. Also:

„Projicirt man eine Kugel $\varkappa$ (stereographisch) aus einem auf ihr liegenden Punkte M auf eine Ebene Σ, die zu der Berührungsebene von M parallel ist, so wird dadurch die Fläche $\varkappa$ conform auf der Ebene Σ abgebildet."

Von dieser stereographischen Projection, welche schon dem Astronomen Ptolemaeus bekannt war, wird bei der Herstellung von Landkarten Gebrauch gemacht. Man erreicht dadurch, dass wenigstens die Winkel auf der Karte dieselbe Grösse haben wie die ihnen entsprechenden auf der Erdoberfläche; die Längen der verschiedenen Linien unserer Erdoberfläche sind auf den Landkarten allemal in veränderlichem Massstabe dargestellt, weil eine Kugel sich nicht ohne Verzerrungen auf einer Ebene abwickeln lässt.

78. „Einem beliebigen Kreise ist allemal ein Kreis invers"; in letzterem schneiden sich je zwei Kugeln, deren inverse durch den ersteren gehen. Wenn insbesondere der eine Kreis durch M geht, so artet der andere in eine Gerade aus (Nr. 70). Die Meridiane und Parallelkreise der Erdoberfläche gehen deshalb durch die stereographische Projection in zwei Schaaren orthogonaler Kreise über; die Projectionen der Meridiane sind Kreise, die sich in zwei Punkten (den Projectionen des Nord- und des Südpoles) schneiden, und zu ihnen sind die Projectionen der Parallelkreise, welche keinen reellen Punkt mit einander gemein haben, rechtwinklig. Nur die durch M gehenden Kugelkreise werden in der Bildebene durch gerade Linien dargestellt. — Verlegt man insbesondere den Projections-Mittelpunkt M in den Nord- oder Südpol, so werden die Parallelkreise durch concentrische Kreise und die Meridiane durch die Durchmesser derselben abgebildet.

79. Zu drei beliebig angenommenen Kugeln kann man im Allgemeinen einen orthogonalen, d. h. sie rechtwinklig schneidenden Kreis construiren; derselbe liegt in der Centralebene und sein Mittelpunkt ist ein Potenzpunkt der drei Kugeln. Nur dann wird die Construction unmöglich, wenn die drei Kugeln zwei Punkte oder einen Punkt mit einander gemein haben. — Wählt man nun einen Punkt jenes orthogonalen Kreises zum Mittelpunkte reciproker Radien, so wird der Kreis in eine Gerade transformirt, die drei Kugeln aber in drei andere Kugeln, welche von der Geraden rechtwinklig geschnitten werden, und deren Mittelpunkte folglich auf der Geraden liegen. Drei Kugeln können demnach, wenn sie nicht durch einen und denselben Punkt gehen, allemal durch Inversion in drei andere Kugeln verwandelt werden, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, im anderen Falle dagegen in drei Ebenen.

80. Eine Schaar von Kugeln, welche durch stetige Bewegung einer veränderlichen Kugel beschrieben ist, wird im Allgemeinen von einer Fläche F eingehüllt, die eine Schaar von kreisförmigen Krümmungslinien besitzt. Nämlich jede Kugel der Schaar wird von F längs der Kreislinie berührt, welche sie mit der unmittelbar benachbarten Kugel der Schaar gemein hat; und weil die Normalen von F in den Punkten dieser Linie sich im Centrum der Kugel schneiden, so ist die Kreislinie eine Krümmungslinie von F. Wird nun die Fläche F durch Inversion in eine andere Fläche F_1 transformirt, so gehen zugleich jene Krümmungslinien über in kreisförmige Krümmungslinien von F_1, indem F_1

diejenige Schaar von Kugeln einhüllt, welche der von F eingehüllten Schaar invers ist. Alle zu Rotationsflächen inversen Flächen besitzen deshalb je eine Schaar von kreisförmigen Krümmungslinien.

81. Eine der merkwürdigsten unter diesen Flächen ist die von Dupin entdeckte „Cyclide". Dieselbe wird von einer veränderlichen Kugel umhüllt, welche bei ihrer stetigen Bewegung fortwährend drei gegebene Kugeln berührt. Die Theorie dieser Cyclide können Sie auf Grund des Vorhergehenden leicht entwickeln, indem Sie die folgenden Sätze beweisen.

„Eine Dupin'sche Cyclide verwandelt sich durch Inversion „allemal wieder in eine Cyclide; sie kann, wenn das Inversions-„centrum passend gewählt wird, sogar in eine Rotations-Cyclide „transformirt werden, welche von einer um eine Axe sich drehenden „Kugel oder Ebene umhüllt wird (Nr. 79). Die Cyclide besitzt „deshalb zwei Schaaren von kreisförmigen Krümmungslinien, „und wird in denselben von zwei Schaaren von Kugeln be-„rührt; die Mittelpunkte dieser Kugeln und Krümmungslinien „liegen mit je zwei der letzteren in zwei zu einander normalen „Symmetrie-Ebenen der Cyclide. Jede Kugel der einen Schaar „berührt alle Kugeln der anderen Schaar in den Punkten einer „kreisförmigen Krümmungslinie. Zwei Krümmungslinien können „durch eine Kugel verbunden werden, wenn sie zu derselben „Schaar gehören; im anderen Falle haben sie einen gemein-„schaftlichen Punkt und schneiden sich in demselben recht-„winklig."

82. „Die Cyclide hat entweder keinen (reellen) Doppel-„punkt, oder zwei Knotenpunkte, in welchen alle Krümmungs-„linien der einen Schaar sich schneiden, oder einen Cuspidal-„punkt, in welchem dieselben sich berühren. Von diesen drei „Hauptarten erhält man wesentlich verschiedene Formen, wenn „man die zugehörige Rotationscyclide transformirt durch reci-„proke Radien, deren Mittelpunkt einmal innerhalb, einmal auf „und einmal ausserhalb der Rotationscyclide angenommen wird. „Die letzteren beiden Hauptarten können durch Inversion auf „einem geraden Kegel resp. Cylinder conform abgebildet werden."

„Die Ebenen, in welchen die Krümmungslinien der einen „oder der anderen Schaar (paarweise) liegen, schneiden sich „alle in einer Geraden; dieselbe liegt in der einen Symmetrie-„Ebene und steht auf der anderen senkrecht. Die Cyclide wird

„von gewissen zwei Ebenen in allen Punkten je eines Kreises „berührt. — Verbindet man die Krümmungslinien der einen „oder der anderen Schaar mit einem beliebigen Punkte M durch „Kugeln, so schneiden diese sich alle in einer Kreislinie."

„Wenn eine Cyclide sich in das Unendliche erstreckt (was „bei jeder der drei Hauptarten eintreten kann), so besitzt sie „zwei gerade Krümmungslinien, die sich rechtwinklig kreuzen. „Die Ebenen aller übrigen Krümmungslinien gehen theils durch „die eine, theils durch die andere von diesen beiden windschiefen „Geraden."

Regelschaaren und Regelflächen zweiter Ordnung.

83. Die Mittelpunkte aller Kegel zweiter Ordnung, welche von den sechs Seitenlinien eines beliebigen windschiefen Sechsecks berührt werden, erfüllen eine Regelfläche; dieselbe geht durch die drei Hauptdiagonalen des Sechsecks (vgl. Seite 88).

84. Die drei Hauptdiagonalen eines windschiefen Sechsecks, dessen sechs Seitenlinien auf einer Regelfläche liegen, schneiden sich in einem Punkte.

85. Eine Punktreihe u und ein Büschel S I. Ordnung, die nicht in parallelen Ebenen liegen, seien projectiv auf einander bezogen; dann bilden die Strahlen, welche durch die Punkte von u parallel zu den entsprechenden Strahlen von S gezogen werden können, die eine Regelschaar eines hyperbolischen Paraboloides (vergl. Seite 90).

86. Eine Punktreihe u und ein Ebenenbüschel v seien projectiv, und ihre Träger nicht zu einander rechtwinklig; dann bilden die Normalen, welche aus den Punkten von u auf die entsprechenden Ebenen von v gefällt werden können, die eine Regelschaar eines hyperbolischen Paraboloides (Nr. 85).

87. Werden auf einer Regelfläche in den Punkten eines in ihr liegenden Strahles Normalen errichtet, so bilden dieselben die eine Regelschaar eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides (Nr. 86; vgl. Seite 120).

88. Werden durch einen beliebigen Punkt zu allen Strahlen einer Regelschaar Normal-Ebenen gelegt, so bilden diese einen Ebenenbüschel I. oder II. Ordnung, jenachdem die Regelschaar einem hyperbolischen Paraboloid oder einem einschaligen Hyperboloid angehört (Seite 123).

89. Alle Ebenen, welche durch einen festen Punkt gehen und ein gegebenes einschaliges Hyperboloid in Parabeln schneiden, umhüllen einen Kegel II. Ordnung, welcher dem Asymptotenkegel parallel ist.

90. Eine Regelfläche zu construiren, von welcher gegeben sind zwei Strahlen a, b, die nicht in einer Ebene liegen, und entweder drei ausserhalb a und b liegende Punkte oder drei nicht durch a oder b gehende Berührungs-Ebenen.

91. Welches ist der Ort eines Punktes, der von einem gegebenen Punkte A durch eine Regelfläche harmonisch getrennt ist? Welche Linie hat dieser geometrische Ort mit einer durch A gehenden Ebene gemein?

Projective Elementargebilde; geradlinige Flächen dritter Ordnung.

92. In einem Elementargebilde II. Ordnung zu drei gegebenen Elementen das vierte harmonische zu construiren, z. B. in einer Curve II. Ordnung zu drei Punkten den vierten harmonischen.

93. Ein Büschel I. und ein Büschel II. Ordnung liegen in einer Ebene und sind projectiv. Die Curve III. Ordnung zu zeichnen, auf welcher alle Schnittpunkte homologer Strahlen der Büschel liegen (Seite 131).

94. Die zu Nr. 93 reciproke Aufgabe betrifft einen Strahlenbüschel III. Ordnung; derselbe soll gezeichnet werden.

95. Die Curve IV. Ordnung zu zeichnen, welche von zwei projectiven Strahlenbüscheln II. Ordnung erzeugt wird (Seite 138).

96. Den von zwei projectiven Curven II. Ordnung erzeugten Strahlenbüschel IV. Ordnung zu zeichnen.

97. Auf einer Curve II. Ordnung liegt der Scheitelpunkt S eines Winkels von gegebener Grösse, welcher eine Sehne $\overline{AB}$ der Curve einschliesst. Dreht sich dieser Winkel um S, so beschreibt die Sehne $\overline{AB}$ einen Strahlenbüschel II. Ordnung (Seite 134); nur wenn der Winkel ein rechter ist, dreht sich $\overline{AB}$ um einen Punkt (Seite 154).

98. Einer Curve II. Ordnung ist ein Dreieck ABP umschrieben, dessen Grundlinie AB in einer gegebenen Tangente u der Curve liegt und von gegebener Länge ist. Gleitet diese Grundlinie auf u fort, so beschreibt die Spitze P des Dreiecks eine neue Curve II. Ordnung (Seite 134). Insbesondere ergiebt sich:

99. Wenn ein Winkel von gegebener Grösse einer Parabel umschrieben ist, und seine beiden Schenkel auf der Parabel hinrollen, so beschreibt sein Scheitelpunkt eine Hyperbel und die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte einen Büschel II. Ordnung. Nur der rechte Winkel macht eine Ausnahme (Lehrsatz 109).

100. Es seien gegeben ein Kegel II. Ordnung und zwei sich nicht schneidende Gerade a, b, welche entweder zu zwei Strahlen des Kegels parallel laufen oder auf zwei Berührungs-Ebenen desselben senkrecht stehen. Bewegt sich dann eine dritte Gerade so, dass sie die Geraden a und b schneidet und stets zu irgend einem Strahle des Kegels parallel oder (im zweiten Falle) zu irgend einer Berührungsebene desselben normal ist, so beschreibt sie ein einschaliges Hyperboloid (Seite 132).

101. Eine Punktreihe u I. und eine Punktreihe k^2 II. Ordnung, die projectiv auf einander bezogen sind, aber weder in einer Ebene liegen, noch einen Punkt entsprechend gemein haben, erzeugen mit einander eine Schaar von Geraden, die wir eine „Regelschaar III. Ordnung" nennen wollen. Eine beliebige Gerade g schneidet mindestens einen Strahl und höchstens drei Strahlen dieser Schaar, wie sich leicht ergiebt (Seite 131), wenn man die Punktreihe u aus der Axe g durch einen Ebenenbüschel projicirt. Die Regelschaar III. Ordnung wird aus einem beliebigen Punkte im Allgemeinen durch einen Ebenenbüschel III. Ordnung projicirt (vgl. Seite 131).

102. Jede durch u gehende Ebene, welche die Curve k^2 schneidet, enthält zwei Strahlen der Regelschaar III. Ordnung. Projicirt man nun aus dem Schnittpunkte D von zwei solchen Strahlen die beiden projectiven Punktreihen u und k^2, so erhält man einen Büschel I. und einen Kegel II. Ordnung, welche projectiv sind und zwei Strahlen entsprechend gemein haben, also (Seite 131) einen Ebenenbüschel d erster Ordnung erzeugen. Alle Strahlenpaare der Regelschaar, welche in den durch u gehenden Ebenen liegen, schneiden sich demnach in den Punkten einer Geraden d, und aus jedem dieser Schnittpunkte wird die Regelschaar durch einen zu u und k^2 perspectiven Ebenenbüschel I. Ordnung projicirt. Wir können die beiden Geraden u und d etwa „Leitlinien" der Regelschaar III. Ordnung nennen, weil sie alle Strahlen der Schaar schneiden. Nur dann fällt d mit u zusammen, wenn u die Curve k^2 schneidet; in diesem Specialfalle ist die Leitlinie u zugleich ein Strahl der Regelschaar.

