Binding

Edward V. Huntington

Oct 1900.

DIE GEOMETRIE DER LAGE.

Berichtigungen.

p 20 Z. 2 für Ebenenbündeln lies Ebenenbüscheln.

p 32 Die erste Zahl der Seitennummer fehlt.

~~p 54. Z. 8. "Ebenso ergeben sich zwei analoge Sätze für den Strahlenbündel" zu streichen?~~

DIE

GEOMETRIE DER LAGE.

VORTRÄGE

VON

DR. THEODOR REYE,

O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT STRASSBURG I. E.

ERSTE ABTHEILUNG.

MIT 90 ABBILDUNGEN IM TEXT.

VIERTE, VERBESSERTE UND VERMEHRTE AUFLAGE.

LEIPZIG,

BAUMGÄRTNER'S BUCHHANDLUNG.

1899.

Leipzig. Druck von Grimme & Trömel.

Vorwort zur ersten Auflage der ersten Abteilung.

Die Vorträge über die Geometrie der Lage, die ich hiermit der Oeffentlichkeit übergebe, sind in den letzten zwei Jahren allmählich niedergeschrieben worden; zu ihrer Herausgabe wurde ich durch ein Bedürfniss veranlasst, welches seit längerer Zeit am hiesigen Polytechnikum, und vielleicht schon in weiteren Kreisen sich fühlbar macht. Nämlich die wichtigen Constructions-Methoden, mit denen Culmann die Ingenieur-Wissenschaften bereichert hat, und die in seinem Werke „die graphische Statik“ [Zürich 1866] veröffentlicht sind, gründen sich zum grossen Theile auf die neuere Geometrie; die Kenntniss der Geometrie der Lage ist deshalb den Ingenieurschülern unserer Anstalt unentbehrlich geworden. Durch vorliegende Arbeit nun versuche ich dem Mangel eines Lehrbuches abzuhelfen, welches den Studirenden in gedrängter Kürze den erforderlichen Stoff darbietet, und mich bei meinem mündlichen Unterricht unterstützt.

Selbstverständlich musste ich mich der von Culmann adoptirten Terminologie bedienen und sogar bis zu einem gewissen Grade dem Lehrgange desjenigen gehaltvollen Werkes folgen, welchem sie entnommen ist, nämlich der „Geometrie der Lage“ von Staudt's [Nürnberg 1847]. Uebrigens sind die neuen Benennungen, die von Staudt den älteren Steiner'schen hinzugefügt hat, sehr glücklich gewählt, und die Art, wie von Staudt im Gegensatz zu allen übrigen Autoren der neueren Geometrie diese Wissenschaft begründet, scheint mir so bedeutende Vortheile zu gewähren, dass ich auch ohne anderweitige Veranlassung sie jeder andern vorziehen würde. Es sei mir gestattet, diese meine Ansicht durch wenige Worte zu motiviren.

Dem Ingenieur wie dem Mechaniker und Architekten kommt bei dem Entwerfen seiner Bauwerke die Fähigkeit wesentlich zu statten, sich diese Bauwerke zum Voraus räumlich vorzustellen. Soll z. B. eine Brücke über den Strom gespannt werden, so muss zunächst unter den verschiedenen Constructionsarten diejenige gewählt werden, die den gegebenen Verhältnissen am besten entspricht. Der Ingenieur vergleicht zu dem Ende den langgestreckten Blechbalken mit dem kühn geschwungenen Bogen oder der frei schwebenden Kettenbrücke, sucht sich vorzustellen, wie die Lasten sich hierhin und dorthin bewegen und wie sie sich auf die Glieder des mächtigen Bauwerks vertheilen. Wieder und immer wieder prüft und vergleicht er, denkt sich mehr und mehr in alle Einzelnheiten hinein, bis der ganze Bau in klaren Zügen fertig vor seinem geistigen Auge steht. Und jetzt beginnt der zweite Theil der schöpferischen Arbeit: das Projekt wird dem Papiere anvertraut, die verschiedenen Theile des Bauwerkes werden nach Form und Stärke genau bestimmt. Aber auch jetzt noch muss der Ingenieur und Jeder, der sich mit seinen Ideen vertraut machen will, fortwährend die Vorstellungskraft anspannen, um Dasjenige wirklich zu schauen, was durch die Linien einer dem Laien unverständlichen Zeichnung dargestellt werden soll. — Wie der Techniker, so muss auch der Mathematiker und überhaupt Jeder, der sich mit den Naturwissenschaften beschäftigt, das

Vorstellungsvermögen vielfach in Anspruch nehmen; bald soll er complicirte Apparate aus einer dürftigen Skizze begreifen, bald weitläufige Naturprocesse oder verwickelte Bewegungen nach einer blossen Beschreibung sich deutlich machen.

Eine Hauptaufgabe des geometrischen Unterrichts scheint mir nun die zu sein, das Vorstellungsvermögen des Lernenden zu üben und auszubilden; und ich glaube, dass diese Aufgabe am besten auf dem Wege gelöst wird, den von Staudt eingeschlagen hat. Er schliesst nämlich alle mehr oder minder complicirten Rechnungen aus, welche die Vorstellungskraft nicht beanspruchen, zu deren Verständniss vielmehr eine gewisse mechanische Fertigkeit erforderlich ist, die mit der Geometrie an sich wenig zu schaffen hat. Dafür aber gelangt von Staudt durch direkte Anschauung zur Erkenntniss der geometrischen Wahrheiten, auf welche er die Geometrie der Lage gründet. Es lässt sich nicht leugnen, dass dieser Lehrgang wie jeder andere seine eigenthümlichen Schwierigkeiten bietet; und das Staudt'sche Werk, das offenbar nicht für Anfänger geschrieben ist, besitzt ausserdem noch mehrere, an sich rühmenswerthe Eigenschaften, die sein Studium wesentlich erschweren. Es zeichnet sich namentlich aus durch eine merkwürdige Knappheit des Ausdrucks und eine sehr gedrängte, beinahe wortkarge Darstellung; nur das Nothwendige wird gesagt, selten ein erläuterndes Wort hinzugefügt, und dem Leser bleibt es überlassen, zu den in ihrer ganzen Allgemeinheit aufgestellten Sätzen sich leichter fassliche Beispiele selbst zu bilden. Der Stoff ist sehr schön und systematisch geordnet; z. B. die Lehren von der Projectivität, von der collinearen und der reciproken Verwandtschaft, von den involutorischen Gebilden werden vollständig abgehandelt, ehe zur Theorie der Kegelschnitte und der Flächen zweiter Ordnung geschritten wird, und von Staudt erlangt so den Vortheil, die Eigenschaften der Gebilde zweiter Ordnung mit einem Schlage beweisen zu können, während freilich andererseits die Darstellung so abstrakt wird, dass die Kräfte eines Anfängers bei ihrem Studium gewöhnlich schnell erlahmen. Diese Eigenschaften sind der wohlverdienten Verbreitung und allgemeinen Anerkennung des Staudt'schen Werkes leider sehr hinderlich gewesen, stempeln es aber zu einem vorzüglichen Handbuch der neueren Geometrie, auf das man sich, ähnlich wie in der Geometrie der Alten auf den Euklid, sehr bequem beziehen kann; in meinen für Anfänger geschriebenen Vorträgen musste ich sie vermeiden, um nicht unverständlich zu werden.

Eine andere, dem Lehrgange selbst eigenthümliche Schwierigkeit habe ich absichtlich nicht vermieden, weil sie von Jedem früher oder später überwunden werden muss, der die Eigenschaften räumlicher Gebilde begreifen will. Ich meine die schon erwähnte Schwierigkeit, solche Gebilde sich räumlich vorzustellen, eine Schwierigkeit, womit der Anfänger auch bei dem Studium der darstellenden Geometrie und der analytischen Geometrie des Raumes zu kämpfen hat, und deren Ueberwindung ich, wie oben bemerkt, für eine Hauptaufgabe des geometrischen Unterrichts halte. Um dem Leser die Erreichung dieses Zieles zu erleichtern, habe ich meinen Vorträgen Figuren hinzugefügt. Von Staudt hat dieses Hülfsmittel nicht benutzt, indem er wohl von ähnlichen Ansichten geleitet sein mag, wie die von Steiner gelegentlich ausgesprochene: „dass stereometrische Betrachtungen nur dann richtig aufgefasst seien, wenn sie rein, ohne alle Versinnlichungsmittel, nur durch die innere Vorstellungskraft angeschaut werden“. Diese Versinnlichungsmittel verleiten übrigens bei planimetrischen Betrachtungen nicht so leicht zu einer unrichtigen Auffassung; wenn ich sie verschmäht hätte, würde ich den Studirenden das Verständniss meiner Vorträge unnöthig erschwert haben.

Indem von Staudt's Lehrgang die Rechnungen ausschliesst und alle auf Massverhältnissen beruhenden Eigenschaften der geometrischen Gebilde gesondert untersucht, bietet er noch einen Vortheil, den ich sehr hoch anschlage. Er bringt nämlich das wichtige, so ungemein fruchtbare Princip der Dualität oder Reciprocität, von welchem die ganze Geometrie der Lage beherrscht wird, in seiner vollen Reinheit und in seinem ganzen Umfange zur schönsten Geltung. Kein anderer Lehrgang, der das Mass zu Hülfe nimmt, kann sich dieses Vorzuges rühmen; denn in der Geometrie des Masses hat das Princip der Dualität nicht allgemeine Geltung. Anerkanntermassen aber bietet die Geometrie Nichts, was für den Anfänger so anregend wäre, ihn so zum Selbstschaffen anspornte, wie das Princip der Dualität; und je früher er damit bekannt gemacht wird, desto besser. Dass dieses Princip besonders in der Geometrie des Raumes so klar hervortritt, war für mich ein massgebender Grund dafür, die stereometrischen Betrachtungen von den planimetrischen nicht zu trennen. — Die metrischen Eigenschaften, namentlich die der Kegelschnitte, habe ich übrigens durchaus nicht vernachlässigt, vielmehr sie in weiterem Umfange als Steiner und von Staudt überall dort entwickelt, wo sie sich als besondere Fälle der allgemeinen Sätze von selbst darboten.

Zu den Kegelschnitten und den übrigen Gebilden zweiter Ordnung, von denen diese erste Abtheilung meiner Vorträge vornehmlich handelt, gelange ich auf einem anderen Wege als Steiner und von Staudt, von denen der letztere die Theorie jener Gebilde auf die Lehre von der Collineation und der Reciprocität gründet. Ich hoffe dadurch, dass ich die Gebilde zweiter Ordnung gleich bei der Untersuchung der projectiven einförmigen Grundgebilde einführe, das Verständniss der projectiven Verwandtschaft erleichtert zu haben; zugleich gewinne ich dadurch den Vortheil, den Anfänger auf das schwierigere Studium der Collineation und der Reciprocität allmählich vorbereiten zu können. Jacob Steiner hat in seinem höchst anregenden, bahnbrechenden Werke „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“ (Berlin 1832) die Hülfsmittel geschaffen, deren ich mich vom fünften bis zum zehnten Vortrage vorzugsweise bediene; doch musste ich aus schon berührten Gründen darauf verzichten, gleich Steiner die Kegelschnitte mittelst des Kreises zu definiren.

Zürich, den 8. März 1866.

Der Verfasser.

Vorwort zur vierten Auflage der ersten Abtheilung.

Diese neue Auflage übertrifft die erste beträchtlich an Umfang; sie enthält nahezu die doppelte Anzahl von Druckbogen. Die bedeutendste, schon in der zweiten Auflage vorgenommene Aenderung besteht in der Hinzufügung einer Sammlung von 247 Aufgaben und Lehrsätzen. Ein Theil dieser Sammlung befand sich zuerst im Anhange der zweiten Abtheilung, ist aber durch zahlreiche neue Aufgaben und nützliche Sätze vergrössert worden. Die elf ersten Abschnitte dieses Theiles Ex. 1-178 entsprechen, mit Ausnahme der beiden über das Princip der reciproken Radien und über die geradlinigen Flächen dritter Ordnung, den mit ihnen gleichnamigen Vorträgen, und ihre Aufgaben und verhältnissmässig leicht zu beweisenden Sätze sind hauptsächlich zur Uebung für Studirende bestimmt. Jedem Anfänger rathe ich dringend, die Constructions-Aufgaben wirklich auszuführen, weil das Verständniss der Geometrie der Lage durch das Zeichnen wesentlich gefördert wird.

Die letzten fünf Abschnitte Ex. 179-247 der „Aufgaben und Lehrsätze" enthalten neue Untersuchungen, die der ersten Auflage fremd geblieben und in mehreren wesentlichen Punkten meines Wissens zuerst in diesem Buche mit den Hülfsmitteln der synthetischen Geometrie durchgeführt sind. Damit diese Untersuchungen über Polvierecke und

Polvierseite und über lineare Systeme und Gewebe von Kegelschnitten und Kegeln nicht zu umfangreich würden, habe ich für sie eine möglichst knappe Form der Darstellung gewählt. Dadurch und durch Einführung einiger einfacher Begriffe ist es gelungen, die wichtigen Theorien der Büschel, Schaaren, Netze und Schaarschaaren von Kegelschnitten in einem neuen Zusammenhange auf dem engen Raume von fünfundzwanzig Seiten darzustellen. Durch den Satz von Henry J. S. Smith, S. 197. dessen synthetischer Beweis mir erst nach manchen vergeblichen Versuchen gelang, und durch das Princip der Dualität gestalten sich diese Theorien sehr einfach und übersichtlich.

Den von Staudt'schen Beweis des Fundamentalsatzes der Geometrie der Lage habe ich unter Benutzung der darauf bezüglichen Bemerkungen der Herren F. Klein und Darboux (Math. Annalen, Bd. 17) durch einen einwandfreien ersetzt.

Gegenüber der dritten Auflage hat diese vierte mancherlei Veränderungen und Zusätze erfahren. Die drei Vorträge 14, 15, 16 über confocale Kegelschnitte, deren Normalen und Krümmungskreise und concentrische homothetische Kegelschnitte sind neu hinzugekommen; alle übrigen sind sorgfältig durchgesehen und vielfach bereichert worden; im Anhange ist eine Anzahl von Sätzen neu, insbesondere der letzte Abschnitt über lineare Systeme und Gewebe concentrischer Kegel.

Strassburg i. E., den 7. Juli 1898.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichniss.

Die **Reye'sche Geometrie der Lage** umfasst drei Abtheilungen:

Abtheilung I. 4. Auflage, 1899. Mit 90 Textabbildungen. Brosch. 9 M. In Halbfranz geb. 11 M.

Abtheilung II. 3. Auflage, 1892. Mit 26 Textabbildungen. Brosch. 9 M. In Halbfranz geb. 11 M.

Abtheilung III. 1. Auflage, 1892. Brosch. 6 M. In Halbfranz geb. 8 M.

Inhalt von Abtheilung II:

1. Collineation und Correlation von Grundgebilden zweiter Stufe. 2. Collineare und reciproke ebene Curven. 3. Perspective Lage collinearer Felder und Bündel. Ausgeartete Collineationen und Correlationen. 4. Collineation und Correlation räumlicher Systeme. 5. Flächen zweiter Ordnung, ihre Erzeugung und Classificirung. 6. Polarentheorie der Flächen zweiter Ordnung. Durchmesser, Mittelpunkt und Hauptaxen derselben. 7. Affinität, Aehnlichkeit und Congruenz ebener Felder. Affine Kegelschnitte. 8. Affinität, Aehnlichkeit, Congruenz und Symmetrie räumlicher Systeme. Affine Flächen zweiter Ordnung. 9. Conjective collineare Grundgebilde. Involutorische Collineationen in der Ebene und im Raume. 10. Symbolisches Rechnen mit geometrischen Verwandtschaften. Vertauschbare Collineationen und Correlationen. 11. Cyclische Collineationen. 12. Harmonische Verwandtschaften, insbesondere harmonische Projectivitäten und Collineationen. Vertauschbare involutorische Verwandtschaften. 13. Conjective reciproke Felder. Polare Felder und Bündel. 14. Conjective reciproke Räume. Räumliche Polarsysteme. 15. Der Axencomplex eines räumlichen Polarsystemes. Coaxiale Flächen zweiter Ordnung. 16. Die Focalcurven eines räumlichen Polarsystemes. Confocale Flächen zweiter Classe und ihre Focalaxen. 17. Weitere Eigenschaften der confocalen Flächen hinsichtlich ihrer Krümmungslinien, Focalcurven, Focalaxen, Kreisschnitte und Normalen. 18. Der lineare Strahlencomplex und das Nullsystem. Durchmesser, Hauptaxe und Axencomplex des Nullsystemes. 19. Die lineare Strahlencongruenz. Projective Beziehung des linearen Strahlencomplexes auf den Punktraum. 20. Die Strahlencongruenzen, welche durch collineare Bündel oder Felder erzeugt werden. Raumcurven und Ebenenbüschel dritter Ordnung. 21. Projective Beziehungen und Polarität der cubischen Raumcurven und Ebenenbüschel. 22. Conjugirte Punkte bezüglich einer cubischen Raumcurve. 23. Bündel cubischer Raumcurven. Invariante Beziehungen cubischer Raumcurven zu Polarsystemen und cubischen Ebenenbüscheln. 24. Projective Verwandtschaft einer Congruenz erster Ordnung und eines ebenen Feldes. Biquadratische Regelflächen, erzeugt durch projective Ebenenbüschel zweiter Ordnung. 25. Geometrische Verwandtschaften zweiten Grades. 26. Lineare Strahlencomplexe als Träger anderer linearer Complexe.

Anhang. **Aufgaben und Lehrsätze.** Collineation und Correlation. Flächen zweiter Ordnung. Polare Felder und Bündel; räumliche Polarsysteme. Polfünfecke und Polsechsecke eines räumlichen Polarsystemes. Der Axencomplex, die Normalen und der Focalcomplex einer Fläche zweiter Ordnung. Verschiebungssehnen u. Hauptaxe congruenter Räume und das zugehörige Nullsystem. Cubische Raumcurven und geometrische Verwandtschaften zweiten Grades. Cubische Ordnungscurven eines Nullsystemes oder linearen Strahlencomplexes. Zwei merkwürdige periodische Bewegungen eines starren Körpers. Lineare Strahlencomplexe und ihre Büschel, Bündel und Gebüsche. Projective Erzeugung quadratischer Strahlencomplexe.

Inhalt von Abtheilung III:

1. Strahlencomplexe zweiten Grades, erzeugt durch collineare Räume. 2. Büschel von Flächen zweiter Ordnung; Schaaren von Flächen zweiter Classe. Raumcurven und Ebenenbüschel vierter Ordnung erster Art. 3. Projective Beziehungen der F^2-Büschel und der Kegelschnittbüschel. 4. Erzeugniss eines F^2-Büschels mit einem zu ihm projectiven Ebenenbüschel. Die vier Hauptarten der F^2-Büschel. 5. Aehnliche, concentrisch und ähnlich liegende Flächen zweiter Ordnung und ihre Normalen. 6. Strahlencongruenzen zweiter Classe, erzeugt durch collineare Flächen zweiter Ordnung. 7. Flächen dritter Ordnung, ihre Abbildung auf einer Ebene und die zugehörigen Bündelnetze. 8. Ebene Curven dritter Ordnung. 9. Die 27 Geraden und die Kegelschnitte der allgemeinen cubischen Fläche. 10. Die zweite Steiner'sche Erzeugung der cubischen Fläche. Die Regelfläche dritter Ordnung. 11. Polarentheorie der cubischen Fläche. 12. Polaren von Geraden und Ebenen bezüglich der cubischen Fläche. 13. Die Polhexaëder der cubischen Fläche und das Pentaëder ihrer Kernfläche. 14. Büschel und Bündel collinearer Räume; lineare Complexe von projectiven Ebenenbüscheln und collinearen Bündeln. Die cubische Raumverwandtschaft. 15. Bündel von Flächen zweiter Ordnung. 16. Das F^2-Gebüsch, seine projective Beziehung auf ein räumliches System und die Steiner'sche Fläche vierter Ordnung. 17. Besondere Fälle des F^2-Gebüsches. 18. Die Strahlencongruenz zweiter Ordnung zweiter Classe und die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten. 19. Das F^2-Gebüsch mit einer Basisgeraden.

Anhang. **Aufgaben und Lehrsätze.** Tetraëdrale quadratische Strahlencomplexe. Specielle F^2-Büschel und tetraëdrale Complexe. Flächen dritter Ordnung. Die acht associirten Schnittpunkte von drei Flächen zweiter Ordnung. Der F^2-Bündel mit Poltetraëder. Das F^2-Gebüsch; specielle Flächen vierter Ordnung. Das F^2-Gebüsch mit Poltetraëder. Vertauschbare Collineationen und Correlationen, und solche, die eine gegebene Collineation oder Correlation umkehren.

Einleitung.

/. Die Geometrie der Lage oder neuere synthetische Geometrie ist eine Schöpfung unseres jetzt ablaufenden Jahrhunderts. Erst vor wenigen Jahrzehnten ist sie zu gleichem Range mit der älteren Geometrie emporgestiegen, und die grossen Forscher, denen sie ihren reichen Inhalt, ihre fruchtbaren Methoden und ihren ebenso einfachen wie stolzen Aufbau vornehmlich verdankt, wie Poncelet, Moebius, Jacob Steiner, Chasles, von Staudt*), sie alle lebten und lehrten noch während meiner Studienzeit. Deshalb ist die Kenntniss dieses höchst anregenden Zweiges der mathematischen Wissenschaften selbst unter den Lehrern der Mathematik noch wenig verbreitet, und auch bei Ihnen, meine Herren, darf ich sie schwerlich voraussetzen. Bei dieser Sachlage dürfte es wohl von Nutzen sein, wenn ich meinen Vorträgen einige Worte über die Stellung der Geometrie der Lage gegen-

---

*) Die geometrischen Schriften dieser Autoren sind geradezu Quellenwerke der neueren synthetischen Geometrie und verdienen noch heute ein gründliches Studium. Wir nennen insbesondere:

Poncelet, Traité des Propriétés projectives des Figures, Paris 1822; zweite Auflage, Paris 1865/66.

Moebius, Der barycentrische Calcul [analytisch], Leipzig 1827 und Gesammelte Werke, 2 Bde. Leipzig 1885/86.

Steiner, Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, Berlin 1832 und Gesammelte Werke, 2 Bde., Berlin 1881/82.

Chasles, Aperçu historique sur l'Origine et le Développement des Méthodes en Géométrie, Bruxelles 1837, 2e éd. Paris 1875; Traité de Géométrie supérieure, Paris 1852; Traité des Sections coniques, Paris 1865.

von Staudt, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847; Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnb. 1856 bis 1860.

über den anderen Zweigen der Geometrie vorausschicke und Ihnen sodann einige Sätze und Aufgaben anführe, die zur näheren Kennzeichnung der Geometrie der Lage geeignet erscheinen.

2. Von der synthetischen Geometrie der Griechen und von der analytischen Geometrie unterscheidet sich die reine Geometrie der Lage wesentlich dadurch, dass sie von dem Begriff des Masses keinen Gebrauch macht; im Gegensatz zu ihr wird daher die ältere Geometrie auch wohl „Geometrie des Masses" genannt. In der reinen Geometrie der Lage ist von Mittelpunkten geradliniger Strecken, von rechten Winkeln und Perpendikeln, von Verhältnissen und Proportionen, von Inhaltsberechnungen nicht die Rede; eben so wenig von trigonometrischen Zahlen, oder gar von analytischen Gleichungen krummer Linien. Denn alle diese Gegenstände der älteren Geometrie setzen Messungen voraus. Am Schlusse jedes grösseren Abschnittes werde ich übrigens von der Geometrie der Lage Anwendungen auf die Geometrie des Masses p.46. machen, in denen ich die Planimetrie und gelegentlich einmal den Begriff des Sinus als bekannt voraussetzen werde. Mit gleichschenkligen und gleichseitigen Dreiecken werden wir uns so wenig beschäftigen, wie mit rechtwinkligen; und auch das Rechteck, die regelmässigen Polygone und der Kreis bleiben von unserer Untersuchung, abgesehen von jenen Anwendungen, ausgeschlossen. Nur in den Anwendungen werden wir vom Mittelpunkte, von den Axen und Brennpunkten der Curven zweiter Ordnung oder Kegelschnitte reden; wir werden trotzdem viel allgemeinere und wichtigere Eigenschaften dieser Linien kennen lernen, als die, worauf die meisten Lehrbücher der analytischen Geometrie sich beschränken. Wir werden uns sogar einen neuen Weg zu den Kegelschnitten bahnen müssen, weil wir der Hülfe des Kreiskegels, mittelst dessen die Alten, und der Gleichungen, wodurch die Analytiker sie definiren, in der Geometrie der Lage entbehren. Dass in meinen Vorträgen keine Rechnungen vorkommen werden, brauche ich nach dem schon Gesagten wohl kaum zu erwähnen; nur in den Anwendungen auf die Geometrie des Masses werden wir bisweilen vom Gleichheitszeichen Gebrauch machen.

3. Von den geometrischen Kenntnissen, die in den Schulen gelehrt werden, benutze ich deshalb nur sehr wenige. Dagegen würde Ihnen eine gewisse Uebung in der Fähigkeit, sich geometrische Gebilde auch ohne bildliche Darstellung zur Anschauung zu bringen, von grossem Nutzen sein. Denn es ist mir nicht

wohl möglich, jeden Satz, namentlich wenn er sich auf Gebilde im Raume bezieht, durch Figuren zu erläutern; ich muss Ihrer Vorstellungskraft manchmal etwas zumuthen. Da diese auch in der darstellenden oder descriptiven Geometrie vielfach in Anspruch genommen wird, so wird Ihnen deren Kenntniss sehr zu Statten kommen; wie auch umgekehrt die Geometrie der Lage ein vorzügliches Vorstudium bildet für die darstellende Geometrie. Ueberhaupt ist von allen übrigen Zweigen der Geometrie die darstellende am meisten geeignet, das Studium der Geometrie der Lage zu erleichtern, schon weil sie ihr nahe verwandt ist. Denn auch in der darstellenden Geometrie kommen weniger Grössenbeziehungen in Betracht, als vielmehr die Lage der Gebilde theils zu einander, theils zu den Projektionsebenen, wobei denn freilich die Benutzung des Kreises und des rechten Winkels nicht verschmäht wird. Vor Allem werden Sie finden, dass die Perspective oder die centrale Projection auch in der Geometrie der Lage eine grosse Rolle spielt, und dass ihr viele in der neueren Geometrie benutzte Ausdrücke entlehnt sind.

4. Zu der analytischen Geometrie steht die reine Geometrie in einem gewissen Gegensatze schon durch ihre Methode, die Ihnen aus der Euklidischen Geometrie als die synthetische Methode bekannt ist. Wir werden von einer kleinen Zahl von „Grundgebilden" ausgehen; einfache Beziehungen, die zwischen ihnen sich aufstellen lassen, führen uns dann zu den sogenannten Gebilden zweiter Ordnung, zu denen auch die Kegelschnitte gehören, und lassen zugleich die Haupteigenschaften dieser Gebilde leicht erkennen. Von den Gebilden zweiter Ordnung können wir sodann in derselben Weise zu immer neuen Gebilden fortschreiten. Auf die höhere Analysis, dieses mächtige Werkzeug der modernen Mathematik, müssen wir bei unseren Untersuchungen schon deshalb verzichten, weil wir das Mass nicht benutzen; denn um mit räumlichen Gebilden rechnen zu können, müssen wir sie zuerst durch Zahlen ausdrücken, d. h. ausmessen. Die reine Geometrie wird wegen der in ihr angewendeten Methode vielfach im Gegensatz zu der analytischen mit dem Namen „synthetische Geometrie" bezeichnet.

5. Eben weil wir in der reinen Geometrie der Lage von Massverhältnissen absehen, sind ihre Sätze und Aufgaben sehr allgemein und umfassend. So sind von den Eigenschaften der Kegelschnitte, die in den Lehrbüchern der analytischen Geometrie bewiesen werden, gerade die wichtigsten ganz specielle Fälle von

1*

Sätzen, die wir später kennen lernen werden. Einige Beispiele mögen dazu dienen, Ihnen auch in dieser Hinsicht den Stoff näher zu erläutern, mit dem wir uns in diesen Vorträgen beschäftigen werden.

6 Bei dem Entwerfen von Bauwerken und überhaupt bei dem Zeichnen ist nicht selten die Aufgabe zu lösen: p. 44 „Durch den unzugänglichen Schnittpunkt von zwei (convergirenden) Geraden eine dritte Gerade zu ziehen.“ Die Geometrie des Masses liefert uns beliebig viele Punkte einer solchen dritten Geraden z. B. mit Hülfe des Satzes, dass auf parallelen Geraden durch je drei Transversalen, die sich in einem Punkte schneiden, proportionale Abschnitte gebildet werden. Die Geometrie der Lage giebt uns eine einfachere Lösung an die Hand. Wir nehmen nämlich ausserhalb der beiden gegebenen Geraden a, b (Fig. 1) irgend

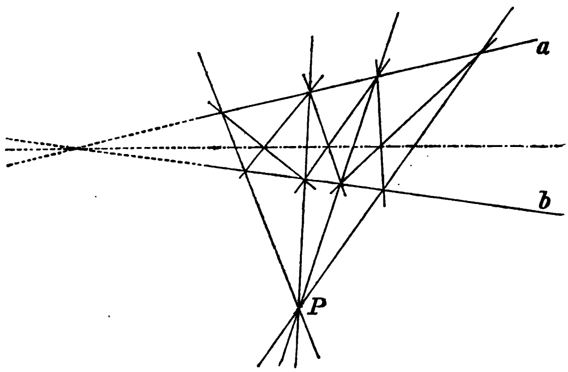


Fig. 1.

einen Punkt P an, und legen durch ihn beliebig viele Transversalen. Suchen wir dann in jedem Viereck, welches irgend zwei dieser Transversalen mit a und b bilden, den Schnittpunkt der Diagonalen, so liegen alle diese Schnittpunkte auf einer Geraden, die den Schnittpunkt von a und b enthält*).

*) Anfängern empfehle ich sehr, zu diesem Satze und namentlich zu späteren minder einfachen Sätzen die Figur nach den Angaben des Textes selbst zu zeichnen, ohne die von mir gezeichnete vorher anzusehen. Eine allmälig entstehende Figur ist weit leichter aufzufassen, und erläutert auch meistens den darzustellenden Satz weit besser, als eine mit allen Hülfslinien fertig gezeichnete.

Der Beweis folgt mit Leichtigkeit aus dem wichtigen Satz über die harmonische Theilung am Viereck, der folgendermassen ausgesprochen werden kann. Nimmt man (Fig. 2) auf einer Ge-

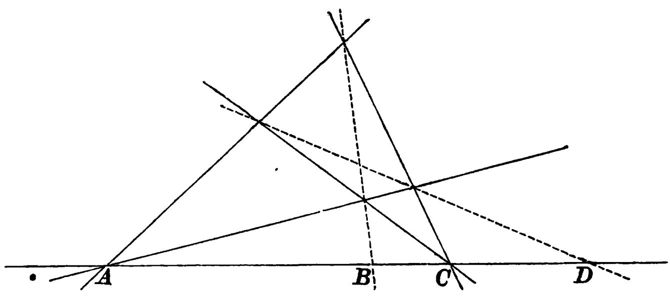


Fig. 2.

raden drei Punkte A, B, C an, und construirt man ein Viereck so, dass zwei Gegenseiten durch A, eine Diagonale durch B und die beiden anderen Gegenseiten durch C gehen, so begegnet die zweite Diagonale der Geraden ABC in einem ganz bestimmten vierten Punkte D. 1.35. Sie können durch Zeichnung verschiedener, den ersten Bedingungen genügender Vierecke leicht eine Bestätigung dafür erhalten, dass wirklich ihre zweiten Diagonalen alle durch jenen vierten Punkt D gehen. Die Punkte A, B, C, D heissen hier harmonische Punkte, und man sagt: „B und D sind harmonisch getrennt durch die Punkte A und C." In der Feldmesskunst kann man die Construction unter Umständen benutzen, um eine gerade Linie über ein Hinderniss, z. B. über einen Wald hinaus zu verlängern durch Umgehung des Hindernisses.

7 Von Sätzen über das Dreieck will ich nur den folgenden nennen: Liegen zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ so (Fig. 3), dass die Verbindungslinien AA_1, BB_1 und CC_1 gleichnamiger Eckpunkte sich in einem und demselben Punkte S schneiden, so begegnen sich die gleichnamigen Seiten AB und A_1B_1, BC und B_1C_1, CA und C_1A_1 in drei Punkten C_2, A_2, B_2 einer Geraden, und umgekehrt. 1.36. Die den Satz erläuternde Figur verdient Beachtung als Repräsentant einer Gattung von merkwürdigen, durch eine gewisse Regelmässigkeit ausgezeichneten Configurationen. Sie besteht aus 10 Punkten und 10 Geraden; auf jeder der Geraden liegen drei von den 10 Punkten, und durch jeden dieser Punkte gehen drei von den 10 Geraden.

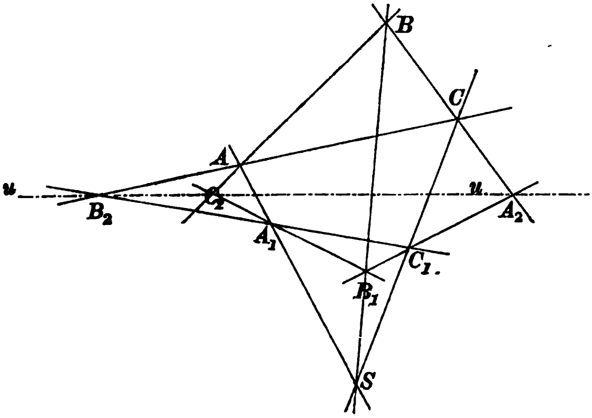


Fig. 3.

Eine andere Reihe von Sätzen knüpft sich an die Curven zweiter Ordnung oder Kegelschnitte. Aus der analytischen Geometrie ist Ihnen bekannt, und wir werden es später synthetisch beweisen, dass eine Curve zweiter Ordnung durch fünf Punkte oder fünf Tangenten völlig bestimmt ist. Aber Sie wissen auch, wie mühsam die wirkliche Berechnung und die darauf gegründete Construction eines so bestimmten Kegelschnittes sind. Die Geometrie der Lage beweist nun zwei fundamentale Sätze über die Curven zweiter Ordnung, die uns ermöglichen, zu fünf gegebenen Punkten oder Tangenten eines Kegelschnitts beliebig viele neue Punkte resp. Tangenten mit Leichtigkeit zu construiren und so die Curve selbst schnell zu zeichnen. Wer von Ihnen diese Sätze bereits kennt, wird zugleich wissen, wie viele Hülfsmittel ihr Beweis in der analytischen Geometrie fordert. Der erste, von Pascal entdeckte Satz sagt aus, dass die drei paar Gegenseiten jedes einer Curve zweiter Ordnung eingeschriebenen Sechsecks sich in drei Punkten schneiden, die in einer Geraden liegen; nach dem zweiten, von Brianchon herrührenden Satze gehen von einem umschriebenen Sechseck die drei Hauptdiagonalen (d. h. die Verbindungslinien gegenüberliegender Eckpunkte) allemal durch einen und denselben Punkt. Beide Sätze lassen sich leicht am Kreise prüfen. Sie bemerken, dass in ihnen von Grössenverhältnissen des Kegelschnittes, dass von seinem Mittelpunkte, seinen Axen und Brennpunkten nicht die Rede ist. Eben darum aber sind diese Sätze von der grössten Allgemeinheit und Bedeutung, so dass die ganze Theorie der Kegelschnitte auf sie gegründet werden kann. Namentlich lässt sich das wichtige Problem der Tangentenziehung an einem gegebenen Punkt mittelst des Pascal'schen Satzes lösen, selbst wenn der Kegelschnitt nur durch fünf Punkte gegeben ist, ohne vollständig oder theilweise gezeichnet vorzuliegen.

9.

Das Problem der Tangentenziehung an Curven zweiter Ordnung kann in vielen Fällen mit Hülfe eines Satzes gelöst werden, der eine der wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnitte aussagt. In manchen Lehrbüchern der analytischen Geometrie findet dieser Satz sich nicht, weil sein analytischer Beweis ziemlich verwickelt und wenig geeignet ist, jene Eigenschaft in das rechte Licht zu setzen. Nämlich wenn durch einen Punkt A (Fig. 4), der in der

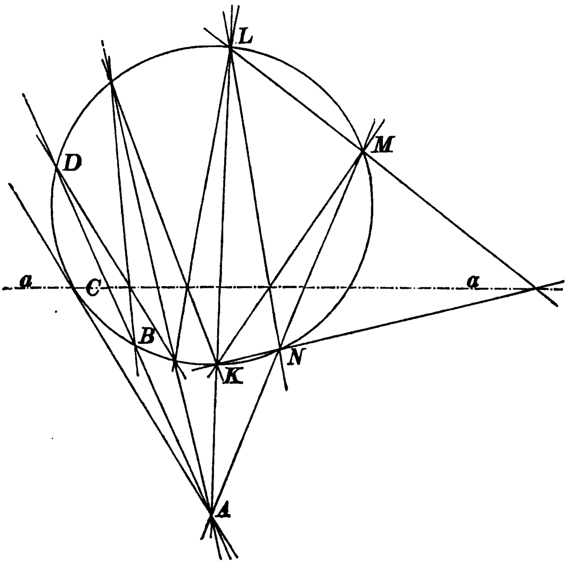


Fig. 4.

Ebene einer Curve zweiter Ordnung, aber nicht auf der Curve liegt, Secanten an diese gezogen werden, so schneiden beliebige zwei von ihnen die Curve in vier Punkten K, L, M, N. Die von den Secanten verschiedenen Verbindungslinien der vier Punkte, LM und NK, KM und LN, treffen sich dann paarweise in Punkten einer bestimmten Geraden a, der sogenannten Polare des gegebenen Punktes A. Liegt der Punkt A ausserhalb der Curve, so verbindet seine Polare a die Berührungspunkte der beiden

Tangenten, die von A an die Curve gezogen werden können; liegt A innerhalb der Curve, so wird diese von a nicht geschnitten. Wir können den Satz benutzen, um durch einen gegebenen Punkt mit blosser Anwendung des Lineales Tangenten an einen Kegelschnitt zu ziehen. — Auf jeder durch A gelegten Secante liegen noch vier bemerkenswerthe Punkte, nämlich A selbst, dann der erste Schnittpunkt B mit der Curve, ferner der Schnittpunkt C mit der Polare a von A und endlich der zweite Schnittpunkt D mit der Curve. Diese vier Punkte A, B, C, D sind vier harmonische Punkte, und die Polare a enthält also jeden Punkt, der durch zwei Curvenpunkte harmonisch von A getrennt ist. Die wichtigen Sätze über Mittelpunkt und conjugirte Durchmesser eines Kegelschnittes sind ganz specielle Fälle der eben genannten Sätze. Mit Leichtigkeit lassen sich diese Sätze ausdehnen auf die Flächen zweiter Ordnung, weil deren Schnitte mit Ebenen aus Curven zweiter Ordnung bestehen.

Aus diesen wenigen Beispielen, die ich leicht vermehren könnte, werden Sie schon erkannt haben, mit welchen ganz anderen, aber gewiss nicht weniger wichtigen Sätzen die Geometrie der Lage sich beschäftigt, als z. B. die analytische Geometrie. Ich erinnere Sie noch daran, dass die analytische Geometrie besonders durch die Winkel, die die Tangenten der Kegelschnitte mit den Brennstrahlen bilden, oder durch die Abschnitte, die sie auf den Axen hervorrufen, die Lage der Tangenten zu bestimmen sucht, also Alles auf Massverhältnisse zurückführt. Natürlich rede ich hier nur von den Elementen der analytischen Geometrie, worauf die meisten Lehrbücher sich beschränken, nicht aber von den höchst fruchtbaren neueren Methoden, die wir vor Allen dem scharfsinnigen Plücker verdanken.

Erster Vortrag.

Die Methode des Projicirens und Schneidens. Die sechs Grundgebilde der neueren Geometrie.

10 Bekanntlich gründen sich die vielen Begriffe, die in der Geometrie der Alten, der Trigonometrie und der analytischen Geometrie aufgestellt werden, zum grössten Theil auf das Mass; sie können in der reinen Geometrie der Lage keine Anwendung finden. Es kann deshalb nicht überraschen, dass die neuere Geometrie für ihre Zwecke gleichfalls eine beträchtliche Anzahl eigenthümlicher Begriffe aufgestellt hat, mit denen wir uns in diesem und den nächsten Vorträgen bekannt machen wollen, und die wir fortwährend anwenden müssen.

11 Der Punkt, die Gerade und die Ebene sind die einfachen „Elemente" der neueren Geometrie. Wir werden in der Regel die Punkte durch grosse lateinische Buchstaben bezeichnen, gerade Linien durch kleine lateinische, und Ebenen durch griechische Buchstaben. Die Geraden, die wir auch wohl „Strahlen" nennen, und die Ebenen betrachten wir immer als allseitig unbegrenzt, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil angegeben wird. Wir können diese Elemente mit einander zu zusammengesetzten Gebilden verbinden, indem wir ein Element als „Träger" unendlich vieler anderer ansehen, und gelangen so zu den sechs „Grundgebilden" der neueren Geometrie. Bevor ich Ihnen diese erkläre, schicke ich zur Vorbereitung eine kurze Erörterung voraus über die wichtige und häufig von uns anzuwendende Methode des Projicirens und Schneidens*).

---

*) Diese Methode wurde namentlich von Poncelet ausgebildet in seinem Traité des Propriétés projectives des figures, Paris 1822; II. Aufl. Paris 1865—66.

12 Wenn wir einen Gegenstand, etwa ein Gebäude, anschauen, so wirft jeder seiner (sichtbaren) Punkte einen Strahl in unser Auge, den wir den „Schein" oder „Projectionsstrahl" des Punktes nennen. Der Schein des ganzen Gebäudes ist also aus vielen Strahlen zusammengesetzt, von denen jeder einen oder mehrere Punkte vom Auge aus „projicirt". Liegen gewisse Punkte in einer nicht durch das Auge gehenden Geraden, so liegen ihre Projectionsstrahlen in der Ebene, die vom Auge aus durch die Gerade gelegt werden kann; eine beliebige Gerade wird also aus dem Auge durch eine Ebene projicirt, die wir den „Schein" oder die „projicirende Ebene" der Geraden nennen. Ebenso wird eine Curve im Allgemeinen durch eine conische Fläche projicirt.

Den Schein des Gebäudes können wir nun durch eine Ebene auffangen oder „schneiden", indem wir jeden Projectionsstrahl in einem Punkte und jede projicirende Ebene in einer Geraden schneiden. Wir erhalten dann in der Ebene als „Schnitt" oder „Spur" des Scheines ein perspectives Bild, eine „Projection" des Gebäudes, und diese Projection sendet ganz denselben Schein in das Auge, wie das Gebäude selbst, und ist deshalb auch sehr geeignet, uns eine Vorstellung von ihm zu verschaffen. Die Photographieen räumlicher Gegenstände sind im Wesentlichen solche perspective *ebene* Bilder der dargestellten Objekte.

Auf diese Art des Projicirens, die unter dem Namen „Centralprojection" bekannt ist, gründet sich die Lehre von der Perspective; und alle anderen Projectionsarten, die in der darstellenden Geometrie üblich sind, lassen sich als besondere Fälle dieser einen Art auffassen. Damit z. B., wie bei der orthogonalen Projection, die Projectionsstrahlen parallel seien, brauchen wir uns nur das Auge in unendliche Entfernung gerückt zu denken. Auch die Schatten, die beliebige Körper auf Ebenen werfen, wenn sie aus einem endlichen oder unendlich fernen Punkt beleuchtet werden, sind Nichts weiter, als Projectionen der Körper: der leuchtende Punkt tritt hier an die Stelle des Auges.

13 Wie man mittelst der Methode des Projicirens und Schneidens durch blosse Anschauung wichtige Sätze finden und zugleich beweisen kann, möge ein einfaches Beispiel lehren. Parallele Gerade werden vom Auge aus durch Ebenen projicirt, die sich alle in einer und derselben Geraden schneiden, nämlich in der durch das Auge gelegten Parallelen; von einer beliebigen Bildebene aber werden diese projicirenden Ebenen in Geraden geschnitten, die

alle durch einen Punkt, die Spur jener Schnittlinie, gehen. Folglich müssen in perspectiven Ansichten eines Gebäudes oder sonstigen Gegenstandes die Bilder paralleler Kanten alle nach einem Punkte, ihrem sogenannten Fluchtpunkte, hin convergiren, und nur in einem leicht angebbaren besonderen Falle sind sie ebenfalls parallel. Wir haben damit beiläufig einen bekannten Hauptsatz der Centralperspective aufgestellt und bewiesen.

14 Wir wollen nun von allen optischen Beziehungen absehen und die soeben benutzten Ausdrücke „Schein, Strahl, projiciren, schneiden" u. s. w. auch ferner anwenden, indem wir statt des Auges einen beliebigen Punkt S und statt des bestimmten Gegenstandes oder Gebäudes ein beliebiges System Ω von Punkten und Geraden im Raume annehmen. Dieses System Ω wird aus S durch ein System von Strahlen und Ebenen projicirt, nämlich jeder Punkt durch einen Strahl und jede nicht durch S gehende Gerade durch eine Ebene. Der Punkt S ist dann als „Träger" aller dieser Strahlen und Ebenen anzusehen, die zusammen den „Schein" des Systemes Ω bilden. Nehmen wir im Raum ein beliebiges System Σ von Ebenen und Geraden an, so wird jede neue Ebene η das System in einem Systeme von Geraden und Punkten schneiden, nämlich die Ebenen in je einer Geraden, und die Geraden in je einem Punkte. Die Ebene η erscheint dann als „Träger" aller dieser Geraden und Punkte, die zusammen den „Schnitt" oder die „Spur" des Systemes Σ ausmachen.

15 Wir können auch aus Geraden projiciren, und durch Gerade Schnitte hervorrufen. Jeder ausserhalb einer Geraden g gelegene Punkt bestimmt nämlich mit g eine Ebene und wird aus g durch diese Ebene „projicirt", und ebenso wird jede Ebene, die nicht durch g geht, von der Geraden in einem Punkte „geschnitten". Die Gerade erscheint hiernach bald als Träger von Ebenen, die durch sie gehen, bald als Träger von Punkten, die auf ihr liegen.

16 Durch solche Betrachtungen gelangen wir zu den folgenden sogenannten Grundgebilden, die in der neueren Geometrie eine wichtige Stelle einnehmen.

I. 1. Die Gesammtheit aller in einer Geraden liegenden Punkte wird eine „Punktreihe" (auch wohl ein „gerades Gebilde") genannt; die einzelnen Punkte der Geraden heissen „Elemente" der Punktreihe. Diese Punkte denken wir uns starr mit einander verbunden, so dass ihre gegenseitige Lage auch dann noch unverändert bleibt, wenn die Gerade, ihr „Träger", verschoben wird. Ein von zwei Punkten begrenzter Theil einer Punktreihe heisst eine „Strecke“.

I.2. Die Gesammtheit aller durch einen Punkt S gehenden und in einer Ebene η liegenden Strahlen soll ein „Strahlenbüschel“ [den, nicht das.] heissen. Der Schnittpunkt S der Strahlen heisst der „Mittelpunkt“ des Büschels; die einzelnen, nach beiden Seiten unbegrenzten Strahlen sind die „Elemente“ des Büschels. Auch hier denken wir uns die Elemente starr mit einander verbunden. Als „Träger“ des Strahlenbüschels (S, η) kann nach Belieben der Mittelpunkt S oder die Ebene η betrachtet werden, in der seine Strahlen liegen. Ein von zwei Strahlen als „Schenkeln“ begrenzter Theil eines Strahlenbüschels heisst ein „vollkommener ebener Winkel“. Er besteht aus zwei „einfachen“ ebenen Winkeln, die Scheitelwinkel zu einander sind. Werden in einem beliebigen Strahlenbüschel S (Fig. 5) irgend vier Strahlen a, b, c, d angenommen, so sind unter ihnen zwei paar getrennte Strahlen. Nämlich a und c sind durch b und d von einander getrennt, so dass man in dem Büschel von a nicht auf c übergehen kann, ohne entweder b oder d zu überschreiten.

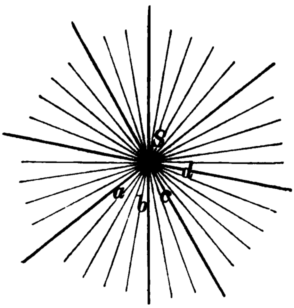


Fig. 5.

I.3. Die Gesammtheit aller durch eine Gerade gehenden, allseitig unbegrenzten Ebenen wollen wir einen „Ebenenbüschel“ nennen, und die Gerade soll die „Axe“ dieses Büschels heissen. Die „Elemente“ des Büschels, d. h. seine Ebenen, denken wir uns, wie bei der Punktreihe die Punkte, starr mit einander verbunden in unveränderlicher gegenseitiger Lage. Ein von zwei Ebenen als „Schenkeln“ begrenzter Theil eines Ebenenbüschels heisst ein „vollkommener Flächenwinkel“; er besteht aus zwei „einfachen“ Flächenwinkeln, die zu einander Scheitelwinkel sind. Unter vier Ebenen eines Büschels sind wieder zwei paar getrennte.

Manchmal, wenn keine Zweideutigkeit möglich ist, werde ich ein Gebilde, das nur aus einzelnen Punkten und Strecken einer Geraden besteht, eine Punktreihe nennen. Ebenso soll ein Gebilde in einem Büschel, das nur aus einzelnen Elementen und Winkeln des Büschels besteht, manchmal selbst ein Büschel genannt werden. Dabei wollen wir uns stets erinnern, dass wir abweichend von den gewöhnlichen Erklärungen den Winkel als Theil eines Büschels definirt haben.

17 Die Punktreihe, den Strahlenbüschel und den Ebenenbüschel bezeichnen wir als die „einförmigen“ Grundgebilde oder als die „Grundgebilde der ersten Stufe“. Die Elemente eines einförmigen Grundgebildes, z. B. die Ebenen eines Ebenenbüschels, haben wir uns als etwas Einfaches vorzustellen, indem wir absehen von den Gebilden (Figuren u. dergl.), deren Träger sie sein können. Bei dem Strahlenbüschel wird uns diese Vorstellung dadurch erleichtert, dass wir die Geraden, deren Gesammtheit den Büschel ausmacht, eben mit dem Namen „Strahlen“ bezeichnen. Denn unter einem Strahle wird gewöhnlich eine Gerade an und für sich verstanden, abgesehen von den in ihr gelegenen Punkten und durch sie gehenden Ebenen. Leider fehlt uns für die Ebene eine entsprechende zweite Bezeichnung.

Von den Grundgebilden der ersten Stufe können wir uns auch eines mittelst jedes anderen erzeugt denken. So wird eine Punktreihe $ABCD$ (Fig. 6) aus jedem ausserhalb gelegenen Punkte S

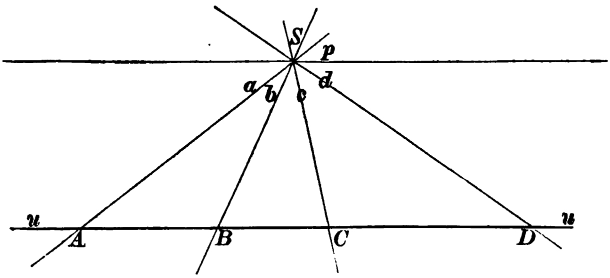


Fig. 6.

durch einen Strahlenbüschel $abcd$ projicirt, von welchem die Punktreihe $ABCD$ ein Schnitt ist. Ebenso wird die Punktreihe $ADCB$ durch den Büschel $adcb$ projicirt. Ein Ebenenbüschel $\alpha\beta\gamma\delta$ wird von jeder nicht durch seine Axe gehenden Ebene in einem Strahlenbüschel $abcd$ geschnitten, dessen Mittelpunkt auf der Axe liegt; jeder Strahlenbüschel wird aus einem nicht in seiner Ebene gelegenen Punkte durch einen Ebenenbüschel projicirt. Endlich wird ein Ebenenbüschel von einer Geraden, die mit seiner Axe nicht in einer Ebene liegt, in einer Punktreihe geschnitten, nämlich jede Ebene des Büschels in einem Punkte der Reihe; und eine

Punktreihe wird aus einer Axe, die mit ihr nicht in einer Ebene liegt, durch einen Ebenenbüschel projicirt. Schon durch diese Beziehungen ist es gerechtfertigt, dass wir die Punktreihe, den Strahlen- und den Ebenenbüschel als Grundgebilde der gleichen, nämlich der ersten Stufe bezeichnen. Denn wir dürfen uns hiernach vorstellen, dass eine Punktreihe ebenso viele Punkte enthält, wie ein Büschel Strahlen oder Ebenen.

18 „Grundgebilde der zweiten Stufe" haben wir zwei, nämlich II. 1. das ebene Feld und den Strahlenbündel. Die Gesammtheit aller Punkte und Strahlen, die in einer Ebene enthalten sind, nennen wir ein „ebenes System oder Feld"; die Ebene ist der „Träger" des Feldes. Im ebenen Felde sind hiernach nicht nur Punkte und Strahlen, sondern auch unendlich viele Punktreihen und Strahlenbüschel als Elemente enthalten; denn alle in einer Geraden des Feldes liegenden Punkte bilden zusammen eine Punktreihe, und alle durch einen Punkt gehenden Strahlen des Feldes bilden einen Strahlenbüschel. Mit Recht bezeichnen wir daher das ebene Feld als ein Grundgebilde von höherer Stufe als die einförmigen Grundgebilde. Jenachdem die Punkte oder die Geraden der Ebene mehr in Betracht kommen, wird das ebene Feld als „Punktfeld" oder als „Strahlenfeld" bezeichnet.

II. 2. Die Gesammtheit aller Strahlen und Ebenen, die durch einen Punkt im Raume (Mittelpunkt) denkbar sind, wird ein „Strahlenbündel" genannt. In dem Bündel sind nicht nur Strahlen und Ebenen, sondern auch unendlich viele Strahlenbüschel und Ebenenbüschel als Elemente enthalten. Denn alle Ebenen des Bündels, die sich in einer Axe schneiden, bilden einen Ebenenbüschel, und alle Strahlen des Bündels, die in einer Ebene liegen, bilden einen Strahlenbüschel. Der Strahlenbündel ist also wirklich ein Grundgebilde von höherer Stufe, als die einförmigen Grundgebilde. Der Name „Bündel" soll eine Mannigfaltigkeit von höherer Stufe als der „Büschel" bezeichnen; er ist von v. Staudt gewiss sehr passend gewählt. Doch können wir dieses Grundgebilde mit demselben Rechte einen „Ebenenbündel" wie einen „Strahlenbündel" nennen, weil es Ebenen sowohl wie Strahlen zu Elementen hat.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass wir uns auch im ebenen Felde und im Strahlenbündel die Elemente, aus denen diese Grundgebilde bestehen, als starr mit einander verbunden denken, so dass z. B. im Bündel die gegenseitige Lage der darin enthaltenen Strahlen, Ebenen und Büschel sich nicht ändert, wenn der Mittelpunkt, der Träger des Bündels, bewegt wird.

Wir dürfen uns vorstellen, dass ein Strahlenbündel ebenso viele Strahlen und Ebenen enthält, wie ein ebenes Feld Punkte und Strahlen, und sind deshalb berechtigt, beide Grundgebilde als zu derselben, zweiten Stufe gehörig zu betrachten. Denn wir können uns den Bündel mittelst des ebenen Felds erzeugt denken, und umgekehrt. Projiciren wir nämlich ein ebenes Feld η aus einem nicht in ihm gelegenen Punkte S, und zwar jeden Punkt P von η durch einen Strahl SP und jeden Strahl von η durch eine Ebene von S, so erhalten wir einen Strahlenbündel; dieser ist ein „Schein" des Feldes η, und von ihm ist das Feld ein „Schnitt". — Um Ihrer Vorstellung zu Hülfe zu kommen, will ich annehmen, η sei eine ebene, in bunten Farben prangende, unbegrenzte Landschaft, die sich zu Ihren Füssen ausbreiten möge, und der ausserhalb gelegene Punkt S sei Ihr Auge. Jeder Punkt der Landschaft sendet dann einen Lichtstrahl in Ihr Auge, jede Gerade der Landschaft eine Lichtebene. Und stellen Sie sich diese Strahlen und Ebenen als allseitig unbegrenzt vor, so erhalten Sie als Schein der ganzen Landschaft einen Strahlenbündel.

Wir können weiter schliessen: Jede Punktreihe des ebenen Feldes wird aus S durch einen Strahlenbüschel projicirt, jeder Strahlenbüschel durch einen Ebenenbüschel, jede Curve durch eine conische Fläche des Bündels; oder mit anderen Worten: Der Schein einer Punktreihe, eines Strahlenbüschels oder einer Curve des ebenen Feldes ist ein Strahlenbüschel, ein Ebenenbüschel resp. eine conische Fläche des Strahlenbündels. Jede Strecke wird durch einen ebenen Winkel projicirt, und jeder ebene Winkel des Feldes durch einen Flächenwinkel. Betrachten wir umgekehrt den Strahlenbündel als das Ursprüngliche, denken wir uns etwa seinen Mittelpunkt als leuchtenden Punkt, der nach allen Seiten hin farbige Strahlen entsendet, so kann das ebene Feld als Schnitt des Bündels angesehen werden. Dann wird jeder Strahl des Bündels in einem Punkte des Feldes geschnitten, jede Ebene in einer Geraden, jeder Strahlenbüschel in einer Punktreihe und jeder Ebenenbüschel in einem Strahlenbüschel.

III. 14 Es giebt noch ein „Grundgebilde der dritten Stufe", nämlich das „räumliche System", oder der unbegrenzte Raum mit allen seinen Punkten, Geraden und Ebenen. Das räumliche System enthält auch unendlich viele Grundgebilde der ersten und der zweiten Stufe als Elemente; denn jede Ebene des Raumes ist der Träger eines Feldes, jeder Punkt der Mittelpunkt eines Strahlenbündels, jede

Gerade der Träger einer Punktreihe und zugleich die Axe eines Ebenenbüschels des räumlichen Systems.

20 Jedem der sechs Grundgebilde, die ich Ihnen soeben erklärt habe, entspricht eine besondere Geometrie. Sie werden mir gewiss gern zugestehen, dass es ebenso gut eine Geometrie des Strahlenbündels geben muss, wie eine Planimetrie oder Geometrie des ebenen Feldes. Denn aus jedem ebenen geometrischen Gebilde können wir ja ein Gebilde im Strahlenbündel ableiten, indem wir das ebene Feld aus einem ausserhalb gelegenen Punkte projiciren. Und die Sätze, die sich von dem ebenen Gebilde aufstellen lassen, können dann in irgend einer Weise auf seinen Schein im Strahlenbündel übertragen werden. Wir werden Gelegenheit haben, von dieser Methode häufigen Gebrauch zu machen. — Schwieriger schon ist einzusehen, dass es auch eine Geometrie der einförmigen Grundgebilde, z. B. der Punktreihe oder der Punkte einer Geraden, geben müsse. Aber ich brauche Sie nur an den in der Einleitung angeführten Satz von den harmonischen Punkten zu erinnern, um Sie hiervon zu überzeugen. Wie ich Ihnen dort als Thatsache anführte, ist durch drei Punkte einer Geraden die Lage des vierten harmonischen Punktes bestimmt. Ferner nenne ich den Satz, dass sich unter vier Strahlen eines Büschels zwei paar getrennte Strahlen befinden, um zu beweisen, dass allerdings von einer Geometrie der einförmigen Grundgebilde geredet werden kann, auch ohne dass wir das Mass zu Hülfe nehmen. Die Theorie der Binärformen kann geradezu als analytische Geometrie des Strahlenbüschels oder der Punktreihe gedeutet werden.

21 Die bisherigen Auseinandersetzungen machen es mir nun schon möglich, in kurzen Worten den Hauptinhalt der Geometrie der Lage anzudeuten. Diese handelt nämlich von den sechs Grundgebilden und ihren Beziehungen zu einander.

Zweiter Vortrag.

Unendlich ferne Elemente. Das Beziehen der Grundgebilde auf einander.

22 In der Geometrie der Alten werden zwei gerade Linien parallel genannt, wenn sie in derselben Ebene liegen und keinen Punkt mit einander gemein haben. Ebenso heissen zwei Ebenen, oder eine Ebene und eine Gerade parallel, wenn kein Punkt der einen zugleich in der anderen liegt. Die neuere Geometrie fasst den Parallelismus anders auf, und es soll meine nächste Aufgabe sein, Sie mit dieser abweichenden Auffassung, die von Staudt „die perspective" genannt hat, vertraut zu machen. Wir werden geradesweges darauf geführt, wenn wir zwei Grundgebilde aus einander ableiten, indem wir das eine als Schnitt oder Schein des anderen uns vorstellen.

Wenn eine Gerade u (Fig. 6) mit einem Strahlenbüschel S in einer Ebene liegt ohne durch seinen Mittelpunkt zu gehen, so

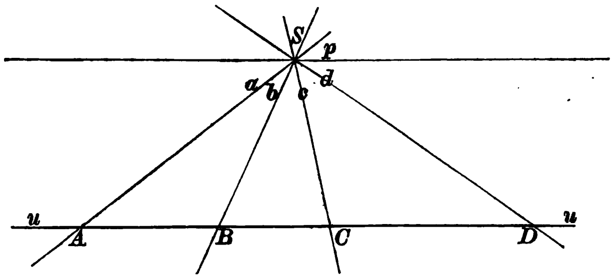


Fig. 6.

schneidet sie ihn in einer Punktreihe; nämlich jeder Strahl a, b, c, ... von S wird in einem Punkte A, B, C, ... von u geschnitten. Beschreibt ein Strahl durch Drehung um S in irgend einem Sinne abc den Büschel S, so beschreibt zugleich seine Spur auf der Geraden u im Sinne ABC die Punktreihe u, indem dieser Schnittpunkt zuerst von A aus über B sich immer weiter bis ins

Unendliche entfernt, und hernach von der entgegengesetzten Seite her wieder aus unendlicher Entfernung zu seiner Anfangslage zurückkehrt. Nach der Auffassung der Alten schneidet der sich drehende Strahl die Gerade u nicht mehr in der einen besonderen Lage p, in welcher er zu u parallel ist; und wir dürfen dieser Ausnahme wegen nicht allgemein den Satz aufstellen, dass jede Gerade, die mit u in einer Ebene liegt, einen Punkt mit u gemein hat. In der neueren Geometrie beseitigt man diese Ausnahme, indem man auch den parallelen Geraden p, u einen gemeinschaftlichen Punkt zuschreibt, nämlich einen „unendlich fernen" Punkt.

23 Nach der perspectiven Auffassung hat übrigens jede Gerade u nur einen einzigen unendlich fernen Punkt, weil nach einem Axiome Euklid's durch einen ausserhalb gegebenen Punkt S nur ein Parallelstrahl p zu u gezogen werden kann, und weil diesem Parallelstrahl mehr als ein mit u gemeinschaftlicher Punkt nicht zuzuschreiben ist, da auch jeder andere Strahl des Büschels S nur einen Punkt mit u gemein hat. Diese Auffassung bietet der älteren Ansicht gegenüber den Vortheil, dass jetzt viele Sätze ganz allgemein ausgesprochen werden können, bei denen sonst immer Ausnahmen anzuführen waren, und dass manche scheinbar verschiedene Sätze sich jetzt in einer einzigen Aussage zusammenfassen lassen. Uebrigens haben Sie sich wohl schon in der analytischen Geometrie mit der perspectiven Auffassung befreundet; auch dort pflegt man zwei in einer Ebene gelegene Gerade parallel zu nennen, wenn die Coordinaten ihres Schnittpunktes unendlich gross sind, der Schnittpunkt also in unendlicher Entfernung liegt.

24 Zu dem unendlich fernen Punkte einer Geraden gelangen wir, indem wir entweder nach der einen oder nach der andern Seite hin uns einen Punkt immer weiter auf der Geraden fortbewegt denken. Der unendlich ferne Punkt liegt also nach beiden Seiten hin auf der Geraden, oder sowohl nach der einen als auch nach der anderen Seite hin; und die Gerade erscheint als geschlossene Linie, deren beide Seiten durch den unendlich fernen Punkt zusammenhängen. Zu diesem Schlusse werden wir gezwungen, sobald wir die vorhin begründete Auffassung zulassen, dass jede Gerade einen, und nur einen unendlich fernen Punkt besitze. Wir werden später sehen, dass in derselben Weise die beiden Zweige einer Hyperbel als im Unendlichen zusammenhängend zu betrachten sind. Zu ganz ähnlichen Vorstellungen führt die Analysis, in-

dem sie an häufigen Beispielen, u. A. bei dem Tangens eines veränderlichen Winkels, zeigt, dass man nicht nur durch Null, sondern auch durch das Unendliche vom Positiven zum Negativen übergehen kann.

25 Weil wir somit in einer Geraden von einem Punkte zu jedem anderen gelangen können, indem wir den unendlich fernen Punkt überschreiten, so gilt jetzt der Satz: Unter vier Punkten einer Punktreihe sind nur zwei paar getrennte, ebenso wie es unter vier Elementen eines Büschels nur zwei paar getrennte giebt. Und wie ein Büschel durch zwei seiner Elemente in zwei vollkommene Winkel (Nebenwinkel) getheilt wird, so wird eine Punktreihe durch zwei ihrer Punkte in zwei Strecken getheilt, von denen jede die „Ergänzung" der anderen heisst. Eine dieser beiden Strecken enthält den unendlich fernen Punkt der Graden. Wenn der unendlich ferne Punkt einen der Grenzpunkte bildet, so werden die beiden Strecken auch wohl Halbstrahlen genannt.

26 Um den unendlich fernen Punkt einer Geraden von ihren in der Endlichkeit gelegenen Punkten zu unterscheiden, nennt man ihn einen „uneigentlichen" Punkt, und die anderen „eigentliche" Punkte der Geraden. Ebenso dürfte die soeben vorgetragene neuere Auffassung des Parallelismus als eine uneigentliche zu bezeichnen sein. Alle Parallelen, die sich in einer Ebene nach irgend einer Richtung ziehen lassen, haben nur einen unendlich fernen oder uneigentlichen Punkt mit einander gemein, den Punkt nämlich, welchen irgend eine von ihnen mit allen übrigen gemein hat. Die Parallelen können daher als ein Strahlenbüschel aufgefasst werden, dessen Mittelpunkt ein unendlich ferner Punkt der Ebene ist. Wir werden diesen Büschel einen Parallelstrahlenbüschel nennen, so oft eine Unterscheidung von anderen Strahlenbüscheln wünschenswerth erscheint. Ebenso ist unter einem Parallelstrahlenbündel die Gesammtheit aller im Raume möglichen parallelen Strahlen von bestimmter Richtung und aller durch sie gehenden Ebenen zu verstehen. — Ich mache Sie noch darauf aufmerksam, dass die Aussagen: „Parallele Gerade haben gleiche Richtung" und „sie enthalten denselben unendlich fernen Punkt" ganz das Nämliche bedeuten. Durch jede Richtung wird ein unendlich ferner Punkt bestimmt, und umgekehrt durch jeden uneigentlichen Punkt im Raume eine Richtung; wie denn auch durch jede eigentliche Gerade eine Richtung und ein unendlich ferner Punkt bestimmt wird, nämlich der auf ihr enthaltene.

Bezeichnet $n+1$ die unendlich grosse Anzahl der Ebenen eines Ebenenbündels, so enthält eine beliebige Punktreihe $n+1$ Punkte, weil sie als Schnitt des Büschels aufgefasst werden kann, und jeder Strahlen- oder Ebenenbüschel enthält als Schein von Punktreihen $n+1$ Strahlen resp. Ebenen (vgl. Seite 13). Jedes ebene Feld η aber enthält n^2+n+1 Punkte und n^2+n+1 Strahlen (von Staudt). Denn mit einem beliebigen Punkte S von η liegen n andere Punkte des Feldes auf jedem der $n+1$ Strahlen, die in η durch S gehen; einen beliebigen Strahl von η aber schneiden n andere Strahlen des Feldes in jedem seiner $n+1$ Punkte, sodass $n(n+1)+1$ die Anzahl der Punkte und der Geraden des Feldes ist. Eine beliebige Ebene enthält sonach doppelt unendlich viele oder $n.n$ eigentliche und einfach unendlich viele oder $n+1$ unendlich ferne Punkte. Jeder Strahlenbündel S enthält n^2+n+1 Ebenen und n^2+n+1 Strahlen. Denn eine beliebige Ebene α von S schneiden n andere Ebenen des Bündels in jedem der $n+1$ Strahlen, die in α durch S gehen, und mit einem beliebigen Strahle von S liegen n andere Strahlen des Bündels in jeder der $n+1$ Ebenen, die durch den Strahl gehen. — Der Raum enthält

$$n^3+n^2+n+1=(n+1)\,(n^2+1)$$

Punkte, nämlich n^3 oder dreifach unendlich viele eigentliche und n^2+n+1 unendlich ferne Punkte, ausserdem $(n+1)(n^2+1)$
oder n^3+n^2+n+1
Ebenen und

$$n^4+n^3+2n^2+n+1=(n^2+n+1)(n^2+1)$$

Gerade (von Staudt). Denn auf einer Geraden g liegen $n+1$ Punkte und jede der $n+1$ Ebenen von g projicirt n^2 der übrigen Punkte des Raumes; ferner wird g in jedem ihrer $n+1$ Punkte von n^2 der übrigen Ebenen geschnitten; eine beliebige Ebene aber enthält n^2+n+1 Gerade und wird in jedem ihrer n^2+n+1 Punkte von n^2 anderen Geraden des Raumes geschnitten. Der Raum enthält demnach dreifach unendlich viele Punkte und Ebenen, dagegen vierfach unendlich viele Gerade.

27 Von den unendlich fernen Punkten einer Ebene wird angenommen, dass sie in einer unendlich fernen oder „uneigentlichen“ Linie liegen. Diese Linie muss als eine Gerade angesehen werden, weil sie von jeder eigentlichen Geraden der Ebene in nur einem Punkte, dem unendlich fernen Punkte der Geraden, geschnitten wird; denn krumme Linien können mit einer Geraden mehr als einen Punkt gemein haben. Ein anderer Grund für diese Ansicht liegt darin, dass nach der perspectiven Auffassung zwei

parallele Ebenen ihre sämmtlichen unendlich fernen Punkte mit einander gemein haben müssen. Werden sie nämlich von irgend einer dritten Ebene in zwei eigentlichen Geraden geschnitten, so können diese sich in keinem eigentlichen Punkte schneiden, sind also, da sie in einer Ebene liegen, parallel und haben folglich einen unendlich fernen Punkt beider Ebenen mit einander gemein. Auf diese Art wird bewiesen, dass jeder unendlich ferne Punkt der einen Ebene auch in der anderen liegt. Weil aber zwei sich schneidende Ebenen immer nur eine einzige Grade mit einander gemein haben, so schreibt man auch zwei parallelen Ebenen nur eine einzige gemeinschaftliche Gerade zu.

28 Wie von parallelen Geraden gesagt wird, sie haben dieselbe Richtung, so sagt man von parallelen Ebenen, sie haben dieselbe Stellung; gleichwie also in jeder Richtung ein unendlich ferner Punkt liegt, so liegt in jeder Stellung eine unendlich ferne Gerade. Alle parallelen Ebenen, die im Raume in irgend einer Stellung denkbar sind, gehen durch eine und dieselbe unendlich ferne Gerade, durch die Gerade nämlich, die irgend eine dieser Ebenen mit allen übrigen gemein hat. Parallele Ebenen können deshalb als ein Ebenenbüschel aufgefasst werden, dessen Axe eine unendlich ferne Gerade ist; dieser Büschel wird ein Parallel-Ebenenbüschel genannt.

29 Von den unendlich fernen Punkten und Linien des Raumes wird angenommen, dass sie in einer unendlich fernen oder uneigentlichen Fläche liegen; diese Fläche muss als eine Ebene betrachtet werden, weil sie von jeder eigentlichen Geraden in nur einem Punkte und von jeder eigentlichen Ebene in einer Geraden geschnitten wird. Die unendlich ferne oder „uneigentliche" Ebene ist allen Parallelstrahlenbündeln und allen Parallelebenenbüscheln gemeinschaftlich, weil sie durch die Mittelpunkte jener Bündel und durch die Axen dieser Büschel geht. Ebenso ist die unendlich ferne Gerade einer Ebene ein gemeinschaftlicher Strahl von allen in der Ebene gelegenen Parallelstrahlenbüscheln, weil sie durch deren Mittelpunkte geht. Der unendlich fernen Geraden einer Ebene kann deshalb keine bestimmte Richtung beigelegt werden, sondern sie enthält die Richtungen (die unendlich fernen Punkte) aller Geraden der Ebene.

30 Auf die unendlich fernen oder uneigentlichen Elemente wird noch einiges Licht geworfen durch die Beziehungen, die sich zwischen den Grundgebilden aufstellen lassen. Zwei Gebilde von derselben Stufe heissen nämlich „auf einander bezogen", wenn jedem Elemente eines beliebigen von ihnen ein Element des anderen zugewiesen ist. Zwei

so zu einander gehörige Elemente der Gebilde heissen „einander entsprechende“ oder „homologe“ Elemente. Wenn zwei Grundgebilde auf ein drittes bezogen sind, so sind sie auch auf einander bezogen. Denn jedem Elemente des dritten entspricht je ein Element der beiden anderen Grundgebilde, und diese beiden Elemente sind dadurch auch einander zugewiesen.

31 Am einfachsten und anschaulichsten bezieht man zwei ungleichartige Grundgebilde dadurch auf einander, dass man das eine als Schnitt oder Schein des anderen auffasst. Liegt z. B. (Fig. 6) ein Strahlenbüschel S mit einer nicht durch seinen Mit-

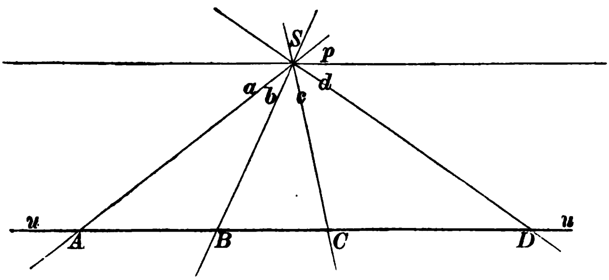


Fig. 6.

telpunkt gehenden Punktreihe u in einer Ebene, so können wir jedem Strahle des Büschels den auf ihm gelegenen Punkt der Punktreihe zuweisen. Dem Parallelstrahl p von S entspricht dann der unendlich ferne Punkt von u. Wird ein ebenes Feld η als Schnitt eines Strahlenbündels S betrachtet, dessen Mittelpunkt ausserhalb η liegt, so sind η und S in der Art auf einander bezogen, dass jedem Punkte von η der durch ihn gehende Strahl von S entspricht, und jeder Geraden von η die durch sie gehende Ebene von S. Der zu η parallelen Ebene von S entspricht daher die unendlich ferne Gerade von η, und jedem in dieser Ebene gelegenen Strahle von S ist sein in η liegender unendlich ferner Punkt zugewiesen. Jedem Ebenenbüschel von S entspricht sein Schnitt mit η, also ein Strahlenbüschel; dieser ist ein Parallelstrahlenbüschel, wenn die Axe des Ebenenbüschels zu η parallel läuft. Ist S ein Parallelstrahlenbündel, liegt also sein Mittelpunkt unendlich fern, so entspricht jedem eigentlichen Punkte von η ein eigentlicher Strahl von S, und jedem uneigentlichen Elemente ein uneigentliches Element. Ist η die unendlich ferne Ebene und S ein eigentlicher Punkt, so entspricht jedem Strahle von S sein unendlich ferner Punkt, jeder Ebene von S ihre unendlich ferne Gerade, jedem Strahlenbüschel eine unendlich ferne Punktreihe, und jedem Ebenenbüschel ein unendlich ferner Strahlenbüschel.

32 Zwei gleichartige Grundgebilde können am einfachsten dadurch auf einander bezogen werden, dass man sie als Schnitte oder Scheine eines und desselben dritten Grundgebildes betrachtet. So entsprechen einander in zwei Strahlenbüscheln oder Punktreihen, die als Schnitte eines Ebenenbüschels aufgefasst werden, je zwei solche Strahlen resp. Punkte, die in derselben Ebene des Ebenenbüschels liegen. Andererseits sind zwei Strahlenbüschel S, S_1 (Fig. 7) auch dann auf einander bezogen, wenn sie Scheine einer Punktreihe u sind; zwei ihrer Strahlen, wie a und a_1 oder b und b_1, entsprechen einander, wenn sie sich in einem Punkte der Reihe schneiden. Werden zwei in einer Ebene liegende Punktreihen u, u_1 (Fig. 8) als Schnitte eines Strahlenbüschels S betrachtet, so ist beachtenswerth, dass dem unendlich fernen Punkte P oder Q_1 der einen im Allgemeinen ein eigentlicher Punkt P_1 resp. Q der anderen Reihe entspricht.

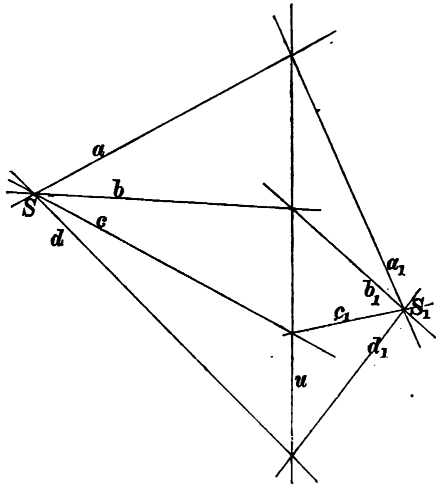


Fig. 7.

Zwei ebene Felder sind auf einander bezogen, wenn sie Schnitte eines und desselben Strahlenbündels sind. Eine ausgedehnte ebene Landschaft z. B. und ihr perspectives Bild, das wir erhalten, wenn wir ihren durch unser Auge gehenden Schein mit irgend einer (z. B. einer verticalen) Ebene schneiden, sind auf einander bezogen; und zwar entsprechen zwei Punkte der Landschaft und des Bildes einander, wenn sie mit dem Auge in einer Geraden liegen. Jeder Geraden der Landschaft entspricht eine Gerade des Bildes, und beide Gerade liegen mit dem Auge in einer Ebene. Der unendlich fernen Geraden der Landschaft (dem Horizont) entspricht im Allgemeinen eine eigentliche Gerade des Bildes, und hierin liegt wieder ein Grund, die unendlich ferne Linie einer Ebene als eine gerade Linie aufzufassen. Von zwei in der angegebenen Weise auf einander bezogenen Feldern sagt man wohl auch, das eine sei eine „Projection“ des anderen, und der Mittelpunkt des Bündels, der von beiden Feldern zugleich ein Schein ist, heisst das „Projections-Centrum“. Liegt dieser Mittel-

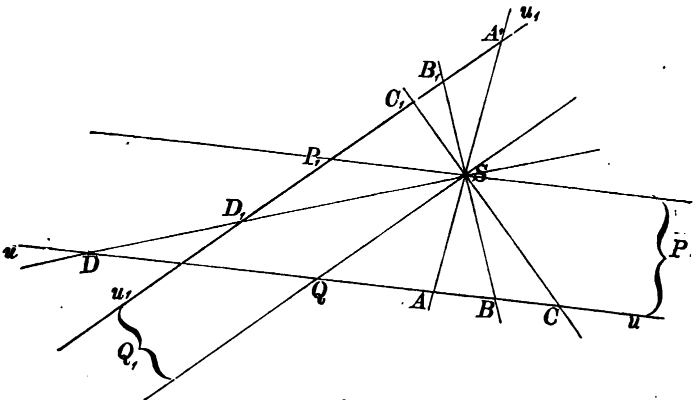


Fig. 8.

punkt unendlich fern, ist also der Bündel ein Parallelstrahlenbündel, so geht diese Art der Projection über in die gewöhnliche Parallelprojection der darstellenden Geometrie.

Zwei Strahlenbündel können dadurch auf einander bezogen werden, dass man sie als Scheine eines und desselben ebenen Feldes auffasst. Jeder Strahl des einen Bündels schneidet dann den entsprechenden Strahl des anderen in einem Punkte des Feldes, und je zwei homologe Ebenen der Bündel haben eine Gerade des Feldes zur Schnittlinie. Die Scheine einer ebenen Landschaft aus zwei verschiedenen Punkten sind solche Bündel.

33 Die nähere Erörterung dieses Beziehens von zwei Grundgebilden auf einander muss ich vorläufig Ihrer eigenen Forschung überlassen; ich bemerke nur noch, dass die Grundgebilde noch in viel mannigfaltigerer Weise auf einander bezogen werden können. So z. B. können zwei ebene Felder auch dadurch auf einander bezogen werden, dass man sie auf ein und dasselbe dritte Feld bezieht. Um bei einem wiederholt gebrauchten Beispiele zu bleiben, so mögen Sie sich aus zwei verschiedenen Projectionscentren perspective Bilder einer Landschaft hergestellt denken. Zwei solche Bilder oder ebene Felder sind dann auch auf einander bezogen,

weil jedes auf die Landschaft bezogen ist; und zwar entsprechen zwei ihrer Punkte einander, wenn sie von demselben Punkte der Landschaft die Projectionen sind. Einer Geraden des einen Bildes wird dann allemal eine Gerade des anderen entsprechen. Diese ebenen Felder haben aber im Allgemeinen nicht mehr die besondere Lage zu einander, die vorhin erörtert wurde, dass nämlich je zwei einander entsprechende Gerade in einer Ebene liegen und die Verbindungslinien homologer Punkte sich alle in einem bestimmten Punkte schneiden. Wir werden die gegenseitigen Beziehungen von zwei so auf einander bezogenen Feldern später noch genauer zu untersuchen haben. Uebrigens können zwei Felder auch derartig auf einander bezogen werden, dass jeder Geraden des einen eine Curve im anderen entspricht, oder so, dass jedem Punkte des einen Feldes eine Gerade des anderen und umgekehrt jeder Geraden des ersteren ein Punkt des letzteren Feldes entspricht. Vor der Hand überlasse ich es Ihrer Einbildungskraft, sich hier die mannigfaltigsten Beziehungen der Grundgebilde zu einander auszudenken.

Dritter Vortrag.

Das Princip der Reciprocität oder Dualität. Einfache und vollständige *n*ecke, *n*seite, *n*kante u. s. w.

---

34 Bevor ich die Beziehungen weiter entwickle, die sich zwischen den Grundgebilden der neueren Geometrie aufstellen lassen, muss ich auf ein geometrisches Princip aufmerksam machen, das in meinen Vorträgen eine wichtige Stelle einnehmen wird; denn es erleichtert das Studium der Geometrie der Lage ausserordentlich, indem es ihren umfangreichen Lehrstoff in zwei grosse Hälften theilt und diese so einander gegenüberstellt, dass die eine Hälfte sich sofort aus der anderen ergiebt. Dieses „Princip der Reciprocität oder Dualität“ wurde in elementarer Weise zuerst von

Gergonne*) begründet, nachdem schon vorher Poncelet**) mittelst der Polarentheorie nachgewiesen hatte, dass zu jedem Raumgebilde ein ihm dual gegenüberstehendes construirt werden kann.