103. Aus einem Punkte S, welcher auf einem Strahle a der Regelschaar III. Ordnung, jedoch auf keiner der Leitlinien u und d liegt, werden die projectiven Punktreihen u und k^2 durch einen Büschel I. und einen Kegel II. Ordnung projicirt, welche den Strahl a entsprechend gemein haben und folglich (Seite 133) einen zu u und k^2 perspectiven Ebenenbüschel II. Ordnung erzeugen. Durch diesen Büschel II. Ordnung wird also die Regelschaar III. Ordnung aus dem beliebig auf ihr liegenden Punkte S projicirt. Da derselbe projectiv ist zu dem Ebenenbüschel d, welcher ebenfalls zu den Punktreihen u und k^2 perspectiv ist, so ergiebt sich:

104. Die Regelschaar III. Ordnung wird auch erzeugt durch den Ebenenbüschel d I. Ordnung, auf dessen Axe die Strahlen der Schaar sich paarweise schneiden, und durch einen zu d projectiven Ebenenbüschel S II. Ordnung, dessen Mittelpunkt beliebig auf der Regelschaar angenommen werden kann. Diese zweite Erzeugungsart ist der zuerst angegebenen reciprok, und die Regelschaar III. Ordnung ist folglich sich selbst reciprok. Gehen wir aus von der zweiten Erzeugungsart der Schaar, so gelangen wir zu Sätzen, welche den vorhin bewiesenen reciprok sind. So ergiebt sich u. A.:

Die Regelschaar III. Ordnung wird aus einem beliebigen Punkte, der auf einem ihrer Strahlen liegt, durch einen Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt;	Die Regelschaar III. Ordnung wird von einer beliebigen Ebene, die durch einen ihrer Strahlen geht, in einer Curve II. Ordnung geschnitten;

und alle solche projicirenden Ebenenbüschel und Schnittcurven II. Ordnung sind zu einander, zu der Punktreihe I. Ordnung u und zu dem Ebenenbüschel I. Ordnung d projectiv. Die Schnittcurven II. Ordnung liegen zu dem Büschel d und zu allen projicirenden Ebenenbüscheln II. Ordnung perspectiv.

105. Die Regelschaar III. Ordnung liegt auf einer geradlinigen Fläche F^3 dritter Ordnung, welche von einer beliebigen Geraden in höchstens drei Punkten und von einer beliebigen Ebene in einer Curve III. Ordnung geschnitten wird. Durch die Leitlinie d geht die Fläche F^3 zweimal, und auf ihr liegt von jeder ebenen Schnittlinie der Fläche ein eigentlicher oder isolirter Doppelpunkt. Die Ebenen, welche durch die Strahlen der Regelschaar III. Ordnung gehen, schneiden die geradlinige Fläche F^3 in diesen Strahlen und in je einer Curve II. Ordnung; diese Curve wird von dem zugehörigen Strahle der Regelschaar in zwei Punkten geschnitten, von welchen der eine auf der Doppellinie d liegt, während in dem anderen die Fläche F^3 von der Curvenebene berührt wird. Die Ebenen, welche durch die Strahlen der Regelschaar gehen, sind also Berührungsebenen der Fläche F^3 dritter Ordnung; die Ebenen der Leitlinie u, in welchen jene Strahlen paarweise liegen, sind doppelt-berührende Ebenen von F^3.

106. Wir unterscheiden drei Arten von geradlinigen Flächen dritter Ordnung. Nämlich eine der auf F^3 liegenden Curven k^2 II. Ordnung kann den Punkt, in welchem ihre Ebene die Axe u der doppelt berührenden Ebenen schneidet, entweder einschliessen, oder ausschliessen, oder sie kann durch denselben gehen; und ganz ebenso verhält sich dann jede andere k^2 der Fläche. In dem ersten Falle liegen (wie aus der ersten Erzeugungsart Nr. 101 sich ergiebt) in jeder Ebene von u zwei Strahlen der Regelschaar III. Ordnung, und zugleich schneiden sich in jedem Punkte von d zwei Strahlen derselben. In dem zweiten Falle trennen die beiden sogenannten Cuspidal-Ebenen der Fläche, welche durch u gehen und die Curve k^2 II. Ordnung berühren, die eigentlichen doppelt berührenden Ebenen und die eigentlichen Doppelpunkte der Fläche von den „isolirten", welche gleich jenen durch u gehen resp. auf d liegen. Der dritte Fall endlich ist als Grenzfall der beiden ersteren aufzufassen; wenn er eintritt, so fallen die beiden Leitlinien u und d (und damit zugleich die beiden Cuspidalebenen) zusammen.

107. An zwei windschiefen Geraden u, d und einer Curve II. Ordnung, welche von d geschnitten wird, aber weder mit d noch mit u in einer Ebene liegt, gleitet eine Gerade hin; dieselbe beschreibt alsdann eine geradlinige Fläche III. Ordnung (Nr. 101), deren Doppelpunkte auf d liegen und deren doppelt berührenden Ebenen durch u gehen. — Wie lautet der reciproke Satz?

Involutionen.

108. Wird auf einer Tangente eines Kegelschnittes eine Involution angenommen, und zieht man aus je zwei zugeordneten Punkten derselben zwei neue Tangenten an die Curve, so schneiden sich diese auf einer bestimmten Geraden (Seite 141). Insbesondere folgt:

109. Die Scheitelpunkte aller rechten Winkel, die einer Parabel umschrieben werden können, liegen auf einer Geraden; ebenso die Spitzen aller umschriebenen gleichschenkligen Dreiecke, deren Grundlinien in einer gegebenen Tangente der Parabel liegen.

110. Die Spitzen aller einem Kegelschnitt umschriebenen Dreiecke, deren Grundlinien in einer gegebenen Tangente liegen und durch den Berührungspunkt A derselben halbirt werden, liegen (nach Nr. 108) in einer Geraden, nämlich in dem durch A gehenden Durchmesser der Curve. Die Geraden, welche in jedem Dreiecke die Berührungspunkte der übrigen beiden Seiten verbinden, sind zur Grundlinie parallel.

111. Drehen sich zwei Ebenen um zwei feste Gerade u, u_1 so, dass sie fortwährend zu irgend zwei conjugirten Durchmessern eines gegebenen Kegelschnittes parallel laufen, so beschreibt ihre Schnittlinie eine durch u und u_1 gehende Kegel- oder Regelfläche II. Ordnung.

112. Zwei projective Strahlen- oder Ebenenbüschel I. Ordnung sollen in involutorische Lage gebracht werden (vergl. Nr. 18).

113. Von einer Involution auf einer Geraden sind zwei Punktenpaare A, A_1 und B, B_1 gegeben; man construire mittelst des vollständigen Vierecks zu irgend einem fünften Punkte C den zugeordneten C_1 (Seite 148), und bestimme insbesondere den „Mittelpunkt" der Punktreihe, dessen zugeordneter unendlich fern liegt.

114. Von einem Kegelschnitt sind zwei paar conjugirte Durchmesser bekannt; man zeichne zu einem beliebigen fünften Durchmesser den conjugirten (Seite 142 und 148).

115. Zieht man durch irgend einen Punkt Parallelen zu den drei paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks, so erhält man drei paar Strahlen einer Involution (Seite 147 u.). Daraus folgt:

116. Wenn zwei paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks sich rechtwinklig schneiden, so sind auch die letzten beiden Gegenseiten zu einander normal (Seite 154). Oder: Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, dem „Höhenpunkte" des Dreiecks.

117. Alle Curven II. Ordnung, welche durch die Eckpunkte und den Höhenpunkt eines beliebigen Dreiecks gehen, sind gleichseitige Hyperbeln (Seite 150, vergl. Nr. 116). Einem beliebigen Viereck kann allemal eine gleichseitige Hyperbel umschrieben werden; dieselbe geht durch die Höhenpunkte der vier von den Eckpunkten gebildeten Dreiecke.

118. Die Seiten eines beliebigen Dreiecks bilden mit der unendlich fernen Geraden der Ebene ein vollständiges Vierseit, dessen drei paar Gegenpunkte aus dem Höhenpunkt des Dreiecks durch drei paar normale Strahlen projicirt werden. Daraus folgt (vergl. Seite 148 und 150):

119. In dem Höhenpunkte jedes Tangentendreiecks einer Parabel schneiden sich zwei Tangenten dieser Curve rechtwinklig. Die Höhenpunkte aller Tangentendreiecke einer Parabel liegen folglich auf einer Geraden (Nr. 109). Insbesondere liegen die Höhenpunkte der vier Dreiecke, welche in einem beliebigen vollständigen Vierseit enthalten sind, auf einer Geraden.

120. Ist einer Ellipse oder Hyperbel ein Rechteck $ABCD$ umschrieben, so schneiden sich in jedem Punkte S, der mit den Eckpunkten A, B, C, D auf einem Kreise liegt, zwei Tangenten der Curve rechtwinklig (Seite 149); denn die zwei paar gegenüberliegenden Eckpunkte des Rechtecks werden aus S durch zwei paar rechtwinklige Strahlen projicirt. Daraus schliessen wir: Die Scheitel aller rechten Winkel, die einer Ellipse oder Hyperbel umschrieben werden können, liegen auf einem Kreise. — Dieser Satz kann als Specialfall des folgenden betrachtet werden.

121. Je zwei Tangenten einer Curve k II. Ordnung, welche durch zwei conjugirte Punkte einer involutorischen Punktreihe u gehen, schneiden sich im Allgemeinen auf einer anderen Curve II. Ordnung.

Je zwei Punkte einer Curve II. Ordnung, welche mit zugeordneten Strahlen eines involutorischen Büschels S incident sind, liegen im Allgemeinen auf einem Strahle eines Büschels II. Ordnung.*)

Eine Ausnahme tritt ein, wenn die Curve k von der Geraden u berührt wird (Nr. 108). Im Allgemeinen kann der Curve ein Vierseit $abcd$ umschrieben werden, von welchem zwei Gegenpunkte $\dot{ac}$ und $\dot{bd}$ mit zwei conjugirten Punkten P, P_1 von u zusammenfallen. Wenn nun im Punkte S zwei Tangenten von k sich schneiden, welche durch zwei andere conjugirte Punkte Q, Q_1 von u gehen, so bilden diese Tangenten $\overline{SQ}$, $\overline{SQ_1}$ mit den Strahlen $\overline{SP}$, $\overline{SP_1}$ und mit demjenigen dritten Strahlenpaare, durch welches zwei von P und P_1 verschiedene Gegenpunkte R, R_1 des Vierseits $abcd$ aus S projicirt werden, eine Involution (Seite 149), und es gehen

*) Dieser Büschel II. Ordnung zerfällt in zwei Büschel I. Ordnung, wenn die Curve von zwei conjugirten Strahlen der Involution S berührt wird.

folglich auch die Strahlen $\overline{SR}$ und $\overline{SR_1}$ durch zwei zugeordnete Punkte von u. Bezieht man also die Büschel R und R_1 projectiv so auf einander, dass je zwei homologe Strahlen derselben durch zwei conjugirte Punkte von u gehen, so erzeugen sie eine Curve II. Ordnung, welche der geometrische Ort des Punktes S ist. — Man kann auch sagen: „Die Tangentenpaare einer Curve II. Ord-„nung, welche durch zwei gegebene Punkte harmonisch getrennt „sind, schneiden sich im Allgemeinen auf einer Curve II. Ordnung.“ So ausgedrückt ist der Satz links ein Specialfall des folgenden, dessen Beweis wir unterdrücken:

Die Tangentenpaare einer Curve II. Ordnung, welche bezüglich einer zweiten Curve II. Ordnung conjugirt sind, schneiden sich im Allgemeinen in den Punkten einer dritten Curve II. Ordnung.

Die Punktenpaare einer Curve II. Ordnung, welche bezüglich einer zweiten Curve II. Ordnung conjugirt sind, liegen im Allgemeinen auf den Tangenten einer dritten Curve II. Ordnung.

Man findet leicht, dass die dritte Curve (links) durch die Berührungspunkte einer jeden gemeinschaftlichen Tangente der beiden ersteren geht.

122. Wenn von den drei Kreisen, welche die Diagonalen eines vollständigen Vierseits zu Durchmessern haben, irgend zwei sich schneiden, so geht auch der dritte durch die beiden Schnittpunkte. Die Schenkel jedes rechten Winkels, welcher einen dieser Schnittpunkte zum Scheitel hat, berühren eine dem Vierseit eingeschriebene Curve II. Ordnung.

123. Alle einem Kreisviereck umschriebenen Hyperbeln haben parallele Axen; die Richtungen dieser Axen halbiren die Winkel, welche je zwei Gegenseiten des Vierecks mit einander bilden. Die Doppelstrahlen einer Involution, von welcher drei paar conjugirte Strahlen zu den drei paar Gegenseiten des Kreisvierecks parallel laufen, stehen nämlich auf einander senkrecht.

124. Zieht man an eine Curve II. Ordnung durch den Halbirungspunkt M einer Sehne zwei Secanten, so bestimmen diese auf der Curve ein vollständiges Viereck; die übrigen zwei paar Gegenseiten dieses Vierecks begrenzen auf der Sehne zwei Strecken, die ebenfalls in M halbirt werden.