35 Obwohl das Dualitätsprincip in der Geometrie des Masses nicht recht zur Geltung gebracht werden kann, so giebt es doch auch in der älteren Geometrie manche Sätze, die geradezu darauf hinweisen, und an die ich nur zu erinnern brauche, um Ihnen das Princip zum Bewusstsein zu bringen. Im Raume nämlich stehen der Punkt und die Ebene einander als „reciproke Elemente" gegenüber, und jeder Satz der Geometrie der Lage findet seine reciproke Ergänzung in einem anderen, den man aus dem ersteren ableitet, indem man die Ausdrücke Punkt und Ebene und daher auch Punktreihe und Ebenenbüschel, Strecke und Flächenwinkel etc. mit einander vertauscht. Gewöhnlich werden zwei solche „reciproke" Sätze wie die beiden Seiten eines Satzes neben einander gestellt; z. B.:

Zwei Punkte A, B bestimmen eine Gerade AB, nämlich ihre Verbindungslinie.	Zwei Ebenen α, β bestimmen eine Gerade $\alpha\beta$, nämlich ihre Schnittlinie.
Eine Gerade a und ein nicht auf ihr liegender Punkt B bestimmen eine Ebene aB, die durch beide geht.	Eine Gerade a und eine nicht durch sie gehende Ebene β bestimmen einen Punkt $a\beta$, der auf beiden liegt.
Drei Punkte A, B, C, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmen eine Ebene ABC (die Verbindungsebene).	Drei Ebenen α, β, γ, die nicht durch eine Gerade gehen, bestimmen einen Punkt $\alpha\beta\gamma$ (den Schnittpunkt).
Zwei Gerade a, b, die einen Punkt gemein haben, liegen in einer Ebene ab.	Zwei Gerade a, b, die in einer Ebene liegen, haben einen Punkt ab gemein.

36 Sie werden, beiläufig gesagt, schon bei diesen wenigen Sätzen bemerken, wie zweckmässig die Einführung der unendlich fernen oder uneigentlichen Elemente in die Geometrie sich erweist. Ohne sie hätten wir alle diese Sätze nicht allgemein aussprechen können, sondern von ihnen noch specielle Fälle als Ausnahmen oder Zusätze besonders hervorheben müssen. Der erste Satz rechts z. B. würde gelautet haben: „Zwei Ebenen α, β bestimmen entweder eine Gerade $\alpha\beta$, oder sie sind parallel"; während nach der neueren

*) Gergonne, Annales de Mathématiques T. XVI, 1826.

**) Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1822, p. 105—125 und Annales de Mathématiques XVIII p. 125.

Auffassungsweise auch im letzteren Falle eine Gerade bestimmt wird, nämlich die unendlich ferne Gerade der Ebenen. Ebenso hätten wir bei dem ersten Satz links mehrere Fälle unterscheiden müssen, jenachdem beide gegebene Punkte A, B eigentliche Punkte sind oder nicht. Wir hätten ihn demnach so aussprechen müssen: „Durch zwei (eigentliche) Punkte, oder durch einen Punkt und eine Richtung ist eine Gerade bestimmt"; während nach der perspectiven Ansicht der letztere Fall dem ersteren einfach dadurch untergeordnet ist, dass unter den gegebenen Punkten auch unendlich ferne zugelassen werden. Aehnliche Bemerkungen werden Sie selbst leicht an jeden der übrigen Sätze knüpfen können.

37 Der Kürze halber nennt man „incident" zwei Gerade, wenn sie sich schneiden, eine Gerade oder Ebene und einen Punkt, wenn dieser in jener liegt, endlich einen Strahl oder Punkt und eine Ebene, wenn letztere durch ersteren geht. Nicht incidente Gerade
38 heissen windschief. Die obigen Sätze nun führen zu folgenden Aufgaben „ersten Grades", die wir künftig als immer ausführbar betrachten werden: Postulate.

Durch zwei Punkte eine Gerade zu legen.	Die Schnittlinie von zwei Ebenen zu finden.
Durch eine Gerade und einen nicht mit ihr incidenten Punkt eine Ebene zu legen.	Von einer Geraden und einer nicht mit ihr incidenten Ebene den Schnittpunkt zu finden.
Durch drei Punkte eine Ebene zu legen.	Von drei Ebenen den Schnittpunkt zu finden.
Durch zwei incidente Gerade eine Ebene zu legen.	Von zwei incidenten Geraden den Schnittpunkt zu finden.

39 Zur Uebung will ich noch einige oft benutzte Doppelsätze anführen. Ich rathe Ihnen sehr an, zu der einen Hälfte jedes dieser Doppelsätze die andere reciproke Hälfte selbst abzuleiten.

Sind vier Punkte A, B, C, D gegeben und schneiden sich die Verbindungslinien AB und CD, so sind auch AC und BD, sowie AD und BC incident. Denn die vier Punkte und ihre sechs Verbindungslinien liegen in einer Ebene.	Sind vier Ebenen α, β, γ, δ gegeben und sind ihre Schnittlinien $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ incident, so müssen auch $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$, sowie $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$ sich schneiden. Denn die vier Ebenen und ihre sechs Schnittlinien gehen alle durch einen Punkt.

Wenn von beliebig vielen Geraden je zwei sich schneiden, aber nicht alle durch einen Punkt gehen, so liegen sie alle in einer Ebene.

in einer Ebene liegen, so gehen sie alle durch einen Punkt.

Häufig steht ein Satz sich selbst reciprok gegenüber, wenn Punkt und Ebene in symmetrischer Weise in ihm vorkommen; z. B. die Aufgabe: In einer Ebene durch einen in ihr gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, die eine beliebig gegebene Gerade schneidet. Hier stehen zwei Auflösungen einander reciprok gegenüber:

Entweder verbinde man den Schnittpunkt der Geraden und der Ebene mit dem gegebenen Punkte;

oder man lege durch die Gerade und den Punkt eine Ebene und suche deren Schnittlinie mit der gegebenen Ebene.

Auf diese Aufgabe lassen sich die folgenden leicht zurückführen:

Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, dass sie zwei gegebene Gerade schneidet, die mit dem Punkte nicht in einer Ebene liegen. Man lege nämlich durch den gegebenen Punkt und eine der gegebenen Geraden eine Ebene,

In einer gegebenen Ebene eine Gerade so zu ziehen, dass sie zwei gegebene Gerade schneidet, die mit der Ebene nicht einen und denselben Punkt gemein haben. Man bestimme den Schnittpunkt der gegebenen Ebene mit einer der gegebenen Geraden,

so ist die Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt.

Die Aufgabe: „Eine Gerade so zu ziehen, dass sie drei gegebene schneidet", steht wieder sich selbst gegenüber. Entweder kann man in der einen Geraden einen Punkt annehmen, oder durch sie eine Ebene legen, und sodann nach den Angaben der vorhergehenden Doppelaufgabe eine Gerade suchen, die diesen Punkt enthält oder in dieser Ebene liegt und die beiden anderen gegebenen Geraden schneidet.

40 Auch die Grundgebilde können einander als reciproke Gebilde gegenübergestellt werden, z. B. das ebene Feld und der Strahlenbündel schon deshalb, weil ihre Träger, nämlich die Ebene und der Punkt, reciproke Elemente sind. Es stehen sodann einander gegenüber:

im ebenen Felde:

der Punkt; die Punktreihe; der Strahl als Verbindungslinie von Punkten; der Strahlenbüschel etc.

und im Strahlenbündel:

die Ebene; der Ebenenbüschel; der Strahl als Schnittlinie von Ebenen; der Strahlenbüschel etc.

Ihnen wird hier wie bei manchen früheren Sätzen die Be-

merkung sich aufdrängen, dass im Raume die Gerade oder der Strahl sich selbst reciprok gegenübersteht. Wirklich nimmt die Gerade eine Zwischenstellung ein zwischen den reciproken Ele-
41 menten Punkt und Ebene. Als Beispiel eines Doppelsatzes, worin das ebene Feld und der Strahlenbündel als reciproke Gebilde einander gegenüberstehen, diene der folgende:

Werden zwei Felder dadurch auf einander bezogen, dass man sie als Schnitte eines und desselben Bündels betrachtet, so liegen je zwei einander entsprechende Elemente (Punkte oder Gerade) der Felder auf einem und demselben Elemente (Strahl oder Ebene) des Bündels. Die Schnittlinie der beiden Ebenen fällt mit ihrer entsprechenden Geraden zusammen und entspricht sich selbst; dasselbe gilt von jedem Punkte der Schnittlinie. Die beiden ebenen Felder haben also eine Punktreihe „entsprechend gemein".

Werden zwei Bündel dadurch auf einander bezogen, dass man sie als Scheine eines und desselben Feldes betrachtet, so gehen je zwei homologe Elemente (Strahlen oder Ebenen) der Bündel durch ein und dasselbe Element (Punkt oder Gerade) des Feldes. Der gemeinschaftliche Strahl der beiden Bündel fällt mit seinem entsprechenden Strahle zusammen und entspricht sich selbst; dasselbe gilt von jeder Ebene durch diesen Strahl. Die beiden Bündel haben also einen Ebenenbüschel „entsprechend gemein".

42 Wenn nämlich zwei Gebilde auf einander bezogen sind und ein Element des einen mit dem ihm entsprechenden Elemente des anderen zusammenfällt, d. h. identisch ist, so sagt man, „die beiden Gebilde haben dieses Element (Doppelelement) entsprechend gemein".

43 Wie im Raume der Punkt und die Ebene, so stehen in der Ebene der Punkt und die Gerade, daher auch die Punktreihe und der Strahlenbüschel, die Strecke und der Winkel etc. als reciproke Gebilde einander gegenüber; ebenso im Strahlenbündel der Strahl und die Ebene, der Strahlenbüschel und der Ebenenbüschel etc. Z. B.:

α_1) Je zwei Punkte einer Ebene bestimmen eine Gerade.

α_2) Je zwei Gerade einer Ebene bestimmen einen Punkt.

α_3) Je zwei Strahlen eines Bündels bestimmen eine Ebene.

α_4) Je zwei Ebenen eines Bündels bestimmen einen Strahl.

Eine ebene Curve (Fig. 9) kann aufgefasst werden als stetige Aufeinanderfolge

einerseits von Punkten der Ebene,	andererseits von Geraden der Ebene (Tangenten).

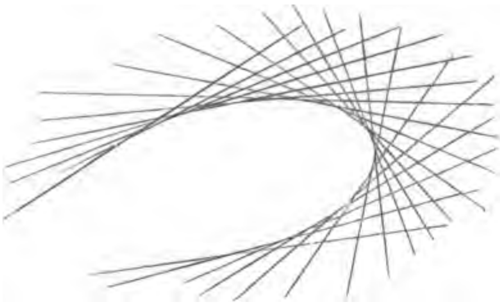


Fig. 9.

Und zwar werden Sie finden, dass in der neueren Geometrie die letztere Auffassung ebenso häufig in Anwendung gebracht wird, wie die erstere. Ebenso kann eine conische Fläche aufgefasst werden als stetige Mannigfaltigkeit

einerseits von Strahlen eines Bündels,	andererseits von Ebenen des Bündels (ihrer Berührungsebenen).

44 Von vier solchen zusammengehörigen Sätzen können immer die beiden auf den Strahlenbündel bezüglichen dadurch aus den beiden übrigen planimetrischen abgeleitet werden, dass man das ebene Feld aus irgend einem Mittelpunkte durch einen Strahlenbündel projicirt. In der Regel werde ich deshalb künftig nur die beiden planimetrischen Sätze anführen, und es Ihnen überlassen, die anderen beiden selbst aufzusuchen. Im Raume, wo Punkt und Ebene reciproke Elemente sind, stehen der erste und letzte (wie α_1 und α_4), sowie der zweite und dritte (wie α_2 und α_3) von je vier solchen Sätzen einander als reciproke Sätze gegenüber.

45 Das Princip der Dualität wird Ihnen im Laufe unserer Untersuchungen noch immer klarer und geläufiger werden; doch kann ich erst nach einer Reihe von Entwickelungen über die einförmigen Grundgebilde den Beweis führen, dass es in der Geometrie der Lage allgemeine Geltung hat, und dass wirklich jedem ihrer Sätze ein reciproker Satz entspricht. Bis dahin werde ich meine

Vorträge so einrichten, dass reoiproke Sätze einander gehörig gegenübergestellt werden, und ihren Beweis werde ich so führen, dass der Dualismus deutlich hervortritt. Doch ist zu dem Ende nothwendig, dass ich Ihnen noch gewisse reciproke Begriffe vorher entwickele, und namentlich auch einige der geometrischen Begriffe modificire, die Sie aus der Geometrie des Masses mit herübergebracht haben in die neuere Geometrie.

46 Ich meine hier besonders den Begriff des *n*ecks. In der neueren Geometrie verstehen wir unter einem „einfachen ebenen *n*eck“ in der Regel nicht ein Stück der Ebene, das von *n* sich schneidenden Geraden allseitig begrenzt wird, sondern *n* Punkte einer Ebene und die *n* Geraden oder Seiten, die von den *n* Punkten (Eckpunkten) je zwei auf einander folgende verbinden. Die *n* Punkte denken wir uns in bestimmter Reihenfolge, und nehmen an, dass von ihnen keine drei aufeinander folgende in gerader Linie liegen.

Das einfache *n*eck kann auch „einfaches *n*seit“ genannt werden; nämlich ein einfaches *n*seit besteht aus *n* Geraden der Ebene (Seiten) und den *n* Punkten, in denen je zwei aufeinander folgende Gerade sich schneiden. Das *n*eck und das *n*seit sind reciproke Gebilde; den Verbindungslinien von je zwei nicht aufeinander folgenden Eckpunkten, d. h. den Diagonalen eines einfachen *n*ecks stehen im einfachen *n*seit die Schnittpunkte von je zwei
47 nicht aufeinanderfolgenden Seiten gegenüber. In der Geometrie des Masses, wo unter einem *n*eck ein Stück der Ebene verstanden wird, schliesst man verschlungene *n*ecke, wie das Fünfeck $ABCDE$ (Fig. 10) oder das Sechseck $ABCDEF$ (Fig. 11) in der Regel

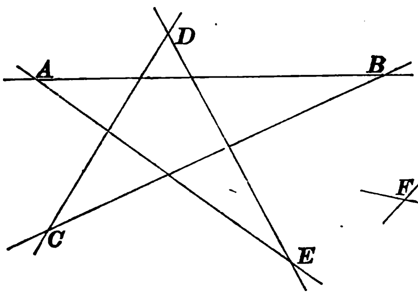


Fig. 10.

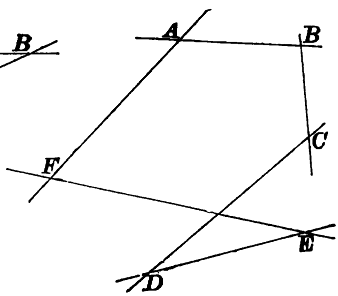


Fig. 11.

aus. Die *n*ecke und *n*seite der neueren Geometrie geben zu einer solchen Ausschliessung um so weniger Anlass, als man sich ihre

Seiten als unbegrenzt vorzustellen hat. Wohl aber kann man auch hier von den $2n$ Elementen (Eckpunkten und Seiten) eines einfachen $n$ecks oder $n$seits je zwei solche „einander gegenüber liegend“ nennen, die in dem einen wie im anderen Sinne durch die halbe Anzahl der übrigen Elemente von einander getrennt sind, also allgemein das m^{te} und das $n + m^{\text{te}}$ der aufeinander folgenden Elemente. So z. B. liegen im Fünfeck $ABCDE$ (Fig. 10) je ein Eckpunkt und eine Seite einander gegenüber, nämlich A und CD, B und DE, C und EA etc.; im Sechseck oder Sechsseit $ABCDEF$ dagegen (Fig. 11) liegen je zwei Eckpunkte und je zwei Seiten einander gegenüber, nämlich A und D, AB und DE, B und E, BC und EF, u. s. w.

48 Ausser den einfachen kennt die neuere Geometrie noch „vollständige $n$ecke und $n$seite“, und gerade an diesen Gebilden lässt sich wiederum das Dualitätsprincip deutlich erkennen.

Ein vollständiges ebenes $n$eck besteht aus n Punkten der Ebene und ihren sämtlichen Verbindungslinien (Seiten). Ein einfaches $n$eck bildet also mit seinen Diagonalen ein vollständiges $n$eck.

Ein vollständiges ebenes $n$seit besteht aus n Geraden der Ebene und ihren sämtlichen Schnittpunkten (Eckpunkten). Ein einfaches $n$seit bildet mit den Schnittpunkten seiner Seiten ein vollständiges $n$seit.

Hierbei wird angenommen, dass im $n$eck keine drei Eckpunkte auf einer Geraden liegen und im $n$seit keine drei Seiten durch einen Punkt gehen.

In jedem Eckpunkte schneiden sich $n-1$ Seiten des vollständigen $n$ecks; diese gehen durch die übrigen $n-1$ Eckpunkte. Somit ist $\frac{n(n-1)}{2}$ die Anzahl aller Seiten des vollständigen $n$ecks.

Auf jeder Seite liegen $n-1$ Eckpunkte des vollständigen $n$seits; durch diese Eckpunkte gehen die übrigen $n-1$ Seiten. Somit ist $\frac{n(n-1)}{2}$ die Anzahl aller Eckpunkte des vollständigen $n$seits.

49 Im vollständigen $n$eck oder $n$seit sind mehrere einfache $n$ecke und $n$seite enthalten, sobald $n > 3$ ist. Insbesondere gilt Folgendes:

Ein vollständiges Viereck $ABCD$ (Fig. 12) hat sechs Seiten. Je zwei dieser Seiten, die nicht

Ein vollständiges Vierseit $abcd$ (Fig. 13) hat sechs Eckpunkte. Je zwei derselben, die nicht durch einen und denselben Eckpunkt gehen, also AB und CD, oder AC und BD, oder endlich AD und BC, sollen „Gegenseiten" des Vierecks heissen; es sind also drei paar Gegenseiten vorhanden. Das vollständige Viereck enthält drei einfache Vierecke $ABCD$, $ACDB$ und $ADBC$, deren Seiten aus je zwei paar Gegenseiten des vollständigen bestehen. Die drei Schnittpunkte der Gegenseiten heissen Nebeneckpunkte des Vierecks.

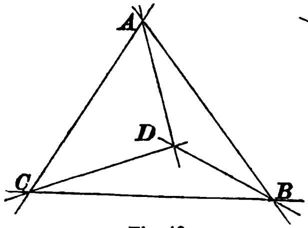


Fig. 12.

auf einer und derselben Seite liegen, also ab und cd, oder ac und bd, oder endlich ad und bc, sollen „Gegenpunkte" des Vierseits heissen; es sind drei paar Gegenpunkte vorhanden. Das vollständige Vierseit enthält drei einfache Vierseite $abcd$, $acdb$ und $adbc$, deren Eckpunkte aus je zwei paar Gegenpunkten des vollständigen bestehen. Die drei Verbindungslinien der Gegenpunkte heissen Nebenseiten oder „Diagonalen" des Vierseits.

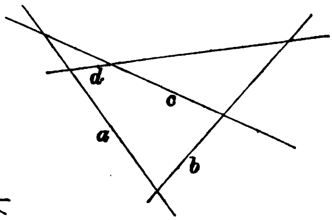


Fig. 13.

50 Die analogen Gebilde im Strahlenbündel ergeben sich am leichtesten durch Projiciren dieser ebenen Gebilde aus einem ausserhalb der Ebene gelegenen Punkte. Jedes ebene $n$eck wird durch ein „$n$kant" und jedes ebene $n$seit durch ein „$n$seit im Strahlenbündel" projicirt.

Ein vollständiges $n$kant besteht demnach aus n Strahlen eines Bündels und deren Verbindungsebenen (Seiten), wobei angenommen wird, dass keine drei der n Strahlen oder „Kanten" in einer Ebene liegen.

Ein vollständiges $n$seit im Strahlenbündel besteht aus n Ebenen des Bündels und deren Schnittlinien (Kanten); keine drei der n Ebenen oder „Seiten" gehen durch eine und dieselbe Gerade.

Es wird Ihnen ein Leichtes sein, die „einfachen" $n$kante und $n$seite im Strahlenbündel hiernach zu definieren, sowie zu den Eigenschaften der ebenen Gebilde analoge Eigenschaften der Gebilde im Strahlenbündel aufzufinden.
51 Ich schliesse diese Reihe von Definitionen mit der Erklärung der analogen räumlichen Gebilde.

Ein vollständiges räumliches *n*eck besteht aus *n* Punkten (Eckpunkten), von denen keine vier in einer Ebene liegen, aus den Geraden (Kanten), von denen jede zwei, und den Ebenen (Flächen), von denen jede drei der *n* Punkte verbindet.

Ein vollständiges *n*flach besteht aus *n* Ebenen (Flächen), von denen keine vier durch einen Punkt gehen, aus den Geraden (Kanten), in denen je zwei, und den Punkten (Eckpunkten), in denen je drei der *n* Ebenen sich schneiden.

Ich überlasse es Ihrer eigenen Forschung, die Anzahl der Kanten und Flächen eines räumlichen *n*ecks, sowie der Kanten und Eckpunkte eines *n*flachs zu bestimmen. Ich bemerke nur noch, dass im Raume das Viereck und das Vierflach oder Tetraeder nicht von einander verschieden sind, ebenso wenig wie in der Ebene das Dreieck und das Dreiseit. Dass gleichwohl auch bei dem Tetraeder das Princip der Reciprocität sich geltend macht, zeigt u. A. der Doppelsatz:

Die vier Eckpunkte und die sechs Kanten eines Tetraeders werden aus jedem Punkte, der in keiner seiner Flächen liegt, durch die vier Kanten und die sechs Seiten eines vollständigen Vierkants projicirt.

Die vier Flächen und die sechs Kanten eines Tetraeders werden von jeder Ebene, die durch keinen der Eckpunkte geht, in den vier Seiten und den sechs Eckpunkten eines vollständigen Vierseits geschnitten.

Sie werden hier bemerken, dass im Raume das vollständige ebene *n*eck dem vollständigen *n*seit im Strahlenbündel und das vollständige ebene *n*seit dem vollständigen *n*kant gegenübersteht, weil Punkt und Ebene reciproke Elemente sind.

Vierter Vortrag.

Das Beziehen vollständiger *n*ecke, *n*seite und *n*kante auf einander. Harmonische Gebilde.

52 Durch meine bisherigen Vorträge habe ich eine der mir vorliegenden Aufgaben zu lösen gesucht, nämlich die Aufgabe, Sie mit den wichtigsten, der neueren Geometrie eigenthümlichen Begriffen bekannt zu machen. Vielleicht haben Sie diese zahlreichen,

an einander gereihten Definitionen ein wenig ermüdet; doch war es nothwendig, sie Ihnen im Zusammenhange vorzuführen, damit wir später desto ungestörter die reichen Schätze, welche die Geometrie der Lage bietet, zu Tage fördern können.

Nunmehr werden wir zu den ersten eigentlichen Lehrsätzen der neueren Geometrie gelangen; denn die sehr einfachen, bisher angeführten Sätze habe ich mehr gelegentlich, um Ihnen die ungewohnten neuen Begriffe geläufiger zu machen und der Vollständigkeit wegen genannt, als weil sie alle zur Begründung der Geometrie der Lage durchaus nothwendig wären. Die Sätze aber von den harmonischen Punkten, Strahlen und Ebenen, die ich Ihnen jetzt entwickeln werde, sind als wirkliche Fundamentalsätze unserer Wissenschaft zu bezeichnen.

53 Die Eigenschaften der harmonischen Gebilde, deren ich schon in der Einleitung Erwähnung that, lassen sich am leichtesten beweisen mittelst einiger sehr einfacher Sätze über das Beziehen von *n*ecken, *n*seiten und *n*kanten auf einander. In ähnlicher Weise, wie wir früher die Grundgebilde auf einander bezogen haben, können wir nämlich auch bei diesen Arten von Gebilden jeder Ecke, Seite oder Kante des einen ein entsprechendes Element des anderen zuweisen. Ein Viereck z. B. kann auf ein

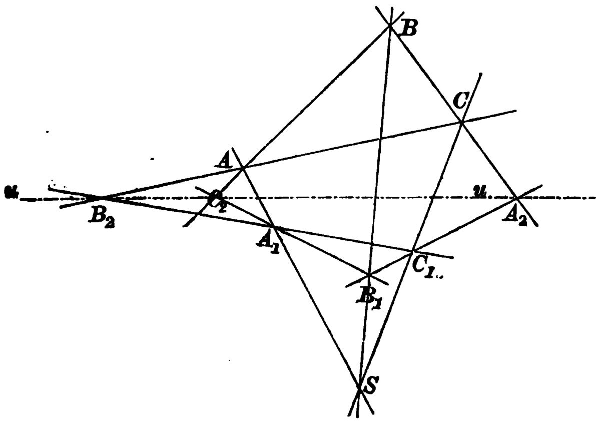


Fig. 3.

zweites bezogen werden, indem wir jedem Eckpunkte des ersteren einen Eckpunkt des letzteren zuweisen; dann wird auch jeder

Seite des einen Vierecks eine Seite des anderen entsprechen. Hier ergeben sich nun die evidenten Sätze:

Wenn zwei auf einander bezogene Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ (Fig. 3) in verschiedenen Ebenen liegen, und je zwei homologe Seiten, wie AB und A_1B_1, sich schneiden (natürlich auf der Schnittlinie u der beiden Dreiecksebenen), so bilden die Ebenen der drei Paare entsprechender Seiten ein Dreikant, von welchem die beiden Dreiecke Schnitte sind. Die Verbindungslinien AA_1, BB_1 und CC_1 homologer Eckpunkte schneiden sich daher in einem Punkte, nämlich in dem Mittelpunkte S des Dreikants.

Wenn zwei auf einander bezogene Dreikante (oder Dreiseite im Strahlenbündel) verschiedenen Strahlenbündeln angehören, und je zwei homologe Kanten sich schneiden, so bilden die drei Schnittpunkte ein Dreieck, von welchem die beiden Dreikante Scheine sind. Die Schnittlinien von je zwei homologen Ebenen (Seiten) der Dreikante liegen daher in der Ebene des Dreiecks, dessen Seiten sie sind.

54 Es wird Ihnen ein Leichtes sein, von jeder Hälfte dieses Doppelsatzes die Umkehrung aufzustellen. Wir finden mit seiner Hülfe:

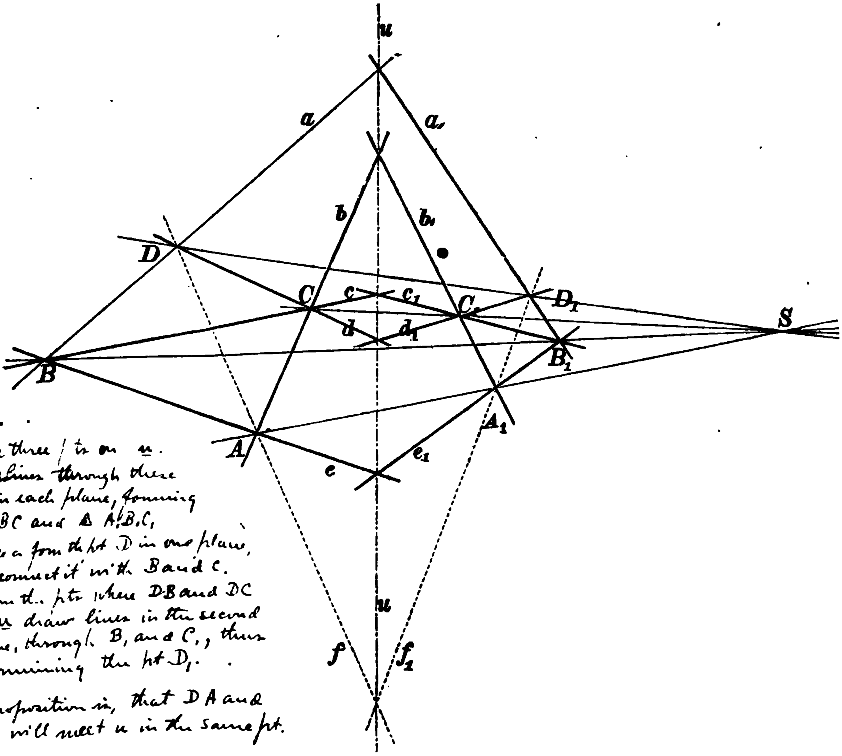
Wenn zwei auf einander bezogene vollständige Vierecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ (Fig. 14) in verschiedenen Ebenen liegen, deren Schnittlinie u durch keinen der acht Eckpunkte geht, und wenn fünf Seiten a, b, c, d, e des einen Vierecks die ihnen entsprechenden Seiten a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 des anderen (auf u) schneiden, so sind die beiden Vierecke Schnitte eines vollständigen Vierkants, weshalb auch ihre übrigen beiden Seiten f und f_1 sich schneiden.

Nach dem vorigen Satze schneiden sich nämlich sowohl die Linien AA_1, BB_1 und CC_1, als auch die Linien DD_1, BB_1 und

Wenn zwei auf einander bezogene vollständige Vierseite verschiedenen Strahlenbündeln angehören, deren gemeinschaftlicher Strahl in keiner der acht Seiten liegt, und wenn fünf Kanten des einen Vierseits die entsprechenden Kanten des anderen schneiden, so sind die beiden Vierseite Scheine eines vollständigen ebenen Vierseits, weshalb auch ihre beiden übrigen Kanten sich schneiden.

Die fünf Kanten des einen vollständigen Vierseits, die von den entsprechenden Kanten des anderen geschnitten werden, bestimmen nämlich zwei im Vierseit gelegene Dreiseite, deren

CC_1 in einem Punkte; die Geraden AA_1 und DD_1 begegnen



1/ Take three pts on u.
2/ Three lines through these pts, in each plane, forming △ABC and △$A_1B_1C_1$
3/ Take a from the pt D in one plane, and connect it with B and C.
4/ From the pts where DB and DC cut u draw lines in the second plane, through B_1 and C_1, thus determining the pt D_1.

The proposition is, that DA and D_1A_1 will meet u in the same pt.

Fig. 14.

sich also im Schnittpunkt S von BB_1 und CC_1, dem Mittelpunkt des im Satze angeführten Vierkants. Und da die Geraden f und f_1 in der durch AA_1 und DD_1 bestimmten Ebene liegen, so müssen sie sich gleichfalls schneiden.

Seiten von ihren entsprechenden nach dem vorigen Satze in je drei Seiten eines Dreiecks geschnitten werden. Diese beiden Dreiecke haben zwei Seiten gemein; sie liegen daher in einer Ebene und bestimmen das ebene Vierseit, von welchem die gegebenen Vierseite Scheine sind.

55 Um nicht zu weitläufig zu werden, will ich hier die Untersuchung rechts fallen lassen, und nur eines der links gewonnenen Ergebnisse benutzen, um die Lehre von den harmonischen Elementen zu begründen. Auch auf diesem Wege werden wir bald genug zu neuen Sätzen gelangen, die einander wie die bisherigen reciprok gegenüberstehen. Wir fanden soeben:

56 *Wenn von zwei auf einander bezogenen vollständigen Vierecken fünf Paare homologer Seiten sich schneiden in Punkten einer Geraden* u, *die durch keinen der acht Eckpunkte geht, so liegt auch der Schnittpunkt des sechsten Paares auf dieser Geraden.**)

Dieser Satz gilt nicht blos für den Fall, dass die Vierecke in verschiedenen Ebenen liegen. Denn wenn sie in derselben Ebene liegen, so können wir diesen Fall auf den schon erledigten dadurch zurückführen, dass wir das eine Viereck entweder um die Gerade u drehen aus der gegebenen Ebene heraus, oder es auf eine zweite durch u gelegte Ebene aus einem beliebigen Mittelpunkte projiciren. In beiden Fällen ergiebt sich sofort, dass durch den Schnittpunkt von u mit der sechsten Seite dieses Vierecks auch die sechste Seite des andern Vierecks hindurchgeht. — Ist u eine unendlich ferne Gerade, so lautet beiläufig bemerkt unser Satz: Wenn von zwei auf einander bezogenen vollständigen Vierecken fünf paar homologe Seiten parallel sind, so laufen auch die letzten beiden Seiten parallel.

57 Wir können nun folgende Definition aufstellen:

Vier Punkte A, B, C, D *einer Geraden heissen vier harmonische Punkte und bilden eine harmonische Punktreihe, wenn sie zu einem Viereck solche Lage haben, dass im ersten und im dritten von ihnen je zwei Gegenseiten des Vierecks sich schneiden, und durch den zweiten und den vierten Punkt seine beiden Diagonalen gehen.*

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich dann sofort der wichtige Satz:

Durch drei Punkte A, B, C *einer Geraden und ihre Reihenfolge ist der vierte harmonische Punkt* D *völlig bestimmt.*

Nämlich man findet D durch Construction irgend eines Vierecks $KLMN$ (Fig. 15), von welchem eine Diagonale LN durch den zweiten Punkt B geht, zwei Gegenseiten KL und MN aber sich im ersten Punkte A, und die anderen beiden Gegenseiten LM und NK sich im dritten Punkte C schneiden; die zweite Diagonale KM geht durch D. Construirt man ein anderes Viereck $K_1L_1M_1N_1$,

*) Im 12. Vortrage über Involutionen werden wir andere Vierecke kennen lernen, die nicht mittelst ihrer Eckpunkte auf einander bezogen und niemals Schnitte eines Vierkants sind, deren Seiten sich aber doch paarweise in sechs Punkten einer Geraden schneiden.

das zu A, B und C analog liegt wie $KLMN$, so muss nach dem vorigen Satze (Seite 38) auch dessen zweite Diagonale K_1M_1

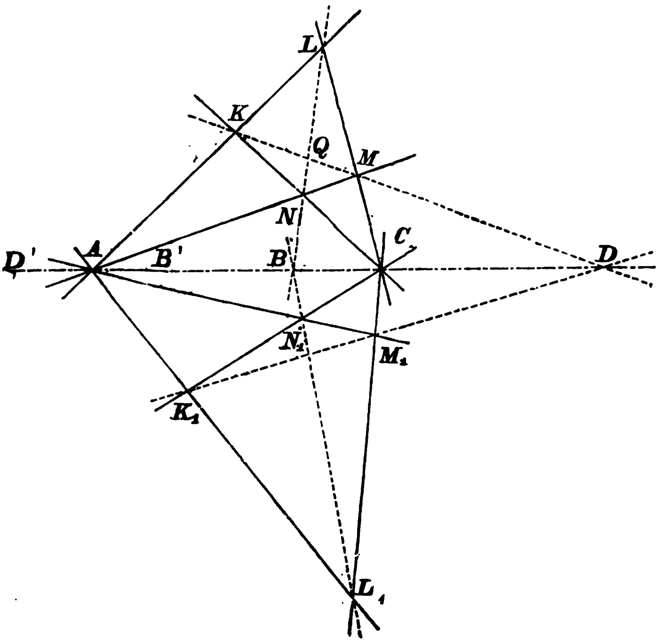


Fig. 15.

(als sechste Seite des vollständigen Vierecks $K_1L_1M_1N_1$) durch den Schnittpunkt D von KM und ABC gehen.

Die Punkte B, D *auf den Diagonalen sind durch die Schnittpunkte* A, C *der zwei paar Gegenseiten von einander getrennt und heissen deshalb „harmonisch getrennt durch* A *und* C *(oder nach Steiner „zugeordnete“ harmonische Punkte)“.*

58 Projiciren wir nämlich die Punkte A, B, C, D aus einem beliebigen Mittelpunkt auf eine andere Gerade, so sind die Projectionsstrahlen und folglich auch die Projectionen von einem Paare getrennter Punkte durch die des anderen Paares von einander getrennt. Ist nun Q (Fig. 15) der Schnittpunkt der Diagonalen KM und LN des Vierecks $KLMN$, so ist $KQMD$ eine Projection von $ABCD$ aus dem Punkte L und $MQKD$ eine solche aus dem Punkte N. Wäre also A nicht von C sondern etwa von B durch die übrigen beiden Punkte getrennt, so müsste einerseits K von Q, andererseits aber auch M von Q getrennt

sein, was unmöglich ist, weil Q nur von einem der drei Punkte K, M, D durch die übrigen beiden getrennt sein kann. Wäre dagegen A von D getrennt, so müsste K von D und zugleich M von D getrennt sein, was ebenfalls unmöglich ist. Folglich ist A von C getrennt durch die Punkte B und D.

59 Aus einem nicht in der Ebene des Vierecks gelegenen Punkte (z. B. aus Ihrem Auge) wird das vollständige Viereck durch ein vollständiges Vierkant projicirt, die harmonische Punktreihe aber durch einen Büschel von vier Strahlen, welche „vier harmonische Strahlen" oder ein „harmonischer Strahlenbüschel" genannt werden. Die harmonischen Strahlen haben die Eigenschaft, dass sie von jeder nicht durch ihren Mittelpunkt gehenden Ebene in vier harmonischen Punkten A_1, B_1, C_1, D_1 geschnitten werden. Denn die Ebene schneidet das vollständige Vierkant in einem Viereck, von welchem sich zwei Gegenseiten in A_1, zwei andere in C_1 schneiden und die übrigen beiden Seiten durch resp. B_1 und D_1 gehen.

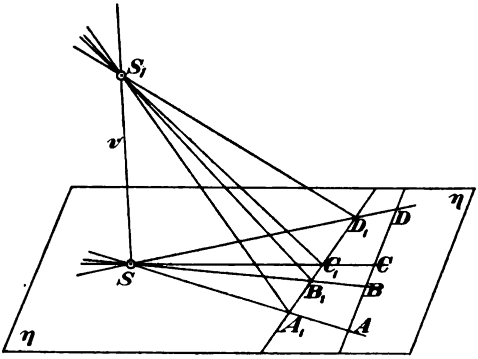


Fig. 16.

60 Werden vier harmonische Punkte aus einer Axe v projicirt, die mit ihnen nicht in einer Ebene liegt, so erhalten wir „vier harmonische Ebenen" oder einen „harmonischen Ebenenbüschel" (Fig. 16). Jede Ebene η, welche die vier harmonischen Punkte enthält, schneidet die Axe v in irgend einem Punkte S und demnach die harmonischen Ebenen in vier harmonischen Strahlen dieses Punktes. Dasselbe gilt folglich von jeder beliebigen Schnittebene, die nicht durch die Axe des harmonischen Ebenenbüschels geht; denn eine solche schneidet die vier harmonischen Strahlen der Schnittebene η in vier harmonischen Punkten, durch welche ihre eigenen Schnittlinien mit den harmonischen Ebenen gehen.

Hieraus folgt auch, dass jede zu der Axe windschiefe Gerade die vier Ebenen in vier harmonischen Punkten schneidet. Ein harmonischer Strahlenbüschel wird aus jedem nicht in seiner Ebene gelegenen Punkte durch einen harmonischen Ebenenbüschel projicirt (Fig. 16). Ueberhaupt gelten die folgenden Sätze:

Vier harmonische Punkte werden aus jeder Geraden durch vier harmonische Ebenen und aus jedem Punkte durch vier harmonische Strahlen projicirt.	Vier harmonische Ebenen werden von jeder Geraden in vier harmonischen Punkten und von jeder Ebene in vier harmonischen Strahlen geschnitten.

Vier harmonische Strahlen werden

aus jedem Punkte durch vier harmonische Ebenen projicirt.	von jeder Ebene in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Diese verschiedenen Sätze können wir zusammenfassen zu dem wichtigen Theoreme: (natürlich erster Stufe)

Aus einem harmonischen Grundgebilde ergeben sich durch Projiciren und Schneiden immer wieder harmonische Grundgebilde.

Zugleich erkennen Sie, dass durch drei Elemente eines einförmigen Grundgebildes das vierte harmonische vollständig bestimmt ist, wenn noch angegeben wird, von welchem der drei es getrennt ist. Sind die gegebenen Elemente drei Punkte einer Geraden, so führt das vollständige Viereck zu dem vierten harmonischen Punkte. Sind sie dagegen Strahlen oder Ebenen eines Büschels, so schneiden wir den Büschel durch eine Gerade und suchen zu den drei Schnittpunkten den vierten harmonischen Punkt. Durch diesen Punkt geht das gesuchte vierte Element des harmonischen Büschels. Hiermit ist zugleich die Aufgabe gelöst, zu drei Elementen eines einförmigen Grundgebildes das vierte harmonische zu construiren. Vgl. p 47.

61 Die Richtigkeit der folgenden Sätze wird Ihnen sofort einleuchten:

Werden drei Ebenen α, β, γ eines Ebenenbüschels von beliebigen Transversalen geschnitten, und wird auf jeder Transversale zu den drei Schnittpunkten der vierte harmonische, von dem Schnittpunkt mit β getrennte Punkt gesucht, so liegen alle	Werden drei Punkte A, B, C einer Punktreihe aus beliebigen Axen projicirt, und wird für jede Axe zu den drei projicirenden Ebenen die vierte harmonische, von B getrennte bestimmt, so gehen alle diese vierten Ebenen durch einen Punkt

diese vierten Punkte in einer Ebene δ, die zu α, β, γ die vierte harmonische, von β getrennte ist.

D, der zu *A*, *B*, *C* der vierte harmonische, von *B* getrennte Punkt ist.

Statt dieser beiden Sätze, die für den Raum einander reciprok gegenüberstehen, werden Sie leicht zwei entsprechende Sätze für die Ebene aufstellen können, in denen ein Strahlenbüschel die Stelle des Ebenenbüschels vertritt. Ebenso ergeben sich zwei analoge Sätze für den Strahlenbündel.

62 Bei der Definition der harmonischen Punkte *A*, *B*, *C*, *D* (Fig. 15) mittelst des Vierecks *KLMN* haben wir einen Unterschied gemacht zwischen den Punkten *A*, *C*, in denen die Gegenseiten des Vierecks sich schneiden, und den beiden harmonisch zugeordneten Punkten *B*, *D*, die auf den Diagonalen liegen. Wir können aber zeigen, dass diese beiden Paare zuge-

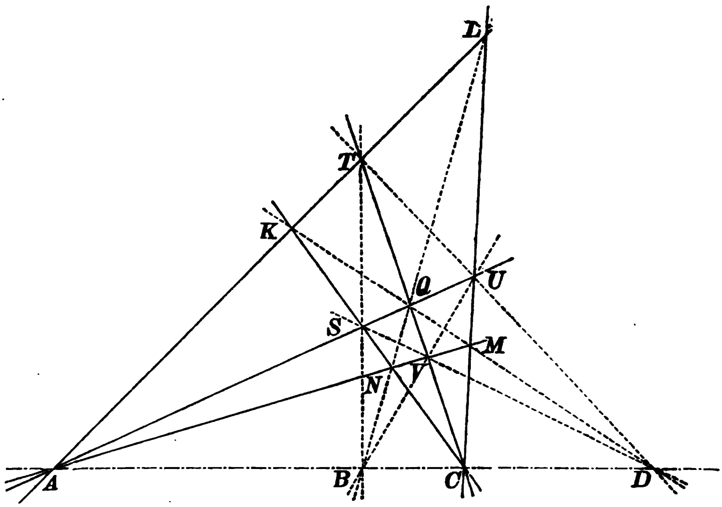


Fig. 17.

ordneter Punkte in der harmonischen Punktreihe ganz die gleiche Rolle spielen. Zunächst leuchtet ein, dass von vier harmonischen Punkten je zwei getrennte (zugeordnete) mit einander vertauscht werden können, ohne dass die Punkte aufhören, vier harmonische Punkte zu sein; oder: Ist *ABCD* eine harmonische Punktreihe, so gilt dasselbe von *ADCB*, *CBAD* und *CDAB*. Denn in jeder

di— ~~Punktreihen gehen durch den ersten~~ und dritten Punkt je
, vierten die Diago-
schnitt-
Q ge-
L, *LM*
n Ver-
gonalen
zusehen
übrigen
welchem
n durch
Punkt-
der ver-
ionische

l *nicht nur*
che Gebilde,
!.
trahlen und
kte definirt

en Gebildes
übrigen bei-
werden wir
aussprechen
mente eines
angehörige
urch letztere
he die erste-
unkte *A*, *C*

* Werden 1) eines eines in drei ~~gerade~~ Punkte und, reihe ~~werden~~ von B so die Punkt Strahl der vi b getr

3) Werden einer einer drei büschel wird büschel von so jedes

δ, der zu α, β, γ … harmonische, von β getrennte Ebene ist.

Werden drei Ebenen α, β, γ eines Ebenenbüschels von einer beliebigen Geraden ~~geschnitten~~ in drei Punkten einer Punktreihe geschnitten, und wird in dieser Punktreihe der vierte harmonische von B getrennte Punkt gesucht, so liegt dieser vierte Punkt jedesmal in einer Ebene δ, die zu α, β, γ die vierte harmonische von β getrennte ~~Ebene~~ Ebene ist.

Raum

Werden drei Punkte A, B, C einer Punktreihe mit einer beliebigen Geraden durch drei Ebenen eines Ebenenbüschels verbunden, und wird in diesem Ebenenbüschel die vierte harmonische von β getrennte Ebene gesucht, so geht diese vierte Ebene jedesmal durch einen Punkt D, der zu A, B, C der vierte harmonische von B getrennte Pkt ist.

der Felds … Strahlen … wird … Punkt B, C von B

a, b, c … Strahlenbüschel … werden … und … büschel … gesucht, … Ebene … einen Strahl … der vierte … b getrennt

… harmonische von Strahl ist.

Bündel

z. B. heissen harmonisch getrennt durch zwei Ebenen β, δ, wenn diese die Gerade *AC* in zwei solchen Punkten *B*, *D* schneiden, dass *ABCD* vier harmonische Punkte sind, und ebenso heissen die Ebenen β, δ durch *A* und *C* harmonisch getrennt, wenn sie durch die beiden Ebenen harmonisch getrennt sind, die ihre Schnittlinie βδ mit *A* und *C* verbinden. Für Gebilde in der Ebene gilt hiernach der Doppelsatz:

Durch einen Punkt und zwei beliebige Gerade der Ebene ist	Durch eine Gerade und zwei beliebige Punkte der Ebene ist

diese vierten Punkte in einer
Ebene δ, die zu α, β, γ die
vierte harmonische
trennte ist

Statt
* prok gegen
für die Eb
die Stelle d
analoge Sät

Bei de
62 (Fig. 15) n
schied gem
Gegenseiten
nisch zugeo
liegen. Wir

D, der zu A, B, C der vierte
harmonische, von B [illegible]

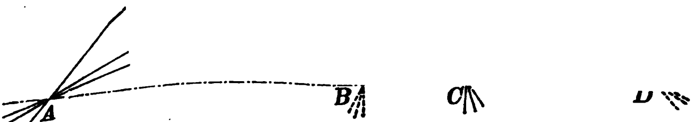


Fig. 17.

ordneter Punkte in der harmonischen Punktreihe ganz die gleiche Rolle spielen. Zunächst leuchtet ein, dass von vier harmonischen Punkten je zwei getrennte (zugeordnete) mit einander vertauscht werden können, ohne dass die Punkte aufhören, vier harmonische Punkte zu sein; oder: Ist $ABCD$ eine harmonische Punktreihe, so gilt dasselbe von $ADCB$, $CBAD$ und $CDAB$. Denn in jeder dieser Punktreihen gehen durch den ersten und dritten Punkt je zwei Gegenseiten, und durch den zweiten und vierten die Diagonalen des Vierecks $KLMN$. Werden nun durch den Schnittpunkt Q der Diagonalen (Fig. 17) die Geraden AQ und CQ gezogen, so bestimmen diese auf den resp. Seiten NK, KL, LM und MN vier neue Punkte S, T, U und V. Von deren Verbindungslinien ST, TU, UV und VS, die als zweite Diagonalen der Vierecke $KSQT$, $LTQU$, $MUQV$ und $NVQS$ anzusehen sind, gehen aber zwei gegenüberliegende durch B und die übrigen durch D. Wir erhalten also ein Viereck $STUV$, von welchem je zwei Gegenseiten durch B und D, und die Diagonalen durch A und C gehen. Somit können in einer harmonischen Punktreihe auch die beiden Paare getrennter Punkte mit einander vertauscht werden, ohne dass die vier Punkte aufhören, harmonische Punkte zu sein, und wir erhalten den Satz:

Ist ABCD *ein harmonisches Gebilde, so sind nicht nur* ADBC, CBAD *und* CDAB *ebenfalls harmonische Gebilde, sondern auch* DCBA, DABC, BCDA *und* BADC.

Dieser Satz gilt natürlich auch für harmonische Strahlen und Ebenen, die wir ja mittelst der harmonischen Punkte definirt haben.

63 Je zwei getrennte Elemente eines harmonischen Gebildes heissen wie gesagt „harmonisch getrennt“ durch die übrigen beiden Elemente und einander „zugeordnet“. Ausserdem werden wir uns manchmal, um einen Satz kürzer und einfacher aussprechen zu können, der Ausdrucksweise bedienen, zwei Elemente eines Gebildes seien durch zwei andere, dem Gebilde nicht angehörige Elemente harmonisch getrennt; nämlich dann, wenn durch letztere in dem Gebilde zwei Elemente bestimmt werden, welche die ersteren beiden Elemente harmonisch trennen. Zwei Punkte A, C z. B. heissen harmonisch getrennt durch zwei Ebenen β, δ, wenn diese die Gerade AC in zwei solchen Punkten B, D schneiden, dass $ABCD$ vier harmonische Punkte sind, und ebenso heissen die Ebenen β, δ durch A und C harmonisch getrennt, wenn sie durch die beiden Ebenen harmonisch getrennt sind, die ihre Schnittlinie $\beta\delta$ mit A und C verbinden. Für Gebilde in der Ebene gilt hiernach der Doppelsatz:

Durch einen Punkt und zwei beliebige Gerade der Ebene ist

Durch eine Gerade und zwei beliebige Punkte der Ebene ist eine dritte Gerade bestimmt; diese geht durch den Schnittpunkt der beiden anderen Geraden und enthält jeden Punkt, der von dem gegebenen Punkte durch die beiden Geraden harmonisch getrennt ist.

ein dritter Punkt bestimmt; dieser liegt auf der Verbindungslinie der beiden anderen Punkte, und durch ihn geht jede Gerade, die von der gegebenen Geraden durch die beiden Punkte harmonisch getrennt ist.

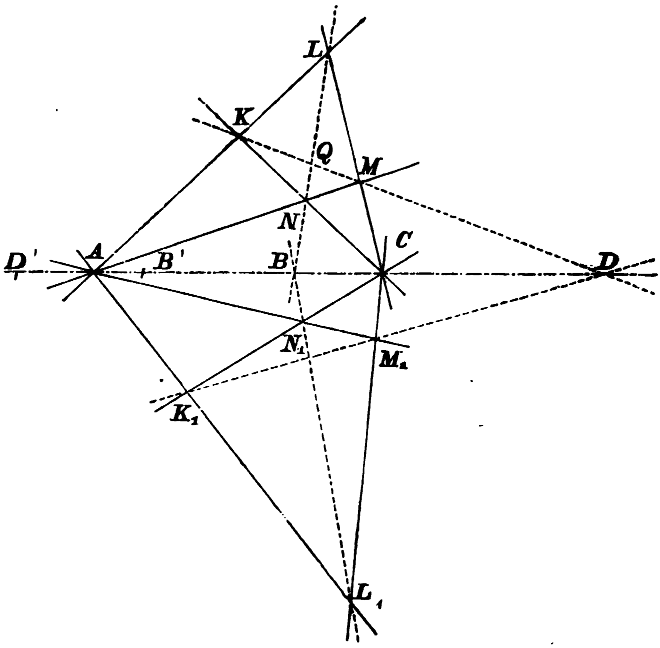


Fig. 15.

Auf dem Satze links und dem nächstfolgenden Satze beruht die Lösung der in der Einleitung (Seite 4, vergl. Fig. 1) erwähnten Aufgabe: Durch den unzugänglichen Schnittpunkt von zwei Geraden eine dritte Gerade zu legen.

6u Aus der Definition der harmonischen Punkte und Strahlen ergeben sich nunmehr folgende Eigenschaften der vollständigen Vierecke und Vierseite (vergl. Fig. 15):

Im vollständigen ebenen Viereck sind je zwei Gegenseiten (wie KM und LN) harmonisch getrennt durch die beiden Punkte (A und C), in denen die übri-

Im vollständigen ebenen Vierseit sind je zwei Gegenpunkte (wie A und C) harmonisch getrennt durch die beiden Diagonalen (KM und LN), welche gen Gegenseiten paarweise sich schneiden.

die übrigen Gegenpunkte paarweise verbinden.

Ich bemerke hierzu, dass in Fig. 15 nicht nur K, L, M, N als Eckpunkte eines vollständigen Vierecks aufgefasst werden können, sondern auch AL, AN, CL und CN als Seiten eines vollständigen Vierseits, von welchem A und C, K und M, L und N die drei paar Gegenpunkte sind.

65 Bleiben von dem Viereck $KLMN$ (Fig. 15) die beiden Eckpunkte K, L und die Schnittpunkte A, C der zwei paar Gegenseiten ungeändert, indess die Seite MN um A sich dreht, so beschreiben die Eckpunkte M und N die resp. Geraden CL und CK; zugleich drehen sich die beiden Diagonalen um K und L, und bewegen sich die Punkte B und D stetig auf AC so, dass sie beständig durch A und C harmonisch getrennt sind. Da nun keiner Lage von B oder D mehr als eine Lage von D resp. B entspricht, so können die Punkte B, D unmöglich bald in dem gleichen, bald in entgegengesetztem Sinne auf AC sich bewegen; vielmehr müssen sie sich immer in entgegengesetztem Sinne bewegen, weil sie ja durch A und C getrennt sind und mit C resp. A zusammenfallen, wenn die bewegliche Gerade MN in die Lage CA resp. LA gelangt. Daraus folgt:

Wenn ein Punktepaar A, C *zwei paar andere Punkte* B, D *und* B′, D′ *harmonisch trennt, so ist* B *von* D *nicht getrennt durch* B′ *und* D′. *Zwei paar Punkte einer Geraden, die sich gegenseitig trennen, können also nicht beide zugleich durch ein drittes Punktepaar harmonisch getrennt sein.*

66 Zu zwei Punktepaaren B, D und B', D' einer Geraden, die sich nicht gegenseitig trennen, giebt es allemal ein drittes A, C, durch welches B von D und zugleich B' von D' harmonisch getrennt ist. Vgl. S. 154. Zum Beweise denken wir uns diejenige Strecke $B'D'$, auf der B und D nicht liegen, durch einen Punkt P beschrieben; von den Punkten P_1 und P_2, die von P durch B' und D' resp. durch B und D harmonisch getrennt sind, beschreibt dann der erstere P_1 die Ergänzung der Strecke $B'D'$ und der letztere P_2 eine in dieser Ergänzung enthaltene Strecke B_2D_2, deren Endpunkte von B' und D' harmonisch getrennt sind durch B und D. Die Punkte P_1 und P_2 bewegen sich in entgegengesetztem Sinne wie P; sie müssen mindestens einmal sich vereinigen, weil P_1 eine Strecke beschreibt, worin die von P_2 durchlaufene Strecke enthalten ist. Bezeichnen wir mit C den Vereinigungspunkt und mit

A die zugehörige Lage des Punktes *P*, so trennen *A* und *C* sowohl *B* von *D* als auch *B'* von *D'* harmonisch.

Metrische Beziehungen harmonischer Gebilde.

6 7 Ich darf die Lehre von den harmonischen Gebilden nicht abschliessen, ohne Ihnen, wie ich in der Einleitung p.2. versprach, ihre wichtigsten metrischen Beziehungen noch zu entwickeln. Wir gelangen zu diesen am einfachsten, indem wir folgenden Satz beweisen:

Wenn in einer Geraden zwei Punkte A, C *von einem dritten* B *gleichen Abstand haben, so sind sie durch diesen und den unendlich fernen Punkt* D *der Geraden harmonisch getrennt, und* ABCD *sind vier harmonische Punkte.*

Nehmen wir nämlich in einer durch *ABC* gelegten Ebene zwei unendlich ferne Punkte *K* und *M* an (Fig. 18) und ziehen

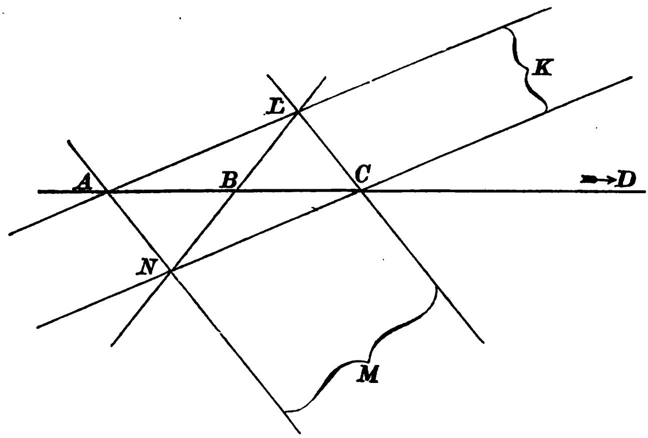


Fig. 18.

nach ihnen durch *A* und *C* je zwei Parallele, so schneiden sich diese in zwei neuen Punkten *L* und *N*. Die Gerade *LN* geht dann als zweite Diagonale des Parallelogramms *ALCN* durch den Mittelpunkt *B* der Strecke *AC*. Von dem Viereck *KLMN* schneiden sich also zwei Gegenseiten *KL* und *MN* in *A*, zwei andere *LM* und *NK* in *C*, die Diagonale *LN* geht durch *B* und die zweite Diagonale, nämlich die unendlich ferne Gerade *KM*, geht durch D, so dass wirklich $ABCD$ vier harmonische Punkte sind.

68 Da vier harmonische Punkte $ABCD$, aus einem beliebigen fünften S durch vier harmonische Strahlen projicirt werden, so folgt hieraus (Fig. 19):

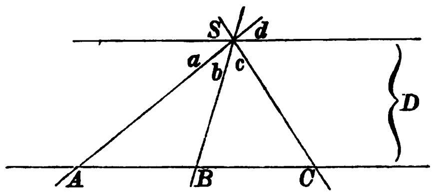


Fig. 19.

„Zieht man durch die
„Spitze S eines Dreiecks
„ASC zwei Gerade, die
„eine d parallel zur
„Grundlinie AC und die
„andere b nach deren Mittelpunkt B, so trennen diese beiden
„Geraden die anstossenden Seiten a, c des Dreiecks harmonisch“.

Ist ASC gleichschenkelig, so steht b senkrecht auf AC und d, und die von a und c gebildeten Nebenwinkel werden durch b und d gehälftet. Also:

„Die Mittellinien zweier Nebenwinkel sind durch die Schenkel
„der Winkel harmonisch getrennt und zu einander normal“.

Eine Umkehrung dieses Satzes kann so ausgesprochen werden:

„Wenn von vier harmonischen Strahlen zwei getrennte auf
„einander senkrecht stehen, so hälften sie die Winkel zwischen
„den anderen beiden Strahlen“.

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus folgendem umkehrbaren Satze (Fig. 19):

„Wird ein harmonischer Büschel $abcd$ durch eine Parallele u
„zu einem seiner Strahlen geschnitten, so hälftet von den drei
„Schnittpunkten mit den übrigen Strahlen der eine den Ab-
„schnitt zwischen den beiden anderen“.

Die Schnittpunkte von u mit $abcd$ sind nämlich vier harmonische Punkte, und einer von ihnen liegt unendlich fern.

69 Diese Sätze, denen sich ähnliche für harmonische Ebenen anschliessen lassen, können zur Lösung einer Reihe von Aufgaben benutzt werden. So kann die Aufgabe:

„Zu drei Punkten oder Strahlen den vierten harmonischen zu
„construiren“

etwas einfacher als mittelst des vollständigen Vierecks p41 gelöst werden, sobald die Construction von Parallelen und von gleichen Abschnitten zugelassen wird. Denn soll zu den Strahlen b, c, d (Fig. 19) der vierte, von c harmonisch getrennte Strahl a gesucht werden, so schneiden wir b und c durch irgend eine Parallele u zu d in den Punkten B und C, und machen auf ihr $AB = BC$; der durch A gelegte Strahl a des Büschels bcd ist dann der gesuchte. Ist ferner zu den drei Punkten A, B, C (Fig. 20) der vierte, von B harmonisch getrennte Punkt D zu suchen, so tragen wir auf irgend einer durch B gelegten Geraden von B aus gleiche Strecken A_1B und BC_1 ab, bestimmen den Schnittpunkt S der Geraden AA_1 oder a und CC_1 oder c, und ziehen durch S eine Parallele d zu A_1BC_1; mit d hat die Gerade ABC den gesuchten Punkt D gemein. Denn da A_1, B, C_1 und der unendlich ferne Punkt von A_1B vier harmonische Punkte sind, so ist $S(A_1BC_1D)$ oder $abcd$ ein harmonischer Büschel, und sein Schnitt $ABCD$ eine harmonische Punktreihe.

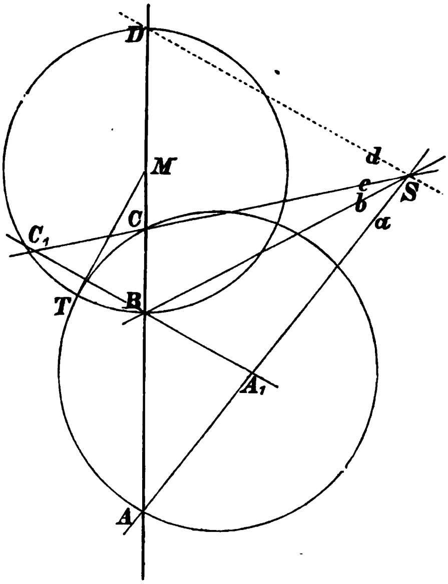


Fig. 20.

7c Wenn eine Strecke AC und deren Mittelpunkt B gegeben sind, so kann mittelst linearer Constructionen durch jeden vierten Punkt K (Fig. 21) eine Parallele zu AC gelegt werden, wie folgt. Wir ziehen die Linien KA und KC, und schneiden sie in resp. L und N mit irgend einer durch B gehenden Geraden. Bestimmen wir dann den Schnittpunkt M von CL und AN, so geht durch ihn die gesuchte Parallele. Denn als zweite Diagonale des Vierecks $KLMN$ schneidet KM die Gerade AC in einem vierten, von B harmonisch getrennten Punkte, der aber unendlich fern liegt, weil B die Strecke AC hälftet. Wenn umgekehrt zwei Parallelen gegeben sind, so kann jede auf einer von ihnen liegende Strecke durch lineare Constructionen gehälftet werden. Dass diese

Constructionen in der Feldmesskunst verwerthet werden können, wird Ihnen ohne Weiteres einleuchten.

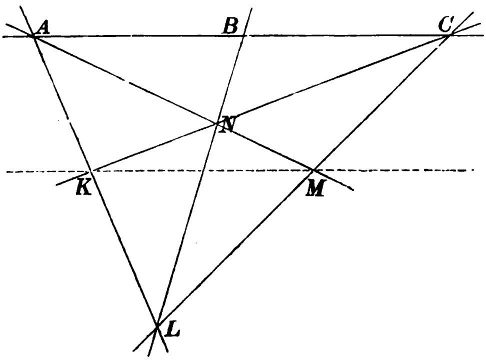


Fig. 21.

7/ Die Abschnitte, welche vier harmonische Punkte $ABCD$ auf einer Geraden abgrenzen, stehen zu einander in einer wichtigen Proportion. Um diese zu finden, projiciren wir die harmonischen Punkte durch einen harmonischen Büschel $abcd$ (Fig. 20) und legen durch B eine Parallele zum Strahle d. Diese schneidet die Strahlen a und c in zwei Punkten A_1 und C_1, die von B gleichen Abstand haben; zugleich entstehen zwei paar ähnliche Dreiecke, $AA_1B \sim ASD$ und $CC_1B \sim CSD$. Wir erhalten also die Proportionen:

$$\frac{AB}{A_1B} = \frac{AD}{SD} \text{ und } \frac{BC}{BC_1} = \frac{CD}{SD}.$$

Dividiren wir die erstere durch die letztere, und berücksichtigen, dass $A_1B = BC_1$ ist, so folgt:

$$\text{I} \;\ldots\ldots\; \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD},$$

oder der Satz:

„Die Strecke AC wird durch den in ihr gelegenen Punkt B in „demselben Verhältniss getheilt, wie durch den äusseren Punkt „D, der von B durch A und C harmonisch getrennt ist.“

Dieser Satz wird gewöhnlich zur Definition der harmonischen Punkte benutzt und zum Ausgangspunkt der Lehre von den harmonischen Punkten gewählt. Es folgt daraus u. A., dass der äussere Punkt D über C hinaus liegt, wenn $AB > BC$ und folglich $AD > CD$ ist, dagegen über A hinaus, wenn $AB < BC$, dass also B und D beide zugleich dem einen der Punkte A und C näher liegen als dem anderen.

72 In der Proportion I schreibt man gewöhnlich, weil die gleichen Strecken CD und DC in entgegengesetztem Sinne beschrieben sind, — DC statt CD, so dass sie symmetrischer so lautet:

$$\boxed{\frac{AB}{BC} = -\frac{AD}{DC}.}$$

Ist M der Mittelpunkt der Strecke BD, so kann die Gleichung I auch geschrieben werden:

$$\frac{AM - BM}{BM - CM} = \frac{AM + MD}{CM + MD},$$

oder wenn BM statt MD gesetzt wird:

$$\frac{AM - BM}{BM - CM} = \frac{AM + BM}{BM + CM}.$$

Durch Ausmultipliciren ergiebt sich hieraus nach sehr einfachen Reductionen:

$$\boxed{\text{II} \; \ldots\ldots \; (BM)^2 = AM \,.\, CM,}$$

oder der bemerkenswerthe Satz:

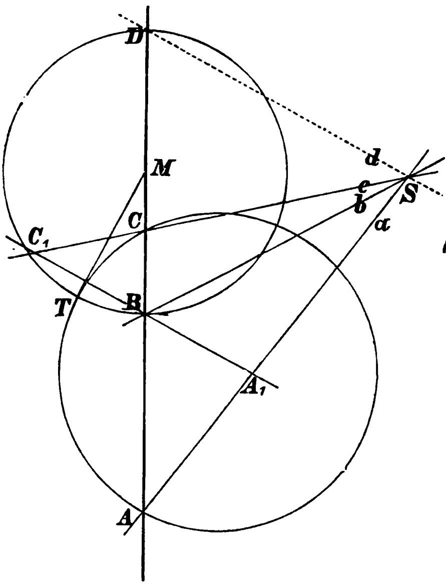


Fig. 20.

„BM (und ebenso „DM) ist die mittlere „Proportionale zwi- „schen AM und CM.“ Auch dieser oft benutzte Satz kann zur Definition der harmonischen Punkte dienen.

73 Legt man durch A und C (Fig. 20) irgend einen Kreis und an diesen durch M eine Tangente MT, so ist nach dem bekannten Satze über die Abschnitte von Kreissecanten:

$$AM \,.\, CM = (TM)^2,$$

und folglich

$$TM^2 = BM^2 = DM^2.$$

Der Berührungspunkt T der Tangente liegt also auf dem Kreise vom Radius $BM = MD$ mit dem Mittelpunkte M; und dieser Kreis schneidet den anderen rechtwinklig in T, weil sein Radius MT auf seiner Tangente in T normal ist: Also: „Alle durch zwei Punkte A, C gehenden Kreise der Ebene „werden rechtwinklig geschnitten von jedem Kreise, von welchem „die Endpunkte eines Durchmessers BD harmonisch durch A „und C getrennt sind."

Die Lehre von den harmonischen Punkten führt uns also mit Leichtigkeit zu Büscheln von Kreisen, die sich rechtwinklig schneiden, und ebenso kann sie zum Ausgangspunkt für die Untersuchung orthogonaler Kugelbüschel gewählt werden.

74 Die Umkehrung der Gleichung I, also die Gleichung $\frac{BC}{AB} = \frac{CD}{AD}$ lässt sich schreiben:

$$\frac{AC - AB}{AB} = \frac{AD - AC}{AD} \quad \text{oder} \quad \frac{AB - AC}{AB} = \frac{AC - AD}{AD};$$

dieser letzteren Gleichung aber verdanken die Punkte A, B, C, D den Namen „harmonische" Punkte. Wie Ihnen bekannt sein wird, sagt man nämlich von drei Zahlen β, γ, δ, sie seien „in stetiger harmonischer Proportion" oder „harmonisch", wenn die Differenz der beiden ersten sich zu der ersten verhält, wie die Differenz der beiden letzten zur letzten, oder wenn:

$$\frac{\beta - \gamma}{\beta} = \frac{\gamma - \delta}{\delta}.$$

Die Abschnitte AB, AC und AD stehen demnach in stetiger harmonischer Proportion. Die harmonischen Zahlen spielten in der Harmonielehre der Griechen eine wichtige Rolle.

Durch Ausführung der Division ergiebt sich schliesslich noch die Gleichung:

$$1 - \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AD} - 1,$$

die auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$\text{III} \ldots\ldots \quad \frac{2}{AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}.$$

* A, B, C, D harmon. Punkte.
$\boxed{AC = \frac{2 \cdot AB \cdot BD}{AB + BD}}$; d. h. Das harmonische Mittel zwischen zwei Strecken ist gleich ihrem doppelten Producte dividiert durch ihre Summe –

Sie werden diese sehr bemerkenswerthe Formel leicht selbst in Worte kleiden können*; auch sie wird häufig zur Definition der harmonischen Punkte benutzt.

Aehnliche Gleichungen könnte ich Ihnen entwickeln für die Winkel, die vier harmonische Strahlen oder Ebenen mit einander bilden. Ich ziehe jedoch vor, sie gelegentlich im Anhange zum nächsten grösseren Abschnitte aufzustellen, da sie ohnehin keinen grossen Werth für uns haben.

75 Wollen Sie übrigens bemerken, dass bei den metrischen Beziehungen der harmonischen Gebilde das Princip der Reciprocität nicht mehr, oder doch nur in einzelnen Fällen zur Geltung kommt. Ein Grund dafür ist, dass im Büschel kein Element vorkommt, das in Bezug auf die Massverhältnisse eine ähnliche ausgezeichnete Stellung einnimmt, wie der unendlich ferne Punkt in der Punktreihe; und in der Punktreihe kennen wir wiederum keine Strecke, die durch das Mass ähnlich definirt und ausgezeichnet werden könnte, wie im Büschel der rechte Winkel.

Fünfter Vortrag.

Die projective Verwandtschaft einförmiger Grundgebilde oder Homographie.

76 In diesem Vortrage will ich einen schon früher ausgesprochenen Gedanken wieder aufnehmen und weiter ausführen, den Gedanken nämlich, zwei Grundgebilde auf einander zu „beziehen", so dass jedem Elemente des einen ein Element des anderen entspricht. Als sehr einfache Arten, Grundgebilde der ersten Stufe auf einander zu beziehen, haben sich uns die folgenden dargeboten.

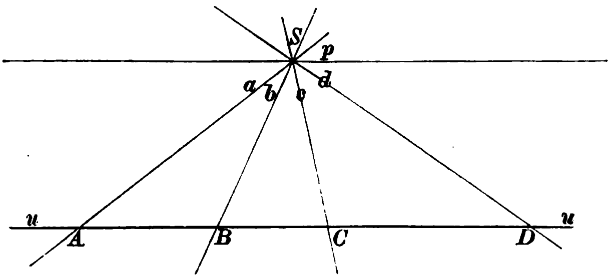


Fig. 6.

Es sind auf einander bezogen:

1) ein Büschel und eine Punktreihe (Fig. 6), oder ein Ebenenbüschel und ein Strahlenbüschel, wenn jedes Element des letzteren Gebildes in dem ihm entsprechenden Elemente des ersteren liegt;

2) zwei Punktreihen, wenn sie Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels sind (Fig. 8 Seite 24);
3) zwei Strahlenbüschel, wenn sie Scheine einer und derselben Punktreihe (Fig. 7) oder Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels oder beides sind;
4) zwei Ebenenbüschel, wenn sie Scheine eines und desselben Strahlenbüschels sind.

77 Von zwei in dieser Weise auf einander bezogenen einförmigen Grundgebilden wollen wir nun sagen, sie seien „in perspectiver Lage", oder kürzer, sie seien „perspectiv". Von zwei ungleichartigen perspectiven Grundgebilden ist also allemal das eine ein Schnitt des andern; zwei gleichartige perspective Grundgebilde aber sind entweder Schnitte oder Scheine eines und desselben dritten Grundgebildes.

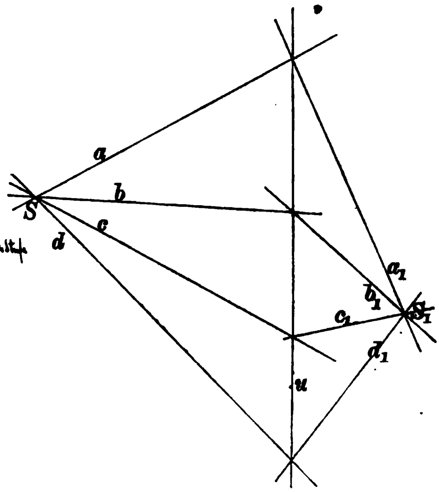


Fig. 7.

78 Werden zwei einförmige Grundgebilde auf ein drittes perspectiv bezogen, z. B. zwei Punktreihen auf eine dritte, so sind sie auch auf einander bezogen, haben aber im Allgemeinen nicht perspective Lage. Wir gelangen so zu einer zweiten, der sogenannten „schiefen Lage" von zwei aufeinander bezogenen Grundgebilden. Wir können diese Lage aus der perspectiven auch dadurch ableiten, dass wir zwei perspective Grundgebilde gegen einander verschieben; jedem Elemente des einen bleibt dann ein bestimmtes Element des anderen Gebildes zugewiesen, aber die Gebilde verlieren im Allgemeinen ihre perspective Lage.

79 Wir können noch auf unzählig viele andere Arten zwei Grundgebilde auf einander beziehen, z. B. zwei Strahlenbüschel, indem wir sie als Scheine einer und derselben Curve auffassen. Die vorhin angegebene Art des Beziehens unterscheidet sich nun in einem wichtigen Punkte von allen übrigen, und zwar sowohl wenn sich die

Gebilde in perspectiver, als wenn sie sich in schiefer Lage befinden. Werden nämlich irgend vier harmonische Elemente aus dem einen der beiden Gebilde herausgegriffen, so entsprechen ihnen allemal vier harmonische Elemente in dem anderen Gebilde, weil ja Scheine und Schnitte von harmonischen Gebilden wieder harmonische Gebilde sind. Diese Eigenthümlichkeit findet bei anderen Arten des Beziehens im Allgemeinen nicht statt, und wir werden so dazu geführt, mit von Staudt*) folgende Definition aufzustellen:

Zwei Grundgebilde heissen projectiv verwandt oder kurz projectiv, wenn sie so auf einander bezogen sind, dass je vier harmonischen Elementen des einen allemal vier harmonische Elemente des anderen entsprechen.

Zwei perspective einförmige Grundgebilde sind demnach zugleich projectiv; sie sind jedoch ausgezeichnet durch ihre besondere gegenseitige Lage. Der Ausdruck „homographisch", den Chasles**) gebraucht, ist gleichbedeutend mit projectiv. Als „Homographie" bezeichnet Chasles die projective Verwandtschaft einförmiger Grundgebilde. Für „projectiv" hat von Staudt das Zeichen $\barwedge$ eingeführt; nach ihm bedeutet $u \barwedge u_1$, dass die Gebilde u, u_1 projectiv sind. Will man ausdrücken, dass den Elementen $A, B, C, D, \ldots$ von u die resp. Elemente $A_1, B_1, C_1, D_1, \ldots$ von u_1 entsprechen, so schreibt man:
$u(ABCD\ldots) \barwedge u_1(A_1B_1C_1D_1\ldots)$ oder $ABCD\ldots \barwedge A_1B_1C_1D_1\ldots$
Einander entsprechende Elemente projectiver Gebilde nennt man kürzer „homologe Elemente".

Aus der Erklärung der projectiven Verwandtschaft folgt sofort:

Wenn zwei Gebilde zu einem dritten projectiv sind, so sind sie auch zu einander projectiv; in Zeichen: Wenn $u \barwedge u'$ *und* $u_1 \barwedge u'$, *so ist auch* $u \barwedge u_1$.

Sind z. B. zwei Punktreihen zu einer dritten perspectiv, so sind sie zu einander projectiv, haben aber nur in besonderen Fällen perspective Lage. Das Gleiche gilt von beliebigen Grundgebilden erster Stufe.

80 *In zwei projectiven Punktreihen entsprechen vier beliebigen Punkten* A, B, C, D *der einen, von denen die beiden ersteren*

*) v. Staudt, die Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, Seite 49.

**) Chasles, Aperçu historique sur l'Origine des Méthodes en Géométrie, 1837 (2. Aufl. 1875); Géométrie supérieure, Paris 1852; Sections coniques I, Paris 1865.

durch die zwei letzteren nicht getrennt sind, allemal vier Punkte A_1, B_1, C_1, D_2 *der anderen Reihe, von denen das Gleiche gilt.*

Es giebt nämlich in der ersten Reihe zwei Punkte M, N, die sowohl A von B als auch C von D harmonisch trennen (Seite 45), und ihnen entsprechen der obigen Definition zufolge in der anderen Reihe zwei Punkte M_1, N_1, welche A_1 von B_1 und zugleich C_1 von D_1 harmonisch trennen. Unmöglich können deswegen die Punkte A_1 und B_1 von einander getrennt […] 45). — Sind A_1 und C_1 ge- […] auch A und C durch B und […]gesetzte Annahme führt zum […]enen Satze.

* Oder, zwei Grundgebilde erster Stufe heissen projectiv, wenn sie in perspectiver oder schiefer Lage liegen; d.h., wenn sie entweder schon in perspectiver Lage sind, oder in perspective Lage gebracht werden können durch Verschiebung des Trägers von einem.

Wird in der einen Punktreihe eine beliebig grosse Anzahl von Punkten A, B, C, ..., P, Q, . . . so angenommen, dass unter ihnen keine zwei durch die vorhergehenden und nachfolgenden getrennt sind, so entsprechen also diesen Punkten in der anderen, projectiven Reihe ebenso viele Punkte A_1, B_1, C_1, ..., P_1, Q_1, . . ., von denen das Gleiche gilt. Folgen die Punkte P, Q, R, . . . der ersteren Reihe stetig auf einander, so müssen auch die ihnen entsprechenden Punkte P_1, Q_1, R_1 . . . der letzteren Reihe stetig auf einander folgen; denn wären etwa P_1 und Q_1 nicht zwei consecutive Punkte dieser Reihe, so gäbe es Punkte U_1, V_1, welche sie trennen, und es müssten auch P und Q von einander getrennt sein durch die entsprechenden Punkte U, V, könnten also nicht stetig auf einander folgen. Analoges gilt von projectiven Strahlen- und Ebenenbüscheln, weil diese von beliebigen Transversalen in projectiven Punktreihen geschnitten werden. Es ergiebt sich also der wichtige Satz:

Wenn zwei einförmige Grundgebilde projectiv sind, so entspricht jeder stetigen Aufeinanderfolge von Elementen des einen Gebildes eine stetige Aufeinanderfolge von Elementen des anderen.

81 Zwei gleichartige projective Grundgebilde können auch „conjectiv“ sein oder „in einander liegen“, das heisst identische Träger haben. Zwei projective Ebenenbüschel z. B. können mit den Axen auf einander gelegt werden, und ebenso können zwei projective Punktreihen in derselben Geraden liegen, so dass jeder Punkt der Geraden zweimal gedacht werden muss. Für das Folgende ist nun die Untersuchung von grosser Wichtigkeit, wie viele Elemente zwei projective einförmige Grundgebilde, die in einanderliegen, „entsprechend gemein“ haben, d. h. wie oft ein Element des einen Gebildes mit dem ihm entsprechenden Elemente

82 des anderen zusammenfällt. Dass zunächst der Fall möglich ist, in welchem sie ein oder zwei solche „Doppelelemente" haben, ergiebt sich aus folgendem Satze:

Sind in einer Ebene zwei perspective Büschel S_1, S_2 (Fig. 22) als Scheine einer Punktreihe u gegeben, und schneiden wir sie mit einer Geraden v, so erhalten wir in v zwei projective Punktreihen u_1 und u_2, welche die beiden Schnittpunkte von v mit u und der Geraden $S_1 S_2$ entsprechend gemein haben. Diese beiden Punkte fallen zusammen, wenn $S_1 S_2$ durch den Punkt uv geht.

Sind in einer Ebene zwei perspective Punktreihen u_1, u_2 (Fig. 23) als Schnitte eines Büschels S gegeben, und projiciren wir sie aus einem Punkte T der Ebene, so wird T der Mittelpunkt von zwei projectiven Büscheln, welche die beiden Verbindungslinien von T mit S und dem Punkte $u_1 u_2$ entsprechend gemein haben. Diese beiden Strahlen fallen zusammen, wenn $u_1 u_2$ auf der Geraden ST liegt.

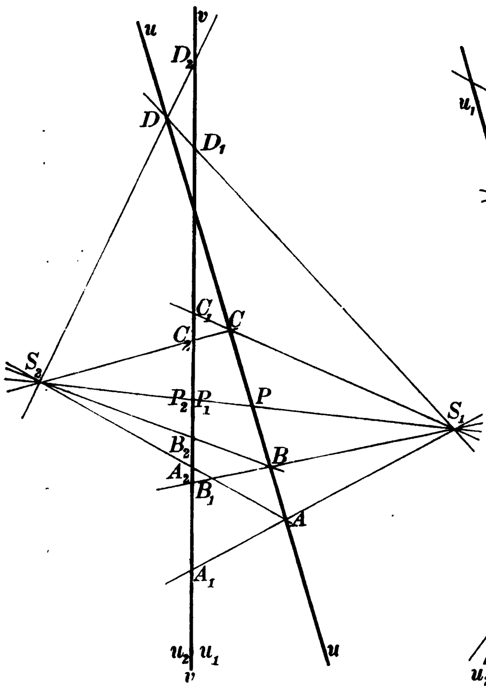


Fig. 22.

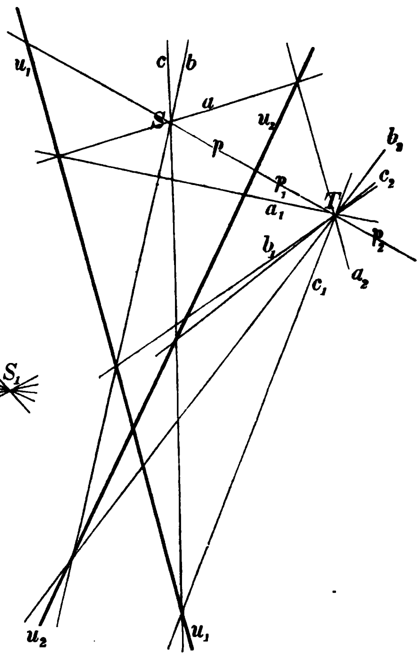


Fig. 23.

Zur Erläuterung füge ich hinzu, dass links zwei Punkte A_1 und A_2 von resp. u_1 und u_2 einander entsprechen, wenn $S_1 A_1$

und $S_2 A_2$ in einem Punkte A von u sich schneiden. Den Schnittpunkt uv haben daher die drei Punktreihen u, u_1 und u_2 entsprechend gemein, während u_1 und u_2 auch den Schnittpunkt von v mit dem gemeinsamen Strahl $S_1 S_2$ der Büschel S_1, S_2 entsprechend gemein haben.