Brennpunkte der Curven zweiter Ordnung.

125. Von einer Parabel den Brennpunkt F zu construiren.

a. Der Brennpunkt F liegt auf jeder Normalen, welche auf einer beliebigen Tangente in ihrem Schnittpunkte mit der Scheiteltangente errichtet wird (Seite 162).

b. Der Brennpunkt halbirt den Abschnitt der Axe, welcher zwischen zwei conjugirten und zu einander rechtwinkligen Geraden liegt, z. B. zwischen der Tangente und der Normale eines Parabelpunktes (Seite 157).

c. Jede Parabeltangente bildet mit einem Durchmesser dieselben Winkel, wie mit der Verbindungslinie ihres Berührungspunktes und des Brennpunktes F (Seite 158).

d. Alle den Tangentendreiecken der Parabel umschriebenen Kreise gehen durch den Brennpunkt F (Seite 165).

126. Von einer Parabel die Leitlinie (Directrix) f zu construiren.

a. Die Leitlinie ist die Polare des Brennpunktes.

b. Auf der Leitlinie f schneiden sich je zwei zu einander rechtwinklige Parabeltangenten (Seite 158).

c. Die Höhenpunkte aller Tangentendreiecke der Parabel liegen auf der Directrix f (Nr. 119).

127. Die Leitlinien aller Parabeln, welche einem Dreieck eingeschrieben werden können, gehen durch den Höhenpunkt desselben, und ihre Brennpunkte liegen auf dem, dem Dreieck umschriebenen Kreise. Fällt man aus irgend einem Punkte dieses Kreises Normalen auf die Dreieckseiten, so liegen deren drei Fusspunkte in einer Geraden, nämlich in der Scheiteltangente von einer der eingeschriebenen Parabeln.

128. Von einer Ellipse oder Hyperbel die beiden Brennpunkte zu construiren:

a. als Ordnungspunkte einer in der Hauptaxe liegenden Involution (Seite 156).

b. Mittelst der Scheiteltangenten der Hauptaxe. Dieselben begrenzen auf jeder dritten Tangente eine Strecke, welche aus den Brennpunkten durch rechte Winkel projicirt wird (Seite 163).

c. Mittelst des Kreises, welcher die Curve in den Scheitelpunkten der Hauptaxe berührt. Errichtet man auf einer Tangente der Curve zwei Normalen in den Punkten, welche sie mit dem Kreise gemein hat, so schneiden diese die Hauptaxe in den beiden Brennpunkten (Seite 162).

d. Indem man einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Katheten conjugirt sind und dessen Hypotenuse in der Nebenaxe liegt, einen Kreis umschreibt. Derselbe schneidet die Hauptaxe in den beiden Brennpunkten (Seite 157).

e. Mit Hülfe des Satzes, dass die Summe resp. Differenz der beiden Brennstrahlen eines Curvenpunktes constant ist (Seite 161).

129. Eine Curve II. Ordnung zu construiren aus einem Brennpunkte, der zugehörigen Leitlinie und einem Punkte oder einer Tangente (Seite 159 und 160).

130. Eine Curve II. Ordnung zu construiren aus einem Brennpunkte und entweder drei Tangenten oder zwei Tangenten und dem Berührungspunkte von einer derselben (Seite 164). In beiden Fällen sofort den zweiten Brennpunkt zu zeichnen (Seite 158).

131. Werden in der Ebene die Brennpunkte von jeder einem Dreieck ABC eingeschriebenen Curve II. Ordnung einander zugeordnet, so wird dadurch zwischen den Punkten der Ebene eine involutorische Verwandtschaft zweiten Grades hergestellt, von welcher A, B, C die drei Hauptpunkte sind; d. h. wenn der eine Brennpunkt eine beliebige Gerade u beschreibt, so beschreibt der andere eine durch A, B, C gehende und zu u projective Curve II. Ordnung (Seite 158). Die Halbirungslinien der Dreieckswinkel sind sich selbst zugeordnet. Jede Gerade der Ebene ist Axe von einer der eingeschriebenen Curven II. Ordnung.

132. Eine Curve II. Ordnung zu construiren aus den beiden Brennpunkten und einem Punkte oder einer Tangente (Seite 161 und 162).

133. Die Winkel, welche confocalen Curven II. Ordnung aus einem beliebigen Punkte P ihrer Ebene umschrieben werden können, werden von zwei bestimmten Geraden halbirt, die sich in P rechtwinklig schneiden (Seite 157), und zwar von den Tangenten der beiden durch P gehenden Curven.

134. Die Pole einer Geraden g in Bezug auf confocale Curven II. Ordnung liegen in einer zu g normalen Geraden; dieselbe ist von g durch die beiden Brennpunkte harmonisch getrennt (S. 157).

135. Je zwei Gegenseiten eines Vierecks, welches aus einem Poldreieck einer Curve II. Ordnung und dessen Höhenpunkt besteht, sind durch die Brennpunkte der Curve harmonisch getrennt.

136. Sind von einer Curve II. Ordnung zwei Punkte A, B und ein Brennpunkt F gegeben, so liegt der andere Brennpunkt F_1 auf einem der beiden durch F gehenden Kegelschnitte, von welchen

A und B die Brennpunkte sind. Denn weil $AF \pm BF$ gegeben ist, so muss $AF_1 \pm BF_1$ eine constante Grösse sein (vgl. Seite 161). — Die zu F gehörige Directrix schneidet die Gerade $\overline{AB}$ in einem der beiden Punkte, durch welche die Halbirungslinien der von $\overline{FA}$ und $\overline{FB}$ gebildeten Winkel gehen (Seite 159).

137. Eine Curve II. Ordnung zu construiren aus einem Brennpunkte, dem Mittelpunkte und einem Punkte oder einer Tangente (Nr. 132).

138. Das Product der Abstände eines Brennpunktes von zwei parallelen Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel ist constant (Seite 162); ebenso das Product der Abstände beider Brennpunkte von einer beliebigen Tangente.

139. Eine Ellipse zu zeichnen, deren Axenlängen gegeben sind:

a. auf Grund des Satzes Nr. 63;

b. mit Benutzung der vier Scheiteltangenten (Nr. 23 und 24);

c. mit Hülfe der Brennpunkte, die aus den Axenlängen zu construiren sind.

140. Eine Parabel zu construiren, wenn gegeben sind der Brennpunkt und die Directrix (Seite 160), oder der Brennpunkt, die Axe und ein Punkt oder eine Tangente.

141. Die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise berühren, liegen auf zwei confocalen Curven II. Ordnung (vgl. Seite 161). Die Mittelpunkte der gegebenen beiden Kreise sind die Brennpunkte dieser Curven.

142. Alle Punkte der Ebene, die von einer Geraden und einem Kreise gleichen Abstand haben, liegen auf zwei Parabeln (vgl. Nr. 141).

143. Wenn der eine Schenkel eines Winkels von gegebener Grösse eine Curve II. Ordnung beständig berührt, indess der andere sich um einen ihrer Brennpunkte dreht, so beschreibt der Scheitelpunkt einen Kreis, welcher die Curve zweimal berührt (Seite 162); wenn jedoch die Curve eine Parabel ist, so beschreibt der Scheitelpunkt eine Tangente derselben.

Aufgaben zweiten Grades.

144. Einer Curve II. Ordnung soll ein einfaches $n$eck eingeschrieben werden, dessen Seiten der Reihe nach durch n gegebene, nicht auf der Curve liegende Punkte gehen.

145. Einer Curve II. Ordnung soll ein einfaches $n$eck umschrieben werden, dessen Eckpunkte der Reihe nach auf n gegebenen, die Curve nicht berührenden Geraden liegen.

146. In der Ebene ist ein einfaches Fünfeck gegeben; es soll ein zweites gezeichnet werden, welches dem gegebenen um- und zugleich eingeschrieben ist.

147. Durch einen gegebenen Punkt sind zwei Strahlen so zu ziehen, dass sie auf zwei gegebenen Geraden u, v Strecken von gegebenen Längen begrenzen.

148. Zwischen den Geraden u, v soll eine Linie so gezogen werden, dass sie von zwei gegebenen Punkten aus unter rechten Winkeln gesehen wird.

149. Auf einer gegebenen Geraden eine Strecke zu bestimmen, welche aus zwei gegebenen Punkten unter gegebenen Winkeln gesehen wird.

150. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade so zu legen, dass sie ein gegebenes Dreieck halbirt, oder dass sie mit zwei Seiten desselben ein Dreieck von gegebenem Inhalt bildet.

151. Einem Dreieck soll ein anderes umschrieben werden, dessen eine Seite von zwei gegebenen Geraden begrenzt wird und dessen anderen beiden Seiten einen Winkel von gegebener Grösse einschliessen.

152. Die Schenkel der einander entsprechenden rechten Winkel von zwei projectiven Büscheln zu construiren (Nr. 18).

153. Man bestimme in zwei projectiven Punktreihen, die in derselben Geraden liegen, zwei homologe Punkte, die einen gegebenen Abstand haben, oder in zwei concentrischen projectiven Büscheln zwei homologe Strahlen, die einen Winkel von gegebener Grösse einschliessen.

154. In zwei projectiven Punktreihen I. Ordnung bestimme man zwei homologe Strecken von gegebenen Längen.

155. Eine Curve II. Ordnung hat im Allgemeinen ein Paar conjugirter Durchmesser, welche mit zwei conjugirten Durchmessern einer anderen in derselben Ebene liegenden Curve II. Ordnung parallel laufen. Nur Hyperbeln, deren Asymptotenrichtungen durch einander getrennt sind, machen eine Ausnahme (Seite 174).

156. Einem Viereck eine Curve II. Ordnung zu umschreiben, welche eine gegebene Gerade berührt (Seite 150); oder einem Vierseit eine Curve II. Ordnung einzuschreiben, welche durch einen gegebenen Punkt geht.

157. In der Ebene von zwei Curven II. Ordnung giebt es mindestens einen reellen Punkt U, welcher in Bezug auf beide Curven eine und dieselbe Polare u hat (Nr. 65): Die beiden reellen oder conjugirt-imaginären Punkte von u, welche in Bezug auf jede der beiden Curven conjugirt sind (vgl. Seite 174), bilden mit U ein gemeinschaftliches Poldreieck der Curven. Zwei in einer Ebene liegende Curven II. Ordnung haben demnach im Allgemeinen ein gemeinschaftliches Poldreieck; dasselbe hat mindestens einen reellen Eckpunkt und eine reelle Seite.

Focalaxen und cyclische Ebenen von Kegeln II. Ordnung.

158. Dreht sich ein gegebener Flächenwinkel um seine Scheitellinie s, so umhüllt die Verbindungsebene der beiden Geraden, in welchen seine Schenkel von zwei durch einen Punkt von s gelegten Ebenen beziehungsweise geschnitten werden, einen diese Ebenen berührenden Kegel II. Ordnung, von welcher s eine Focalaxe ist (Seite 185). — Wie lautet der reciproke Satz?

159. Aus den reellen Focalaxen f, f' eines Kegels II. Ordnung werden die Winkel, welche von den zu $\overline{ff'}$ normalen Berührungsebenen in den übrigen Berührungsebenen begrenzt werden, durch rechte Flächenwinkel projicirt.

160. Die reellen cyclischen Ebenen $\varkappa$, $\varkappa'$ eines Kegels II. Ordnung schneiden jeden Flächenwinkel, dessen Schenkel die beiden zu $\overline{\varkappa\varkappa'}$ normalen Strahlen des Kegels mit einem beliebigen Strahle desselben verbinden, in zwei rechten Winkeln.

161. Alle Flächenwinkel, welche confocalen Kegeln II. Ordnung aus einem beliebigen Punkte P umschrieben werden können, werden von zwei bestimmten Ebenen halbirt, die sich in P rechtwinklig schneiden (Nr. 133).

162. Alle Winkel, welche concyclischen Kegeln II. Ordnung in einer durch ihren Mittelpunkt gehenden Ebene eingeschrieben werden können, werden von zwei bestimmten, zu einander normalen Strahlen halbirt (Nr. 161).

163. Unter den Kegeln II. Ordnung sind ausser den Rotationskegeln hervorzuheben:

a. die gleichseitigen (Schröter), welchen rechtwinklige Dreikante eingeschrieben werden können,

b. diejenigen, welchen rechtwinklige Dreikante umschrieben werden können,
c. die orthogonalen (Schroeter), deren cyclische Ebenen zu zwei Kegelstrahlen normal sind (Nr. 37),
d. diejenigen, deren Focalaxen zu zwei Berührungsebenen normal sind,
e. die Kegel des Pappus, welche von den Ebenen zweier Geraden in je zwei normalen Strahlen geschnitten werden (die beiden Geraden sind die Polstrahlen der cyclischen Ebenen),
f. die Kegel des Hachette, an welche von den Strahlen zweier Ebenen je zwei normale Berührungsebenen gehen,
g. und h. diejenigen, deren Focalaxen oder deren cyclische Ebenen sich rechtwinklig schneiden.

164. Die Halbirungslinien von zwei Nebenwinkeln beschreiben einen Kegel des Pappus, wenn der eine Schenkel sich in einer Ebene γ bewegt, indess der andere g festbleibt. Die Ebene γ ist eine cyclische des Kegels und g ihr Polstrahl.

Aus einem Punkte P einer Kugel werden die grössten Kugelkreise durch Kegel des Pappus projicirt.

Polvierecke und Polvierseite von Kegelschnitten.

165. Ein vollständiges Viereck nenne ich „Polviereck" eines Kegelschnittes γ^2, wenn von seinen sechs Seiten jede ihrer Gegenseite conjugirt ist in Bezug auf γ^2. Ebenso soll ein vollständiges Vierseit ein „Polvierseit" des Kegelschnittes heissen, wenn jeder von seinen sechs Eckpunkten dem ihm gegenüber liegenden Eckpunkte conjugirt ist. Die Polaren der Eckpunkte eines Polvierecks bilden ein Polvierseit; und zwar gehen die sechs Seiten des Vierecks durch die sechs Eckpunkte der Vierseits.

166. Wenn zwei paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks aus conjugirten Strahlen bestehen, so gilt das Gleiche von dem dritten Paare, und das Viereck ist ein Polviereck des Kegelschnittes γ^2. Nämlich die Polare eines beliebigen Eckpunktes schneidet das Viereck in einer Involution (Seite 147); und zwar jene beiden (und folglich alle drei) Paare von Gegenseiten in Paaren conjugirter Punkte; woraus der Satz folgt. Aehnlich beweist man den reciproken Satz: Ein vollständiges Vierseit ist ein Polvierseit von γ^2, wenn zwei paar Gegenpunkte von conjugirten Punkten gebildet werden.

167. Verbindet man die Eckpunkte A, B, C eines Dreiecks mit den Polen der ihnen gegenüberliegenden Seiten, so gehen die drei Verbindungslinien durch einen Punkt D, welcher mit A, B und C ein Polviereck des Kegelschnittes γ^2 bildet (Nr. 166). Drei beliebig angenommene Eckpunkte A, B, C eines Polvierecks bestimmen also den vierten D; sind insbesondere A und B conjugirt in Bezug auf γ^2, so bilden sie mit D ein Poldreieck von γ^2. Jedes Viereck, welches aus einem Poldreieck von γ^2 und einem beliebigen Punkte der Ebene besteht, ist ein Polviereck von γ^2 (Nr. 165). Es giebt auch uneigentliche Polvierecke, von deren Eckpunkten drei in einer Geraden liegen oder zwei sich vereinigen.

168. Bringt man die Seiten a, b, c eines Dreiecks zum Durchschnitt mit den Polaren der ihnen gegenüberliegenden Eckpunkte, so erhält man drei Punkte einer Geraden d, welche mit a, b und c ein Polvierseit des Kegelschnittes γ^2 bildet (Nr. 166). Drei Seiten eines Polvierseits bestimmen also die vierte; nur wenn sie ein Poldreieck von γ^2 bilden, kann die vierte Seite mit jeder Geraden der Ebene zusammenfallen.

169. Wenn zwei Polvierecke $ABCD$ und $ABC'D'$ von γ^2 zwei Eckpunkte A und B mit einander gemein haben, so liegen ihre sechs Eckpunkte auf einer Curve II. Ordnung, die unter Umständen in zwei Gerade, $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, zerfallen kann.

Wenn zwei Polvierseite von γ^2 zwei gemeinschaftliche Seiten haben, so berühren ihre sechs Seiten eine „Curve II. Classe“ (d. h. sie gehören einem Strahlenbüschel II. Ordnung an), die auch in zwei Punkte zerfallen kann.

Weil nämlich die Strahlenbüschel A und B projectiv auf einander bezogen werden, wenn man jedem Strahle von A den ihm conjugirten Strahl von B zuweist, so ergiebt sich $A(CDC'D') \barwedge B(DCD'C')$, und daraus nach S. 144 $A(CDC'D') \barwedge B(CDC'D')$, wie im Satze links behauptet wird.

170. Da ein Poldreieck von γ^2 durch jeden Punkt der Ebene zu einem Polviereck ergänzt wird, so ergeben sich aus dem vorhergehenden Doppelsatze sofort die folgenden Sätze:

Wenn ein Poldreieck und ein Polviereck von γ^2 einen gemeinschaftlichen Eckpunkt besitzen, so liegen ihre sechs Eckpunkte auf einer Curve II. Ordnung.

Wenn ein Poldreiseit und ein Polvierseit von γ^2 eine gemeinschaftliche Seite haben, so berühren ihre sechs Seiten eine Curve II. Classe.

Zwei beliebigen Poldreiecken eines Kegelschnittes γ^2 kann allemal eine Curve II. Ordnung umschrieben und eine Curve II. Classe eingeschrieben werden (vergl. auch S. 145). Diese Curven können aber auch in zwei Gerade resp. zwei Punkte zerfallen.

171. Zwei Kegelschnitte γ^2 und γ_1^2, die in derselben Ebene liegen, haben unendlich viele gemeinschaftliche Polvierecke und Polvierseite. Man kann zwei Seiten a, b eines solchen gemeinschaftlichen Polvierecks willkürlich annehmen; die ihnen gegenüberliegenden Seiten a_1, b_1 verbinden die beiden Pole von a resp. b in Bezug auf γ^2 und γ_1^2 mit einander.

Wenn zwei gemeinschaftliche Polvierseite $ABCD$ und $AB'C'D'$ von γ^2 und γ_1^2 einen Eckpunkt A mit einander gemein haben, so liegen ihre sieben Eckpunkte auf einer Curve II. Ordnung.

Wenn zwei gemeinschaftliche Polvierseite von γ^2 und γ_1^2 eine Seite mit einander gemein haben, so berühren ihre sieben Seiten eine Curve II. Classe.

Ist nämlich $ABB'P$ ein Polviereck von γ^2 und $ABB'Q$ ein solches von γ_1^2, so haben die Curven II. Ordnung $(ABCDB'P)$ und $(ABCDB'Q)$ fünf gemeinschaftliche Punkte und fallen deshalb zusammen mit dem Kegelschnitt $(ABB'PQ)$; ebenso aber fallen die Curven II. Ordnung $(AB'C'D'BP)$ und $(AB'C'D'BQ)$ mit $(ABB'PQ)$ zusammen.

172. In Bezug auf drei beliebig gegebene Kegelschnitte γ^2, γ_1^2, γ_2^2 der Ebene hat eine Gerade a drei Pole, die im Allgemeinen nicht in einer Geraden liegen. Beschreibt a einen Strahlenbüschel U, so beschreiben diese Pole drei zu U und deshalb auch zu einander projective Punktreihen u, u_1, u_2; und von den Strahlen, welche die homologen Punkte von u und u_1 verbinden, gehen im Allgemeinen höchstens drei, mindestens aber einer durch die entsprechenden Punkte von u_2 (Seite 129) und sind je einem Strahle von U in Bezug auf die drei Kegelschnitte γ^2, γ_1^2, γ_2^2 conjugirt. Daraus ergiebt sich die eine Hälfte des Doppelsatzes:

Es giebt in der Ebene unendlich viele Paare von Strahlen, die in Bezug auf drei beliebig gegebene Kegelschnitte conjugirt sind. Diese Strahlenpaare umhüllen im Allgemeinen eine Curve III. Classe, und je zwei von ihnen bilden zwei paar

Es giebt in der Ebene unendlich viele Paare von Punkten, die in Bezug auf drei beliebig gegebene Kegelschnitte conjugirt sind. Der Ort dieser Punktenpaare ist im Allgemeinen eine Curve III. Ordnung, und je zwei von ihnen bilden zwei paar

Gegenseiten eines gemeinschaftlichen Polvierecks der drei Kegelschnitte (Nr. 166). Drei Tangenten, welche von irgend einem Punkte U an die Curve III. Classe gehen, bilden mit den ihnen conjugirten Tangenten die drei paar Gegenseiten eines gemeinschaftlichen Polvierecks der drei Kegelschnitte.

Gegenpunkte eines gemeinschaftlichen Polvierseits der drei Kegelschnitte. Drei Punkte, in welchen irgend eine Gerade die Curve III. Ordnung schneidet, bilden mit den ihnen conjugirten Curvenpunkten die drei paar Gegenpunkte eines gemeinschaftlichen Polvierseits der drei Kegelschnitte.

Lineare Systeme und Gewebe von Kegelschnitten.

173. Wenn einem Polviereck eines Kegelschnittes γ^2 ein Kegelschnitt k^2 umschrieben ist, so stehen die beiden Curven γ^2 und k^2 in folgenden merkwürdigen Beziehungen zu einander:

a. Drei beliebige Punkte von k^2 bestimmen ein Polviereck von γ^2 (Nr. 167), dessen vierter Eckpunkt gleichfalls auf k^2 liegt.

b. Bringt man k^2 zum Durchschnitt mit zwei Geraden, die in Bezug auf γ^2 conjugirt sind, so erhält man die vier Eckpunkte eines Polvierecks von γ^2.

c. Der Curve k^2 können demnach unendlich viele Polvierecke, im Allgemeinen aber auch unendlich viele reelle Poldreiecke von γ^2 eingeschrieben werden; jeder von γ^2 eingeschlossene Punkt der Curve k^2 ist Eckpunkt von einem dieser Poldreiecke.

d. Die Polare eines Punktes von k^2 bezüglich der γ^2 schneidet die eine oder auch jede der beiden Curven in zwei reellen Punkten, welche in Bezug auf die andere Curve conjugirt sind.

a_1. Drei beliebige Tangenten von γ^2 bestimmen ein Polvierseit von k^2, dessen vierte Seite gleichfalls Tangente von γ^2 ist.

b_1. Zieht man an γ^2 Tangenten aus zwei Punkten, die in Bezug auf k^2 conjugirt sind, so erhält man die vier Seiten eines Polvierseits von k^2.

c_1. Der Curve γ^2 können demnach unendlich viele Polvierseite, im Allgemeinen aber auch unendlich viele reelle Poldreiseite von k^2 umschrieben werden; jede von k^2 ausgeschlossene Tangente der γ^2 gehört zu einem dieser Poldreiseite.

d_1. Aus dem Pole einer Tangente von γ^2 bezüglich der k^2 gehen an die eine oder auch an jede der beiden Curven zwei reelle Tangenten, welche in Bezug auf die andere Curve conjugirt sind.

e. Zwei Tangenten von γ^2, deren Berührungspunkte conjugirt sind in Bezug auf k^2, schneiden sich allemal in einem Punkte von k^2.

e_1. Zwei Punkte von k^2, deren Tangenten conjugirt sind in Bezug auf γ^2, liegen allemal auf einer Tangente von γ^2.

f. und f_1. Die Curve k^2 liegt entweder ganz ausserhalb γ^2 oder theils ausserhalb, theils innerhalb; keine der beiden Curven schliesst die andere ein.

174. Zum Beweise dieser Sätze diene Folgendes. Zwei Eckpunkte des Polvierecks von γ^2, welchem der Kegelschnitt k^2 umschrieben ist, bestimmen mit einem beliebigen dritten Punkte A von k^2 ein zweites, der k^2 eingeschriebenes Polviereck von γ^2 (Nr. 167 und 169), aus diesem zweiten aber kann ebenso ein drittes abgeleitet werden, von welchem zwei Eckpunkte A, B beliebig auf k^2 angenommen sind, und dieses dritte führt zu einem vierten, der k^2 eingeschriebenen Polviereck von γ^2, welches drei beliebige Punkte A, B, C von k^2 zu Eckpunkten hat. Damit ist der Satz a. bewiesen, woraus b. ohne Weiteres folgt. — Sei a die Polare von A in Bezug auf γ^2, und möge dieselbe mit γ^2 keinen reellen Punkt gemein haben, also A innerhalb γ^2 liegen; dann schneidet a die Gegenseiten der Polvierecke von γ^2, welche A zum Eckpunkt haben, in Paaren von Punkten, die hinsichtlich γ^2 conjugirt sind (Nr. 166), und die so entstehende Involution a ist elliptisch und hat keine reellen Doppelpunkte. Die Kegelschnitte, welche einem beliebigen jener Polvierecke umschrieben werden können, müssen deshalb die Gerade a in je zwei reellen, conjugirten Punkten schneiden, welche mit A ein reelles Poldreieck von γ^2 bilden; denn diese Kegelschnitte folgen stetig auf einander, unendlich viele von ihnen haben mit der Involution a zwei reelle, einander zugeordnete Punkte gemein (S. 150), und unmöglich kann einer derselben mit a zwei imaginäre Punkte gemein haben, weil sonst zwischen ihm und den eben genannten ein anderer liegen würde, welcher a in einem reellen Doppelpunkte berührte. Damit sind die Sätze c. und f. bewiesen, woraus d. und e. sich leicht ergeben.

175. Die Sätze a_1. bis f_1. der Nr. 173 können auf dieselbe Art wie a. bis f. bewiesen werden, sobald gezeigt ist, dass dem Kegelschnitt γ^2 irgend ein Polvierseit von k^2 umschrieben werden kann. Um diesen Nachweis zu liefern, nehmen wir auf k^2 drei Punkte P, Q, R an, deren Verbindungslinien ausserhalb γ^2 liegen, was (Nr. 173 f.) allemal möglich ist. Dieselben bestimmen ein der k^2 eingeschriebenes Polviereck $PQRS$ von γ^2, dessen Gegenseiten sich in drei ausserhalb γ^2 liegenden Punkten U, V, W schneiden; diese drei Punkte sind paarweise conjugirt in Bezug auf k^2, und zwei von ihnen, U und V, liegen ausserhalb k^2. Zieht man nun von U und V Tangentenpaare an γ^2, so trennen dieselben je zwei Gegenseiten des Polvierecks $PQRS$ harmonisch (Seite 100); diese vier Tangenten bilden folglich ein Vierseit, dessen Gegenpunkte paarweise durch jedes paar Gegenseiten des Vierecks $PQRS$ harmonisch getrennt sind, und da einer der sechs Eckpunkte des Vierseits, wie man leicht einsieht, von k^2 eingeschlossen ist, so ist derselbe auch durch k^2 von seinem Gegenpunkte harmonisch getrennt (Seite 149). Von den Eckpunkten des Vierseits sind also zwei ihren Gegenpunkten conjugirt hinsichtlich k^2, dieses der γ^2 umschriebene Vierseit ist folglich ein Polvierseit von k^2; w. z. b. w.