§ 3 Wird von zwei projectiven Punktreihen u, u_1 die eine u durch stetige Bewegung eines Punktes P beschrieben, so durchläuft zugleich der entsprechende Punkt P_1 die andere Punktreihe u_1. Nun können aber, falls u und u_1 auf derselben Geraden liegen, die Punkte P, P_1 sich entweder in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne bewegen (Fig. 24 und 25). Im ersteren

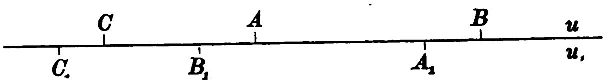


Fig. 24.

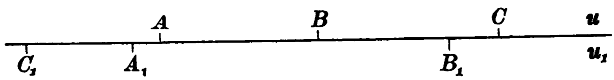


Fig. 25.

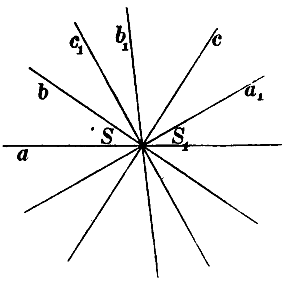


Fig. 26.

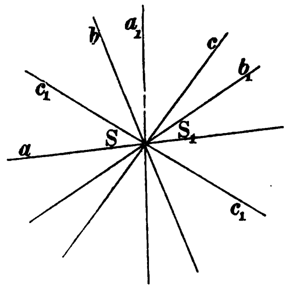


Fig. 27.

Falle (Fig. 25) nennen wir die Punktreihen „gleichlaufend", im letzteren (Fig. 24) „entgegengesetzt projectiv." Ebenso nennen wir zwei concentrische projective Strahlenbüschel S, S_1, die in derselben Ebene liegen (Fig. 26 und 27), oder zwei projective Ebenenbüschel, deren Axen zusammenfallen, „gleichlaufend" (Fig. 27) oder „entgegengesetzt projectiv" (Fig. 26), jenachdem zwei homologe Elemente, indem sie die Büschel beschreiben, sich in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne drehen.

In entgegengesetzt projectiven Gebilden erster Stufe (Fig. 24 und 26) müssen die beiden sich entsprechend bewegenden Elemente nothwendig zweimal zusammenfallen, und es ergiebt sich: „Entgegengesetzt projective Grundgebilde erster Stufe haben

„allemal zwei Elemente entsprechend gemein; diese Doppelelemente „trennen je zwei andere homologe Elemente von einander.“ Dagegen haben gleichlaufend projective Gebilde nur dann zwei Elemente entsprechend gemein, wenn eine Strecke AB (resp. ein Winkel) des einen ganz in der entsprechenden Strecke (resp. dem entsprechenden Winkel) des anderen liegt (Fig. 25); sie haben in besonderen Fällen nur ein, häufig (Fig. 27) gar kein Element entsprechend gemein. — Wenn zwei projective Punktreihen u, u_1, drei Punkte A, B, C entsprechend gemein haben, so müssen sie wegen des vorhergehenden Satzes gleichlaufend projectiv sein.

84 Wir können nunmehr den folgenden Fundamentalsatz der Geometrie der Lage beweisen:

Wenn zwei einförmige projective Grundgebilde drei Elemente A, B, C *entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein, sind also identisch.*

Sind nämlich die projectiven Grundgebilde zwei Punktreihen u, u_1 (Fig. 28), so muss jeder Punkt, der von einem der entsprechend

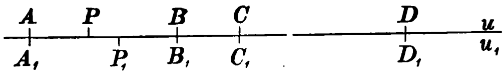


Fig. 28.

gemeinschaftlichen Punkte A, B, C durch die beiden anderen harmonisch getrennt ist, mit seinem entsprechenden zusammenfallen, weil er völlig bestimmt ist, und weil vier harmonischen Punkten von u allemal vier harmonische Punkte von u_1 entsprechen (Definition). Gesetzt nun, es gebe auf derjenigen Strecke AB, die den Punkt C nicht enthält, einen Punkt P von u, der mit dem entsprechenden Punkte P_1 von u_1 nicht zusammenfiele. Lassen wir dann P im Sinne ABC die Punktreihe u durchlaufen, so beschreibt P_1 die Reihe u_1 in demselben Sinne und muss sich entweder in B oder vor B in einem Punkte B' mit P vereinigen. Bewegt sich P im entgegengesetzten Sinne CBA, so muss auch P_1 sich im Sinne CBA bewegen und entweder in A oder vor A in einem Punkte A' mit P zusammenfallen. Wir erhalten auf diese Weise eine Strecke $A'B'$, die entweder gleich AB oder ein Theil von AB ist, und von welcher ausser den beiden Endpunkten A', B' kein Punkt mit seinem entsprechenden zusammenfällt. Das ist aber unmöglich, weil dem Obigen zufolge der Punkt, der vom Punkte C durch A' und B' harmonisch getrennt ist, mit seinem entsprechenden zusammenfallen muss. Die Punktreihen u, u_1 müssen also jeden Punkt der Strecke AB entsprechend gemein haben, eben deshalb aber auch jeden anderen Punkt Q der Geraden, weil Q durch A und B von einem Punkte der Strecke AB harmonisch getrennt ist.

Für projective Strahlen- oder Ebenenbüschel, welche drei Elemente entsprechend gemein haben, können wir den Satz ganz analog beweisen; oder noch einfacher, wir führen diesen Fall dadurch auf den vorigen zurück, dass wir die Büschel durch eine Gerade in conjectiven Punktreihen schneiden. Diese Reihen sind dann auch projectiv und haben drei und folglich alle ihre Elemente entsprechend gemein, woraus das Gleiche für die zu ihnen perspectiven Büschel folgt.

§ 5 Zwei projective einförmige Grundgebilde haben also höchstens zwei Elemente entsprechend gemein, wenn nicht jedes Element des einen mit dem entsprechenden Elemente des anderen zusammenfällt. Eine andere wichtige Folgerung aus dem Fundamentalsatze ist:

„Wenn eine Punktreihe zu einem Büschel, oder ein Strahlen- „büschel zu einem Ebenenbüschel projectiv ist, und drei Ele- „mente des ersteren Gebildes in den ihnen entsprechenden Ele- „menten des letzteren liegen, so ist das erstere Gebilde ein „Schnitt des letzteren."

Es hat nämlich mit dem auf seinem Träger liegendem Schnitte des letzteren Gebildes drei und folglich alle seine Elemente entsprechend gemein, ist also mit diesem Schnitt identisch.

§ 6 Wenn zwei projective Strahlenbüschel S, S_1 (Fig. 30), die in einer Ebene liegen, aber nicht concentrisch sind, den Verbindungs-Strahl a ihrer Mittelpunkte entsprechend gemein haben, so sind sie Scheine einer Punktreihe u und somit perspectiv. Denn verbinden wir die Punkte B, C, in denen irgend zwei Strahlen b, c des Büschels S von ihren homologen Strahlen b_1, c_1 geschnitten werden, durch

Wenn zwei projective Punktreihen u, u_1 (Fig. 29), deren Träger sich schneiden, den Schnittpunkt A entsprechend gemein haben, so sind sie Schnitte eines Strahlenbüschels S und somit perspectiv. Denn verbinden wir irgend zwei Punkte B, C von u mit ihren homologen Punkten B_1, C_1 durch die resp. Geraden b, c, und bezeichnen wir mit S den Schnittpunkt dieser Geraden, so sind die beiden eine Gerade u, so sind die beiden Punktreihen, in denen u die Büschel S, S_1 schneidet, identisch, weil sie projectiv sind und die drei Punkte ua, ub und uc oder A, B und C entsprechend gemein haben.

Strahlenbüschel, durch welche die Punktreihen u, u_1 aus S projicirt werden, identisch, weil sie projectiv sind und die drei Strahlen SA, SB, SC oder a, b, c entsprechend gemein haben.

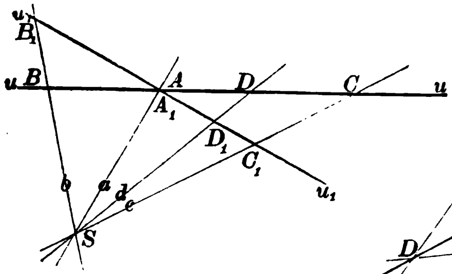


Fig. 29.

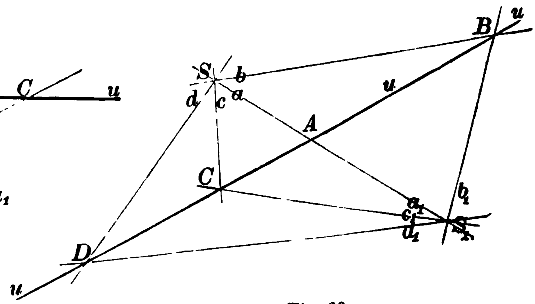


Fig. 30.

87 Diesem Doppelsatze steht der folgende aus der Geometrie des Strahlenbündels zur Seite:

Wenn zwei projective Ebenenbüschel, deren Axen sich schneiden, die Verbindungsebene ihrer Axen entsprechend gemein haben, so sind sie Scheine eines Strahlenbüschels und daher perspectiv. Verbinden wir nämlich irgend zwei Schnittlinien homologer Ebenen mit einander, und schneiden wir durch die Verbindungsebene die beiden Ebenenbüschel, so erhalten wir zwei projective Strahlenbüschel, welche drei Strahlen entsprechend gemein haben und folglich identisch sind.

Wenn zwei concentrische projective Strahlenbüschel, in verschiedenen Ebenen liegen und die Schnittlinie dieser Ebenen entsprechend gemein haben, so sind sie Schnitte eines Ebenenbüschels und daher perspectiv. Projiciren wir nämlich aus der Schnittlinie von irgend zwei Verbindungsebenen homologer Strahlen die beiden Strahlenbüschel, so erhalten wir zwei projective Ebenenbüschel, welche drei Ebenen entsprechend gemein haben und folglich identisch sind.

Die Beweise dieses und des vorhergehenden Doppelsatzes sind, wie Sie bemerkt haben werden, ganz gleichartig; auch der folgende Satz wird auf die nämliche Art bewiesen.

88 Zwei projective, nicht concentrische Strahlenbüschel S, S_1 (Fig. 30) haben perspective Lage, wenn von den Schnittpunkten ihrer homologen Strahlen irgend drei in einer Geraden u liegen. Denn die projectiven Punktreihen, in denen die beiden Büschel von der Geraden u geschnitten werden, haben jene drei Punkte B, C, D und somit alle ihre Punkte entsprechend gemein; die Schnittpunkte homologer Strahlen der beiden Büschel liegen folglich alle auf der Geraden u.

Zwei projective, aber nicht conjective Punktreihen u, u_1 (Fig. 29) haben perspective Lage, wenn von den Verbindungslinien ihrer homologen Punkte irgend drei durch einen Punkt S gehen. Denn die projectiven Strahlenbüschel, durch welche die beiden Punktreihen aus dem Punkte S projicirt werden, haben jene drei Strahlen BB_1, CC_1, DD_1 und somit alle ihre Strahlen entsprechend gemein; die Verbindungslinien homologer Punkte von u und u_1 gehen folglich alle durch S.

Es wird Ihnen ein Leichtes sein, die analogen Sätze über Strahlen- und Ebenenbüschel eines Bündels aufzustellen und zu beweisen.

89 Wenn zwei projective Strahlenbüschel in einer Ebene, aber nicht concentrisch liegen, so folgen die Schnittpunkte ihrer homologen Strahlen stetig auf einander; denn wenn ein Strahl durch Drehung um den Mittelpunkt den einen Büschel beschreibt, so dreht sich auch der entsprechende Strahl stetig und beschreibt den anderen Büschel, und der Schnittpunkt der beiden Strahlen beschreibt folglich eine Linie. Sind die beiden Büschel nicht perspectiv, so liegen die Schnittpunkte ihrer homologen Strahlen in einer Curve, die nach dem obigen Satze mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat. Wir nennen die Curve wegen dieser Eigenthümlichkeit eine „Curve oder Punktreihe zweiter Ordnung", und unterscheiden von ihr die gerade Punktreihe, wo es nöthig erscheint, durch den Namen „Punktreihe erster Ordnung".

Liegen zwei projective Punktreihen schief in einer Ebene, so bilden die Verbindungslinien ihrer homologen Punkte eine stetige Aufeinanderfolge von Strahlen, und es gehen durch keinen Punkt mehr als zwei von ihnen. Die Gesammtheit dieser Verbindungslinien bezeichnen wir als einen „Strahlenbüschel zweiter Ordnung".

Die gewöhnlichen Strahlenbüschel werden von den Büscheln zweiter Ordnung als Strahlenbüschel „erster Ordnung" unterschieden.

Die Curven und Strahlenbüschel zweiter Ordnung sind hiernach folgendermassen durch ihre Entstehungsart definirt:

Zwei projective Strahlenbüschel (erster Ordnung), die schief in einer Ebene liegen, erzeugen eine Curve oder Punktreihe zweiter Ordnung; jeder Strahl des einen Büschels scheidet den entsprechenden Strahl des andern in einem Punkte dieser Curve.

In keiner Geraden liegen mehr als zwei Punkte einer Curve zweiter Ordnung.

Zwei projective Punktreihen (erster Ordnung), die schief in einer Ebene liegen, erzeugen einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung; jeder Punkt der einen Reihe liegt mit dem entsprechenden Punkte der anderen auf einem Strahle dieses Büschels.

Durch keinen Punkt gehen mehr als zwei Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung

Ganz analoge Gebilde zweiter Ordnung werden in einem Bündel durch projective Strahlen- und Ebenenbüschel erzeugt. Ich werde in den nächsten Vorträgen alle diese neuen Gebilde näher untersuchen.

90 Zu Constructionen der Curven und Strahlenbüschel zweiter Ordnung gelangen wir, indem wir den folgenden wichtigen Satz beweisen:

Zwei einförmige Grundgebilde können projectiv so auf einander bezogen werden, dass irgend drei Elementen des einen drei beliebig angenommene Elemente des anderen Grundgebildes entsprechen; zu jedem vierten Elemente des einen Gebildes ist dann das entsprechende Element des anderen eindeutig bestimmt und leicht construirbar.

Wir können den Beweis dieses Satzes unmittelbar aus der Erklärung der projectiven Verwandtschaft schöpfen, und aus dem Satze, dass durch drei Elemente eines einförmigen Grundgebildes ein einziges viertes bestimmt ist, das von einem der drei Elemente durch die übrigen beiden harmonisch getrennt ist. Daraus folgt durch ähnliche Betrachtungen wie oben (Seite 58), das durch die drei gegebenen Paare homologer Elemente unendlich viele solche Paare einander zugewiesen sind, und dass in dem einen Gebilde kein Element vorkommt, dem nicht dadurch ein Element des anderen zugewiesen wäre.

Ich will jedoch den Beweis noch auf andere Weise führen, aber nur für Punktreihen, weil alle anderen Fälle sich auf diesen einen leicht zurückführen lassen. Ist nämlich eines oder jedes der beiden Grundgebilde ein Büschel, so können wir seinen Schnitt mit einer Geraden, also eine Punktreihe, dafür substituiren.

91 Sollen nun zunächst zwei in einer Ebene liegende Punktreihen u, u_1 (Fig. 29) projectiv so auf einander bezogen werden, dass sie den Schnittpunkt A ihrer Träger entsprechend gemein haben, und dass den Punkten B und C von u die resp. Punkte B_1 und C_1 von u_1 entsprechen, so wird die eine Punktreihe eine Projection der anderen aus dem Schnittpunkte S von BB_1 und CC_1. Irgend einem vierten Punkte D von u entspricht also in u_1 seine Projection D_1 aus dem Punkte S.

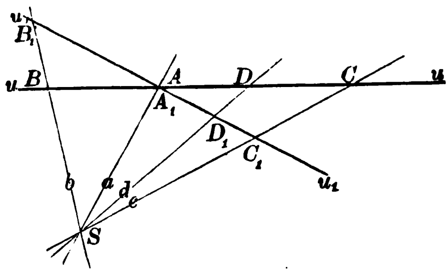


Fig. 29.

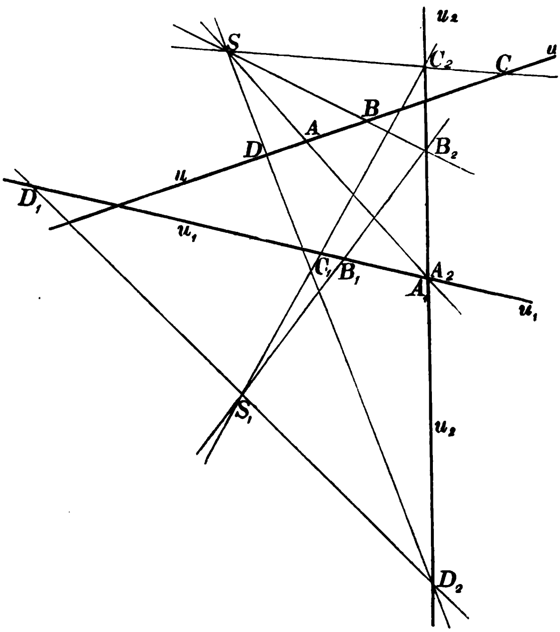


Fig. 31.

(u und u_1 können auch windschief sein.)

Sollen ferner zwei Punktreihen u, u_1 (Fig. 31), die nicht in derselben Geraden liegen, so auf einander projectiv bezogen werden, dass den Punkten A, B, C von u die resp. Punkte A_1, B_1, C_1 von u_1 entsprechen, so nehmen wir auf einer Verbindungslinie von zwei homologen Punkten, z. B. auf AA_1, einen von A und A_1 verschiedenen Punkt S an, und legen durch A_1 eine von u_1 und AA_1 verschiedene Gerade u_2, welche die Gerade u schneidet. Projiciren wir dann die Punktreihe u auf u_2 aus dem Mittelpunkte S, und sind A_2, B_2, C_2 die Projectionen von A, B, C, so ist unsere Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt. Denn wir haben nur noch u_1 und u_2 so auf einander projectiv zu beziehen, dass sie ihren Schnittpunkt A_1 entsprechend gemein haben, und dass den Punkten B_1 und C_1 von u_1 die resp. Punkte B_2 und C_2 von u_2 entsprechen. Die Punktreihen u und u_1 können daher als Projectionen einer und derselben dritten Punktreihe u_2 angesehen werden. Um zu irgend einem Punkte D von u den entsprechenden Punkt D_1 in u_1 zu bestimmen, suchen wir zunächst seine Projection D_2 auf u_2; dann ist D_1 die Projection des Punktes D_2 aus einem leicht zu construirenden Punkte S_1.

Sollen endlich zwei in derselben Geraden liegende Punktreihen u und u_1 projectiv so auf einander bezogen werden, dass den Punkt A, B, C von u die resp. Punkte A_1, B_1, C_1 von u_1 entsprechen, so führen wir diesen Fall auf den vorigen dadurch zurück, dass wir u_1 auf irgend eine andere Gerade u_2 projiciren. Fallen irgend zwei einander entsprechende Punkte, z. B. A und A_1, auf einander, so legen wir u_2 am zweckmässigsten durch diesen „Doppelpunkt", indem dann der vorliegende Fall sogleich auf den ersten zurückgeführt ist.

92 Aus dieser Untersuchung ergiebt sich der Satz:

Zwei projective einförmige Grundgebilde können immer als erstes und letztes in einer Reihe von Gebilden betrachtet werden, von denen jedes zu dem folgenden und zu dem vorhergehenden perspective Lage hat.

Zwei projective Punktreihen z. B. können angesehen werden als das erste und letzte von vier oder weniger Punktreihen, von denen jede eine Projection der vorhergehenden ist. Dieser Satz erklärt auch den Ausdruck „projectiv".

93 Zugleich ergiebt sich eine Reihe anscheinend verwickelter Sätze auf sehr einfache Weise. Ich nenne von ihnen nur die folgenden:

Drehen sich die Seiten a_1, a_2, ..., a_n eines veränderlichen einfachen $n$ecks der Reihe nach um n feste Punkte $S_1, S_2, \ldots S_n$, während sich $n-1$ Eckpunkte a_1a_2, a_2a_3, ..., $a_{n-1}a_n$ auf den resp. festen Geraden u_1, u_2, ..., u_{n-1} bewegen, so beschreibt der letzte Eckpunkt a_na_1 und jeder andere Schnittpunkt der Seiten entweder eine Curve zweiter Ordnung oder eine Gerade, und zwar eine Gerade u. A. dann, wenn die festen Drehpunkte S_1, S_2, ..., S_n alle auf einer Geraden g liegen. — Die Seiten a_1, a_2, ..., a_n beschreiben nämlich um S_1, S_2, ..., S_n Strahlenbüschel, von denen jeder zu dem folgenden perspectiv liegt; die resp. Punktreihen u_1, u_2, ..., u_{n-1} bilden ihre perspectiven Durchschnitte. Folglich sind je zwei dieser Büschel, und namentlich der erste und der letzte, projectiv, und sie erzeugen eine Curve zweiter Ordnung, wenn sie nicht etwa perspectiv liegen. Dieser besondere Fall tritt u. A. dann ein, wenn die Mittelpunkte der Büschel auf einer Geraden g liegen; denn diese ist dann sämmtlichen Büscheln entsprechend gemein, weil bei der Bewegung des $n$ecks einmal alle Seiten mit g zusammenfallen.

Durchlaufen die Eckpunkte A_1, A_2, ..., A_n eines veränderlichen einfachen $n$ecks der Reihe nach n feste Gerade $u_1, u_2, \ldots u_n$, während sich $n-1$ Seiten A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ um die resp. festen Punkte S_1, S_2, ..., S_{n-1} drehen, so beschreibt die letzte Seite A_nA_1 und ebenso jede Diagonale des $n$ecks entweder einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung, oder sie dreht sich um einen festen Punkt. Der letztere Fall tritt u. A. dann ein, wenn die Geraden u_1, u_2, ..., u_n sich alle in einem Punkte schneiden. — Die Eckpunkte A_1, A_2, ..., A_n beschreiben nämlich in u_1, u_2, ..., u_n Punktreihen, von denen jede zu der folgenden perspectiv liegt, indem S_1, S_2, ..., S_{n-1} die resp. Projectionscentra bilden. Folglich sind je zwei dieser Reihen, und namentlich die erste und die letzte, projectiv, und sie erzeugen einen Büschel zweiter Ordnung, wenn sie nicht etwa perspectiv liegen. Dieser besondere Fall tritt u. A. dann ein, wenn sich die Geraden u_1, u_2, ..., u_n in einem Punkte P schneiden; denn diesen Punkt haben sie dann alle entsprechend gemein, weil alle Eckpunkte des $n$ecks einmal mit P zusammenfallen.

Diese Sätze, von welchen der eine (links) die Verallgemeinerung eines Theorems von Maclaurin und Braikenridge ist und der andere (rechts) von Poncelet herrührt, bieten uns ein Mittel dar, um beliebig viele Punkte einer Curve oder Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung linear zu construiren. Für $n = 3$ wird die Construction am einfachsten.

Metrische Beziehungen projectiver Grundgebilde der ersten Stufe.

9u Zwischen den Winkeln und Strecken, die von je vier homologen Elementen projectiver Grundgebilde begrenzt werden, besteht eine wichtige Proportion, die ich Ihnen zum Schluss noch ableiten will. Wir gehen aus von einem Strahlenbüschel S (Fig. 29 und 30) und einer zu ihm perspectiven Punktreihe u. Vier beliebige Strahlen a, b, c, d von S gehen durch ihre entsprechenden Punkte A, B, C, D von u. Die Dreiecke nun, die

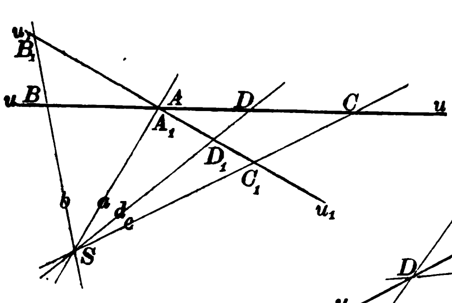


Fig. 29.

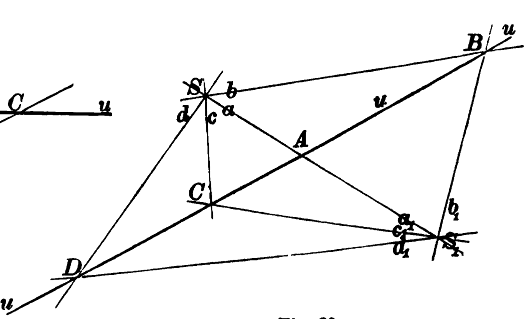


Fig. 30.

von u und den vier Strahlen begrenzt werden, und deren gemeinschaftliche Spitze S ist, haben gleiche Höhe; ihre Flächen verhalten sich daher, wie die in u liegenden Grundlinien, so dass z. B.

$$\frac{\Delta ASB}{\Delta ASD} = \frac{AB}{AD} \text{ und } \frac{\Delta CSB}{\Delta CSD} = \frac{CB}{CD}.$$

Der Inhalt eines Dreiecks ist aber gleich dem halben Product aus zwei Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels. Bezeichnen wir also allgemein mit (pq) den Winkel zwischen zwei Strahlen p und q, so erhalten wir für die vier Dreiecke die Werthe:

$$\begin{aligned}
\Delta ASB &= \tfrac{1}{2} AS \,.\, SB \,.\, \sin(ab),\\
\Delta ASD &= \tfrac{1}{2} AS \,.\, SD \,.\, \sin(ad),\\
\Delta CSB &= \tfrac{1}{2} CS \,.\, SB \,.\, \sin(cb),\\
\Delta CSD &= \tfrac{1}{2} CS \,.\, SD \,.\, \sin(cd).
\end{aligned}$$

Werden diese Werthe in obige Proportionen eingesetzt, so folgt:

$$\frac{SB \cdot \sin(ab)}{SD \cdot \sin(ad)} = \frac{AB}{AD} \text{ und } \frac{SB \cdot \sin(cb)}{SD \cdot \sin(cd)} = \frac{CB}{CD}.$$

Dividiren wir endlich die erste dieser Gleichungen durch die zweite, so ergiebt sich die gesuchte Proportion in folgender Form:

$$\boxed{\mathrm{I} \ldots\ldots \frac{\sin(ab)}{\sin(ad)} : \frac{\sin(cb)}{\sin(cd)} = \frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD}.}$$

95 Jedes Glied dieser Proportion ist ein Verhältniss; z. B. $\frac{CB}{CD}$ ist das Verhältniss der beiden Strecken, in welche die Strecke BD durch den Punkt C (der in Fig. 29 ausserhalb BD liegt) getheilt wird, und $\frac{\sin(cb)}{\sin(cd)}$ ist das Sinusverhältniss der beiden Winkel, in die der Winkel (bd) durch den Strahl c getheilt wird. Sowohl die linke als auch die rechte Seite der Gleichung ist also ein Verhältniss zwischen zwei Verhältnissen, ein sogenanntes „Doppelverhältniss". Solche Doppelverhältnisse kommen u. A. in der Theorie der Binärformen vor. Die vorliegenden Doppelverhältnisse sind beide auf dieselbe Art gebildet. Das Doppelverhältniss rechts zwischen den von A, B, C und D begrenzten Strecken wird dadurch gewonnen, dass wir die Verhältnisse, nach denen die Strecke BD von jedem der beiden übrigen Punkte A und C getheilt wird, in einander dividiren; und ganz analog ist das andere Doppelverhältniss zwischen den Sinus zusammengesetzt. Auch folgt aus der Ableitung der Proportion I, dass es gleichgültig ist, welche Strecke und welchen Winkel wir als getheilt ansehen, wenn nur beide Doppelverhältnisse in gleicher Weise gebildet werden. Eine andere Wahl der vier Dreiecke führt zu der Gleichung:

$$\frac{\sin(ad)}{\sin(ac)} : \frac{\sin(bd)}{\sin(bc)} = \frac{AD}{AC} : \frac{BD}{BC},$$

und es kann Ihnen nicht schwer fallen, noch mehr ähnliche Gleichungen für dieselben Punkte und Strahlen aufzustellen.

96 Bemerkenswerth ist nun, dass diese Gleichungen gültig bleiben, wenn wir die Punktreihe u in irgend eine andere, schiefe Lage gegen den Strahlenbüschel bringen. Auch werden auf jeder anderen Geraden u_1 (Fig. 29), die in A_1, B_1, C_1, D_1 die resp. Strahlen a, b, c, d schneidet, Strecken gebildet, die der mit I analogen Gleichung genügen:

$$\text{II} \ldots\ldots \frac{\sin(ab)}{\sin(ad)} : \frac{\sin(cb)}{\sin(cd)} = \frac{A_1B_1}{A_1D_1} : \frac{C_1B_1}{C_1D_1};$$

und ebenso werden A, B, C und D aus jedem von S verschiedenen Punkte S_1 (Fig. 30) durch vier solche Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 projicirt, dass

$$\text{III} \ldots\ldots \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1d_1)} : \frac{\sin(c_1b_1)}{\sin(c_1d_1)} = \frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD}.$$

Ein Doppelverhältniss zwischen vier Elementen einer Punktreihe oder eines Strahlenbüschels erster Ordnung ändert also seinen Werth nicht, wenn jene Elemente durch die entsprechenden Elemente eines perspectiven geraden Gebildes oder Büschels ersetzt werden. (Vgl. die Collectiones des Pappus, liber VII, 129.)

97 Da wir nun zwei projective einförmige Grundgebilde immer als erstes und letztes von einer Reihe von Grundgebilden ansehen können, deren jedes zum folgenden perspectiv liegt, so ergiebt sich:

Sind zwei Grundgebilde projectiv, so ist jedes Doppelverhältniss zwischen vier Elementen des einen gleich dem analogen Doppelverhältniss zwischen den entsprechenden vier Elementen des anderen Grundgebildes.

Sind z. B. u und u_1 zwei projective Punktreihen, und entsprechen den Punkten A, B, C, D von u die resp. Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 von u_1, so gilt für die Abschnitte zwischen diesen Punkten die Proportion:

$$\text{IV} \ldots\ldots \frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} = \frac{A_1B_1}{A_1D_1} : \frac{C_1B_1}{C_1D_1}.$$

Steiner hat den obigen Satz zur Definition der projectiven Verwandtschaft benutzt, und damit seiner „systematischen Entwickelung etc." die Rechnung mit Doppelverhältnissen zu Grunde gelegt. Der Satz gilt auch für Ebenenbüschel; denn die Winkel zwischen den Ebenen des Büschels werden in einem Strahlenbüschel gemessen, dessen Ebene zur Axe des Ebenenbüschels senkrecht steht, und welcher ein Schnitt des Ebenenbüschels ist.

98 Wir schliessen diesen Vortrag mit einer metrischen Relation, der die Winkel eines harmonischen Strahlen- oder Ebenenbüschels genügen. Sind a, b, c, d dessen Elemente und A, B, C, D (Fig. 20) die vier harmonischen Punkte, in denen sie von irgend einer Geraden geschnitten werden, so ergiebt sich für diese Punkte

die Gleichung $\frac{AB}{BC} = -\frac{AD}{DC}$ (Seite 50), und daher aus I die gesuchte Relation:

$$\text{V} \ldots\ldots \frac{\sin(ab)}{\sin(bc)} = -\frac{\sin(ad)}{\sin(dc)},$$

Sechster Vortrag.

Curven, Büschel und Kegel zweiter Ordnung.

---

99 Im letzten Vortrage sind wir zu folgenden wichtigen Ergebnissen gelangt:

Wenn zwei projective Strahlenbüschel in einer Ebene, aber weder concentrisch noch perspectiv liegen, so bilden die Schnittpunkte ihrer homologen Strahlen eine Curve oder Punktreihe zweiter Ordnung, die mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat.

Wenn zwei projective Punktreihen in einer Ebene, aber weder in derselben Geraden noch perspectiv liegen, so bilden die Verbindungslinien ihrer homologen Punkte einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung, von welchem durch keinen Punkt mehr als zwei Strahlen gehen.

Um Ihnen von diesen Gebilden zweiter Ordnung sogleich eine bestimmte Vorstellung zu verschaffen, führe ich schon jetzt an, dass die Curven zweiter Ordnung nichts anderes sind als Kegelschnitte, also auch erhalten werden, wenn ein gerader oder schiefer Kreiskegel durch eine Ebene geschnitten wird. Ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung aber besteht aus den Tangenten eines Kegelschnittes. Den Beweis für diese Behauptungen werde ich später führen. p91

100 Den obigen beiden Sätzen aus der ebenen Geometrie entsprechen die folgenden aus der Geometrie des Strahlenbündels:

Wenn zwei projective Ebenenbüschel, deren Axen sich schneiden, nicht perspectiv liegen, so bilden die Schnittlinien ihrer homologen Ebenen einen Kegel zweiter Ordnung, der mit

Wenn zwei concentrische projective Strahlenbüschel weder in einer Ebene noch perspectiv liegen, so bilden die Verbindungsebenen ihrer homologen Strahlen einen Ebenenbüschel zweiter keiner Ebene mehr als zwei der Schnittlinien gemein hat. Der Schnittpunkt der beiden Axen heisst der „Mittelpunkt" des Kegels; durch ihn gehen alle Strahlen des Kegels.

Ordnung, von welchem durch keine Gerade mehr als zwei Ebenen gehen. Das Centrum der Strahlenbüschel heisst der „Mittelpunkt" des Ebenenbüschels; es liegt auf allen seinen Ebenen.

Den Kegel und den Ebenenbüschel zweiter Ordnung können wir mittelst der Curve und des Strahlenbüschels zweiter Ordnung erzeugen, indem wir diese aus einem beliebigen Punkte des Raumes projiciren. Denn die beiden projectiven Strahlenbüschel S, S_1 (Fig. 32 und 34), welche die Curve zweiter Ordnung erzeugen, werden aus einem beliebigen Punkte O (z. B. aus Ihrem Auge) durch zwei projective Ebenenbüschel projicirt, und diese erzeugen einen durch die Curve gehenden Kegel zweiter Ordnung mit dem Mittelpunkt O. Ebenso werden aus O zwei projective Punktreihen u, u_1 (Fig. 33), die einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung erzeugen, durch projective Strahlenbüschel projicirt, und diese wiederum erzeugen einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung, der ein Schein des Strahlenbüschels zweiter Ordnung ist und O zum Mittelpunkte hat. Umgekehrt wird ein Kegel zweiter Ordnung von jeder nicht durch seinen Mittelpunkt gehenden Ebene in einer Curve zweiter Ordnung geschnitten; denn die beiden projectiven Ebenenbüschel, die den Kegel erzeugen, werden in projectiven Strahlenbüscheln geschnitten, und diese erzeugen die Schnittcurve zweiter Ordnung. Wenn mehr als zwei Strahlen des Kegels in einer Ebene lägen, so würden auch mehr als zwei Punkte der Curve zweiter Ordnung in einer Geraden liegen, was unmöglich ist. Analoges können Sie leicht von dem Ebenenbüschel zweiter Ordnung beweisen. Zugleich erkennen Sie die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Jede Curve und jeder Strahlenbüschel zweiter Ordnung wird aus einem nicht in derselben Ebene gelegenen Punkte durch einen Kegel resp. einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung projicirt.

Jeder Kegel und jeder Ebenenbüschel zweiter Ordnung wird von einer beliebigen Ebene in einer Curve resp. einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung geschnitten.

|C| Sie ersehen hieraus, dass alle Resultate, die wir für die ebenen Gebilde zweiter Ordnung gewinnen, sich sofort durch Projiciren auf die Kegel und Ebenenbüschel zweiter Ordnung übertragen lassen. Ich beschränke mich daher vorerst auf die Unter-

suchung der Curven und Strahlenbüschel zweiter Ordnung und schicke folgende Bemerkung voraus:

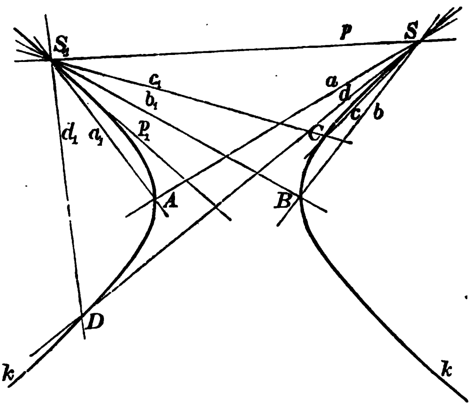


Fig. 32.

Die Curve k zweiter Ordnung, welche zwei projective Strahlenbüschel S, S_1 erzeugen, geht durch die Mittelpunkte der beiden Büschel (Fig. 32). Denn dem Strahle SS_1 oder p des Büschels S, d. h. der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte, entspricht, weil die Büschel nicht perspectiv liegen, im Büschel S_1 ein von $S_1 S$ verschiedener Strahl p_1. Der Schnittpunkt von p und p_1, nämlich S_1, gehört also der Curve k an, und ebenso S.

Der Strahlenbüschel $\varkappa$ zweiter Ordnung, welchen zwei projective Punktreihen u, u_1 erzeugen, enthält auch die Geraden u, u_1, in denen die Punktreihen liegen (Fig. 33). Denn dem Punkte uu_1 oder P der Punktreihe u, d. h. dem Schnittpunkte der beiden Geraden, entspricht, weil die Punktreihen nicht perspectiv liegen, in u_1 ein von ihm verschiedener Punkt P_1. Die Verbindungslinie PP_1 oder u_1 gehört also dem Büschel $\varkappa$ an, und ebenso u.

102 Links ist p_1 (Fig. 32) der einzige durch S_1 gehende Strahl, der mit der Curve k nur den einen Punkt S_1 gemein hat. Jeder von p_1 verschiedene Strahl a_1 des Büschels S_1 wird von dem ihm entsprechenden, von p verschiedenen Strahle a in einem zweiten, nicht mit S_1 identischen Punkte A der Curve k geschnitten; wenn

aber der Strahl a_1 sich um S_1 dreht, bis er mit p_1 zusammenfällt, so vereinigt sich dieser zweite Curvenpunkt A mit dem ersten S_1. Wir sagen deshalb: Der Strahl p_1 „berührt" in S_1 die Curve k, oder er ist eine „Tangente" von k. — Ebenso ist rechts (Fig. 33) P_1 der einzige Punkt von u_1, durch den nur ein Strahl

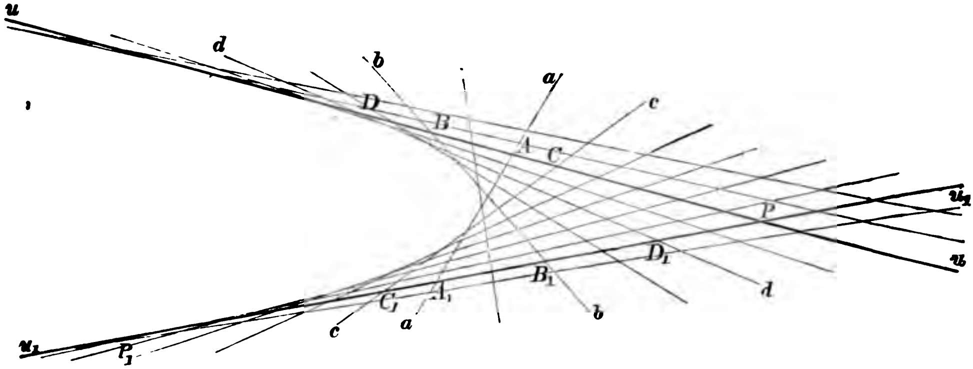


Fig. 33.

des Büschels $\varkappa$, nämlich u_1 selbst, hindurchgeht. Denn durch jeden andern Punkt A_1 von u_1 geht noch ein zweiter Strahl $A_1 A$ von $\varkappa$, weil sein entsprechender Punkt A nicht mit P, und also $A_1 A$ nicht mit u_1 zusammenfällt. Wir nennen P_1 einen „Berührungspunkt" des Büschels $\varkappa$ im Strahle u_1, und können daher den Satz aufstellen:

Dem gemeinschaftlichen Strahle der beiden projectiven Strahlenbüschel entspricht in jedem der Büschel eine Tangente der Curve zweiter Ordnung.

Dem gemeinschaftlichen Punkte der beiden projectiven Punktreihen entspricht in jeder der Reihen ein Berührungspunkt des Büschels zweiter Ordnung.

103 Wie wir uns erinnern, können zwei einförmige Grundgebilde auf eine einzige Art projectiv so auf einander bezogen werden, dass drei bestimmten Elementen des einen drei willkürlich angenommene Elemente des anderen entsprechen. Wollen wir also eine Curve zweiter Ordnung mittelst projectiver Strahlenbüschel erzeugen, so können wir nicht nur die Mittelpunkte S, S_1 der Büschel (Fig. 32), sondern noch drei weitere Punkte der Curve, nämlich die Schnittpunkte von drei paar entsprechenden Strahlen der Büschel, willkürlich in der Ebene annehmen. Fällt einer dieser drei Schnittpunkte mit S zusammen, so ist von der Curve

die Tangente im Punkte S gegeben; und das Gleiche kann bei S_1 eintreten. — Um einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung mittelst projectiver Punktreihen zu erzeugen, können wir nicht nur die Träger u, u_1 der Reihen (Fig. 33), sondern noch drei andere Strahlen des Büschels, nämlich die Verbindungslinien von drei paar homologen Punkten der Punktreihen, willkürlich in der Ebene annehmen. Fällt eine dieser Verbindungslinien mit u zusammen, so ist von dem Büschel zweiter Ordnung der Berührungspunkt im Strahle u gegeben; und dasselbe kann bei u_1 eintreten. Die folgenden Aufgaben sind demnach ausführbar:

Eine Curve zweiter Ordnung zu construiren, von welcher gegeben sind fünf Punkte, oder vier Punkte und die Tangente an einem derselben S, oder drei Punkte und die Tangenten an zwei derselben S und S_1.

Einen Büschel zweiter Ordnung zu construiren, von welchem gegeben sind fünf Strahlen, oder vier Strahlen und der Berührungspunkt in einem derselben u, oder drei Strahlen und die Berührungspunkte in zwei derselben u und u_1.

Sie sind zurückgeführt auf die beiden Aufgaben:

Zwei projective Strahlenbüschel S, S_1 sind durch drei paar homologe Strahlen aa_1, bb_1, cc_1 gegeben; es sollen beliebig viele Punkte der von ihnen erzeugten Curve k zweiter Ordnung construirt werden.

Zwei projective Punktreihen u, u_1 sind durch drei paar homologe Punkte AA_1, BB_1, CC_1 gegeben; es sollen beliebig viele Strahlen des von ihnen erzeugten Büschels $\varkappa$ zweiter Ordnung construirt werden.

'04 Diese Aufgaben gehen darauf hinaus, zu jedem beliebigen vierten Elemente des einen Grundgebildes das entsprechende des anderen zu finden; denn damit ist zugleich ein neues Element des von beiden erzeugten Gebildes zweiter Ordnung bestimmt. Ich könnte Sie also auf die im letzten Vortrag (Seite 64) angegebene Construction verweisen. Doch will ich das vorliegende Problem noch einmal in einer mehr symmetrischen Weise lösen, besonders weil sich wichtige Sätze an die Auflösung knüpfen. Wir lösen die Aufgabe, indem wir zu den beiden projectiven Grundgebilden ein drittes construiren, das zu jedem von ihnen perspective Lage hat; nämlich*):

*) Ich wiederhole bei dieser Gelegenheit meinen Rath, dass der Anfänger die Figuren selber zeichne nach den Angaben des Textes, weil dadurch die Auffassung wesentlich erleichtert wird.

Durch den Schnittpunkt aa_1 oder A von zwei homologen Strahlen a, a_1 der projectiven Büschel S, S_1 (Fig. 34) legen wir zwei Gerade u, u_1, von denen die eine u den Büschel $S(abc)$ in einer Punktreihe $u(ABC)$ und die andere u_1 den Büschel $S_1(a_1 b_1 c_1)$ in einer Punktreihe $u_1(A_1 B_1 C_1)$ schneidet. Als Schnitte projectiver Büschel sind diese Punktreihen u, u_1 auch zu einander projectiv. Sie liegen aber sogar perspectiv, weil in ihrem Schnittpunkte zwei homologe Punkte A, A_1 vereinigt sind (Seite 59). Sie sind also Schnitte eines Strahlenbüschels, in dessen Mittelpunkt S_2 die Strahlen BB_1 und CC_1 sich schneiden.

In der Verbindungslinie AA_1 von zwei homologen Punkten A, A_1 der projectiven Punktreihen u, u_1 (Fig. 35) nehmen wir die Mittelpunkte S, S_1 von zwei Strahlenbüscheln an, von denen der eine $S(abc)$ die Punktreihe $u(ABC)$, und der andere $S_1(a_1 b_1 c_1)$ die Punktreihe $u_1(A_1 B_1 C_1)$ projicirt. Als Scheine projectiver Punktreihen sind diese Büschel S, S_1 auch zu einander projectiv. Sie liegen aber sogar perspectiv, weil in der Verbindungslinie SS_1 ihrer Mittelpunkte zwei homologe Strahlen a und a_1 vereinigt sind (Seite 59). Sie sind also Scheine der Punktreihe u_2, welche die Punkte bb_1 und cc_1 verbindet.

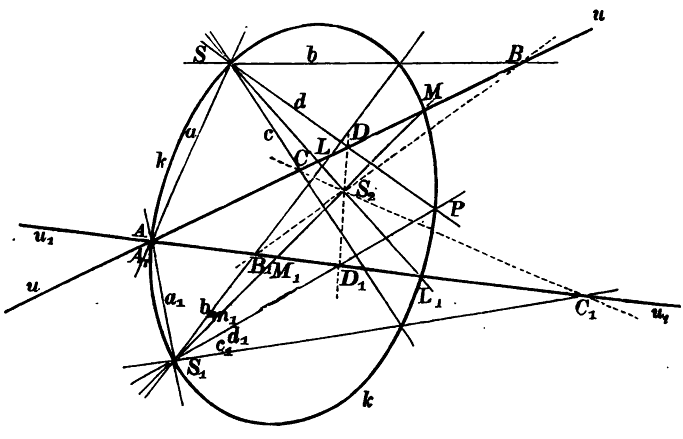


Fig. 34.

Um nun zu irgend einem Strahle d des Büschels S den entsprechenden d_1 von S_1 zu

Um zu einem Punkte D von u den entsprechenden D_1 von u_1 zu finden, schneiden wir die Ge-finden, projiciren wir den Schnittpunkt du oder D aus dem Punkte S_2 auf die Gerade u_1 nach D_1; dann ist $D_1 S_1$ der gesuchte Strahl d_1. Der Punkt dd_1 oder P liegt auf der Curve k zweiter Ordnung.

rade DS oder d durch u_2, und projiciren den Schnittpunkt aus S_1 durch den Strahl d_1 auf die Gerade u_1. Die Projection $d_1 u_1$ ist der gesuchte Punkt D_1. Der Strahl DD_1 gehört zu dem Büschel $\varkappa$ zweiter Ordnung.*)

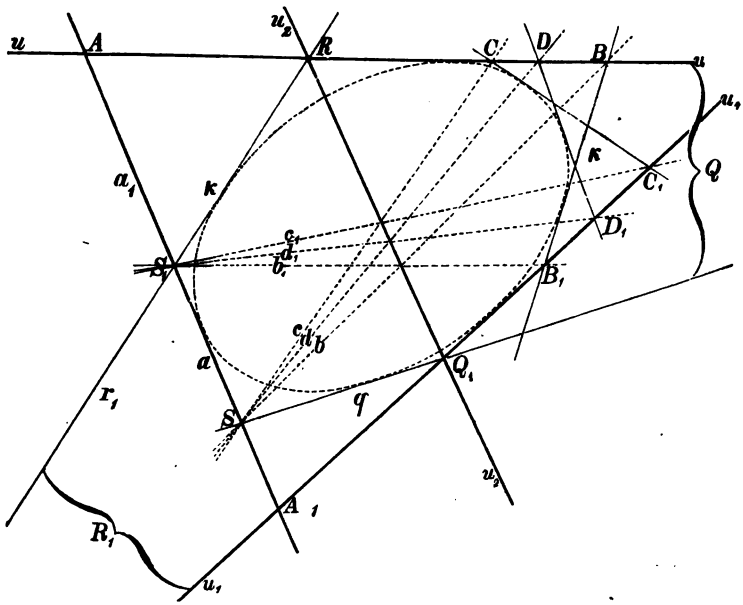


Fig. 35.

105 Hiermit sind zugleich folgende Aufgaben gelöst:

Auf einem beliebigen Strahle von S oder S_1 den zweiten, von S resp. S_1 verschiedenen Schnittpunkt mit der Curve zweiter Ordnung zu finden.

Durch einen beliebigen Punkt von u oder u_1 den zweiten, von u resp. u_1 verschiedenen Strahl des Büschels zweiter Ordnung zu legen.

Indem wir auf die eben angegebene Weise auch zu dem gemeinsamen Strahle der Büschel, oder andererseits zu dem gemeinsamen

*) In Fig. 35 ist der Büschel $\varkappa$ zweiter Ordnung angedeutet durch die von ihm eingehüllte Curve.

Punkte der Punktreihen die beiden entsprechenden Strahlen resp. Punkte suchen, lösen wir die Aufgabe:

An den Mittelpunkten von zwei projectiven Strahlenbüscheln die Tangenten der von ihnen erzeugten Curve zweiter Ordnung zu construiren.	Auf zwei projectiven Punktreihen, die einen Büschel zweiter Ordnung erzeugen, die Berührungspunkte dieses Büschels zu finden.

10b Ein weiteres wichtiges Resultat ergiebt sich in folgender Weise aus unserer Construction. Dem Strahle $S_1 S_2$ oder m_1 links (Fig. 34), welcher in M_1 und M von resp. u_1 und u geschnitten wird, entspricht im Büschel S der Strahl SM; denn wenn D_1 mit M_1 zum Zusammenfall gebracht wird, so fallen zugleich D und P mit M zusammen. Also ist M der Punkt, worin die Curve k zum zweiten Male von u geschnitten wird. Ebenso liegt der zweite Schnittpunkt von u_1 mit der Curve auf der Geraden SS_2. Ich erinnere daran, dass die willkürlich gewählten Geraden u und u_1 keiner weiteren Bedingung unterworfen sind, als dass sie sich in einem Punkte A der Curve schneiden. — Verbinden wir andererseits rechts (Fig. 35) den Schnittpunkt $u_1 u_2$ oder Q_1 mit S, so geht die Verbindungslinie durch den zu Q_1 homologen Punkt Q von u, und QQ_1 oder SQ_1 ist ein Strahl des Büschels $\varkappa$ zweiter Ordnung. Ebenso ist der Strahl $S_1 R$, der aus S_1 den Schnittpunkt R von u und u_2 projicirt, ein Strahl von $\varkappa$. Da wir S und S_1 willkürlich auf einem Strahle a des Büschels $\varkappa$ gewählt haben, so ist damit die Doppelaufgabe gelöst:

Auf einer Geraden u, welche die Curve k zweiter Ordnung in einem gegebenen Punkte A schneidet, den zweiten Schnittpunkt mit der Curve zu finden.	Durch einen Punkt S, der auf einem gegebenen Strahle a des Büschels $\varkappa$ zweiter Ordnung liegt, den zweiten Strahl dieses Büschels zu ziehen.

10c Auch die beiden überaus fruchtbaren Sätze des Pascal und des Brianchon, deren ich in der Einleitung Erwähnung that, ergeben sich wie von selbst aus unserer Construction. Bestimmen wir links zu den fünf Punkten S, S_1, A, M und L_1 der Curve k noch irgend einen sechsten Punkt P (Fig. 34), so liegt zufolge der Construction von P der Schnittpunkt D von SP und u mit dem Schnittpunkte D_1 von $S_1 P$ und u_1 in einer durch S_2 gehenden Geraden. Aber D, D_1 und S_2 sind die Punkte, in denen die Gegenseiten des Sechsecks SPS_1MAL_1 sich schneiden. — Construiren wir andererseits rechts (Fig. 35) zu den fünf Strahlen

u, u_1, SS_1, SQ, und S_1R des Büschels $\varkappa$ zweiter Ordnung noch einen sechsten Strahl DD_1, so müssen nach der Construction die Geraden SD und S_1D_1 sich auf der Geraden Q_1R oder u_2 schneiden. Diese drei durch einen und denselben Punkt gehenden Geraden sind aber die Hauptdiagonalen, d. h. die Verbindungslinien gegenüberliegender Eckpunkte des Sechsecks $SS_1RDD_1Q_1$. Wir haben somit folgende Lehrsätze bewiesen:

Lehrsatz des Pascal:*)

In jedem einfachen Sechseck, das einer Curve zweiter Ordnung eingeschrieben ist, schneiden sich die drei paar Gegenseiten in drei Punkten einer Geraden.

Lehrsatz des Brianchon:

In jedem einfachen Sechseck, das von Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung gebildet wird, gehen die drei Haupt-Diagonalen durch einen Punkt.

108 Streng genommen haben wir aber noch ein Bedenken zu beseitigen, das gegen den Beweis dieser Sätze erhoben werden kann. Die beiden hier betrachteten Sechsecke enthalten Elemente, die nicht willkürlich gewählt sind; denn z. B. links sind wohl die Eckpunkte A, M, L_1 und P, nicht aber S und S_1 willkürlich gewählte Punkte der Curve k. Es ist aber denkbar, dass die Mittelpunkte S und S_1 der projectiven Strahlenbüschel, die die Curve erzeugen, durch besondere Eigenschaften sich auszeichnen, dass etwa der Lehrsatz des Pascal nur für solche eingeschriebene Sechsecke gilt, zu deren Eckpunkten S und S_1 gehören. Wir wollen nun dieses Bedenken erledigen durch den Nachweis, dass beliebige andere Punkte der Curve ebensowohl wie S und S_1 die Mittelpunkte von projectiven, die Curve erzeugenden Strahlenbüscheln sind, dass also S und S_1 durch zwei beliebige andere Curvenpunkte ersetzt werden können. Analoges gilt rechts von den Geraden u und u_1, die in dem Sechseck des Brianchon als Seiten vorkommen.

109 Denken wir uns im Pascal'schen Sechseck SPS_1MAL_1 (Fig. 34) alle Eckpunkte ausser A fest und diesen Punkt A auf der Curve fortgleitend, so dreht sich die Gerade L_1A oder u_1 um L_1 und MA oder u um M, und die Punkte D_1 und D gleiten auf den festen Geraden d_1 und d, so jedoch, dass ihre Verbindungslinie DD_1 beständig durch den festen Punkt S_2 geht. Denn der

*) Pascal entdeckte diese fundamentale Eigenschaft von sechs Punkten eines Kegelschnittes 1639 im Alter von 16 Jahren. Brianchon veröffentlichte seinen ebenso fundamentalen Satz 1806 im Journal de l'Ecole polytechnique, Cahier 13.

Pascal'sche Satz gilt für jedes so entstehende Sechseck. Folglich beschreiben D_1 und D zwei perspective Punktreihen d_1 und d, welche Schnitte des Strahlenbüschels S_2 sind. Und zugleich beschreiben u_1 und u um resp. L_1 und M zwei projective

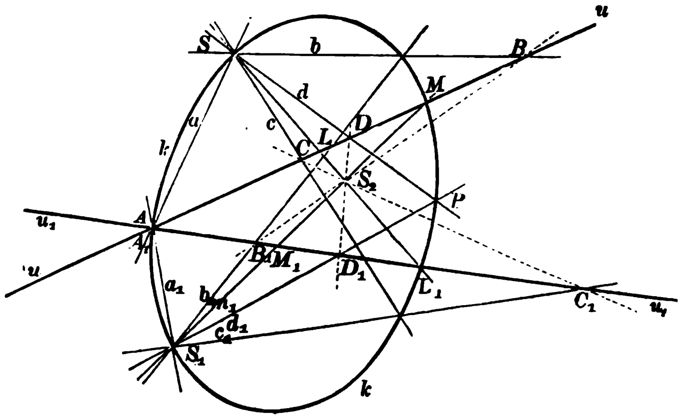


Fig. 34.

Strahlenbüschel, welche Scheine dieser perspectiven Punktreihen d_1 und d sind. Wir können also die Curve k auch als Erzeugniss der projectiven Strahlenbüschel L_1 und M auffassen, deren Mittelpunkte zwei ganz beliebige Punkte der Curve sind. — Denken Sie sich ebenso im Sechseck $SS_1RDD_1Q_1$ des Brianchon (Fig. 35) die Seite SS_1 bewegt, während die übrigen Seiten unverändert bleiben, so jedoch, dass SS_1 nicht aufhört, ein Strahl des Büschels $\varkappa$ zweiter Ordnung zu sein; dann beschreibt S_1 eine Punktreihe S_1R oder r_1 und S eine zu r_1 projective Punktreihe SQ_1 oder q. Denn der Schnittpunkt der Hauptdiagonalen S_1D_1 und SD bewegt sich auf der festen Geraden Q_1R und beschreibt in dieser eine Punktreihe u_2, zu welcher q und r_1 perspectiv liegen. Wir können also den Büschel zweiter Ordnung auch durch die projectiven Punktreihen q und r_1 erzeugen. Hiermit ist bewiesen, dass die Lehrsätze des Pascal und des Brianchon allgemein gültig sind, und zugleich sind wir zu folgendem Fundamentalsatze über die Curven und Strahlenbüschel zweiter Ordnung gelangt:

Eine Curve zweiter Ordnung wird aus beliebigen zwei ihrer Punkte durch projective Strahlenbüschel projicirt; durch jeden Punkt der Curve gehen zwei homologe Strahlen dieser projectiven Büschel.

Ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung wird von beliebigen zwei seiner Strahlen in projectiven Punktreihen geschnitten; auf jedem Strahle des Büschels liegen zwei homologe Punkte dieser Reihen.

110 Wir werden diese Sätze später benutzen, um auch die Gebilde zweiter Ordnung auf einander und auf die einförmigen Grundgebilde projectiv zu beziehen, ähnlich wie die Grundgebilde auf einander. Schon jetzt stellen wir auf Grund dieser Sätze folgende Definitionen auf:

Vier Punkte einer Curve zweiter Ordnung heissen „harmonische Curvenpunkte“, wenn sie aus irgend einem und folglich aus jedem fünften Punkte der Curve durch vier harmonische Strahlen projicirt werden.

Vier Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung heissen „harmonisch“, wenn sie von irgend einem und folglich von jedem fünften Strahle des Büschels in vier harmonischen Punkten geschnitten werden.

Durch drei Punkte einer Curve oder drei Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung ist der vierte harmonische eindeutig bestimmt, sobald noch angegeben ist, von welchem der gegebenen drei Punkte oder Strahlen er getrennt sein soll.

111 Indem wir Bezug nehmen auf einen früheren Satz über die Tangenten der Curven und die Berührungspunkte der Büschel zweiter Ordnung (Seite 72), folgern wir aus dem Fundamentalsatze:

Durch jeden Punkt einer Curve zweiter Ordnung geht eine Tangente der Curve.

Auf jedem Strahle eines Büschels zweiter Ordnung liegt ein Berührungspunkt des Büschels.

Die Curve zweiter Ordnung wird also von einer Schaar von Tangenten eingehüllt, und der Strahlenbüschel zweiter Ordnung umhüllt eine Reihe von Berührungspunkten. Es wird eine Aufgabe meines nächsten Vortrages sein, Ihnen zu zeigen, dass jene Tangentenschaar und diese Reihe von Berührungspunkten nichts Anderes sind, als ein Strahlenbüschel und eine Punktreihe zweiter Ordnung.

112 Andere sehr wichtige Eigenschaften der Curven und Büschel zweiter Ordnung sind in folgenden Sätzen ausgesprochen, die wir oft benutzen werden:

Zwei Curven zweiter Ordnung fallen zusammen, wenn sie entweder fünf Punkte, oder vier Punkte und die Tangente an einem S, oder drei Punkte und die Tangenten an zwei von ihnen S, S_1 gemein haben.

Denn projiciren wir die Punkte der beiden Curven aus dem gemeinschaftlichen Punkte S durch einen Büschel, so sind zu diesem die beiden Strahlenbüschel projectiv, die aus dem gemeinschaftlichen Punkte S_1 die Curven projiciren. Diese concentrischen Büschel S_1 aber sind identisch, weil sie drei Strahlen entsprechend gemein haben; nämlich jeden Strahl, der nach einem von S und S_1 verschiedenen gemeinschaftlichen Punkt der Curven geht, sodann den Strahl $S_1 S$, wenn in S die Curven eine gemeinschaftliche Tangente haben, und endlich die Tangente in S_1, wenn diese beide Curven berührt. Jeder Strahl von S projicirt also einen gemeinschaftlichen Punkt der beiden Curven.

Zwei Strahlenbüschel zweiter Ordnung fallen zusammen, wenn sie fünf Strahlen, oder vier Strahlen und den Berührungspunkt in einem u, oder drei Strahlen und die Berührungspunkte in zwei von ihnen u, u_1 gemein haben.

Denn schneiden wir die beiden Büschel durch den gemeinschaftlichen Strahl u in einer Punktreihe, so sind zu dieser die beiden Punktreihen projectiv, in denen die Büschel von dem Strahle u_1 geschnitten werden. Diese conjectiven Reihen aber sind identisch, weil sie drei Punkte entsprechend gemein haben; nämlich jeden Punkt, der in einem von u und u_1 verschiedenen gemeinschaftlichen Strahle der Büschel liegt, sodann den Punkt uu_1, wenn in u die Büschel einen gemeinschaftlichen Berührungspunkt haben, und endlich den Berührungspunkt in u_1, wenn dieser beiden Büscheln angehört. Durch jeden Punkt von u geht also noch ein gemeinschaftlicher Strahl der Büschel.

Siebenter Vortrag.

Folgerungen aus den Lehrsätzen des Pascal und des Brianchon. Die drei Arten von Curven zweiter Ordnung.

---

113 Die wichtigen Eigenschaften, die wir von den Sechsecken in der Curve und im Strahlenbüschel zweiter Ordnung bewiesen haben, führen uns zu nicht minder wichtigen Sätzen über ebensolche Fünfecke, Vierecke und Dreiecke. Der Ableitung dieser Sätze muss ich einige Bemerkungen über die Tangenten der Curven und die Berührungspunkte der Büschel zweiter Ordnung vorausschicken.

114 Wir nannten eine Gerade p_1 (Fig. 32), die mit einer Curve zweiter Ordnung in einer Ebene liegt und mit ihr nur einen Punkt S_1 gemein hat, eine Tangente der Curve am Punkte S_1, und fanden, dass durch jeden Punkt der Curve eine einzige Tangente geht. Jeder andere durch S_1 gehende Strahl a_1 der Ebene schneidet die Curve in noch einem zweiten Punkte A. Drehen wir den Strahl a_1 um S_1, so durchläuft sein Schnittpunkt A die Curve; er nähert sich dem Punkte S_1 ins Unbegrenzte, wenn a_1 der Tangente p_1 unbegrenzt näher kommt. Die Tangente stellt sich hiernach dar als die Grenzlage der Verbindungslinie von zwei einander unendlich nahe kommenden (consecutiven) Curvenpunkten, und zwar lässt sich diese Definition anwenden auf die Tangenten nicht allein der Curven zweiter Ordnung, sondern ganz beliebiger Curven. — Analog nannten wir einen Punkt P_1 (Fig. 33), durch den nur ein Strahl u_1 eines Büschels $\varkappa$ zweiter Ordnung geht, einen Berührungspunkt des Büschels im Strahle u_1, und fanden, dass auf jedem Strahle des Büschels $\varkappa$ ein einziger Berührungspunkt liegt. Durch jeden anderen Punkt A_1 von u_1 geht noch ein zweiter Strahl a des Büschels. Bewegt sich A_1 auf u_1, so durchläuft a den Büschel $\varkappa$ und nähert sich dem Strahle u_1 ins Unbegrenzte, wenn A_1 dem Punkte P_1 unbegrenzt näher kommt. Der Berührungspunkt stellt sich hiernach dar als die Grenzlage des Schnittpunktes von zwei consecutiven; d. h. einander unendlich nahe kommenden Strahlen des Büschels.

Wenn also in einem der Curve zweiter Ordnung eingeschriebenen Sechseck zwei benachbarte Eckpunkte einander unbegrenzt sich nähern, so tritt an die Stelle der sie verbindenden Seite eine Tangente der Curve; und wenn in einem Sechseck, dessen Seiten aus Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung bestehen, zwei benachbarte Seiten einander unbegrenzt sich nähern, so tritt an die Stelle des Eckpunktes, worin sie sich schneiden, ein Berührungspunkt des Büschels. Jenachdem nun ein, zwei oder drei paar benachbarte Elemente zusammenfallen, geht das Sechseck über in ein Fünfeck, ein Viereck oder ein Dreieck. Für das Fünfeck lauten hiernach die Lehrsätze des Pascal und des Brianchon, wie folgt:

In jedem einer Curve zweiter Ordnung eingeschriebenen Fünfeck liegen die Schnittpunkte von zwei Paaren nicht benachbarter Seiten in einer Geraden mit dem Punkte, in welchem die fünfte Seite und die Tangente des gegenüberliegenden Eckpunktes sich schneiden (Fig. 36).

In jedem, von Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung gebildeten Fünfeck schneiden sich die Diagonalen, welche irgend zwei Paare von Eckpunkten verbinden, in einem Punkte der Geraden, welche den fünften Eckpunkt mit dem Berührungspunkte der gegenüberliegenden Seite verbindet (Fig. 37).

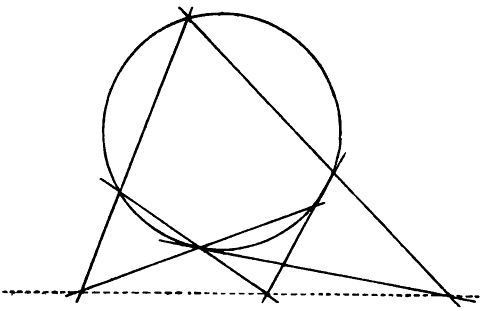


Fig. 36.

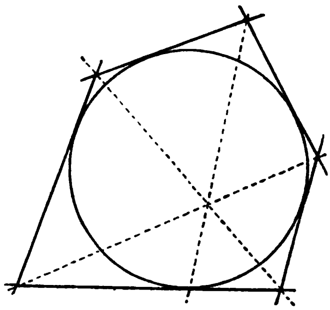


Fig. 37.

Dieser Doppelsatz enthält die Lösung der beiden Aufgaben:

Wenn fünf beliebige Punkte einer Curve zweiter Ordnung gegeben sind, ihre Tangenten mittelst des Lineals zu zeichnen.

Wenn fünf Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung gegeben sind, ihre Berührungspunkte zu zeichnen.

116 Für das Viereck erhalten wir die folgenden Sätze (Fig. 38):

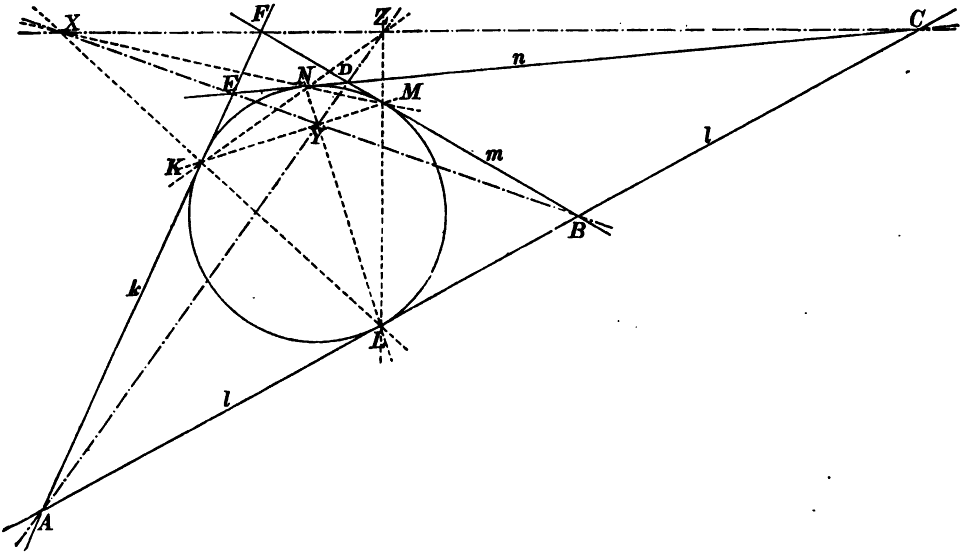


Fig. 38.

In jedem einer Curve zweiter Ordnung eingeschriebenen Viereck liegen die beiden Schnittpunkte der Gegenseiten mit dem Schnittpunkte der Tangenten gegenüberliegender Eckpunkte in einer Geraden (Mac Laurin).

In jedem von Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung gebildeten Viereck schneiden sich die beiden Diagonalen und die Verbindungslinie der Berührungspunkte gegenüberliegender Seiten in einem Punkte.

117 Für das Dreieck endlich ergiebt sich Folgendes:

Die drei Punkte, in denen die Seiten eines der Curve zweiter Ordnung eingeschriebenen Dreiecks von den Tangenten der gegenüberliegenden Eckpunkte geschnitten werden, liegen auf einer Geraden.

Die drei Geraden, welche die Eckpunkte eines von Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung gebildeten Dreiecks mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, schneiden sich in einem Punkte.

118 Alle diese Sätze, die auch zur Lösung einer Reihe einfacher Aufgaben (namentlich derjenigen von Seite 73) benutzt werden können, lassen sich direkt, ohne Benutzung des Sechsecks ableiten. Ich will Ihnen beispielsweise für das Viereck diesen direkten Be-

weis geben, weil er uns zugleich neue merkwürdige Eigenschaften projectiver Grundgebilde aufschliesst, und weil ich zudem die Sätze über das Viereck zu weiteren Folgerungen benutzen will.

Um in zwei projectiven Strahlenbüscheln S, S_1 (Fig. 34) zu jedem Strahle des einen den entsprechenden Strahl des anderen leicht zu finden, haben wir einen dritten Strahlenbüschel S_2 bestimmt, der zu jedem der ersteren perspectiv liegt. Zu dem Ende brachten wir die Büschel S, S_1 in den resp. Punktreihen u und u_1 zum Schnitt mit zwei Geraden, die wir durch den Schnittpunkt von zwei homologen Strahlen a, a_1 der Büschel legten. Da diese Punktreihen perspectiv liegen, so ist der Strahlenbüschel S_2, den sie erzeugen, der gesuchte.

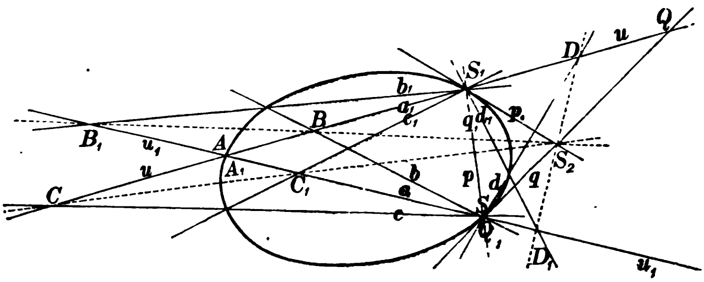


Fig. 39.

Dieser Schluss gilt auch dann noch, wenn u mit a_1 und u_1 mit a zusammenfällt (Fig. 39). Die Punkte ba_1 und $b_1 a$ (d. h. B und B_1) oder ca_1 und $c_1 a$ (d. h. C und C_1) u. s. w., in denen zwei homologe Strahlen a, a_1 von je zwei anderen b, b_1 oder c, c_1 wechselsweise geschnitten werden, liegen also mit einem festen Punkte S_2 in einer Geraden. Wird durch diesen Punkt S_2 irgend eine Gerade DD_1 gelegt, die in D und D_1 die resp. Strahlen a_1 und a schneidet, so sind SD und $S_1 D_1$ homologe Strahlen der Büschel S, S_1. Lassen wir nun D_1 mit S zusammenfallen, so gehen SD und $D_1 D$ in SS_2 oder q über, und diesem Strahle von S entspricht der Strahl $S_1 S$ oder q_1, welcher die Mittelpunkte der Büschel S, S_1 verbindet. Die Gerade SS_2 oder q ist also eine Tangente der von S und S_1 erzeugten Curve zweiter Ordnung, und ebenso $S_1 S_2$ oder p_1. Der feste Punkt S_2 ist somit Schnittpunkt der beiden Tangenten q und p_1 in S und S_1, d. h. der beiden Strahlen, die in den Büscheln S, S_1 dem gemeinschaftlichen Strahle SS_1 entsprechen. Wir gelangen deshalb immer zu demselben Punkte S_2, mögen wir nun mit a, a_1, oder mit irgend einem anderen Paare (b, b_1 oder c, c_1) homologer Strahlen die resp. Geraden u_1, u zusammenfallen lassen. Durch den Punkt S_2 geht die Verbindungslinie von je zwei Punkten kl_1 und $k_1 l$, in denen irgend zwei Paare k, k_1 und l, l_1 homologer Strahlen sich wechselsweise schneiden.

Um in zwei projectiven Punktreihen u, u_1 (Fig. 35) zu jedem Punkte der einen den entsprechenden Punkt der anderen Reihe leicht auffinden zu können, haben wir in folgender Weise eine dritte Punktreihe u_2 bestimmt, die zu jeder der gegebenen perspectiv liegt. Wir projicirten u, u_1 durch die resp. Strahlenbüschel S, S_1, deren Mittelpunkte wir auf der Verbindungslinie von irgend zwei homologen Punkten A, A_1 der gegebenen Punktreihen annahmen. Da diese Strahlenbüschel perspectiv liegen, so ist die Punktreihe u_2, deren Scheine sie sind, die gesuchte.

Lassen wir nun S mit A_1 und S_1 mit A zusammenfallen (Fig. 40), so geht u_2 durch die beiden Punkte von u und u_1, die

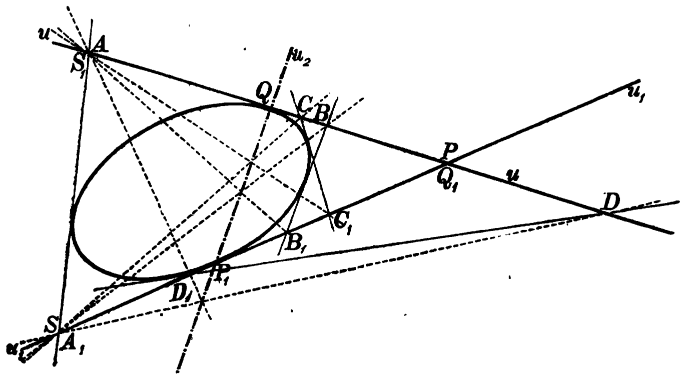


Fig. 40.

dem Schnittpunkte uu_1 entsprechen. Zwei beliebige homologe Punkte D, D_1, werden nämlich aus resp. A_1 und A durch zwei Strahlen A_1D und AD_1 projicirt, die sich auf der Geraden u_2 schneiden. Aber dieser Schnittpunkt und folglich auch D_1 fällt mit dem Punkte u_1u_2 oder P_1 zusammen, wenn D mit uu_1 oder P zur Deckung gebracht wird, so dass u_2 wirklich durch den einen und ebenso durch den anderen der beiden Punkte P_1, Q geht, die dem Schnittpunkte PQ_1 von u und u_1 entsprechen. Mit anderen Worten: Die Gerade u_2 verbindet die in u und u_1

liegenden Berührungspunkte des von den Punktreihen u, u_1 erzeugten Strahlenbüschels zweiter Ordnung. Wir gelangen deshalb immer zu derselben Geraden u_2, mögen wir nun mit A, A_1, oder mit irgend einem anderen Paare (B, B_1 oder C, C_1) homologer Punkte die resp. Mittelpunkte S_1, S zusammenfallen lassen. Jeder Schnittpunkt zweier Strahlen, wie BC_1 und B_1C, durch welche irgend zwei Paare (B, B_1 und C, C_1) homologer Punkte sich wechselsweise projiciren, liegt auf der Geraden u_2.

119 Die eben gewonnenen Ergebnisse können wir in folgendem Doppelsatze zusammenfassen:

Die beiden Punkte ab_1 und a_1b, in denen irgend zwei paar homologe Strahlen der projectiven Büschel S, S_1 sich wechselsweise schneiden, liegen in einer Geraden mit dem Schnittpunkte S_2 der beiden Strahlen, die dem gemeinschaftlichen Strahle SS_1 der Büschel entsprechen.

Die beiden Geraden AB_1 und A_1B, durch welche irgend zwei paar homologe Punkte der projectiven Punktreihen u, u_1 sich wechselsweise projiciren, schneiden sich auf der Verbindungslinie u_2 der beiden Punkte, die dem gemeinschaftlichen Punkte uu_1 der Reihen entsprechen.

120 Sie werden in diesen Sätzen sofort die früheren über das Viereck in der Curve und im Strahlenbüschel zweiter Ordnung wieder erkennen, wenn Sie Folgendes beachten:

Die Büschel S, S_1 erzeugen eine Curve zweiter Ordnung; die Geraden a, b_1 und a_1, b sind die zwei paar Gegenseiten eines der Curve eingeschriebenen Vierecks abb_1a_1, in S_2 aber schneiden sich die Tangenten von zwei gegenüberliegenden Eckpunkten S, S_1 dieses Vierecks (Fig. 39).

Die Punktreihen u, u_1 erzeugen einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung; die Punkte A, B_1 und A_1, B sind die zwei paar Gegenpunkte eines in dem Büschel enthaltenen Vierseits, u_2 aber verbindet die Berührungspunkte von zwei Gegenseiten u, u_1 dieses Vierseits (Fig. 40).

Dass die obigen Sätze ganz besonders geeignet sind, uns zu jedem Elemente des einen von zwei projectiven einförmigen Grundgebilden das entsprechende Element des anderen zu liefern, liegt auf der Hand. Wenn z. B. in den projectiven Punktreihen u, u_1 (Fig. 40) drei paar homologe Punkte gegeben sind, so lässt sich aus ihnen die Gerade u_2 sofort ableiten; diese aber weist, wie der Satz rechts angiebt, jedem Punkte von u den entsprechenden Punkt von u_1 zu.

121 Die soeben wiederholt bewiesenen Sätze von den Vierecken

in der Curve und im Strahlenbüschel zweiter Ordnung lassen sich auch in der folgenden allgemeineren Form aussprechen (Fig. 38):

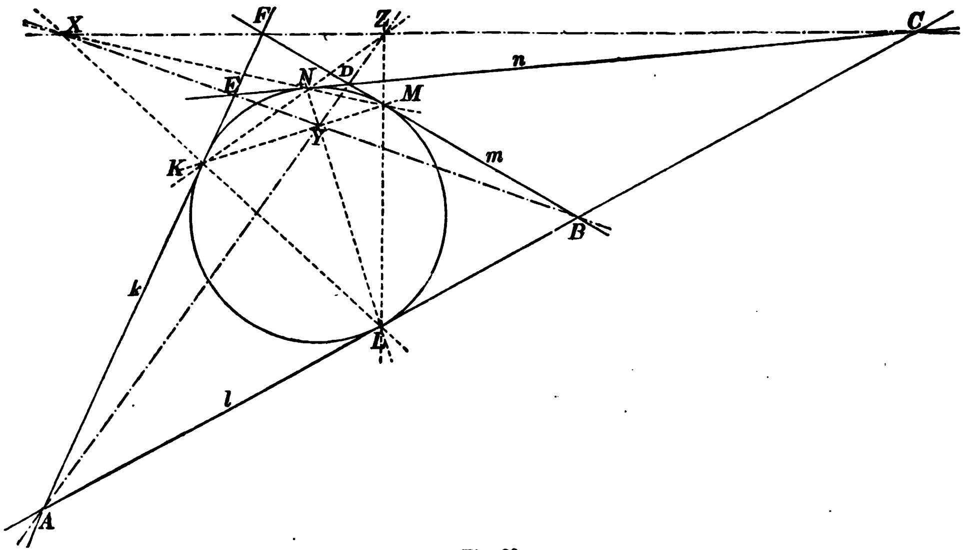


Fig. 38.

Bilden vier Punkte, K, L, M, N einer Curve zweiter Ordnung ein vollständiges Viereck und ihre Tangenten k, l, m, n ein vollständiges Vierseit, so liegen in den Verbindungslinien der drei Nebeneckpunkte X, Y, Z des Vierecks je zwei Gegenpunkte des Vierseits.	Bilden vier Strahlen k, l, m, n eines Büschels zweiter Ordnung ein vollständiges Vierseit und ihre Berührungspunkte K, L, M, N ein vollständiges Viereck, so gehen durch die Schnittpunkte X, Y, Z der drei Diagonalen des Vierseits je zwei Gegenseiten des Vierecks.

Die früher aufgestellten Sätze nämlich gelten links für jedes der drei einfachen Vierecke, die in dem vollständigen Viereck $KLMN$, und rechts für jedes der drei einfachen Vierseite, die in dem vollständigen Vierseit $klmn$ enthalten sind.

In dieser Fassung sagt aber der Satz links ganz dasselbe aus wie der Satz rechts; denn beide sagen aus, dass die drei Diagonalen des Vierseits dasselbe Dreieck bilden wie die drei Nebeneckpunkte des Vierecks. Hat aber umgekehrt ein Viereck $KLMN$ zu einem ihm umschriebenen Vierseit $klmn$ diese Lage, so kann sowohl eine Curve zweiter Ordnung construirt werden, welche die Geraden k, l, m, n in den Punkten K, L, M, N berührt, als auch ein Büschel zweiter Ordnung, der die Punkte K, L, M, N in den Strahlen k, l, m, n zu Berührungspunkten hat. Denn die Curve zweiter Ordnung durch K, L, M, N, welche in K die Gerade k berührt, hat in Folge des Satzes auch die Geraden l, m, n zu Tangenten; und der Büschel zweiter Ordnung, welcher die Strahlen k, l, m, n enthält und in k den Punkt K zum Berührungspunkte hat, muss auch die Punkte L, M, N zu Berührungspunkten haben. Vier Tangenten einer Curve zweiter Ordnung und ihre vier Berührungspunkte können also stets als vier Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung und deren vier Berührungspunkte aufgefasst werden.

Eine Curve zweiter Ordnung durch drei Berührungspunkte K, L, M eines Büschels zweiter Ordnung, die in zwei dieser Punkte K, L die zugehörigen Strahlen k, l des Büschels tangirt, geht folglich auch durch jeden vierten Berührungspunkt N des Büschels und tangirt in N den zugehörigen Strahl n des Büschels. Umgekehrt enthält ein Büschel zweiter Ordnung jede Tangente einer Curve zweiter Ordnung, sobald er drei Tangenten und die Berührungspunkte von zwei derselben enthält. Wir haben so die folgende schöne Beziehung zwischen den Curven und Büscheln zweiter Ordnung bewiesen:

Die Tangenten einer Curve zweiter Ordnung bilden einen Strahlenbüchel zweiter Ordnung. Die Curve ist von der zweiten Classe, d. h. durch keinen Punkt gehen mehr als zwei ihrer Tangenten.

Die Berührungspunkte eines Strahlenbüschels zweiter Ordnung liegen auf einer Curve zweiter Ordnung. Keine Gerade enthält mehr als zwei von ihnen.