176. Von zwei Kegelschnitten k^2 und γ^2, von welchen der eine k^2 einem Polviereck des anderen γ^2 umschrieben oder dieser einem Polvierseit von jenem eingeschrieben ist, sage ich*): „Die Curve II. Ordnung k^2 stützt oder trägt die Curve II. Classe γ^2, und umgekehrt γ^2 stützt sich oder ruht auf k^2." Wenn k^2 in zwei Strahlen oder γ^2 in zwei Punkte zerfällt, so sage ich demgemäss:

Ein Strahlenpaar stützt die Curve II. Classe γ^2, wenn seine Strahlen in Bezug auf γ^2 conjugirt sind.	Ein Punktenpaar ruht auf der Curve II. Ordnung k^2, wenn seine Punkte in Bezug auf k^2 conjugirt sind.

Und weil eine Gerade nur dann in Bezug auf γ^2 sich selbst conjugirt ist, wenn sie γ^2 berührt, so setze ich hinzu:

Eine zweifache Gerade stützt die Curve II. Classe γ^2, wenn sie γ^2 berührt.	Ein zweifacher Punkt ruht auf der Curve II. Ordnung k^2, wenn er auf k^2 liegt.

177. Alle Kegelschnitte, welche eine gegebene Curve II. Classe γ^2 stützen und durch drei willkürlich angenommene Punkte gehen, sind dem, durch diese Punkte bestimmten Polviereck von γ^2 umschrieben (Nr. 173a); durch einen beliebig angenommenen vierten Punkt der Ebene geht demnach nur einer derselben. Also:

Die Kegelschnitte k^2, welche eine gegebene Curve II. Classe γ^2	Die Kegelschnitte γ^2, welche auf einer gegebenen Curve

*) Vergl. meine analytisch-geometrischen Arbeiten in Crelle-Borchardt's Journal für die r. u. a. Mathematik, Bd. 82.

stützen, bilden eine Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen, welche wir ein „lineares Kegelschnitt-System vierter Stufe" nennen wollen. Einem beliebigen Viereck kann im Allgemeinen nur ein Kegelschnitt dieses Systemes umschrieben werden; denn das Viereck ist ein Polviereck von γ^2, und alle ihm umschriebenen Kegelschnitte gehören zu dem Systeme, wenn irgend zwei derselben die Curve γ^2 stützen.

II. Ordnung k^2 ruhen, bilden eine Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen, welche wir ein „lineares Kegelschnitt-Gewebe vierter Stufe" nennen wollen. Einem beliebigen Vierseit kann im Allgemeinen nur ein Kegelschnitt dieses Gewebes eingeschrieben werden; denn das Vierseit ist ein Polvierseit von k^2 und alle ihm eingeschriebenen Kegelschnitte gehören zu dem Gewebe, wenn irgend zwei derselben auf der Curve k^2 ruhen.

178. Von den Kegelschnitten, welche zwei gegebene Curven II. Classe γ^2 und γ_1^2 stützen, geht durch drei beliebige Punkte A, B, C der Ebene im Allgemeinen ein einziger; derselbe enthält auch die beiden Punkte, welche mit A, B und C ein Polviereck von γ^2 und eines von γ_1^2 bilden. Ueberhaupt können wir sagen:

Alle Kegelschnitte k^2, welche zwei, drei oder vier beliebig in der Ebene angenommene Curven II. Classe stützen, bilden eine drei-, zwei-, resp. einfach unendliche Mannigfaltigkeit, welche wir ein „lineares Kegelschnitt-System dritter, zweiter, resp. erster Stufe" nennen wollen.

Alle Kegelschnitte γ^2, welche auf zwei, drei oder vier beliebig in der Ebene angenommene Curven II. Ordnung zugleich sich stützen, bilden eine drei-, zwei-, resp. einfach unendliche Mannigfaltigkeit, welche wir ein „lineares Kegelschnitt-Gewebe dritter, zweiter, resp. erster Stufe" nennen wollen.

Bei besonderer gegenseitiger Lage der gegebenen Curven können diese Sätze Ausnahmen erleiden, die sich weiter unten von selbst ergeben. Die Stufenzahl giebt nicht blos an, wie viele Dimensionen ein Kegelschnitt-System oder -Gewebe hat, sondern sie ist, wie wir sehen werden (Nr. 189 und 195), zugleich die Zahl der Punkte resp. Tangenten, durch welche einer von seinen Kegelschnitten festgelegt ist.

179. Die linearen Kegelschnitt-Systeme erster und zweiter Stufe werden gewöhnlich „Kegelschnitt-Büschel" resp. „Kegelschnitt-Netze" genannt; ebenso führen die reciproken Gebilde auch die Namen „Schaar" resp. „Schaarschaar von Kegelschnitten". Allerdings pflegt man sonst den Kegelschnittbüschel und die Kegelschnittschaar zu definiren als die Gesammtheit aller Kegelschnitte, die einem Viereck umschrieben resp. einem Vierseit eingeschrieben werden können; aber diese Definitionen sind in den obigen enthalten, wie der folgende Satz lehrt:

Wenn zwei Kegelschnitte eines linearen Kegelschnitt-Systemes einem Viereck umschrieben sind, so ist dieses ein gemeinschaftliches Polviereck aller Curven II. Classe, die auf das System sich stützen (Nr. 177), und dem Systeme gehören folglich alle dem Viereck umschriebenen Kegelschnitte an.

Wenn zwei Kegelschnitte eines linearen Kegelschnitt-Gewebes einem Vierseit eingeschrieben sind, so ist dieses ein gemeinschaftliches Polvierseit aller Curven II. Ordnung, welche das Gewebe stützen (Nr. 177), und dem Gewebe gehören folglich alle dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte an.

180. Die Theorie des linearen Kegelschnitt-Systemes vierter Stufe ist nicht wesentlich verschieden von der Polarentheorie der Curve II. Classe γ^2, welche auf allen seinen Kegelschnitten ruht. Wir heben deshalb nur hervor, dass das System ein specielles ist, wenn γ^2 sich auf zwei Punkte P, Q oder auch auf einen zweifachen Punkt P reducirt. Also:

Alle Kegelschnitte der Ebene, welche durch einen gegebenen Punkt P gehen oder in Bezug auf welche zwei Punkte P, Q conjugirt sind, bilden ein specielles lineares Kegelschnitt-System vierter Stufe.

Alle Kegelschnitte der Ebene, welche eine gegebene Gerade berühren oder in Bezug auf welche zwei Gerade conjugirt sind, bilden ein specielles lineares Kegelschnitt-Gewebe vierter Stufe.

Z. B. alle Parabeln der Ebene bilden ein specielles Kegelschnitt-Gewebe und alle gleichseitigen Hyperbeln bilden ein specielles Kegelschnitt-System vierter Stufe. Auf welche beiden imaginären Punkte reducirt sich die Curve II. Classe γ^2, welche auf den gleichseitigen Hyperbeln ruht? Die Kegelschnitte der Ebene, von welchen eine Axe gegebene Richtung hat, bilden ein specielles System vierter Stufe, welchem auch alle Kreise der Ebene angehören; jedem Vierecke, welches zwei dieser Kegelschnitte mit einander gemein haben, kann ein Kreis umschrieben werden.

Lineare Kegelschnitt-Systeme und -Gewebe dritter und erster Stufe.*)

181. Sind von einem Polviereck einer Curve II. Classe γ^2 zwei Eckpunkte A, B gegeben, sowie die zu $\overline{AB}$ conjugirte Seite u, in welcher die anderen beiden Eckpunkte C, D liegen, so bilden die letzteren ein Paar zugeordneter Punkte einer Involution u. Man erhält diese Involution, wenn man jedem Strahle $\overline{AC}$ oder $\overline{AD}$ von A den ihm conjugirten Strahl $\overline{BD}$ resp. $\overline{BC}$ von B zuweist, und sodann die Strahlenbüschel A und B, welche dadurch projectiv auf einander bezogen sind, mit u zum Durchschnitt bringt. Will man nun ein gemeinschaftliches Polviereck von zwei Curven II. Classe γ^2 und γ_1^2 construiren, welches die Punkte A, B zu Eckpunkten hat, so muss man die Gerade u, welche die anderen beiden Eckpunkte C und D enthält, durch die beiden Pole von $\overline{AB}$ in Bezug auf γ^2 und γ_1^2 legen; die Punkte C und D aber sind einander zugeordnet in zwei auf u liegenden Involutionen, und deshalb völlig bestimmt (Seite 174), wenn die Punktreihen nicht ausnahmsweise identisch sind. Die beiden Doppelpunkte von jeder dieser Involutionen sind conjugirt in Bezug auf alle Kegelschnitte, welche dem Polviereck $ABCD$ umschrieben sind; und zwar geht, wie wir früher (Seite 179) bewiesen haben, auch dann durch einen beliebigen Punkt P allemal einer dieser Kegelschnitte, wenn C und D imaginär werden. Daraus schliessen wir (vergl. Nr. 178):

182. Alle Kegelschnitte, welche zwei Curven II. Classe γ^2 und γ_1^2 stützen und durch zwei reelle Punkte gehen, sind einem gemeinschaftlichen Polviereck von γ^2 und γ_1^2 umschrieben, dessen übrigen beiden Eckpunkte aber auch conjugirt-imaginär sein können.

Alle Kegelschnitte, welche auf zwei Curven II. Ordnung k^2 und k_1^2 ruhen und zwei reelle Gerade berühren, sind einem gemeinschaftlichen Polviereck von k^2 und k_1^2 eingeschrieben, dessen übrigen beiden Seiten aber auch conjugirt-imaginär sein können.

Wir dürfen (Seite 170) dieses Polviereck als gegeben betrachten, wenn ausser seinen beiden reellen Punkten A und B irgend ein ihm umschriebener Kegelschnitt bekannt ist, sowie die Gerade u, auf welcher die anderen beiden Eckpunkte liegen. Sind

*) Vergl. Schröter, Die Theorie der Kegelschnitte, II. Aufl., S. 224—403 (Leipzig 1876).

zwei ihm umschriebene Kegelschnitte gegeben, so projiciren wir alle Punkte des einen aus A sowohl wie aus B auf den anderen; wir erhalten dann in diesem letzteren zwei projective Punktreihen, welche die übrigen beiden Eckpunkte C, D des Polvierecks entsprechend gemein haben, und die Gerade u oder $\overline{CD}$ ergiebt sich, auch wenn C und D imaginär sind, durch eine bekannte Construction (Seite 166). Das Polviereck ist also auch durch zwei ihm umschriebene Kegelschnitte völlig bestimmt; alle ihm umschriebenen Kegelschnitte stützen sowohl γ^2 wie γ_1^2.

183. Auf Grund dieser Bemerkungen und der Sätze von Nr. 179 können wir nun folgenden wichtigen Satz beweisen, welcher die Kegelschnitt-Systeme und -Gewebe dritter Stufe mit denjenigen erster Stufe auf das Innigste verknüpft*):

Mit einem linearen Kegelschnittsysteme dritter Stufe ist allemal eine Kegelschnittschaar derartig verbunden, dass jede Curve der Schaar auf jeder Curve des Systemes ruht.	Mit einem linearen Kegelschnittgewebe dritter Stufe ist allemal ein Kegelschnittbüschel derartig verbunden, dass jede Curve des Büschels alle Curven des Gewebes stützt.

Es seien γ^2 und γ_1^2 die beiden Curven II. Classe, welche auf allen Kegelschnitten des linearen Systemes dritter Stufe ruhen und dasselbe bestimmen (Nr. 178). Wir wählen in dem Systeme vier Kegelschnitte k, l, m, n so, dass k, l und m durch einen beliebig gegebenen reellen Punkt P gehen und sich paarweise in drei verschiedenen gemeinschaftlichen Polvierecken (kl), (km), (lm) von γ^2 und γ_1^2 schneiden; der vierte Kegelschnitt n gehe nicht durch P, werde aber von k in einem gemeinschaftlichen Polviereck (kn) von γ^2 und γ_1^2 geschnitten, welches zwei oder vier reelle Eckpunkte hat. Wir bezeichnen endlich mit δ^2 irgend einen von γ^2 und γ_1^2 verschiedenen Kegelschnitt der Schaar, welche auf k, l, m, n sich stützt (Nr. 178 und 179). Wir beweisen dann den Satz links, indem wir darthun, dass auf jedem Kegelschnitte des linearen Systemes dritter Stufe, z. B. auf demjenigen, welcher durch irgend drei reelle Punkte A, B, C geht (Nr. 178), allemal ausser γ^2 und γ_1^2 auch die Curve δ^2 ruht.

*) Derselbe rührt von Herrn H. J. Stephen Smith her; vergl. die Abhandlung des Herrn Rosanes „Ueber Systeme von Kegelschnitten“ in den Mathem. Annalen, Bd. 6, S. 264.

184. Die Vierecke (kl), (km), (lm) und (kn) sind Polvierecke auch von δ^2, weil δ^2 auf jeden der vier Kegelschnitte k, l, m, n sich stützt; δ^2 ruht folglich auch auf denjenigen vier Kegelschnitten, welche jenen vier Polvierecken umschrieben sind und durch den beliebigen Punkt A gehen. Drei von diesen neuen Kegelschnitten sind dem durch P und A bestimmten gemeinschaftlichen Polviereck von γ^2 und γ_1^2 umschrieben (Nr. 182); der vierte geht nicht durch P, wenn, wie wir annehmen dürfen, A nicht auf k liegt, er schneidet also die drei ersteren in drei verschiedenen gemeinschaftlichen Polvierecken von γ^2, γ_1^2 und δ^2. Unter den vier Kegelschnitten, welche durch den Punkt B gehen und diesen drei Polvierecken sowie dem durch P und A bestimmten Polviereck von γ^2, γ_1^2 und δ^2 umschrieben sind, giebt es deshalb mindestens zwei verschiedene, die Curven γ^2, γ_1^2 und δ^2 stützende; sie schneiden sich in dem gemeinschaftlichen Polviereck von γ^2 und γ_1^2, von welchem A und B zwei reelle Eckpunkte sind und welches also auch von δ^2 ein Polviereck ist; und der durch den Punkt C gehende, diesem letzten Polviereck umschriebene Kegelschnitt stützt folglich auch die Curve δ^2. Damit ist der Satz (Nr. 183, links) bewiesen.

185. Zwei Curven II. Classe γ^2 und γ_1^2 der Ebene bestimmen also nicht blos ein lineares Kegelschnitt-System dritter Stufe, sondern auch eine, sie enthaltende Kegelschnittschaar, deren Curven auf allen Curven des Systemes ruhen.

Zwei Curven II. Ordnung k^2 und k_1^2 der Ebene bestimmen nicht blos ein lineares Kegelschnitt-Gewebe dritter Stufe, sondern auch einen, sie enthaltenden Kegelschnittbüschel, auf dessen Curven alle Curven des Gewebes sich stützen.

Das System enthält unendlich viele Kegelschnitte, welche in Strahlenpaare zerfallen; eine beliebige Gerade s der Ebene bildet mit derjenigen Geraden s', welche die Pole von s in Bezug auf γ^2 und γ_1^2 verbindet, ein solches Strahlenpaar s, s'. Dasselbe stützt alle Curven der Kegelschnittschaar, und seine Strahlen sind in Bezug auf jede dieser Curven conjugirt (Nr. 176). Daraus folgt:

Die Pole einer Geraden s in Bezug auf alle Curven der Kegelschnittschaar liegen auf einer Geraden s'; dieselbe bildet mit s ein Strahlenpaar des zugehörigen Kegelschnitt-Systemes dritter Stufe.

Die Polaren eines Punktes S in Bezug auf alle Curven des Kegelschnittbüschels gehen durch einen Punkt S'; derselbe bildet mit S ein Punktenpaar des zugehörigen Kegelschnitt-Gewebes dritter Stufe.

Insbesondere liegen auch die Mittelpunkte aller Kegelschnitte der Schaar auf einer Geraden.

186. Ist s eine gemeinschaftliche Tangente von γ^2 und γ_1^2, so fällt sie mit s' zusammen, ist also eine zweifache Gerade des Systemes und sich selbst conjugirt in Bezug auf alle Curven der Schaar. Also:

Eine Gerade, welche irgend zwei Kegelschnitte der Schaar berührt, ist gemeinschaftliche Tangente von allen Curven der Schaar, und zweifache Gerade des zugehörigen Kegelschnitt-Systemes dritter Stufe. Alle einem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte bilden eine Kegelschnittschaar; das zugehörige System dritter Stufe enthält alle Kegelschnitte, von welchen das Vierseit ein Polvierseit ist (Nr. 179).

Ein Punkt, durch welchen irgend zwei Kegelschnitte des Büschels gehen, ist gemeinschaftlicher Punkt von allen Curven des Büschels, und zweifacher Punkt des zugehörigen Kegelschnittgewebes dritter Stufe. Alle einem Viereck umschriebenen Kegelschnitte bilden einen Kegelschnittbüschel; das zugehörige Gewebe dritter Stufe enthält alle Kegelschnitte, von welchen das Viereck ein Polviereck ist.

187. Wenn um einen Punkt A eine Gerade s sich dreht, so beschreiben ihre Pole in Bezug auf γ^2 und γ_1^2 zwei zu dem Büschel A projective Punktreihen a und a_1, und die Verbindungslinie s' dieser Pole beschreibt im Allgemeinen einen Büschel II. Ordnung. Derselbe enthält alle Strahlen, welche bezüglich der Kegelschnittschaar den Strahlen von A conjugirt sind (Nr. 185); er enthält auch die Polaren a, a_1, ... von A bezüglich γ^2, γ_1^2 und jeder anderen Curve der Schaar. Diese Polaren nun kann man construiren, indem man von irgend zwei Strahlen g und h von A die Pole bezüglich jeder Curve der Schaar bestimmt und diese beiden Pole verbindet. Und da die Verbindungslinien, wie soeben gezeigt wurde, einem Büschel II. Ordnung angehören, so ergiebt sich (vgl. Nr. 185):

Die Pole von zwei beliebigen Geraden g, h bezüglich der Curven einer Kegelschnittschaar sind homologe Punkte von zwei projectiven Punktreihen I. Ordnung g_1, h_1, und die Polaren eines Punktes A liegen im Allgemeinen in einem Büschel II. Ord-

Die Polaren von zwei beliebigen Punkten bezüglich der Curven eines Kegelschnittbüschels sind homologe Strahlen von zwei projectiven Strahlenbüscheln I. Ordnung, und die Pole einer Geraden a liegen im Allgemeinen auf einer Curve II. Ordnung, dessen Strahlen denjenigen von A conjugirt sind bezüglich der Kegelschnittschaar.

nung, deren Punkte denjenigen von a conjugirt sind bezüglich des Kegelschnittbüschels.

Auch die Mittelpunkte der Curven eines Kegelschnittbüschels liegen demnach im Allgemeinen auf einer Curve II. Ordnung. Insbesondere liegen die Halbirungspunkte der sechs Seiten eines Vierecks mit den Schnittpunkten seiner drei paar Gegenseiten auf einem Kegelschnitte.

Auf Grund dieser Sätze können wir die Definition aufstellen:

Vier Kegelschnitte einer Schaar heissen „harmonisch", wenn die Pole einer jeden Geraden bezüglich derselben vier harmonische Punkte sind.

Vier Kegelschnitte eines Büschels heissen „harmonisch", wenn die Polaren eines jeden Punktes bezüglich derselben vier harmonische Strahlen sind.

Dadurch wird es möglich, die Schaaren und Büschel von Kegelschnitten auf einander und auf die Elementargebilde projectiv zu beziehen.

188. Durch einen Punkt A gehen im Allgemeinen zwei Strahlen, welche in Bezug auf die Kegelschnittschaar conjugirt sind (Nr. 187). Daraus ergiebt sich:

Die Tangentenpaare, welche aus einem beliebigen Punkte A an die Curven einer Kegelschnittschaar gezogen werden können, sind die Strahlenpaare einer Involution. Die beiden Doppelstrahlen dieser Involution sind conjugirt bezüglich der Kegelschnittschaar, und berühren in A je eine Curve derselben.

Die Punktenpaare, in welchen eine beliebige Gerade a die Curven eines Kegelschnittbüschels schneidet, sind Punktenpaare einer Involution. Die beiden Doppelpunkte dieser Involution sind conjugirt bezüglich des Kegelschnittbüschels, und in ihnen berührt a zwei Curven desselben.

189. Die Kegelschnittschaar ist bestimmt durch vier beliebige Kegelschnitte des linearen Systemes dritter Stufe, auf welchem sie ruht (Nr. 178, 183), insbesondere auch durch vier Strahlenpaare desselben. Wählt man diese Strahlenpaare so, dass ihre vier Schnittpunkte auf einer beliebigen Geraden l liegen, so ergiebt sich sofort, dass l von einer einzigen Curve der Schaar berührt wird; diese Curve muss nämlich auch die vier Geraden berühren, welche von l durch die vier Strahlenpaare harmonisch getrennt sind (Nr. 176). Sind zwei Curven γ^2, γ_1^2 der Schaar gegeben, so kann man an diese dritte Curve leicht aus jedem Punkte A

von l eine zweite Tangente ziehen auf Grund des letzten Satzes (Nr. 188). Also:

Eine beliebige Gerade der Ebene wird von nur einer Curve der Kegelschnittschaar berührt; durch einen beliebigen Punkt aber können (Nr. 188) zwei dieser Curven gehen.

Durch einen beliebigen Punkt der Ebene geht nur eine Curve des Kegelschnittbüschels; eine beliebige Gerade aber kann von zwei dieser Curven berührt werden.

Die Kegelschnittschaar enthält demnach eine Parabel, wenn nicht alle ihre Curven Parabeln sind; der Kegelschnittbüschel kann zwei Parabeln enthalten.

190. Eine Gerade u, deren Pole in Bezug auf γ^2 und γ_1^2 sich in einem Punkte U vereinigen (Nr. 65), bildet mit jedem Strahle von U ein Strahlenpaar des Kegelschnitt-Systemes dritter Stufe und ist die Polare von U bezüglich aller Curven der Kegelschnittschaar (vgl. Nr. 185). Daraus folgt mit Rücksicht auf Nr. 157:

„Die Curven einer Schaar (oder eines Büschels) von Kegel-
„schnitten haben im Allgemeinen ein gemeinschaftliches Pol-
„dreieck."

Dasselbe ist reell und leicht zu construiren, wenn irgend zwei von den Kegelschnitten vier reelle Punkte oder Tangenten mit einander gemein haben (Seite 98); es hat in jedem Falle mindestens eine reelle Seite u und einen reellen Eckpunkt U. Wenn die Kegelschnitte γ^2 und γ_1^2 sich nicht berühren, so liegt U nicht auf seiner Polare u; und wenn ausserdem das gemeinschaftliche Poldreieck UVW von γ^2 und γ_1^2 imaginär ist, so sind die beiden Punkte V und W von u, welche conjugirt sind hinsichtlich beider Kegelschnitte, imaginär. Die Punktenpaare, welche γ^2 und γ_1^2 mit u gemein haben, müssen also in diesem Falle beide reell sein und sich gegenseitig trennen (Seite 174), und jeder der Kegelschnitte γ^2 und γ_1^2 schliesst folglich einen Theil des anderen ein. Daraus und aus dem Vorhergehenden ergiebt sich leicht:

„Wenn das gemeinschaftliche Poldreieck einer Schaar oder eines
„Büschels von Kegelschnitten imaginär ist, so haben die Kegel-
„schnitte paarweise zwei, und nur zwei reelle Punkte, sowie zwei
„reelle Tangenten mit einander gemein. Diese beiden Tangenten
„schneiden sich auf der reellen Seite u des Poldreiecks, und
„jene beiden Punkte liegen mit dem reellen Eckpunkte U des-
„selben in einer Geraden";

denn sonst würde der Punkt, in welchem die Verbindungslinie der beiden Punkte von u geschnitten wird, bezüglich beider Kegelschnitte dem Punkte U, sowie einem Punkte der Verbindungslinie conjugirt, und ein zweiter reeller Eckpunkt des gemeinschaftlichen Poldreiecks sein, und das Poldreieck wäre ein reelles.

191. Dreht sich eine Gerade s um einen Punkt P der Geraden u, so beschreiben ihre beiden Pole in Bezug auf γ^2 und γ_1^2 zwei projective Punktreihen, welche den Punkt U entsprechend gemein haben, und die Verbindungslinie dieser beiden Pole dreht sich folglich um einen Punkt P'; und da die beiden Pole von $\overline{PU}$ in u liegen, so ist auch P' ein Punkt von u. Legen wir nun durch P irgend einen Kegelschnitt k^2, welcher die beiden Kegelschnitte γ^2 und γ_1^2 stützt, so muss derselbe auch durch P' gehen; denn zwei beliebige conjugirte Strahlen von P und P' schneiden denselben in einem gemeinschaftlichen Polviereck von γ^2 und γ_1^2 (Nr. 173 b), und da wenigstens zwei von u verschiedene Seiten dieses Polvierecks durch P gehen, so müssen die ihnen conjugirten Gegenseiten (also auch k^2) durch P' gehen. Da nun u von einem Kegelschnittbüschel, welcher einem beliebigen Polviereck der Kegelschnitte γ^2 und γ_1^2 umschrieben ist, in einer Involution geschnitten wird, so ergiebt sich:

Jede reelle Seite u des gemeinschaftlichen Poldreiecks der Kegelschnittschaar schneidet die Curven und Strahlenpaare des zugehörigen Kegelschnitt-Systemes dritter Stufe in den Punktenpaaren P, P' einer Involution. Die Doppelpunkte dieser Involution u bilden ein Punktenpaar der Kegelschnittschaar, weil sie bezüglich aller Curven des Kegelschnitt-Systemes conjugirt sind.

Aus jedem reellen Eckpunkte U des gemeinschaftlichen Poldreiecks des Kegelschnittbüschels gehen an die Curven und Punktenpaare des zugehörigen Kegelschnitt-Gewebes Strahlenpaare einer Involution. Die Doppelstrahlen dieser Involution U bilden ein Strahlenpaar des Kegelschnittbüschels, weil sie bezüglich aller Curven des Kegelschnitt-Gewebes conjugirt sind.