Zwei Curven zweiter Ordnung fallen zusammen, wenn sie fünf Tangenten, oder vier Tangenten und den Berührungspunkt von einer, oder drei Tangenten und die Berührungspunkte von zwei dieser Tangenten gemein haben. Denn die beiden sie umhüllenden Strahlenbüschel zweiter Ordnung fallen zusammen (Seite 80).

122 Seiner Wichtigkeit wegen beweise ich den letzten Doppelsatz noch einmal auf andere Art, wobei sich noch eine neue interessante Eigenschaft der Curve zweiter Ordnung ergeben wird. Möge von den vier Eckpunkten K, L, M, N (Fig. 38) eines der Curve zweiter Ordnung eingeschriebenen Vierecks einer, K, sich auf der Curve bewegen, indess die übrigen drei nebst ihren Tangenten l, m, n ihre Lage beibehalten. Dann gleitet oder wälzt sich die Tangente k des Punktes K auf der Curve fort, und auch ihre

Schnittpunkte E, A mit den resp. Tangenten n, l bewegen sich. Es ist aber leicht zu erkennen, dass E und A bei dieser Bewegung zwei projective Punktreihen in resp. n und l beschreiben, dass also die Tangente k einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung durchläuft. Denn die beiden Diagonalen EB und AD des Vierseits $klmn$ schneiden sich in einem veränderlichen Punkte Y der festen Geraden LN und beschreiben folglich um die festen Eckpunkte B und D zwei perspective Strahlenbüschel; von diesen aber sind die beiden von E und A beschriebenen Punktreihen n, l zwei Schnitte. Damit ist der Satz links bewiesen; der Satz rechts aber lässt sich ganz analog beweisen.

Auch die Gerade MK geht durch den Punkt Y und beschreibt bei der Bewegung des Punktes K einen Strahlenbüschel um den festen Punkt M; dieser Büschel M ist zu dem von BE beschriebenen Büschel B perspectiv und folglich zu der von E beschriebenen Punktreihe n projectiv. Daraus folgt, wenn K die Curve durchläuft:

Sind von einer Curve zweiter Ordnung ein beliebiger fester Punkt M *und eine beliebige feste Tangente* n *gegeben, und lassen wir jedem Strahle von* M, *der einen veränderlichen Punkt* K *der Curve projicirt, den Schnittpunkt von* n *mit der Tangente des Punktes* K *entsprechen, so sind der Strahlenbüschel* M *und die Punktreihe* n *projectiv auf einander bezogen.*

Diesen Satz hat **Chasles** seinem Traité des Sections coniques zu Grunde gelegt, ohne ihn jedoch ausreichend zu begründen. Der Satz ist in der Ebene sich selbst reciprok, da ja, wie eben bewiesen wurde und auch aus ihm selbst folgt, die Tangenten einer Curve zweiter Ordnung stets einen Büschel zweiter Ordnung bilden. Wir folgern aus ihm:

„Die Tangenten an vier harmonischen Punkten einer Curve „zweiter Ordnung sind vier harmonische Tangenten.“

Sie werden nämlich von jeder fünften Tangente n in vier harmonischen Punkten geschnitten, weil ihre vier Berührungspunkte aus jedem fünften Punkte der Curve durch vier harmonische Strahlen projicirt werden.

Den Satz, dass ein Büschel zweiter Ordnung von irgend zwei seiner Strahlen in projectiven Punktreihen geschnitten wird, können wir nunmehr auch so aussprechen:

„Der Büschel der Tangenten einer Curve zweiter Ordnung wird „von je zwei Tangenten in projectiven Punktreihen geschnitten.“

123 Der Lehrsatz des Brianchon kann jetzt in folgender Fassung dem Lehrsatze des Pascal gegenübergestellt werden:

„Von jedem einer Curve zweiter Ordnung „umschriebenen“
„Sechseck (dessen Seiten die Curve berühren) schneiden sich die
„drei Hauptdiagonalen in einem Punkte.“

So wird der Lehrsatz des Brianchon gewöhnlich ausgesprochen, und eine analoge Fassung pflegt man den aus ihm folgenden Sätzen über das Fünfeck, Viereck und Dreieck im Strahlenbüschel zweiter Ordnung zu geben.

124 Ich begnüge mich damit, Ihnen noch einige der früher bewiesenen Sätze nebst ihren reciproken in dieser neuen Fassung vorzuführen, jedoch übertragen auf die Gebilde zweiter Ordnung im Strahlenbündel. Nach früheren Sätzen (Seite 70) wird jede Curve und jeder Strahlenbüschel zweiter Ordnung aus einem nicht in der Ebene liegenden Punkte durch einen Kegel resp. einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung projicirt. Jede Tangente der Curve wird durch eine Ebene projicirt, die mit dem Kegel nur einen Strahl gemein hat und eine „Berührungsebene“ des Kegels heisst. Ebenso wird jeder Berührungspunkt des Strahlenbüschels zweiter Ordnung durch einen sogenannten „Berührungsstrahl“ des Ebenenbüschels projicirt, und durch diesen Strahl geht nur eine Ebene des Büschels. Da auch umgekehrt jeder Kegel und jeder Ebenenbüschel zweiter Ordnung von einer beliebigen Ebene in einer Curve resp. einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung geschnitten wird, so ergiebt sich:

Die Berührungsebenen eines Kegels zweiter Ordnung bilden einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung.	Die Berührungsstrahlen eines Ebenenbüschels zweiter Ordnung bilden einen Kegel zweiter Ordnung.
Die Strahlen eines Kegels zweiter Ordnung werden aus je zwei unter ihnen durch projective Ebenenbüschel projicirt (vgl. Seite 79).	Die Berührungsebenen eines Kegels zweiter Ordnung werden von je zwei unter ihnen in projectiven Strahlenbüscheln geschnitten.

125 Aehnlich wie früher (Seite 79) können wir daher folgende Definitionen aufstellen:

Vier Strahlen eines Kegels zweiter Ordnung heissen „harmonische Strahlen“, wenn sie aus irgend einem und folglich	Vier Berührungsebenen eines Kegels zweiter Ordnung heissen „harmonische Berührungsebenen“, wenn sie von irgend einer

aus jedem fünften Strahle des Kegels durch vier harmonische Ebenen projicirt werden.

und folglich von jeder fünften in vier harmonischen Strahlen geschnitten werden.

Die Lehrsätze des **Pascal** und des **Brianchon** lauten für den Kegel zweiter Ordnung:

In jedem einem Kegel zweiter Ordnung eingeschriebenen Sechskant schneiden sich die drei paar Gegenseiten in drei Geraden, die in einer Ebene liegen.

In jedem einem Kegel zweiter Ordnung umschriebenen Sechskant schneiden sich die drei Hauptdiagonal-Ebenen in einer Geraden. Aufg 89

Es wird eine nützliche Uebung für Sie sein, wenn Sie auch die übrigen Sätze, die wir für ebene Gebilde bewiesen haben, auf die entsprechenden Gebilde im Strahlenbündel übertragen.

126 Wir können schon an dieser Stelle beweisen, dass jede Curve zweiter Ordnung als ebener Schnitt von Kreiskegeln aufgefasst werden kann, also im Sinne der Griechischen Geometer ein **Kegelschnitt** ist. Jeder Kreis ist eine Curve zweiter Ordnung, denn er wird aus je zwei seiner Punkte S, S_1 durch congruente und somit projective Strahlenbüschel projicirt, weil Peripheriewinkel, die auf demselben Bogen stehen (wie $\angle ASB$ und $\angle AS_1B$ in Fig. 41), gleich sind. Jeder gerade oder schiefe

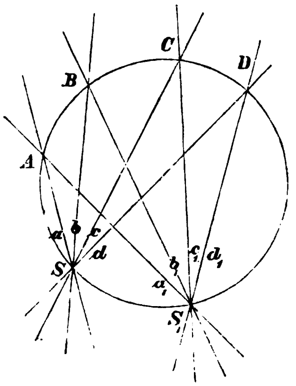


Fig. 41.

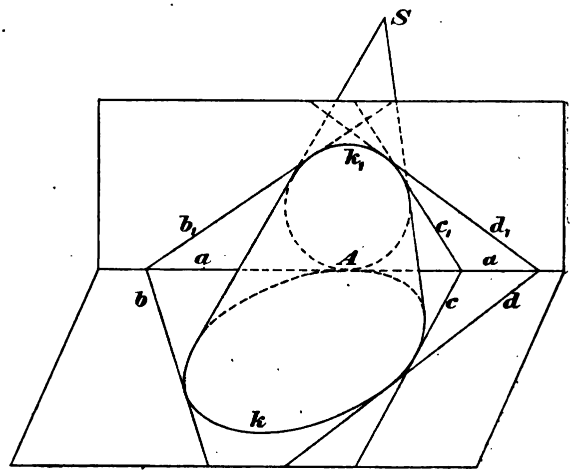


Fig. 42.

Kreiskegel ist folglich ein Kegel zweiter Ordnung (Seite 70), und jeder Kegelschnitt ist eine Curve zweiter Ordnung.

Sei nun k eine beliebige Curve zweiter Ordnung und k_1 ein Kreis, welcher k in einem Punkte A berührt, dessen Ebene aber die Ebene von k in der Tangente a von A schneidet (Fig. 42). Wir legen durch irgend drei Punkte von a drei andere Tangenten b, c, d an k und ebenso drei Tangenten b_1, c_1, d_1 an k_1, bringen die Ebenen bb_1, cc_1, dd_1 zum Schnitt in einem Punkte S und projiciren aus S den Kreis k_1 auf die Ebene von k. Dann ist die Projektion eine Curve zweiter Ordnung, die mit k die vier Tangenten a, b, c, d und den Berührungspunkt A von a gemein hat und folglich mit k zusammenfällt (Seite 88). Der Kreiskegel $S(k_1)$ geht demnach auch durch k, die beliebige Curve zweiter Ordnung k liegt auf ihm und ist ein Kegelschnitt. Wir sind berechtigt, die Curven zweiter Ordnung nunmehr „Kegelschnitte" zu nennen.

Aus dem Satze, dass eine Curve zweiter Ordnung mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat, können wir für ihren Verlauf in der Ebene eine bemerkenswerthe Folgerung ziehen. Die Curve hat nämlich hiernach mit der unendlich fernen Geraden ihrer Ebene entweder keinen Punkt gemein, oder einen Punkt, worin sie von der unendlich fernen Geraden berührt wird, oder endlich zwei Schnittpunkte. Im ersten Falle sind alle Punkte der Curve eigentliche Punkte und alle ihre Tangenten eigentliche Strahlen der Ebene; die Curve wird in diesem Falle eine „Ellipse" genannt (s. Figg. 34 bis 42). Im zweiten Falle erstreckt sich die Curve mit zwei Aesten ins Unendliche, indem sie dem Punkte zustrebt, worin sie die unendlich ferne Gerade berührt; sie heisst dann eine „Parabel" (s. Fig. 33, Seite 72). Im dritten Falle besteht die Curve aus zwei krummen Linien, deren jede mit zwei Aesten den beiden unendlich fernen Curvenpunkten zustrebt, und durch diese Punkte hängen die beiden krummen Linien mit einander zusammen; die Curve heisst in diesem Falle eine „Hyperbel" (Fig. 32 Seite 71). Weil die unendlich ferne Gerade die Hyperbel schneidet, so sind alle Tangenten der Hyperbel, insbesondere auch die Tangenten der beiden unendlich fernen Curvenpunkte, eigentliche Strahlen der Ebene. Es giebt also zwei eigentliche Tangenten, welche die Hyperbel in ihren unendlich fernen Punkten berühren; sie heissen die „Asymptoten" der Hyperbel.

Dieselben drei Arten von Curven zweiter Ordnung können wir aus jedem Kegel zweiter Ordnung herausschneiden, dessen Mittelpunkt nicht unendlich fern liegt. Eine durch den Mittelpunkt gelegte Ebene ε hat nämlich mit dem Kegel entweder nur diesen Punkt gemein, oder sie berührt ihn in einem Strahle s, oder endlich sie schneidet ihn in zwei Strahlen p, q. Jede zu ε parallele Ebene ε_1 schneidet im ersten Falle alle Strahlen des Kegels in eigentlichen Punkten und den Kegel selbst in einer Ellipse. Im zweiten Falle ist die Schnittcurve eine Parabel, weil der parallele Strahl s in einem unendlich fernen Punkte von ε_1 geschnitten wird; und zwar ist die Schnittlinie von ε_1 mit der Berührungsebene ε die unendlich ferne Tangente der Parabel. Endlich im dritten Falle ist die Schnittcurve eine Hyperbel, weil die beiden Kegelstrahlen p, q ihre unendlich fernen Punkte mit ε_1 gemein haben. Die Ebenen, die in p und q den Kegel berühren, werden von ε_1 in den Asymptoten der Hyperbel geschnitten; die Hyperbel aber besteht aus zwei krummen Linien, weil beide Hälften des Kegels von ε_1 geschnitten werden. Wir können die Hyperbel wie jede Curve zweiter Ordnung als eine in sich zurücklaufende, geschlossene Curve auffassen, weil jeder sie projicirende eigentliche Kegel eine geschlossene, in sich zurücklaufende Fläche ist.

128 Zwei projective Strahlenbüschel, die schief in einer Ebene liegen, erzeugen eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem von ihnen keine homologen Strahlen, oder ein oder zwei paar homologe Strahlen parallel laufen. Wird der eine Strahlenbüschel so in der Ebene verschoben, dass er mit dem andern concentrisch wird, während seine Strahlen ihre Richtungen beibehalten, so haben die concentrischen Büschel im ersten Falle keinen, im zweiten Falle einen und im dritten zwei Strahlen entsprechend gemein. Der dritte Fall tritt namentlich dann ein, wenn die Büschel entgegengesetzt projectiv sind. Wir werden hiernach oft sofort entscheiden können, ob eine durch genügend viele Bedingungen, z. B. durch fünf Punkte bestimmte Curve zweiter Ordnung eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist.

Schwieriger ist diese Entscheidung, wenn die Curve durch Tangenten gegeben ist oder durch projective Punktreihen, die den sie umhüllenden Büschel zweiter Ordnung erzeugen. Doch erkennen Sie sofort, dass zwei projective Punktreihen dann und nur dann die Tangenten einer Parabel erzeugen, wenn ihre unendlich fernen Punkte einander entsprechen; denn nur in diesem Falle ist die unendlich ferne Gerade der Ebene eine der Tangenten.

Man nennt solche projective Punktreihen, deren unendlich ferne Punkte einander entsprechen, „projectiv ähnlich". Werden sie in perspective Lage gebracht, sodass irgend zwei eigentliche homologe Punkte zusammenfallen (Fig. 43), so stellen sie sich dar

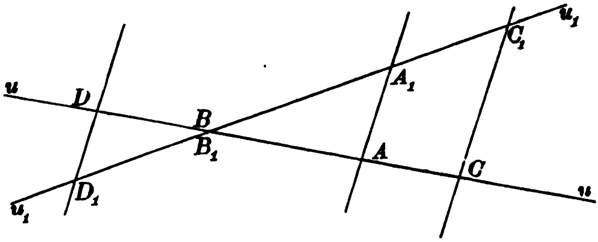


Fig. 43.

als Schnitte eines Parallelstrahlenbüschels; ihr Projectionscentrum liegt nämlich auf dem unendlich fernen Strahle, also selbst unendlich fern. Daraus folgt:

„Projectiv ähnliche Punktreihen werden durch ihre homologen „Punkte proportional getheilt; ihre homologen Strecken stehen „zu einander in einem constanten Verhältniss".

Die Bezeichnung „projectiv ähnlich" erklärt sich aus diesem Satze. Beiläufig ergiebt sich für die Parabeltangenten die metrische Beziehung:

„Zwei beliebige Tangenten u, u_1 einer Parabel werden von den „übrigen AA_1, BB_1, CC_1, ... proportional getheilt" (Fig. 33).

129 Bei dieser Gelegenheit seien noch folgende Sätze angeführt:

„Bewegen sich die Eckpunkte eines Dreiecks so auf drei ge„gebenen Geraden, dass zwei Seiten ihre Richtungen beibehal„ten, so umhüllt die dritte Seite eine Parabel, falls sie nicht „gleichfalls ihre Richtung unverändert beibehält."

Denn durch die Parallelstrahlenbüschel, welche die ersten beiden Dreiecksseiten beschreiben, werden zwei der gegebenen Geraden auf die dritte und folglich auf einander projectiv ähnlich bezogen.

„Sind in einer Ebene eine Punktreihe u und ein Strahlenbüschel „S projectiv auf einander bezogen, und zieht man durch jeden
Aufg 91 „Punkt von u eine Parallele oder Normale zu dem entsprechen„den Strahle von S, so schneiden sich diese Parallelen resp. diese „Normalen entweder in einem Punkte, oder sie umhüllen eine „Parabel, die auch die Gerade u berührt."

Der Schnitt des Strahlenbüschels S mit der unendlich fernen Geraden ist nämlich eine zu u projective unendlich ferne Punkt-

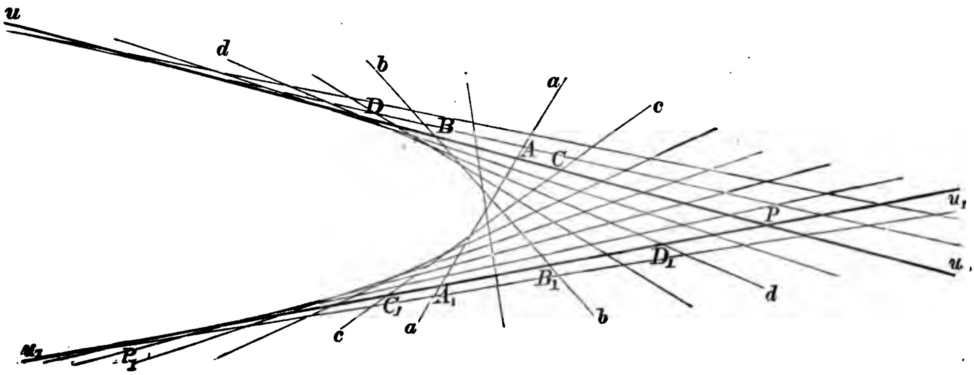


Fig. 33.

reihe. Liegt diese nicht perspectiv zu u, so erzeugt sie mit u einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung, der auch die unendlich ferne Gerade enthält und folglich eine Parabel umhüllt. Für den Fall der Parallelen ist der Satz hiermit bewiesen; für den Fall der Normalen führt man ihn auf den erledigten Fall zurück, indem man den Büschel S in seiner Ebene um einen rechten Winkel dreht.

130 Projiciren wir eine Curve zweiter Ordnung aus einem unendlich fernen Punkte, der nicht in ihrer Ebene liegt, so erhalten wir einen Kegel mit unendlich fernem Mittelpunkt, dessen Strahlen also parallel sind. Dieser wird ein „Cylinder" zweiter Ordnung genannt. Zwei projective, aber nicht perspective Ebenenbüschel mit parallelen Axen erzeugen demnach einen Cylinder zweiter Ordnung. Wir theilen die Cylinder ein in elliptische, parabolische und hyperbolische, jenachdem sie von irgend einer und folglich von jeder Ebene, die nicht durch ihren unendlich fernen Mittelpunkt geht, in Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln geschnitten werden, oder was dasselbe ist, jenachdem sie keinen oder einen unendlich fernen Strahl oder zwei solche enthalten.

Achter Vortrag.

Pol und Polare in Bezug auf Curven zweiter Ordnung.*)

131 Die Sätze über Vierecke, die einer Curve zweiter Ordnung um- oder eingeschrieben sind, führen uns zu sehr wichtigen Eigenschaften der Kegelschnitte, von denen ich Ihnen einzelne schon in der Einleitung angegeben habe. Wir gelangen zu ihnen durch folgende Betrachtung:

Ist in der Ebene einer Curve zweiter Ordnung ein Punkt U gegeben, der nicht auf der Curve selbst liegt (Figg. 44 und 45), und legen wir durch ihn zwei die Curve schneidende Gerade AC und BD, so können wir diese als die Diagonalen eines der Curve eingeschriebenen einfachen Vierecks $ABCD$ betrachten. Die zwei paar Gegenseiten BC, AD und AB, CD dieses Vierecks schneiden sich dann in je zwei Punkten P und Q, die Tangenten a, c in zwei gegenüberliegenden Eckpunkten A, C schneiden sich in einem dritten Punkte R, und diese drei Schnittpunkte P, Q, R liegen in einer Geraden u. Auf derselben Geraden schneiden sich auch die Tangenten b, d, die in den Eckpunkten B, D die Curve

*) Die Polarentheorie der Kegelschnitte wird irrthümlich meistens La Hire zugeschrieben. Wir verdanken sie Desargues, der sie 1639 in seinem „Brouillon project d'une atteinte....‟ entwickelte (Vgl. Desargues Oeuvres, réunies par Poudra, Paris 1864, T. I.). Uebrigens beweist schon Apollonius, Conicorum lib. III prop. XXXVII, dass der Schnittpunkt zweier Tangenten eines Kegelschnittes von den Punkten der Berührungssehne harmonisch getrennt ist durch die Curve. Wenn Apollonius trotzdem nicht zu der Polarentheorie gelangt, so ist m. E. die antike Auffassung der Kegelschnitte daran schuld. Apollonius fasst sie auf als ebene Schnitte von körperlichen (soliden) Kreiskegeln, die aber an der Spitze enden, also nur je eine Hälfte eines Kegels zweiter Ordnung bilden. Die Hyperbel ist deshalb bei Apollonius nur eine der beiden krummen Linien, aus denen unsere Hyperbel besteht (vgl. Seite 92); sie wird von den Geraden, die beide Linien treffen, nur in je einem Punkte geschnitten, und trennt keine zwei Punkte dieser Geraden harmonisch; auch geht durch unendlich viele Punkte der Ebene nur je eine ihrer Tangenten.

berühren (vgl. die Sätze über das eingeschriebene Viereck Seite 83 und 87).

Sind nun V und W die Schnittpunkte der Geraden u mit resp. AC und BD, so ist V von U harmonisch getrennt durch die Curvenpunkte A und C. Denn von dem Viereck $PBQD$ schneiden sich je zwei Gegenseiten in A und C, während die Diagonale BD durch U und die Diagonale PQ durch V geht. Ebenso sind U und W harmonisch getrennt durch B und D, was man mit

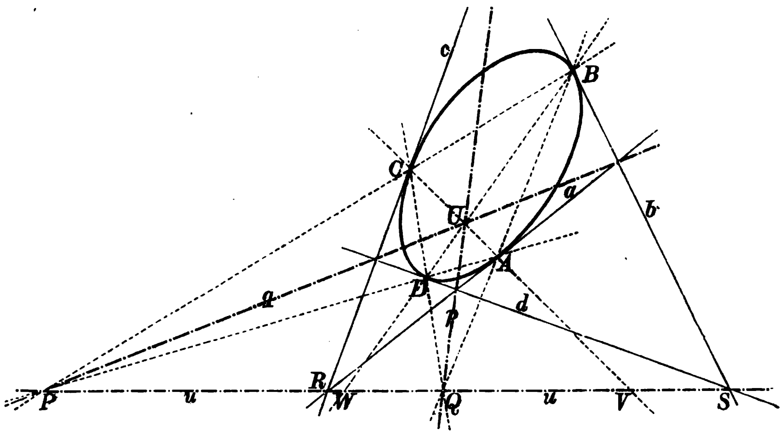


Fig. 44.

Hülfe des Vierecks $PAQC$ leicht beweist.. Die Gerade u wird also auch construirt, wenn wir nur eine Secante AC durch U legen, auf dieser den Punkt V suchen, der von U durch die Curvenpunkte A und C harmonisch getrennt ist, und mit ihm den Schnittpunkt R der beiden Tangenten von A und C verbinden. Und wie auch die zweite Secante BD durch U gelegt werden möge, so müssen auf der Geraden u, die schon durch ihre Punkte V und R bestimmt ist, allemal folgende Punkte liegen:

1) Die Schnittpunkte P und Q der Gegenseiten des Vierecks $ABCD$;
2) Der Schnittpunkt S der beiden Tangenten von B und D;
3) Der von U durch die Curvenpunkte B und D harmonisch getrennte Punkt W.

Wir wollen U den „Pol" der so bestimmten Geraden u nennen, und umgekehrt u die „Polare" des Punktes U. Die Polare eines gegebenen Punktes bezüglich einer Curve zweiter Ordnung kann man hiernach auf verschiedene Art, und zwar durch lineare Constructionen leicht finden. Umgekehrt kann man den Pol U einer gegebenen Geraden u construiren, indem man aus zwei beliebigen Punkten R, S der Geraden zwei paar Tangenten a, c und b, d an die Curve zweiter Ordnung legt (Figg. 44 und 45). Durch den Pol U gehen dann:

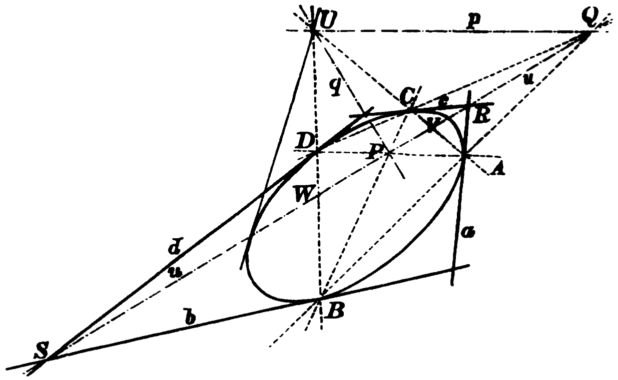


Fig. 45.

1) Die Diagonalen des einfachen Vierseits $abcd$;
2) Die Verbindungslinien AC und BD der Berührungspunkte jedes Tangentenpaares;
3) Die beiden Strahlen, von denen der eine durch a und c, der andere durch b und d harmonisch getrennt ist von u.

Denn der Schnittpunkt U von AC und BD ist der Pol von u, weil seine Polare die Schnittpunkte der beiden in A und C resp. B und D berührenden Tangenten enthält und deshalb mit u zusammenfällt. Ferner sind die Geraden RU und u harmonisch getrennt durch die Tangenten a, c, weil ihre Punkte U, V durch die Berührungspunkte A, C harmonisch getrennt sind; und ebenso ist SU von u harmonisch getrennt durch b und d, so dass die Behauptung 3) bewiesen ist. Die Richtigkeit der Behauptung 1) folgt unmittelbar aus dem früher bewiesenen Satze (Seite 83) über das umschriebene Vierseit.

Wenn die Polare u eines Punktes U (Fig. 45) die Curve zweiter Ordnung schneidet, so wird die Curve von den beiden Geraden berührt, die den Punkt U mit den Schnittpunkten verbinden. Denn hätte eine dieser Geraden mit der Curve noch einen zweiten Punkt gemein, so müsste dieser von dem ersten Schnittpunkte harmonisch getrennt sein durch U und u, was unmöglich ist, da dieser erste Schnittpunkt auf u liegt. Die Gerade u ist also in diesem Falle die „Berührungssehne" des Punktes U, d. h. sie verbindet die Berührungspunkte der beiden Tangenten, die aus U an die Curve zweiter Ordnung gehen.

134 Alle diese Ergebnisse können wir in folgendem Doppelsatze zusammenfassen:

Wenn durch einen Punkt U, der in der Ebene einer Curve zweiter Ordnung, aber nicht auf der Curve liegt, beliebig viele Secanten durch die Curve gezogen werden, so liegen die folgenden Punkte auf einer Geraden u:

1) Von jedem der Curve eingeschriebenen einfachen Viereck, das zwei dieser Secanten zu Diagonalen hat, die Schnittpunkte der Gegenseiten;
2) auf jeder Secante der Punkt, der von U durch die beiden Curvenpunkte harmonisch getrennt ist;
3) die Schnittpunkte von je zwei Tangenten, deren Berührungspunkte mit U in einer Geraden liegen;
4) wenn von U Tangenten an die Curve gezogen werden können, deren Berührungspunkte.

Wenn von beliebig vielen Punkten einer Geraden u, die in der Ebene einer Curve zweiter Ordnung liegt, aber die Curve nicht berührt, je zwei Tangenten an die Curve gezogen werden, so gehen die folgenden Geraden durch einen Punkt U:

1) Von jedem der Curve umschriebenen einfachen Vierseit, dessen Gegenseiten aus zwei dieser Tangentenpaare bestehen, die beiden Diagonalen;
2) die Geraden, welche durch je zwei Tangenten harmonisch von u getrennt sind;
3) die Geraden, welche die Berührungspunkte je eines Tangentenpaares verbinden;
4) wenn u die Curve schneidet, die beiden Tangenten an den Schnittpunkten.

Die Gerade u heisst die „Polare" des Punktes U, und dieser heisst der „Pol" von u in Bezug auf die Curve zweiter Ordnung.

135 Liegt ein Punkt A auf der Curve zweiter Ordnung, und ist a die Tangente an diesem Punkte, so soll a die Polare von A heissen und umgekehrt A der Pol von a. Dieser Fall kann als Grenzfall des vorigen betrachtet werden. Hierdurch und durch

das Vorhergehende ist also jedem Punkte der Ebene eine Polare in Bezug auf die Curve zugeordnet, und umgekehrt jeder Geraden ein Pol.

136 Von einem Punkte in der Ebene einer Curve zweiter Ordnung sagen wir, er liege „ausserhalb“ oder „innerhalb“ der Curve, jenachdem durch ihn zwei oder keine Tangenten der Curve gehen. Die Punkte einer Tangente liegen also ausserhalb der Curve; nur der Berührungspunkt liegt „auf“ der Curve. Jede Gerade der Curvenebene enthält unendlich viele Punkte, die ausserhalb der Curve liegen, nämlich ihre Schnittpunkte mit den Tangenten, und zwar folgen diese Punkte stetig auf einander, weil die Tangenten stetig auf einander folgen. Die innerhalb der Curve liegenden Punkte einer Geraden folgen daher gleichfalls stetig auf einander. Wenn die Verbindungslinie von zwei ausserhalb der Curve gelegenen Punkten A, B die Curve schneidet, so sind diese Punkte nicht durch die Schnittpunkte von einander getrennt, sondern man kann auf der ausserhalb der Curve liegenden Strecke der Geraden von A nach B gelangen (nöthigenfalls über den unendlich fernen Punkt hinweg), ohne einen Curvenpunkt zu überschreiten. Ebenso sind zwei innerhalb der Curve liegende Punkte nicht durch die Curve von einander getrennt, sondern sie liegen auf einer von der Curve eingeschlossenen Strecke ihrer Verbindungslinie. Wenn aber zwei Punkte durch die Curve von einander getrennt sind, so liegt der eine innerhalb, der andere ausserhalb der Curve; denn sie können nach dem eben Bewiesenen weder beide innerhalb, noch beide ausserhalb der Curve liegen. Also:

„Die Ebene wird durch eine in ihr liegende Curve zweiter „Ordnung in zwei Theile zerlegt. Von einem beliebigen Punkte „des einen Theils kann man in der Ebene zu jedem anderen „Punkte desselben Theiles, dagegen zu keinem Punkte des an„deren Theiles gelangen, ohne die Curve zu überschreiten. Die „Punkte des einen Theiles liegen ausserhalb der Curve, und es „lassen sich von ihnen je zwei Tangenten an die Curve ziehen; „die Punkte des anderen Theiles liegen innerhalb der Curve, „und durch sie gehen keine Tangenten. Die Curve zweiter „Ordnung ist die gemeinsame Grenze beider Theile.“

Ein innerhalb der Curve gelegener Punkt ist somit von jedem Punkte seiner Polare harmonisch getrennt durch die Curve; jede durch ihn gelegte Gerade der Ebene schneidet die Curve in zwei

Punkten, seine Polare aber schneidet die Curve nicht. Ein ausserhalb der Curve gelegener Punkt R ist nicht von jedem Punkte seiner Polare durch die Curve getrennt; zieht man durch R die beiden Tangenten an die Curve, so begrenzen diese auf der Polare die Strecke der Punkte, die von R harmonisch getrennt sind. Die Curve nebst allen von ihr eingeschlossenen Punkten ist in dem einen der beiden vollkommenen Winkel enthalten, die von zwei beliebigen Tangenten gebildet werden.

137 Wir werden später von diesen Sätzen, die Ihnen vielleicht selbstverständlich scheinen, aber nach meiner Ansicht wohl des Beweises bedurften, mehrfach Gebrauch machen. Zunächst beweise ich mit ihrer Hülfe folgenden Hauptsatz der Polarentheorie:

Die Polaren der Punkte einer Geraden u gehen durch den Pol U der Geraden. Liegt nämlich ein Punkt von u innerhalb der Curve zweiter Ordnung, so ist er von U harmonisch getrennt, und seine Polare muss deshalb durch U gehen. Liegt ein Punkt R von u ausserhalb der Curve (Figg. 44 und 45), so kann man durch ihn Tangenten an die Curve ziehen; und die Gerade, die den Berührungspunkt von einer dieser Tangenten mit U verbindet, ist die Polare von R, weil ihr Pol sowohl auf u als auch auf jener Tangente liegen muss. Liegt endlich ein Punkt von u auf der Curve, so ist seine Polare identisch mit seiner Tangente; diese aber geht gleichfalls durch U.

Die Pole der Strahlen eines Punktes U liegen auf der Polare u des Punktes. Wenn nämlich ein Strahl von U die Curve zweiter Ordnung schneidet, so erhält man seinen Pol, indem man an den Schnittpunkten Tangenten construirt und deren Schnittpunkt sucht. Dieser aber liegt, wie vorhin bewiesen, auf der Polare u von U. Schneidet ein Strahl von U die Curve nicht, so liegt sein Pol innerhalb der Curve, ist also von jedem Punkte des Strahles und folglich auch von U harmonisch getrennt, also wieder auf u gelegen. Berührt endlich ein Strahl von U die Curve, so liegt der Berührungspunkt auf u und ist zugleich der Pol des Strahles.

Von zwei beliebigen Punkten der Ebene liegt hiernach entweder keiner oder jeder in der Polare des andern; und von zwei beliebigen Geraden der Ebene geht entweder keine oder jede durch den Pol der andern.

138 Durch diese und die vorhergehenden Sätze ist das Princip

der Dualität, worauf ich später noch einmal zurückkommen werde, wenigstens für das ebene Feld und überhaupt für Grundgebilde der zweiten Stufe bewiesen. Denn zu jedem ebenen Gebilde können wir mit Hülfe einer Curve zweiter Ordnung ein reciprokes ebenes Gebilde construiren, indem wir zu jedem seiner Punkte die Polare und zu jeder seiner Geraden den Pol bestimmen. Daher wird es künftig genügen, wenn ich von je zwei reciproken Sätzen, die sich auf ebene Gebilde beziehen, immer nur den einen beweise.

139 Mit Hülfe der Polaren hat Brianchon seinen Lehrsatz aus dem Pascal'schen Satze abgeleitet. Von einem der Curve zweiter Ordnung eingeschriebenen Sechsecke bestimmte er nämlich zu jeder Seite den Pol, indem er an den beiden auf ihr gelegenen Eckpunkten Tangenten construirte und deren Schnittpunkt suchte (Fig. 46). Den Seiten und Eckpunkten des eingeschriebenen

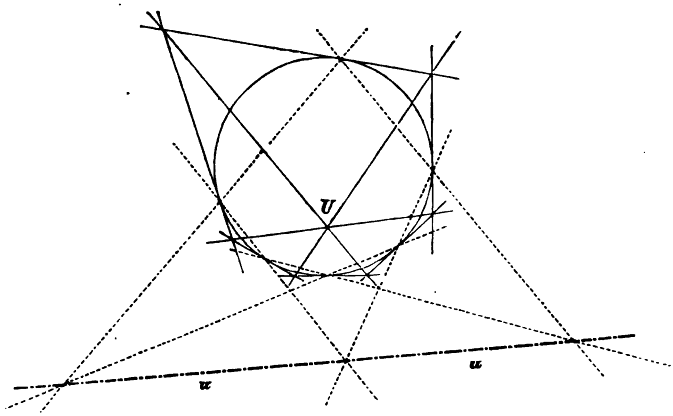


Fig. 46.

Sechsecks entsprechen dann die Eckpunkte und Seiten eines umschriebenen Sechsecks; und der Schnittpunkt von zwei beliebigen Seiten des eingeschriebenen hat zur Polare die Verbindungslinie der entsprechenden Eckpunkte des umschriebenen Sechsecks. Da nun die drei Punkte, in denen die Gegenseiten des eingeschriebenen Sechsecks sich schneiden, in einer Geraden u liegen (Pascal), so gehen die drei Geraden, welche die Gegenpunkte des umschriebenen Sechsecks verbinden, durch einen Punkt U, den Pol der Geraden u (Brianchon).

Sie ersehen schon aus dieser einen Anwendung, welcher Nutzen aus der Polarentheorie gezogen werden kann. Mit Hülfe einer Curve zweiter Ordnung kann zu jeder ebenen Curve ein ihr reciproker Strahlenbüschel gefunden werden, indem jeder Punkt der Curve einen Strahl des Büschels zur Polare hat; den Eigenschaften der Curve aber werden Eigenschaften des Büschels entsprechen. Wir werden später noch allgemeinere Beziehungen dieser Art zu untersuchen haben.

140 Sind P, Q zwei beliebige Punkte einer Geraden u (Figg. 44 und 45), so gehen dem obigen Hauptsatze zufolge ihre Polaren p, q durch den Pol U von u. Wir wollen nun P irgendwo auf u, dagegen Q im Schnittpunkte von u und p annehmen; dann bilden P, Q, U die Eckpunkte eines Dreiecks, ihre Polaren p, q, u aber die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks. Dieses Dreieck wird ein „Poldreieck" der Curve zweiter Ordnung genannt; jeder seiner Eckpunkte ist der Pol der gegenüberliegenden Seite. Wir gelangen zu Poldreiecken, wie ohne Weiteres einleuchtet, mittelst des Doppelsatzes (vgl. auch Fig. 38):

Die drei paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks, das einer Curve zweiter Ordnung eingeschrieben ist, schneiden sich in den Eckpunkten eines Poldreiecks der Curve.	Die drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits, das einer Curve zweiter Ordnung umschrieben ist, bilden ein Poldreieck der Curve (Seite 98).

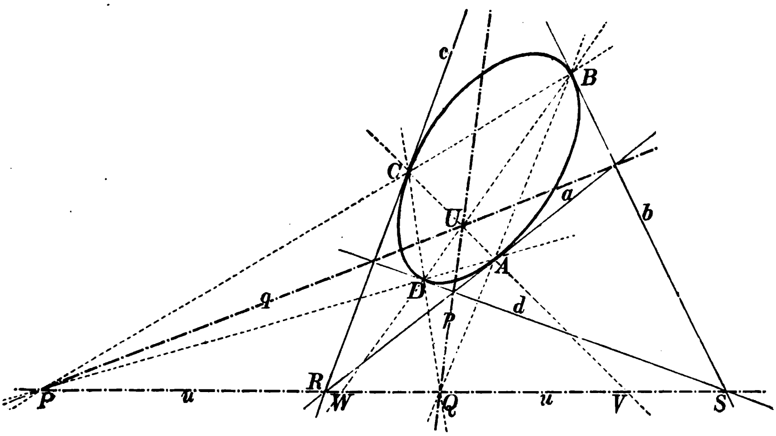


Fig 44.

141 Zu jedem Poldreieck PQU können unendlich viele der Curve eingeschriebene Vierecke construirt werden, deren drei paar Gegenseiten sich in P, Q und U schneiden. Man lege durch P eine Secante BC an die Curve (Fig. 44), verbinde die beiden Curvenpunkte B, C mit dem Punkte U und bringe die Geraden BU und CU in resp. D und A zum zweiten Male mit der Curve zum Schnitt; dann ist $ABCD$ eines der unendlich vielen eingeschriebenen Vierecke, deren Gegenseiten in P, Q und U sich schneiden. Der Beweis liegt auf der Hand.

Werden nun von dem eingeschriebenen Viereck die beiden Eckpunkte A, C nebst dem Punkte U festgehalten, und wird der Punkt P auf der Polare u von U verschoben, so bewegt sich der Eckpunkt B auf der Curve. Die beiden Geraden PB, QB beschreiben folglich um die resp. Mittelpunkte C, A zwei projective Strahlenbüschel, und die Punkte P, Q beschreiben auf u zwei projective Punktreihen, nämlich die Schnitte jener Strahlenbüschel mit u. Wir schliessen daraus, dass der Strahlenbüschel, den die Polare UQ oder p des Punktes P um U beschreibt, während P die Punktreihe u durchläuft, zu dieser Punktreihe projectiv ist. Also:

Wenn ein Punkt P *eine Punktreihe* u *durchläuft, so beschreibt seine Polare* p *einen Strahlenbüschel* U, *der zu der Punktreihe projectiv ist; es ist* u (P) $\overline{\wedge}$ U (p).

Durch diesen Satz wird die Abhängigkeit, worin eine beliebige Figur zu ihrer Polarfigur steht, näher angegeben. Wir folgern daraus:

„Sind in einer Ebene zwei Curven zweiter Ordnung $\varkappa$, λ ge-
„geben, und bestimmen wir zu jedem Punkte der einen $\varkappa$ die
„Polare in Bezug auf die andere Curve λ, so umhüllen diese
„Polaren eine Curve zweiter Ordnung $\varkappa_1$ (Brianchon), die soge-
„nannte Polare von $\varkappa$ in Bezug auf λ.“

Denn denken wir uns $\varkappa$ durch zwei projective Strahlenbüschel U, V erzeugt, so entsprechen diesen als Polaren in Bezug auf λ zwei Punktreihen u, v, die zu den Büscheln und folglich auch zu einander projectiv sind. Diese Punktreihen erzeugen einen Büschel zweiter Ordnung, welcher die Curve $\varkappa_1$ umhüllt.

142 In der Theorie der Curven zweiter Ordnung werden die folgenden Bezeichnungen häufig angewendet:

Zwei Punkte der Ebene heissen „conjugirt“ bezüglich einer Curve	Zwei Gerade der Ebene heissen „conjugirt“ bezüglich einer Curve

zweiter Ordnung, wenn der eine und folglich jeder auf der Polare des anderen liegt.

zweiter Ordnung, wenn die eine und folglich jede durch den Pol der anderen geht.

Ein Punkt ist also jedem Punkte seiner Polare, und eine Gerade ist jeder durch ihren Pol gehenden Geraden conjugirt. Die Eckpunkte und ebenso die Seiten eines beliebigen Poldreiecks der Curve sind alle drei conjugirt; Jacob Steiner nannte deshalb das Poldreieck ein „Tripel conjugirter Punkte oder conjugirter Strahlen". Jeder Punkt der Curve zweiter Ordnung ist sich selbst conjugirt, weil er auf seiner Polare, der Tangente, liegt; und jede Tangente der Curve ist sich selbst conjugirt, weil sie durch ihren Pol, den Berührungspunkt, geht.

143 Wenn die Verbindungslinie von zwei conjugirten Punkten A, B die Curve zweiter Ordnung schneidet, so sind A und B durch die beiden Schnittpunkte harmonisch getrennt. Denn die Polare von A geht durch B und enthält alle Punkte, die von A durch je zwei Curvenpunkte harmonisch getrennt sind.

Wenn durch den Schnittpunkt von zwei conjugirten Geraden a, b zwei Tangenten der Curve zweiter Ordnung gehen, so sind a und b durch diese Tangenten harmonisch getrennt. Denn der Pol von a liegt auf b, und durch ihn gehen alle Strahlen, die von a durch je zwei Tangenten harmonisch getrennt sind.

Die Curve zweiter Ordnung schliesst deshalb von jedem Poldreieck einen Eckpunkt ein und die übrigen beiden Eckpunkte aus; sie schneidet zwei Seiten des Poldreiecks, nicht aber die dritte.

Aus der Definition der conjugirten Punkte und Geraden folgt weiter:

Wenn zwei Punkte A, B einem dritten C conjugirt sind, so ist ihre Verbindungslinie die Polare von C. Denn die Polare von C muss sowohl durch A als auch durch B gehen.

Wenn zwei Gerade a, b einer dritten c conjugirt sind, so ist ihr Schnittpunkt der Pol von c. Denn dieser Pol muss sowohl auf a als auch auf b liegen.

144 Sind u, v zwei nicht conjugirte Gerade der Ebene, so können wir jedem Punkte P von u den ihm conjugirten Punkt P_1 von v zuweisen (Fig. 47). Die Punktreihen u, v aber werden dadurch projectiv; denn v wird ein Schnitt des Strahlenbüschels U, der aus den Polaren der Punkte von u besteht und (nach Seite 104) zu der Punktreihe u projectiv ist. Die Verbindungslinien von je zwei conjugirten Punkten P, P_1 der Geraden u, v bilden also einen

Strahlenbüschel erster oder zweiter Ordnung, jenachdem der Schnittpunkt uv sich selbst conjugirt ist, d. h. auf der Curve zweiter Ordnung liegt, oder nicht. Da P den beiden Punkten P_1 und U conjugirt ist, so ist $P_1 U$ die Polare von P, und PP_1 ist der Geraden $P_1 U$ conjugirt. Jenen Strahlenbüschel erster oder zweiter Ordnung erhalten wir also auch, wenn wir durch jeden Punkt P_1 von v den Strahl legen, welcher der Geraden $P_1 U$ conjugirt ist.

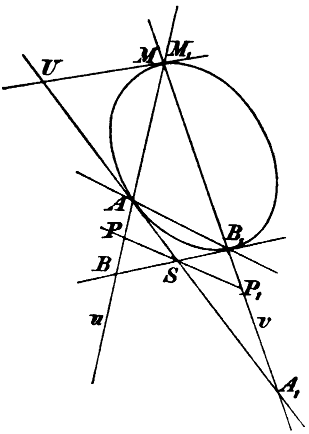


Fig. 47.

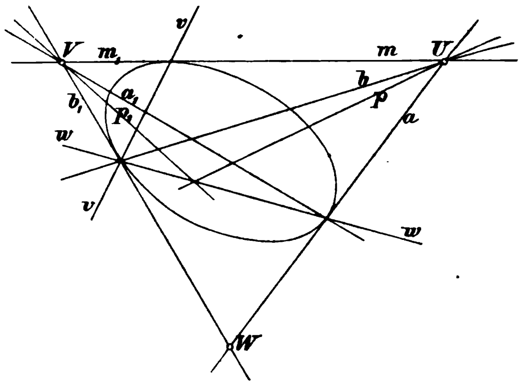


Fig. 48.

Sind andererseits U, V zwei nicht conjugirte Punkte der Ebene, so können wir jedem Strahle p von U den ihm conjugirten Strahl p_1 von V zuweisen (Fig. 48). Die Strahlenbüschel U, V werden dadurch projectiv; denn U wird ein Schein der Punktreihe v, die aus den Polen der Strahlen von V besteht und zu dem Strahlenbüschel V projectiv ist. Die Büschel U, V erzeugen also eine Punktreihe erster oder zweiter Ordnung, jenachdem der gemeinschaftliche Strahl UV sich selbst conjugirt ist, d. h. die Curve zweiter Ordnung berührt, oder nicht. Da p_1 den beiden Strahlen p und v conjugirt ist, so ist pv der Pol von p_1, und der Punkt $p_1 p$ ist dem Punkte pv conjugirt. Jene Punktreihe erster oder zweiter Ordnung erhalten wir also auch, wenn wir in jedem Strahle p von U den Punkt bestimmen, der dem Punkte pv conjugirt ist. Daraus folgen die Sätze:

Sind in der Ebene einer Curve zweiter Ordnung eine Gerade v und ein nicht auf v liegender Punkt U gegeben, und bestimmen wir in jedem Strahle von U den Punkt, welcher dem Schnittpunkte des Strahles mit der Geraden v conjugirt ist, so liegen alle diese Punkte in einer Curve zweiter Ordnung. Diese Curve geht durch den Pol V der Geraden v, durch U und die Berührungspunkte der zwei paar Tangenten, die von U und V an die gegebene Curve zweiter Ordnung etwa gezogen werden können. Wenn aber die Gerade UV die gegebene Curve zweiter Ordnung berührt, so erhalten wir eine Punktreihe erster statt einer Curve zweiter Ordnung.*)

wird durch jeden Punkt von v der Strahl gelegt, welcher der Verbindungslinie des Punktes mit dem Punkte U conjugirt ist, so umhüllen alle diese Strahlen eine Curve zweiter Ordnung. Diese berührt die Polare u des Punktes U, die Gerade v und die Tangenten der zwei paar Punkte, in denen die gegebene Curve zweiter Ordnung von v und u geschnitten wird. Wenn aber der Punkt uv auf der gegebenen Curve liegt, so erhalten wir einen Strahlenbüschel erster statt der Tangenten einer Curve zweiter Ordnung.

145 Werden links die gegebene Curve zweiter Ordnung und der Punkt U festgehalten, so entspricht jedem Punkt der Ebene ein conjugirter Punkt, der mit ihm auf einem Strahle von U liegt; einer beliebigen Geraden aber entspricht im Allgemeinen eine Curve zweiter Ordnung. Werden ebenso rechts die gegebene Curve zweiter Ordnung und die Gerade v festgehalten, so entspricht jedem Strahl der Ebene ein conjugirter Strahl, der jenen in einem Punkte von v schneidet; einem Strahlenbüschel erster Ordnung aber entspricht im Allgemeinen ein Büschel zweiter Ordnung. Wir gelangen auf diese Weise zu zwei besonderen Fällen der sogenannten „geometrischen Verwandtschaft zweiten Grades“.

146 Aus dem Vorhergehenden (Seite 105 und 106) ergeben sich noch folgende Sätze:

*) Als besonderer Fall des Satzes links ist der folgende zu erwähnen: „Die Mittelpunkte der Sehnen eines Kegelschnittes, die nach einem beliebig gegebenen eigentlichen Punkte convergiren, liegen auf einem anderen Kegelschnitte.“
Die Gerade v liegt in diesem Falle unendlich fern, und jeder der Mittelpunkte ist dem unendlich fernen Punkte der zugehörigen Sehne conjugirt.

Ist ein Dreieck AMB_1 (Fig. 47) einer Curve zweiter Ordnung eingeschrieben, so schneidet jede Gerade, die einer Seite AB_1 conjugirt ist, die beiden anderen Seiten in conjugirten Punkten. Und wenn umgekehrt eine Gerade irgend zwei Seiten des Dreiecks in conjugirten Punkten schneidet, so geht sie durch den Pol der dritten Seite.

Ist ein Dreieck UVW (Fig. 48) einer Curve zweiter Ordnung umschrieben, so bestimmt jeder Punkt, der einem Eckpunkte W conjugirt ist, mit den beiden anderen Eckpunkten zwei conjugirte Strahlen. Wenn umgekehrt ein Punkt aus zwei Eckpunkten des Dreiecks durch conjugirte Strahlen projicirt wird, so liegt er auf der Polare des dritten Eckpunktes.

Die Punktreihen AM oder u und B_1M oder v (Fig. 47) sind nämlich perspectiv auf einander bezogen, wenn jedem Punkte von u sein conjugirter Punkt in v als entsprechender zugewiesen wird; denn der gemeinschaftliche Punkt M von u und v ist sich selbst conjugirt. Der Mittelpunkt S des von u und v erzeugten Strahlenbüschels liegt aber auf der Tangente des Punktes A, weil deren Schnittpunkt A_1 mit v dem Punkte A conjugirt ist; und ebenso liegt S auf der Tangente des Punktes B_1. Folglich ist S der Pol von AB_1, und jede durch S gelegte Gerade schneidet u und v in conjugirten Punkten. — Den Satz rechts können Sie analog beweisen; seine Richtigkeit folgt aber auch aus dem Princip der Dualität.

Ich schliesse diese Reihe von Sätzen mit dem Beweise des folgenden umkehrbaren Satzes:

„Wird eine Curve zweiter Ordnung von zwei conjugirten Strahlen AC und BD geschnitten (Fig. 49), so sind die Schnittpunkte A, B, C, D vier harmonische Curvenpunkte und ihre Tangenten a, b, c, d vier harmonische Tangenten der Curve.“

Der Pol Q von AC, in welchem die Tangenten a, c sich schneiden, liegt auf der Geraden BD, weil diese zu AC conjugirt ist; ebenso liegt der Schnittpunkt R von b und d auf AC. Bezeichnen wir noch mit P den Schnittpunkt von AC und BD, so sind P, B, Q, D vier harmonische Punkte und RQ, b, RP, d vier harmonische Strahlen. Also sind auch die Strahlen CA, CB, c, CD vier harmonische Strahlen, und die Punkte ca, cb, C, cd vier harmonische Punkte; d. h. die Punkte A, B, C, D werden aus C und folglich aus jedem Punkte der Curve durch vier harmonische Strahlen projicirt, und die Tangenten a, b, c, d werden von c und folglich von jeder Tangente in vier harmonischen Punkten geschnitten.

148 Alle für die Curve zweiter Ordnung soeben aufgestellten Sätze lassen sich wiederum auf den Kegel zweiter Ordnung übertragen, weil dieser von einer beliebigen Ebene in einer Curve zweiter Ordnung geschnitten wird. Ich wiederhole hier nur einen Satz:

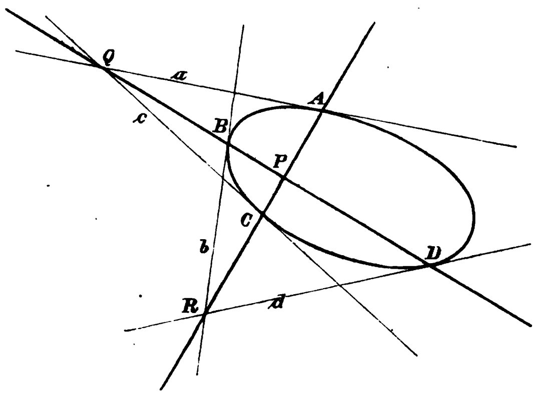


Fig. 49.

„Ist in einem Strahlenbündel ein Kegel zweiter Ordnung und
„ein nicht auf dem Kegel gelegener Strahl s gegeben, und legt
„man durch s beliebig viele, den Kegel schneidende Ebenen,
„bestimmt sodann:
„1) in jeder Ebene den Strahl, der von s durch den Kegel harmonisch getrennt ist,
„2) die Schnittlinien von je zwei Tangentialebenen des Kegels, deren Berührungsstrahlen mit s in einer Ebene liegen,
„3) in jedem dem Kegel eingeschriebenen Vierkant, dessen Diagonalebenen durch s gehen, die Schnittlinien der Gegenseiten,
„4) den Berührungsstrahl jeder Tangentialebene, welche durch s an den Kegel gelegt werden kann,
„so liegen alle diese Strahlen in einer Ebene σ, welche die
„Polarebene oder Polare des Strahles s genannt wird."

Ich überlasse es Ihnen, auch die übrigen Sätze der Polarentheorie auf den Kegel zu übertragen, und bemerke nur noch, dass s der

„Polstrahl“ der Ebene σ bezüglich des Kegels zweiter Ordnung genannt wird.

Neunter Vortrag.

Durchmesser und Axen der Curven zweiter Ordnung. Gleichungen der Kegelschnitte.

149 Aus den Sätzen über die Pole und Polaren ergiebt sich: „Die Mittelpunkte paralleler Sehnen einer Curve zweiter Ord- „nung liegen auf einer Geraden, die ein **Durchmesser** der „Curve genannt wird“ (vergl. Fig. 50).

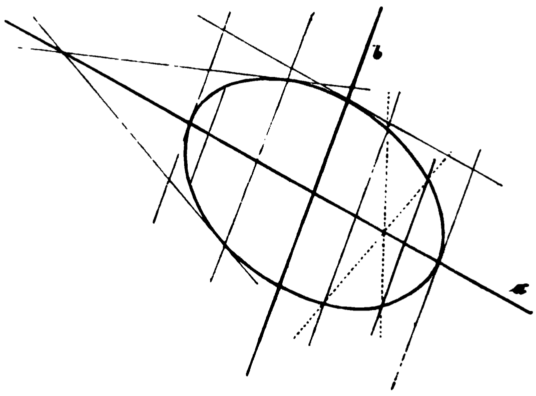


Fig. 50.

Denn da diese Mittelpunkte durch die Curve harmonisch getrennt sind von dem unendlich fernen Punkte der parallelen Geraden (Seite 46), so liegen sie auf der Polare dieses Punktes. Zugleich ergiebt sich:

„Die Polare jedes unendlich fernen Punktes der Ebene ist „ein Durchmesser der Curve zweiter Ordnung. Der Durch- „messer hälftet alle ihm conjugirten Sehnen und verbindet die „Berührungspunkte der ihm conjugirten Tangenten“, wenn solche vorhanden sind. Zwei Tangenten der Curve schneiden sich in einem Punkte des Durchmessers, wenn ihre Berührungssehne dem Durchmesser conjugirt ist (Seite 99).

150 Wir fanden früher (Seite 101), dass die Polaren der Punkte einer Geraden durch den Pol der Geraden gehen. Für die Durchmesser einer Curve zweiter Ordnung folgt hieraus:

„Die Durchmesser einer Curve zweiter Ordnung gehen alle „durch einen Punkt, nämlich durch den Pol der unendlich „fernen Geraden."

Ist die Curve eine Parabel, so berührt sie die unendlich ferne Gerade in deren Pol (Seite 92 und 99). Wir schliessen daraus:

„Die Durchmesser einer Parabel sind parallel und gehen durch „den unendlich fernen Punkt der Parabel."

Ist dagegen die Curve eine Ellipse oder Hyperbel, so ist der Pol der unendlich fernen Geraden ein eigentlicher Punkt. Er heisst der „Mittelpunkt" der Curve, weil ihm folgende Eigenschaft zukommt:

„Jede durch den Mittelpunkt gehende Sehne der Curve zweiter „Ordnung wird in ihm gehälftet."

Der Mittelpunkt ist nämlich von einem unendlich fernen Punkte seiner Polare harmonisch getrennt durch die beiden Endpunkte der Sehne, hat also von diesen Endpunkten gleichen Abstand.

151 Die Parabel hat keinen Mittelpunkt, wie sich aus folgendem Satze ergiebt:

„Wenn zwei Sehnen einer Curve zweiter Ordnung sich gegen„seitig hälften, so ist ihr Schnittpunkt der Pol der unendlich „fernen Geraden, und die Sehnen liegen folglich auf zwei „Durchmessern der Curve."

Die Richtigkeit dieses Satzes erkennen Sie daraus, dass der Schnittpunkt von den unendlich fernen Punkten der Sehnen durch deren Endpunkte und somit durch die Curve harmonisch getrennt ist. Da nun der Pol der unendlich fernen Geraden in Bezug auf eine Parabel identisch ist mit dem unendlich fernen Punkte der Parabel, so giebt es keine zwei Parabelsehnen, die einander hälften.

152 „Im Mittelpunkte einer Hyperbel schneiden sich ihre beiden „Asymptoten";

denn durch den Pol einer Geraden gehen allemal die Tangenten der Curvenpunkte, die auf der Geraden liegen. — Der Mittelpunkt einer Hyperbel liegt ausserhalb, der Mittelpunkt einer Ellipse liegt innerhalb der Curve (Seite 100).

153 Zu jedem Durchmesser einer Ellipse oder Hyperbel giebt es einen conjugirten Durchmesser; von zwei conjugirten Durchmessern geht jeder durch den unendlich fernen Pol des anderen.

„Zwei conjugirte Durchmesser einer Ellipse oder Hyperbel „bilden mit der unendlich fernen Geraden allemal ein Poldreieck „der Curve. Jede Sehne der Curve, die zu dem einen von zwei „conjugirten Durchmessern parallel läuft, wird durch den an-„deren gehälftet;“

denn sie geht, wenn unbegrenzt verlängert, durch deren Pol. Schneidet von zwei conjugirten Durchmessern der eine die Curve, so sind die Tangenten der beiden Schnittpunkte dem anderen Durchmesser parallel. Hiernach kann zu jedem Durchmesser leicht der conjugirte gefunden werden.

154 „Von jedem einer Curve zweiter Ordnung umschriebenen „Parallelogramm sind die Diagonalen zwei conjugirte Durch-„messer.“

„Von jedem einer Curve zweiter Ordnung eingeschriebenen „Parallelogramm sind die Seiten zwei conjugirten Durchmessern „parallel.“

Die Diagonalen sowohl des eingeschriebenen als auch des umschriebenen Parallelogramms (Fig. 51) sind Durchmesser der Curve,

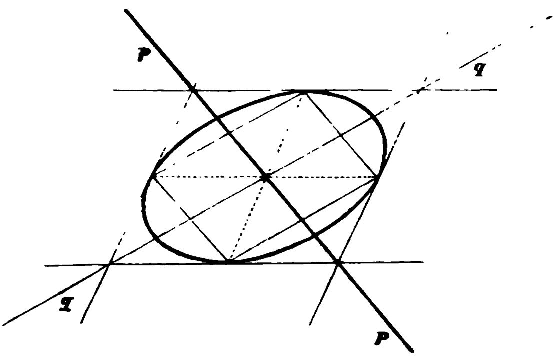


Fig. 51.

weil ihr Schnittpunkt die unendlich ferne Gerade zur Polare hat (Seite 99). Ziehen wir durch diesen Schnittpunkt zwei Parallelen

p, q zu den Seiten des eingeschriebenen Parallelogramms, so hälftet jede von ihnen die beiden Gegenseiten, die zu der anderen parallel sind; p und q sind also zwei conjugirte Durchmesser. Auf p und q liegen auch die Pole der vier Seiten des eingeschriebenen Parallelogramms; oder p und q sind die Diagonalen des umschriebenen Vierecks, dessen Seiten die Curve zweiter Ordnung in den Eckpunkten des eingeschriebenen Parallelogramms berühren. Dieses umschriebene Viereck aber ist ein Parallelogramm, weil die Tangenten an den Endpunkten einer Durchmessersehne parallel sind; und zwar kann es als ein ganz beliebiges, der Curve umschriebenes Parallelogramm betrachtet werden.

155 Der letzte Satz lässt sich auch so aussprechen:

„Die beiden Sehnen, die einen beliebigen Punkt einer Ellipse „oder Hyperbel mit den Endpunkten einer Durchmessersehne ver„binden, sind zu conjugirten Durchmessern der Curve parallel."

Sind von einer Curve zweiter Ordnung zwei paar conjugirte Durchmesser und ein Punkt gegeben, so kann man hiernach leicht fünf weitere Punkte der Curve finden. Man ziehe durch den gegebenen Punkt P einen Durchmesser, und bestimme seinen zweiten Schnittpunkt Q mit der Curve auf Grund des Satzes, dass PQ durch den Mittelpunkt gehälftet wird. Ueber PQ als Diagonale construire man ferner zwei Parallelogramme, deren Seiten je einem Paare conjugirter Durchmesser parallel sind; dann liegen die zwei paar neuen Eckpunkte dieser Parallelogramme ebenfalls auf der Curve zweiter Ordnung. — Ebenso können von einer Curve zweiter Ordnung leicht sechs Tangenten angegeben werden, wenn eine Tangente und zwei paar conjugirte Durchmesser bekannt sind.

156 „Wenn je zwei conjugirte Durchmesser einer Curve zweiter „Ordnung sich rechtwinklig schneiden, so ist die Curve ein „Kreis."

Denn in diesem Falle stehen die Seiten jedes eingeschriebenen Parallelogramms auf einander senkrecht; das Parallelogramm ist also ein Rechteck und seine Diagonalen, d. h. zwei beliebige und somit alle Durchmessersehnen der Curve haben gleiche Länge.

Dass der Kreis eine Curve zweiter Ordnung ist, wurde schon früher (Seite 91) bewiesen. Er wird durch projective, gleiche und gleichlaufende Strahlenbüschel erzeugt und aus je zwei seiner Punkte durch congruente und somit projective Strahlenbüschel projicirt. Auch lässt sich leicht zeigen, dass die Tangenten eines Kreises einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung bilden. Die

Strecken, welche zwei feste Tangenten des Kreises auf einer beweglichen Tangente begrenzen, werden nämlich aus dem Mittelpunkte unter constanten Nebenwinkeln gesehen, und die Punktreihen, in denen der Tangentenbüschel des Kreises von zwei seiner Tangenten geschnitten wird, werden folglich aus dem Mittelpunkte durch congruente Strahlenbüschel projicirt und sind projectiv als Schnitte dieser Büschel.

Da sich die projectiven Eigenschaften des Kreises auf so einfache Weise ergeben, so haben die meisten Autoren, die wie Steiner und Chasles die neuere Geometrie durch Rechnung begründen, den Kreis zum Ausgangspunkt für die Untersuchung der Curven zweiter Ordnung gewählt.*) Bei diesem Lehrgange ist jedoch der Nachweis erforderlich, dass durch projective einförmige Grundgebilde keine anderen Curven zweiter Ordnung als die Kegelschnitte erzeugt werden können. Denn gäbe es noch andere, so müssten für diese alle für den Kreis und die Kegelschnitte aufgestellten Sätze noch besonders bewiesen werden, z. B. die Sätze, dass sie aus je zwei ihrer Punkte durch projective Strahlenbüschel projicirt und dass ihre Tangentenbüschel von je zwei Tangenten in projectiven Punktreihen geschnitten werden. Sind diese Sätze für den Kreis bewiesen, so lassen sie sich unmittelbar doch nur auf Schnitte von Kreiskegeln übertragen. Wir haben den Beweis, dass alle Curven zweiter Ordnung Schnitte von Kreiskegeln oder Kegelschnitte sind, schon früher (Seite 92) geführt.

„Hat eine Curve zweiter Ordnung mehr als ein Paar con-
„jugirter Durchmesser, die auf einander senkrecht stehen, so
„ist sie ein Kreis.“

Denn ziehen wir durch die Endpunkte A, B einer Durchmessersehne Parallelen zu zwei auf einander senkrechten conjugirten Durchmessern der Curve, so erhalten wir ein Rechteck, das der Curve zweiter Ordnung und zugleich einem Kreise eingeschrieben ist. Jedes zweite Paar rechtwinkliger conjugirter Durchmesser liefert uns ein zweites solches Rechteck über derselben Diagonale AB. Der Kreis hat also im genannten Falle mit der gegebenen Curve zweiter Ordnung ausser A und B noch mindestens vier Punkte gemein, und fällt daher ganz mit ihr zusammen (Seite 80).

*) In seinen Vorträgen an der Berliner Universität hat Jacob Steiner die Curven zweiter Ordnung durch ihre projective Erzeugung definirt. Vgl. Schröter, die Theorie der Kegelschnitte, 3. Aufl., Lpz. 1898, Vorwort.

159 Stehen zwei conjugirte Durchmesser auf einander senkrecht, so heissen sie die „Axen“, und ihre Schnittpunkte mit der Curve zweiter Ordnung heissen „Scheitelpunkte“ der Curve. Nur der Kreis hat mehr als ein Paar Axen, indem je zwei conjugirte Durchmesser ein Axenpaar des Kreises bilden. Um die Aufgabe zu lösen:

„Von einer Ellipse oder Hyperbel die Axen zu construiren“, verfahren wir wie folgt. Wir beschreiben über einer Durchmessersehne AB der Curve aus deren Mittelpunkte einen Kreis (Fig. 52), welcher die Tangenten an den Endpunkten A, B und daher auch die Curve schneidet. Jeder von den beiden Halbkreisen über der Sehne AB liegt dann theilweise innerhalb, theilweise ausserhalb der Curve, und hat daher noch einen Schnittpunkt mit ihr gemein. Die vier Schnittpunkte des Kreises mit der Curve aber sind die Eckpunkte eines eingeschriebenen Rechtecks, zu dessen Seiten die gesuchten Axen parallel laufen. Es folgt aus dieser Construction:

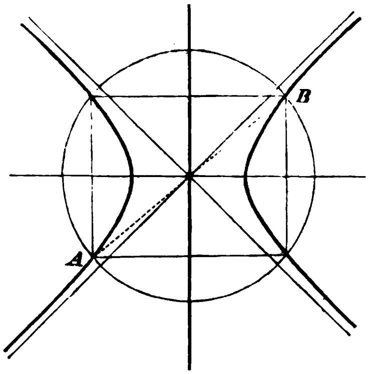


Fig. 52.

„Die Ellipse sowohl wie die Hyperbel hat ein paar Axen.“

160 Eine Axe kann auch definirt werden als ein solcher Durchmesser der Curve zweiter Ordnung, der senkrecht steht auf den ihm conjugirten und durch ihn gehälfteten Sehnen. Die Parabel hat nur eine Axe; diese enthält die Mittelpunkte aller zu der Richtung der Durchmesser senkrechten Parabelsehnen. Eine Curve zweiter Ordnung wird durch jede ihrer Axen in zwei symmetrische Hälften getheilt; sie geht durch Spiegelung an der Axe in sich selbst über.

161 Zwei conjugirte Gerade sind harmonisch getrennt durch die beiden Tangenten, die aus ihrem Schnittpunkte an die Curve zweiter Ordnung gezogen werden können (Seite 105). Also:

„Zwei conjugirte Durchmesser der Hyperbel sind allemal durch „die Asymptoten harmonisch getrennt. Der eine Durchmesser „schneidet daher die Hyperbel, der ihm conjugirte andere

„schneidet sie nicht. Die Axen der Hyperbel hälften die Winkel „zwischen den Asymptoten“ (Seite 47).

162 Auf jeder Transversale, die zu einem Durchmesser der Hyperbel parallel läuft, begrenzen daher die Asymptoten eine Strecke, deren Mittelpunkt auf dem conjugirten Durchmesser liegt (Seite 47). Schneidet oder berührt die Transversale die Hyperbel, so fällt der Mittelpunkt der auf ihr enthaltenen Sehne resp. der Berührungspunkt zusammen mit dem Mittelpunkte jener Strecke. Daher die Sätze (vergl. Fig. 54 auf Seite 118):

„Auf jeder Secante einer Hyperbel haben die beiden Abschnitte zwischen der Curve und ihren Asymptoten gleiche „Länge“ (Apollonius).

„Der Abschnitt einer Hyperbeltangente zwischen den „Asymptoten wird vom Berührungspunkte gehälftet.“

Der erste dieser Sätze kann zu einer sehr einfachen Construction der Hyperbel benutzt werden, wenn von ihr die Asymptoten und ein eigentlicher Punkt gegeben sind. Auf jeder durch den Punkt gelegten Secante bestimmt der Satz sofort den zweiten Hyperbelpunkt.

163 Die Hyperbel wird von nur einer ihrer Axen geschnitten, und zwar rechtwinklig in zwei Scheitelpunkten; die Ellipse hat vier Scheitelpunkte, zwei auf jeder ihrer beiden Axen. Die Parabel hat nur einen eigentlichen Scheitelpunkt; sie hat mit ihrer Axe den Scheitelpunkt und ihren unendlich fernen Punkt gemein.

164 Eine Hyperbel wird gleichseitig genannt, wenn ihre Asymptoten auf einander senkrecht stehen. Die Winkel zwischen je zwei conjugirten Durchmessern der gleichseitigen Hyperbel werden durch die Asymptoten gehälftet (Seite 47), Wenn ein Durchmesser sich um den Mittelpunkt dreht, so dreht sich demnach sein conjugirter Durchmesser in entgegengesetztem Sinne, und zwar so, dass die beiden von den Durchmessern beschriebenen Büschel symmetrisch gleich werden. Die projectiven Strahlenbüschel, wodurch die gleichseitige Hyperbel aus den Endpunkten einer Durchmessersehne projicirt wird, sind hiernach gleich, aber nicht gleichlaufend; denn ihre homologen Strahlen sind zu je zwei conjugirten Durchmessern parallel, weil sie sich auf der Hyperbel schneiden (Seite 113).

165 Wird der Mittelpunkt D einer Parabelsehne AB (Fig. 53) verbunden mit dem Schnittpunkte C der Tangenten von A und B, so ist die Verbindungslinie ein Durchmesser der Parabel; denn

sie ist die Polare des unendlich fernen Punktes von AB (Seite 97). Nun sind aber C und D harmonisch getrennt durch die beiden Schnittpunkte von CD mit der Parabel, und einer dieser Schnittpunkte liegt unendlich fern. Der andere Schnittpunkt E hälftet also die Strecke CD, und es ergiebt sich:

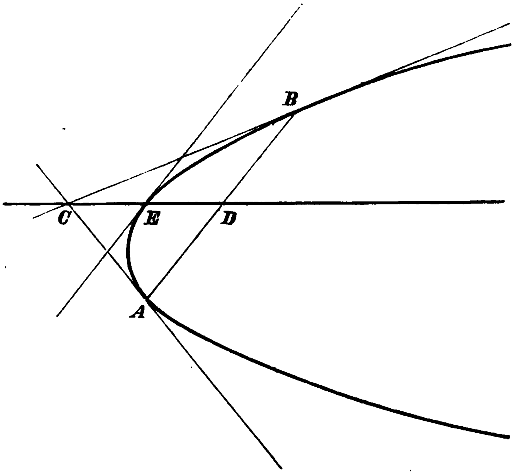


Fig. 53.

„Die gerade Strecke, die den Pol einer Parabelsehne mit ihrem „Mittelpunkte verbindet, wird durch die Parabel gehälftet.“

Auf gleiche Weise ergiebt sich, dass eine Hyperbel die beiden Strecken hälftet, die parallel zu den Asymptoten aus einem beliebigen Punkte der Ebene bis an die Polare des Punktes gezogen werden können.

Dieses sind die wichtigsten metrischen Beziehungen, die sich aus der Polarentheorie der Curven zweiter Ordnung schon jetzt ergeben. Aber auch aus den Sätzen über eingeschriebene und umschriebene Vierecke und Dreiecke lassen sich für diese Curven einige nicht unwichtige metrische Relationen ableiten, insbesondere aus dem Satze (vergl. Seite 83):

„Die beiden Diagonalen eines der Curve zweiter Ordnung um- „schriebenen Vierecks BB_1D_1D schneiden sich in einem Punkte „S, der mit den Berührungspunkten von je zwei Gegenseiten in „einer Geraden liegt.“

Ist die Curve eine Hyperbel, und werden (wie in Fig. 54) die zwei paar Gegenseiten des Vierecks von den Asymptoten und irgend zwei anderen Tangenten gebildet, so liegt der Punkt S auf der unendlich fernen Geraden und die beiden Diagonalen BD_1 und B_1D sind parallel. Die Dreiecke D_1BD und D_1BB_1 über der Grundlinie D_1B sind folglich inhaltsgleich, und ebenso die Drei-

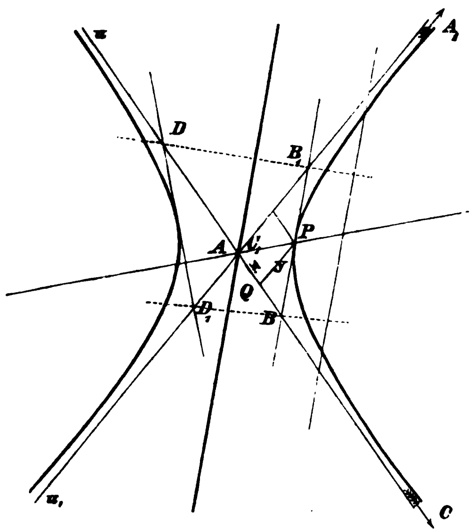


Fig. 54.

ecke D_1AD und B_1AB, die sich von jenem um das gemeinschaftliche Dreieck D_1BA unterscheiden. Also:

„Die Dreiecke, welche die beiden Asymptoten mit je einer an-„deren Tangente der Hyperbel bilden, sind inhaltsgleich.“

Die parallelen Diagonalen BD_1, B_1D und der Mittelpunkt A begrenzen auf den Asymptoten proportionale Abschnitte; wir haben:

$$AB : AD = AD_1 : AB_1 \quad \text{oder} \quad AB \,.\, AB_1 = AD \,.\, AD_1.$$

Das Produkt der Abschnitte, die eine Tangente BB_1 (oder DD_1) auf den beiden Asymptoten abgrenzt, ist also constant. Wir wollen nun durch den Berührungspunkt P der Tangente eine Parallele PQ zu der einen Asymptote bis an die andere ziehen. Dann ergiebt sich, weil P den Abschnitt BB_1 der Tangente hälftet (Seite 116):

$$QP \text{ oder } y = \tfrac{1}{2}\, AB_1 \quad \text{und} \quad AQ \text{ oder } x = \tfrac{1}{2}\, AB.$$

Da nun $AB \,.\, AB_1$ sich nicht ändert, wenn die Tangente BB_1 an der Hyperbel hingleitet, so bleibt auch $x \,.\, y$ constant, wenn der Punkt P die Hyperbel beschreibt. Also:

„Wählt man die Asymptoten einer Hyperbel zu Axen paralleler „Coordinaten, so ist die Gleichung der Hyperbel $xy =$ Const.“

Damit ist die synthetische Theorie der Hyperbel mit der analytischen in Verbindung gebracht.

In den Elementen der analytischen Geometrie pflegt man die Ellipse und die Hyperbel durch Parallel-Coordinaten auf conjugirte Durchmesser zu beziehen. Indem wir dieses Verfahren auf unsere Curven zweiter Ordnung anwenden, beweisen wir ohne grosse Mühe ihre Identität mit den analytisch durch Gleichungen dargestellten Curven zweiten Grades.

Von den conjugirten Durchmessern OX und OY (Fig. 55) schneidet mindestens der eine, OX, die Curve zweiter Ordnung

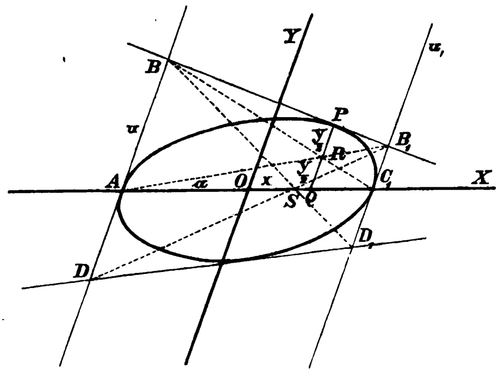


Fig 55.

(Seite 115); die Tangenten u, u_1 der beiden Schnittpunkte A, C_1 sind zu dem anderen Durchmesser OY parallel. Wir beweisen nun zunächst den Satz:

„Das Produkt der Strecken AB und C_1B_1, die eine beliebige „Tangente BB_1 der Curve zweiter Ordnung auf den beiden pa- „rallelen Tangenten u, u_1 abschneidet, ist constant“ (Apollonius).

Nämlich die drei Tangenten bilden mit einer beliebigen vierten DD_1 ein der Curve umschriebenes Viereck, dessen Diagonalen BD_1 und B_1D sich in einem Punkte S des Durchmessers AC_1 schneiden, und aus der Proportion $AB : C_1D_1 = AD : C_1B_1$, die daraus sich ergiebt, folgt sofort, dass $AB . C_1B_1 = AD . C_1D_1$, also constant ist. Dieses constante Produkt ist positiv, etwa $= + b^2$, wenn die Curve eine Ellipse ist; und zwar ist b der auf OY liegende Halbmesser der Ellipse, wie man leicht findet, wenn man DD_1 parallel zu OX zieht. Im Falle der Hyperbel ist $AB . C_1B_1$ negativ, etwa $= - b^2$, weil dann die Strecken AB und C_1B_1 entgegengesetzten Sinn haben; und b ist die absolute Grösse der Strecken, welche jede der beiden Asymptoten auf den parallelen Tangenten u, u_1 abschneidet.

Die drei Tangenten u, u_1 und BB_1, von denen BB_1 die Curve im Punkte P berühren möge, bilden nun ein umschriebenes Dreieck, von welchem B, B_1 und der unendlich ferne Punkt des Durchmessers OY die Eckpunkte sind. Die drei Verbindungslinien dieser Eckpunkte mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten schneiden sich folglich in einem Punkte (Seite 83); der Schnittpunkt R der Geraden BC_1 und B_1A liegt also auf der Ordinate y oder PQ des Punktes P. Weil aber:

$$\frac{QR}{AB} = \frac{QC_1}{AC_1} = \frac{PB_1}{BB_1} = \frac{RP}{AB},$$

so muss $QR = RP = \frac{1}{2} QP = \frac{1}{2} y$ sein.

Die Gleichung der Curve zweiter Ordnung ergiebt sich nun, wenn wir die beiden Seiten der Gleichungen:

$$\frac{QR}{AB} = \frac{QC_1}{AC_1} \text{ und } \frac{QR}{C_1B_1} = \frac{AQ}{AC_1}$$

mit einander multipliciren und sodann $QR = \frac{1}{2} y$, $AB . C_1B_1 = \pm b^2$, $AC_1 = 2 . AO = 2a$ und $OQ = x$, also auch $QC_1 = a - x$ und $AQ = a + x$ setzen. Wir erhalten so:

$$\pm \frac{y^2}{4b^2} = \frac{a^2 - x^2}{4a^2} \text{ oder } \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

und zwar gilt das obere Vorzeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel. Dieser Gleichung genügen die Coordinaten x, y eines beliebigen Punktes P der Curve zweiter Ordnung, wenn diese auf conjugirte Durchmesser bezogen wird.

168 Ist die Curve eine Parabel, so pflegt man zur Ordinatenaxe eine beliebige Tangente OY (Fig. 56) zu wählen, und zur Abscissenaxe den Durchmesser OX, welcher durch den Berührungspunkt O der Tangente geht. Die Parabel wird aus ihrem unendlich fernen Punkte U, der auf OX liegt, und aus dem Punkte O durch

projective Strahlenbüschel projicirt. Sind also P, Q zwei beliebige Parabelpunkte, deren Coordinaten wir mit x, y und x_1, y_1 bezeichnen, so wird die projective Verwandtschaft der Büschel U und O dargestellt durch:

$$U(OPQU) \overline{\wedge} O(OPQU).$$

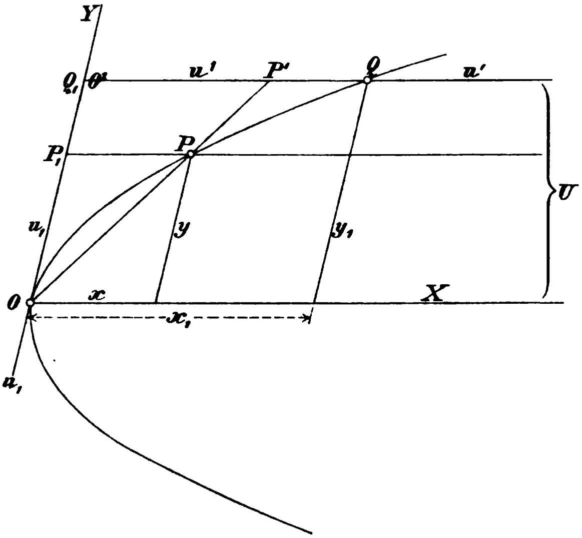


Fig. 56.

Wir schneiden nun den Büschel U mit der Tangente $OY = u_1$ und den Büschel O mit dem durch Q gehenden Durchmesser u', und erhalten die projectiv ähnlichen Punktreihen:

$$u_1\,(OP_1Q_1U_1) \overline{\wedge} u'\,(O'P'QU),$$

deren unendlich ferne Punkte U_1, U einander entsprechen. Es gilt demnach die Proportion (Seite 94):

$$\frac{OP_1}{OQ_1} = \frac{O'P'}{O'Q}.$$

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke OP_1P und OQ_1P' ist ausserdem:

$$\frac{OP_1}{OQ_1} = \frac{P_1P}{Q_1P'} \text{ oder } \frac{OP_1}{OQ_1} = \frac{P_1P}{O'P'}.$$

Aus den beiden Proportionen folgt durch Multipliciren:

$$\left(\frac{OP_1}{OQ_1}\right)^2 = \frac{P_1P}{O'Q} \text{ oder } \frac{y^2}{y_1^2} = \frac{x}{x_1}.$$

„Die Abscissen x, x_1 der beiden Parabelpunkte P, Q verhalten „sich also zu einander wie die Quadrate y^2, $y_1{}^2$ ihrer Ordi„naten.“

Gewöhnlich schreibt man die Gleichung der Parabel in der Form $y^2 = 2px$, indem man $\frac{y_1^2}{x_1} = 2p$ setzt.

— - - —

Zehnter Vortrag.

Regelschaaren und Regelflächen zweiter Ordnung.

163 Durch projective einförmige Grundgebilde, die entweder in derselben Ebene liegen oder demselben Strahlenbündel angehören, gelangen wir zu den Curven, Büscheln und Kegeln zweiter Ordnung. Wir wollen jetzt untersuchen, ob zwei beliebig im Raum liegende projective Grundgebilde erster Stufe nicht noch andere als die genannten Gebilde zweiter Ordnung erzeugen können. Zunächst finden wir:

Ein Strahlenbüschel S erzeugt mit einer zu ihm projectiven Punktreihe u denselben Ebenenbüschel zweiter oder erster Ordnung wie mit dem Büschel, durch welchen u aus dem Mittelpunkte von S projicirt wird. Denn die Ebene, die irgend einen Punkt von u mit dem entsprechenden Strahle des Büschels S verbindet, geht auch durch den entsprechenden Strahl des anderen Büschels.

Ein Strahlenbüschel S erzeugt mit einem zu ihm projectiven Ebenenbüschel u dieselbe Punktreihe zweiter oder erster Ordnung wie mit dem Strahlenbüschel, in welchem u durch die Ebene von S geschnitten wird. Denn der Punkt, den irgend eine Ebene von u mit dem entsprechenden Strahle des Büschels S gemein hat, liegt auch auf dem entsprechenden Strahle des anderen Strahlenbüschels.

Zwei projective Strahlenbüschel, die beliebig im Raume liegen, erzeugen, wenigstens unmittelbar, kein neues Gebilde. Denn zwei homologe Strahlen der Büschel haben im Allgemeinen keinen Schnittpunkt gemein, bestimmen also auch keine Verbindungsebene. Ebenso erzeugen eine Punktreihe und ein zu ihr projectiver

Ebenenbüschel kein neues Gebilde, weil ein Punkt der Reihe mit der entsprechenden Ebene des Büschels kein drittes Element bestimmt.

70 Neue Gebilde erhalten wir demnach nur noch durch projective Punktreihen oder Ebenenbüschel, die beliebig im Raume liegen. Zwei projective Punktreihen u, u_1, die nicht in einer Ebene liegen, erzeugen eine Schaar V von Strahlen, die je zwei homologe Punkte der Reihen verbinden. Keine zwei Gerade dieser „Regelschaar" V liegen in einer Ebene; denn sonst würden zwei Punkte von u, zugleich aber zwei Punkte von u_1 in der Ebene liegen und folglich u und u_1 selbst, gegen die Voraussetzung. Die Strahlen der Regelschaar erfüllen eine krumme Fläche (Figg. 57 und 58), die eine „Regelfläche" genannt wird und folgende Eigenschaften hat:

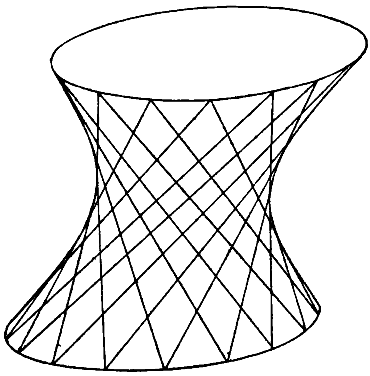


Fig. 57.

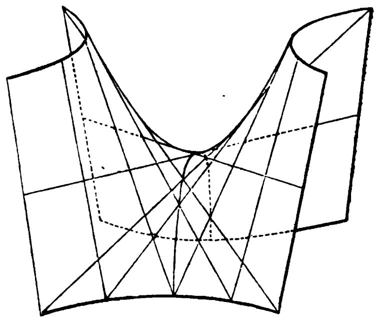


Fig. 58.

„Die Regelfläche enthält noch eine zweite Schaar U von Ge„raden. Jede Gerade der einen Schaar wird von jeder Geraden „der anderen Schaar geschnitten; dagegen liegen keine zwei „Gerade aus einer und derselben Schaar in einer Ebene." Aufg 90

Jeder Punkt eines beliebigen Strahles der einen Schaar liegt auch auf einem Strahle der anderen Schaar.

Jede Ebene durch einen beliebigen Strahl der einen Schaar geht auch durch einen Strahl der anderen Schaar.

Seien nämlich v, v_1, v_2 irgend drei Strahlen der Schaar V, von denen also jeder zwei homologe Punkte der Reihen u, u_1 verbindet, und sei u_2 irgend eine Gerade, welche die Strahlen v, v_1, v_2 schneidet. Projiciren wir dann die projectiven Punktreihen

u, u_1 aus der Axe u_2, so erhalten wir zwei projective Ebenenbüschel, welche die drei Ebenen $u_2 v$, $u_2 v_1$ und $u_2 v_2$, entsprechend gemein haben und folglich identisch sind (vergl. Seite 58). Je zwei homologe Punkte von u und u_1 liegen demnach mit u_2 in einer Ebene, und u_2 schneidet jeden Strahl der Regelschaar V. Dasselbe gilt von jeder anderen Geraden u_3, die mit den drei Strahlen v, v_1, v_2 incident ist. Also:

„Die Regelschaar U besteht aus allen Geraden, welche drei be-
Aufg 89 „liebige Strahlen v, v_1, v_2 der Regelschaar V schneiden. Ebenso „besteht die Schaar V aus allen Geraden, welche drei Strahlen „u, u_1, u_2 der Schaar U schneiden; sie ist durch die drei Strah- „len v, v_1, v_2 bestimmt."

Aufg 90 Jeder Strahl der einen Schaar soll ein „Leitstrahl" der anderen heissen, weil er alle Strahlen dieser anderen Schaar schneidet; jede der beiden Schaaren heisst die „Leitschaar" der anderen.

171 Die Regelfläche kann also in zweifacher Weise so durch eine Gerade beschrieben werden, dass diese an drei festen windschiefen Geraden hingleitet. Die drei festen Geraden sind Leitstrahlen der Regelschaar, die von der beweglichen Geraden beschrieben wird und die Regelfläche überdeckt. Jeden Punkt eines Leitstrahls trifft die bewegliche Gerade einmal, und in jede Ebene, die durch einen Leitstrahl gelegt werden kann, fällt sie einmal hinein (vergl. Seite 28). Die vorhin aufgestellten Sätze sind hierdurch bewiesen.

172 Zwei projective Ebenenbüschel u, u_1, deren Axen nicht in einer Ebene liegen, erzeugen ebenfalls eine Regelschaar V. Diese wird auch erzeugt durch zwei projective Punktreihen u, u_1, von denen die eine ein Schnitt des Büschels u_1 mit der Geraden u ist, die andere ein Schnitt des Büschels u mit der Geraden u_1. Jede Gerade, in der sich homologe Ebenen der Büschel schneiden, verbindet nämlich homologe Punkte dieser Reihen.

173 „Eine Regelschaar wird von je zwei ihrer Leitstrahlen in „projectiven Punktreihen geschnitten und aus je zwei ihrer „Leitstrahlen durch projective Ebenenbüschel projicirt. Diese „Ebenenbüschel sind zu jenen Punktreihen perspectiv."

Denn seien w, w_1, w_2 drei Leitstrahlen der Regelschaar, so schneiden diese jeden Strahl der Schaar. Wir erhalten also beliebig viele Strahlen der Schaar, indem wir entweder durch w_2 beliebig viele Ebenen legen und in jeder dieser Ebenen die Verbindungslinie ihrer Schnittpunkte mit w und w_1 ziehen, oder indem wir in w_2 beliebig viele Punkte annehmen, jeden dieser Punkte mit w und w_1 verbinden und die beiden Verbindungsebenen jedesmal zum Schnitt bringen. Diese Constructionen lehren, dass die Regelschaar von den beiden Leitstrahlen w, w_1 in projectiven Punktreihen geschnitten wird, die zu dem Ebenenbüschel w_2 perspectiv liegen, und dass sie aus w und w_1 durch projective Ebenenbüschel projicirt wird, die zu der Punktreihe w_2 perspectiv liegen.

174 „Vier Strahlen einer Regelschaar heissen **harmonische** „**Strahlen** der Schaar, wenn sie von einem und folglich von „jedem Leitstrahle der Schaar in vier harmonischen Punkten „geschnitten, also auch aus jedem Leitstrahle durch vier har- „monische Ebenen projicirt werden."

Sind nämlich w, w_1 irgend zwei Leitstrahlen, so werden die Punktreihen w, w_1 durch die Regelschaar projectiv auf einander bezogen; und wenn irgend vier Strahlen der Schaar von w in harmonischen Punkten geschnitten werden, so sind auch ihre Schnittpunkte mit w_1 harmonisch. Zugleich aber werden die vier Strahlen aus w_1 durch vier harmonische Ebenen projicirt; denn diese Ebenen gehen durch die vier in w liegenden harmonischen Schnittpunkte.

175 Durch drei Strahlen a, b, c im Raume, von denen keine zwei in einer Ebene liegen, ist ein vierter harmonischer Strahl d bestimmt, der von einem der drei Strahlen, etwa von b, getrennt ist. Suchen wir auf irgend einer Geraden, welche die drei gegebenen schneidet, zu den Schnittpunkten den vierten harmonischen Punkt, so liegt dieser auf d. Ueberhaupt ist d ein vierter Strahl der durch a, b und c gehenden Regelschaar; er ist in dieser durch a und c harmonisch getrennt von b.

176 Wenn eine Gerade mehr als zwei Punkte mit einer Regelfläche gemein hat, so liegt sie ganz auf der Fläche; denn sie schneidet dann mehr als zwei Gerade der einen Schaar, muss also ein Leitstrahl dieser Schaar sein und der zweiten Regelschaar angehören. Wegen dieser Eigenschaft wird die Regelfläche zum Unterschiede von anderen geradlinigen Flächen als „Regelfläche zweiter Ordnung" bezeichnet. Eine Ebene, die die Regelfläche in einem Strahle u der einen Schaar und folglich (nach Seite 123) auch noch in einem Strahle v der anderen Schaar schneidet, hat deshalb ausser den Geraden u, v keinen Punkt P mit der Fläche gemein. Denn sonst würde jede Gerade, die durch P ginge und u und v in je einem Punkte schnitte, ganz auf der Regelfläche

liegen, und die ganze Ebene würde in der Fläche enthalten sein, was unmöglich ist. Da nun jede durch den Schnittpunkt von *u* und *v* gehende Gerade der Ebene nur diesen Schnittpunkt *uv* mit Aufg 93 der Regelfläche gemein hat und in ihm die Fläche berührt, so wollen wir sagen, „die Regelfläche wird von der Ebene im Punkte *uv* berührt.“

77 „Die Anzahl der Berührungsebenen, die durch eine Gerade „*l* an die Regelfläche gelegt werden können, ist gleich der An-„zahl der Punkte, die die Gerade mit der Regelfläche ge-„mein hat.“

Denn da jede durch *l* gehende Berührungsebene einen Strahl der einen (und auch einen Strahl der anderen) Regelschaar enthält, so hat die Gerade *l* mit diesem Strahle einen Schnittpunkt gemein. Es fallen aber keine zwei dieser Schnittpunkte zusammen, weil keine zwei Strahlen der Regelschaar incident sind. Daraus folgt, dass eine Gerade ganz auf der Regelfläche liegt, wenn in ihr mehr als zwei Berührungsebenen sich schneiden. Die Regelfläche heisst „Fläche zweiter Klasse,“ weil durch eine beliebige Gerade höchstens zwei ihrer Berührungsebenen gehen.

178 Zwei projective Ebenenbüschel, die eine Regelschaar erzeugen, werden von einer beliebigen Ebene in projectiven Strahlenbüscheln geschnitten; jeder Schnittpunkt homologer Strahlen dieser Strahlenbüschel aber liegt auf einem Strahle der Regelschaar. Wird dieselbe Regelschaar durch projective Punktreihen erzeugt, und werden diese aus einem beliebigen Punkte durch concentrische projective Strahlenbüschel projicirt, so geht jede Verbindungsebene homologer Strahlen dieser Büschel durch einen Strahl der Regelschaar. Daraus ergiebt sich der erste Theil der Sätze:

Aufg 94 Eine Regelschaar wird von jeder Ebene, die keinen Strahl der Schaar enthält, in einer Curve zweiter Ordnung geschnitten. Die Ebenen, welche die Regelfläche in den Punkten einer Curve zweiter Ordnung berühren, bilden einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung.

Eine Regelschaar wird aus jedem Punkte, der auf keinem Strahle der Schaar liegt, durch einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung projicirt. Die Punkte, in denen die Regelfläche von den Ebenen eines solchen Büschels berührt wird, liegen auf einer Curve zweiter Ordnung. Aufg 9

Um die zweite Hälfte zunächst des Satzes rechts zu beweisen, legen wir durch drei von den Berührungspunkten eine Ebene.

Diese schneidet den Ebenenbüschel in einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung, der jene drei Punkte zu Berührungspunkten hat und eine Curve zweiter Ordnung einhüllt. Aber diese Curve ist identisch mit der Schnittcurve der Regelfläche und der Ebene, weil beide Curven zweiter Ordnung die drei Berührungspunkte und deren drei Tangenten gemein haben. Ganz analog wird der Satz links bewiesen, indem man durch den Schnittpunkt von drei Berührungsebenen einen Büschel von Berührungsebenen an die Regelfläche legt.

179 Eine Regelfläche zweiter Ordnung heisst ein „einfaches oder einschaliges Hyperboloid“ (Fig. 57), wenn sie keine unendlich ferne Gerade enthält, sondern mit der unendlich fernen Ebene eine Curve zweiter Ordnung gemein hat. Dagegen wird sie ein „hyperbolisches Paraboloid“ genannt (Fig. 58), wenn die eine und folglich (Seite 123) jede ihrer beiden Regelschaaren einen unendlich fernen Strahl besitzt. Eine „paraboloidische“ Regelschaar, deren Ort ein hyperbolisches Paraboloid ist, wird von je zwei ihrer Leitstrahlen in projectiv ähnlichen Punktreihen geschnitten, deren unendlich ferne Punkte einander entsprechen (vgl. Seite 94). Ein hyperbolisches Paraboloid wird beschrieben, wenn eine Gerade an zwei „windschiefen“, d. h. sich nicht schneidenden Geraden u, u_1 hingleitet und dabei einer festen Ebene parallel bleibt, die die Richtungen von u und u_1 nicht enthält. Denn die bewegliche Gerade gleitet nicht nur an u und u_1, sondern ausserdem an der unendlich fernen Geraden der gegebenen Ebene; sie beschreibt also eine Regelfläche, welche einen und folglich noch einen zweiten unendlich fernen Strahl enthält. Das hyperbolische Paraboloid wird von einer beliebigen Ebene, die durch keinen seiner Strahlen geht, in einer Hyperbel geschnitten; nur dann, wenn die Ebene eine bestimmte Richtung enthält, ist die Schnittlinie eine Parabel. Die Schnittcurve geht nämlich durch die beiden Punkte, welche die unendlich fernen Strahlen der Fläche mit der Ebene gemein haben, und diese Punkte fallen nur dann zusammen, wenn die Ebene den gemeinschaftlichen Punkt der beiden unendlich fernen Strahlen enthält. Aufg. 93

180 Das einschalige Hyperboloid wird von der unendlich fernen Ebene nicht berührt, wie das hyperbolische Paraboloid, sondern von ihr in einer Curve zweiter Ordnung geschnitten. Die Berührungsebenen an den unendlich fernen Punkten des Hyperboloides sind daher eigentliche Ebenen. Diese „Asymptotenebenen“ haben mit dem

Hyperboloid je zwei parallele Gerade gemein; sie schneiden sich in einem Punkte S und bilden einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung (Seite 126). Der von ihnen eingehüllte Kegel zweiter Ordnung berührt das Hyperboloid längs seiner unendlich fernen Curve, und wird dessen „Asymptotenkegel" genannt. Jeder Strahl des Asymptotenkegels läuft zu je einem Strahle der beiden Regelschaaren parallel, indem er den unendlich fernen Punkt des Strahles enthält. Eine Ebene, die durch keinen Strahl des Hyperboloides geht, schneidet die Fläche in einer Hyperbel, Parabel oder Ellipse, jenachdem sie mit der unendlich fernen Curve des Hyperboloides zwei Punkte, einen oder keinen Punkt gemein hat, oder was dasselbe ist, jenachdem sie zu zwei Strahlen, oder nur zu einem oder zu keinem Strahle des Asymptotenkegels parallel ist.

181 Ich füge noch folgenden Satz hinzu, der sich aus dem Vorhergehenden ergiebt:

Aufg. 94 „Wird zu jedem Strahle einer Regelschaar eine Parallele durch „einen beliebigen Punkt gelegt, so liegen alle diese Parallelen
Aufg. 93 „in einer Asymptotenebene oder in einem Kegel zweiter Ordnung, jenachdem die Regelschaar einem hyperbolischen Paraboloide oder einem einschaligen Hyperboloide angehört." (Schnitt mit der ∞fernen Ebene.)

182 Ein hyperbolisches Paraboloid wird „gleichseitig" genannt, wenn die Strahlen seiner beiden Regelschaaren zu zwei auf einander senkrechten Ebenen parallel laufen. Jede Regelschaar des gleichseitigen Paraboloides enthält einen Strahl, der die Leitebene und alle Strahlen der anderen Schaar rechtwinklig schneidet.

Eine Regelschaar U wird nach vorhin bewiesenen Sätzen (Seite 124) aus ihren ∞^1 Leitstrahlen durch eine „Schaar projectiver Ebenenbüschel" oder „Büschelschaar" projicirt; sie wird erzeugt durch je zwei dieser projectiven Ebenenbüschel. Ebenso wird ihre Leitschaar V aus den Strahlen von U durch die ∞^1 projectiven Büschel einer zweiten Büschelschaar projicirt, und durch je zwei dieser Büschel erzeugt. Die beiden Büschelschaaren erzeugen sich gegenseitig, denn die Ebenenbüschel einer jeden von ihnen bestehen aus homologen Ebenen der ∞^1Büschel der anderen. Wir nennen jede der beiden Büschelschaaren den „Träger" der anderen und sagen von ihnen, sie „tragen" oder „stützen sich" oder „ruhen auf einander." Als „Ordnungsfläche" der

Büschelschaaren bezeichnen wir die Regelfläche zweiter Ordnung, auf welcher die Axen ihrer ∞^1 Ebenenbüschel liegen.

Die Regelschaar U wird von ihren ∞^1 Leitstrahlen in einer „Schaar projectiver Punktreihen" geschnitten; diese ∞^1 Punktreihen aber erzeugen durch ihre homologen Punkte eine zweite Schaar projectiver Punktreihen, die auf den Strahlen von U liegen und Schnitte der Leitschaar von U sind. Jede der beiden Schaaren projectiver Punktreihen ist der Träger der anderen; ihre „Ordnungsfläche" ist die Regelfläche zweiter Ordnung, welche alle ihre Punktreihen und die Regelschaar U enthält.

Durch zwei projective Ebenenbüschel u, u_1 sind zwei sich stützende Büschelschaaren bestimmt, von denen die eine (uu_1) die beiden Büschel verbindet. Denn u und u_1 erzeugen i. A. eine Regelschaar V, die aus ihren ∞^1 Leitstrahlen durch die ∞^1 projectiven Büschel der Schaar (uu_1) projicirt wird; die Büschel der anderen Büschelschaar aber bestehen aus homologen Ebenen der ∞^1 Büschel von (uu_1), sie werden durch diese Büschel erzeugt, und ihre Axen sind die Strahlen von V. Wenn die beiden Büschel u, u_1 einen Kegel zweiter Ordnung erzeugen, so wird dieser aus seinen ∞^1 Strahlen durch die projectiven Büschel der Schaar (uu_1) projicirt (vgl. Seite 90); die zweite Büschelschaar aber fällt dann mit (uu_1) zusammen. Haben jedoch u und u_1 eine Ebene φ entsprechend gemein und somit zu einander und zu einem Strahlenbüschel S perspective Lage, so zerfällt der Kegel in φ und die Ebene η von S; die beiden Büschelschaaren aber bestehen in diesem besonderen Falle aus perspectiven Ebenenbüscheln, deren Axen in den Ebenen φ und η zwei concentrische Strahlenbüschel bilden, und zwar haben die Büschel der Schaar (uu_1) die Ebene φ entsprechend gemein und sind perspectiv zu dem Strahlenbüschel S in der Ebene η. Die Büschel der anderen Schaar bestehen aus homologen Ebenen der ∞^1 Büschel von (uu_1), sie haben die Ebene η entsprechend gemein und einer von ihnen ist ausgeartet und reducirt sich auf die Ebene φ.

Eilfter Vortrag.

Projective Verwandtschaft von Elementargebilden.

183 Durch projective einförmige Grundgebilde können fünferlei Gebilde zweiter Ordnung erzeugt werden, wie wir gesehen haben, nämlich die Curven oder Punktreihen zweiter Ordnung, die Strahlenbüschel und die Ebenenbüschel zweiter Ordnung, die Kegel zweiter Ordnung und die Regelschaaren. Es ist zweckmässig, mit von Staudt diese Gebilde zweiter Ordnung und die einförmigen Grundgebilde zusammenzufassen unter dem gemeinschaftlichen Namen Elementargebilde. Zu den Elementargebilden gehören dann zweierlei Punktgebilde, nämlich die Punktreihen erster und zweiter Ordnung, ferner zweierlei Ebenengebilde, nämlich die Ebenenbüschel erster und zweiter Ordnung, und endlich viererlei Strahlengebilde, nämlich die Strahlenbüschel erster und zweiter Ordnung, die Kegel zweiter Ordnung und die Regelschaaren.

Mein gegenwärtiger Vortrag nun wird Ihnen zeigen, dass wir diese Elementargebilde in analoger Weise auf einander beziehen können wie die einförmigen Grundgebilde. Das Gebiet unserer Untersuchungen erweitert sich dadurch bedeutend; insbesondere gelangen wir zu einer grossen Anzahl neuer Punkt-, Strahlen- und Ebenen-Gebilde, die ebenso bemerkenswerthe Eigenschaften besitzen, wie die bisher betrachteten. Zugleich aber werden wir zu weiteren wichtigen Sätzen über die Gebilde zweiter Ordnung geführt, die auf anderem Wege schwerlich so leicht sich ergeben möchten.

184 Zunächst erinnere ich Sie an folgende früher aufgestellte Sätze, die als Definitionen der harmonischen Elemente in Gebilden zweiter Ordnung aufgefasst werden können:

Vier harmonische Punkte einer Curve zweiter Ordnung werden aus jedem fünften Punkte der Curve durch vier harmonische Strahlen projicirt (Seite 79).

Vier harmonische Strahlen eines Kegels zweiter Ordnung

Vier harmonische Strahlen eines Strahlenbüschels zweiter Ordnung schneiden jeden fünften Strahl des Büschels in vier harmonischen Punkten.

Vier harmonische Ebenen eines Ebenenbüschels zweiter Ordnung werden aus jedem fünften Strahle des Kegels durch vier harmonische Ebenen projicirt (Seite 90).

schneiden jede fünfte Ebene des Büschels in vier harmonischen Strahlen.

„Vier harmonische Strahlen einer Regelschaar werden von „jedem Leitstrahle der Schaar in vier harmonischen Punkten „geschnitten und aus jedem Leitstrahle durch vier harmonische „Ebenen projicirt“ (Seite 125).

185 Wir können nun die früher (Seite 54) aufgestellte Definition der projectiven Verwandtschaft von Grundgebilden auf alle Elementargebilde ausdehnen, indem wir sagen:

Zwei Elementargebilde heissen projectiv, wenn sie so auf einander bezogen sind, dass je vier harmonischen Elementen des einen Gebildes vier harmonische Elemente des anderen entsprechen.

Auch den Begriff der perspectiven Lage einförmiger Grundgebilde können wir auf Elementargebilde anwenden, indem wir festsetzen:

Zwei ungleichartige projective Elementargebilde heissen perspectiv, wenn jedes Element des einen in dem entsprechenden Elemente des anderen liegt.

Eine Punktreihe zweiter Ordnung z. B. liegt perspectiv zu einem durch sie gehenden Kegel, wenn jedem Strahle des Kegels der auf ihm liegende Punkt der Reihe entspricht. Eine Punktreihe zweiter Ordnung wird aus jedem ihrer Punkte durch einen zu ihr perspectiven Strahlenbüschel projicirt; ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung wird von jedem seiner Strahlen in einer zu ihm perspectiven Punktreihe geschnitten, und ebenso eine Regelschaar von jedem ihrer Leitstrahlen. Denn zwei Elementargebilde, von denen das eine mittelst des anderen in dieser Weise erzeugt ist, sind projectiv, weil vier harmonischen Elementen des einen allemal vier harmonische Elemente des anderen entsprechen. Wird jedem Punkte einer Curve zweiter Ordnung seine Tangente zugewiesen, so ist die Curve auf den sie einhüllenden Strahlenbüschel perspectiv bezogen; denn in vier harmonischen Punkten wird die Curve allemal von vier harmonischen Strahlen des Büschels berührt (Seite 89). Zwei Curven zweiter Ordnung sind daher projectiv auf einander bezogen, wenn die beiden sie einhüllenden Strahlenbüschel projectiv sind.

186 Zwei Gebilde zweiter Ordnung können dadurch projectiv auf einander bezogen werden, dass man zwei zu ihnen perspective

einförmige Grundgebilde projectiv auf einander bezieht. Zwei projective Elementargebilde können folglich (nach Seite 64) stets als erstes und letztes in einer Reihe von Elementargebilden betrachtet werden, deren jedes zum folgenden perspective Lage hat. Auch können zwei Elementargebilde E, E_1 auf eine einzige Art projectiv so auf einander bezogen werden, dass drei gegebenen Elementen a, b, c des einen drei beliebig gewählte Elemente a_1, b_1, c_1 des andern entsprechen; denn dieser Satz ist für einförmige Grundgebilde bereits bewiesen. Die projective Beziehung der beiden Elementargebilde E, E_1 ist dadurch, dass:

$$E\,(abc) \barwedge E_1\,(a_1 b_1 c_1)$$

sein soll, völlig bestimmt.

Sollen z. B. in einer Ebene zwei Punktreihen zweiter Ordnung k, k_1 (Fig. 59) projectiv so auf einander bezogen werden,

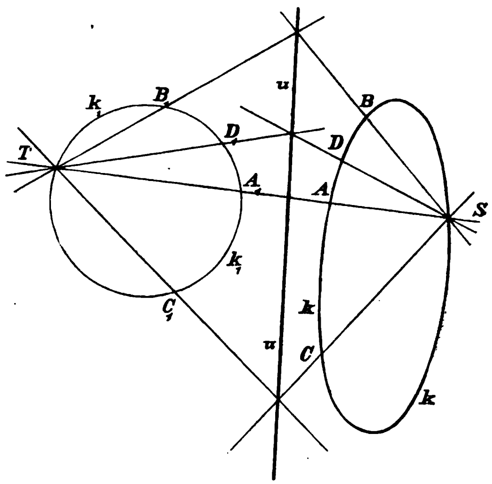


Fig. 59.

dass den Punkten A, B, C von k die resp. Punkte A_1, B_1, C_1 von k_1 entsprechen, oder

$$k\,(ABC) \barwedge k_1\,(A_1 B_1 C_1)$$

ist, so bezeichnen wir mit S und T_1 die beiden Punkte von k und k_1, die aus A resp. A_1 durch den Strahl AA_1 projicirt werden, und projiciren sodann die Punktreihen aus S und T_1 durch zwei Strahlenbüschel $S\,(ABC\ldots)$ und $T_1\,(A_1 B_1 C_1\ldots)$. Diese

Büschel sind zu den Punktreihen und folglich zu einander projectiv und liegen, weil sie den Strahl AA_1 entsprechend gemein haben, perspectiv. Je zwei homologe Punkte D, D_1 der beiden Punktreihen werden also aus S resp. T_1 durch Strahlen projicirt, die sich auf einer bestimmten Geraden u schneiden.

187 „Wenn zwei gleichartige projective Elementargebilde, z. B. „zwei Punktreihen zweiter Ordnung, auf einander liegen, so „haben sie entweder alle oder höchstens zwei Elemente entsprechend gemein.“

Denn identische Elementargebilde sind zugleich projectiv.

Zwei Curven zweiter Ordnung, die in derselben Ebene liegen und einen Punkt S gemein haben, werden projectiv auf einander bezogen, wenn in ihnen je zwei Punkte einander zugewiesen werden, die mit S in einer Geraden liegen. Denn beide Curven sind alsdann perspectiv zu dem Strahlenbüschel S. Jeden von S verschiedenen gemeinschaftlichen Punkt haben die Curven entsprechend gemein, den Punkt S aber nur dann, wenn sie in ihm eine gemeinschaftliche Tangente haben, also sich in S berühren.

Zwei Curven zweiter Ordnung, die in derselben Ebene liegen und eine Tangente s gemein haben, werden projectiv auf einander bezogen, wenn von ihnen je zwei Tangenten einander zugewiesen werden, die sich in einem Punkte von s schneiden. Denn die sie einhüllenden Büschel zweiter Ordnung sind alsdann perspectiv zu der Punktreihe s. Die Curven haben jede von s verschiedene gemeinschaftliche Tangente entsprechend gemein, s selbst aber nur dann, wenn sie sich in einem Punkte von s berühren.

Zwei verschiedene Curven zweiter Ordnung, die in der links angegebenen Weise auf einander bezogen sind, haben höchstens drei Punkte entsprechend gemein. Denn wenn sie ausser S noch vier Punkte oder drei Punkte und die Tangente in S gemein hätten, wären sie identisch (nach Seite 80). Ebenso können rechts die beiden Curven höchstens drei Tangenten entsprechend gemein
188 haben. Wir werden so zu dem Doppelsatze geführt:

Wenn zwei projective Curven zweiter Ordnung vier Punkte A, B, C, S entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Punkte entsprechend gemein, und sind identisch.

Wenn zwei projective Curven zweiter Ordnung vier Tangenten entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Tangenten entsprechend gemein, und sind identisch.

Wir beweisen den Satz links wie folgt. Die beiden Curven können nur auf eine einzige Art so auf einander bezogen werden, dass den drei Punkten A, B, C der einen dieselben drei Punkte A, B, C der anderen entsprechen. Dieses geschieht aber, wenn wir beide Curven auf den Strahlenbüschel S perspectiv beziehen. Sollen nun die Curven auch noch den Punkt S entsprechend gemein haben, so berühren sie in ihm eine gemeinschaftliche Tangente und sind folglich identisch (Seite 80). — Der Satz rechts ergiebt sich aus dem anderen mittelst des Princips der Dualität, das wir ja für die Ebene bereits bewiesen haben; doch kann ich Ihnen als nützliche Uebung nur empfehlen, einen direkten Beweis dafür aufzusuchen.

Werden die beiden Curven aus einem beliebigen Mittelpunkte durch projective Kegel projicirt, so erhalten wir für diese einen
189 ganz analogen Doppelsatz. Ist eine Curve zweiter Ordnung projectiv zu einer Regelschaar oder Kegelfläche zweiter Ordnung, und liegen mehr als drei Punkte der Curve auf den ihnen entsprechenden Strahlen, so ist die Curve perspectiv zu der Regelschaar oder Kegelfläche; denn sie ist identisch mit dem Schnitte der Schaar oder Fläche, welcher in ihrer Ebene liegt, weil sie zu ihm projectiv ist und mehr als drei Punkte mit ihm entsprechend gemein hat. Ebenso hat ein Ebenenbüschel zweiter Ordnung zu einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung oder zu einer Regelschaar, die zu ihm projectiv sind, perspective Lage, wenn mehr als drei seiner Ebenen durch ihre entsprechenden Strahlen gehen. Projiciren wir nämlich das Strahlengebilde zweiter Ordnung aus dem Mittelpunkte des Ebenenbüschels, so erhalten wir einen zweiten Ebenenbüschel zweiter Ordnung; dieser aber ist mit dem ersteren identisch, weil er zu ihm projectiv ist und mehr als drei Ebenen mit ihm entsprechend gemein hat.

190 Hierher gehört auch der Beweis der Sätze:

Zwei nicht concentrische Kegel zweiter Ordnung, die in der Verbindungslinie s ihrer Mittelpunkte von einer und derselben Ebene berührt werden, schneiden sich in einer Curve zweiter Ordnung.

Beziehen wir nämlich die Kegel perspectiv auf den Ebenen-

Zwei Curven zweiter Ordnung, welche die Schnittlinie a ihrer Ebenen in einem und demselben Punkte berühren, liegen auf einem Kegel zweiter Ordnung (Fig. 42).

Beziehen wir die Tangentenbüschel der beiden Curven perspectiv auf die Punktreihe a, so haben sie den Strahl a ent-büschel s, so haben sie den Strahl s entsprechend gemein; je zwei andere homologe Strahlen der Kegel aber treffen sich, weil sie mit s in einer Ebene liegen. Die Verbindungsebene von irgend drei Schnittpunkten homologer Strahlen schneidet die Kegel in zwei projectiven Curven zweiter Ordnung, die identisch sind, weil sie nicht nur jene drei Schnittpunkte, sondern auch einen Punkt von s entsprechend gemein haben.

sprechend gemein (vergl. Seite 133); je zwei andere homologe Tangenten aber liegen in einer Ebene, weil sie sich auf a schneiden. Aus dem Schnittpunkte S von irgend drei Verbindungsebenen homologer Tangenten werden die Büschel durch projective Ebenenbüschel zweiter Ordnung projicirt, welche identisch sind, weil sie die drei Ebenen und eine durch a gehende vierte Ebene entsprechend gemein haben.

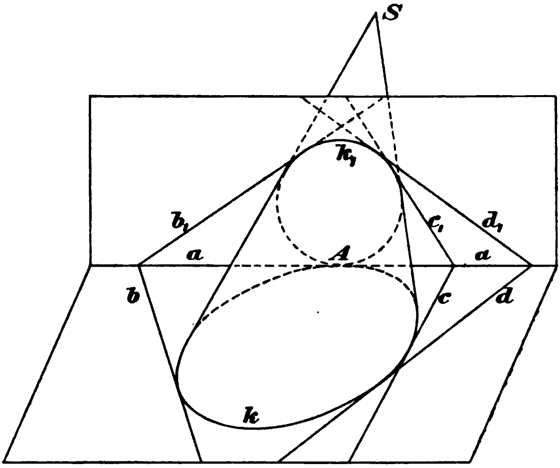


Fig. 42.

Einfacher noch lässt sich der Beweis so führen. Legen wir links durch drei gemeinschaftliche Punkte der Kegel eine Ebene, so haben die beiden in ihr liegenden Kegelschnitte die drei Punkte gemein, ausserdem aber den Schnittpunkt von s mit der Ebene. Und da beide Curven in diesem vierten Punkte von der gemeinschaftlichen Berührungsebene der Kegel und deren Schnittlinie berührt werden, so fallen sie zusammen (Seite 80). Aehnlich ergiebt sich der Satz rechts.

192 Wenn ein Büschel S erster Ordnung mit einer zu ihm projectiven Curve σ zweiter Ordnung in einer Ebene, jedoch nicht zu ihr perspectiv liegt, so gehen höchstens drei Strahlen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte der Curve, mindestens aber ein Strahl.

Wenn eine Punktreihe erster Ordnung mit einem zu ihm projectiven Büschel zweiter Ordnung in einer Ebene liegt, aber nicht zu ihm perspectiv ist, so liegen höchstens drei Punkte der Reihe auf den entsprechenden Strahlen des Büschels, mindestens aber ein Punkt.

Denn jeder zu der Curve σ perspective Büschel S_1 ist zu dem Büschel S projectiv und erzeugt mit ihm im Allgemeinen eine zweite Curve zweiter Ordnung; diese geht durch die Punkte S, S_1 und hat mit der Curve σ jeden Punkt gemein, der auf dem entsprechenden Strahle von S liegt. Gehen mehr als drei Strahlen von S durch die entsprechenden Punkte von σ, so haben die beiden Curven ausser S_1 noch mindestens vier Punkte gemein, sind also identisch, und S liegt perspectiv zu σ. Da jede Curve zweiter Ordnung ihre Ebene in zwei getrennte Theile zerlegt, so müssen die beiden Curven, falls sie nicht zusammenfallen, sich entweder in ihrem gemeinschaftlichen Punkte S_1 berühren, oder in S_1 und mindestens einem zweiten Punkte P schneiden, indem die eine Curve theils innerhalb, theils ausserhalb der anderen liegt. Im letzteren Falle entsprechen die Strahlen SP und S_1P einander, und SP geht folglich durch den ihm entsprechenden Punkt P der Curve σ; im ersteren Falle entspricht dem Strahle SS_1 von S die gemeinschaftliche Tangente in S_1 und folglich der auf SS_1 liegende Punkt S_1 der Curve σ. Also liegt mindestens ein Punkt der Curve auf dem ihm entsprechenden Strahle des Büschels.

Ganz analoge Sätze gelten für die Gebilde erster und zweiter Ordnung im Strahlenbündel. Wir ziehen daraus den Schluss:

193 *Sind ein einförmiges Grundgebilde und ein Elementargebilde zweiter Ordnung projectiv auf einander bezogen, und gehen mehr als drei Elemente des einen Gebildes durch die ihnen entsprechenden Elemente des anderen, so liegen die beiden Gebilde perspectiv, d. h. jedes Element des einen Gebildes geht durch das ihm entsprechende Element des anderen.*

Ist das Gebilde zweiter Ordnung eine Regelschaar, das andere Gebilde also entweder eine Punktreihe oder ein Ebenenbüschel erster Ordnung, so können wir schon dann schliessen, dass die beiden Gebilde perspectiv liegen, wenn drei Strahlen der Regelschaar durch die entsprechenden drei Punkte der Punktreihe gehen oder aber in den entsprechenden Ebenen des Büschels liegen. Denn der Träger der Punktreihe resp. die Axe des Ebenenbüschels ist mit drei Strahlen der Schaar incident, also ein Leitstrahl der Regelschaar (Seite 124).

194 Wie wichtig diese Sätze sind, mögen Sie aus den Folgerungen abnehmen:

Ein Ebenenbüschel erster Ordnung erzeugt mit einer zu ihm projectiven Regelschaar oder Kegelfläche zweiter Ordnung im Allgemeinen eine „Raumcurve dritter Ordnung“, die mit jeder beliebigen Ebene mindestens einen Punkt und höchstens drei Punkte gemein hat.

Eine Punktreihe erster Ordnung und eine Regelschaar oder ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung, die zu einander projectiv sind, erzeugen im Allgemeinen einen „Ebenenbüschel dritter Ordnung“, der mit jedem Punkte mindestens eine Ebene und höchstens drei Ebenen gemein hat.

Denn eine Ebene schneidet die Regelschaar oder Kegelfläche (links) in einer zu ihr perspectiven Punktreihe zweiter Ordnung, von welcher im Allgemeinen höchstens drei Punkte auf den entsprechenden Ebenen des Büschels liegen. — Aus dem Satze folgt:

Drei projective Ebenenbüschel erster Ordnung erzeugen i. A. eine Raumcurve dritter Ordnung.

Drei projective Punktreihen erster Ordnung erzeugen i. A. einen Ebenenbüschel dritter Ordnung.

Denn zwei der drei Ebenenbüschel erzeugen i. A. eine Regelschaar oder Kegelfläche zweiter Ordnung, die zu dem dritten Büschel projectiv ist und mit ihm die Raumcurve erzeugt. In jedem Punkte der cubischen Raumcurve schneiden sich drei homologe Ebenen der Büschel.

Wenn eine Punktreihe erster Ordnung u und eine zu ihr projective Punktreihe k zweiter Ordnung in einer Ebene liegen, so bilden die Verbindungslinien ihrer homologen Punkte einen „Strahlenbüschel dritter Ordnung;“ dieser sendet durch einen belie-

Wenn ein Strahlenbüschel erster und ein zu ihm projectiver Strahlenbüschel zweiter Ordnung in einer Ebene liegen, so Aufg 99
ist der Ort der Schnittpunkte ihrer homologen Strahlen eine „Curve dritter Ordnung;“ diese hat mit einer beliebigen Geraden

bigen Punkt der Ebene mindestens einen Strahl und höchstens drei Strahlen.

der Ebene mindestens einen und höchstens drei Punkte gemein.

Denn ist S ein beliebiger zu u perspectiver und folglich zu k projectiver Büschel erster Ordnung, so gehen höchstens drei Strahlen von S durch die entsprechenden Punkte von k, mindestens aber ein Strahl. — Der Strahlenbüschel dritter Ordnung besteht aus den Tangenten einer Curve dritter Classe.

195 Haben die projectiven Punktreihen u und k einen Punkt P entsprechend gemein, so ist jeder durch P gehende Strahl als Verbindungslinie von zwei (zusammenfallenden) homologen Punkten zu betrachten, und der Strahlenbüschel dritter Ordnung enthält den Büschel erster Ordnung P. Die folgenden Sätze sind deshalb nicht als Ausnahmen, sondern als besondere Fälle des eben bewiesenen Doppelsatzes zu betrachten.

Wenn eine Punktreihe erster Ordnung u und eine zu ihr projective Punktreihe zweiter Ordnung k zwei Punkte A, B entsprechend gemein haben, so erzeugen sie einen Strahlenbüschel erster Ordnung. Aufg 108

Wenn ein Strahlenbüschel erster und ein zu ihm projectiver Strahlenbüschel zweiter Ordnung zwei Strahlen entsprechend gemein haben, so erzeugen sie eine Punktreihe erster Ordnung.

Möge noch dem Punkte C von u der Punkt C_1 von k entsprechen, und sei S der Punkt von k, welcher aus C_1 durch den Strahl C_1C projicirt wird. Beziehen wir dann u und k perspectiv auf den Strahlenbüschel S, so sind sie auf einander projectiv so bezogen, dass den drei Punkten A, B, C von u die resp. drei Punkte A, B, C_1 von k entsprechen. Weil aber (Seite 132) durch $u\,(ABC) \,\overline{\wedge}\, k\,(ABC_1)$ die projective Verwandtschaft von u und k eindeutig bestimmt ist, so bilden die Verbindungslinien homologer Punkte wirklich einen Strahlenbüschel S erster Ordnung, dessen Mittelpunkt auf der Curve k liegt.

196 Durch eine Curve zweiter Ordnung und zwei Gerade a, b, die mit der Curve je einen Punkt gemein haben, aber weder mit ihr noch mit einander in einer Ebene liegen, ist eine zu der Curve perspective Regelschaar

Durch einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung und zwei windschiefe Gerade a, b, die aus dem Mittelpunkte des Büschels durch zwei seiner Ebenen projicirt werden, ist eine zu dem Büschel perspective Regelschaar be-

bestimmt, von welcher die beiden Geraden Leitstrahlen sind.

Die beiden zu der Curve perspectiven Ebenenbüschel a, b erzeugen diese Regelschaar.

stimmt, die a und b zu Leitstrahlen hat.

Die beiden zu dem Ebenenbüschel perspectiven Punktreihen a, b erzeugen die Regelschaar.

Die Leitschaar der Regelschaar enthält die Geraden a, b und kann ebenfalls auf die Curve resp. den Ebenenbüschel zweiter Ordnung perspectiv bezogen werden.

Wenn eine Punktreihe erster und eine Curve zweiter Ordnung projectiv sind und einen Punkt A entsprechend gemein haben, ohne in einer Ebene zu liegen, so erzeugen sie eine zu ihnen perspective Regelschaar.

Wenn zwei Ebenenbüschel erster und zweiter Ordnung projectiv sind und eine Ebene entsprechend gemein haben, ohne in einem Bündel zu liegen, so erzeugen sie eine zu ihnen perspective Regelschaar.

Mögen (links) den Punkten A, B, C der Punktreihe die Punkte A, B_1, C_1 der Curve entsprechen; dann ist die zu der Curve perspective Regelschaar, welcher die Geraden BB_1, CC_1 angehören, auch zu der Punktreihe perspectiv, weil drei Punkte A, B, C der Reihe in den ihnen entsprechenden Strahlen der Regelschaar liegen (Seite 137). Der Beweis rechts ist ganz analog zu führen.

Aus einem beliebigen Punkte, der nicht in der Ebene der Curve liegt, wird diese durch einen Kegel zweiter Ordnung, die Regelschaar aber durch einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung projicirt. Und von einer beliebigen Ebene wird der Ebenenbüschel zweiter Ordnung in einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung, die Regelschaar aber in einer Punktreihe zweiter Ordnung geschnitten. Daraus ergiebt sich:

Wenn eine Punktreihe erster und ein Kegel zweiter Ordnung projectiv sind, und ein Punkt der Reihe auf dem entsprechenden Strahle des Kegels liegt, so erzeugen die beiden Gebilde einen zu ihnen perspectiven Ebenenbüschel zweiter Ordnung.

Wenn ein Ebenenbüschel erster und ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung projectiv sind, und eine Ebene des ersteren Büschels durch den entsprechenden Strahl des letzteren geht, so erzeugen die beiden Büschel eine zu ihnen perspective Punktreihe zweiter Ordnung.

Dieser Satz führt unmittelbar zu dem folgenden, wenn berücksichtigt wird, dass jede Curve zweiter Ordnung als Schnitt eines Kegels zweiter Ordnung aufgefasst werden kann:

Wenn eine Punktreihe erster und eine Curve zweiter Ordnung projectiv sind, in einer Ebene liegen und einen Punkt entsprechend gemein haben, so erzeugen sie einen zu ihnen perspectiven Strahlenbüschel zweiter Ordnung.

Wenn zwei Strahlenbüschel erster und zweiter Ordnung projectiv sind, in einer Ebene liegen und einen Strahl entsprechend gemein haben, so erzeugen sie eine zu ihnen perspective Curve zweiter Ordnung.

„Zwei projective Regelschaaren abc und $a_1 b_1 c_1$, von denen „jede die Leitschaar der anderen ist, erzeugen eine Curve und einen „Ebenenbüschel zweiter Ordnung, die zu ihnen perspectiv sind.“ Die beiden Regelschaaren können nämlich nur auf eine Art projectiv so auf einander bezogen werden, dass den Strahlen a, b, c der einen Schaar die resp. Strahlen a_1, b_1, c_1 der anderen entsprechen. Dieses geschieht aber, wenn je zwei Strahlen einander zugewiesen werden, die sich auf der Verbindungsebene der drei Punkte aa_1, bb_1, cc_1 schneiden oder mit dem Schnittpunkte der drei Ebenen aa_1, bb_1, cc_1 in einer Ebene liegen. Die Schnittpunkte homologer Strahlen der Schaaren liegen also auf einer Curve zweiter Ordnung, und die Verbindungsebenen homologer Strahlen bilden einen Büschel zweiter Ordnung.

„Von zwei projectiven Regelschaaren oder Kegeln zweiter „Ordnung schneiden sich höchstens vier paar homologe Strahlen, „falls nicht je zwei homologe Strahlen sich schneiden.“ Wenn nämlich von den projectiven Regelschaaren irgend zwei homologe Strahlen in einer Ebene ε liegen, so projicire man die beiden Schaaren aus ihren in ε liegenden Leitstrahlen durch zwei Ebenenbüschel. Fallen die beiden Leitstrahlen nicht zusammen, so erzeugen diese Büschel, da sie die Ebene ε entsprechend gemein haben, einen Strahlenbüschel S erster Ordnung. Die Strahlen von S schneiden je zwei homologe Strahlen der Regelschaaren, die Ebene von S aber schneidet die beiden Schaaren in projectiven Curven zweiter Ordnung, die entweder höchstens drei oder alle ihre Punkte entsprechend gemein haben (Seite 133). Diese entsprechend gemeinschaftlichen Punkte sind die Schnittpunkte homologer Strahlen der Schaaren, und umgekehrt. Fallen jene beiden Leitstrahlen zusammen, so schneiden sie die Regelschaaren in zwei projectiven Punktreihen, die entweder höchstens zwei oder alle ihre Punkte entsprechend gemein haben; zugleich werden die Schaaren aus den beiden identischen Leitstrahlen durch Ebenenbüschel projicirt, die entweder höchstens zwei oder alle ihre Ebenen entsprechend gemein haben. In jeder dieser Ebenen liegen und in jedem jener entsprechend gemeinschaftlichen Punkte scheiden sich homologe Strahlen der Regelschaaren. — Ganz analog beweist man den Satz, wenn an die Stelle von einer oder jeder der beiden Regelschaaren ein Kegel zweiter Ordnung tritt. Wir schliessen daraus:

199 Es giebt im Allgemeinen höchstens vier Punkte, in denen je vier homologe Ebenen von vier beliebigen projectiven Ebenenbüscheln erster Ordnung sich schneiden.

Von vier projectiven Punktreihen erster Ordnung liegen im Allgemeinen höchstens vier Gruppen homologer vier Punkte in je einer Ebene.

Die Ebenenbüschel erzeugen nämlich paarweise projective Regelschaaren oder Kegel zweiter Ordnung, für die der vorhergehende Satz gilt; es schneiden sich folglich je vier homologe Ebenen der Büschel in einem Punkte, sobald fünf oder mehr Gruppen homologer vier Ebenen existiren, die durch je einen Punkt gehen.

200 Zwei projective Curven zweiter Ordnung, die auf einander liegen, erzeugen entweder einen zu ihnen perspectiven Strahlenbüschel zweiter Ordnung, oder es giebt einen Punkt, der mit je zwei homologen Punkten der Curven in einer Geraden liegt. Aufg 103

Zwei projective Strahlenbüschel zweiter Ordnung, die in einander liegen, erzeugen entweder eine zu ihnen perspective Curve zweiter Ordnung, oder es giebt eine Gerade, auf der sich je zwei homologe Strahlen der Büschel schneiden. Aufg 104

Jede zu der einen Curve perspective Regelschaar erzeugt nämlich mit ihrer Leitschaar, die wir auf die andere Curve perspectiv beziehen, einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung, der zu allen vier Gebilden perspectiv ist; und jenachdem der Mittelpunkt dieses Büschels ausserhalb oder auf der Curvenebene liegt, tritt der erstere oder der letztere Fall des Satzes ein. — Wenn also von den Verbindungslinien homologer Curvenpunkte irgend drei durch einen und denselben Punkt U gehen (Figg. 62 und 63, Seite 146), so schneiden sie sich alle in diesem Punkte.

201 Zwei projective Curven $ABCD$ und ABC_1D_1 zweiter Ordnung, die zwei Punkte A, B entsprechend gemein haben aber nicht

Zwei projective Ebenenbüschel zweiter Ordnung, welche zwei Ebenen entsprechend gemein haben aber nicht concentrisch sind, in derselben Ebene liegen, erzeugen ein zu ihnen perspectives Strahlengebilde zweiter Ordnung, nämlich entweder eine Regelschaar oder einen Kegel zweiter Ordnung.

erzeugen ein zu ihnen perspectives Strahlengebilde zweiter Ordnung, nämlich entweder eine Regelschaar oder einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung.

Denn die zu der Curve $ABCD$ perspective Regelschaar oder Kegelfläche, welcher die Strahlen CC_1 und DD_1 angehören, ist auch zu der Curve ABC_1D_1 perspectiv (Seite 134). Die Curven erzeugen einen Kegel, wenn ihre Tangenten in C und C_1 die Gerade AB in einem und demselben Punkte schneiden. Wenn sie nämlich auch in diesem Falle eine Regelschaar erzeugten, so würde die Verbindungsebene jener Tangenten ausser dem Strahle CC_1 der Regelschaar noch einen Leitstrahl der Schaar enthalten (Seite 123) und daher mit einer oder jeder der Curven noch einen von C oder C_1 verschiedenen, auf diesem Leitstrahl liegenden Punkt gemein haben, was unmöglich ist. Hieraus folgt:

Zwei Curven zweiter Ordnung, die von der Schnittlinie ihrer Ebenen eine und dieselbe Strecke AB einschliessen, können durch zwei Kegel zweiter Ordnung verbunden werden.

Zwei nicht concentrische Kegel zweiter Ordnung, die einem und demselben Flächenwinkel eingeschrieben sind, schneiden sich in zwei Curven zweiter Ordnung.

Denn die Curven lassen sich auf zweifache Art projectiv so auf einander beziehen, dass sie die Endpunkte A, B ihrer gemeinschaftlichen Sehne entsprechend gemein haben, und dass die Tangenten von zwei anderen homologen Punkten C und C_1 sich in einem Punkte der Geraden AB schneiden.

Wir sind jetzt in den Stand gesetzt, folgenden Satz über die perspective Lage von Elementargebilden zweiter Ordnung zu beweisen:

Wenn eine Curve und ein Büschel zweiter Ordnung oder ein Kegel und ein Ebenenbüschel zweiter Ordnung projectiv sind, und fünf Elemente A, B, C, D, E *des ersteren Gebildes in den ihnen entsprechenden Elementen* α, β, γ, δ, ε *des letzteren liegen, so haben die beiden Gebilde perspective Lage.*

Wir wollen annehmen, das erstere Gebilde sei eine Curve zweiter Ordnung u, und das letztere ein Ebenenbüschel zweiter Ordnung S; auf diesen Fall lassen sich nämlich alle übrigen Fälle des Satzes zurückführen. Wir brauchen dann nur zu zeigen, dass ein

Strahlengebilde construirt werden kann, das zu der Curve und zugleich zu dem Ebenenbüschel perspectiv ist; denn damit ist bewiesen, dass jeder Punkt der Curve auf der ihm entsprechenden Ebene des Büschels liegt.

Ist die Ebene η der Curve ein Element des Büschels S, so erhalten wir in ihr als Schnitt mit S einen zu S perspectiven Büschel erster Ordnung $\eta\ (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)$, der auch zu der Curve $u(ABCDE)$ perspectiv liegt, weil mehr als drei seiner Strahlen durch die entsprechenden Curvenpunkte gehen (Seite 136); der Punkt S liegt daher auf der Curve. Und umgekehrt, wenn S auf der Curve liegt, so projiciren wir diese aus S durch einen Büschel erster Ordnung $S(ABCDE)$, der dann auch zu dem Ebenenbüschel $S\,(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)$ perspectiv ist, weil mehr als drei seiner Strahlen in den entsprechenden Ebenen von S liegen; die Ebene von u gehört daher dem Ebenenbüschel S als Element an. — Liegt der Punkt S nicht auf der Curve, und gehört deren Ebene nicht zu dem Ebenenbüschel S, so sei A_1 der Curvenpunkt der aus A durch die Ebene α projicirt wird, also der zweite Schnittpunkt dieser Ebene und der Curve, der mit A zusammenfällt, wenn die Curve von α berührt wird. Durch A_1 ziehen wir in der Ebene α eine von AA_1 verschiedene Gerade g und projiciren aus dieser die Curve zweiter Ordnung durch einen Ebenenbüschel erster Ordnung $g(ABCDE)$. Der Büschel g ist zu dem Ebenenbüschel zweiter Ordnung S projectiv und erzeugt mit ihm eine zu beiden perspective Regelschaar (Seite 139), weil er mit ihm die Ebene α entsprechend gemein hat; und diese Schaar ist auch zu der Curve zweiter Ordnung perspectiv, weil vier Strahlen der Schaar durch die entsprechenden Punkte B, C, D, E der Curve gehen (Seite 134).

203 Wenn eine Curve zweiter Ordnung $ABCDE$ und eine Regelschaar $abcde$ projectiv aber nicht perspectiv sind, und zwei Punkte A, B der Curve in den entsprechenden Strahlen a, b der Schaar liegen, so erzeugen die beiden Gebilde einen zu ihnen perspectiven Ebenenbüschel zweiter Ordnung.

Wenn ein Ebenenbüschel zweiter Ordnung und eine Regelschaar projectiv aber nicht perspectiv sind, und zwei Ebenen des Büschels durch die entsprechenden Strahlen der Schaar gehen, so erzeugen die beiden Gebilde eine zu ihnen perspective Punktreihe zweiter Ordnung.

Denn der Ebenenbüschel zweiter Ordnung, der die Regelschaar *abcde* aus dem Schnittpunkte der drei Ebenen *Cc*, *Dd*, *Ee* projicirt, ist auch zu der Curve *ABCDE* perspectiv.

204 Zwei projective Curven zweiter Ordnung, die in derselben Ebene liegen und zwei Punkte entsprechend gemein haben, erzeugen entweder einen zu ihnen perspectiven Büschel zweiter Ordnung, oder es giebt einen Punkt, der mit je zwei homologen Punkten der Curven in einer Geraden liegt.

Zwei projective Strahlenbüschel zweiter Ordnung, die zwei Strahlen entsprechend gemein haben, erzeugen entweder eine zu ihnen perspective Punktreihe zweiter Ordnung, oder es giebt eine Gerade, auf der sich je zwei homologe Strahlen der Büschel schneiden.

Nämlich jede Regelschaar, die zu der einen Curve perspectiv ist, erzeugt mit der anderen einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung, und dieser wird von der Curvenebene im Allgemeinen in einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung geschnitten. Nur wenn der Mittelpunkt des Ebenenbüschels in der Ebene der Curven liegt, tritt der letzte Fall des Satzes ein.

205 Liegen zwei projective Curven zweiter Ordnung in einer
Aufg 101 Ebene, ohne dass sie Punkte entsprechend gemein haben, so erzeugen sie im Allgemeinen einen Strahlenbüschel vierter Ordnung, von welchem höchstens vier Strahlen durch einen Punkt gehen. Gehen nämlich durch einen Punkt *S* mehr als vier Verbindungslinien homologer Curvenpunkte, so gehen durch ihn auch alle übrigen, weil ein Ebenenbüschel zweiter Ordnung, welcher den Punkt *S* zum Mittelpunkt hat und zu einer der beiden Curven zweiter Ordnung perspectiv ist (etwa eine zu ihr perspective Regelschaar projicirt), auch zu der anderen Curve perspective Lage hat. Ebenso erzeugen zwei projective Strahlenbüschel zweiter Ordnung, die in einer Ebene liegen, i. A. eine Curve vierter Ordnung, die mit keiner Geraden mehr als vier Punkte gemein hat. Wir müssen darauf verzichten, schon hier diese und andere Erzeugnisse projectiver Elementargebilde zweiter Ordnung eingehend zu besprechen.

Zwölfter Vortrag.

Involutionen.*)

206 Wenn zwei gleichartige projective Elementargebilde u, u_1, z. B. zwei projective Punktreihen „conjectiv" sind, d. h. in einander liegen, so kann jedes Element P ihres gemeinschaftlichen Trägers sowohl zu dem einen Gebilde u als auch zu dem anderen u_1 gerechnet werden; ihm entsprechen deshalb zwei Elemente, eines in u_1 und das andere in u. Im Allgemeinen sind diese beiden ihm entsprechenden Elemente von einander verschieden, wie in Fig. 60, wo den Punkten P, Q, R von u die resp. Punkte P_1, Q_1, R_1 von u_1 entsprechen; doch ist auch möglich, dass sie zusammenfallen, wie in Fig. 61, so dass dem Elemente P ein an-

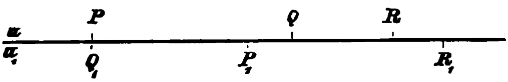


Fig. 60.

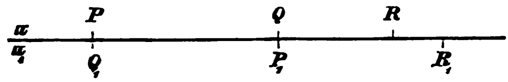


Fig. 61.

deres P_1 doppelt entspricht. Dem Elemente P des ersten Gebildes u entspricht dann das Element P_1 des zweiten u_1, und dem Elemente $P \equiv Q_1$ des zweiten u_1 entspricht ebenfalls das Element $P_1 \equiv Q$ des ersten Gebildes u.

*) Als „Involution" bezeichnete zuerst Desargues die von ihm entdeckte Relation unter den drei Punktepaaren, in denen ein Kegelschnitt und die Gegenseiten eines ihm eingeschriebenen Vierecks von einer Transversale getroffen werden. (Vgl. Poncelet, Propriétés projectives des figures, Paris 1822, No. 178.) Möbius erweiterte 1855 den Begriff, indem er überhaupt Gebilde, deren Elemente involutorisch gepaart sind, als Involutionen bezeichnete (s. Möbius, Werke. II, S. 372).

207 Man sagt nun:

„Zwei gleichartige projective Gebilde u, u_1, die nicht alle „ihre Elemente entsprechend gemein haben, aber conjectiv sind, „liegen involutorisch oder haben involutorische Lage, wenn in „ihnen je zwei homologe Elemente einander doppelt entsprechen. „Zwei ungleichartige projective Gebilde liegen involutorisch, „wenn das eine mit einem Schnitt oder Schein des anderen in„volutorisch liegt.“

Dreht sich ein rechter Winkel um seinen Scheitelpunkt, so beschreiben seine Schenkel zwei projective gleiche Strahlenbüschel, die involutorisch liegen. Zwei projective Punktreihen zweiter Ordnung auf einem Kegelschnitte liegen involutorisch, wenn drei und folglich alle Verbindungslinien ihrer homologen Punkte sich in einem Punkte schneiden (vgl. Seite 141); dagegen liegen sie nicht involutorisch, wenn diese Verbindungslinien einen Büschel zweiter Ordnung bilden. Weist man jedem Punkte einer Geraden u, die in der Ebene einer Curve zweiter Ordnung liegt ohne sie zu berühren, seine Polare bezüglich der Curve zu, so erhält man einen Strahlenbüschel U, der nicht bloss zu der Punktreihe u projectiv ist, sondern auch zu ihr involutorische Lage hat (Seite 104 und 101).

208 Wir können nun folgenden Satz beweisen:

„Zwei projective Punktreihen zweiter Ordnung, die auf der„selben Curve liegen, haben involutorische Lage, wenn in ihnen „irgend einem Punkte A ein anderer Punkt A_1 doppelt ent„spricht.“

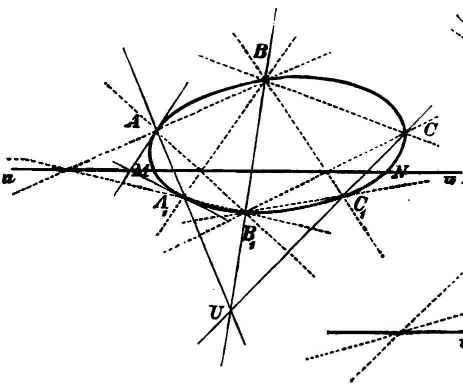


Fig. 62.

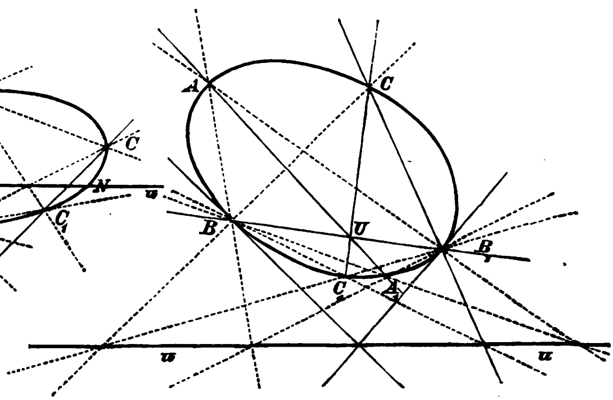


Fig. 63.

Seien B, B_1 (Figg. 62 und 63) zwei andere homologe Punkte der Punktreihen, sei also die projective Verwandtschaft der beiden Reihen durch

$$AA_1B \barwedge A_1AB_1$$

gegeben; sei ferner U der Schnittpunkt von AA_1 und BB_1, und u seine Polare in Bezug auf die Curve zweiter Ordnung. Die beiden Strahlenbüschel $B_1(AA_1B)$ und $B(A_1AB_1)$, die aus den Punkten B_1 und B die projectiven Punktreihen AA_1B und A_1AB_1 projiciren, sind dann perspectiv zu der Punktreihe u. Denn sie sind projectiv und haben den Strahl B_1B oder BB_1 entsprechend gemein, liegen also perspectiv; die von ihnen erzeugte Punktreihe erster Ordnung aber liegt in u, weil (nach Seite 99) diese Gerade den Schnittpunkt der homologen Strahlen B_1A und BA_1, sowie den von B_1A_1 und BA enthält. Je zwei andere Curvenpunkte C und C_1, die mit U in einer Geraden liegen, werden ebenfalls durch zwei paar homologe Strahlen der perspectiven Büschel B, B_1 projicirt und sind daher zwei einander doppelt entsprechende Punkte der Reihen zweiter Ordnung. Hieraus und aus früher (Seite 99) aufgestellten Sätzen folgt:

209 „Wenn zwei projective Punktreihen zweiter Ordnung involuto-„risch liegen, so gehen die Verbindungslinien ihrer homologen „Punkte alle durch einen Punkt U; die Schnittpunkte ihrer „homologen Tangenten aber liegen alle auf der Polare u des „Punktes U. Die Gerade u heisst die Involutionsaxe und „der Punkt U das Involutionscentrum der Punktreihen.

Die involutorisch liegenden Punktreihen zweiter Ordnung werden aus jedem ihrer Punkte durch involutorisch liegende Strahlenbüschel projicirt, aus jedem ausserhalb ihrer Ebene gelegenen Punkte aber durch involutorisch liegende Kegel. Eine Regelschaar oder Kegelfläche, die zu der einen Punktreihe perspectiv ist, liegt zu der anderen involutorisch.

Die beiden projectiven Strahlenbüschel zweiter Ordnung, welche zwei involutorisch liegende Punktreihen zweiter Ordnung einhüllen, haben gleichfalls involutorische Lage; denn auch die Tangenten von je zwei homologen Punkten entsprechen einander doppelt. Diese Strahlenbüschel werden daher von jedem ihrer Strahlen in involutorisch liegenden Punktreihen erster Ordnung geschnitten.

Wir können hiernach den vorhin bewiesenen Satz auf alle Elementargebilde ausdehnen, indem wir sagen:

Zwei gleichartige projective und zugleich conjective Elementargebilde haben involutorische Lage, wenn in ihnen irgend zwei Elemente einander doppelt entsprechen.

Bestehen nämlich die beiden Elementargebilde aus Strahlen, so construiren wir zwei conjective, zu ihnen perspective Punktreihen zweiter Ordnung. Diese haben involutorische Lage, weil zwei ihrer Punkte einander doppelt entsprechen; folglich liegen auch die beiden Strahlengebilde involutorisch. Sind die Elementargebilde zwei Ebenenbüschel oder Punktreihen, so construiren wir zwei zu ihnen perspective und in einander liegende Strahlengebilde; und weil diese, wie soeben bewiesen, involutorische Lage haben, so gilt dasselbe von den ersteren Gebilden.

Um zwei projective Punktreihen erster Ordnung in involutorische Lage zu bringen, bestimmen wir in jeder von ihnen den „Mittelpunkt", d. h. den Punkt, dessen homologer unendlich fern liegt, und legen sodann die Punktreihen so auf einander, dass ihre Mittelpunkte zusammenfallen. Weil alsdann der Mittelpunkt und der unendlich ferne Punkt einander doppelt entsprechen, so liegen die beiden Punktreihen in der That involutorisch. Im Allgemeinen hat die Aufgabe zwei Lösungen. Entsprechen die unendlich fernen Punkte der beiden Reihen einander, so hat die Aufgabe nur dann Lösungen, und zwar unendlich viele, wenn die Punktreihen projectiv gleich sind.

210 Zwei involutorisch liegende gleichartige Gebilde werden gewöhnlich als ein einziges „involutorisches Gebilde", als eine sogenannte „Involution" aufgefasst; die homologen Elemente dieser Involution nennt man „einander zugeordnet" oder „conjugirt" oder „involutorisch gepaart". Beispielsweise werden die Punkte einer Geraden u, die beliebig in der Ebene einer Curve zweiter Ordnung angenommen ist, involutorisch gepaart, wenn je zwei hinsichtlich der Curve conjugirte Punkte einander zugeordnet werden (Seite 146). Ebenso bilden die Paare conjugirter Durchmesser einer Curve zweiter Ordnung eine Strahleninvolution, und überhaupt die hinsichtlich der Curve conjugirten Strahlen eines beliebigen Punktes der Ebene.

Auf einer involutorischen Curve zweiter Ordnung (Figg. 62 und 63) liegen je zwei einander zugeordnete Punkte mit einem nicht auf der Curve gelegenen Punkte,

Auf einem involutorischen Kegel zweiter Ordnung liegen je zwei einander zugeordnete Strahlen mit einer nicht auf dem Kegel gelegenen „Involutionsdem „Involutionscentrum“ U, in einer Geraden; je zwei einander zugeordnete Tangenten schneiden sich auf der Polare u von U, der sog. „Involutionsaxe“.

geraden“ in einer Ebene; je zwei einander zugeordnete Berührungsebenen schneiden sich auf der Polarebene dieser Geraden bezüglich des Kegels, der sog. „Ivolutionsebene.“

Der Satz links ist nur eine Wiederholung des Seite 147 bewiesenen; aus ihm ergiebt sich der Satz rechts, wenn der Kegel zweiter Ordnung durch eine beliebige Ebene in einer Curve zweiter Ordnung geschnitten wird. Haben nämlich zwei Elementargebilde perspective Lage, und sind die Elemente des einen involutorisch gepaart, so sind dadurch auch die Elemente des anderen involutorisch gepaart.

211 „Will man die Elemente eines Elementargebildes involu- „torisch paaren, so darf man in ihm zwei Paare A, A_1 und „B, B_1 zugeordneter Elemente willkürlich annehmen; dadurch aber „ist zu jedem Elemente des Gebildes ein zugeordnetes bestimmt.“ Die Involution AA_1, BB_1, CC_1 .... entsteht nämlich aus zwei in einander liegenden Gebilden, die projectiv so auf einander bezogen sind, dass den Elementen A, A_1, B des einen die resp. Elemente A_1, A, B_1 des anderen entsprechen; aber diese projective Beziehung $AA_1B \barwedge AA_1B_1$ ist durch die drei paar homologen Elemente völlig bestimmt.

Liegt die Involution auf einer Curve zweiter Ordnung, so kann zu jedem fünften Punkte C der zugeordnete C_1 leicht gefunden werden mit Hülfe des Involutionscentrums U (Figg. 62 u. 63), da in U die Geraden AA_1, BB_1 und CC_1 sich schneiden. Analoges gilt von der Involution auf einem Kegel zweiter Ordnung. Sind die Strahlen einer Regelschaar involutorisch zu paaren, so schneiden wir die Schaar in einer Curve zweiter Ordnung und brauchen dann nur deren Punkte involutorisch zu paaren. Die Strahlen eines Büschels erster Ordnung S (Fig. 64) werden involutorisch gepaart, indem man eine zu dem Büschel perspective Curve

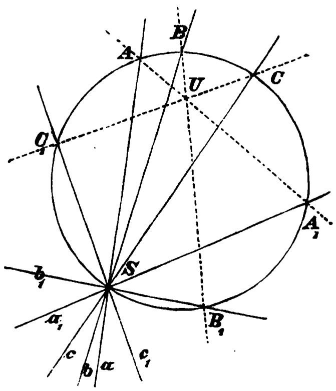


Fig. 64.

zweiter Ordnung, z. B. einen durch den Mittelpunkt S gehenden Kreis construirt und die Punkte dieser Curve einander paarweise zuordnet. Aehnlich können wir mit jedem anderen Elementargebilde verfahren. Die Elemente eines einförmigen Grundgebildes lassen sich übrigens, wie wir sehen werden, auch ohne Hülfe der Gebilde zweiter Ordnung involutorisch paaren.

7;2 Zwei involutorisch liegende gleichartige Elementargebilde, z. B. zwei involutorisch liegende Punktreihen zweiter Ordnung (Figg. 62 und 63), sind gleichlaufend oder entgegengesetzt projectiv, jenachdem zwei einander zugeordnete Elemente A, A_1 durch irgend zwei andere B, B_1 getrennt sind oder nicht. Im ersteren Falle (Fig. 63) bewegen sich zwei homologe Elemente, von denen das eine das Gebilde AA_1B und das andere zugleich das Gebilde A_1AB_1 beschreibt, in demselben Sinne, und können nie zusammentreffen; im letzteren Falle (Fig. 62) bewegen sie sich in entgegengesetztem Sinne, und müssen zweimal auf einander fallen. Wir wollen jedes Element, welches zwei involutorisch liegende Gebilde entsprechend gemein haben, ein „Doppel- oder Ordnungselement" der von ihnen gebildeten Involution nennen; dann gilt der Satz:

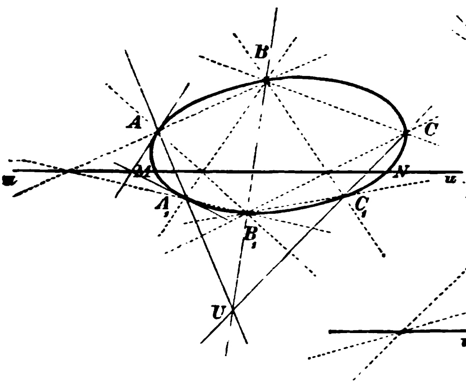


Fig. 62.

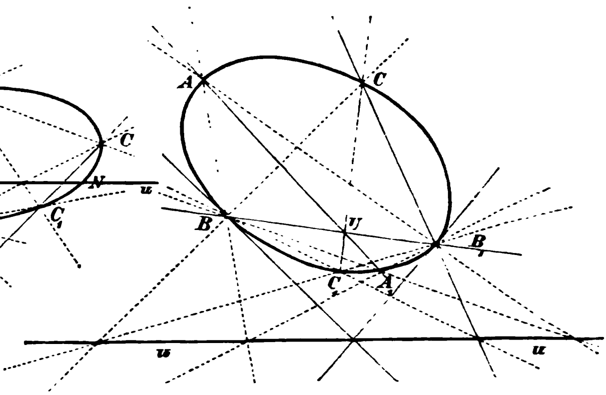


Fig. 63.

„Eine Involution hat keine oder zwei Doppelelemente und „heisst elliptisch oder hyperbolisch, jenachdem in ihr zwei con„jugirte Elemente durch irgend zwei andere getrennt sind oder „nicht. In jedem Doppelelemente fallen zwei einander zuge„ordnete Elemente der Involution zusammen."

Liegt das Involutionscentrum U einer involutorischen Curve zweiter Ordnung ausserhalb der Curve (Fig. 62), so hat die Involution zwei Doppelpunkte M, N, nämlich die Berührungspunkte der Tangenten, die durch U an die Curve gezogen werden können. Die Involutionsaxe u schneidet in diesen Punkten die Curve, da sie die Polare von U ist (Seite 147 und 99).

213 „Die Doppelelemente M, N einer Involution sind durch „je zwei einander zugeordnete Elemente A, A_1 harmonisch „getrennt.“

Es genügt, wenn dieser Satz für eine Involution auf einer Curve zweiter Ordnung bewiesen wird, da jeder andere Fall auf diesen zurückgeführt werden kann. Sei B, B_1 ein zweites Paar zugeordneter Punkte (Fig. 62); dann schneiden sich die Gegenseiten des einfachen Vierecks ABA_1B_1 in zwei hinsichtlich der Curve conjugirten Punkten (Seite 103, 105), die durch M und N harmonisch getrennt sind. Die Strahlen BA, BM, BA_1, BN sind vier harmonische Strahlen, weil sie vier harmonische Punkte projiciren, und folglich sind die Doppelpunkte M, N auf der Curve harmonisch getrennt durch die Punkte A, A_1. Dieses folgt auch aus dem Satze von Seite 108, da MN und AA_1 conjugirte Strahlen sind.

214 Um die Elemente eines Elementargebildes involutorisch zu paaren, können wir in ihm entweder zwei paar conjugirte Elemente (Seite 149) oder die beiden Doppelelemente M, N oder ein Doppelelement M und ein paar conjugirte Elemente A, A_1 beliebig annehmen; dadurch aber ist zu jedem Elemente das zugeordnete völlig bestimmt. Denn zwei Elemente des Gebildes sind conjugirt, wenn sie durch M und N harmonisch getrennt sind; durch A, A_1 und M aber ist das zweite Doppelelement N sofort bestimmt, da es von M durch A und A_1 harmonisch getrennt ist.

215 Die bisherigen Sätze über Involutionen sind von solcher Wichtigkeit und werden so häufig angewendet, dass es wohl gerechtfertigt erscheint, wenn wir einige von ihnen noch einmal auf mehr elementarem Wege beweisen, zumal da sich hierbei noch neue nützliche Sätze ergeben werden. Wir gehen dabei von folgender Erklärung aus:

„Zwei Gebilde $ABCDE\ldots$ und $A_1B_1C_1D_1E_1\ldots$, die nur „aus einzelnen Elementen zweier Elementargebilde u, u_1 bestehen, sollen projectiv genannt werden, wenn diese Elementargebilde projectiv so auf einander bezogen werden kön-

„nen, dass den Elementen A, B, C, D, E, ... von u die resp. „Elemente A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 ... von u_1 entsprechen. Wir „benutzen mit von **Staudt** das Zeichen $\barwedge$ für projectiv." Sind z. B. u, u_1 zwei Punktreihen erster Ordnung, die auf incidenten Geraden liegen, so ist nur dann

$$ABCDE \ldots \barwedge A_1B_1C_1D_1E_1 \ldots,$$

wenn die Strahlen AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1, ... entweder alle durch einen Punkt gehen oder eine Curve zweiter Ordnung berühren, die auch u und u_1 tangirt.

Die Beziehung $ABCD \barwedge A_1B_1C_1D_1$ bedeutet auch, wie früher (Seite 68) gezeigt wurde, dass zwischen den Abschnitten der Geraden u, u_1 die Proportion besteht:

$$\frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} = \frac{A_1B_1}{A_1D_1} : \frac{C_1B_1}{C_1D_1}.$$

Ein „Wurf" ABCD, d. h. ein Gebilde, das aus vier Elementen eines Elementargebildes besteht, ist projectiv zu jeder aus ihm abgeleiteten Permutation, die entsteht, wenn irgend zwei von den vier Elementen und zugleich die beiden übrigen vertauscht werden (Möbius, v. Staudt); oder es ist:

$$ABCD \barwedge BADC \barwedge CDAB \barwedge DCBA.$$

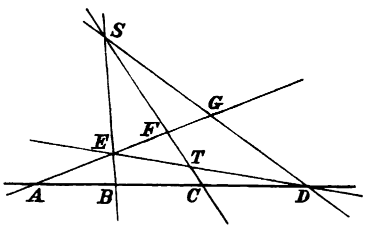


Fig. 65.

Sei $ABCD$ ein Wurf auf einer Geraden, auf welchen Fall alle übrigen Fälle sich zurückführen lassen, und sei z. B. zu beweisen, dass $ABCD = CDAB$ ist. Wir projiciren $ABCD$ aus einem beliebigen Punkte S (Fig. 65) auf eine durch A gehende Gerade, und nennen $AEFG$ diese Projection, bezeichnen ausserdem mit T den Schnittpunkt von CF und DE. Dann ist:

$ABCD$	eine Projection von	$AEFG$	aus dem Mittelpunkte	S,
$AEFG$	„ „ „	$CTFS$	„ „ „	D,
$CTFS$	„ „ „	$CDAB$	„ „ „	E.

Es ist also:

$$ABCD \barwedge AEFG \barwedge CTFS \barwedge CDAB$$

und folglich: $ABCD \barwedge CDAB$.

Ebenso lassen sich die übrigen Homographien des Satzes beweisen. Wir folgern daraus:

„Ist $abcd \barwedge ABCD$, so ist auch $abcd \barwedge BADC \barwedge CDAB$ „$\barwedge DCBA$.“ *)

216 Zugleich aber ergiebt sich wieder der vorhin (Seite 146) auf andere Art bewiesene Satz, dass zwei in einander liegende projective Elementargebilde involutorische Lage haben, wenn in ihnen irgend zwei homologe Elemente A, A_1 einander doppelt entsprechen. Denn wenn noch dem beliebigen Elemente B des einen Gebildes das Element B_1 des anderen entspricht, wenn also $AA_1B \barwedge A_1AB_1$ die projective Verwandtschaft oder „Homographie“ der beiden Elementargebilde darstellt, so folgt aus der Relation:

$$AA_1BB_1 \barwedge A_1AB_1B,$$

dass auch dem Elemente B_1 des ersteren Gebildes das Element B des letzteren entspricht, dass also je zwei homologe Elemente B, B_1 der beiden Gebilde einander doppelt entsprechen.

Schon früher hätten wir hieraus folgern können:

„Eine Punktreihe erster Ordnung u liegt involutorisch zu einem „ihr projectiven Büschel S, dessen Mittelpunkt kein Punkt von „u ist, wenn von irgend zwei Punkten P, P_1 der Reihe jeder

---

*) Mit Hülfe dieses wichtigen Satzes pflegt man u. A. die folgenden bemerkenswerthen Lehrsätze zu beweisen:

Die sechs Eckpunkte von zwei beliebigen Poldreiecken einer Curve k^2 zweiter Ordnung liegen auf einer zweiten Curve zweiter Ordnung, der unendlich viele Poldreiecke der ersteren eingeschrieben werden können.

Die sechs Seiten von zwei beliebigen Poldreiecken einer Curve zweiter Ordnung berühren eine zweite Curve zweiter Ordnung, der unendlich viele Poldreiecke der ersteren umschrieben werden können.

Seien nämlich ABC und DEF die beiden Poldreiecke, von deren sechs Eckpunkten keine drei in einer Geraden liegen mögen. Dann sind die Strahlenbüschel $A(BCEF)$ und $D(CBFE)$ projectiv (Seite 106), weil in Bezug auf k^2 den vier Strahlen AB, AC, AE, AF des Büschels A die resp. Strahlen DC, DB, DF, DE des Büschels D conjugirt sind. Aus $A(BCEF) \barwedge D(CBFE)$ folgt aber $A(BCEF) \barwedge D(BCEF)$, und es liegen demnach die sechs Punkte A, B, C, D, E, F auf einer Curve zweiter Ordnung, wie der Satz links behauptet. Sind nun D' und E' zwei Punkte dieser Curve, die bezüglich der Curve k^2 conjugirt sind und folglich einem Poldreieck $D'E'F'$ von k^2 als Eckpunkte angehören, so liegt auch der Eckpunkt F' auf der durch A, B, C, D, E, F gehenden Curve zweiter Ordnung; denn mit dieser Curve hat die durch A, B, C, D', E', F' gehende fünf und folglich alle Punkte gemein. — Auf ähnliche Art ist der Satz rechts zu beweisen.

„auf dem Strahle des Büschels liegt, der dem anderen Punkte „entspricht.“

Denn der Schnitt des Büschels mit dem Träger der Reihe ist projectiv zu u und hat mit u involutorische Lage, weil die Punkte P, P_1 einander doppelt entsprechen. Auf ähnliche Weise erkennt man, wann ein Ebenenbüschel zu einer Punktreihe oder einem Strahlenbüschel involutorisch liegt.