192. Die Strahlenbüschel P und P' (Nr. 191) sind projectiv, wenn jedem Strahle des einen der ihm hinsichtlich γ^2 und γ_1^2 conjugirte Strahl des anderen zugewiesen wird; sie erzeugen eine Curve II. Ordnung, welche in P und P' von $\overline{PU}$ und $\overline{P'U}$ berührt wird. Ist das gemeinschaftliche Poldreieck reell, so geht diese Curve durch die Doppelpunkte der beiden Involutionen v und w, welche in den anderen beiden Seiten des Poldreiecks sich ergeben;

und wenn die Doppelpunkte der Involution u imaginär, also P und P' durch v und w getrennt sind, so hat eine der Involutionen v und w mit der Curve II. Ordnung zwei reelle, die andere dagegen zwei imaginäre Doppelpunkte gemein. Die Strahlen eines reellen Doppelpunktes O von u, v oder w sind involutorisch gepaart, sodass je zwei zugeordnete Strahlen von O in Bezug auf die beiden Kegelschnitte γ^2 und γ_1^2 conjugirt sind; und O ist der Schnittpunkt von zwei gemeinschaftlichen (reellen oder imaginären) Tangenten dieser Kegelschnitte, nämlich der beiden Doppelstrahlen der Involution O. — Ist das gemeinschaftliche Poldreieck von γ^2 und γ_1^2 imaginär, so schneiden sich auf seiner reellen Seite u zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten von γ^2 und γ_1^2 in einem Punkte O (Nr. 190), woraus folgt, dass die Involution u in diesem Falle zwei reelle Doppelpunkte O besitzt. Aus dem Allen ergiebt sich:

Die Kegelschnittschaar enthält mindestens ein reelles Punktenpaar und im Allgemeinen höchstens drei solche; ihre drei Punktenpaare liegen (auch wenn zwei derselben imaginär sind) auf den drei Seiten des Poldreiecks der Schaar, und bilden die drei paar Gegenpunkte eines reellen oder imaginären Vierseits, welchem die Kegelschnittschaar eingeschrieben ist.

Der Kegelschnittbüschel enthält mindestens ein reelles Strahlenpaar und im Allgemeinen höchstens drei solche; seine drei Strahlenpaare schneiden sich (auch wenn zwei derselben imaginär sind) in den drei Eckpunkten des Poldreiecks des Büschels, und bilden die drei paar Gegenseiten eines reellen oder imaginären Vierecks, welchem der Kegelschnittbüschel umschrieben ist.

193. Ausser verschiedenen Uebergangsarten, deren Curven sich in einem Punkte berühren oder osculiren, unterscheiden wir:

drei Hauptarten der Kegelschnittschaar, jenachdem ihre Curven vier, oder zwei, oder keine reellen Tangenten miteinander gemein haben. Nur die Kegelschnittschaaren der zweiten Hauptart haben ein imaginäres Poldreieck (Nr. 190), und nur diejenigen von der ersten Hauptart enthalten drei reelle Punktenpaare. Zwei Kegel-

drei Hauptarten des Kegelschnittbüschels, jenachdem seine Curven vier, oder zwei, oder keine reellen Punkte mit einander gemein haben. Nur die Kegelschnittbüschel der zweiten Hauptart haben ein imaginäres Poldreieck, und nur diejenigen von der ersten Hauptart enthalten drei reelle Strahlenpaare. Zwei Kegelschnitte eines Büschels schnitte einer Schaar erster oder dritter Art haben entweder keine oder vier reelle Schnittpunkte; zwei Kegelschnitte einer Schaar zweiter Art haben allemal zwei reelle Schnittpunkte (Nr. 190).

Wenn alle Curven einer Kegelschnittschaar in Punktenpaare zerfallen, was auf zwei Arten möglich ist, so ist die Schaar eine specielle; desgleichen wenn sie einen zweifachen Punkt enthält. Demgemäss bilden alle Kegelschnitte, welche durch die reellen oder imaginären Doppelpunkte einer Punktinvolution gehen, oder aber in Bezug auf welche irgend ein Punkt eine gegebene Polare hat, ein specielles lineares Kegelschnitt-System dritter Stufe; aber auch dann ist ein solches System speciell, wenn alle seine Kegelschnitte einen Punkt miteinander gemein haben.

erster oder dritter Art haben entweder keine oder vier reelle gemeinschaftliche Tangenten; zwei Kegelschnitte eines Büschels zweiter Art haben allemal zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten.

Wenn alle Curven eines Kegelschnittbüschels in Strahlenpaare zerfallen, so ist der Büschel ein specieller; ebenso wenn er eine zweifache Gerade enthält. Demgemäss bilden alle Kegelschnitte, welche die reellen oder imaginären Doppelstrahlen einer Strahleninvolution berühren, oder in Bezug auf welche irgend eine Gerade einen gegebenen Pol hat, ein specielles lineares Kegelschnitt-Gewebe dritter Stufe; aber auch dann ist ein solches Gewebe speciell, wenn alle seine Kegelschnitte eine gemeinschaftliche Tangente haben.

194. Alle Kreise der Ebene bilden ein specielles lineares System dritter Stufe; die zugehörige Kegelschnittschaar besteht aus den Punktenpaaren der Involution, in welcher die unendlich ferne Gerade eine rechtwinklige Strahleninvolution schneidet. Confocale Kegelschnitte bilden eine Kegelschnittschaar von der dritten Hauptart; ihre beiden Brennpunkte sind das einzige reelle Punktenpaar dieser Schaar, und das zugehörige lineare Kegelschnitt-System dritter Stufe besteht aus allen gleichseitigen Hyperbeln, in Bezug auf welche die beiden Brennpunkte conjugirt sind. Alle Kreise, die durch zwei reelle Punkte gehen, bilden einen Kegelschnittbüschel von der zweiten, und alle zu ihnen orthogonalen Kreise bilden einen Büschel von der dritten Hauptart. Ein specielles lineares Gewebe dritter Stufe wird gebildet von allen Kegelschnitten, die einen gegebenen Punkt F zum Brennpunkt haben; die Kegelschnitte des zugehörigen Büschels zerfallen in die Strahlenpaare, welche sich in F rechtwinklig schneiden.

Lineare Kegelschnitt-Systeme und -Gewebe zweiter Stufe.*)

195. Drei Curven II. Classe γ^2, γ_1^2, γ_2^2, die in einer Ebene, aber nicht in einer Kegelschnitt-Schaar liegen, bestimmen ein lineares Kegelschnitt-System zweiter Stufe (ein Kegelschnitt-Netz), auf dessen Curven sie ruhen (Nr. 178, 179).

Drei Curven II. Ordnung, die in einer Ebene, aber nicht in einem Kegelschnittbüschel liegen, bestimmen ein lineares Kegelschnittgewebe zweiter Stufe (eine Schaarschaar), dessen Curven auf ihnen ruhen.

Alle Kegelschnitte dieses Netzes, welche ausser jenen drei Curven II. Classe noch eine beliebig angenommene vierte, z. B. einen zweifachen Punkt stützen, bilden (Nr. 178) einen Kegelschnittbüschel. Daraus folgt (vergl. Nr. 189):

Durch jeden Punkt der Ebene geht ein Büschel von Kegelschnitten des Netzes; durch zwei beliebige Punkte geht im Allgemeinen nur ein Kegelschnitt des Netzes.

Jede Gerade der Ebene berührt eine Schaar von Kegelschnitten der Schaarschaar; zwei beliebige Gerade berührt im Allgemeinen nur ein Kegelschnitt der Schaarschaar.

196. Je zwei der drei Curven γ^2, γ_1^2, γ_2^2 bestimmen ein lineares, das Netz enthaltendes Kegelschnitt-System dritter Stufe und zugleich eine Kegelschnittschaar, deren Curven auf allen Curven dieses Systemes, also auch auf allen Curven des Kegelschnitt-Netzes ruhen (Nr. 185). Das Netz stützt demnach die drei durch γ^2, γ_1^2, γ_2^2 bestimmten Kegelschnittschaaren, aber ebenso auch jede vierte Schaar, welche irgend zwei Curven jener drei ersten Schaaren enthält. Alle diese Schaaren liegen in der Schaarschaar, welche durch drei beliebige Curven des Netzes bestimmt ist, denn sie stützen sich auch auf diese drei Curven; auch beweist man ohne Schwierigkeit, dass jede Curve der Schaarschaar unendlich vielen jener Schaaren angehört und folglich auf jeder Curve des Netzes ruht. Daher der wichtige Satz:

Mit einem Kegelschnittnetze ist allemal eine Kegelschnitt-Schaarschaar (und umgekehrt) derartig verbunden, dass jede Curve der Schaarschaar auf jede Curve des Netzes sich stützt. Drei beliebige Curven

*) Vgl. Schröter, Die Theorie der Kegelschnitte, II. Aufl., Seite 500—535 (Leipzig 1876).

des Netzes oder der Schaarschaar genügen zur Bestimmung beider Kegelschnitt-Mannigfaltigkeiten. Das Netz und die Schaarschaar, von welchen in den folgenden Sätzen die Rede ist, sind in der eben angegebenen Weise mit einander verbunden, sodass die Schaarschaar auf das Netz sich stützt.

197. Das Kegelschnittnetz enthält unendlich viele Strahlenpaare, welche im Allgemeinen eine Curve dritter Classe Γ^3 einhüllen und sich zu zweien in (gemeinschaftlichen) Polvierecken von γ^2, γ_1^2, γ_2^2 und der zugehörigen Schaarschaar schneiden (Nr. 172). Die Strahlen eines solchen Paares sind conjugirt hinsichtlich der Schaarschaar, d. h. hinsichtlich aller Curven derselben (Nr. 176), und die Pole des einen Strahles bezüglich dieser Curven liegen demnach sämmtlich auf dem anderen Strahle. Zwei beliebige Polvierecke der Schaarschaar sind allemal einer Curve des Netzes eingeschrieben; denn derjenige Kegelschnitt, welcher dem einen Polviereck umschrieben ist und durch einen Eckpunkt U des anderen geht, muss dem durch U gehenden Kegelschnittbüschel des Netzes angehören und deshalb auch durch die übrigen drei Eckpunkte des zweiten Polvierecks gehen. — Ebenso ergiebt sich:

198. Die Kegelschnitt-Schaarschaar enthält unendlich viele Punktenpaare; dieselben liegen im Allgemeinen auf einer Curve III. Ordnung C^3, und je zwei von ihnen sind Paare von Gegenpunkten eines Polvierseits des zugehörigen Kegelschnittnetzes. Die Punkte eines solchen Paares sind conjugirt hinsichtlich des Netzes, d. h. hinsichtlich aller Curven desselben, und die Polaren des einen Punktes bezüglich dieser Curven gehen alle durch den anderen Punkt. Jedes Punktenpaar der Schaarschaar ist harmonisch getrennt durch jedes Strahlenpaar des Netzes. Zwei beliebige Polvierseite des Netzes sind allemal einer Curve der Schaarschaar umschrieben. Wenn von zwei Kegelschnitten der eine einen Büschel beschreibt, so umhüllen die Verbindungslinien ihrer Schnittpunkte i. A. eine Curve dritter Classe (Nr. 196, 197); und wenn der eine eine Schaar beschreibt, so bewegen sich die Schnittpunkte ihrer gemeinschaftlichen Tangenten i. A. auf einer Curve dritter Ordnung.

199. Durch drei beliebige Strahlenpaare, die nicht die drei paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks bilden, ist das Kegelschnittnetz nebst der zugehörigen Schaarschaar bestimmt (Nr. 196). Umschreibt man dem Polviereck der Schaarschaar, in welchem zwei jener Strahlenpaare sich schneiden, einen Kegelschnittbüschel, und bringt man die Curven dieses Büschels mit dem dritten

Strahlenpaare zum Durchschnitt, so erhält man alle Polvierecke der Schaarschaar, deren Eckpunkte auf diesem dritten Strahlenpaare liegen (Nr. 197), und damit auch alle Strahlenpaare des Netzes und die von ihnen eingehüllte Curve III. Classe Γ^3. Da nun das dritte Strahlenpaar ein ganz beliebiges des Netzes ist, und da seine Geraden den Kegelschnittbüschel in zwei Punkt-Involutionen schneiden (S. 150), so ergiebt sich:

„Jede Tangente der Curve III. Classe Γ^3 wird von den Kegel-„schnitten des Netzes in Punktenpaaren einer Involution ge-„schnitten. Die Doppelpunkte dieser Involution bilden ein „Punktenpaar der Schaarschaar und liegen auf der Curve C^3“; denn sie sind conjugirt bezüglich aller Curven des Netzes, indem sie durch drei beliebige derselben harmonisch getrennt sind.

200. Ebenso ist durch drei beliebige Punktenpaare, welche nicht die drei paar Gegenpunkte eines vollständigen Vierseits bilden, die Schaarschaar nebst dem zugehörigen Kegelschnittnetze bestimmt, und man kann aus ihnen alle übrigen Punktenpaare der Schaarschaar und die Curve III. Ordnung C^3, auf welcher sie liegen, ableiten.

„Die Tangentenpaare, welche aus einem beliebigen Punkte P der „Curve III. Ordnung C^3 an die Kegelschnitte der Schaarschaar „gezogen werden können, sind Strahlenpaare einer Involution. „Die Doppelstrahlen dieser Involution bilden ein Strahlenpaar „des Netzes und berühren die Curve Γ^3.“

Aus dem beliebigen Punkte P von C^3 werden auch die Punktenpaare der Schaarschaar durch Strahlenpaare der Involution projicirt.

Von einer beliebigen Tangente der Γ^3 werden die Strahlenpaare des Netzes in Punktenpaaren einer Involution geschnitten.

Auf C^3 liegen die Schnittpunkte aller Strahlenpaare des Netzes; anderseits wird Γ^3 von den Verbindungslinien aller Punktenpaare der Schaarschaar eingehüllt (vgl. auch Nr. 205).