217 Dass je zwei conjugirte Elemente A, A_1 einer Involution durch deren Doppelelemente M, N, wenn solche vorhanden, harmonisch getrennt sind, lässt sich ebenfalls elementar beweisen. Sei die Involution $M.N.AA_1$ entstanden aus zwei projectiven Punktreihen erster Ordnung, die involutorisch liegen; dann entsprechen den Punkten M, A, N, A_1 der einen Reihe die Punkte M, A_1, N, A der anderen, weil M und N in den projectiven Reihen sich selbst, A und A_1 aber einander doppelt entsprechen. Es ist also $MANA_1 \barwedge MA_1NA$. Projiciren wir nun $MANA_1$ aus einem beliebigen Punkte S (Fig. 66) auf eine durch M gehende Gerade, so ist die Projection $MRKT$ zu $MANA_1$ und folglich auch zu MA_1NA projectiv, also $MRKT \barwedge MA_1NA$. Diese projectiven Gebilde haben aber den Punkt M entsprechend gemein und liegen perspectiv; d. h. die drei Geraden RA_1, KN, TA schneiden sich in einem Punkte Q. Wir erhalten somit ein Viereck $QRST$, dessen Gegenseiten sich in A und A_1 schneiden, während die Diagonalen beziehungsweise durch M und N gehen; die Punkte $MANA_1$ sind also wirklich vier harmonische Punkte (Seite 38).

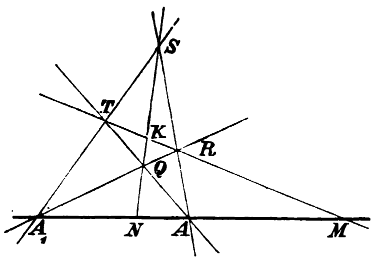


Fig. 66.

218 Eine Gruppe von drei Elementepaaren $AA_1 . BB_1 . CC_1$ einer Involution heisst ebenfalls eine Involution im engeren und ursprünglichen Sinne des Wortes. Ihre sechs Elemente sind nicht unabhängig von einander, weil ja in einer Involution zu jedem Elemente das zugeordnete bestimmt ist, sobald zwei paar zugeordnete Elemente gegeben sind; auch sind je zwei Gebilde projectiv, die wie AA_1BC und $A_1AB_1C_1$, oder AB_1C_1C und A_1BCC_1 durch Vertauschung zugeordneter Elemente in einander übergehen. Umgekehrt folgt aus der Homographie $AA_1BC \barwedge A_1AB_1C_1$, dass

die drei Elementepaare A, A_1; B, B_1; C, C_1 eine Involution $AA_1 \,.\, BB_1 \,.\, CC_1$ bilden; denn in den projectiven Gebilden AA_1BC und $A_1AB_1C_1$ entsprechen die Elemente A, A_1 einander doppelt, also auch die Elemente B, B_1, und ebenso C, C_1. Ein Doppelelement M oder N kann in der Involution die Stelle eines Elementepaares vertreten; so z. B. ist $M \,.\, AA_1 \,.\, BB_1$ eine Involution, wenn $MAA_1B \barwedge MA_1AB_1$. Ebenso ist $M \,.\, N \,.\, AA_1$ eine Involution, wenn $MANA_1$ projectiv zu MA_1NA und somit ein harmonisches Gebilde ist.

219 Wir können nun folgenden Doppelsatz beweisen:

Die drei paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks
Aufg 119 $QRST$ (Fig. 67) werden von jeder Geraden u, die mit dem Viereck in einer Ebene liegt aber durch keinen Eckpunkt geht, in drei Punktepaaren einer Involution geschnitten.

Die drei paar Gegenpunkte eines vollständigen Vierseits werden aus jedem Punkte, der mit dem Vierseit in einer Ebene Aufg 120
aber auf keiner der vier Seiten liegt, durch drei Strahlenpaare einer Involution projicirt.

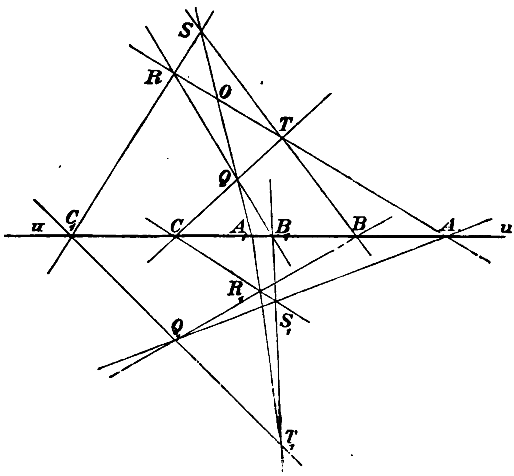


Fig. 67.

Möge u die Seiten RT und SQ, ST und QR, QT und RS in den resp. Punkten A und A_1, B und B_1, C und C_1 scheiden, und sei O der Schnittpunkt von RT und SQ. Dann ist $ATOR$

eine Projection sowohl von ACA_1B_1 aus dem Mittelpunkte Q, als auch von ABA_1C_1 aus dem Mittelpunkte S, und daher

$$ACA_1B_1 \,\overline{\wedge}\, ATOR \,\overline{\wedge}\, ABA_1C_1.$$

Ausserdem aber ergiebt sich, wenn A mit A_1 und zugleich B mit C_1 vertauscht wird (Seite 152):

$$ABA_1C_1 \,\overline{\wedge}\, A_1C_1AB.$$

Folglich ist auch:

$$ACA_1B_1 \,\overline{\wedge}\, A_1C_1AB,$$

und $AA_1 \,.\, BB_1 \,.\, CC_1$ eine Involution. Denn wenn zwei in u liegende Punktreihen projectiv so auf einander bezogen werden, dass den Punkten A, C, A_1 der einen die resp. Punkte A_1, C_1, A der anderen entsprechen, so liegen sie involutorisch, weil ja A und A_1 einander doppelt entsprechen; B_1 und B aber entsprechen einander wegen der Beziehung $ACA_1B_1 \,\overline{\wedge}\, A_1C_1AB$.

Sind nun von einer geraden Punktinvolution u zwei Punktepaare A, A_1 und B, B_1 gegeben, und soll zu einem beliebigen fünften Punkte C der zugeordnete C_1 bestimmt werden, so können wir ohne Benutzung der Gebilde zweiter Ordnung wie folgt verfahren (Fig. 67). Wir construiren ein vollständiges Viereck, von welchem zwei Gegenseiten durch resp. A und A_1, zwei andere durch resp. B und B_1 gehen, eine fünfte Seite aber den Punkt C enthält; dann trifft die sechste Seite den gesuchten Punkt C_1.

Zwei so construirte Vierecke $QRST$ und $Q_1R_1S_1T_1$ haben zu der Involution $AA_1 \,.\, BB_1 \,.\, CC_1$, verschiedene Lage, wenn ihre durch A, B, C gehenden Seiten sich in dem einen Viereck in einem Eckpunkte T schneiden, während sie in dem anderen ein Dreieck $Q_1R_1S_1$ bilden; ihre sechsten Seiten aber gehen gleichwohl beide durch C_1 (Fig. 67). Liegen die beiden Vierecke in verschiedenen Ebenen, so bilden ihre acht Eckpunkte zwei Tetraeder $QRST_1$ und $Q_1R_1S_1T$, die einander sowohl um- als auch eingeschrieben sind. Die Aufgabe von Moebius, ein Tetraeder zu construiren, das einem gegebenen Tetraeder um- und zugleich eingeschrieben ist, wird hiernach leicht gelöst und hat unendlich viele Lösungen.

Sind zwei Punkte M, N der Geraden u sowohl durch A und A_1 als auch durch B und B_1, also durch zwei paar Gegenseiten des Vierecks $QRST$ harmonisch getrennt, so sind sie auch durch C und C_1, mithin durch das dritte paar Gegenseiten harmonisch getrennt. Denn M, N sind dann die Doppelpunkte der Involution $AA_1 \,.\, BB_1 \,.\, CC_1$.

220 „Wenn einer Curve zweiter Ordnung ein einfaches Viereck „$QRST$ eingeschrieben ist (Fig. 68), so bilden die drei Punkte„paare, in denen eine Gerade u die Curve und die zwei paar „Gegenseiten des Vierecks schneidet, eine Involution" (Lehrsatz des Desargues).

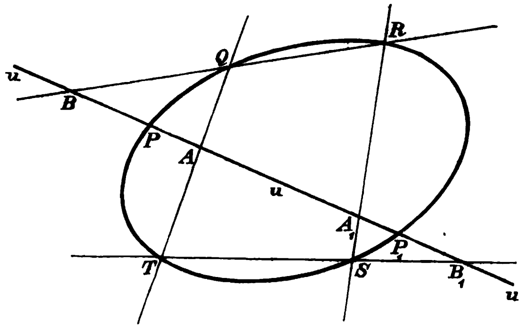


Fig. 68.

Denn es werde u von den Seiten TQ, QR, RS und ST in den resp. Punkten A, B, A_1, B_1 geschnitten, von der Curve aber in den Punkten P und P_1. Dann sind die beiden Büschel, durch welche die Curvenpunkte P, R, P_1, T aus Q und S projicirt werden, projectiv (Seite 79), und folglich auch die Punktreihen PBP_1A und $PA_1P_1B_1$, in denen diese Büschel von der Geraden u geschnitten werden. Da nun $PA_1P_1B_1 \barwedge P_1B_1PA_1$ (Seite 152), so folgt auch:

$$PBP_1A \barwedge P_1B_1PA_1,$$

d. h. $PP_1 \,.\, AA_1 \,.\, BB_1$ ist eine Involution. — Der so bewiesene Satz von Desargues enthält eine wichtige Eigenschaft von sechs beliebigen Punkten eines Kegelschnitts.

Ein analoger Satz gilt für die Curven zweiter Ordnung, die einem einfachen Vierseit eingeschrieben sind, also dessen Seiten
221 berühren. Weil aber eine Involution schon durch zwei ihrer Elementepaare A, A_1 und B, B_1 bestimmt ist (Seite 149), so gilt auch folgender Doppelsatz:

Die einem Viereck umschriebenen Curven zweiter Ordnung schneiden eine Gerade u, die in der Ebene des Vierecks liegt

Die einem Vierseit eingeschriebenen Curven zweiter Ordnung senden durch einen Punkt S, der in der Ebene des Vierseits aber

aber durch keinen Eckpunkt geht, in Punktepaaren einer Involution. Die Doppelpunkte dieser Involution sind conjugirt bezüglich der Curven und harmonisch getrennt durch je zwei Gegenseiten des Vierecks; in ihnen wird die Gerade u von zwei der Curven berührt.

auf keiner Seite liegt, Tangentenpaare, die eine Involution bilden. Die Doppelstrahlen dieser Involution sind conjugirt bezüglich der Curven und harmonisch getrennt durch je zwei Gegenpunkte des Vierseits; sie berühren zwei der Curven im Punkte S.

Jenachdem Doppelelemente vorhanden sind oder nicht, giebt es zwei oder keine Curven zweiter Ordnung, die

einem Viereck umschrieben sind und eine beliebige Gerade u der Ebene berühren.

einem Vierseit eingeschrieben sind und durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehen.

Zugleich ist die Aufgabe, diese Curven zweiter Ordnung zu construiren, zurückgeführt auf die folgende: „In einer Involution die Doppelelemente zu bestimmen.“ Mit dieser Aufgabe zweiten Grades werden wir uns in einem späteren Vortrage beschäftigen. Für Involutionen auf Curven zweiter Ordnung liegt ihre Lösung auf der Hand (vgl. Seite 151).

Liegt die Gerade u des Satzes links unendlich fern, so ergiebt sich insbesondere:

„Durch vier eigentliche Punkte einer Ebene können entweder „zwei oder keine Parabeln gelegt werden.“

Wenn das Viereck einem Kreise eingeschrieben ist, so liegen die Doppelpunkte der Involution auf der unendlich fernen Geraden in zwei zu einander normalen Richtungen. Zieht man nämlich durch einen Punkt des Kreises Parallelen zu den drei paar Gegenseiten des Vierecks, so schneiden diese Parallelen den Kreis in drei Punktepaaren, die auf parallelen Sehnen liegen; sie bilden folglich eine (symmetrische) Involution, deren Doppelstrahlen zu einander normal sind. Daraus und aus dem Vorhergehenden folgt:

„Curven zweiter Ordnung, die einem Kreisviereck umschrieben „sind, haben parallele Axen. Die Richtungen ihrer Axen hälf- „ten die drei paar Nebenwinkel, die von je zwei Gegenseiten „des Kreisvierecks gebildet werden.“

Mit Hülfe dieses Satzes sind die Richtungen der Axen eines Kegelschnittes leicht zu bestimmen.

Metrisches über Involutionen.

~~272~~ Unter den Strahlen- und Ebeneninvolutionen sind von besonderem Interesse die „rechtwinkligen“ oder „orthogonalen“, deren conjugirte Elemente sich rechtwinklig schneiden. Wenn in einer Ebene ein rechter Winkel sich um seinen Scheitelpunkt dreht, so beschreiben seine Schenkel zwei gleiche concentrische Strahlenbüschel, die involutorisch liegen und eine rechtwinklige Involution bilden. Die Paare conjugirter Durchmesser eines Kreises bilden eine orthogonale Involution; die Punktepaare, in denen der Kreis seine Durchmesser schneidet, werden aus jedem Punkte des Kreises durch Strahlenpaare einer rechtwinkligen Involution projicirt. Eine orthogonale Ebeneninvolution wird von jeder zu ihrer Axe normalen Ebene in einer orthogonalen Strahleninvolution geschnitten.

„In einer Strahleninvolution erster Ordnung giebt es zwei „und i. A. nur zwei conjugirte Strahlen, die sich rechtwinklig „schneiden; diese heissen die Axen der Involution.“ d. h. nur ein Paar Axen.

Die Involution wird nämlich von einem durch ihren Mittelpunkt S gelegten Kreise in einer Punktinvolution $AA_1 . BB_1 . XX_1$ geschnitten (Fig. 69), deren Centrum U von dem Mittelpunkte

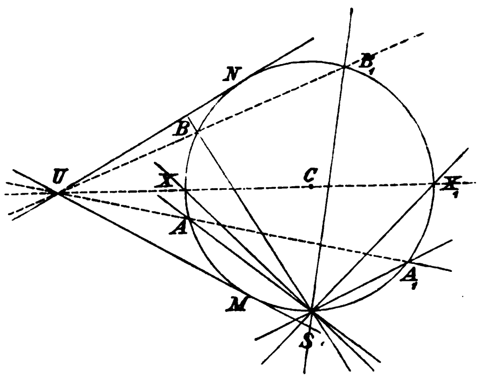


Fig. 69.

des Kreises i. A. verschieden ist; und nur durch die beiden Kreispunkte X, X_1, die mit U auf einem Durchmesser liegen, gehen zwei zu einander normale conjugirte Strahlen der Strahleninvolution. Diese beiden „Axen" der Involution trennen deren Doppelstrahlen, wenn solche vorhanden sind, harmonisch und hälften folglich die von den Doppelstrahlen gebildeten Nebenwinkel (Seite 47). Sie sind mit Hülfe des Kreises leicht zu construiren, wenn zwei paar conjugirte Strahlen gegeben sind. Insbesondere construirt man auf diese Weise die Axen SX, SX_1 einer Hyperbel oder Ellipse, wenn von ihr zwei paar conjugirte Durchmesser SA, SA_1 und SB, SB_1 gegeben sind.

„Eine Strahleninvolution erster Ordnung ist rechtwinklig,
Zwei Paar Axen „wenn in ihr irgend zwei nicht conjugirte Strahlen a, b mit „ihren zugeordneten a_1, b_1 rechte Winkel bilden. Analoges gilt „von der Ebeneninvolution."

Die Involution ist nämlich durch die beiden Strahlenpaare a, a_1 und b, b_1 völlig bestimmt (Seite 149), die involutorische Paarung ihrer Strahlen aber wird bewirkt, indem man je zwei sich rechtwinklig schneidende Strahlen einander zuordnet. Der Satz folgt auch aus obiger Figur 69, worin dann U mit dem Mittelpunkte des Kreises zusammenfällt.

225 „Werden einer Curve zweiter Ordnung rechtwinklige Drei-
Aufg. 103. „ecke so eingeschrieben, dass ihre Katheten alle in einem „Punkte S sich schneiden, so gehen ihre Hypotenusen durch „einen Punkt der Normale von S."

Denn durch die rechtwinklige Strahleninvolution der Katheten werden die Curvenpunkte involutorisch gepaart.

Weil die rechtwinkligen Strahlen- und Ebeneninvolutionen keine Doppelelemente haben, so werden sie von jeder Transversale in einer elliptischen Punktinvolution geschnitten. Es lässt sich leicht zeigen, dass jede elliptische Involution $AA_1 \,.\, BB_1 \,.\, CC_1$ auf einer eigentlichen Geraden u als Schnitt rechtwinkliger Strahleninvolutionen aufgefasst werden kann. Weil nämlich in u die conjugirten Punkte A, A_1 durch je zwei andere B, B_1 getrennt sind (Seite 150), so haben zwei Kreise, die mit u in einer Ebene liegen und die Gerade in A, A_1 resp. B, B_1 rechtwinklig schneiden, zwei Punkte P, Q gemein (Fig. 70). Aus jedem dieser Punkte aber wird die Punktinvolution u durch eine Strahleninvolution projicirt, die zwei paar Axen hat und folglich rechtwinklig ist.

Jedes beliebige Punktepaar C, C_1 von u liegt demnach mit P und Q auf einem zu u normalen Kreise; die Gerade PQ aber

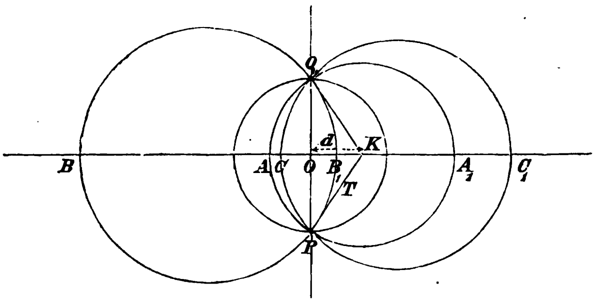


Fig. 70.

geht durch den „Mittelpunkt" O der Involution u, dessen conjugirter O_1 unendlich fern liegt. Lässt man P, Q und die zu u normalen Kreise um die Gerade u rotiren, so ergiebt sich:

„Eine elliptische Punktinvolution u erster Ordnung wird aus „unendlich vielen Punkten durch rechtwinklige Strahleninvolu-„tionen projicirt. Der Ort dieser Punkte ist ein Kreis, welcher „den Mittelpunkt der Punktinvolution zum Centrum hat, und „dessen Ebene zu der Geraden u normal ist. Durch den Kreis „gehen alle Kugeln, die die Gerade u in je einem Punktepaare „der Involution rechtwinklig schneiden."

Aus dem Satze über die Abschnitte von Kreissecanten, die durch einen Punkt O gehen, ergiebt sich (Fig. 70):

$$OP . OQ = OA . OA_1 = OB . OB_1 = OC . OC_1 = \ldots,$$

und damit der Satz:

„Das Produkt der Abschnitte zwischen dem Mittelpunkte O und „zwei conjugirten Punkten einer Punktinvolution erster Ordnung „ist constant; es heisst die Potenz der Involution."

Dieser Satz gilt nicht nur für elliptische Punktinvolutionen sondern auch für solche hyperbolische, von deren Doppelpunkten M, N keiner unendlich fern liegt (Fig. 71). Denn durch M und N sind je zwei conjugirte Punkte der Involution, wie A und A_1, B und B_1 oder O und O_1 harmonisch getrennt, der Mittelpunkt O aber hälftet die Strecke M, N, weil sein conjugirter Punkt O_1 unendlich fern liegt, und es ist (Seite 50):

$$OM^2 = OA . OA_1 = OB . OB_1 = OC . OC_1 = \ldots . = ON^2.$$

Die Potenz $OA . OA_1$ ist positiv im Falle der hyperbolischen und negativ im Falle der elliptischen Punktinvolution; die conjugirten Punkte A, A_1 liegen im ersteren Falle auf derselben Seite und im letzteren auf verschiedenen Seiten des Mittelpunktes O.

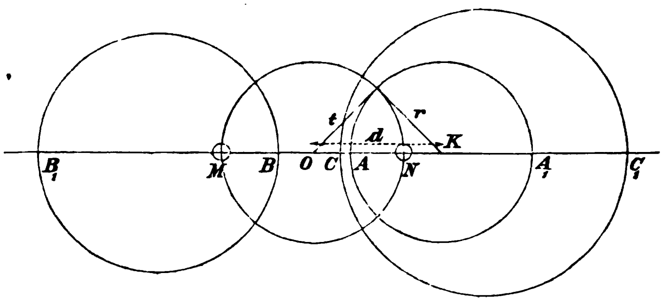


Fig. 71.

Beiläufig ergiebt sich aus dem letzten Satze:

„In zwei projectiven Punktreihen erster Ordnung haben die „Abschnitte, welche irgend zwei homologe Punkte A, A_1 oder „B, B_1 mit den beiden Mittelpunkten O, Q_1 bilden, ein con„stantes Produkt $OA\,.\,Q_1A_1 = OB\,.\,Q_1B_1$."

Denn die beiden Punktreihen kommen in involutorische Lage, wenn sie so aufeinander gelegt werden, dass ihre Mittelpunkte zusammenfallen (Seite 148), und es ist dann $OA\,.\,OA_1 = OB\,.\,OB_1$. Einen anderen leichten Beweis des Satzes findet man, wenn man die Punktreihen in perspective Lage bringt.

„Die Tangenten der Winkel α, α_1, welche zwei conjugirte „Strahlen einer Strahleninvolution S erster Ordnung mit einer „Axe der Involution bilden, haben ein constantes Produkt."

Die Involution S wird nämlich von einer zu der Axe normalen Transversalen in einer Punktinvolution geschnitten, deren Mittelpunkt O auf der Axe liegt. Aus der Gleichung $OA\,.\,OA_1 =$ Const. für conjugirte Punkte dieser Involution aber folgt durch Division mit SO^2 sofort die Gleichung $tg\,\alpha\,.\,tg\,\alpha_1 =$ Const. für conjugirte Strahlen der Involution S.

Df. Von einer „symmetrischen" Strahlen- oder Ebeneninvolution erster Ordnung schneiden sich die beiden Doppelelemente rechtwinklig; sie hälften die Nebenwinkel, die von den Paaren conjugirter Elemente der Involution gebildet werden, weil sie je zwei conjugirte Elemente harmonisch trennen (vgl. Seite 47). Durch

Spiegelung an einem Doppelelemente geht jedes Element der symmetrischen Involution in das ihm zugeordnete über. Die Doppelstrahlen einer symmetrischen Strahleninvolution können deshalb als „Symmetrieaxen" der Involution bezeichnet werden; von ihnen verschieden sind die „Axen" der Involution, denn diese hälften die von den Doppelstrahlen gebildeten Winkel (Seite 160). Eine hyperbolische Punktinvolution auf einer Geraden u wird aus den Punkten der Kugel, welche u in den Doppelpunkten der Involution rechtwinklig schneidet, durch symmetrische Strahleninvolutionen projicirt.

In einer „symmetrischen" Punktinvolution erster Ordnung liegt ein Doppelpunkt N unendlich fern, und der andere M hälftet folglich die von je zwei conjugirten Punkten begrenzten Strecken. Eine hyperbolische Strahleninvolution wird von jeder Transversale, die zu einem ihrer Doppelstrahlen parallel ist, in einer symmetrischen Punktinvolution geschnitten, deren Symmetrie-Centrum M auf dem anderen Doppelstrahle liegt.

Für drei beliebige Punktepaare einer Involution $AA_1 \,.\, BB_1 \,.\, CC_1$ erster Ordnung gilt u. a. die Beziehung $AA_1BC_1 \barwedge A_1AB_1C$ (Seite 154), und für die Strecken, welche die sechs Punkte begrenzen, gilt deshalb die Proportion (Seite 68):

$$\frac{AA_1}{AC_1} : \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{A_1A}{A_1C} : \frac{B_1A}{B_1C} \text{ oder } \frac{AA_1}{AC_1} : \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{AA_1}{CA_1} : \frac{AB_1}{CB_1}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Ausmultiplieiren die wichtige Formel:

$$AB_1 \,.\, BC_1 \,.\, CA_1 = BA_1 \,.\, CB_1 \,.\, AC_1,$$

die sich ganz beiläufig schon in den Collectiones des Pappus (lib. VII, prop. 130) findet. Die Formel bleibt gültig, wenn in ihr zwei conjugirte Punkte, etwa C und C_1, vertauscht werden; denn aus $AA_1BC \barwedge A_1AB_1C_1$ folgt ebenso:

$$AB_1 \,.\, BC \,.\, C_1A_1 = BA_1 \,.\, C_1B_1 \,.\, AC.$$

Für die Sinus der Winkel, welche drei paar Elemente einer Strahlen- oder Ebeneninvolution erster Ordnung bilden, gelten ganz analoge Gleichungen.

$AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1$

Dreizehnter Vortrag.

Brennpunkte der Curven zweiter Ordnung.*)

226 In der Ebene einer Curve zweiter Ordnung sind die Strahlen eines beliebigen Punktes U paarweise conjugirt bezüglich der Curve. Sie bilden eine elliptische oder hyperbolische Strahleninvolution, jenachdem der Punkt U innerhalb oder ausserhalb der Curve liegt. Der Punkt U aber hat eine besondere Bedeutung für die Curve, wenn diese Strahleninvolution eine rechtwinklige ist; er heisst in diesem Falle ein „Brennpunkt" der Curve zweiter Ordnung. Wir definiren also die Brennpunkte wie folgt:

„Ein Brennpunkt einer Curve zweiter Ordnung hat solche „Lage, dass seine bezüglich der Curve conjugirten Strahlen sich „rechtwinklig schneiden (De la Hire). Er ist der Mittelpunkt „einer rechtwinkligen Involution conjugirter Strahlen."

227 Ein Brennpunkt kann nur innerhalb der Curve zweiter Ordnung liegen; denn die Strahleninvolution jedes ausserhalb gelegenen Punktes hat ja zwei Doppelstrahlen, nämlich die durch ihn gehenden Tangenten der Curve. Jeder Brennpunkt F liegt auf einer Axe der Curve zweiter Ordnung; der durch F gelegte Durchmesser nämlich ist eine Axe, weil er senkrecht steht auf der durch F gehenden, ihm conjugirten Sehne. Die Verbindungslinie von zwei Brennpunkten F, F_1 ist eine Axe der Curve, weil sie zu den beiden Senkrechten, die in F und F_1 auf ihr errichtet werden können, conjugirt ist, und weil ihr Pol mit dem unendlich fernen Punkte dieser Senkrechten zusammenfällt (vgl. Seite 115).

228 Vom Kreise ist der Mittelpunkt ein Brennpunkt. Zwei Strahlen, die in Bezug auf einen Kreis conjugirt sind, schneiden sich nur dann rechtwinklig, wenn einer oder jeder von ihnen ein Durchmesser ist. Der Kreis hat deshalb ausser dem Mittelpunkte

*) Die wichtigeren Brennpunktseigenschaften der Ellipsen und Hyperbeln ausser den auf die Leitlinien bezüglichen und der fundamentalen, die wir zur Definition der Brennpunkte benutzen, waren schon dem Apollonius (ca. 247 v. Chr.) bekannt. (Vgl. conicorum liber III, prop. 45 u. flgde.).

keinen Brennpunkt. Von der folgenden Untersuchung soll der Kreis ausgeschlossen werden.

2-29 Zu einem Strahle p in der Ebene einer Curve zweiter Ordnung giebt es einen conjugirten normalen Strahl p_1 (Fig. 72);

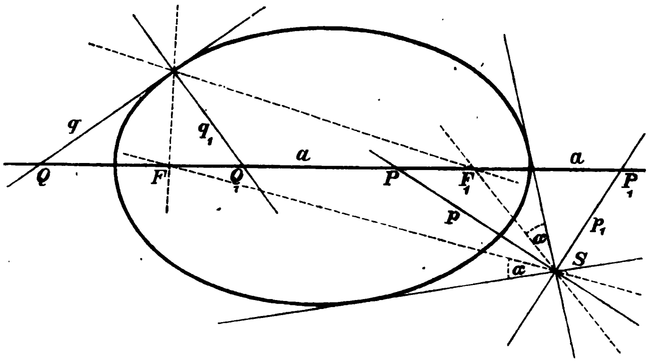


Fig. 72.

dieser geht durch den Pol von p und schneidet p rechtwinklig. Eine Axe a der Curve zweiter Ordnung schneide nun p und p_1 unter schiefen Winkeln in den resp. Punkten P und P_1; dann ist jeder Strahl des Büschels P zu dem ihm conjugirten Strahle des Büschels P_1 normal. Denn die Büschel P, P_1 werden projectiv, wenn jedem Strahle des einen der ihm conjugirte Strahl des anderen zugewiesen wird (Seite 106); da aber, wenn A den unendlich fernen Pol der Axe a bedeutet, die drei Strahlen a, PA, p von P ihre resp. conjugirten Strahlen P_1A, a und p_1 von P_1 rechtwinklig schneiden, so erzeugen P und P_1 einen Kreis über der Durchmessersehne PP_1, und je zwei conjugirte Strahlen dieser Büschel sind zu einander normal. Hieraus folgt die erste Hälfte des Satzes:

„In einer Axe a einer Curve zweiter Ordnung giebt es zu jedem „Punkte P einen Punkt P_1, so dass je zwei durch P und P_1 „gehende conjugirte Strahlen sich rechtwinklig schneiden. Die „so einander zugeordneten Punkte bilden auf der Axe a eine „Involution.“

Die zweite Hälfte dieses Satzes ergiebt sich aus Folgendem. Wir beziehen die beiden Parallelstrahlenbüschel, deren Strahlen zu resp. p und p_1 parallel sind, projectiv auf einander, indem wir jedem Strahle des einen Büschels den ihm conjugirten Strahl des anderen zuweisen (Seite 106). Die Gerade a wird von diesen Büscheln in projectiven Punktreihen geschnitten, welche involutorisch liegen, weil ihre homologen Punkte, wie P und P_1, einander doppelt entsprechen.

„Hat diese Involution auf a zwei Doppelpunkte, so ist jeder „von ihnen ein Brennpunkt der Curve zweiter Ordnung; hat „sie keine Doppelpunkte, so sind die beiden Punkte der Ebene, „aus denen sie durch rechtwinklige Strahleninvolutionen pro„jicirt wird (Seite 161), Brennpunkte der Curve."

Denn je zwei conjugirte Strahlen eines solchen Punktes schneiden sich rechtwinklig. Im letzteren Falle liegen die Brennpunkte in der anderen, von a verschiedenen Axe der Curve zweiter Ordnung und bilden die Doppelpunkte einer in dieser Axe liegenden Involution, die auf gleiche Weise entsteht wie die erstere.

230 Keine Curve zweiter Ordnung hat mehr als zwei Brennpunkte; denn jede Verbindungslinie von zwei Brennpunkten ist eine Axe der Curve, und nur der Kreis hat mehr als zwei Axen. Als „Hauptaxe" einer Ellipse oder Hyperbel bezeichnet man die Axe, welche die beiden Brennpunkte der Curve enthält; die andere Axe wird „Nebenaxe" genannt.

231 „Umschreibt man einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypo„tenuse in der Nebenaxe einer Curve zweiter Ordnung liegt „und dessen Katheten conjugirt sind, einen Kreis, so schneidet „dieser die Hauptaxe in den Brennpunkten der Curve. Die „Brennpunkte liegen demnach symmetrisch bezüglich der Neben„axe und haben vom Mittelpunkte der Curve gleichen Ab„stand."

Dieser Satz folgt sofort aus der zweiten Hälfte des vorhergehenden Satzes.

232 Die Hyperbel wird von ihrer Hauptaxe geschnitten, weil die beiden Brennpunkte auf der Hauptaxe innerhalb der Hyperbel liegen. In der Involution a, deren Doppelpunkte die Brennpunkte einer Ellipse oder Hyperbel sind, ist der Mittelpunkt der Curve dem unendlich fernen Punkte zugeordnet; denn wenn von den conjugirten normalen Strahlen p, p_1 der eine unendlich fern liegt, so ist der andere ein Durchmesser der Curve. Hieraus folgt wiederum, dass die Brennpunkte vom Mittelpunkte gleichen Abstand haben (Seite 162).

„Ueberhaupt sind die Brennpunkte harmonisch getrennt durch

„je zwei conjugirte Gerade, die sich rechtwinklig schneiden, „z. B. durch die Tangente und die Normale eines beliebigen „Punktes der Curve.“

Ist die Curve zweiter Ordnung eine Parabel und a deren Axe, so haben die beiden projectiven Parallelstrahlenbüschel, von denen vorhin die Rede war, die unendlich ferne Gerade entsprechend gemein; denn diese Gerade ist als Tangente der Parabel sich selbst conjugirt. In der Involution a fällt demnach der eine Doppelpunkt zusammen mit dem unendlich fernen Punkte, und dieser ist als ein (uneigentlicher) Brennpunkt der Parabel anzusehen. Die Parabel hat nur einen eigentlichen Brennpunkt; er hälftet als zweiter Doppelpunkt den Abschnitt zwischen je zwei einander zugeordneten Punkten P, P_1 der Involution a.

Insbesondere ergiebt sich:

„Der Brennpunkt der Parabel hälftet den Abschnitt der Axe a, „der zwischen der Tangente und der Normale eines beliebigen „Parabelpunktes liegt.“

233 Seien nun F, F_1 die beiden Brennpunkte einer Curve zweiter Ordnung, von denen der eine im Falle der Parabel unendlich fern liegt in der Richtung der parallelen Durchmesser. Je zwei conjugirte Gerade SP und SP_1, die auf einander senkrecht stehen (Fig. 72), sind wie gesagt durch die Punkte F, F_1 und folglich auch durch die Strahlen SF und SF_1 harmonisch getrennt; sie hälften daher die Winkel zwischen SF und SF_1 (Seite 47). Ist S ein Punkt der Curve, so berührt eine der Geraden SP und SP_1 die Curve, und es ergiebt sich:

„Jede Tangente einer Curve zweiter Ordnung bildet gleiche „Winkel mit den beiden Geraden, die den Berührungspunkt mit „den Brennpunkten der Curve verbinden. Wenn die Curve Lichtstrahlen reflectirt, so wirft sie demnach die von einem Brenn„punkte ausgehenden Strahlen nach dem anderen Brennpunkte „zurück oder aber im Falle der Hyperbel so zurück, dass die re„flectirten Strahlen vom anderen Brennpunkt auszugehen scheinen.“ Dieser Eigenschaft verdanken die Brennpunkte oder „Foci“ ihren Namen.

Liegt der Punkt S ausserhalb der Curve, so hälften die beiden conjugirten normalen Strahlen SP, SP_1 nicht nur die von SF und SF_1 gebildeten Winkel, sondern auch die Winkel zwischen den Tangenten, die von S an die Curve gezogen werden können; denn auch diese Tangenten sind durch SP und SP_1 harmonisch getrennt (Seite 105). Daraus folgt:

„Wird der Schnittpunkt von zwei Tangenten verbunden mit „den Brennpunkten einer Curve zweiter Ordnung, so bildet die Aufg 140 „eine Verbindungslinie mit der einen Tangente denselben „Winkel wie die andere Tangente mit der andern Verbindungs- „linie“ (Fig. 72).

234 Die Polare f eines Brennpunktes F der Curve zweiter Ordnung wird „Directrix“ oder „Leitlinie“ der Curve genannt. Es giebt zwei Leitlinien bei der Ellipse und der Hyperbel, und eine eigentliche bei der Parabel. Für letztere nun gilt der Satz:

„Zwei Parabeltangenten PA, PB stehen auf einander senkrecht, „wenn ihr Schnittpunkt P auf der Leitlinie liegt.“

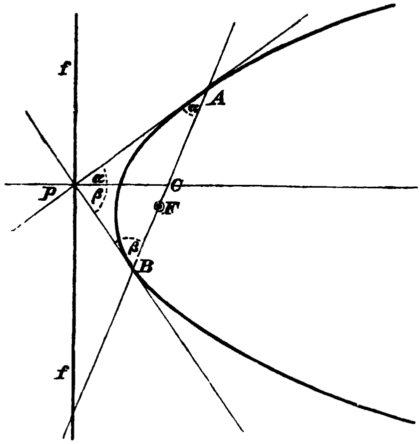


Fig. 73.

In diesem Falle nämlich geht die Polare von P durch den Brennpunkt F (Fig. 73), sie enthält die Berührungspunkte A, B der beiden Tangenten, und jede dieser Tangenten bildet mit AB dieselben Winkel wie mit einem beliebigen Durchmesser. Folglich ist in dem Dreieck APB die Summe der Winkel A und B gleich der Summe der Winkel, welche PA und PB mit dem durch P gehenden Durchmesser PC bilden, also gleich dem Winkel P, und weil die Winkel A, B und P zusammen zwei Rechte ausmachen, so muss P ein rechter Winkel sein.

235 Andere bemerkenswerthe Eigenschaften der Brennpunkte einer Curve zweiter Ordnung ergeben sich aus ihrer Definition, wonach je zwei conjugirte Strahlen eines Brennpunktes sich rechtwinklig schneiden; u. A. gilt der Satz (vgl. Fig. 73):

„Der Abschnitt einer Tangente zwischen dem Berührungspunkte „A und einer Leitlinie wird aus dem zugehörigen Brennpunkte „durch einen rechten Winkel projicirt.“

Die Schenkel dieses Winkels sind nämlich zwei conjugirte Strahlen des Brennpunktes F, weil der Punkt, in welchem die Tangente von der Leitlinie f geschnitten wird, die Gerade FA zur Polare hat.

Seien TA und TB zwei beliebige Tangenten einer Curve zweiter Ordnung (Fig. 74) und sei AB die Polare ihres Schnitt-

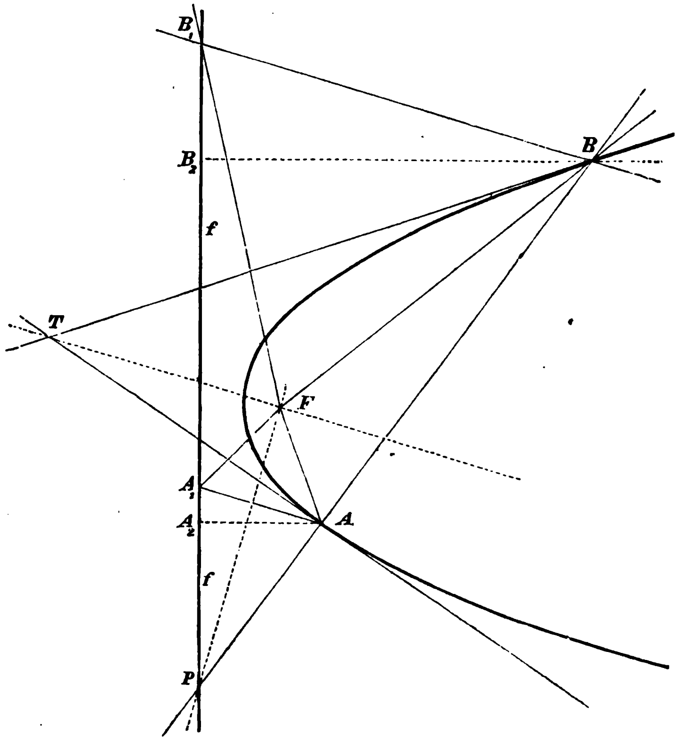


Fig. 74.

punktes T; dann ist der Schnittpunkt P von AB und der Leitlinie f der Pol der Geraden FT, und FT steht senkrecht zu FP, weil diese beiden Strahlen des Brennpunktes F conjugirt sind. Zugleich sind FA und FB harmonisch getrennt durch FT und FP, weil A und B harmonisch getrennt sind durch FT und P. Folglich werden die von FA und FB gebildeten Nebenwinkel gehälftet durch FT und FP (Seite 47). Also:

„Wird ein Brennpunkt einer Curve zweiter Ordnung verbunden „mit den Berührungspunkten und mit dem Schnittpunkte von

„zwei Tangenten, so bildet die letztere Verbindungslinie gleiche „Winkel mit den beiden ersteren."

Werden durch A und B (Fig. 74) Parallele zu FT gezogen, die in resp. A_1 und B_1 die Leitlinie f schneiden, so sind auch A_1 und B_1 harmonisch getrennt durch P und FT. Die Winkel zwischen FA_1 und FB_1 werden daher ebenfalls durch FT und FP gehälftet. Hieraus folgt sogleich, dass die Dreiecke A_1AF und B_1BF gleiche Winkel haben und ähnlich sind, dass also die Proportion gilt:

$$FA : AA_1 = FB : BB_1.$$

Die Abschnitte AA_1 und BB_1 bilden gleiche Winkel mit der Leitlinie f und sind deshalb proportional zu den Abständen AA_2 und BB_2 der Punkte A, B von der Leitlinie, so dass wir auch haben:

$$FA : AA_2 = FB : BB_2.$$

Nun sind aber A und B zwei ganz beliebige Curvenpunkte: also gilt der Satz:

„Die Abstände eines beliebigen Punktes der Curve zweiter Ord- „nung von einem Brennpunkte und von der zugehörigen Leit- „linie stehen in einem constanten Verhältniss zu einander" (Pappus).

Für die Parabel ist dieses Verhältniss gleich eins und sind die beiden Abstände gleich gross; denn der Scheitelpunkt der Parabel ist eben so weit entfernt vom Brennpunkte wie von der Leitlinie, weil er durch beide harmonisch getrennt ist von dem unendlich fernen Parabelpunkte. Mit Benutzung der Scheitelpunkte beweisen Sie leicht, dass der Werth des constanten Verhältnisses kleiner ist als eins bei der Ellipse und grösser als eins bei der Hyperbel. Da eine Curve zweiter Ordnung durch jede ihrer Axen in symmetrische Hälften zerfällt, so hat das Verhältniss denselben Werth für den einen wie für den anderen Brennpunkt und dessen Leitlinie; sind also r, r_1 die Abstände irgend eines Curvenpunktes A von den beiden Brennpunkten F, F_1 (Fig. 75 und 76), d und d_1 seine Abstände von den zugehörigen beiden Leitlinien f, f_1, so ist

$$\frac{r}{d} = \frac{r_1}{d_1} = \text{Const.} = e,$$

wo auch der Curvenpunkt liegen möge. Es folgt hieraus, dass

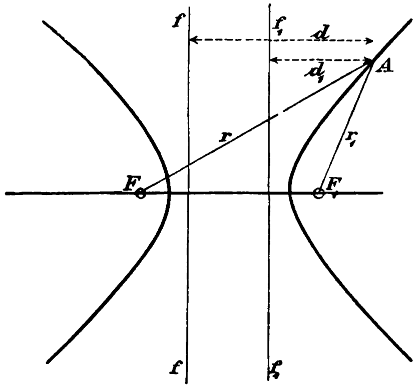


Fig. 75.

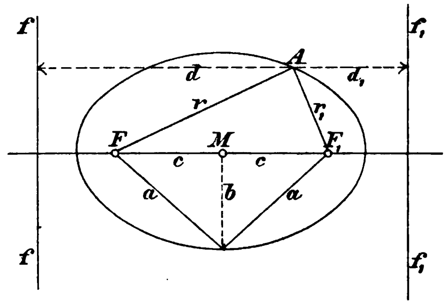


Fig. 76.

auch $\frac{r \pm r_1}{d \pm d_1} = e$, also constant ist. Bei der Ellipse ist aber $d + d_1$, und bei der Hyperbel ist $d - d_1$ constant und zwar gleich dem Abstande der beiden Leitlinien von einander; also muss für die Ellipse die Summe $r + r_1$, und für die Hyperbel die Differenz $r - r_1$ constant sein.

„Die Summe der Abstände eines Ellipsenpunktes von den Brenn-„punkten der Ellipse ist constant.“

„Die Differenz der Abstände eines Hyperbelpunktes von den „Brennpunkten der Hyperbel ist constant.“

Fällt A mit einem Scheitelpunkte der Hauptaxe zusammen, so ergiebt sich, dass diese constante Summe oder Differenz gleich ist dem Abschnitte $2a$ zwischen den Scheitelpunkten der Hauptaxe. Die Ellipse schliesst von ihrer Hauptaxe einen grösseren Abschnitt ein als von der Nebenaxe; ist nämlich $2b$ der Abschnitt auf der Nebenaxe und c die Excentricität, d. h. der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte der Curve, so ergiebt sich (Fig. 76):

$$a^2 - b^2 = c^2 \text{ und folglich } 2a > 2b.$$

237 Wenn zwei Punkte zu einer Geraden symmetrisch liegen, d. h. wenn ihre Verbindungslinie auf der Geraden senkrecht steht und von ihr gehälftet wird, so heisst der eine der „Gegenpunkt“ des anderen bezüglich der Geraden. Für die Ellipse und die Hyperbel nun gilt der Satz:

„Die Gegenpunkte eines Brennpunktes F_1 bezüglich der Tan-„genten einer Ellipse oder Hyperbel liegen auf einem Kreise

„vom Radius $2a$, dessen Mittelpunkt der andere Brennpunkt „F ist.“

Sei nämlich G der Gegenpunkt von F_1 bezüglich einer beliebigen Tangente, deren Berührungspunkt A ist (Fig. 77), so liegen F,

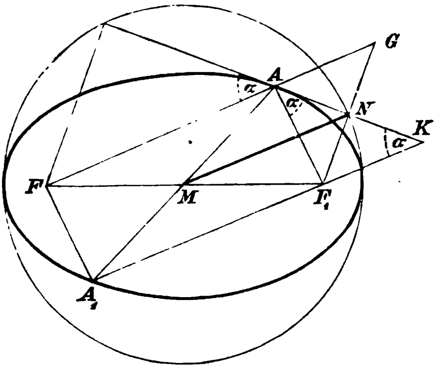


Fig. 77.

A und G in einer Geraden, weil AF_1 und folglich auch AG mit der Tangente denselben Winkel bildet wie AF (Seite 167). Da ausserdem die Punkte F_1 und G von A gleichen Abstand haben, so ist FG gleich der Summe resp. Differenz von FA und AF_1, also constant $= 2a$, wie der Satz behauptet. — Der Fusspunkt N des von F_1 auf die Tangente gefällten Lothes ist der Mittelpunkt von F_1G; und da der Mittelpunkt M der Curve die Strecke F_1F hälftet, so ist MN parallel zu FG und gleich $\frac{1}{2}FG = a$. Also:

„Die Fusspunkte der Lothe, die von den Brennpunkten einer „Ellipse oder Hyperbel auf deren Tangenten gefällt werden „können, liegen auf einem Kreise, der den Abschnitt zwischen „den Scheitelpunkten der Hauptaxe zur Durchmessersehne hat.“

238 Betrachtet man die Parabel als Grenzfall der Ellipse oder Hyperbel, etwa als eine Ellipse, von der ein Brennpunkt unendlich fern liegt, so gelangt man zu folgendem Satze:

„Die Fusspunkte der Lothe, die vom Brennpunkte F einer Pa„rabel auf deren Tangenten gefällt werden können, liegen auf „der Scheiteltangente der Parabel.“

Um ihn zu beweisen, legen wir durch den Schnittpunkt N der

Scheiteltangente NS und einer beliebigen Tangente NA (Fig. 78) eine Parallele NF_1 zur Axe und eine Gerade NF nach dem

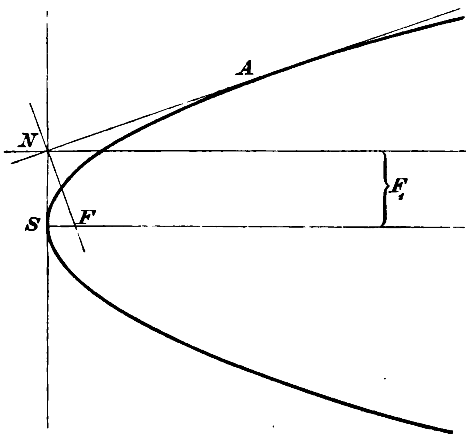


Fig. 78.

Brennpunkte; dann sind die Winkel FNA und SNF_1 gleich (Seite 168), weil NF_1 den zweiten, unendlich fernen Brennpunkt der Parabel enthält; und da SNF_1 ein rechter Winkel ist, so muss auch FNA ein rechter sein.

Diese Sätze geben uns zugleich Mittel an die Hand, die Brennpunkte eines Kegelschnittes auf einfache Weise zu construiren (vgl. Fig. 77 und 78). Eine andere sehr einfache Construction der Brennpunkte einer Ellipse oder Hyperbel ist die folgende. Man construire in den beiden Scheitelpunkten der Hauptaxe die Tangenten; diese schneiden jede dritte Tangente in zwei Punkten P, Q, die aus jedem Punkte der Hauptaxe durch conjugirte Strahlen projicirt werden (Seite 108). Um die Brennpunkte zu erhalten, deren conjugirte Strahlen auf einander senkrecht stehen, beschreibe man einen Kreis über PQ als Durchmessersehne; die Schnittpunkte des Kreises mit der Hauptaxe sind die gesuchten beiden Brennpunkte (Apollonius). Insbesondere ergiebt sich:

„Die Brennpunkte einer Hyperbel liegen mit den vier Schnitt-„punkten der Scheiteltangenten und der Asymptoten auf einem „Kreise.“

Wenn c und a die Abstände der Brennpunkte und der Scheitelpunkte vom Centrum der Hyperbel bezeichnen, und b den Abschnitt einer Scheiteltangente zwischen dem Scheitelpunkt und einer Asymptote, so folgt hieraus für die Excentricität c die bekannte Gleichung:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

239 Werden zwei Tangenten TA, TB einer Curve zweiter Ordnung von einer dritten in den resp. Punkten A_1, B_1 geschnitten, und sind A, B und C die resp. drei Berührungspunkte (Fig. 79),

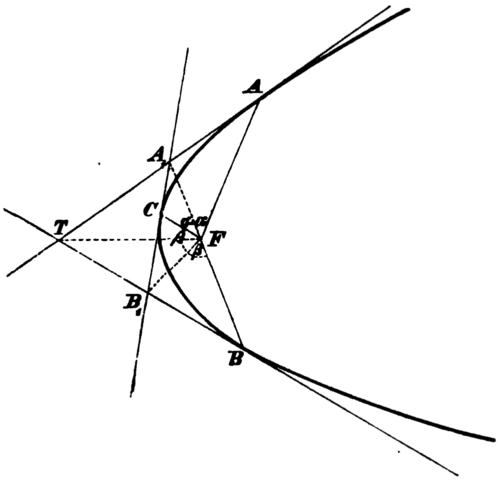


Fig. 79.

so gelten für die Winkel, durch welche die Abschnitte der Tangenten aus einem eigentlichen Brennpunkte F der Curve projicirt werden, folgende Gleichungen (Seite 169):

$$\angle B_1FC = \angle BFB_1 = \tfrac{1}{2} \angle BFC,$$
$$\angle CFA_1 = \angle A_1FA = \tfrac{1}{2} \angle CFA;$$

folglich: $\angle B_1FC + \angle CFA_1 = \tfrac{1}{2}(\angle BFC + \angle CFA)$,

oder $\angle B_1FA_1 = \angle BFT = \angle TFA.$

Wenn also die ersten beiden Tangenten TA und TB fest bleiben, während die dritte A_1B_1 ihre Lage ändert, so bleibt der Winkel B_1FA_1 seiner Grösse nach constant. Bewegt sich die dritte Tangente an der Curve hin, so beschreiben A_1 und B_1 zwei projective Punktreihen in den festen Tangenten, die Strahlen FA_1 und FB_1 aber zwei gleiche Strahlenbüschel um F. Also:

„Die projectiven Punktreihen, in denen irgend zwei Tangenten
„einer Curve zweiter Ordnung die übrigen schneiden, werden Aufg 140
„aus jedem Brennpunkte der Curve durch zwei gleiche und gleich-
„laufend projective Büschel projicirt."

Dieser Satz gilt auch dann, wenn die Curve zweiter Ordnung eine Parabel oder ein Kreis, und der Brennpunkt der unendlich ferne Punkt der Parabel oder der Mittelpunkt des Kreises ist. Sind von einer Curve zweiter Ordnung drei Tangenten und ein Brennpunkt gegeben, so können hiernach leicht beliebig viele andere Tangenten construirt werden.

Nimmt man die bewegliche Tangente in zwei beliebigen Lagen an, so ergiebt sich ohne Schwierigkeit:

„Von einem Tangentenvierseit der Curve zweiter Ordnung wer-
„den die drei paar Gegenpunkte aus jedem Brennpunkte F
„durch eine symmetrische Strahleninvolution projicirt."

Sind nämlich P, P_1 und Q, Q_1 zwei paar Gegenpunkte, so ist $\angle\, PFQ = \angle\, Q_1FP_1$; die Mittellinien der von FP und FP_1 gebildeten Nebenwinkel hälften folglich auch die Winkel zwischen den beiden Strahlen FQ und FQ_1.

Ist die Curve zweiter Ordnung eine Parabel (Fig. 79), so kann die bewegliche Tangente A_1B_1 in das Unendliche rücken, und die Geraden FA_1 und FB_1 bilden folglich dieselben Winkel mit einander wie die festen Tangenten TA und TB. Das Viereck B_1TA_1F ist demnach ein Kreisviereck, und:

„Jeder Kreis, der einem Tangentendreieck B_1TA_1 einer Pa-
„rabel umschrieben ist, geht durch den Brennpunkt F der
„Parabel."

Wenn man also den vier Dreiecken, die von den Seiten eines Vierseits gebildet werden, Kreise umschreibt, so haben diese einen Punkt mit einander gemein, nämlich den Brennpunkt der Parabel, die dem Vierseit eingeschrieben werden kann.

Ist die Curve zweiter Ordnung eine Hyperbel, und sind die beiden festen Tangenten TA, TB ihre Asymptoten, also A, B ihre unendlich fernen Punkte, so laufen TB und FB parallel und der Winkel $B_1FA_1 = BFT$ ist gleich dem einen der beiden Winkel, welche die Asymptote TB mit der Hauptaxe FT bildet; dem anderen ist der Winkel $A_1F_1B_1$ gleich, durch welchen A_1B_1 aus dem zweiten Brennpunkte F_1 projicirt wird. Folglich sind

B_1FA_1 und $A_1F_1B_1$ zwei Nebenwinkeln gleich, und $B_1FA_1F_1$ ist ein Kreisviereck. Also:

„Die beiden Brennpunkte einer Hyperbel liegen mit den Punkten, „in denen eine beliebige Tangente die beiden Asymptoten „schneidet, auf einem Kreise. Die Mittelpunkte dieses Kreises „und der Hyperbel liegen mit denselben beiden Schnittpunkten „auf einem zweiten Kreise.“

Vierzehnter Vortrag.

Confocale Kegelschnitte.

Sup 201

Confocal oder homofocal heissen solche Curven zweiter Ordnung, die in einer Ebene liegen und dieselben zwei Brennpunkte haben. Die Hauptaxen confocaler Kegelschnitte fallen zusammen, weil auf ihnen die beiden Brennpunkte liegen, ebenso aber ihre Nebenaxen und Mittelpunkte, weil sie den Abstand der beiden Brennpunkte hälften. Wenn der eine Brennpunkt unendlich fern liegt, so sind die confocalen Curven Parabeln mit demselben eigentlichen Brennpunkte und derselben Axe.

Mit einem gegebenen Kegelschnitt k sind unendlich viele andere confocal. Wenn der Scheitelpunkt eines rechten Winkels einen mit k concentrischen Kreis durchläuft, während der eine Schenkel um einen Brennpunkt von k sich dreht, so umhüllt der andere Schenkel einen der mit k confocalen Kegelschnitte (Seite 172), und zwar eine Ellipse oder Hyperbel, jenachdem der Kreis die Brennpunkte ein- oder ausschliesst. Wenn der Kreis durch die beiden Brennpunkte F, F_1 geht, so zerfällt der Tangentenbüschel des Kegelschnittes in die beiden Strahlenbüschel F, F_1; der Kegelschnitt, als Curve zweiter Classe aufgefasst, zerfällt dann in die beiden Brennpunkte. — An die Stelle der mit k concentrischen Kreise treten die zu der Hauptaxe normalen Geraden, wenn k eine Parabel ist, ein Brennpunkt also unendlich fern liegt. Aus dieser Construction confocaler Kegelschnitte folgt sofort:

„Eine Schaar confocaler Kegelschnitte ist durch einen beliebigen „ihrer Kegelschnitte bestimmt. Jede Gerade der Ebene berührt „einen der confocalen Kegelschnitte.“

Zwei zu einander normale Gerade der Ebene sind conjugirt bezüglich der confocalen Kegelschnitte, wenn sie durch die beiden Brennpunkte harmonisch getrennt sind (Seite 166). Daraus folgt:

„Die Pole einer Geraden g bezüglich confocaler Kegelschnitte „liegen auf einer zu g normalen Geraden g_1, die von g har- „monisch getrennt ist durch die beiden Brennpunkte. Wenn „also zwei normale Gerade conjugirt sind bezüglich irgend eines „Kegelschnittes k, so sind sie conjugirt bezüglich aller mit k „confocalen Kegelschnitte und harmonisch getrennt durch die „beiden Brennpunkte.“

Diese Sätze enthalten eines der wichtigsten Merkmale confocaler Curven zweiter Ordnung. Aus ihnen ergiebt sich, dass in jedem Punkte S der Ebene zwei conjugirte Gerade sich rechtwinklig schneiden; diese Geraden hälften die von den Brennstrahlen des Punktes gebildeten Nebenwinkel, zugleich aber die Winkel zwischen den Tangenten, die aus S an irgend einen der confocalen Kegelschnitte gehen. Also:

„Die Tangentenpaare, die durch einen beliebigen Punkt S an „die confocalen Kegelschnitte gezogen werden können, bilden „eine symmetrische Involution, deren zu einander normale „Doppelstrahlen g, g_1 bezüglich der Kegelschnitte conjugirt „sind. Zwei der confocalen Kegelschnitte berühren g resp. g_1 „in S und schneiden sich rechtwinklig in S. Die Ebene wird „demnach durch die confocalen Curven in unendlich kleine „Rechtecke getheilt“ (vgl. Fig. 80 auf der folgenden Seite).

Von den beiden durch S gehenden confocalen Kegelschnitten ist der eine eine Ellipse und der andere eine Hyperbel, falls nicht beide Parabeln sind. Denn ihre Tangenten g, g_1 in S trennen die Brennpunkte harmonisch; die eine schneidet also die Hauptaxe zwischen den beiden Brennpunkten, und diese berührt in S die Hyperbel, während die andere in S die Ellipse berührt. Eine Ellipse schneidet jede mit ihr confocale Hyperbel in vier Punkten rechtwinklig; dagegen schneiden zwei confocale Ellipsen oder Hyperbeln sich nicht, vielmehr schliesst eine von ihnen die andere ein. Zwei confocale Parabeln schneiden sich in keinen oder in zwei eigentlichen Punkten rechtwinklig, jenachdem ihre Scheitelpunkte auf derselben Seite des Brennpunktes liegen oder nicht.

Die Pole einer Geraden g in Bezug auf zwei der confocalen Kegelschnitte liegen auf einer zu g conjugirten und normalen Geraden g_1. Wenn nun g um einen Punkt U sich dreht, so be-

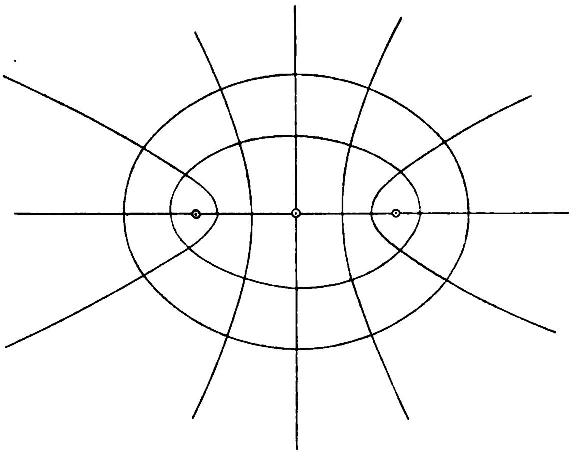


Fig. 80.

schreiben diese Pole in den beiden Polaren von U zwei projectiv ähnliche Punktreihen, und die Gerade g_1 umhüllt folglich eine Parabel, die auch die beiden Polaren berührt. Also:

„Den Strahlen eines beliebigen Punktes U sind bezüglich der „confocalen Kegelschnitte die Tangenten einer Parabel con„jugirt; die Polaren von U bezüglich je eines der confocalen „Kegelschnitte berühren dieselbe Parabel."

Die Parabel berührt auch die Axen der confocalen Kegelschnitte, wie leicht einzusehen ist, und in U schneiden sich zwei ihrer Tangenten rechtwinklig. Der durch U gehende Durchmesser der Kegelschnitte ist demnach die Leitlinie der Parabel (Seite 168).

Jedem Strahle g von U ist die zu ihm normale Tangente g_1 der Parabel conjugirt; der Büschel U aber und der Tangentenbüschel der Parabel sind projectiv. Die Schnittpunkte homologer Strahlen dieser Büschel liegen folglich auf einer Curve dritter Ordnung (Seite 137); sie sind die Punkte, in denen die Strahlen von U je einen der confocalen Kegelschnitte berühren und zu je einem anderen normal sind. Also:

„Die Strahlen eines beliebigen Punktes U berühren in den „Punkten einer Curve dritter Ordnung, die sich selbst in U

„rechtwinklig schneidet, je einen der confocalen Kegelschnitte;
„sie sind in denselben Punkten zu je einem der Kegelschnitte
„normal.“

Die Curve ist eine „Strophoide“ (vgl. Anhang Nr. 88); sie geht durch die Brennpunkte der confocalen Kegelschnitte und zerfällt, wenn U auf einer der Axen liegt, in diese Axe und einen Kreis (vgl. Seite 165).

Man erhält die Polaren von U, wenn man von zwei durch U gehenden Geraden g, h die Pole bezüglich je eines der confocalen Kegelschnitte bestimmt und diese Pole verbindet. Nun liegen aber die Pole auf zwei zu g resp. h normalen Tangenten g_1, h_1 der von den Polaren umhüllten Parabel; es ergiebt sich also:

„Die Pole von zwei beliebigen Geraden g, h bezüglich je eines
„der confocalen Kegelschnitte sind homologe Punkte von zwei
„projectiv ähnlichen Punktreihen g_1, h_1.“

Die Construction der confocalen Kegelschnitte, von der wir ausgingen (Seite 176), ist mit der folgenden identisch. Einen Kreis mit dem Mittelpunkte M bringen wir zum Schnitt mit einem veränderlichen Strahle s eines Punktes F und errichten auf s in den beiden Schnittpunkten P, P_1 Normalen; dann umhüllen diese beiden parallelen Normalen einen Kegelschnitt k, welcher M zum Mittelpunkte und F zum Brennpunkt hat. Aendert der Kreis seinen Halbmesser a, so beschreibt der Kegelschnitt k eine confocale Schaar. Nun ist aber bekanntlich das Produkt der Abschnitte FP, FP_1 der Kreissecante s constant, und zwar gleich $c^2 - a^2$, wenn c den Abstand des Brennpunktes F vom Mittelpunkte M, die s. g. „Excentricität“ des Kegelschnittes, bezeichnet. Also:

„Das Produkt der Abstände eines Brennpunktes von parallelen
„Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel ist constant.“

Sind d und e die Abstände des Mittelpunktes von einer der parallelen Tangenten t und einem zu t parallelen Strahle des Brennpunktes F, so sind $e + d$ und $e - d$ die Abstände des Brennpunktes von den parallelen Tangenten, und es wird:

$$e^2 - d^2 = c^2 - a^2.$$

Für die Tangente t_1 eines zu k confocalen Kegelschnittes k_1 mögen d_1, e_1 und a_1 dieselbe Bedeutung haben, wie d, e und a für t, sodass auch:

$$e_1{}^2 - d_1{}^2 = c^2 - a_1{}^2$$

wird. Wenn nun die Tangenten t, t_1 der confocalen Kegelschnitte k, k_1 sich rechtwinklig schneiden, so ist $\sqrt{d^2 + d_1^2}$ der Abstand ihres Schnittpunktes vom Mittelpunkte M, ferner $\sqrt{e^2 + e_1^2}$ die Excentricität c, und es ergiebt sich aus den vorhergehenden Gleichungen:

$$d^2 + d_1^2 = a^2 + a_1^2 - c^2 = \text{Const.}$$

„Wenn also die beiden Schenkel eines rechten Winkels zwei „confocale Kegelschnitte k, k_1 umhüllen, so beschreibt sein „Scheitelpunkt einen mit k und k_1 concentrischen Kreis" (Chasles).

Dieser Kreis geht in eine zur Axe normale Gerade über, wenn k und k_1 confocale Parabeln sind.

Andere bemerkenswerthe Eigenschaften confocaler Kegelschnitte hängen mit Vierseiten zusammen, denen Kreise eingeschrieben werden können. Zunächst beweisen wir den Satz:

„Die vier Geraden, welche zwei beliebige Punkte G, G_1 eines „Kegelschnittes mit den beiden Brennpunkten verbinden, berühren einen Kreis."

Ist nämlich M der Schnittpunkt der Tangenten von G und G_1 (Fig. 81), so bildet bekanntlich FM gleiche Winkel mit FG und

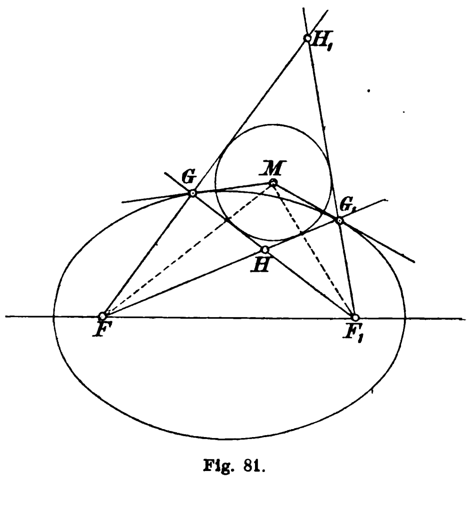


Fig. 81.

FG_1 (Seite 169); M hat also gleichen Abstand von FG und FG_1, ebenso aber auch von F_1G und F_1G_1. Ferner bildet die Tangente MG des Kegelschnittes gleiche Winkel mit den Brennstrahlen ihres Berührungspunktes G, sodass M auch von FG und F_1G und folglich von allen vier Geraden FG, FG_1, F_1G und F_1G_1 gleichen Abstand hat. Diese vier Geraden werden also von einem Kreise berührt, dessen Mittelpunkt M ist.

Wenn G_1 den Kegelschnitt beschreibt, so ändert sich der Kreis, indem er fortwährend die Geraden FG und F_1G berührt; sein Mittelpunkt beschreibt die Tangente des Punktes G. Daraus folgt:

„Zieht man an die einem Winkel eingeschriebenen Kreise aus „zwei Punkten F, F_1 der Schenkel je zwei andere Tangenten, „so schneiden sich diese auf einem Kegelschnitt, der F und F_1 „zu Brennpunkten hat und den Winkel hälftet."

Dieser Satz enthält eine Construction confocaler Kegelschnitte; aus ihm ergiebt sich:

„Von jedem Tangentenvierseit eines Kreises sind zwei beliebige „Gegenpunkte die Brennpunkte von zwei Kegelschnitten, die „je zwei andere Gegenpunkte verbinden. Zwei beliebige Punkte „G, G_1 eines Kegelschnittes sind demnach die Brennpunkte „eines zweiten Kegelschnittes, der durch die Brennpunkte F, F_1 „des ersteren geht."

Dieser Satz lässt sich für Ellipsen und Hyperbeln auch mittelst der Sätze von der Summe oder Differenz der Brennstrahlen beweisen. Ist z. B. der erstere Kegelschnitt eine Ellipse (Fig. 81), so ist:

$$FG + F_1G = FG_1 + F_1G_1 \text{ und folglich}$$
$$FG - FG_1 = F_1G_1 - F_1G.$$

Die Brennpunkte F, F_1 der Ellipse liegen demnach auf verschiedenen Zweigen einer Hyperbel, welche die Ellipsenpunkte G, G_1 zu Brennpunkten hat.

Da von einer Schaar confocaler Curven zweiter Classe eine Curve in die beiden Brennpunkte zerfällt (Seite 176), so ist die Umkehrung eines der vorhergehenden Sätze in dem folgenden Satze enthalten:

„Die vier gemeinschaftlichen Tangenten eines Kegelschnittes k „und eines Kreises bilden ein Vierseit, dessen drei paar Gegen„punkte auf drei mit k confocalen Kegelschnitten liegen."

Zum Beweise dieses Satzes bemerken wir, dass die drei paar Gegenpunkte AA_1, BB_1 und CC_1 des Vierseits (Fig. 82) aus dem Mittelpunkte M des Kreises durch eine symmetrische Involution projicirt werden (Seite 175). Die Doppelstrahlen dieser Involution schneiden sich rechtwinklig in M und sind conjugirt bezüglich aller dem Vierseit eingeschriebenen Curven zweiter Ordnung (Seite 158); sie sind insbesondere conjugirt bezüglich des Kegelschnittes k und folglich auch bezüglich der mit k confocalen Kegelschnitte (Seite 177). Einer dieser Kegelschnitte berührt MA und damit auch den zugeordneten Strahl MA_1 der Involution. Nun werden aber die Winkel der beiden in A sich schneidenden Tangenten von k durch zwei zu einander normale Gerade gehälftet, die in Bezug auf k und die mit k confocalen Kegelschnitte conjugirt sind, und MA ist die eine dieser Mittellinien. Jener eine mit k confocale Kegelschnitt berührt deshalb MA im Punkte A (Seite 177) und ebenso MA_1 in A_1; er verbindet die beiden Gegenpunkte A, A_1 des Vierseits mit einander. Ebenso liegen die Gegenpunkte B, B_1 (oder C, C_1) auf einem mit k confocalen Kegelschnitte, dessen Tangenten in B und B_1 (resp. C und C_1) beide durch M gehen.

Aendert der Kreis sich stetig so, dass er die in A sich schneidenden Tangenten von k fortwährend berührt, so beschreibt der Schnittpunkt A_1 der übrigen beiden gemeinsamen Tangenten einen durch A gehenden, mit k confocalen Kegelschnitt k_1. Wir schliessen daraus:

„Die zwei paar Tangenten, die von zwei Punkten eines Kegel-
„schnittes k_1 an einen confocalen Kegelschnitt k gezogen wer-
„den können, berühren einen Kreis“ (Chasles).

Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich die merkwürdigen Eigenschaften confocaler Kegelschnitte beweisen, welche Chasles 1843 ohne Beweis veröffentlicht hat*). Diese Eigenschaften hängen mit der Theorie der elliptischen Integrale innig zusammen; sie beziehen sich nämlich auf gewisse Bögen eines Kegelschnittes, deren Differenz rectificirbar, d. h. durch eine gerade Strecke genau darstellbar ist. Chasles nennt diese Bögen „ähnlich“ (semblables); wir wollen sie lieber „vergleichbar“ nennen. Der Einfachheit wegen bezeichnen wir als „Pol“ und „Schenkel“ eines

*) Comptes Rendus de l'Acad. Roy. des Sciences, 23. Oct. 1843, t. XVII, p. 838—844. Vgl. meinen Beweis in der Züricher Vierteljahrsschrift, 1896, Jubelband.

Kegelschnittbogens $\widehat{PQ}$ den Schnittpunkt A der Tangenten seiner Endpunkte P, Q und die beiden Abschnitte PA, AQ dieser Tangenten zwischen ihren Berührungspunkten und dem Schnittpunkte (vgl. Fig. 82). Von Ellipsenbögen setzen wir voraus, dass sie den halben Ellipsenumfang nicht überschreiten. Nach Chasles gelten dann u. a. folgende Definition und Sätze:

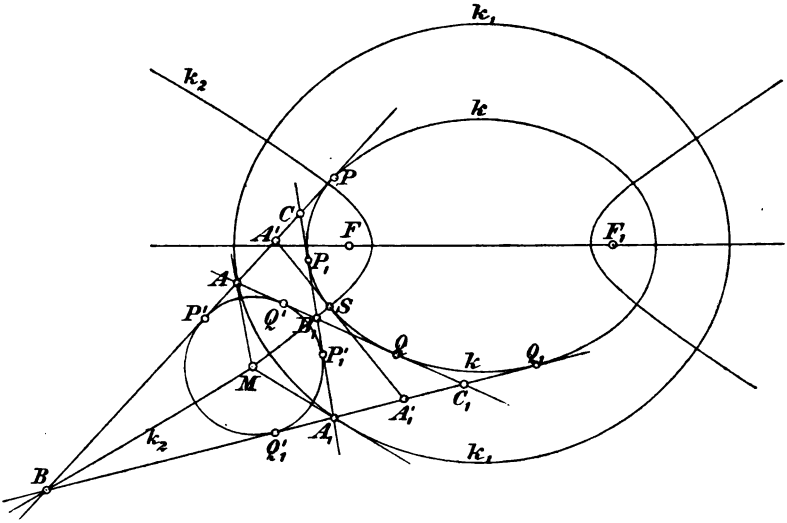


Fig. 82.

I. „Zwei Bögen eines Kegelschnittes k heissen vergleich„bar, wenn ihre Pole auf einem mit k confocalen Kegelschnitt „k_1 liegen, welcher k einschliesst. Ihre Differenz ist rectificir„bar, und zwar gleich der Summe der Schenkel des einen ver„mindert um die Summe der Schenkel des anderen Bogens. Die „Tangenten ihrer vier Endpunkte berühren einen Kreis."

II. „Wenn zwei vergleichbare Bögen eines Kegelschnittes „k in einem Endpunkte zusammenstossen, so ist ihre Differenz „gleich der Differenz der Schenkel ihrer Bogensumme. Der „gemeinsame Endpunkt liegt mit dem Pole dieser Bogensumme „auf einem mit k confocalen Kegelschnitt. In ihm wird k von „einem Kreise berührt, der mit k auch die Tangenten der an„deren beiden Endpunkte gemein hat."

Wir wollen diese Sätze beweisen. Zwei vergleichbare Bögen

$\widehat{PQ}$ und $\widehat{P_1Q_1}$ von k werden nach dem vorhin bewiesenen Satze in ihren Endpunkten von vier Tangenten eines Kreises berührt, weil ihre Pole A und A_1 auf einem mit k confocalen Kegelschnitt k_1 liegen. Die Tangenten AP und AQ (Fig. 82) mögen den Kreis in resp. P' und Q' berühren, ferner die Tangente A_1P_1 in resp. C und B_1, die Tangente A_1Q_1 aber in resp. B und C_1 schneiden; von A_1P_1 und A_1Q_1 werde der Kreis in P_1' und Q'_1 berührt. Dann sind AA_1, BB_1 und CC_1 die drei paar Gegenpunkte des Tangentenvierseits. Wenn A_1 auf k_1 unendlich nahe an A hinanrückt, so wird der Kreis verschwindend klein, und es vereinigen sich noch zwei Gegenpunkte B, B_1 mit A; die übrigen beiden Gegenpunkte C, C_1 aber fallen dann mit resp. P und Q zusammen. Nun ist bei beliebiger Lage von A und A_1 auf k_1 (vgl. Fig. 82):

$$CA + AC_1 = CP' + Q'C_1 = CP'_1 + Q'_1C_1 = CA_1 + A_1C_1;$$

die Gleichung $CA + AC_1 = CA_1 + A_1C_1$ aber lässt sich schreiben:

$$(PA - PC) + (AQ + QC_1) = (CP_1 + P_1A_1) + (A_1Q_1 - C_1Q_1),$$

woraus folgt:

$$(PA + AQ) - (PC + CP_1) = (P_1A_1 + A_1Q_1) - (QC_1 + C_1Q_1).$$

In dieser Gleichung fallen, wenn A und A_1 auf k_1 unendlich nahe bei einander liegen, die Streckensummen $PC + CP_1$ und $QC_1 + C_1Q_1$ mit den resp. Bogenelementen $\widehat{PP_1}$ und $\widehat{QQ_1}$ zusammen; und wenn von beiden Seiten der Gleichung noch der Bogen P_1Q subtrahirt wird, so ergiebt sich:

$$(1)\quad PA + AQ - \widehat{PQ} = P_1A_1 + A_1Q_1 - \widehat{P_1Q_1},$$

und somit der Satz:

„Wenn auf einem Kegelschnitt k ein Bogen $\widehat{PQ}$ seine Lage „und Länge so ändert, dass sein Pol A einen mit k confocalen „und k einschliessenden Kegelschnitt k_1 beschreibt, so bleibt „die Differenz seiner Länge und der Summe $PA + AQ$ seiner „Schenkel constant.“

Die Gleichung (1) und dieser Satz gelten zunächst für unendlich nahe Punkte A, A_1, also für unendlich kleine Verschiebungen von A, dann aber auch für endliche Verschiebungen von A, weil diese aus unendlich kleinen zusammengesetzt werden können. Die Sätze (I.) von Chasles sind damit bewiesen.

Die beiden Gegenpunkte B, B_1 des Vierseits liegen auf einem mit k und k_1 confocalen Kegelschnitt k_2, welcher k_1 und dann auch k schneidet. Wir lassen nun das Vierseit so sich ändern, dass B_1 den Kegelschnitt k_2 beschreibt, B aber fest bleibt. Sei S der B zunächst liegende Schnittpunkt von k_2 und k. Wenn dann B_1 auf k_2 unendlich nahe an S hinanrückt, so vereinigen sich die beiden Tangenten B_1P_1 und B_1Q von k mit der Tangente des Punktes S, und ihre Berührungspunkte P_1 und Q fallen mit S zusammen; der dem Vierseit eingeschriebene Kreis aber geht über in einen Kreis, der den Kegelschnitt k in S, ausserdem aber die beiden Tangenten BP und BQ_1 von k berührt. Zugleich gehen die Punkte A, A_1 über in die Pole A', A'_1 der Kegelschnittbögen $\widehat{PS}$ und $\widehat{SQ}_1$, und da sie nach wie vor auf einem mit k confocalen Kegelschnitt liegen, so sind diese Bögen vergleichbar. Nach Gleichung (1) ist also:

$$\widehat{PS} - \widehat{SQ}_1 = PA' + A'S - (SA'_1 + A'_1Q_1).$$

Die Tangenten $A'S$ und SA'_1 aber sind gleich den resp. anderen Tangenten, die von A' und A'_1 an den eingeschriebenen Kreis gehen, und folglich wird:

$$A'S - SA'_1 = A'B - BA'_1;$$

die vorige Gleichung geht dadurch über in:

$$(2) \quad \widehat{PS} - \widehat{SQ}_1 = PB - BQ_1.$$

Auch die Chasles'schen Sätze (II.) sind damit bewiesen.

Die Gleichung (1) führt, wenn man einen $\widehat{PQ}$ und $\widehat{P_1Q_1}$ überdeckenden Bogen $\widehat{KL}$ addirt, ohne Weiteres zu folgendem Satze:

„Wird ein unendlich dünner Faden von gegebener Länge mit „den Endpunkten K, L an einem Kegelschnitte k befestigt und „durch eine bewegliche Spitze A so gespannt, dass er mit „seinen Enden an k sich anlegt und dazwischen mit zwei in A „sich schneidenden Tangenten von k zusammenfällt, so be„schreibt die Spitze A bei ihrer Bewegung einen mit k con„focalen Kegelschnittbogen.“

Der Satz gilt auch für den Fall, dass k eine Hyperbel ist und K, L auf verschiedenen Hyperbelzweigen liegen; doch unterdrücken wir den Beweis für diesen Fall. Wird ein geschlossener Faden um eine Ellipse herumgelegt und wiederum durch eine sich bewegende Spitze A gespannt gehalten, so beschreibt A eine mit jener confocale Ellipse.

Wenn auf einem Kegelschnittzweige k zwei an einander grenzende Bögen $\widehat{PQ}$ und $\widehat{QR}$ mit den resp. andern $\widehat{P_1 Q_1}$ und $\widehat{Q_1 R_1}$ vergleichbar sind, so ist auch ihre Bogensumme $\widehat{PR}$ mit $\widehat{P_1 R_1}$ vergleichbar. Denn die Pole der Bögen $\widehat{PP_1}$, $\widehat{QQ_1}$ und $\widehat{RR_1}$ liegen auf einem mit k confocalen Kegelschnitt, wie man durch stetige Aenderung der Punkte R und R_1 leicht beweist; die Bögen $\widehat{PR}$ und $\widehat{P_1 R_1}$ werden folglich in ihren Endpunkten von vier Tangenten eines Kreises berührt, und daraus folgt der Satz. Aus ihm ergiebt sich ohne Weiteres seine Verallgemeinerung:

„Zwei Bögen $\widehat{PR}$ und $\widehat{P_1 R_1}$ eines Kegelschnittzweiges k sind „vergleichbar, wenn jeder von ihnen aus m Theilbögen besteht, „die mit je einem der m Theilbögen des anderen vergleichbar „sind.“

Wenn die m Theilbögen von $\widehat{PR}$ mit einander vergleichbar sind, so sind es auch die m Theilbögen von $\widehat{P_1 R_1}$; denn aus der Definition (I.) folgt sofort, dass zwei mit einem dritten vergleichbare Bögen auch mit einander vergleichbar sind. Daraus ergiebt sich:

„Werden zwei vergleichbare Bögen $\widehat{PR}$ und $\widehat{P_1 R_1}$ von k in je „m vergleichbare Bögen getheilt, so liegen die Pole dieser „$2m$ Theilbögen alle auf einem mit k confocalen Kegelschnitt „k_1. Die Tangenten ihrer End- und Theilpunkte bilden die „Seiten von zwei Polygonstücken, welche dem Kegelschnitt k_1 „eingeschrieben und den resp. Bögen $\widehat{PR}$ und $\widehat{P_1 R_1}$ umschrie- „ben sind. Die Differenz von $\widehat{PR}$ und $\widehat{P_1 R_1}$ ist nach (I.) „gleich der Differenz der Umfänge dieser umschriebenen Poly- „gonstücke.“

Für die Ellipse ergiebt sich hieraus:

„Wird eine Ellipse k in m vergleichbare Bögen getheilt, so „bilden die Tangenten der m Theilpunkte ein ihr umschriebenes „Polygon, dessen Eckpunkte auf einer bestimmten, mit k con-

„focalen Ellipse k_1 liegen. Jeder Punkt der Ellipse k_1 ist „Eckpunkt eines ihr eingeschriebenen $m$ecks, welches der Ellipse k so umschrieben ist, dass k durch die Berührungspunkte „der Seiten in m vergleichbare Bögen getheilt wird. Diese „$m$ecke haben alle den gleichen Umfang."

Chasles, dem wir auch diese Sätze verdanken, bemerkt noch, dass dieser Umfang ein Minimum resp. Maximum ist in Bezug auf andere $m$ecke, die der Ellipse k umschrieben resp. der Ellipse k_1 eingeschrieben sind.

Wenn zwei Tangenten eines Kegelschnittes k auf einem mit k confocalen Kegelschnitt k_1 sich schneiden, so bilden sie gleiche Winkel mit der Tangente von k_1 im Schnittpunkte (Seite 177); wir können sie daher als die beiden Richtungen eines an k_1 reflectirten Lichtstrahles auffassen. Daraus und aus dem Vorhergehenden folgt:

„Ein Lichtstrahl, der an der Innenseite einer Ellipse k_1 immer „auf's Neue reflectirt wird, berührt in allen seinen Lagen „einen mit k_1 confocalen Kegelschnitt k. Ist auch k eine Ellipse, und kehrt der Strahl nach m Reflexionen zu seiner „ersten Lage zurück, so giebt es unendlich viele $m$ecke, welche „der Ellipse k um- und zugleich der Ellipse k_1 eingeschrieben sind. Alle diese $m$ecke haben gleichen Umfang."