201. Die Punkte von C^3 sind paarweise conjugirt hinsichtlich des Netzes, und die Tangenten von Γ^3 sind paarweise conjugirt hinsichtlich der Schaarschaar (Nr. 197 und 198). Wir setzen nun fest:

Drei Punkte von C^3, deren conjugirte auf einer Geraden liegen, sollen ein „Punktentripel“ von C^3 heissen.

Drei Tangenten von Γ^3, deren conjugirte durch einen Punkt gehen, sollen ein „Tangententripel“ von Γ^3 heissen.

Da zwei Punktenpaare der Schaarschaar allemal von einem durch sie bestimmten Polvierseit des Netzes zwei paar Gegenpunkte bilden (Nr. 198), so ergiebt sich sofort:

Die drei Punkte jedes Tripels von C^3 bilden mit ihren conjugirten Punkten die drei paar Gegenpunkte eines Polvierseits des Netzes; jedes Polvierseit des Netzes enthält vier Punktentripel von C^3. Je zwei Punkte von C^3, deren Verbindungslinie durch einen gegebenen Punkt P_1 von C^3 geht, bilden mit dem zu P_1 conjugirten Punkte P ein Tripel von C^3.

Die drei Tangenten jedes Tripels von Γ^3 bilden mit ihren conjugirten Tangenten die drei paar Gegenseiten eines Polvierecks der Schaarschaar; jedes Polviereck der Schaarschaar enthält vier Tangententripel von Γ^3. Je zwei Tangenten von Γ^3, die auf einer gegebenen Tangente t_1 von Γ^3 sich schneiden, bilden mit der zu t_1 conjugirten Tangente ein Tripel von Γ^3.

202. Die beiden, von irgend zwei Tripeln der C^3 gebildeten Dreiecke sind allemal einem Kegelschnitt der Schaarschaar umschrieben (Nr. 198), weil sie in zwei Polvierseiten des Netzes liegen (Nr. 201). Daraus aber folgt (Nr. 46):

Zwei beliebige Punktentripel von C^3 sind allemal einer Curve II. Ordnung eingeschrieben. — Wenn also ein Kegelschnitt einem Tripel von C^3 umschrieben ist und durch zwei beliebige Punkte P, Q dieser Curve geht, so ist er auch dem durch P und Q bestimmten Tripel von C^3 umschrieben.

Zwei beliebige Tangententripel von Γ^3 sind allemal einer Curve II. Classe umschrieben. Wenn also ein Kegelschnitt einem Tripel von Γ^3 eingeschrieben ist und noch zwei beliebige Tangenten p, q von Γ^3 berührt, so ist er auch dem durch p und q bestimmten Tripel von Γ^3 eingeschrieben.

203. Das zweite Tripel (links) fällt mit dem ersten zusammen, wenn P und Q sich zwei Punkten des ersten Tripels von C^3 unbegrenzt nähern, und es ergiebt sich daraus:

Jedem Punktentripel von C^3 kann ein Kegelschnitt umschrieben werden, welcher die Curve C^3 in den drei Punkten des Tripels berührt.

Jedem Tangententripel von Γ^3 kann ein Kegelschnitt eingeschrieben werden, welcher in den Berührungspunkten der drei Tangenten die Curve Γ^3 berührt.

Hiezu erhalten wir aus den letzten Sätzen von Nr. 201 die Zusätze:

In dem Punkte Q von C^3, welcher mit zwei conjugirten Punkten P, P_1 ein Tripel von C^3 bildet, schneiden sich die Tangenten von P und P_1.

Auf der Tangente von Γ^3, welche mit zwei conjugirten Tangenten t, t_1 ein Tripel von Γ^3 bildet, liegen die Berührungspunkte von t und t_1.

204. Mit Rücksicht auf die Schlusssätze von Nr. 101 folgt aus Nr. 202:

Die Punktenpaare von C^3, deren Verbindungslinien durch einen gegebenen Punkt P_1 von C^3 gehen, liegen auf je einem Kegelschnitt desjenigen Büschels, welcher einem beliebigen Tripel von C^3 umschrieben ist und durch den zu P_1 conjugirten Punkt P geht.

Die Tangentenpaare von Γ^3, welche sich auf einer gegebenen Tangente t_1 von Γ^3 schneiden, berühren je einen Kegelschnitt der Schaar, welche einem beliebigen Tangententripel von Γ^3 eingeschrieben ist und die zu t_1 conjugirte Tangente t berührt.

Der Büschel P_1 und der Kegelschnittbüschel links sind durch die Punktenpaare von C^3, die Punktreihe t_1 und die Kegelschnittschaar rechts sind durch die Tangentenpaare von Γ^3 projectiv so auf einander bezogen, dass sie die Curve C^3 resp. Γ^3 erzeugen. Zum Beweise dieser beiläufigen Bemerkung ist aber hier nicht der Ort.

205. Die Seiten des gemeinschaftlichen Poldreiecks von irgend zwei Kegelschnitten k^2, k_1^2 des Netzes gehören einem durch sie bestimmten Polvierseit eines beliebigen dritten Kegelschnittes k_2^2 des Netzes an (Nr. 168). Dasselbe ist ein gemeinschaftliches Polvierseit von k^2, k_1^2 und k_2^2 und folglich ein Polvierseit des Netzes. Daraus folgt (vgl. Nr. 201):

Das gemeinschaftliche Poldreieck von zwei beliebigen Kegelschnitten des Netzes ist allemal ein Punktentripel von C^3. Insbesondere schneiden sich die drei paar Gegenseiten eines jeden Polvierecks der Schaarschaar in einem Punktentripel von C^3.

Das gemeinschaftliche Poldreiseit von zwei beliebigen Kegelschnitten der Schaarschaar ist allemal ein Tangententripel von Γ^3. Insbesondere liegen die drei paar Gegenpunkte eines jeden Polvierseits des Netzes auf einem Tangententripel von Γ^3.

Die erste Hälfte dieser Sätze ist umkehrbar. Auch beweist man leicht, dass jeder Punkt, dessen Polaren in Bezug auf zwei Curven des Netzes zusammenfallen, auf C^3 liegt, und dass jede Gerade, deren Pole in Bezug auf zwei Curven der Schaarschaar zusammenfallen, die Curve Γ^3 berührt.

206. Alle Geraden, welche drei beliebig in der Ebene gegebene Kegelschnitte in einer Involution von Punkten schneiden, umhüllen eine Curve III. Classe Γ^3 (Nr. 199); dieselbe berührt auch die Verbindungslinien der Schnittpunkte von je zwei der drei Kegelschnitte (Nr. 197).

Alle Punkte, aus welchen an drei beliebig in der Ebene gegebene Kegelschnitte eine Involution von Tangenten gehen, liegen in einer Curve III. Ordnung C^3 (Nr. 200); dieselbe geht auch durch die Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten von je zwei der drei Kegelschnitte (Nr. 198).

207. Da zwei conjugirte Punkte Q, Q_1 der Curve C^3 durch je zwei conjugirte Tangenten der Curve Γ^3 harmonisch getrennt sind (Nr. 198), und da dem Punkte Q_1 von C^3, welcher mit zwei conjugirten Punkten P, P_1 in einer Geraden liegt, der Schnittpunkt Q der Tangenten von P und P_1 conjugirt ist (Nr. 203 und 201), so ergiebt sich:

Jede Tangente von C^3 bildet mit den drei Tangenten, die von ihrem Berührungspunkte P an Γ^3 gezogen werden können, einen harmonischen Strahlenbüschel;

Jeder Punkt von Γ^3 bildet mit den drei Punkten, in welchen seine Tangente die Curve C^3 schneidet, eine harmonische Punktreihe.

und zwar ist die Tangente von C^3 durch zwei conjugirte Tangenten der Curve Γ^3 harmonisch getrennt von $\overline{PP_1}$. Wenn P_1 ein Wendepunkt von C^3 ist, so fällt Q mit P_1 zusammen und $\overline{PP_1}$ berührt in P die C^3; und umgekehrt. Wegen des Satzes rechts aber fällt alsdann der Punkt, in welchem Γ^3 von der Tangente $\overline{PP_1}$ berührt wird, mit P zusammen. Daher der Satz:

„Die Curven C^3 und Γ^3 berühren sich in allen ihren gemein-
„schaftlichen Punkten; die Tangente jedes gemeinschaftlichen
„Punktes P schneidet die C^3 in einem ihrer Wendepunkte P_1,
„und wird in P von einer Rückkehrtangente der Curve Γ^3 ge-
„schnitten."

208. In der Schaarschaar ist eine Schaar von Parabeln enthalten (Nr. 195); und zwar liegen deren Brennpunkte auf einem Kreise, und ihre Leitlinien schneiden sich in einem Punkte K (vergl. Nr. 127). Das Netz enthält im Allgemeinen einen Kreis (sein Mittelpunkt ist K), einen Büschel gleichseitiger Hyperbeln und unendlich viele Parabeln, von welchen durch einen beliebigen Punkt höchstens zwei gehen (Nr. 195 und 189).

209. Die Kegelschnittnetze lassen sich in vier verschiedene Hauptarten eintheilen, zwischen denen eine Anzahl von Arten specieller Netze den Uebergang bilden. Wir unterscheiden diese Hauptarten mit Hülfe der Involutionen, in denen die Netze von den Geraden ihrer Strahlenpaare geschnitten werden (Nr. 199). Sind diese Involutionen theils elliptisch und theils hyperbolisch, d. h. haben sie theils imaginäre theils reelle Doppelpunkte, so umhüllen ihre Träger zwei verschiedene Zweige der Curve Γ^3; denn von stetig auf einander folgenden Tangenten dieser Curve wird das Netz in gleichartigen Involutionen geschnitten, schon weil die Doppelpunkte auf der Curve C^3 liegen. Die beiden Zweige von Γ^3 haben nur dann eine gemeinschaftliche Tangente t_1 wenn die beiden Doppelpunkte der auf t_1 enthaltenen Involution zusammenfallen; da aber diese Doppelpunkte bezüglich aller Kegelschnitte des Netzes conjugirt sind, so gehen in dem erwähnten Falle diese Kegelschnitte alle durch einen (sich selbst conjugirten) Punkt, und das Netz ist ein specielles.

210. Ein nicht specielles Kegelschnittnetz wird entweder von den Geraden aller seiner Strahlenpaare in hyperbolischen, oder von den beiden Geraden gewisser Paare in elliptischen Involutionen geschnitten, oder endlich von der einen Geraden eines jeden Paares in einer hyperbolischen und von der anderen Geraden in einer elliptischen Involution. Ich nenne das Netz im ersteren Falle hyperbolisch, im zweiten elliptisch und im dritten Falle dual. Ein Netz ist hyperbolisch, wenn es einen Kegelschnittbüschel dritter Art enthält, oder überhaupt zwei Kegelschnitte, die mit einander keine reellen Punkte gemein haben; denn ein Büschel dritter Art wird von den Geraden der Ebene in hyperbolischen Involutionen geschnitten. Die Kegelschnitte eines elliptischen oder dualen Netzes schneiden sich paarweise in mindestens zwei reellen Punkten.

211. Ist das Netz durch drei seiner Strahlenpaare gegeben, so können wir zwei derselben als zwei paar Gegenseiten eines „in dem Netze enthaltenen" Vierecks auffassen. Durch das dritte Strahlenpaar und überhaupt durch jeden beliebigen Kegelschnitt des Netzes ist alsdann ein resp. kein Eckpunkt dieses Vierecks von den drei übrigen getrennt, wenn das Netz dual resp. hyperbolisch ist. Dagegen sind durch das dritte Strahlenpaar und überhaupt durch die Kegelschnitte des Netzes entweder zwei oder keine Eckpunkte des Vierecks von den übrigen getrennt, wenn und wir schliessen daraus, dass von ihm aus zwei zu einander rechtwinklige Tangenten an γ^2 gezogen werden können. Die Sätze dieser Nummer hat Herr Faure entdeckt.

222. Aus den zu Nr. 220 reciproken Sätzen ergiebt sich u. A. Folgendes: Alle Kegelschnitte, welche einen Punkt F zum Brennpunkt haben und auf eine Curve II. Ordnung k^2 sich stützen, bilden eine specielle Schaarschaar. Die zwei reellen Tangenten, welche irgend zwei von ihnen mit einander gemein haben, schneiden sich allemal auf der Polare f von F in Bezug auf k^2. Die Curve Γ^3 zerfällt in F und eine Curve II. Classe; C^3 dagegen zerfällt in f und die beiden imaginären Doppelstrahlen des rechtwinkligen Büschels F. Von jedem Polviereck der Schaarschaar schneiden sich zwei Gegenseiten rechtwinklig in F; die Schnittpunkte der übrigen zwei paar Gegenseiten liegen auf f. Ueberhaupt ist f die Polare von F in Bezug auf alle Kegelschnitte des Netzes, auf welchem die Schaarschaar ruht.

223. Ein sehr specielles Netz bilden die Kegelschnitte, die einem Dreieck ABC umschrieben werden können; von den Curven der zugehörigen Schaarschaar ist ABC ein gemeinschaftliches Poldreieck; die Curven C^3 und Γ^3 reduciren sich auf die drei Seiten resp. die drei Eckpunkte des Dreiecks. — Die Kegelschnitte, von welchen ABC ein Poldreieck ist, bilden nicht allein eine sehr specielle Schaarschaar, sondern zugleich ein ebenso specielles Netz; auf das letztere stützt sich die Schaarschaar, welche dem Dreieck eingeschrieben werden kann.