Fünfzehnter Vortrag.

Normalen und Krümmungskreise der Kegelschnitte.

In der Ebene eines Kegelschnittes k können wir je zwei Strahlen g, g_1 einander zuordnen, die sich rechtwinklig schneiden und in Bezug auf k conjugirt sind. Zu einem beliebigen Strahle g der Ebene giebt es i. A. nur einen conjugirten normalen Strahl g_1, nämlich das Loth, das aus dem Pole von g auf g gefällt werden kann. Nur die Axen des Kegelschnittes k und die unendlich ferne Gerade der Ebene machen eine Ausnahme; denn alle zu einer Axe normalen Strahlen sind ihr conjugirt, und die unendlich ferne Gerade ist zu allen Durchmessern von k conjugirt und normal.

Den Schnittpunkt von zwei conjugirten normalen Strahlen g, g_1 nennen wir ihren „Fusspunkt". Ein beliebiger Strahl g der Ebene hat nur einen seiner Punkte zum Fusspunkt; die unendlich ferne Gerade aber und jede Axe des Kegelschnitts k hat alle ihre Punkte zu Fusspunkten. Ist k ein Kreis, so ist von je zwei conjugirten normalen Strahlen einer ein Durchmesser. Wir wollen hinfort annehmen, die Curve k sei kein Kreis; dann gelten die folgenden, früher bewiesenen Sätze (vgl. Seite 177):

„Die conjugirten normalen Strahlen g, g_1 sind durch die beiden „Brennpunkte des Kegelschnittes k harmonisch getrennt und „bezüglich aller mit k confocalen Kegelschnitte conjugirt. Ihre „Zuordnung bleibt dieselbe, wenn k durch einen dieser con- „focalen Kegelschnitte ersetzt wird."

Ein beliebiger Punkt P der Ebene ist Fusspunkt von zwei conjugirten Strahlen g, g_1, die sich in ihm rechwinklig schneiden. Die beiden Nebenwinkel, deren Schenkel den Punkt P mit den Brennpunkten von k verbinden, werden durch g und g_1 gehälftet. Ist P ein Punkt des Kegelschnitts k, so fallen die beiden Strahlen g, g_1 mit seiner Tangente und seiner Normale zusammen; liegt P ausserhalb k, so hälften g und g_1 die Winkel zwischen den beiden Tangenten, die durch P an k gehen; liegt P innerhalb oder ausserhalb der Curve k, so sind g, g_1 die Axen der Involution conjugirter Strahlen, deren Mittelpunkt P ist. Jeder Brennpunkt von k ist Fusspunkt aller seiner Strahlen, weil je zwei conjugirte Strahlen des Brennpunktes sich rechtwinklig schneiden.

Dreht sich von zwei conjugirten normalen Strahlen g, g_1 der eine um seinen Schnittpunkt mit einer Axe a von k, so dreht sich auch der andere um seinen Schnittpunkt mit a; der Fusspunkt von g und g_1 aber beschreibt einen Kreis, der die beiden Brennpunkte des Kegelschnittes k harmonisch trennt oder durch sie geht, jenachdem a die Haupt- oder die Nebenaxe von k ist (Seite 166). Wenn sich der eine Strahl g parallel verschiebt, so beschreibt auch der andere g_1 einen Parallelstrahlenbüschel; der Fusspunkt von g und g_1 aber beschreibt i. A. eine gleichseitige Hyperbel, welche durch die Brennpunkte von k geht und deren Asymptoten zu g und g_1 parallel sind (vgl. Seite 165 u.). Die Hyperbel zerfällt, wenn k eine Parabel ist, in eine eigentliche und die unendlich ferne Gerade (Seite 167).

Die Zuordnung der Strahlen g, g_1 ist involutorisch und eine „Verwandtschaft zweiten Grades" in dem Strahlenfelde der Ebene. Denn schon früher (Seite 178) ergab sich:

„Wenn von den conjugirten normalen Strahlen g, g_1 der eine „einen Büschel P erster Ordnung beschreibt, so umhüllt der „andere i. A. eine Parabel π. Diese Parabel berührt die Axen „des Kegelschnittes k und die Polare des Punktes P nach k; „ihre Leitlinie ist der durch P gehende Durchmesser von k. „Die Fusspunkte der Strahlen von P und der Tangenten von „π liegen auf einer Curve dritter Ordnung, einer Strophoide, „die sich selbst in P rechtwinklig schneidet und durch die „Brennpunkte von k geht."

Diese Strophoide ist die Fusspunktcurve der Parabel π für den Punkt P ihrer Leitlinie; sie geht durch den unendlich fernen Punkt der Leitlinie und ist zu einer gleichseitigen Hyperbel invers, die durch P geht und in Bezug auf einen um P beschriebenen Kreis die Polare von π ist (vgl. Nr. 78 und 88 des Anhangs). Wenn ein Punkt des Kegelschnittes k auf der Strophoide liegt, so geht entweder seine Tangente oder seine Normale durch P, und zugleich berührt seine Normale resp. Tangente die Parabel π.

„Die Normalen solcher Punkte des Kegelschnittes k, deren „Tangenten durch P gehen, berühren die Parabel π. Die ge„meinschaftlichen Tangenten von k und π berühren den Kegel„schnitt k in den Punkten, deren Normalen durch P gehen. „Durch den beliebigen Punkt P gehen deshalb höchstens vier „Normalen von k."

Wenn nämlich der Kegelschnitt k den einen von zwei conjugirten normalen Strahlen berührt, so ist er in dem Berührungspunkte zu dem andern normal. Von den durch P gehenden Normalen von k ist eine ein Durchmesser, wenn k eine Parabel ist; ihr Fusspunkt ist der unendlich ferne Parabelpunkt. An eine Parabel gehen deshalb durch einen beliebigen Punkt höchstens drei eigentliche Normalen.

„Die Normalen des beliebigen Kegelschnittes k bilden i. A. „einen Strahlenbüschel vierter Ordnung, der die Axen von k und „die unendlich ferne Gerade zu Doppelstrahlen hat und durch „projective Curven zweiter Ordnung erzeugt wird; sie bilden

„einen Strahlenbüschel dritter Ordnung, wenn k eine Para-
„bel ist.“

Wenn sich nämlich an k eine bewegliche Tangente hinwälzt, so beschreiben ihre Pole in Bezug auf irgend zwei mit k confocale Kegelschnitte zwei projective Curven zweiter Ordnung, welche die Normalen von k erzeugen. Diese beiden Curven haben im Falle der Parabel den unendlich fernen Parabelpunkt entsprechend gemein und erzeugen dann einen Büschel dritter Ordnung von Normalen.

Die von den Normalen eingehüllte Curve heisst die „Evolute“ des Kegelschnitts k; sie ist i. A. von der vierten, im Falle der Parabel aber von der dritten Klasse. In den Punkten der Evolute schneiden sich je zwei consecutive Normalen von k. Eine beliebige Normale n von k enthält den Mittelpunkt jedes Kreises, der den Kegelschnitt in dem Fusspunkte Q von n berührt (Fig. 83).

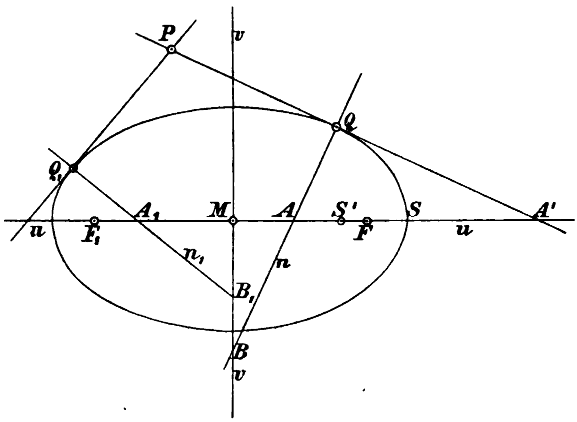


Fig. 83.

Wenn aber dieser Mittelpunkt zugleich auf der zunächst benachbarten Normale liegt, so geht der berührende Kreis auch durch deren Fusspunkt; er „osculirt“ den Kegelschnitt k im Punkte Q, indem er ihn in Q berührt und zugleich schneidet, und ist der „Krümmungskreis“ des Punktes; sein Radius ist der „Krümmungsradius“ und sein Mittelpunkt das „Krümmungscentrum“ des Punktes Q. Die Evolute ist demnach der Ort der Krümmungscentren des Kegelschnitts k; sie hat die Axen von k zu Symmetrie-Axen.

Die Hauptaxe einer Ellipse oder Hyperbel möge die Tangente und die Normale eines Punktes Q der Curve in A' und A schneiden (Fig. 83). Dann sind die beiden Brennpunkte F, F_1 harmonisch durch A' und A getrennt, und es ist:

$$MA \,.\, MA' = MF^2 = c^2,$$

wenn M den Mittelpunkt und c die Excentricität der Curve bezeichnet. Nähert sich der Curvenpunkt Q unbegrenzt einem Scheitelpunkte S der Hauptaxe, so fällt auch A' mit S zusammen, und A vereinigt sich mit dem Krümmungscentrum S' von S. Wir setzen $MS = a$ und erhalten:

$$MS' = \frac{c^2}{a} \text{ und } S'S = a - \frac{c^2}{a} = \pm \frac{b^2}{a},$$

wegen $a^2 - c^2 = \pm b^2$ (Seite 171 und 174). Der Krümmungsradius $S'S$ für die Scheitelpunkte S der Hauptaxe ist also gleich $\pm \frac{b^2}{a}$; das negative Vorzeichen gilt für die Hyperbel und deutet an, dass im Falle der Hyperbel die Strecken $S'S$ und $MS = a$ entgegengesetzten Sinn haben. Im Falle der Ellipse ist $\frac{a^2}{b}$ der Krümmungsradius für die Scheitelpunkte der Nebenaxe, wie analog bewiesen werden kann.

„Zwei beliebige Normalen einer Ellipse oder Hyperbel k, „die Verbindungslinie ihrer beiden Fusspunkte Q, Q_1 und die „Axen u, v von k berühren eine Parabel π."

Diese entspricht dem Schnittpunkte P der Tangenten von Q und Q_1 (Seite 189). Wenn die beiden Normalen n, n_1 von der Hauptaxe u in A, A_1 und von der Nebenaxe v in B, B_1 geschnitten werden (Fig. 83), so sind die Punktreihen:

$$n\,(ABQ) \;\overline{\wedge}\; n_1\,(A_1B_1Q_1)$$

projectiv ähnlich und erzeugen die Tangenten der Parabel π. Hieraus ergiebt sich:

$$\frac{AQ}{BQ} = \frac{A_1Q_1}{B_1Q_1} = \text{Const.} = \pm \frac{b^2}{a^2};$$

denn wenn der eine Curvenpunkt Q mit einem Scheitelpunkte S der Hauptaxe zusammenfällt, so wird dieses constante Verhältniss zu:

$$\frac{S'S}{MS} = \pm \frac{b^2}{a^2} \text{ wegen } S'S = \pm \frac{b^2}{a} \text{ und } MS = a.$$

Auch hier gilt das obere Vorzeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel.

Die beiden Tangenten des Kegelschnitts k fallen zusammen, wenn ihr Schnittpunkt P mit einem Punkte von k zusammenfällt; zugleich vereinigen sich die beiden Normalen n, n_1 mit der Normale g von P und ihr Schnittpunkt wird das Krümmungscentrum von P und fällt mit dem Punkte P' zusammen, in welchem die Normale g die zu P gehörige Parabel π tangirt. Also:

„Wenn der Punkt P auf dem Kegelschnitt k liegt, so berührt „seine Normale die zugehörige Parabel π in dem Krümmungs- „centrum von P."

Dieses Krümmungscentrum P' ist hiernach leicht zu construiren. Die beiden Axen u, v von k bilden nämlich mit der Normale g und der Tangente g_1 des Punktes P ein Tangentenvierseit der Parabel π (Fig. 84), und die Diagonalen des Vierseits

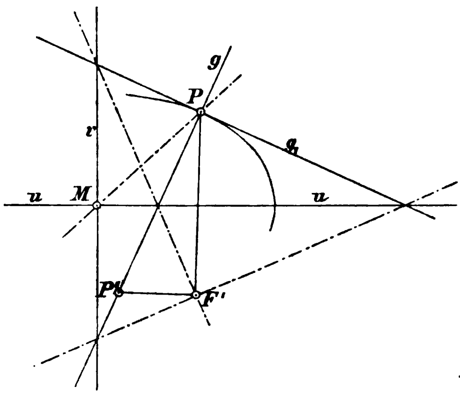


Fig. 84.

bilden daher ein Poldreieck von π (Seite 103). Nun ist aber die Diagonale PM die Leitlinie von π (Seite 189); die beiden übrigen Diagonalen schneiden sich deshalb in dem Brennpunkte F' der Parabel. Die in F' auf der Geraden $F'P$ errichtete Senkrechte trifft die Normale g in dem Krümmungscentrum P' von P (Steiner); denn auf der Parabeltangente g begrenzen der Berührungspunkt P' und die Leitlinie PM einen Abschnitt $P'P$, der aus dem Brennpunkte F' der Parabel durch einen rechten Winkel projicirt wird (Seite 168).

Ist k eine Parabel, so läuft deren Axe u zu der Leitlinie PM der Parabel π parallel und ist folglich die Scheiteltangente von π. In dem Rechteck mit den Seiten g, g_1 und der Diagonale u, dessen Mittelpunkt der Brennpunkt von k ist, liegt deshalb dem Eckpunkte P der Brennpunkt F' von π gegenüber (Seite 172). Das Krümmungscentrum P' von P aber liegt wieder so auf der Normale g von k, dass der Winkel $PF'P'$ ein rechter ist.

Eine sehr einfache Construction der Krümmungskreise von Kegelschnitten ergiebt sich aus dem Satze (Seite 158):

„Wenn eine Curve zweiter Ordnung einem Kreisviereck um-„schrieben ist, so bildet jede ihrer beiden Axen mit zwei be-„liebigen Gegenseiten des Vierecks gleiche Winkel."

Legen wir zunächst durch irgend zwei Punkte P, Q eines Kegelschnitts k Kreise, die mit k noch je zwei andere Punkte R, S gemein haben, so bilden dem Satze zufolge die Sehnen RS gleichschenklige Dreiecke mit PQ und einer beliebigen Axe u von k, sind also parallel. Zwei nicht parallele Secanten PQ, RS, die mit der Axe u gleiche Winkel bilden, haben demnach mit dem Kegelschnitt k vier Punkte eines Kreises gemein. Das gilt auch dann noch, wenn P, Q zwei consecutive Curvenpunkte sind, wenn also der Kreis den Kegelschnitt in P berührt. Eine durch P gelegte Secante, die mit der Axe u dieselben Winkel bildet wie die Tangente von P, schneidet deshalb den Kegelschnitt k in einem Punkte R, der auf dem Krümmungskreise von P liegt. Der Krümmungskreis geht durch R und berührt in P die Tangente von k; er ist dadurch völlig bestimmt. — Ist P ein Scheitelpunkt von k, so fällt R mit ihm zusammen. Der Kegelschnitt wird von den Krümmungskreisen seiner Scheitelpunkte „vierpunktig" berührt (hyperosculirt).

„In jedem Punkte P einer Ellipse schneiden sich die „Krümmungskreise von drei anderen Punkten A, B, C der „Curve, die mit P auf einem Kreise liegen (Steiner). Das Drei-„eck ABC hat den Mittelpunkt der Ellipse zum Schwerpunkt" (Joachimsthal).

Nämlich ein beliebiger Punkt der Ellipse ist Eckpunkt eines eingeschriebenen Dreiecks ABC, dessen Seiten mit den Tangenten der gegenüber liegenden Eckpunkte parallel laufen. Die den Seiten conjugirten Durchmesser der Ellipse sind Mittellinien des Dreiecks (Seite 110) und schneiden sich in seinem Schwerpunkt, der folglich mit dem Mittelpunkte der Ellipse zusammenfällt. Sei nun P der vierte Schnittpunkt der Ellipse mit dem Kreise, der dem Dreieck ABC umschrieben ist; dann bildet die Gerade AP

mit der Ellipsenaxe u dieselben Winkel, wie die Seite BC und die Tangente von A, und der Krümmungskreis von A, ebenso aber der von B oder C, geht deshalb durch P. Der Punkt P aber fällt mit einem beliebigen Punkte der Ellipse dreimal zusammen, wenn der Eckpunkt A die Curve einmal beschreibt. — Diesen Beweis des Satzes verdanken wir Joachimsthal. Die Dreiecke ABC sind, beiläufig bemerkt, die grössten, die der Ellipse eingeschrieben werden können.

Ueber die Krümmung von Kegelschnitten giebt von Staudt in seinen „Beiträgen zur Geometrie der Lage" Seite 280 und 386 eine Reihe merkwürdiger Sätze. Er beweist u. a., dass die Krümmungsradien von zwei beliebigen Punkten eines Kegelschnittes sich verhalten wie die dritten Potenzen der Abstände, die diese Punkte vom Schnittpunkte ihrer Tangenten haben. Ich muss mich hier mit dem Hinweis auf die Staudt'schen Sätze begnügen.

Wir kehren noch einmal zu der Parabel π zurück, deren Tangenten zu je einem Strahle des Punktes P normal und conjugirt sind bezüglich des Kegelschnittes k. Wenn die beiden Curven k, π zwei consecutive Tangenten gemein haben, so berühren sie sich in deren Schnittpunkt; zugleich gehen durch P zwei consecutive Normalen von k, und P ist ein Punkt der Evolute von k. Die Parabel π nun beschreibt eine Parabelschaar, wenn der Punkt P eine Gerade l beschreibt; denn sie ändert sich so, dass sie beständig vier Gerade berührt, nämlich die unendlich ferne Gerade, den zu l normalen conjugirten Strahl und die Axen von k. Wenn aber k eine Parabel ist, so berührt π drei Gerade und zwar die unendlich ferne in dem Schnittpunkte mit der Scheiteltangente von k. Die Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten von k und π beschreiben, wie im Anhange Nr. 213 bewiesen wird, eine Curve dritter Ordnung, die mit k höchstens sechs Punkte gemein hat. Die Parabelschaar enthält demnach höchstens sechs Parabeln, die den Kegelschnitt k berühren, und die Gerade l hat mit der Evolute von k höchstens sechs Punkte gemein. Falls k eine Parabel ist, zerfällt die Curve dritter Ordnung in die unendlich ferne Gerade und eine Curve zweiter Ordnung, und in diesem Falle hat die Gerade l mit der Evolute von k höchstens vier Punkte gemein. Also:

„Die Evolute einer Ellipse oder Hyperbel ist von der sechsten „Ordnung und vierten Klasse; die Evolute einer Parabel ist von „der vierten Ordnung und dritten Klasse."

Die Evolute eines Kegelschnitts k liegt symmetrisch in Bezug auf jede Axe von k; sie hat die Axen von k und die unendlich ferne Gerade zu Doppeltangenten (Seite 189) und die Krümmungscentren der Scheitelpunkte von k zu Rückkehrpunkten (vergl. Seite 193).

Sechzehnter Vortrag.

Concentrische, ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen oder Hyperbeln. Congruente homothetische Parabeln.

Eine Ellipse oder Hyperbel ist durch die Involution ihrer conjugirten Durchmesser nicht völlig bestimmt; wir können von ihr noch entweder einen Punkt P oder eine Tangente t beliebig in der Ebene annehmen. Um sie zu construiren, bestimmen wir, wenn P gegeben ist, auf dem Durchmesser MP den Punkt P_1, der vom Mittelpunkte M denselben Abstand hat wie P, und ziehen durch P und P_1 zu je zwei conjugirten Durchmessern parallele Gerade; dann schneiden sich diese auf der zu construirenden Curve (Seite 113). Ist eine Tangente t der Curve gegeben, so ziehen wir die zu t parallele Tangente t_1 in demselben Abstande vom Mittelpunkte M wie t, und bringen t und t_1 mit je zwei conjugirten Durchmessern zum Schnitt; die Verbindungslinien der zwei paar Schnittpunkte berühren dann die gesuchte Curve (Seite 112). Hieraus ergiebt sich:

„Eine beliebige Involution M nicht paralleler Strahlen besteht „aus den conjugirten Durchmessern von unendlich vielen El„lipsen oder Hyperbeln, die die ganze Ebene überdecken. Die „Punkte der Ebene liegen auf je einer, und ihre Geraden be„rühren je eine dieser concentrischen Curven zweiter Ordnung. „Die beiden Doppelstrahlen der Involution sind die Asymptoten „der Curven, und in ihren unendlich fernen Punkten berühren „die Curven sich doppelt. Die Curven haben ihre Axen ge-

„mein; sie sind Ellipsen oder Hyperbeln, jenachdem ihre Durch-
„messer-Involution M elliptisch oder hyperbolisch ist.“

Wir nennen diese concentrischen Ellipsen oder Hyperbeln „homothetisch“ und bezeichnen ihre Gesammtheit als einen „Büschel concentrischer homothetischer Kegelschnitte.“ Der Büschel ist durch eine beliebige seiner Curven bestimmt. In Bezug auf seine Kegelschnitte ist einer beliebigen Geraden g der Durchmesser u conjugirt, dessen conjugirter zu g parallel ist, und dieser Durchmesser hälftet jede auf g liegende oder zu g parallele Sehne der homothetischen Kegelschnitte. Also:

„Die Mittelpunkte paralleler Sehnen der concentrischen homo-
„thetischen Kegelschnitte liegen alle auf einem Durchmesser.
„Eine beliebige Gerade g der Ebene trifft die Kegelschnitte in
„den Punktepaaren einer symmetrischen Involution; sie schneidet
„den ihr conjugirten Durchmesser in dem Symmetrie-Centrum
„der Involution und berührt einen der homothetischen Kegel-
„schnitte in diesem Centrum.“

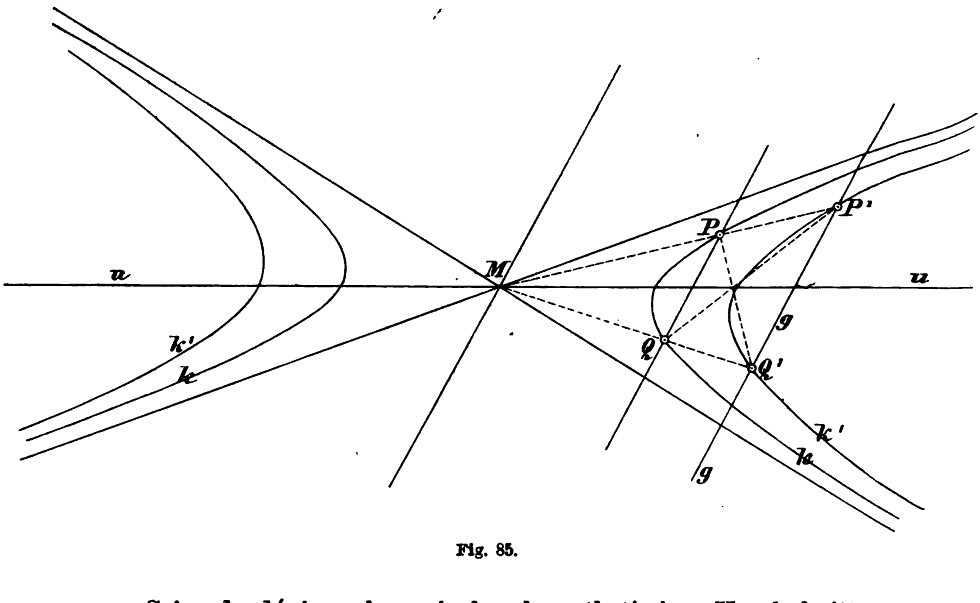


Fig. 85.

Seien k, k' irgend zwei der homothetischen Kegelschnitte, P, Q zwei beliebige Punkte von k und P', Q' die Endpunkte einer zu PQ parallelen Sehne von k'. Dann schneiden sich PP'

und QQ', ebenso aber PQ' und QP' auf dem zu PQ und $P'Q'$ conjugirten Durchmesser u, der diese parallelen Sehnen hälftet. Wenn nun PP' durch den Mittelpunkt M der beiden Kegelschnitte geht (Fig. 85), so schneiden sich PP' und QQ' in M, die Dreiecke MPQ und $MP'Q'$ sind ähnlich, und es ist:

$$\frac{MP'}{MP} = \frac{MQ'}{MQ} = \text{Const.}$$

Die auf einander liegenden Halbmesser MQ' und MQ der beiden Curven stehen also in constantem Verhältniss zu einander, und wir erhalten zu einer Ellipse oder Hyperbel eine concentrische homothetische, wenn wir alle ihre Halbmesser in einem bestimmten Verhältnisse vergrössern oder verkleinern. Kurz:

„Concentrische homothetische Kegelschnitte sind ähnlich und „ähnlich liegend, ihr Mittelpunkt ist der Aehnlichkeitspunkt.“

Für homothetische Hyperbeln gilt jedoch der Satz nur dann, wenn sie in demselben Asymptotenwinkel liegen.

„Die Polaren eines Punktes P bezüglich der homothetischen „Kegelschnitte sind parallel;“

denn sie sind zu dem Durchmesser MP conjugirt. Die Pole einer beliebigen Geraden PQ liegen auf dem ihr conjugirten Durchmesser. Die Polaren von zwei beliebigen Punkten P, Q bilden also zwei perspective Parallelstrahlenbüschel, deren homologe Strahlen sich auf einem Durchmesser schneiden.

Eine beliebige Gerade g der Ebene ist zu einem der homothetischen Kegelschnitte normal, und zwar in ihrem Schnittpunkte mit dem Durchmesser, der die zu g normalen Sehnen hälftet. Wir nennen diesen Punkt den „Fusspunkt“ der Geraden g; in ihm schneidet g den Durchmesser, dessen conjugirter zu g normal ist. Nur die Axen der homothetischen Kegelschnitte und die unendlich ferne Gerade haben mehr als einen Fusspunkt; jeder ihrer Punkte kann als ihr Fusspunkt aufgefasst werden. Die zu einer Axe parallelen Geraden haben ihren unendlich fernen Punkt zum Fusspunkt.

Wenn sich die Gerade g um einen Punkt S dreht, so beschreiben die beiden conjugirten Durchmesser v, v_1, von denen der eine v zu g normal ist, zwei zum Büschel S projective Strahlenbüschel M, und der Fusspunkt gv_1 von g beschreibt eine Curve zweiter Ordnung. Es ergiebt sich:

„Die Fusspunkte der Normalen, die durch einen Punkt S an

„die homothetischen Kegelschnitte gezogen werden können, „liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel. Diese geht durch S, „durch den Mittelpunkt M der Kegelschnitte und durch die „unendlich fernen Punkte ihrer beiden Axen. Die Asymptoten „der Hyperbel sind also zu den Axen der homothetischen Kegel„schnitte parallel.“

Wenn S auf einer dieser Axen liegt, so zerfällt die Hyperbel in die Axe und eine zu ihr normale Gerade.

Die gleichseitige Hyperbel schneidet einen beliebigen der homothetischen Kegelschnitte in mindestens zwei und höchstens vier Punkten, denn sie liegt theils innerhalb, theils ausserhalb des Kegelschnittes. Von einer Ellipse oder Hyperbel k gehen demnach durch einen beliebigen Punkt S mindestens zwei und höchstens vier Normalen (vgl. Seite 189). Wenn zwei dieser Normalen zusammenfallen, so wird der Kegelschnitt k in ihrem Fusspunkte P von der zu S gehörigen gleichseitigen Hyperbel berührt, S aber fällt als Schnittpunkt consecutiver Normalen mit dem Krümmungscentrum P' von P zusammen und liegt auf der Evolute von k. Daraus ergiebt sich mit Hülfe des Pascal'schen Satzes eine einfache Construction des Krümmungscentrums P'. In dem Vierseit uvg_1g (Fig. 84), das die Axen des

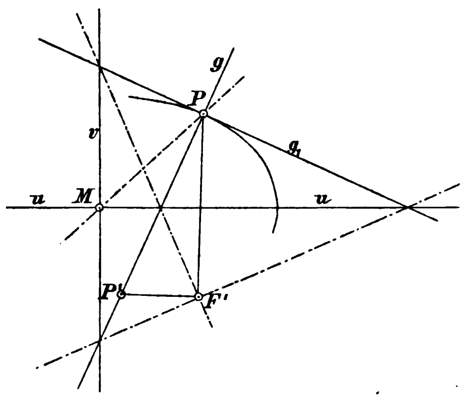


Fig. 84.

Kegelschnitts k mit der Tangente und der Normale des Punktes P bilden, ziehe man die beiden von PM verschiedenen Diagonalen; dann schneiden sich auf diesen die zwei paar Geraden, die durch P und P' parallel zu den Axen u, v gelegt werden können.

Wenn der Punkt S eine Gerade l durchläuft, so beschreibt die zugehörige gleichseitige Hyperbel einen Kegelschnittbüschel, indem sie beständig durch den Fusspunkt von l, durch den Mittelpunkt M und durch die unendlich fernen Punkte der Axen von k geht. Die Verbindungslinien ihrer Schnittpunkte mit k umhüllen dabei eine Curve dritter Classe (Anhang Nr. 213), die mit k höchstens sechs Tangenten gemein hat. Der Hyperbelbüschel enthält demnach höchstens sechs Hyperbeln, die den Kegelschnitt k berühren, und die Gerade l hat folglich mit der Evolute von k höchstens sechs Punkte gemein, wie schon früher (Seite 194) sich ergab.

Bezüglich concentrischer homothetischer Ellipsen oder Hyperbeln hat jeder ihrer Durchmesser einen und denselben unendlich fernen Pol, der auf dem conjugirten Durchmesser liegt. Wir wollen nun Parabeln mit derselben Axe als „homothetisch“ bezeichnen, wenn sie jedem ihrer Durchmesser einen und denselben unendlich fernen Punkt als Pol zuordnen. Eine beliebige Parabel bestimmt dann einen Büschel coaxialer homothetischer Parabeln; die Punkte der Ebene liegen auf je einer und ihre Geraden berühren je eine dieser Parabeln. Eine beliebige Gerade g ist einem Durchmesser u conjugirt und schneidet die homothetischen Parabeln in den Punktepaaren einer symmetrischen Involution, deren Symmetriecentrum auf u liegt und mit dem Berührungspunkte der einen, die Gerade tangirenden Parabel zusammenfällt. Alle auf g liegenden oder zu g parallelen Sehnen der Parabeln werden von dem Durchmesser u gehälftet.

Von zwei coaxialen homothetischen Parabeln k, k' seien P, P' zwei Punkte, die auf einem Durchmesser liegen, und PQ, $P'Q'$ zwei parallele Sehnen. Diese Sehnen werden von einem zu PP' parallelen Durchmesser gehälftet, folglich liegen auch ihre anderen Endpunkte Q, Q' auf einem Durchmesser, und $PQQ'P'$ ist ein Parallelogramm. Wenn die beiden Sehnen ihre Richtung ändern, so beschreiben Q und Q' die beiden Parabeln k, k', aber die Strecke QQ' bleibt gleich PP' und parallel zu PP'. Die Parabel k fällt deshalb mit k' zusammen, wenn sie in der Richtung der Durchmesser um die Strecke $QQ' = PP'$ verschoben wird. Also:

„Coaxiale homothetische Parabeln sind congruent; eine beliebige

„von ihnen kann mit jeder anderen durch Verschiebung in der „Richtung der Durchmesser zur Deckung gebracht werden."

Eine beliebige Gerade g der Ebene ist in ihrem „Fusspunkte" zu einer der homothetischen Parabeln normal; und zwar liegt der Fusspunkt wiederum auf dem Durchmesser, der die zu g normalen Sehnen der Parabeln hälftet. Hieraus ergiebt sich analog wie vorhin (Seite 197):

„Die Fusspunkte der Normalen, die aus einem Punkte S an „die homothetischen Parabeln gezogen werden können, liegen „mit S auf einer gleichseitigen Hyperbel, welche die Axe der „Parabeln zur Asymptote hat. An eine Parabel gehen demnach „durch einen Punkt höchstens drei eigentliche Normalen."

Wir begnügen uns mit diesen Sätzen über die homothetischen Parabeln.

Werden concentrische homothetische Hyperbeln oder Ellipsen aus irgend einem Punkte auf eine beliebige Ebene η' projicirt, so bilden die Projectionen einen Büschel sich doppelt berührender Kegelschnitte. Die beiden Berührungspunkte liegen auf einer Geraden m', die bezüglich aller Kegelschnitte des Büschels einen und denselben Pol M' hat; und zwar ist M' die Projection des Centrums M der homothetischen Hyperbeln oder Ellipsen, und m' die der unendlich fernen Geraden. Jeder Punkt von m' hat bezüglich der sich doppelt berührenden Kegelschnitte eine und nur eine durch M' gehende Polare. Einer beliebigen Geraden g' der Ebene η' ist deshalb ein Strahl von M' conjugirt, der die Pole von g' bezüglich der sich doppelt berührenden Kegelschnitte enthält, und die Polaren eines beliebigen Punktes von η' gehen alle durch einen Punkt von m'. Die Polaren von irgend zwei Punkten P', Q' der Ebene bezüglich der sich doppelt berührenden Kegelschnitte bilden zwei perspective Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte in m' liegen und deren homologe Strahlen sich auf einer durch M' gehen Geraden schneiden.

Ein Büschel von Kegelschnitten, die sich doppelt berühren, ist bestimmt, wenn einer seiner Kegelschnitte und die Verbindungslinie m' der beiden Berührungspunkte beliebig gegeben sind. Ist m' eine Tangente des Kegelschnitts, so fallen die beiden Berührungspunkte zusammen, und die Kegelschnitte des Büschels berühren sich „vierpunktig" in dem Tangentialpunkte von m'.

Einen solchen Büschel von vierpunktig sich berührenden Kegelschnitten erhält man, wenn man coaxiale homothetische Parabeln central auf eine beliebige Ebene projicirt.

Siebenzehnter Vortrag.

Aufgaben zweiten Grades. Imaginäre Elemente.

240 Unsere Untersuchungen haben uns mehrfach zu Aufgaben geführt, die im Allgemeinen zwei Lösungen zulassen und nicht mit alleiniger Anwendung gerader Linien gelöst werden können, sondern die Benutzung eines Gebildes zweiter Ordnung, z. B. eines Kreises, erfordern. Hierher gehören u. A. die Aufgaben: „Die Punkte zu bestimmen, welche zwei auf einander liegende projective Punktreihen entsprechend gemein haben“, und: „Von einem involutorischen Elementargebilde die Doppelelemente zu bestimmen“. Alle solche Aufgaben lassen sich auf die folgende zurückführen:

„Zwei Punktreihen zweiter Ordnung k, k_1, die auf derselben „Curve liegen, sind projectiv auf einander bezogen; ihre Doppel„punkte, d. h. ihre entsprechend gemeinschaftlichen Punkte „sollen bestimmt werden.“

Seien A, B, C (Fig. 86) drei beliebige Punkte von k, und A_1, B_1, C_1 die ihnen entsprechenden Punkte von k_1. Projiciren wir dann aus A die Punktreihe k_1 und ebenso aus A_1 die Punktreihe k, so erhalten wir zwei projective Büschel $A(A_1 B_1 C_1)$ und $A_1(ABC)$, die den Strahl AA_1 entsprechend gemein haben. Die Schnittpunkte homologer Strahlen der Büschel liegen folglich auf einer Geraden u, und

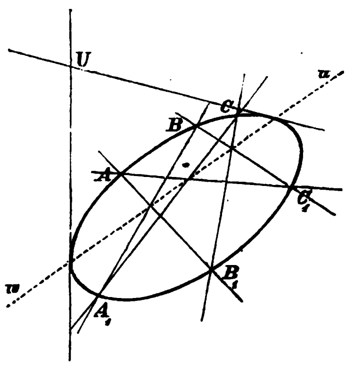


Fig. 86.

diese verbindet den Schnittpunkt der Strahlen AB_1 und A_1B mit dem Schnittpunkte von AC_1 und A_1C. Die Punkte aber, welche u mit der Curve zweiter Ordnung gemein hat, sind die gesuchten Doppelpunkte, denn die Punktreihen k, k_1 haben jeden dieser Doppelpunkte entsprechend gemein. Jenachdem also u die Curve schneidet, berührt oder gar nicht trifft, erhalten wir zwei Doppelpunkte, oder einen, oder gar keinen Doppelpunkt.

Nach dem Lehrsatz des Pascal liegt auf der Geraden u auch der Schnittpunkt der Geraden BC_1 und B_1C; denn auf u schneiden sich die drei paar Gegenseiten des der Curve eingeschriebenen Sechsecks $AB_1CA_1BC_1$. Zu derselben Geraden u gelangen wir also auch, wenn wir die projectiven Punktreihen k_1, k aus den resp. Punkten B, B_1 oder aus C, C_1 durch perspective Strahlenbüschel projiciren. Sind überhaupt P, Q irgend zwei Punkte von k und P_1, Q_1 die ihnen entsprechenden Punkte von k_1, so liegt der Schnittpunkt der Strahlen PQ_1 und P_1Q auf der Geraden u. Wenn drei Punkte von k nebst den entsprechenden Punkten von k_1 gegeben sind, so kann die Gerade u ohne Schwierigkeit construirt werden.

241 Liegen die Punktreihen k, k_1 involutorisch, bilden sie also eine Involution, so ist u die Involutionsaxe, und die Curve wird von ihr in den beiden Doppelpunkten geschnitten, wenn die Involution solche hat. In diesem Falle brauchen wir nur zwei Paare zugeordneter Punkte A, A_1 und B, B_1 zu kennen, um u zu construiren; denn den Punkten A, B, A_1, B_1 von k entsprechen dann die resp. Punkte A_1, B_1, A, B von k_1, und u geht durch die beiden Punkte, in denen die Geraden AB_1 und AB von den resp. Geraden A_1B und A_1B_1 geschnitten werden (vgl. Figg. 62 und 63 auf Seite 146). Der Pol von u, worin sich die Geraden AA_1 und BB_1 schneiden, ist das Involutionscentrum, und wenn aus ihm Tangenten an die Curve gezogen werden können, so berühren diese die Curve in den Doppelpunkten der Involution.

242 Auf die soeben gelöste Aufgabe lassen sich nun die verschiedenen Fälle der folgenden allgemeineren Aufgabe leicht zurückführen:

„Von zwei projectiven Elementargebilden, die in einander liegen, „die Doppelelemente zu bestimmen."

Sind die Elementargebilde zwei Kegel oder Regelschaaren, so schneiden wir sie durch eine beliebige Ebene in projectiven Punktreihen, die auf derselben Curve zweiter Ordnung liegen. Sind sie zwei Strahlenbüschel zweiter Ordnung, so liegen auch die von ihnen eingehüllten Punktreihen zweiter Ordnung in einander und sind projectiv; wir brauchen also nur die entsprechend gemeinsamen oder Doppelpunkte dieser Punktreihen zu bestimmen, um sofort die gesuchten beiden Strahlen, die Tangenten dieser Punkte, zu erhalten. Liegen zwei projective Strahlenbüschel erster Ordnung concentrisch in einer Ebene, so schneiden wir sie durch eine Curve zweiter Ordnung, die den Mittelpunkt der Büschel enthält, in projectiven Punktreihen k, k_1; die beiden Strahlen, welche die Büschel entsprechend gemein haben, gehen dann durch die beiden Punkte, welche k und k_1 entsprechend gemein haben. Sind die beiden projectiven Elementargebilde zwei Punktreihen v, v_1 (Fig. 87),

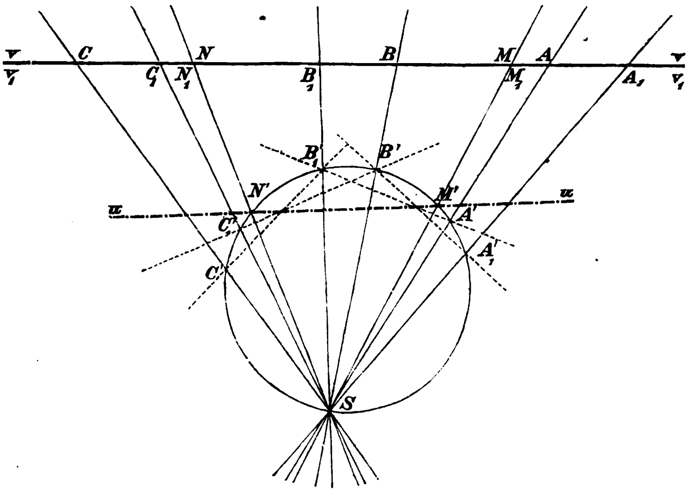


Fig. 87.

die in derselben Geraden liegen, so führen wir diesen Fall auf den eben erledigten zurück, indem wir die Punktreihen aus einem beliebigen Punkte S durch concentrische Strahlenbüschel projiciren. Wir legen also in der Ebene Sv durch S eine Curve zweiter Ordnung, z. B. einen Kreis, und projiciren irgend drei Punkte A, B, C von v und die ihnen entsprechenden Punkte A_1, B_1, C_1 von v_1 aus dem Punkte S auf diese Curve. Wir erhalten so die resp. Curvenpunkte A', B', C' und A'_1, B'_1, C'_1, und bestimmen sofort die Gerade u, auf welcher die Schnittpunkte von $A'B'_1$ und A'_1B', von $B'C'_1$ und B'_1C', sowie von $C'A'_1$ und C'_1A' liegen. Wird dann die Curve zweiter Ordnung von u in zwei Punkten M', N' geschnitten, so projiciren wir diese aus dem Punkte S auf die Gerade v, und erhalten so die beiden Doppelpunkte M, N der projectiven Punktreihen v, v_1 (Steiner). Hat die Curve zweiter Ordnung nur einen oder keinen Punkt mit u gemein, so erhalten wir nur einen oder keinen Doppelpunkt der Punktreihen.

Für die Büschel und die Kegel zweiter Ordnung lässt sich die allgemeine Aufgabe direkt, ohne Benutzung der Curven zweiter Ordnung lösen; für die einförmigen Grundgebilde können wir sie daher lösen mit Hülfe eines beliebigen Elementargebildes zweiter Ordnung. Die bequemste Lösung ist jedoch die soeben gegebene, weil sich Hülfskreise mittelst des Zirkels sofort construiren lassen.

243 Bekanntlich sind zahlreiche Fortschritte der Mathematik innig verknüpft mit dem Bestreben, durch Erweiterung vorhandener oder Einführung neuer Begriffe Ausnahmen von allgemeinen Sätzen und Regeln zu beseitigen und verschiedene Sätze unter einem Gesichtspunkte zu vereinigen. So wurde die Arithmetik durch die negativen, durch die irrationalen und endlich durch die imaginären Zahlen wesentlich bereichert, und ohne die letzteren würde der Fundamentalsatz der Algebra, dass eine Gleichung n^{ten} Grades n Wurzeln hat, mit allen seinen zahlreichen Anwendungen z. B. in der analytischen Geometrie, geradezu falsch sein. Ebenso erwies sich die Einführung der unendlich fernen Elemente in die neuere Geometrie als höchst fruchtbar.

Die Aufgaben zweiten Grades nun haben den ersten Anlass gegeben, auch in die synthetische Geometrie „imaginäre" Punkte, Gerade und Ebenen einzuführen; und zwar ist es eines der grossen Verdienste von Staudt's, die Theorie der imaginären Elemente rein geometrisch begründet und zu einem hohen Grade der Vollkommenheit gebracht zu haben. Es liegt aber in der Natur der Sache, dass diese Theorie in der synthetischen wie in der analytischen Geometrie auf die Anschaulichkeit verzichten muss; deshalb beschränke ich mich hier darauf, nur die Anfangsgründe der Lehre vom geometrisch Imaginären Ihnen vorzutragen.

244 Wir definiren die imaginären Elemente durch folgenden Satz,

welcher zugleich die Ergebnisse der vorhergehenden Untersuchung zusammenfasst:

„Zwei projective Elementargebilde, die in einander liegen, aber „nicht identisch sind, haben zwei reelle oder conjugirt imaginäre „Elemente gemein*). Diese beiden Doppelelemente können zu„sammenfallen.“

Wir nennen also die beiden entsprechend gemeinschaftlichen Elemente „imaginär“, so oft sie nicht reell vorhanden sind; in allen meinen früheren Vorträgen war nur von „reellen“ Elementen die Rede. Eine Involution hat hiernach allemal zwei reelle oder imaginäre Doppelelemente. Auch können wir sagen:

Eine Curve zweiter Ordnung hat mit jeder reellen Geraden ihrer Ebene zwei Punkte gemein;

An eine Curve zweiter Ordnung gehen durch jeden reellen Punkt ihrer Ebene zwei Tangenten;

und nur dann, wenn die verschiedenen, in diesem Doppelsatze zusammengefassten Fälle getrennt werden sollen, fügen wir hinzu:

diese beiden Punkte sind imaginär oder reell oder sie fallen zusammen, jenachdem die Gerade ganz

diese beiden Tangenten sind imaginär oder reell oder sie fallen zusammen, jenachdem der

*) Die analytische und überhaupt die rechnende Geometrie hat die imaginären Punkte, Geraden und Ebenen schon lange eingeführt, indem sie sich auf den Fundamentalsatz der Algebra stützt. Die Bestimmung jener Doppelelemente durch Rechnung führt in der That zu einer Gleichung zweiten Grades, deren Wurzeln jenen Elementen entsprechen; die beiden Doppelelemente aber sind reell oder imaginär, jenachdem die beiden Wurzeln der Gleichung reell oder imaginär sind. Für projective Punktreihen $ABCX \barwedge A_1B_1C_1X_1$ auf einer Geraden folgt diese Gleichung aus der Proportion (Seite 68):

$$\frac{AB}{CB} : \frac{AX}{CX} = \frac{A_1B_1}{C_1B_1} : \frac{A_1X_1}{C_1X_1},$$

wenn man die Abschnitte $AB, CB, \ldots, C_1X_1$ durch die Abscissen $a, b, c, \ldots, x_1$ ihrer Endpunkte $A, B, C, \ldots, X_1$ ausdrückt und hernach annimmt, dass die homologen Punkte X, X_1 zusammenfallen. Man erhält die Gleichung:

$$\frac{b-a}{b-c} : \frac{x-a}{x-c} = \frac{b_1-a_1}{b_1-c_1} : \frac{x_1-a_1}{x_1-c_1},$$

und aus ihr folgt, wenn $x_1 = x$ gesetzt wird, die quadratische Gleichung für die Abscissen der Doppelpunkte X. Jeder andere Fall von projectiven Elementargebilden, die in einander liegen, kann auf diesen zurückgeführt werden.

ausserhalb der Curve liegt oder die Curve schneidet oder sie berührt.

Punkt innerhalb oder ausserhalb oder auf der Curve liegt.

Wenn die Curve zweiter Ordnung und die Gerade vollständig gegeben sind, so wollen wir ihre beiden gemeinschaftlichen Punkte als bestimmt ansehen. Sind aber z. B. nur fünf Curvenpunkte A, B, C, D, E gegeben, so denken wir uns die Curve durch zwei projective Strahlenbüschel $A(CDE) \overline{\wedge} B(CDE)$ erzeugt; diese Büschel werden von der Geraden in projectiven Punktreihen geschnitten, die jene beiden Punkte entsprechend gemein haben. Die beiden Punkte können nach den obigen Regeln bestimmt werden, wenn irgend eine Curve zweiter Ordnung vollständig gegeben ist. Wir können auf diese Weise auch entscheiden, von welcher Art eine durch fünf Punkte bestimmte Curve zweiter Ordnung ist; denn:

„Eine Curve zweiter Ordnung ist eine Hyperbel, Ellipse oder „Parabel, jenachdem die beiden Punkte, die sie mit der un„endlich fernen Geraden gemein hat, reell oder imaginär sind „oder zusammenfallen.“

Auch die folgenden Aufgaben zweiten Grades können mittelst derselben Methode gelöst werden:

Von einer Curve zweiter Ordnung sind gegeben

vier Punkte und die Tangente von einem oder drei Punkte und die Tangenten von zwei derselben; die beiden Punkte sollen bestimmt werden, die sie mit einer beliebigen reellen Geraden ihrer Ebene gemein hat.

vier Tangenten und einer von ihren Berührungspunkten oder drei Tangenten und zwei ihrer Berührungspunkte; die beiden Tangenten sollen bestimmt werden, die durch einen beliebigen reellen Punkt ihrer Ebene gehen.

Sind die gemeinschaftlichen Punkte einer Geraden und einer Curve zweiter Ordnung, von welcher fünf Tangenten gegeben sind, zu bestimmen, so suchen wir zunächst die Berührungspunkte der Tangenten, und führen so diese Aufgabe auf die vorhin gelöste zurück.

245 Die beiden conjugirt imaginären Doppelelemente einer elliptischen Involution $AA_1 \,.\, BB_1 \ldots.$ werden von v. Staudt dadurch unterschieden, dass er mit dem Gebilde einen bestimmten in ihm enthaltenen Sinn ABA_1 oder A_1BA verbindet. Auch ohne hierauf näher einzugehen, können wir auf Grund des Vorhergehenden folgende Sätze und Definitionen aufstellen:

Ein imaginärer Punkt liegt allemal auf einer reellen Geraden; diese enthält auch den conjugirt imaginären Punkt.

Eine imaginäre Ebene geht allemal durch eine reelle Gerade; durch diese geht auch die conjugirt imaginäre Ebene.

Eine imaginäre Gerade „erster“ Art geht allemal durch einen reellen Punkt und liegt in einer reellen Ebene mit ihrer conjugirt imaginären Geraden; nämlich der Punkt und die Ebene sind die Träger der projectiven Büschel erster Ordnung, welche die beiden conjugirt imaginären Geraden entsprechend gemein haben.

Zwei projective Regelschaaren zweiter Ordnung, die in einander liegen, haben entweder zwei reelle Gerade, die auch zusammenfallen können, oder zwei conjugirt imaginäre Gerade „zweiter Art“ entsprechend gemein. Von den imaginären Geraden erster Art unterscheiden sich diese Geraden zweiter Art dadurch, dass sie von keiner reellen Ebene in einem reellen Punkte geschnitten und aus keinem reellen Punkte durch eine reelle Ebene projicirt werden können. Eine reelle Ebene nämlich schneidet die beiden projectiven Regelschaaren in zwei projectiven Punktreihen erster oder zweiter Ordnung, die in einander liegen und nur dann einen reellen Punkt entsprechend gemein haben, wenn die Regelschaaren eine durch ihn gehende reelle Gerade entsprechend gemein haben. Es giebt also eine Art von imaginären Punkten oder Ebenen, dagegen zwei Arten von imaginären Geraden.

246 Wenn wir von Punkten, Geraden und Ebenen schlechthin reden, so verstehen wir darunter wie früher reelle Elemente, falls nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird oder aus dem Zusammenhange sich ergiebt. Dieses gilt insbesondere auch von den folgenden Aufgaben zweiten Grades.

„In einer Ebene sind zwei einfache $n$ecke gegeben; es soll ein „drittes construirt werden, das dem einen der gegebenen ein„geschrieben, dem andern umschrieben ist.“ Oder, um bestimm„ter zu reden: „Ein $n$eck zu construiren, dessen Eckpunkte der „Reihe nach in n gegebenen Geraden u_1, u_2, u_3, ... u_n liegen, „und dessen Seiten der Reihe nach durch n gegebene Punkte „S_1, S_2, S_3, ..., S_n der Ebene gehen.“

Wir projiciren aus dem Punkte S_1 die Punktreihe u_1 auf die Gerade u_2, dann aus S_2 die Punktreihe u_2, d. h. die Projection von u_1, auf die Gerade u_3, ferner aus dem Punkte S_3 die Punktreihe u_3 auf u_4 u. s. w., und endlich aus S_n die Punktreihe u_n auf u_1. Wir erhalten so $n+1$ projective Punktreihen, von denen jede eine Projection der vorhergehenden ist, und von denen die erste und die letzte in einer und derselben Geraden u_1 liegen. Jeder Punkt nun, den die erste und die letzte Punktreihe entsprechend gemein haben, kann als erster Eckpunkt des gesuchten $n$ecks angenommen werden, und giebt sofort eine Lösung der Aufgabe. Im Allgemeinen sind also höchstens zwei $n$ecke möglich, die der Aufgabe genügen. Wenn in besonderen Fällen die beiden in u_1 liegenden projectiven Punktreihen mehr als zwei und folglich alle ihre Punkte entsprechend gemein haben, so hat die Aufgabe unendlich viele Lösungen. — Die Bedingung, dass die Geraden u_1, u_2, u_3, ... , u_n mit den Punkten S_1, S_2, S_3, ... , S_n in einer und derselben Ebene liegen sollen, ist übrigens nicht nothwendig; es genügt, wenn S_1 mit u_1 und u_2 in einer Ebene liegt, ebenso S_2 mit u_2 und u_3 u. s. w., sowie endlich S_n mit u_n und u_1. Die gegebenen beiden $n$ecke können also auch sogenannte windschiefe $n$ecke sein.

Hierher gehört auch die Aufgabe:

247 „Eine Gerade zu finden, die vier gegebene windschiefe Gerade „a, b, c, d schneidet.“

Wir beziehen die Ebenenbüschel a, b perspectiv auf die Punktreihe c, und schneiden sie durch d in projectiven Punktreihen. Durch jeden Doppelpunkt dieser projectiven Reihen geht eine Gerade, die als Schnittlinie homologer Ebenen der Büschel a, b mit den vier Geraden a, b, c, d incident ist. Liegen a, b, c, d in einer Regelschaar, so hat die Aufgabe unendlich viele Lösungen; im allgemeinen Fall hat sie deren zwei. Wir können die Aufgabe auch so aussprechen:

„Eine Regelfläche zweiter Ordnung ist durch drei Gerade a, b, c „ihrer einen Regelschaar gegeben; es sollen die Punkte bestimmt „werden, die sie mit einer beliebigen vierten Geraden d ge„mein hat.“

248 Eine der wichtigeren Aufgaben zweiten Grades ist die folgende:

„Zwei Involutionen liegen in einem und demselben Elementar„gebilde; es sollen zwei Elemente bestimmt werden, die in bei„den Involutionen einander zugeordnet sind.“

Liegen zunächst die beiden Involutionen auf derselben Curve zweiter Ordnung, sind etwa (Fig. 88) einerseits den Punkten α,

β der Curve die resp. Punkte α_1, β_1 zugeordnet, andererseits aber den Punkten A, B die resp. Punkte A_1, B_1, so suchen wir die beiden Involutionscentra U und V. Mit U liegen je zwei conjugirte Punkte der einen, und mit V je zwei solche der anderen Punktreihe in einer Geraden. Wird die Gerade UV von der Curve zweiter Ordnung in zwei Punkten X, X_1 geschnitten, so sind diese in beiden Involutionen einander zugeordnet. Berührt UV die Curve, so ist der Berührungspunkt ein gemeinsamer Doppelpunkt der beiden Involutionen. Liegt endlich UV

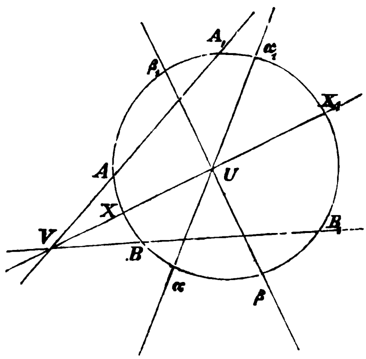


Fig. 88.

ganz ausserhalb der Curve, so giebt es keinen reellen Punkt, der in beiden Involutionen sich selbst oder einem anderen Punkte zugeordnet wäre. Dieser letzte Fall kann aber nur dann eintreten, wenn die Involutionen je zwei reelle Doppelpunkte haben, also beide hyperbolisch sind, weil nur dann beide Involutionscentra U, V ausserhalb der Curve liegen; und weil in diesem Falle die Polaren von U und V sich im Pole von UV **innerhalb** der Curve schneiden, so sind ausserdem die Doppelpunkte der einen Involution durch die der anderen getrennt.

Betrifft die Aufgabe zwei concentrische Strahleninvolutionen, so schneiden wir diese durch eine Curve zweiter Ordnung, die durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt der Büschel geht; und auf ähnliche Weise können wir jeden beliebigen Fall unserer allgemeinen Aufgabe auf den eben erledigten zurückführen. Das zuletzt gewonnene Resultat gilt deshalb nicht blos für Punktinvolutionen, die auf derselben Curve zweiter Ordnung liegen, sondern kann allgemein so ausgesprochen werden:

„Wenn zwei Involutionen auf einander liegen, so giebt es in „ihnen zwei Elemente, die sowohl in der einen als auch in der „anderen Involution einander zugeordnet sind; diese Elemente „sind nur dann (conjugirt) imaginär, wenn beide Involutionen „hyperbolisch, und die Doppelelemente der einen durch die der „anderen getrennt sind. Wenn die beiden zweifach einander

„zugeordneten Elemente sich vereinigen, so haben die Involu-
„tionen ein gemeinschaftliches Doppelelement."

Für den Fall zweier Strahleninvolutionen erster Ordnung, von denen die eine rechtwinklig ist, ergiebt sich insbesondere:

„In einer Strahleninvolution erster Ordnung giebt es allemal
„zwei einander zugeordnete reelle Strahlen, die auf einander
„senkrecht stehen; diese heissen die **Axen** der Involution."

249 Wir haben so aufs Neue bewiesen, dass eine Ellipse oder Hyperbel zwei zu einander senkrechte conjugirte Durchmesser, d. h. zwei Axen besitzt (vgl. Seite 115); denn ihre paarweise conjugirten Durchmesser bilden eine Involution. Schon früher (Seite 159, 160) lösten wir die hieran sich knüpfende Aufgabe zweiten Grades:

„Von einer Curve zweiter Ordnung sind zwei paar conjugirte
„Durchmesser gegeben; die Axen der Curve zu construiren."

Der Büschel conjugirter Durchmesser eines Kreises ist rechtwinklig. Er wird von der unendlich fernen Geraden der Ebene in einer Involution conjugirter Punkte geschnitten, die für alle Kreise der Ebene dieselbe bleibt. Die beiden imaginären Doppelpunkte dieser Involution sind sich selbst conjugirt bezüglich aller Kreise der Ebene und somit gemeinsame Punkte dieser Kreise; sie heissen „die unendlich fernen Kreispunkte" der Ebene. Zwei Gerade schneiden sich nur dann rechtwinklig, wenn sie bezüglich der beiden unendlich fernen Kreispunkte ihrer Ebene conjugirt sind.

250 Wir brauchen demnächst die Lösung der Aufgabe:

„In einer Strahleninvolution erster Ordnung sind zwei con-
„jugirte Strahlen so zu bestimmen, dass sie durch zwei gegebene
„Punkte M, N harmonisch getrennt sind."

Damit diese Aufgabe nicht unmöglich werde, setzen wir voraus, dass die Punkte M, N nicht mit dem Mittelpunkte S der Involution in einer Geraden liegen, und dass durch keinen von ihnen ein Doppelstrahl der Involution gehe. Projiciren wir dann die Punktinvolution, von welcher M und N die Doppelpunkte sind, aus dem Punkte S durch eine zweite Strahleninvolution, so haben wir die beiden Strahlen zu suchen, die in jeder der concentrischen Strahleninvolutionen einander zugeordnet sind. — Auch diese Aufgabe lässt sich auf andere Elementargebilde übertragen, und in verschiedene Formen kleiden. Statt der Strahleninvolution S könnte z. B. in der Geraden MN eine Punktinvolution gegeben sein. Liegt von den Punkten M, N der eine N unendlich fern, so lautet dann die Aufgabe:

„In einer Punktinvolution erster Ordnung sind zwei einander „zugeordnete Punkte zu bestimmen, die von einem gegebenen „Punkte M gleichen Abstand haben."

251 In einer Ebene ist ein Dreieck ABC und eine Strahleninvolution erster Ordnung F gegeben, von welcher kein Doppelstrahl durch einen Eckpunkt des Dreiecks geht. Es soll dem Dreieck eine Curve zweiter Ordnung so umschrieben werden, dass je zwei einander zugeordnete Strahlen der Involution F conjugirt sind hinsichtlich der Curve.

In einer Ebene ist ein Dreieck und eine Punktinvolution erster Ordnung gegeben, von welcher kein Doppelpunkt in einer Seite des Dreiecks liegt. Es soll dem Dreieck eine Curve zweiter Ordnung so eingeschrieben werden, dass je zwei einander zugeordnete Punkte der Involution conjugirt sind hinsichtlich der Curve.

Damit die Aufgabe möglich sei, darf der Mittelpunkt der Strahleninvolution F mit keinem Eckpunkte des Dreiecks ABC (Fig. 89) zusammenfallen. Wir dürfen daher annehmen, dass

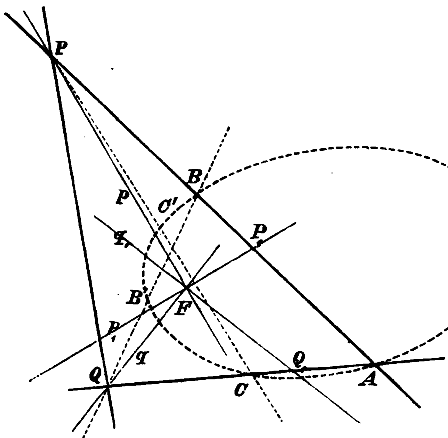


Fig. 89.

mindestens zwei Seiten des Dreiecks, etwa AB und AC, nicht durch F gehen. Auf jeder dieser Seiten AB, AC muss es einen Punkt geben, dessen Polare in Bezug auf die gesuchte Curve, falls diese existirt, durch F geht; und da der Punkt von seiner Polare durch die Curve harmonisch getrennt ist, andererseits aber je zwei einander zugeordnete Strahlen von F hinsichtlich der gesuchten Curve zweiter Ordnung conjugirt sind, so finden wir ihn wie folgt. Wir bestimmen in der Involution F zwei conjugirte Strahlen p, p_1 so, dass sie durch die Punkte A und B, zwei andere q, q_1 so, dass sie durch die Punkte A und C harmonisch getrennt sind (Fig. 89). Sind diese Strahlen imaginär, so giebt es keine reelle Curve zweiter Ordnung, die den Bedingungen genügt; doch tritt dieser Fall nur dann ein, wenn die Involution F zwei reelle Doppelstrahlen hat, die durch A und B oder auch durch A und C von einander getrennt sind (Seite 209). Möge AB von den Strahlen p, p_1 in den resp. Punkten P, P_1 geschnitten werden, und AC von q und q_1 in den resp. Punkten Q und Q_1. Dann können und müssen wir eine der folgenden Annahmen machen:

1) P und Q seien die Pole von resp. p_1 und q_1;
2) P und Q_1 seien die Pole von resp. p_1 und q;
3) P_1 und Q seien die Pole von resp. p und q_1;
4) P_1 und Q_1 seien die Pole von resp. p und q.

Jede dieser vier Annahmen führt zu einer Lösung der gegebenen Aufgabe. Wenn z. B. die erste Annahme gemacht wird, so suchen wir auf der Geraden PC den Punkt C', welcher durch P und dessen Polare p_1 harmonisch von C getrennt ist, und ebenso auf QB den Punkt B', welcher von B harmonisch getrennt ist durch Q und dessen Polare q_1. Die Curve zweiter Ordnung, welche durch die fünf Punkte A, B, C, B', C' geht, genügt dann allen Bedingungen. Denn sie ist dem Dreieck ABC umschrieben; und da durch P und p_1 zwei paar Curvenpunkte A, B und C, C' harmonisch getrennt sind, so ist P der Pol von p_1, also der Strahl FP oder p dem Strahle p_1 conjugirt, ebenso aber auch q dem Strahle q_1, und folglich sind je zwei einander zugeordnete Strahlen der Involution F conjugirt hinsichtlich der Curve.

252 Hat die Involution F reelle Doppelstrahlen, so berühren diese die gesuchte Curve zweiter Ordnung. Die eben gelöste Aufgabe enthält also die folgende:

Um ein gegebenes Dreieck eine Curve zweiter Ordnung zu beschreiben, die zwei in der Ebene gegebene Gerade berührt.

Einem gegebenen Dreieck eine Curve zweiter Ordnung so einzuschreiben, dass sie durch zwei gegebene Punkte geht.

Zugleich aber lehrt die obige Construction, dass diese Doppelaufgabe nur dann vier reelle Auflösungen hat, wenn links die beiden Geraden durch keine zwei Eckpunkte und rechts die beiden Punkte durch keine zwei Seiten des Dreiecks getrennt sind. Im andern Falle giebt es gar keine reelle Lösung.

253 Hat die Involution F imaginäre Doppelstrahlen, so hat die Aufgabe vier reelle Lösungen. Dieser Fall tritt u. A. dann ein, wenn die Involution rechtwinklig, also F ein Brennpunkt der gesuchten Curve ist (wie in Fig. 89 angenommen wurde); beiläufig haben wir damit die Aufgabe gelöst:

„Die vier Kegelschnitte zu bestimmen, die einem gegebenen „Dreieck umschrieben sind und einen gegebenen Punkt zum „Brennpunkt haben."

254 Möge zum Schluss eine Aufgabe hier Platz finden, die zwar nicht vom zweiten Grade, aber doch den zuletzt erörterten nahe verwandt ist, nämlich:

In einer Ebene seien ein Dreieck ABC und eine Punktinvolution erster Ordnung u gegeben, so jedoch, dass kein Doppelpunkt von u auf einer Seite des Dreiecks liegt, und dass u keinen Eckpunkt des Dreiecks enthält. Es soll dem Dreieck eine Curve zweiter Ordnung umschrieben werden, so dass je zwei conjugirte Punkte von u auch hinsichtlich der Curve conjugirt sind.

In einer Ebene seien ein Dreieck und eine Strahleninvolution erster Ordnung S gegeben, so jedoch, dass kein Doppelstrahl von S durch einen Eckpunkt des Dreiecks geht, und dass S keine Seite des Dreiecks enthält. Es soll dem Dreieck eine Curve zweiter Ordnung so eingeschrieben werden, dass je zwei conjugirte Strahlen von S auch hinsichtlich der Curve conjugirt sind.

Es seien den Punkten K und M (Fig. 90), in denen u von resp. AB und BC geschnitten wird, die resp. Punkte K_1 und M_1 der Involution u zugeordnet; ferner sei K_2 der Punkt von AB, der durch A und B harmonisch getrennt ist von K, und M_2 der Punkt von BC, der durch B und C harmonisch getrennt ist von M. Bezüglich der gesuchten Curve ist dann K_1K_2 die Polare des Punktes K, weil K den beiden Punkten K_1K_2 conjugirt ist; ebenso ist M_1M_2 die Polare von M. Ist also C' der Punkt, der durch K und K_1K_2 harmonisch getrennt ist von C, und A' der Punkt, der durch M und M_1M_2 harmonisch getrennt ist von A, so geht die gesuchte Curve durch die fünf Punkte A, B, C, A', C'.

Wirklich sind, wie verlangt wurde, die Punkte K, K_1 (und ebenso M, M_1) hinsichtlich der so bestimmten Curve conjugirt, weil K von der Geraden K_1K_2 sowohl durch die Curvenpunkte A, B, als auch durch C, C' harmonisch getrennt und folglich der Pol von K_1K_2 ist.

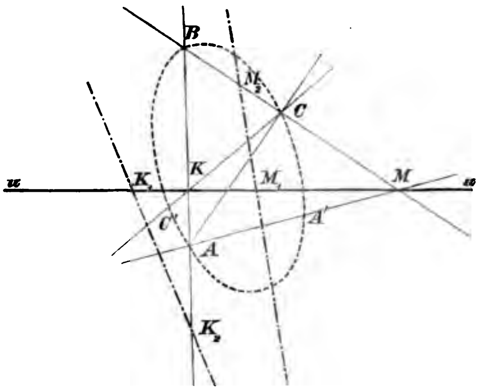


Fig. 90.

Wir können die soeben gelösten Aufgaben auch wie folgt aussprechen (vergl. Seite 205):

Durch fünf Punkte der Ebene, von denen drei reell und die übrigen beiden entweder reell oder conjugirt imaginär sind, eine Curve zweiter Ordnung zu legen.	Einem ebenen Fünfseit, von dessen Seiten drei reell und die übrigen beiden entweder reell oder conjugirt imaginär sind, eine Curve zweiter Ordnung einzuschreiben.

Jede dieser beiden Aufgaben hat eine reelle Lösung.

Achtzehnter Vortrag.

Hauptaxen und Symmetrie-Ebenen, Focalaxen und cyklische Ebenen eines Kegels zweiter Ordnung.

---

255 Die Polarentheorie des Kegels zweiter Ordnung folgt ohne Weiteres, wie schon früher (Seite 109) hervorgehoben wurde, aus der Polarentheorie der Curve zweiter Ordnung durch die Methode des Projicirens und Schneidens. Anders verhält es sich aber mit den Sätzen der Geometrie des Masses, die aus der Polarentheorie abgeleitet werden können; diese lassen sich keineswegs von den Curven unmittelbar auf die Kegel zweiter Ordnung übertragen. Sie sind auch zum Theil für die Kegel von anderer Art als für die Curven zweiter Ordnung, und müssen für die Kegel besonders entwickelt werden. Doch können uns hierbei die früheren verwandten Untersuchungen als Vorbild dienen.

256 Ein beliebiger Kegel zweiter Ordnung mit dem Mittelpunkte S sei gegeben. Dann hat jede Ebene ε des Bündels S einen Polstrahl e, und sie ist allen durch e gehenden Ebenen des Bündels conjugirt bezüglich des Kegels. Verbinden wir e mit dem zu ε normalen Strahle e_1 des Bündels, so erhalten wir eine Ebene ε', die zu der Ebene ε conjugirt und normal ist. Im Allgemeinen giebt es zu einer beliebigen Ebene ε des Bündels nur eine „conjugirte Normalebene" ε'; wenn aber eine Ebene α zu ihrem Polstrahle a rechtwinklig ist, so sind alle ihr conjugirten Ebenen α' zu ihr normal. In diesem Falle hälften α und a die Winkel, die von beliebigen zwei mit a in einer Ebene liegenden Kegelstrahlen gebildet werden; denn a und α sind ja zu einander normal und trennen die beiden Kegelstrahlen harmonisch (vgl. Seite 109 und 47). Die Strahlen des Kegels zweiter Ordnung liegen also paarweise symmetrisch zu der Ebene α, und wir nennen deshalb α eine „Symmetrie- oder Haupt-Ebene des Kegels." Der Polstrahl a der Symmetrie-Ebene wird eine „Hauptaxe" des Kegels genannt. Eine Symmetrie-Ebene des Kegels steht also auf ihrem Polstrahle oder der ihr zugeordneten Hauptaxe senkrecht.

257 Wenn eine Ebene ε sich um einen Strahl s des Bündels dreht, so beschreibt ihr Polstrahl e in der Polarebene von s, und der zu ihr normale Strahl e_1 in der zu s normalen Ebene des Bündels einen Strahlenbüschel. Die beiden so beschriebenen Strahlenbüschel aber sind zu dem Ebenenbüschel s und folglich zu einander projectiv und erzeugen im Allgemeinen einen zu s projectiven Ebenenbüschel zweiter Ordnung. Also:

„Wenn von zwei conjugirten Normalebenen des Bündels die „eine ε sich um eine Axe s dreht, so beschreibt die andere ε' „im Allgemeinen einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung, welcher „die Polarebene von s bezüglich des gegebenen Kegels und die „zu s normale Ebene des Bündels enthält."

Nur dann dreht auch ε' sich um eine Axe s', wenn die beiden projectiven Strahlenbüschel perspective Lage, also einen Strahl a entsprechend gemein haben. In diesem Falle liegt s in einer Symmetrie-Ebene α, die a zum Pol- und Normalstrahle hat und deren zugeordnete Hauptaxe die Gerade a ist; und weil α zu der Ebene sa conjugirt und normal ist, so muss auch s' in α liegen. Also:

„In einer Symmetrie-Ebene α des Kegels zweiter Ordnung giebt „es zu jedem Strahle s des Bündels einen zugeordneten Strahl „s', so dass je zwei zu einander normale Ebenen der Büschel „s, s' bezüglich des Kegels conjugirt sind."

Dieser Satz ist analog dem Satze (Seite 165), mit dessen Hülfe wir zu den Brennpunkten einer Curve zweiter Ordnung gelangt sind. Er wird uns zu den sogenannten Focalaxen des Kegels zweiter Ordnung führen; doch müssen wir vorher die Frage erledigen, ob und wie viele Symmetrie-Ebenen bei einem
258 Kegel zweiter Ordnung vorkommen. Wir wollen zunächst beweisen, dass der Kegel mindestens eine Symmetrie-Ebene besitzt.

Sei Σ der Ebenenbüschel, den die conjugirten Normalebenen aller durch einen Strahl s des Bündels gehenden Ebenen bilden. Ist er von der ersten Ordnung, so liegt seine Axe in einer Symmetrie-Ebene und deren Vorhandensein ist bewiesen. Ist der Büschel Σ von der zweiten Ordnung, so enthält er jede Symmetrie-Ebene des gegebenen Kegels als die conjugirte Normalebene der durch s und die zugeordnete Hauptaxe gehenden Ebene. Alle Ebenen η nun, welche den von Σ eingehüllten Kegel in reellen Strahlen schneiden, sind von den übrigen Ebenen φ des Bündels getrennt durch die Berührungsebenen dieses Kegels (vergl. Seite 100). Ist also t die Gerade, in welcher die conjugirten Normalebenen einer Ebene η und einer Ebene φ sich schneiden, so bilden die conjugirten Normalebenen aller durch t gehenden Ebenen einen Ebenenbüschel T erster oder zweiter Ordnung, der mit Σ mindestens zwei und höchstens vier reelle Ebenen gemein hat. Eine dieser gemeinschaftlichen Ebenen ist die conjugirte Normalebene von st; jede andere aber ist zu zwei verschiedenen ihr conjugirten Ebenen, nämlich zu je einer Ebene der Büschel s und t, normal und folglich auch zu ihrem Polstrahle, der Schnittlinie dieser beiden Ebenen. Und da jede zu ihrem Polstrahle normale Ebene eine Symmetrie-Ebene des gegebenen Kegels zweiter Ordnung ist, so giebt es im Allgemeinen höchstens drei reelle Symmetrie-Ebenen, mindestens aber eine solche.

259 Jeder Kegel zweiter Ordnung besitzt also mindestens eine Symmetrie-Ebene α und eine ihr zugeordnete Hauptaxe a. Nun ist aber leicht zu zeigen, dass sich in der Hauptaxe a allemal noch zwei Symmetrie-Ebenen rechtwinklig schneiden. Werden nämlich in der Symmetrie-Ebene α je zwei Strahlen des Bündels einander zugeordnet, die bezüglich des Kegels conjugirt sind, so bilden diese eine Involution, deren Axen b, c zwei Hauptaxen des Kegels sind; denn z. B. der Strahl b ist conjugirt und zugleich normal zu c und zu a, seine Polarebene ca ist folglich zu b normal, und somit eine Symmetrie-Ebene des Kegels. Ist insbesondere die Strahleninvolution in α rechtwinklig, so ist jeder ihrer Strahlen eine Hauptaxe, und jede durch a gehende Ebene eine Symmetrie-Ebene des Kegels. Sie überzeugen sich leicht, dass in diesem besonderen Falle der Kegel zweiter Ordnung ein Rotationskegel oder gerader Kreiskegel ist, der a zur Rotationsaxe hat. Wir haben so bewiesen:

„Ein Kegel zweiter Ordnung hat im Allgemeinen drei Sym-
„metrie-Ebenen, die sich in den drei Hauptaxen a, b, c recht-
„winklig schneiden und ein rechtwinkliges Poldreikant des Kegels
„bilden. Nur der Rotationskegel hat nicht drei, sondern un-
„endlich viele Symmetrie-Ebenen, die alle bis auf eine einzige
„durch die Rotationsaxe gehen.“

260 Wir wollen nun zu dem Satze zurückkehren, der uns vorhin an die Lehre von den Brennpunkten der Curven zweiter Ordnung erinnerte. Zunächst setzen wir fest:

„Die Axe f jedes Ebenenbüschels erster Ordnung, dessen zu ein-„ander normale Ebenen hinsichtlich eines Kegels zweiter Ord-„nung conjugirt sind, soll eine **Focalaxe** des Kegels heissen. „Sie ist die Axe einer rechtwinkligen Involution conjugirter „Ebenen.“

Wenn also eine Ebene sich um eine Focalaxe f dreht, so beschreibt ihre conjugirte Normalebene gleichfalls den Büschel f; die Axe f liegt folglich in einer Symmetrie-Ebene des Kegels (Seite 216). Eine Hauptaxe ist, wie leicht einzusehen, nur dann zugleich Focalaxe des Kegels, wenn dieser ein Rotationskegel und die Hauptaxe seine Rotationsaxe ist. Die Rotationskegel, welche wir fortan ausschliessen, haben übrigens nur je eine Focalaxe, nämlich eben die Rotationsaxe. — Die Verbindungsebene von zwei reellen Focalaxen f, f' ist eine Symmetrie-Ebene des Kegels, weil sie den beiden durch f resp. f' gehenden und zu ihr normalen Ebenen conjugirt ist. Durch keine Focalaxe kann an den Kegel eine reelle Berührungsebene gelegt werden, weil die conjugirten Ebenen einer Focalaxe eine rechtwinklige, elliptische Involution bilden.

261 Eine Symmetrie-Ebene α des Kegels zweiter Ordnung wird nun von zwei beliebigen conjugirten Normalebenen ε, ε' in zwei solchen Strahlen s, s' geschnitten, dass jede durch s gehende Ebene zu einer durch s' gehenden conjugirt und normal ist (Seite 216). Die beiden Büschel s, s' conjugirter Normalebenen sind projectiv, und werden von einer zweiten Symmetrie-Ebene β in zwei projectiven Strahlenbüscheln geschnitten. Diese aber haben involutorische Lage, weil ihre homologen Strahlen in der nämlichen Beziehung zu einander sethen wie s und s'; und die Doppelstrahlen der von ihnen gebildeten Involution sind Focalaxen des Kegels. Sind die Doppelstrahlen imaginär, so giebt es (vergl. Seite 161) zwei Axen, aus denen die Involution durch rechtwinklige Ebenenbüschel projicirt wird, und diese sind reelle Focalaxen des Kegels. Mehr als zwei reelle Focalaxen kann der Kegel nicht haben; denn die Verbindungsebene von zwei reellen Focalaxen ist allemal eine Symmetrie-Ebene, diese aber kann nicht mehr als zwei Focalaxen enthalten, und nur bei dem Rotationskegel ist eine Focalaxe zugleich Hauptaxe.

262 „Der Kegel zweiter Ordnung hat also zwei reelle Focal-„axen f, f', die in einer Symmetrie-Ebene liegen, und nur im „Falle des Rotationskegels in der Rotationsaxe zusammenfallen.

„Durch die Focalaxen sind je zwei conjugirte Normalebenen „harmonisch getrennt;"

denn diese beiden Ebenen schneiden die Symmetrie-Ebene ff' in zugeordneten Strahlen der Involution, von welcher f und f' die Doppelstrahlen sind. Insbesondere sind durch f und f' auch die übrigen beiden Symmetrie-Ebenen harmonisch getrennt; die von f und f' gebildeten Winkel werden folglich von zwei Hauptaxen gehälftet.

Wir können hiernach die drei Hauptaxen des Kegels wie folgt unterscheiden: die erste steht auf der Ebene ff' senkrecht und liegt ausserhalb des Kegels, die zweite liegt innerhalb und die dritte ausserhalb des Kegels in der Ebene ff'. Von den drei Symmetrie-Ebenen enthält die erste die beiden reellen Focalaxen f und f', die zweite liegt ganz ausserhalb des Kegels und die dritte schneidet ebenso wie die erste den Kegel in zwei reellen „Scheitel-Strahlen"; die zweite und die dritte Symmetrie-Ebene enthalten je zwei conjugirt-imaginäre Focalaxen des Kegels.

263 Die Mittelebenen der Flächenwinkel, die von zwei Berührungsebenen des Kegels gebildet werden, sind conjugirte Normalebenen und somit harmonisch getrennt durch die beiden Focalaxen f, f'; sie hälften also auch die Winkel der beiden Ebenen, welche die Schnittlinie der beiden Berührungsebenen mit f und f' verbinden. Ebenso beweist man den Satz (vergl. Seite 167 und 177):

„Jede Berührungsebene eines Kegels zweiter Ordnung bildet „gleiche Winkel mit den beiden Ebenen, die den Berührungs„strahl mit den Focalaxen des Kegels verbinden. Confocale „Kegel zweiter Ordnung schneiden sich deshalb in ihren gemein„schaftlichen Strahlen rechtwinklig. Die Polstrahlen einer „Ebene ε bezüglich confocaler Kegel zweiter Ordnung liegen in „einer zu ε normalen Ebene, die von ε harmonisch getrennt ist „durch die beiden Focalaxen."

264 Sei t die Schnittlinie von zwei Berührungsebenen des Kegels, g der Gegenstrahl von f bezüglich der einen und g' der von f' bezüglich der anderen Berührungsebene. Dann bilden die Ebenen tg und tf' dieselben Winkel mit einander wie tf und tg'; und weil ausserdem $\angle\, tg = \angle\, tf$ und $\angle\, tf' = \angle\, tg'$ ist, so sind die beiden Dreikante gtf' und ftg' congruent und können durch Drehung um ihre gemeinschaftliche Kante t zur Deckung gebracht werden. Die Kantenwinkel gf' und fg' sind daher gleich; aber nur der eine von ihnen ändert seine Lage, nicht jedoch seine

Grösse, wenn die eine der beiden Berührungsebenen an dem Kegel fortrollt. Daraus folgt:

„Die Gegenstrahlen einer Focalaxe f bezüglich der Berührungs-„ebenen des Kegels zweiter Ordnung liegen auf einem Rotations-„kegel, der die zweite Focalaxe f' zur Rotationsaxe hat.“

Nach dem vorhergehenden Satze muss jeder dieser Gegenstrahlen mit der anderen Focalaxe und dem Berührungsstrahle der zugehörigen Berührungsebene in einer Ebene liegen; und da der Berührungsstrahl mit der ersteren Focalaxe dieselben Winkel bildet, wie mit ihrem Gegenstrahle, so ergiebt sich noch:

„Die Summe resp. Differenz der beiden Winkel, die ein be-„liebiger Strahl des Kegels mit den beiden Focalaxen f und f' „bildet, ist constant.“

Jenachdem Sie den einen oder den anderen der beiden Nebenwinkel benutzen, welche der Strahl mit der einen Focalaxe bildet, erhalten Sie eine constante Summe oder eine constante Differenz. Aus dem Satze folgt, dass der Kegel von seiner ersten Symmetrie-Ebene ff' einen grösseren Winkel einschliesst als von der dritten (vgl. Seite 171).

265 Von einer zu der Focalaxe f normalen Ebene wird der Kegel in einer Curve zweiter Ordnung geschnitten, von welcher ein Brennpunkt auf f liegt; denn je zwei bezüglich der Curve conjugirte Strahlen dieses Punktes schneiden sich rechtwinklig, weil sie in zwei conjugirten und daher normalen Ebenen der Focalaxe f liegen. Wir können deshalb zwei früher bewiesene Sätze (Seite 169 und 175) ohne Weiteres in folgender Form auf den Kegel übertragen:

„Wird eine Focalaxe f eines Kegels zweiter Ordnung ver-„bunden mit den Berührungsstrahlen und mit der Schnittlinie „von zwei Berührungsebenen, so bildet die letztere Verbindungs-„ebene gleiche Winkel mit den beiden ersteren.“

„Die projectiven Strahlenbüschel, in denen zwei Berüh-„rungsebenen eines Kegels zweiter Ordnung die übrigen schnei-„den, werden aus jeder Focalaxe f des Kegels durch gleiche „und gleichlaufend projective Ebenenbüschel projicirt.“

Sei k die Schnittcurve des Kegels mit einer zu f normalen Ebene, t eine Tangente dieser Curve zweiter Ordnung, und F ihr auf f liegender Brennpunkt. Eine durch f senkrecht zu t gelegte Ebene schneidet dann t in einem Punkte des Kreises, der die Curve k in den Scheitelpunkten ihrer Hauptaxe berührt (Seite 172);

sie schneidet zugleich die durch t gehende Berührungsebene des Kegels in der rechtwinkligen Projection von f. Daraus folgt:

„Projicirt man die Focalaxen f, f' eines Kegels K^2 zweiter „Ordnung rechtwinklig auf dessen Berührungsebenen, so liegen „die Projectionen auf einem Kegel zweiter Ordnung; dieser „berührt K^2 in den beiden Scheitelstrahlen der Ebene ff' und „wird von den zu f oder f' normalen Ebenen in Kreisen ge- „schnitten."

266 Wir wenden uns nunmehr zu den „cyklischen Ebenen" der Kegel zweiter Ordnung, die in gewisser Hinsicht den Focalaxen reciprok sind und folgendermassen definirt werden können:

„Die Ebene jedes Strahlenbüschels erster Ordnung, dessen zu „einander normale Strahlen hinsichtlich eines Kegels zweiter „Ordnung conjugirt sind, heisst eine cyklische Ebene des „Kegels. Sie enthält also eine rechtwinklige Involution con- „jugirter Strahlen."

Man nennt diese Ebene deshalb eine „cyklische", weil jede zu ihr parallele Schnittcurve des Kegels ein Kreis ist (vgl. Seite 113). Nämlich der Mittelpunkt der Curve liegt auf dem Polstrahle der Ebene; je zwei conjugirte Durchmesser der Curve aber sind zu einander normal, weil sie zu conjugirten Strahlen der rechtwinkligen Involution parallel laufen. Eine Symmetrie-Ebene ist demnach nur dann zugleich cyklische Ebene des Kegels, wenn dieser ein Rotationskegel, und wenn seine Rotationsaxe die zu der Symmetrie-Ebene normale Hauptaxe ist. Der Rotationskegel, den wir jetzt wieder ausschliessen wollen, hat übrigens nur diese eine cyklische Ebene.

267 Eine cyklische Ebene hat mit dem Kegel keinen reellen Strahl gemein, weil kein reeller Strahl der Ebene sich selbst conjugirt ist. Zwei cyklische Ebenen schneiden sich in einer Hauptaxe, nämlich in einer Geraden, zu welcher in jeder der Ebenen ein Strahl conjugirt und normal ist. Bezeichnen wir überhaupt zwei Strahlen des Bündels, dem der Kegel angehört, als „conjugirte Normalstrahlen", wenn sie zu einander normal und hinsichtlich des Kegels conjugirt sind, so ist leicht einzusehen, dass zu jedem Strahle l des Bündels mit Ausnahme der drei Hauptaxen nur e i n conjugirter Normalstrahl l' existirt; in l' nämlich schneiden sich die Polarebene und die Normalebene des Strahles l.

Wenn nun der Strahl l im Bündel einen beliebigen Strahlenbüschel η beschreibt, so beschreiben seine Polar- und seine Normalebene zwei zu η projective Ebenenbüschel, und es ergiebt sich:

„Wenn ein Strahl l im Bündel sich in einer Ebene η bewegt,
„so beschreibt sein conjugirter Normalstrahl l' im Allgemeinen
„einen Kegel zweiter Ordnung, der den Polstrahl und die
„Normale der Ebene η, ausserdem aber die drei Hauptaxen
„des gegebenen Kegels enthält. Nur dann beschreibt auch l'
„einen Büschel erster Ordnung η', wenn η durch eine Haupt-
„axe geht, und in diesem Falle enthält auch η' diese Haupt-
„axe.“

Nämlich in diesem Specialfalle liegen die beiden zu η projectiven Ebenenbüschel perspectiv. Die Beziehung zwischen den conjugirten Normalstrahlen des Bündels ist eine involutorische zweiten Grades, die ebenso wie diejenige zwischen den conjugirten Normalebenen zur Bestimmung der Hauptaxen des Kegels zweiter Ordnung benutzt werden kann. Sie führt zu allen cyklischen Ebenen des Kegels, d. h. zu allen denjenigen Ebenen η, welche mit den zugehörigen Ebenen η' zusammenfallen.

268 Die Ebenen einer Hauptaxe a sind paarweise einander zugeordnet, so dass zwei conjugirte Normalstrahlen l, l' allemal in zugeordneten Ebenen η, η' von a liegen; und zwar sind die beiden Büschel η, η' conjugirter Normalstrahlen projectiv, wie aus dem Vorhergehenden sich ergiebt. Aus einer zweiten Hauptaxe b werden die Büschel η, η' durch projective Ebenenbüschel projicirt; diese aber liegen involutorisch, weil ihre homologen Ebenen in derselben Beziehung zu einander stehen, wie die Ebenen η und η'. Die beiden Doppelebenen der Involution b sind cyklische Ebenen des Kegels zweiter Ordnung, wie ohne Weiteres einleuchtet.

Durch jede der drei Hauptaxen gehen also zwei cyklische Ebenen des Kegels; diese Ebenen sind jedoch conjugirt-imaginär für zwei Hauptaxen, und nur in einer der drei Hauptaxen schneiden sich zwei reelle cyklische Ebenen $\varkappa$ und $\varkappa'$ (vgl. Seite 218). Denn gäbe es mehr als zwei, etwa drei reelle cyklische Ebenen, so müssten sie sich in den drei Hauptaxen schneiden, also mit den Symmetrie-Ebenen zusammenfallen, was nach früheren Bemerkungen unmöglich ist. Also:

„Ein Kegel zweiter Ordnung hat zwei reelle cyklische Ebenen
„$\varkappa$, $\varkappa'$, die sich in einer Hauptaxe schneiden und nur dann zu-
„sammenfallen, wenn der Kegel ein Rotationskegel ist. Der Kegel

„wird von den zu $\varkappa$ oder $\varkappa'$ parallelen Ebenen in Kreisen ge-
„schnitten. Durch die cyklischen Ebenen $\varkappa$, $\varkappa'$ sind je zwei
„conjugirte Normalstrahlen harmonisch getrennt;"
denn diese Strahlen liegen in zwei zugeordneten Ebenen der In-
269 volution, von welcher $\varkappa$ und $\varkappa'$ die Doppelebenen sind. Insbeson-
dere sind die beiden von $\varkappa\varkappa'$ verschiedenen Hauptaxen durch $\varkappa$
und $\varkappa'$ harmonisch getrennt. Von den drei Symmetrie-Ebenen
des Kegels hälften folglich zwei die von den cyklischen Ebenen
$\varkappa$, $\varkappa'$ gebildeten Flächenwinkel; die dritte steht auf $\varkappa$ und $\varkappa'$
270 normal. — Da die Mittellinien der beiden Nebenwinkel, die von
irgend zwei Strahlen des Kegels gebildet werden, zwei conjugirte
Normalstrahlen, also durch $\varkappa$ und $\varkappa'$ harmonisch getrennt sind, so
ergiebt sich der Satz:

„Bringt man die Verbindungsebene von zwei beliebigen Strahlen
„des Kegels mit den cyklischen Ebenen zum Durchschnitt, so
„bildet die eine Schnittlinie mit dem einen Strahle denselben
„Winkel, wie der andere Strahl mit der anderen Schnittlinie."

Ebenso leicht beweist man:

„Der ebene Winkel, den die cyklischen Ebenen auf irgend
„einer Berührungsebene des Kegels begrenzen, wird von dem
„Berührungsstrahle gehälftet. Zwei concyklische Kegel berühren
„folglich ihre gemeinschaftlichen Tangentialebenen in je zwei
„zu einander senkrechten Strahlen. Die Polarebenen eines
„Strahles l bezüglich concyklischer Kegel zweiter Ordnung
„schneiden sich in einer zu l normalen Geraden, die von l har-
„monisch getrennt ist durch die beiden cyklischen Ebenen der
„Kegel."

Zwei conjugirte Normalstrahlen sind harmonisch getrennt
durch die Berührungsebenen von je zwei Kegelstrahlen, die mit
einem von ihnen in einer Ebene liegen; hieraus können Sie ohne
Schwierigkeit die Folgerung ziehen:

„Bringt man eine cyklische Ebene zum Durchschnitt mit zwei
„Berührungsebenen des Kegels und mit der Verbindungsebene
„der beiden Berührungsstrahlen, so bildet die letztere Schnitt-
„linie gleiche Winkel mit den beiden ersteren."

Nehmen Sie noch eine dritte, bewegliche Berührungsebene zu
Hülfe, so können Sie (nach Analogie von Seite 175) weiter schliessen:

„Die Ebenen, durch welche ein beweglicher Strahl des Kegels
„zweiter Ordnung aus zwei festen Kegelstrahlen projicirt wird,
„begrenzen auf jeder der beiden cyklischen Ebenen Winkel von

„constanter Grösse. Zwei projective Ebenenbüschel, die den „Kegel erzeugen, werden folglich von jeder cyklischen Ebene „in projectiv gleichen und gleichlaufenden Strahlenbüscheln ge-„schnitten."

271 Die meisten dieser Sätze über die cyklischen Ebenen und noch manche andere lassen sich aus analogen Sätzen über die Focalaxen der Kegel zweiter Ordnung ableiten, wenn man rechtwinklig auf einander bezogene Strahlenbündel zu Hülfe nimmt. Wir nennen zwei Bündel S, S_1 rechtwinklig auf einander bezogen, wenn jeder Ebene des einen der zu ihr normale Strahl des anderen zugewiesen ist, also auch jedem Ebenenbüschel des einen ein zu ihm projectiver Strahlenbüschel des anderen, dessen Ebene auf der Axe des Ebenenbüschels normal ist. Vier harmonischen Ebenen des einen Bündels entsprechen demnach allemal vier harmonische Strahlen des anderen, die beziehlich zu jenen Ebenen normal sind. Zwei Elemente des Bündels S bilden dieselben Winkel mit einander, wie die ihnen entsprechenden Elemente des Bündels S_1. Die Strahlen des einen Bündels schneiden die entsprechenden Ebenen des anderen in den Punkten einer Kugelfläche.

Den Strahlen eines Kegels zweiter Ordnung im Bündel S entsprechen in S_1 die Berührungsebenen eines Kegels zweiter Ordnung; denn denken wir uns jenen Kegel durch zwei projective Ebenenbüschel erzeugt, so erscheint dieser als Erzeugniss der entsprechenden beiden projectiven Strahlenbüschel. Zwei Strahlen, die durch den einen Kegel harmonisch getrennt sind, entsprechen zwei Ebenen, die durch zwei Berührungsebenen des anderen Kegels harmonisch getrennt sind; woraus folgt, dass conjugirten Elementen allemal conjugirte Elemente entsprechen. Zwei zu einander normalen Strahlen oder Ebenen, die bezüglich des einen Kegels conjugirt sind, entsprechen demnach zwei zu einander normale Ebenen resp. Strahlen, die conjugirt sind bezüglich des anderen Kegels. Und jeder cyklischen Ebene des einen Kegels entspricht folglich eine Focalaxe des anderen, desgleichen jeder Symmetrie-Ebene des einen eine Hauptaxe des anderen. Wir können deshalb die Eigenschaften der Focalaxen ohne Weiteres in solche der cyklischen Ebenen eines Kegels zweiter Ordnung übersetzen, und erhalten so beispielsweise den Satz (vergl. Seite 220):

„Die Summe resp. Differenz der beiden Winkel, die eine Be-„rührungsebene des Kegels mit den beiden cyklischen Ebenen „bildet, ist constant."

272 Sind zwei rechtwinklig auf einander bezogene Kegel zweiter Ordnung gegeben, so entspricht jeder von dem einen Kegel ausgeschlossenen Ebene ein zu ihr normaler, von dem anderen Kegel eingeschlossener Strahl. Und wenn von allen ebenen Winkeln, die der zweite Kegel einschliesst, der grösste derjenige ist, worin die reellen Focalaxen f, f' liegen, so muss von allen Flächenwinkeln, die den ersteren Kegel ausschliessen, der seine cyklischen Ebenen enthaltende der grösste sein. Da nun in der That ein Kegel zweiter Ordnung von seiner ersten Symmetrie-Ebene ff' einen grösseren Winkel einschliesst als von der dritten (Seite 220), so finden wir:

„Die cyklischen Ebenen $\varkappa$, $\varkappa'$ eines Kegels zweiter Ordnung „schneiden sich in der dritten Hauptaxe, die mit der zweiten „Hauptaxe und den beiden reellen Focalaxen in der ersten „Symmetrie-Ebene, aber ausserhalb des Kegels liegt."

Die beiden ersten Symmetrie-Ebenen des Kegels hälften demnach die von $\varkappa$ und $\varkappa'$ gebildeten Flächenwinkel; dagegen ist die dritte Symmetrie-Ebene zu $\varkappa$ und $\varkappa'$ normal.

273 Ein Kegel zweiter Ordnung und eine mit ihm concentrische Kugel haben mit einander einen „sphärischen Kegelschnitt" gemein. Die Kugel schneidet jede Symmetrie-Ebene des Kegels in einer „Axe" des sphärischen Kegelschnitts, jede cyklische Ebene in einer „cyklischen Linie", jede Berührungsebene in einer sphärischen „Tangente", jede Hauptaxe in zwei „Mittelpunkten" und jede Focalaxe des Kegels in zwei „Brennpunkten" des sphärischen Kegelschnittes.

Der sphärische Kegelschnitt ist eine Zwillingscurve, d. h. er besteht aus zwei getrennten, gleichen Linien, deren Punkte einander paarweise diametral auf der Kugel gegenüberliegen. Im Allgemeinen hat er drei paar Mittelpunkte, in denen seine drei Axen sich rechtwinklig schneiden, ferner zwei reelle cyklische Linien und zwei paar reelle Brennpunkte. Durch die vier Brennpunkte und die beiden Mittelpunkte, in denen die cyklischen Linien sich schneiden, geht die erste Axe; die zweite Axe liegt ganz ausserhalb des sphärischen Kegelschnittes und hat mit der ersten jene beiden Mittelpunkte gemein; die dritte Axe schneidet die beiden cyklischen Linien rechtwinklig und enthält ebenso wie die erste zwei paar reelle Scheitelpunkte des Kegelschnittes. In einem besonderen Falle besteht der sphärische Kegelschnitt aus zwei gleichen Kugelkreisen; er hat dann unendlich viele Mittelpunkte, aber nur ein paar reelle Brennpunkte, die zugleich Mittelpunkte sind.

274 Alle Eigenschaften des Kegels zweiter Ordnung, die sich auf seine Symmetrie-Ebenen, Hauptaxen, Focalaxen und cyklischen Ebenen beziehen, können auf den sphärischen Kegelschnitt übertragen werden. So ergiebt sich u. A.:

„Bewegt sich ein Eckpunkt eines sphärischen Dreiecks so „auf der Kugel, dass der Umfang des Dreiecks constant bleibt, „so beschreibt er einen sphärischen Kegelschnitt, der die ande-„ren beiden Eckpunkte zu Brennpunkten hat“ (Seite 220).

„Bewegt sich eine Seite eines sphärischen Dreiecks so, „dass die Fläche des Dreiecks constant bleibt, so umhüllt sie „einen sphärischen Kegelschnitt, von welchem die anderen bei-„den Dreieckseiten die cyklischen Linien sind.“

Constructions-Aufgaben und Lehrsätze.

I. Harmonische Gebilde.

1. Zu drei Elementen eines einförmigen Grundgebildes das vierte harmonische zu construiren (Seite 41 und 47).

2. Nach dem unzugänglichen Schnittpunkte von zwei Geraden aus einem gegebenen Punkte eine dritte Gerade zu ziehen (Seite 4 und 44).

3. Ohne Benutzung des Zirkels eine Strecke AC zu hälften, wenn eine Parallele zu der Geraden AC gegeben ist (Seite 48).

4. In der Ebene sind gegeben ein Parallelogramm und eine beliebige Strecke AC; ohne Hülfe des Zirkels soll AC gehälftet und zu AC eine Parallele gezogen, sodann AC ver-n-facht oder in n gleiche Theile zerlegt werden (Seite 46—49).

5. Sind A, B, C, D vier harmonische Punkte und beschreibt man über dem Durchmesser AC einen Kreis, von welchem S ein beliebiger Punkt ist, so wird der von dem Winkel BSD eingeschlossene Bogen des Kreises entweder von A oder von C gehälftet (Seite 47).

6. Zwischen den Schenkeln a, b eines Winkels ist eine Gerade AB so zu ziehen, dass sie in einem gegebenen Punkte P gehälftet wird, oder auch so, dass der Punkt A die Strecke PB hälftet (Seite 47).

7. Wenn zwei Punkte von einem dritten durch je zwei Gegenkanten eines Tetraëders harmonisch getrennt sind, so sind sie von einander durch das dritte paar Gegenkanten harmonisch getrennt. Denn die Ebene der drei Punkte schneidet das Tetraëder in einem vollständigen Vierseit, dessen Diagonalen in den drei Punkten sich schneiden.

2. Projective Verwandtschaft einförmiger Grundgebilde. 5. Vortrag

8. Zwei Punktreihen u, u_1 werden perspectiv auf einander bezogen und sodann in schiefe Lage gebracht, also beliebig gegen einander verschoben. Es sind die Verbindungslinien ihrer homologen Punkte zu zeichnen, und damit der von u und u_1 erzeugte Strahlenbüschel zweiter Ordnung zu construiren.

9. Zwei Strahlenbüschel werden perspectiv auf einander bezogen und sodann durch Verschiebung oder Drehung in schiefe Lage gebracht; die von ihnen erzeugte Curve zweiter Ordnung, auf der die Schnittpunkte ihrer homologen Strahlen liegen, ist zu zeichnen.

10. Zwei Punktreihen u, u_1 liegen perspectiv zu einer dritten u_2; der von ihnen erzeugte Büschel zweiter Ordnung ist zu zeichnen.

11. Zwei Strahlenbüschel S, S_1 liegen perspectiv zu einem dritten S_2; die von ihnen erzeugte Curve zweiter Ordnung ist zu zeichnen.

12. Von zwei projectiven Punktreihen u, u_1 sind drei paar homologe Punkte AA_1, BB_1, CC_1 gegeben; zu einem beliebigen Punkte D von u ist der entsprechende Punkt D_1 von u_1 zu construiren (Seite 64 und 74), überhaupt ist der von u und u_1 erzeugte Strahlenbüschel erster oder zweiter Ordnung zu zeichnen. Der erste Theil der Aufgabe ist auch für den Fall auszuführen, wenn u und u_1 in derselben Geraden liegen.

13. Zu der vorhergehenden Aufgabe die reciproke aufzustellen und auszuführen (Seite 74).

14. Zwei projective Strahlenbüschel oder Punktreihen in perspective Lage zu bringen (Seite 59).

5 **15.** Eine Punktreihe und einen zu ihr projectiven Strahlenbüschel in perspective Lage zu bringen.

16. Liegen die Eckpunkte eines einfachen Sechsecks $AB_1CA_1BC_1$ abwechselnd auf zwei Geraden u, u_1, etwa A, B, C auf u und A_1, B_1, C_1 auf u_1, so liegen auch die Schnittpunkte A_2, B_2, C_2 der drei paar Gegenseiten des Sechsecks auf einer Geraden u_2 (Seite 86). Dieser Satz findet sich schon in den Collectiones des Pappus, lib. VII. — Die den Satz erläuternde Figur ist ebenso wie die früher (Seite 5) besprochene Fig. 3 wegen ihrer Regelmässigkeit beachtenswerth; sie besteht nämlich aus neun Punkten, die zu dreien auf neun Geraden liegen, und diese neun

Geraden gehen zu dreien durch die neun Punkte. Durch dieselbe Figur wird auch der reciproke Satz dargestellt. Wie lautet dieser?

$\mathfrak{f}$ ✓ **17.** In dem einen von zwei perspectiven Strahlenbüscheln sollen zwei zu einander normale Strahlen construirt werden, denen in dem anderen Büschel zwei gleichfalls zu einander normale Strahlen entsprechen. Aus der Auflösung dieser Aufgabe folgt:

18. In zwei projectiven Strahlenbüscheln, deren Mittelpunkte nicht unendlich fern liegen, giebt es allemal zwei einander entsprechende rechte Winkel (Steiner).

19. Liegen ein Strahlenbüschel S und ein Ebenenbüschel u perspectiv, so steht die Axe von u normal auf einem der beiden zu einander rechtwinkligen Strahlen von S, denen in u zwei zu einander rechtwinklige Ebenen entsprechen. Von dieser Bemerkung ausgehend, findet man, dass die folgenden beiden Aufgaben je zwei Lösungen haben.

20. Gegeben ein Strahlenbüschel S und ein zu ihm projectiver Ebenenbüschel u; es soll:

a. durch irgend einen Punkt eine Ebene gelegt werden, die den Büschel u in einem mit S congruenten Strahlenbüschel schneidet;

b. ein Axe construirt werden, aus welcher der Büschel S durch einen mit u congruenten Ebenenbüschel projicirt wird.

21. Einen Strahlenbüschel S und einen Ebenenbüschel u in solche gegenseitige Lage zu bringen, dass drei gegebene Ebenen α, β, γ von u durch drei gegebene Strahlen a, b, c von S gehen (Aufg. 20).

22. Die Mantelfläche $\alpha\beta\gamma$ eines dreiseitigen Prismas in einem Dreieck abc zu schneiden, das einem gegebenen Dreieck $a_1 b_1 c_1$ ähnlich ist. Diese Aufgabe kann auf die vorhergehende zurückgeführt werden.

---

3. Curven, Büschel und Kegel zweiter Ordnung. 6. Vortg.

23. Von einer Curve zweiter Ordnung sind gegeben fünf Punkte, oder vier Punkte und die Tangente an einem, oder drei Punkte und die Tangenten an zwei von ihnen; die Curve mittelst projectiver Strahlenbüschel zu construiren (Seite 73—75).

24. Von einem Büschel zweiter Ordnung sind gegeben fünf Strahlen, oder vier Strahlen und der Berührungspunkt in einem, oder drei Strahlen und die Berührungspunkte in zwei von ihnen; den Büschel mittelst projectiver Punktreihen zu construiren (Seite 73—75).

25. Die drei Aufgaben 23 mit Hülfe des Pascal'schen Satzes zu lösen, und namentlich:

a. auf beliebigen Geraden, die durch je einen schon bekannten Curvenpunkt gehen, jedesmal den zweiten Curvenpunkt zu bestimmen;

b. an jedem gegebenen oder construirten Punkte der Curve die Tangente zu zeichnen (Seite 82).

26. Die drei Aufgaben 24 mit Hülfe des Lehrsatzes von Brianchon zu lösen, und namentlich:

a. durch beliebige Punkte eines schon bekannten Strahles jedesmal den zweiten Strahl des Büschels zweiter Ordnung zu ziehen;

b. in jedem gegebenen oder construirten Strahle des Büschels den Berührungspunkt zu bestimmen (Seite 82).

Anmerkung. Die Aufgaben 25 und 26 enthalten eine grosse Anzahl besonderer Aufgaben, und jede von diesen lässt sich auf verschiedene Arten lösen, indem man ausser den Sätzen über das Sechseck in der Curve oder im Büschel zweiter Ordnung auch die über das Fünfeck, Viereck oder Dreieck benutzen kann. Als specielle Fälle der Aufgaben 25 und 26 nennen wir die folgenden drei:

27. Eine Hyperbel zu zeichnen, von welcher ausser den beiden Asymptoten noch entweder ein Punkt oder eine Tangente gegeben ist.

14 **28.** Eine Parabel zu zeichnen, wenn von ihr vier Tangenten gegeben sind, oder drei Tangenten und der Berührungspunkt in einer von ihnen, oder zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten.

29. Eine Hyperbel zu zeichnen, von welcher drei Punkte und die Richtungen der beiden Asymptoten gegeben sind.

Wie ordnen sich die Aufgaben 27, 28, 29 den Aufgaben 23 und 24 unter?

30. Zu beweisen, dass der Kreis eine Curve zweiter Ordnung ist, und dass seine Tangenten einen Büschel zweiter Ordnung bilden. Unter welchem Winkel wird der Abschnitt einer beweglichen Kreistangente, der zwischen zwei gegebenen Tangenten liegt, vom Mittelpunkte aus gesehen?

31. Eine Punktreihe u und ein Büschel S erster Ordnung liegen in einer Ebene und sind projectiv auf einander bezogen;

dann umhüllen die Geraden, die durch je einen Punkt von u gehen und mit dem entsprechenden Strahle von S einen constanten Winkel bilden, eine Parabel, falls sie nicht alle durch einen Punkt gehen (vergl. Seite 94). Die Parabel wird auch von u berührt.

32. Wenn ein Winkel von gegebener Grösse sich so in der Ebene bewegt, dass sein Scheitelpunkt eine Gerade u beschreibt und der eine Schenkel sich um einen gegebenen Punkt S dreht, so umhüllt der andere Schenkel eine Parabel; diese wird von u berührt.

33. Ein veränderliches Dreieck ASA_1 bewege sich so in der Ebene, dass die Endpunkte A, A_1 der Grundlinie zwei Gerade u, u_1 beschreiben und der Winkel an der Spitze S sich ohne Aenderung seiner Grösse um seinen Scheitelpunkt dreht. Dann umhüllt die Grundlinie AA_1 eine Curve zweiter Ordnung, die u und u_1 berührt. (Nach Seite 175 ist S ein Brennpunkt der Curve.)

10 **34.** Die Grundlinie AA_1 eines veränderlichen Dreiecks APA_1 sei der Grösse nach gegeben und gleite auf einer festen Geraden u, während die anderen beiden Seiten PA, PA_1 sich um zwei feste Punkte S, S_1 drehen. Dann beschreibt die Spitze P eine Hyperbel, die durch S und S_1 geht und die Gerade u zur Asymptote hat. Hieraus folgt:

35. Wenn zwei projective Strahlenbüschel eine Hyperbel erzeugen, so werden sie von jeder Asymptote der Hyperbel in congruenten, gleichlaufenden Punktreihen geschnitten.

9 **36.** Drehen sich zwei Winkel ab und a_1b_1 von gegebener Grösse in ihrer Ebene dergestalt um ihre festen Scheitel S und S_1, dass von den vier Schnittpunkten ihrer Schenkel einer aa_1 eine Gerade beschreibt, so bewegt sich jeder der übrigen drei Schnittpunkte bb_1, ab_1, a_1b auf einer durch S und S_1 gehenden Curve zweiter Ordnung (Newton's organische Beschreibung der Kegelschnitte).

11 **37.** Fället man auf die Ebenen eines Ebenenbüschels a Normalen aus einem beliebigen Punkte P, so liegen deren Fusspunkte auf einem Kreise; dieser hat das von P auf die Axe a gefällte Loth zur Durchmessersehne, und seine Ebene steht auf a senkrecht. — Daraus folgt:

12 **38.** Legt man durch die Schenkel a, a_1 eines schiefen Winkels alle möglichen Paare normaler Ebenen, so schneiden sich diese

normalen Ebenen in den Strahlen eines durch a und a_1 gehenden Kegels zweiter Ordnung. Jede zu a oder a_1 normale Ebene schneidet den Kegel in einem Kreise, und jede zur Ebene aa_1 normale Ebene schneidet ihn in einer Curve zweiter Ordnung, von welcher eine Axe in aa_1 liegt. Der Kegel heisst nach Schröter ein „orthogonaler" Kegel.

39. Den orthogonalen Kegel zweiter Ordnung erhält man auch mit Hülfe einer Ebene α, die im Punkte aa_1 auf a_1 senkrecht steht. Lässt man nämlich einen rechten Winkel, in dessen Scheitelpunkte α und a sich schneiden, so sich bewegen, dass seine Ebene stets durch die Gerade a geht und der eine Schenkel die Ebene α beschreibt, so beschreibt der andere Schenkel den orthogonalen Kegel.

13 r **40.** Fället man aus einem Punkte P Normalen auf die Strahlen eines Büschels S erster Ordnung, so liegen deren Fusspunkte auf einem Kreise; die Normalen aber liegen auf einem orthogonalen Kegel zweiter Ordnung, wenn nicht P in der Ebene des Büschels liegt.

41. Wenn zwei concentrische Strahlenbüschel, deren Ebenen sich unter schiefen Winkeln schneiden, so auf einander bezogen werden, dass je zwei homologe Strahlen auf einander senkrecht stehen, so erzeugen sie einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung. Mit anderen Worten: Wenn ein rechter Winkel sich so um seinen Scheitel dreht, dass seine Schenkel sich in zwei Ebenen bewegen, so umhüllt seine Ebene einen Kegel zweiter Ordnung, der jene beiden Ebenen berührt.

26 **42.** Fället man auf die Berührungsebenen eines Kegels zweiter Ordnung aus einem beliebigen Punkte Normalen, so liegen diese auf einem zweiten Kegel zweiter Ordnung. Nämlich die Berührungsebenen werden durch zwei projective Strahlenbüschel erzeugt, und aus diesen können sofort zwei projective Ebenenbüschel erster Ordnung abgeleitet werden, die den zweiten Kegel erzeugen.

43. Der geometrische Ort eines Punktes S, aus welchem ein ebenes Viereck $KLMN$ durch einen harmonischen Strahlenbüschel $S(KLMN)$ projicirt wird, ist eine dem Viereck umschriebene Curve zweiter Ordnung (Seite 79). Construirt man zu NK, NL und NM den vierten harmonischen Strahl n, so berührt dieser im Punkte N die Curve, die hiernach leicht construirt werden kann.

44. Der geometrische Ort einer Geraden u, die ein ebenes Vierseit $klmn$ in einer harmonischen Punktreihe $u(klmn)$ schneidet, ist ein Büschel zweiter Ordnung, dem die vier Geraden k, l, m, n angehören (Seite 79). Der Berührungspunkt des Strahles n ist von dem Punkte nl harmonisch getrennt durch nk und nm. — Die Geraden, auf denen die Seiten eines gegebenen Dreiecks je zwei gleiche Abschnitte begrenzen, umhüllen drei verschiedene Parabeln.

45. Wir wollen mit v. Staudt eine Gruppe von vier in bestimmter Reihenfolge angenommenen Elementen A, B, C, D eines einförmigen Grundgebildes einen „Wurf" nennen. Zwei Würfe $ABCD$ und $abcd$ heissen projectiv, wenn die beiden Grundgebilde, in denen sie liegen, projectiv so auf einander bezogen werden können, dass den Elementen A, B, C, D des einen die Elemente a, b, c, d des anderen entsprechen.

Die Sätze 43 und 44 lassen sich dann folgendermassen verallgemeinern:

46. Sei $abcd$ ein gegebener Wurf (bestehend etwa aus vier Strahlen eines Büschels erster Ordnung); dann liegen alle Punkte S, aus denen ein beliebiges Viereck $KLMN$ durch einen zu $abcd$ projectiven Wurf $S(KLMN)$ projicirt wird, auf einer dem Viereck umschriebenen Curve zweiter Ordnung. Wie construirt man deren Tangente im Punkte N? (Vgl. Nr. 43.)

47. Sei $ABCD$ ein gegebener Wurf, dann berühren alle Geraden u, die ein ebenes Vierseit $klmn$ in einem zu $ABCD$ projectiven Wurfe $u(klmn)$ schneiden, eine dem Vierseit eingeschriebene Curve zweiter Ordnung. Wie construirt man den Punkt, worin n diese Curve berührt? (Vgl. Nr. 44.)

48. Wenn zwei Dreiecke ABC und $D_1E_1F_1$ einer Curve zweiter Ordnung k^2 eingeschrieben sind, so sind sie auch einer Curve zweiter Ordnung umschrieben; und umgekehrt. Nämlich die Würfe $A(BCE_1F_1)$ und $D_1(BCE_1F_1)$ sind projectiv, weil sie in den projectiven, die Curve k^2 erzeugenden Büscheln A und D_1 einander entsprechen. Ist nun $B_1C_1E_1F_1$ der Schnitt des Büschels $A(BCE_1F_1)$ mit der Geraden E_1F_1, und $BCEF$ der Schnitt des Büschels $D_1(BCE_1F_1)$ mit der Geraden BC, so sind auch $B_1C_1E_1F_1$ und $BCEF$ projective Würfe; die sechs Seiten der Dreiecke, nämlich BC, BB_1, CC_1, E_1F_1, EE_1 und FF_1, sind also wirklich

Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung. — Die Umkehrung des Satzes wird analog bewiesen.

---

4. Pol und Polare; Durchmesser der Curven zweiter Ordnung.

8. u. 9. Vortrag.

49. Bezüglich einer Curve zweiter Ordnung von einer gegebenen Figur die polare F zu zeichnen, d. h. von ihren Punkten die Polaren und von ihren Geraden die Pole zu construiren (Seite 99). Beispiele: ein Polygon und eine beliebige krumme Linie.

50. An eine gegebene Curve zweiter Ordnung aus einem beliebigen Punkte Tangenten zu ziehen ohne Benutzung des Zirkels (Seite 99).

51. Bewegen sich zwei Tangenten einer Curve zweiter Ordnung so,

dass die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte eine zweite Curve zweiter Ordnung einhüllt, so beschreibt ihr Schnittpunkt eine dritte Curve zweiter Ordnung.

dass ihr Schnittpunkt eine zweite Curve zweiter Ordnung durchläuft, so umhüllt die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte eine dritte Curve zweiter Ordnung.

Die zweite und die dritte Curve sind reciproke Polaren bezüglich der ersten (Seite 104).

52. Durch lineare Constructionen die Polare eines Punktes oder den Pol einer Geraden hinsichtlich einer Curve zweiter Ordnung zu bestimmen, die durch fünf Bedingungen, z. B. durch fünf Punkte oder fünf Tangenten, gegeben ist, aber nicht gezeichnet vorliegt. (Vgl. Nr. 23—26.)

53. Eine Curve zweiter Ordnung sei gegeben durch fünf Bedingungen, z. B. durch vier Tangenten und den Berührungspunkt in einer oder durch drei Punkte und die Tangenten an zwei von ihnen. Es sollen beliebig viele Durchmesser und der Mittelpunkt der Curve construirt werden. (Nr. 52.)

54. In einer gegebenen Curve zweiter Ordnung eine Sehne so zu ziehen, dass sie in einem gegebenen Punkte P gehälftet wird.

55. Die Sehnen einer Curve zweiter Ordnung, die von einer gegebenen Geraden gehälftet werden, umhüllen i. A. eine Parabel (Seite 94).

27 **56.** Von einer Ellipse oder Hyperbel sind gegeben zwei paar conjugirte Durchmesser und entweder ein Punkt oder eine Tangente; beliebig viele Punkte oder Tangenten der Curve zu construiren (Seite 113).

28 **57.** Von einer Curve zweiter Ordnung sind gegeben zwei Punkte oder Tangenten und ein paar conjugirte Durchmesser, oder auch drei Punkte oder Tangenten und der Mittelpunkt; die Curve zu construiren (Seite 111 und 113).

29 **58.** Eine Parabel zu construiren, wenn von ihr gegeben sind drei Punkte oder Tangenten und die Richtung der Durchmesser (Seite 111), oder aber zwei Punkte oder Tangenten und die Axe.

30 **59.** Eine Parabel ist gegeben durch vier Tangenten; die Axe zu construiren.

60. Eine Curve zweiter Ordnung zu construiren, wenn von ihr drei Punkte oder Tangenten und eine Axe gegeben sind.

61. Eine Hyperbel zu construiren aus den Asymptoten und einem Punkte oder einer Tangente (Seite 116 und 118).

62. Von einer gegebenen Curve zweiter Ordnung die Axen zu zeichnen (Seite 115).

63. Projectiv gleiche Strahlenbüschel, die schief in einer Ebene liegen, erzeugen einen Kreis oder eine gleichseitige Hyperbel, jenachdem sie gleichlaufend sind oder nicht.

31 **64.** Für wie viele Punkte oder Tangenten zählen bei der Bestimmung einer Curve zweiter Ordnung a) der Mittelpunkt, b) eine Axe, c) zwei conjugirte Durchmesser, d) ein Poldreieck, e) eine Asymptote, f) ein Punkt und seine Polare, g) zwei conjugirte Punkte oder Strahlen, h) ein Durchmesser?

32 **65.** Fället man aus einem Punkte S auf die Durchmesser einer Curve k^2 zweiter Ordnung Normalen, so schneiden diese die resp. conjugirten Durchmesser in den Punkten einer durch S und den Mittelpunkt von k^2 gehenden Hyperbel, deren Asymptoten mit den Axen von k^2 parallel laufen. Auf dieser gleichseitigen Hyperbel liegen die Fusspunkte aller durch S gehenden Normalen von k^2 (Apollonius). An eine Curve zweiter Ordnung können deshalb aus keinem Punkte mehr als vier Normalen gezogen werden. — Die Hyperbel beschreibt einen Kegelschnittbüschel, wenn S eine Gerade beschreibt.

33 **66.** Projicirt man eine Curve zweiter Ordnung aus den End-

punkten einer Durchmessersehne auf zwei Gerade, die zu conjugirten Durchmessern der Curve parallel sind, so erhält man (Seite 113) projectiv ähnliche Punktreihen, die also proportional getheilt sind. Eine bekannte, sehr einfache Construction der Ellipse oder Hyperbel gründet sich auf diesen Satz.

67. Projicirt man eine Parabel aus einem ihrer Punkte auf irgend einen Durchmesser u und zugleich aus ihrem unendlich fernen Punkte auf eine beliebige Gerade u_1, so erhält man in u und u_1 zwei projectiv ähnliche Punktreihen. Hieraus folgt eine sehr einfache Parabel-Construction.

34 **68.** In Bezug auf zwei gegebene Curven zweiter Ordnung hat jeder Punkt A der Ebene zwei Polaren, und wir können deren Schnittpunkt A_1 dem Punkte A zuordnen. Die beiden Polaren von A_1 gehen dann durch A, und je zwei einander zugeordnete Punkte, wie A und A_1, sind hinsichtlich beider Curven conjugirt. Ebenso können wir je zwei Strahlen der Ebene einander zuordnen, die in Bezug auf beide Curven conjugirt sind. Ich behaupte nun (vergl. Seite 104):

Den Punkten einer Geraden sind im Allgemeinen die Punkte eines Kegelschnittes zugeordnet. Alle Kegelschnitte, die auf diese Art den Geraden der Ebene zugeordnet sind, haben mindestens einen Punkt und höchstens drei Punkte U, V, W mit einander gemein. Die beiden Polaren jedes solchen gemeinschaftlichen Punktes fallen zusammen, sodass dem Punkte alle Punkte einer Geraden zugeordnet sind.

Den Strahlen eines Punktes sind im Allgemeinen die Tangenten eines Kegelschnittes zugeordnet. Alle Kegelschnitte, deren Tangenten den Strahlen je eines Punktes zugeordnet sind, haben mindestens eine und höchstens drei Tangenten u, v, w mit einander gemein. Die beiden Pole von jeder solchen gemeinschaftlichen Tangente fallen zusammen, sodass der Tangente alle Strahlen eines Punktes zugeordnet sind.

Sind die gegebenen beiden Curven einem Viereck umschrieben, so schneiden sich dessen drei paar Gegenseiten in den Punkten U, V, W. Diese drei Punkte sind die Eckpunkte und die Geraden u, v, w sind die Seiten eines gemeinschaftlichen Poldreiecks der beiden Curven zweiter Ordnung.

69. In der Ebene einer Curve k^2 zweiter Ordnung können je zwei Strahlen einander zugeordnet werden, die sich rechtwinklig schneiden und zugleich hinsichtlich der Curve k^2 conjugirt sind. Den Strahlen eines eigentlichen Punktes S, der auf keiner Axe der Curve liegt (vgl. Seite 165), sind dann die Tangenten einer Parabel zugeordnet (Nr. 31), die auch von der Polare des Punktes S und von den Axen der Curve k^2 berührt wird. In S schneiden sich zwei Tangenten dieser Parabel rechtwinklig. Jede gemeinschaftliche Tangente der Parabel und der Curve k^2 berührt k^2 in dem Fusspunkte einer von S an k^2 gezogenen Normale. (Vergl. Nr. 65.)

70. Werden bezüglich einer Parabel je zwei conjugirte Punkte, die auf einem Durchmesser liegen, einander zugeordnet, so sind den Punkten einer beliebigen Geraden g die Punkte einer Parabel γ^2 zugeordnet, welche dieselben Durchmesser hat, wie die gegebene (vgl. Seite 107). Jedem begrenzten Theile der Ebene ist ein ihm gleicher Theil zugeordnet.

71. Werden in einem Bündel ein Kegel K^2 zweiter Ordnung und ein bestimmter Strahl u angenommen, so können in ihm je zwei Strahlen a, a_1 einander zugeordnet werden, die in Bezug auf K^2 conjugirt sind und mit u in einer Ebene liegen. Beschreibt dann a eine Ebene α, so beschreibt a_1 einen Kegel zweiter Ordnung, der durch u und den Polstrahl der Ebene α geht und jeden in α oder in der Polarebene von u liegenden Strahl von K^2 enthält (vergl. Seite 107). — Wie lautet der reciproke Satz?

72. Die in Nr. 68, 69, 70 und 71 besprochenen geometrischen Beziehungen gehören zu den „Verwandtschaften zweiten Grades", von denen in der zweiten Abtheilung ausführlicher die Rede sein wird; sie können benutzt werden zur Verwandlung einfacher Gebilde in complicirtere. Von diesen Verwandtschaften verdient die unter dem Namen „Princip der reciproken Radien" bekannte Inversion hier einen besonderen Platz; denn sie ist nicht blos für die synthetische Geometrie, sondern auch für gewisse Untersuchungen der mathematischen Physik und der Functionentheorie von grosser Wichtigkeit. Dieses Verwandlungs-Princip stellt sich dar als ein sehr specieller Fall einer früher (Seite 107) angegebenen Verwandtschaft zweiten Grades, wie Sie gleich bemerken werden.

5. Die Inversion oder das Princip der reciproken Radien.

73. In Bezug auf einen Kreis vom Radius r und dem Mittelpunkte M heissen zwei Punkte P, P_1 „invers", wenn sie mit M in einer Geraden liegen und hinsichtlich des Kreises conjugirt sind. Sie sind durch die Endpunkte eines Kreisdurchmessers harmonisch getrennt, und es ist folglich (Seite 50):

$$MP \,.\, MP_1 = r^2 \text{ oder } MP = \frac{r^2}{MP_1}.$$

Das Produkt der Radii vectores von zwei inversen Punkten ist also constant, oder der Radius vector eines beliebigen Punktes P ist demjenigen des inversen Punktes P_1 umgekehrt proportional. Deshalb hat dieses Abbildungsverfahren der „Inversion" von Liouville*) den Namen „Princip der reciproken Radien" erhalten. M heisst das „Centrum" und r^2 die „Potenz" der Inversion. Zu jedem von dem Kreise eingeschlossenen Punkte ist ein ausserhalb gelegener Punkt und zu jedem unendlich fernen Punkte der Ebene ist der Mittelpunkt M invers; die Punkte der Kreislinie fallen mit ihren inversen Punkten zusammen.

74. Die Polare des Punktes P in Bezug auf den gegebenen Leitkreis steht in dem inversen Punkte P_1 auf der Geraden MP senkrecht. Zu den Punkten P, Q, R, ... einer beliebigen Geraden g findet man also die inversen Punkte P_1, Q_1, R_1, ..., indem man aus dem Pole G von g auf die resp. Geraden MP, MQ, MR, ... Normalen fällt. Daraus folgt:

„Zu einer beliebigen Geraden g ist ein Kreis γ invers, dessen „zu g normale Durchmessersehne von dem Inversionscentrum M „und dem Pole G der Geraden begrenzt wird."

Umgekehrt ist zu jedem durch M gehenden Kreise γ eine Gerade g invers; denn die Verbindungslinie von zwei Punkten A, B, deren inverse Punkte A_1, B_1 auf γ liegen, ist zu einem Kreise invers, der durch A_1, B_1 und M geht und folglich mit γ identisch ist. Möbius**) nennt wegen dieser Eigenthümlichkeit die

---

*) Liouville in seinem „Journ. de Mathématiques", I. Série T. XII. p. 265.

**) Moebius in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Leipzig 1855, Bd. II, S. 531, und in den Berichten über die Verhandlungen derselben Gesellschaft von 1853, S. 14 oder Gesammelte Werke II, S. 243 und 205.

vorliegende Verwandtschaft zweiten Grades eine „Kreisverwandtschaft“.

75. Zieht man zu der Geraden g eine Parallele durch das Inversionscentrum M, so berührt diese in M den zu g inversen Kreis γ, weil sie ebenso wie g auf dem Durchmesser MG von γ senkrecht steht. Wir schliessen daraus:

„Zwei beliebige Gerade f, g der Ebene schneiden sich unter „denselben Winkeln, wie die zu ihnen inversen Kreise φ, γ.“

Zwei unendlich kleine inverse Dreiecke haben demnach gleiche Winkel und sind ähnlich; oder mit anderen Worten:

„Durch Inversion wird die Ebene conform (isogonal, winkel„gleich) auf sich selbst abgebildet, sodass die kleinsten Theile „von je zwei inversen Figuren ähnlich sind.“

Nur auf den unendlich kleinen Theil der Ebene, welcher den Mittelpunkt M umgiebt, findet dieser Satz keine Anwendung.

76. Weil eine Gerade als Kreis von unendlich grossem Radius aufgefasst werden kann, so dürfen wir den Satz, dass jedem durch M gehenden Kreise eine Gerade invers ist, und seine Umkehrung (Nr. 74) als Specialfälle des folgenden Satzes ansehen:

„Zu jedem Kreise $\varkappa$ ist ein Kreis $\varkappa_1$ invers; M ist ein Aehn„lichkeitspunkt von $\varkappa$ und $\varkappa_1$.“

Um diesen allgemeineren Satz zu beweisen, nehmen wir auf $\varkappa$ einen festen Punkt P und einen beweglichen Q an, und bezeichnen mit P_1 und Q_1 die beiden zu ihnen inversen Punkte, mit P' und Q' dagegen die Punkte, in denen $\varkappa$ von den resp. Secanten MP und MQ zum zweiten Male geschnitten wird. Dann ist wegen des Satzes über die Abschnitte von Kreissecanten:

$$MP \,.\, MP' = MQ \,.\, MQ',$$

und wegen des Princips der reciproken Radien:

$$MP \,.\, MP_1 = MQ \,.\, MQ_1 \;(= r^2);$$

folglich auch:

$$MP' : MP_1 = MQ' : MQ_1 \quad \text{und} \quad \Delta\, MP'Q' \sim \Delta\, MP_1Q_1.$$

Wenn also Q und damit zugleich Q' den Kreis $\varkappa$ durchläuft, so beschreibt Q_1 eine zu $\varkappa$ ähnliche und ähnlich liegende Curve, d. h. gleichfalls einen Kreis $\varkappa_1$. Und zwar ist M ein Aehnlichkeitspunkt, und Q' und Q_1, sowie P' und P_1 sind „homologe“ Punkte der beiden Kreise $\varkappa$ und $\varkappa_1$.

77. „Jeder Kreis durch zwei inverse Punkte P, P_1 ist zu „sich selbst invers und schneidet den Leitkreis, dessen Punkte „mit ihren inversen zusammenfallen, rechtwinklig.“

Denn er hat mit seinem inversen Kreise die Punkte P, P_1 und zwei zu sich selbst inverse Punkte gemein. Er wird in den letzteren von zwei durch M gehenden Geraden berührt, weil $MP \,.\, MP_1 = r^2$ ist.

78. Von den Punkten P einer ebenen Curve k umhüllen die Polaren bezüglich des Leitkreises eine zu k polare Curve k'; fället man aber auf die Tangenten von k' Normalen aus dem Centrum M, so liegen deren Fusspunkte P_1 auf der zu k inversen Curve k_1 (Nr. 74). Zu einer Curve n-ter Ordnung ist demnach invers die Fusspunktcurve einer Curve n-ter Classe bezüglich des Inversionscentrums M; und jede Fusspunktcurve einer Curve n-ter Classe ist zu einer Curve n-ter Ordnung invers. Jede Fusspunktcurve eines Kegelschnittes insbesondere ist zu einem Kegelschnitt invers (Seite 104).

Zu einem Kegelschnitt k ist i. A. eine Curve vierter Ordnung k_1 invers; denn k_1 hat mit einer Geraden g so viele Punkte gemein, wie k mit dem zu g inversen Kreise, also höchstens vier Punkte. Den unendlich fernen Punkten von k entspricht das Inversionscentrum M auf k_1, und dieses ist ein Doppelpunkt der Curve k_1. Wenn der Kegelschnitt k durch das Inversionscentrum geht, so ist zu ihm, abgesehen von der unendlich fernen Geraden, eine Curve dritter Ordnung invers. Die Fusspunktcurven einer Ellipse oder Hyperbel sind i. A. von der vierten, die einer Parabel sind von der dritten Ordnung; sie sind nämlich zu je einem Kegelschnitt invers, der im Falle der Parabel durch das Inversionscentrum geht.

79. Denkt man sich in der Ebene zwei Punktfelder P, Q, R, ... und P_1, Q_1, R_1, ..., die zu einander invers sind, und dreht man sodann das eine der Felder um den Mittelpunkt M, bis jeder von seinen Punkten einen Halbkreis beschrieben hat, so liegen wiederum je zwei inverse Punkte, wie P, P_1 oder Q, Q_1, mit M auf einer Geraden, aber auf entgegengesetzten Seiten von M; und es ist wie früher:

$$MP \,.\, MP_1 = MQ \,.\, MQ_1 = MR \,.\, MR_1 = \ldots = \text{Const.}$$

Aber die „Potenz“, d. h. das constante Produkt der Radii vectores inverser Punkte, hat nicht mehr einen positiven, sondern einen negativen Werth. Wir erhalten so einen zweiten Fall der Inversion, der sich von dem ersteren auch dadurch unterscheidet, dass kein Punkt der Ebene mit seinem inversen zusammenfällt. Auch in diesem zweiten Falle ist die Ebene conform auf sich selbst abgebildet, zu jeder Geraden ist ein durch M gehender Kreis invers, und überhaupt zu jedem Kreise $\varkappa$ ein Kreis $\varkappa_1$; der Mittelpunkt M der Inversion ist auch in diesem Falle Aehnlichkeitspunkt von je zwei inversen Kreisen.

80. Auch die Punkte des Raumes können durch Inversion einander paarweise zugeordnet werden, indem man den Mittelpunkt M und den positiven und negativen Werth der Potenz willkürlich annimmt. Am leichtesten ist diese Verallgemeinerung durchzuführen, indem man zunächst die Punkte einer beliebig durch M gelegten Ebene einander zuordnet und sodann diese Ebene um eine durch M gehende Axe dreht. Zwei inverse Punkte der Ebene stellen dann bei jeder Lage der Ebene inverse Punkte des Raumes vor.

81. Dreht man die Ebene um die durch M gehende Centrale von zwei inversen Kreisen, so beschreiben die Kreise zwei inverse Kugeln; also:

„Zu jeder Kugel $\varkappa$ ist eine Kugel $\varkappa_1$ invers; M ist ein Aehnlich-
„keitspunkt von $\varkappa$ und $\varkappa_1$ (Nr. 76). Zu jeder Ebene η ist eine
„durch M gehende Kugel invers, die in M von einer zu η pa-
„rallelen Ebene berührt wird.“

Der letztere Satz ist als Specialfall des ersteren anzusehen, aber auch leicht besonders zu beweisen. — Weiter ergiebt sich daraus:

„Zwei beliebige Ebenen des Raumes schneiden sich unter den-
„selben Winkeln, wie die zu ihnen inversen Kugeln.“

Zwei unendlich kleine inverse Tetraëder haben demnach gleiche Flächenwinkel und folglich auch gleiche Kantenwinkel; sie sind (wie einige Ueberlegung lehrt) ähnlich, wenn die Potenz der Inversion negativ, und symmetrisch ähnlich, wenn sie positiv ist. Weil demnach ihre homologen Flächen allemal ähnlich sind, so ergiebt sich:

„Zwei inverse Flächen sind conform auf einander abgebildet.“

82. Um hiernach eine Kugel $\varkappa$ auf einer beliebigen Ebene η conform abzubilden, wähle man zum Inversionscentrum M einen der beiden Punkte von $\varkappa$, deren Berührungsebenen zu η parallel sind, und setze die Potenz gleich dem Produkte der beiden Abschnitte MP, MP_1, welche $\varkappa$ und η auf einer durch M gelegten Geraden begrenzen. Zu der Ebene η ist dann eine Kugel invers, die mit der gegebenen $\varkappa$ die Punkte P, M und die Berührungsebene in M gemein hat und folglich mit $\varkappa$ zusammenfällt. Also:

„Projicirt man eine Kugel $\varkappa$ (stereographisch) aus einem auf „ihr liegenden Punkte M auf eine Ebene η, die zu der Be- „rührungsebene von M parallel ist, so wird dadurch die Kugel „conform (isogonal, winkelgleich) auf der Ebene η abgebildet.“

Diese „stereographische Projection“ wurde schon 150 v. Chr. von Hipparch zur Abbildung der Himmelskugel benutzt; bei der Herstellung von Landkarten wird von ihr Gebrauch gemacht. Man erreicht dadurch, dass wenigstens die Winkel auf der Karte dieselbe Grösse haben wie die ihnen entsprechenden auf der Erdoberfläche; die Längen der verschiedenen Linien unserer Erdoberfläche sind auf den Landkarten allemal in veränderlichem Massstabe dargestellt, weil eine Kugelfläche sich nicht ohne Verzerrungen oder Faltungen auf einer Ebene ausbreiten lässt.

83. „Zu einem beliebigen Kreise ist allemal ein Kreis invers“; in diesem schneiden sich je zwei Kugeln, deren inverse durch jenen Kreis gehen. Wenn insbesondere der eine Kreis das Inversionscentrum M enthält, so artet der andere in eine Gerade aus (Nr. 74). Die Meridiane und Parallelkreise der Erdoberfläche gehen deshalb durch die stereographische Projection in zwei Büschel orthogonaler Kreise über; die Projectionen der Meridiane sind Kreise, die sich in zwei Punkten (den Projectionen des Nord- und des Südpoles) schneiden, und zu ihnen sind die Projectionen der Parallelkreise, die keinen reellen Punkt mit einander gemein haben, normal. Nur die durch M gehenden Kugelkreise werden in der Bildebene durch gerade Linien dargestellt. — Verlegt man insbesondere den Projections-Mittelpunkt M in den Nord- oder Südpol, so werden die Parallelkreise durch concentrische Kreise und die Meridiane durch deren Durchmesser abgebildet.

84. Zu drei beliebig angenommenen Kugeln kann man im Allgemeinen einen orthogonalen, d. h. sie rechtwinklig schneidenden Kreis construiren; dieser liegt in der Centralebene und sein Mittelpunkt ist ein Potenzpunkt der drei Kugeln. Nur dann wird die Construction unmöglich, wenn die drei Kugeln zwei Punkte oder einen Punkt mit einander gemein haben. — Wählt man nun einen Punkt jenes orthogonalen Kreises zum Mittelpunkte der Inversion, so wird der Kreis in eine Gerade transformirt, die drei Kugeln aber sind zu drei anderen Kugeln invers, die von der Geraden rechtwinklig geschnitten werden, und deren Mittelpunkte folglich auf der Geraden liegen. Drei Kugeln können demnach, wenn sie nicht durch einen und denselben Punkt gehen, allemal durch Inversion in drei andere Kugeln verwandelt werden, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, im anderen Falle dagegen in drei Ebenen.

85. Eine Schaar von Kugeln, die durch stetige Bewegung einer veränderlichen Kugel beschrieben ist, wird im Allgemeinen von einer Fläche F eingehüllt, die eine Schaar von kreisförmigen Krümmungslinien besitzt. Nämlich jede Kugel der Schaar wird von F längs der Kreislinie berührt, die sie mit der unmittelbar benachbarten Kugel der Schaar gemein hat; und weil die Normalen von F in den Punkten dieser Linie sich im Centrum der Kugel schneiden, so ist die Kreislinie eine Krümmungslinie von F. Wird nun die Fläche F durch Inversion in eine andere Fläche F_1 transformirt, so gehen zugleich jene Krümmungslinien über in kreisförmige Krümmungslinien von F_1, indem F_1 die Schaar von Kugeln einhüllt, welche zu der von F eingehüllten Schaar invers ist. Alle zu Rotationsflächen inversen Flächen besitzen deshalb je eine Schaar von kreisförmigen Krümmungslinien.

86. Eine der merkwürdigsten unter diesen Flächen ist die von Dupin entdeckte „Cyklide". Diese wird von einer veränderlichen Kugel umhüllt, die bei ihrer stetigen Bewegung fortwährend drei gegebene Kugeln berührt. Die Theorie dieser Cyklide können Sie auf Grund des Vorhergehenden leicht entwickeln, indem Sie die folgenden Sätze beweisen.

„Eine Dupin'sche Cyklide verwandelt sich durch Inversion „allemal wieder in eine Cyklide; sie kann, wenn das Inversions„centrum passend gewählt wird, sogar in eine Rotations-Cyklide „transformirt werden, die von einer um eine Axe sich drehenden „Kugel oder Ebene umhüllt wird (Nr. 84). Die Cyklide be„sitzt deshalb zwei Schaaren kreisförmiger Krümmungslinien, „und wird in ihnen von zwei Schaaren von Kugeln berührt; „die Mittelpunkte dieser Kugeln und Krümmungslinien liegen „mit je zwei der Krümmungslinien in zwei zu einander nor„malen Symmetrie-Ebenen der Cyklide. Jede Kugel der einen

„Schaar berührt alle Kugeln der anderen Schaar in den Punk- „ten einer kreisförmigen Krümmungslinie. Zwei Krümmungs- „linien können durch eine Kugel verbunden werden, wenn sie „zu derselben Schaar gehören; im anderen Falle haben sie einen „gemeinschaftlichen Punkt und schneiden sich in ihm recht- „winklig."

87. „Die Cyklide hat entweder keinen (reellen) Doppel- „punkt, oder zwei Knotenpunkte, in denen alle Krümmungs- „linien der einen Schaar sich schneiden, oder einen Cuspidal- „punkt, worin diese Krümmungslinien sich berühren. Von „diesen drei Hauptarten erhält man wesentlich verschiedene „Formen, wenn man die zugehörige Rotationscyklide trans- „formirt durch Inversionen, deren Mittelpunkte innerhalb, auf „oder ausserhalb der Rotationscyklide angenommen werden. „Die letzteren beiden Hauptarten können durch Inversion auf „einem geraden Kegel resp. Zylinder conform abgebildet „werden."

„Die Ebenen, in denen die Krümmungslinien der einen „oder der anderen Schaar (paarweise) liegen, schneiden sich „alle in einer Geraden; diese liegt in der einen Symmetrie- „Ebene und steht auf der anderen senkrecht. Die Cyklide wird „von gewissen zwei Ebenen in allen Punkten je eines Kreises „berührt. — Verbindet man die Krümmungslinien der einen „oder der anderen Schaar mit einem beliebigen Punkte M durch „Kugeln, so schneiden sich diese in einer Kreislinie."

„Wenn eine Cyklide sich in das Unendliche erstreckt, was „bei jeder der drei Hauptarten eintreten kann, so besitzt sie „zwei gerade Krümmungslinien, die sich rechtwinklig kreuzen. „Die Ebenen aller übrigen Krümmungslinien gehen theils durch „die eine, theils durch die andere von diesen beiden windschiefen „Geraden."

88. Aus den Curven zweiter Ordnung lassen sich durch Inversion verschiedene von den alten Griechen entdeckte Curven dritter und vierter Ordnung ableiten*). So ergiebt sich die Hippopede des Eudoxus, die sich selbst schneidende Achterlinie (∞), durch Inversion der Hyperbel aus deren Centrum. Sie ist

---

*) Wegen dieser Curven vgl. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Math. I S. 209 und 305—7.

zugleich Fusspunktcurve einer Hyperbel bezüglich ihres Centrums und wird zur Lemniscate, wenn die Hyperbel gleichseitig ist. Die Hippopede gehört zu den spirischen Linien des Perseus, in denen eine Rotationscyklide von den zu ihrer Rotationsaxe parallelen Ebenen geschnitten wird. Auch die Ellipse wird durch Inversion aus ihrem Mittelpunkte M in eine spirische Linie transformirt, die M zum isolirten Doppelpunkte hat. Die Parabel verwandelt sich durch Inversion aus ihrem Scheitelpunkte S in die zur Würfelverdoppelung benutzte Cissoide oder Epheulinie des Diokles; ihr Krümmungskreis in S wird in die osculirende Asymptote, ihr unendlich ferner Punkt in die Spitze S der Cissoide verwandelt. Auch die Fusspunktcurve der Parabel bezüglich ihres Scheitelpunktes ist eine Cissoide. Durch Inversion der gleichseitigen Hyperbel aus einem auf ihr liegenden Punkte M erhält man die Strophoide. Diese schneidet sich selbst rechtwinklig in M und ist wie die Cissoide von der dritten Ordnung; sie hat eine Asymptote, die zu dem Krümmungskreise der Hyperbel in M invers ist, und ist Fusspunktcurve einer Parabel für einen Punkt M der Leitlinie.

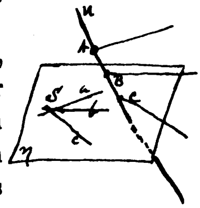
---

6. Regelschaaren und Regelflächen zweiter Ordnung. 16. Vortrag

36 **89.** Die Mittelpunkte der Kegel zweiter Ordnung, welche die sechs Kanten eines beliebigen windschiefen Sechsecks berühren, liegen auf einer Regelfläche zweiter Ordnung; diese geht durch die drei Hauptdiagonalen des Sechsecks (vgl. Seite 91).

37 **90.** Die drei Hauptdiagonalen eines windschiefen Sechsecks, dessen sechs Kanten auf einer Regelfläche zweiter Ordnung liegen, schneiden sich in einem Punkte.

38 **91.** Eine Punktreihe u und ein Büschel S erster Ordnung, die nicht in parallelen Ebenen liegen, seien projectiv auf einander bezogen; dann bilden die Strahlen, welche durch die Punkte von u parallel zu den entsprechenden Strahlen von S gezogen werden können, die eine Regelschaar eines hyperbolischen Paraboloides (vergl. Seite 94).



39 **92.** Eine Punktreihe u und ein Ebenenbüschel v seien projectiv, und ihre Träger nicht zu einander rechtwinklig; dann bilden die Normalen, die aus den Punkten von u auf die ent-

sprechenden Ebenen von v gefällt werden können, eine paraboloidische Regelschaar (Nr. 91).

40 **93.** Werden auf einer Regelfläche in den Punkten einer auf ihr liegenden Geraden Normalen errichtet, so bilden diese die eine Regelschaar eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides (Nr. 92; vgl. Seite 128).

94. Werden durch einen beliebigen Punkt zu den Strahlen einer Regelschaar Normalebenen gelegt, so bilden diese einen Ebenenbüschel erster oder zweiter Ordnung, jenachdem die Regelschaar einem hyperbolischen Paraboloid oder einem einschaligen Hyperboloid angehört (Seite 128).

95. Die Ebenen durch einen festen Punkt, die ein einschaliges Hyperboloid in Parabeln schneiden, umhüllen einen Kegel zweiter Ordnung; dieser ist dem Asymptotenkegel congruent und hat mit ihm die unendlich ferne Curve des Hyperboloides gemein.

41 **96.** Eine Regelfläche zweiter Ordnung zu construiren, von welcher gegeben sind zwei windschiefe Strahlen a, b und drei Punkte oder Berührungsebenen, die nicht mit a oder b incident sind.

97. Welches ist der Ort eines Punktes, der von einem gegebenen Punkte A durch eine Regelfläche zweiter Ordnung harmonisch getrennt ist? Welche Linie hat dieser geometrische Ort mit einer durch A gehenden Ebene gemein?

---

7. Projective Elementargebilde; geradlinige Flächen dritter Ordnung. II. Vortrag.

98. In einem Elementargebilde zweiter Ordnung zu drei gegebenen Elementen das vierte harmonische zu construiren, z. B. in einer Curve zweiter Ordnung zu drei Punkten den vierten harmonischen Punkt.

99. Ein Büschel erster und ein Büschel zweiter Ordnung liegen in einer Ebene und sind projectiv. Die Curve dritter Ordnung zu zeichnen, auf der sich die homologen Strahlen der Büschel schneiden (Seite 137).

100. Die zu Nr. 99 reciproke Aufgabe betrifft einen Strahlenbüschel dritter Ordnung; dieser soll gezeichnet werden.

101. Die Curve vierter Ordnung zu zeichnen, die von zwei projectiven Strahlenbüscheln zweiter Ordnung erzeugt wird (Seite 144).

102. Den von zwei projectiven Curven zweiter Ordnung erzeugten Strahlenbüschel vierter Ordnung zu zeichnen.

42 **103.** Auf einer Curve zweiter Ordnung liegt der Scheitelpunkt S eines Winkels von gegebener Grösse, der eine Sehne AB der Curve einschliesst. Dreht sich dieser Winkel um S, so beschreibt i. A. die Sehne AB einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung (Seite 141); wenn jedoch der Winkel ein rechter ist, so dreht sich AB um einen Punkt (Seite 160).

104. Einer Curve zweiter Ordnung ist ein Dreieck ABP umschrieben, dessen Grundlinie AB in einer gegebenen Tangente u der Curve liegt und von gegebener Länge ist. Gleitet diese Grundlinie auf u fort, so beschreibt die Spitze P des Dreiecks eine neue Curve zweiter Ordnung (Seite 141). Insbesondere ergiebt sich:

oder event. eine Gerade?

105. Wenn ein Winkel von gegebener Grösse einer Parabel umschrieben ist, und seine beiden Schenkel auf der Parabel hinrollen, so beschreibt sein Scheitelpunkt eine Hyperbel, die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte aber einen Büschel zweiter Ordnung. Nur der rechte Winkel macht eine Ausnahme (Lehrsatz 115).

106. Es seien gegeben ein Kegel zweiter Ordnung und zwei sich nicht schneidende Gerade a, b, die entweder zu zwei Strahlen des Kegels parallel laufen oder auf je einer seiner Berührungs-Ebenen senkrecht stehen. Bewegt sich dann eine dritte Gerade so, dass sie die Geraden a, b schneidet und zu einem veränderlichen Strahle des Kegels parallel oder (im zweiten Falle) zu einer veränderlichen Berührungsebene des Kegels normal ist, so beschreibt sie ein einschaliges Hyperboloid (Seite 138).

107. Eine Punktreihe u erster und eine Punktreihe k^2 zweiter Ordnung, die projectiv auf einander bezogen sind, aber weder in einer Ebene liegen, noch einen Punkt entsprechend gemein haben, erzeugen mit einander eine Schaar von Geraden, die wir eine „Regelschaar dritter Ordnung“ nennen wollen[*]. Eine beliebige Gerade g schneidet mindestens einen Strahl und höchstens drei Strahlen dieser Schaar, wie sich leicht ergiebt (Seite 137—8),

---

*) Vgl. Benno Klein, Ueber die geradlinige Fläche dritter Ordnung und ihre Abbildung auf einer Ebene, Inaug.-Diss., Strassburg 1876.

wenn man die Punktreihe u aus der Axe g durch einen Ebenenbüschel projicirt. Die Regelschaar dritter Ordnung wird aus einem beliebigen Punkte durch einen Ebenenbüschel dritter Ordnung projicirt (vgl. Seite 137), der einen Kegel dritter Classe einhüllt.

108. Jede durch u gehende und die Curve k^2 schneidende Ebene enthält zwei Strahlen der Regelschaar dritter Ordnung. Projicirt man aus dem Schnittpunkte D von zwei solchen Strahlen die projectiven Punktreihen u und k^2, so erhält man einen Büschel erster und einen Kegel zweiter Ordnung, die projectiv sind und zwei Strahlen entsprechend gemein haben, also (Seite 138) einen Ebenenbüschel d erster Ordnung erzeugen. Die Strahlenpaare der Regelschaar, die mit u in je einer Ebene liegen, schneiden sich demnach in den Punkten einer Geraden d, und aus jedem dieser Schnittpunkte wird die Regelschaar durch einen zu u und k^2 perspectiven Ebenenbüschel erster Ordnung projicirt. Wir nennen die beiden windschiefen Geraden u und d die „Leitlinien" der Regelschaar dritter Ordnung, weil sie alle Strahlen der Schaar schneiden. Nur dann fällt d mit u zusammen, wenn u die Curve k^2 schneidet; in diesem Specialfalle ist die Leitlinie u zugleich ein Strahl der Regelschaar.

109. Aus einem Punkte S, der auf einem Strahle a der Regelschaar dritter Ordnung, jedoch auf keiner der Leitlinien u und d liegt, werden die projectiven Punktreihen u und k^2 durch einen Büschel erster und einen Kegel zweiter Ordnung projicirt, die den Strahl a entsprechend gemein haben und folglich (Seite 139) einen zu u und k^2 perspectiven Ebenenbüschel zweiter Ordnung erzeugen. Durch diesen Büschel zweiter Ordnung wird also die Regelschaar dritter Ordnung aus dem beliebig auf ihr liegenden Punkte S projicirt. Da der Büschel projectiv ist zu dem Ebenenbüschel d, welcher ebenfalls zu den Punktreihen u und k^2 perspectiv ist, so ergiebt sich:

110. Die Regelschaar dritter Ordnung wird auch erzeugt durch den Ebenenbüschel d erster Ordnung, auf dessen Axe die Strahlen der Schaar sich paarweise schneiden, und durch einen zu d projectiven Ebenenbüschel S zweiter Ordnung, dessen Mittelpunkt beliebig auf der Regelschaar angenommen werden kann. Diese zweite Erzeugungsart ist der zuerst angegebenen reciprok, und die Regelschaar dritter Ordnung ist folglich zu sich selbst reciprok. Gehen wir aus von der zweiten Erzeugungsart der

Schaar, so gelangen wir zu Sätzen, die den vorhin bewiesenen reciprok sind. So ergiebt sich u. A.:

Die Regelschaar dritter Ordnung wird aus einem beliebigen Punkte, der auf einem ihrer Strahlen liegt, durch einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung projicirt.

Die Regelschaar dritter Ordnung wird von einer beliebigen Ebene, die durch einen ihrer Strahlen geht, in einer Curve zweiter Ordnung geschnitten.

Alle solche Schnittcurven und projicirenden Ebenenbüschel zweiter Ordnung sind zu einander, zu der Punktreihe erster Ordnung u und zu dem Ebenenbüschel erster Ordnung d projectiv. Die Schnittcurven zweiter Ordnung liegen zu dem Büschel d und zu allen projicirenden Ebenenbüscheln zweiter Ordnung perspectiv.

111. Die Regelschaar dritter Ordnung liegt auf einer geradlinigen Fläche F^3 dritter Ordnung, die von einer beliebigen Geraden in höchstens drei Punkten und von einer beliebigen Ebene in einer Curve dritter Ordnung geschnitten wird. Durch die Leitlinie d geht die Fläche F^3 zweimal, und auf d liegt von jeder ebenen Schnittlinie der Fläche ein eigentlicher oder isolirter Doppelpunkt. Die Ebenen, welche durch ~~die~~ Strahl~~en~~ der Regelschaar dritter Ordnung gehen, schneiden die geradlinige Fläche F^3 in diesen Strahlen und in je einer Curve zweiter Ordnung; diese Curve wird von dem zugehörigen Strahle der Regelschaar in zwei Punkten geschnitten, von denen der eine auf der Doppellinie d liegt, während in dem anderen die Fläche F^3 von der Curvenebene berührt wird. Die Ebenen durch die Strahlen der Regelschaar berühren demnach die Fläche F^3 dritter Ordnung; die Ebenen der Leitlinie u enthalten jene Strahlen paarweise und sind doppelt-berührende Ebenen von F^3.

112. Wir unterscheiden drei Arten von geradlinigen Flächen dritter Ordnung. Nämlich eine der auf F^3 liegenden Curven k^2 zweiter Ordnung kann den Punkt, worin ihre Ebene die Axe u der doppelt-berührenden Ebenen schneidet, entweder einschliessen, oder ausschliessen, oder sie kann durch ihn gehen; und ganz ebenso verhält sich dann jeder andere Kegelschnitt der Fläche. In dem ersten Falle liegen (wie aus der ersten Erzeugungsart Nr. 107 sich ergiebt) in jeder Ebene von u zwei Strahlen der Regelschaar dritter Ordnung, und zugleich schneiden sich in jedem Punkte von d zwei Strahlen der Schaar. In dem zweiten Falle trennen die beiden sogenannten Cuspidal-Ebenen der Fläche, welche durch u gehen und die Curve k^2 zweiter Ordnung berühren, die eigentlichen doppelt-berührenden Ebenen und die eigentlichen Doppelpunkte der Fläche von den „isolirten", die gleich den eigentlichen durch u gehen resp. auf d liegen. Der dritte Fall endlich ist als Grenzfall der beiden ersteren aufzufassen; wenn er eintritt, so fallen die beiden Leitlinien u und d (und damit zugleich die beiden Cuspidalebenen) zusammen.

113. An zwei windschiefen Geraden u, d und einer Curve zweiter Ordnung, die von d geschnitten wird, aber weder mit d noch mit u in einer Ebene liegt, gleite eine Gerade hin; diese Gerade beschreibt dann eine geradlinige Fläche dritter Ordnung (Nr. 107), deren Doppelpunkte auf d liegen und deren doppeltberührende Ebenen durch u gehen. — Wie lautet der reciproke Satz?

---

8. Involutionen. 12. Vortrag.

45 **114.** Wird auf einer Tangente eines Kegelschnittes eine Involution angenommen, und zieht man aus deren zugeordneten Punkten je zwei neue Tangenten an die Curve, so schneiden sich diese auf einer bestimmten Geraden (Seite 148—9). Insbesondere folgt:

46 **115.** Die Scheitelpunkte aller rechten Winkel, die einer Parabel umschrieben werden können, liegen auf einer Geraden; ebenso die Spitzen aller umschriebenen gleichschenkligen Dreiecke, deren Grundlinien in einer gegebenen Tangente der Parabel liegen.

116. Die Spitzen aller einem Kegelschnitt umschriebenen Dreiecke, deren Grundlinien in einer gegebenen Tangente liegen und durch deren Berührungspunkt A gehälftet werden, liegen (nach Nr. 114) in einer Geraden, nämlich in dem durch A gehenden Durchmesser der Curve. Die Geraden, die in jedem Dreiecke die Berührungspunkte der übrigen beiden Seiten verbinden, sind zur Grundlinie parallel.

117. Drehen sich zwei Ebenen um feste Gerade u, u_1 so, dass sie fortwährend zu conjugirten Durchmessern eines gegebenen Kegelschnittes parallel laufen, so beschreibt ihre Schnittlinie eine durch u und u_1 gehende Kegel- oder Regelfläche zweiter Ordnung.

118. Zwei projective Strahlen- oder Ebenenbüschel oder
43 Punktreihen erster Ordnung sollen in involutorische Lage gebracht p. 148
werden (vergl. Nr. 18).

119. Von einer Involution auf einer Geraden sind zwei Punktepaare A, A_1 und B, B_1 gegeben; man construire mittelst des vollständigen Vierecks zu irgend einem fünften Punkte C den zugeordneten C_1 (Seite 155), und bestimme insbesondere den Mittelpunkt der Involution, dessen zugeordneter Punkt unendlich fern liegt.

120. Von einem Kegelschnitt sind zwei paar conjugirte Durchmesser bekannt; man zeichne zu einem beliebigen fünften Durchmesser den conjugirten mit Hülfe eines vollständigen Vierseits (Seite 149 und 155).

47 **121.** Zieht man durch irgend einen Punkt Parallelen zu den drei paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks, so erhält man drei paar Strahlen einer Involution (Seite 155). Daraus folgt:

48 **122.** Wenn zwei paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks sich rechtwinklig schneiden, so sind auch die letzten beiden Gegenseiten zu einander normal (Seite 160). Oder: Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, dem „Höhenpunkte" des Dreiecks.

49 **123.** Alle Curven zweiter Ordnung, welche durch die Eckpunkte und den Höhenpunkt eines beliebigen Dreiecks gehen, sind gleichseitige Hyperbeln (Seite 157—8, vergl. Nr. 122). Einem beliebigen Viereck kann allemal eine gleichseitige Hyperbel umschrieben werden; diese geht durch die Höhenpunkte der vier von den Eckpunkten gebildeten Dreiecke.

124. Die Seiten eines beliebigen Dreiecks bilden mit der unendlich fernen Geraden der Ebene ein vollständiges Vierseit, dessen drei paar Gegenpunkte aus dem Höhenpunkt des Dreiecks durch drei paar normale Strahlen projicirt werden. Daraus und aus dem zum Lehrsatze des Desargues reciproken Satze folgt (vergl. Seite 155 und 157):

50 **125.** In dem Höhenpunkte jedes Tangentendreiecks einer Parabel schneiden sich zwei Tangenten der Parabel rechtwinklig. Die Höhenpunkte der Tangentendreiecke einer Parabel liegen folglich auf einer Geraden, der Leitlinie (Nr. 115; vgl. Seite 168). Insbesondere liegen die Höhenpunkte der vier Dreiecke, die in einem vollständigen Vierseit enthalten sind, auf einer Geraden.

51 **126.** Ist einer Ellipse oder Hyperbel ein Rechteck und ist

diesem ein Kreis umschrieben, so schneiden sich in jedem Punkte S des Kreises zwei Tangenten der Curve rechtwinklig (Seite 157 u.); denn die zwei paar gegenüberliegenden Eckpunkte des Rechtecks werden aus S durch zwei paar rechtwinklige Strahlen projicirt. Daraus schliessen wir: Die Scheitel aller rechten Winkel, die einer Ellipse oder Hyperbel umschrieben werden können, liegen auf einem Kreise. — Dieser Satz kann als Specialfall des folgenden betrachtet werden.

127. Werden aus je zwei conjugirten Punkten einer Involution u an eine Curve k zweiter Ordnung Tangenten gezogen, so schneiden sich diese i. A. auf einer anderen Curve zweiter Ordnung.

Die Verbindungslinien der Punkte, die eine Curve zweiter Ordnung mit je zwei conjugirten Strahlen einer Involution S gemein hat, bilden i. A. einen Büschel zweiter Ordnung*).

Eine Ausnahme tritt ein, wenn die Curve k von der Geraden u berührt wird (Nr. 114). Im Allgemeinen kann der Curve ein Vierseit $abcd$ umschrieben werden, von welchem zwei Gegenpunkte ac und bd mit conjugirten Punkten P, P_1 von u zusammenfallen. Wenn nun im Punkte S zwei Tangenten von k sich schneiden, die durch zwei andere conjugirte Punkte Q, Q_1 von u gehen, so bilden diese Tangenten SQ, SQ_1 mit den Strahlenpaaren SP, SP_1 und SR, SR_1, durch welche zwei paar Gegenpunkte P, P_1 und R, R_1 des Vierseits $abcd$ aus S projicirt werden, eine Involution (Seite 157), und es gehen folglich auch die Strahlen SR und SR_1 durch conjugirte Punkte von u. Bezieht man also die Büschel R, R_1 projectiv so auf einander, dass ihre homologen Strahlen durch je zwei conjugirte Punkte von u gehen, so erzeugen sie eine Curve zweiter Ordnung, den geometrischen Ort des Punktes S. — Man kann auch sagen: „Solche Tangenten einer Curve zweiter Ordnung, die durch zwei gegebene Punkte harmonisch getrennt sind, schneiden sich im Allgemeinen auf einer Curve zweiter Ordnung." So ausgedrückt ist der Satz links ein Specialfall des folgenden, dessen Beweis wir unterdrücken:

*) Dieser Büschel zweiter Ordnung zerfällt in zwei Büschel erster Ordnung, wenn die Curve von zwei conjugirten Strahlen der Involution S berührt wird. Er umhüllt einen Kreis, wenn die Involution rechtwinklig und mit der Curve concentrisch ist.

128. Die Tangenten einer Curve zweiter Ordnung, die bezüglich einer anderen Curve zweiter Ordnung conjugirt sind, schneiden sich im Allgemeinen auf einer dritten Curve zweiter Ordnung.

Die Punkte einer Curve zweiter Ordnung, die bezüglich einer anderen Curve zweiter Ordnung conjugirt sind, liegen im Allgemeinen auf je einer Tangente einer dritten Curve zweiter Ordnung.

Man findet leicht, dass die dritte Curve (links) durch die Berührungspunkte einer jeden gemeinschaftlichen Tangente der beiden ersteren geht. Also:

129. Wenn zwei Kegelschnitte vier Tangenten gemein haben, so liegen deren acht Berührungspunkte auf einem dritten Kegelschnitte.

Wenn zwei Kegelschnitte vier Punkte gemein haben, so berühren deren acht Tangenten einen dritten Kegelschnitt.

130. Wenn von den drei Kreisen, welche die Diagonalen eines vollständigen Vierseits zu Durchmessersehnen haben, irgend zwei sich schneiden, so geht auch der dritte durch die beiden Schnittpunkte. Die Schenkel jedes rechten Winkels, der einen dieser Schnittpunkte zum Scheitel hat, berühren eine dem Vierseit eingeschriebene Curve zweiter Ordnung (vgl. Seite 157—8).

131. Die drei paar Gegenpunkte eines Tangentenvierseits des Kreises werden aus dem Mittelpunkte des Kreises durch eine symmetrische Involution projicirt (vgl. Seite 175).

132. Zieht man an eine Curve zweiter Ordnung durch den Mittelpunkt M einer Sehne zwei Secanten, so bestimmen diese auf der Curve ein vollständiges Viereck; die übrigen zwei paar Gegenseiten des Vierecks begrenzen auf der Sehne zwei Strecken, die ebenfalls in M gehälftet werden (Seite 157).

133. Die Axen, aus denen eine hyperbolische Punktinvolution u erster Ordnung durch symmetrische Ebeneninvolutionen projicirt wird, bilden einen Strahlencomplex zweiten Grades. Denn durch einen beliebigen Punkt gehen von ihnen unendlich viele, und zwar bilden diese einen orthogonalen Kegel zweiter Ordnung, der die beiden Doppelpunkte der Involution u enthält. Der Complex geht durch Drehung um die Gerade u und durch Spiegelung an einer beliebig durch u gelegten Ebene in sich selbst über; er enthält alle Strahlen der beiden Doppelpunkte der Involution u.

f

134. Die Axen, aus denen eine elliptische Punktinvolution u erster Ordnung durch orthogonale Ebeneninvolutionen projicirt wird, bilden eine Strahlencongruenz zweiter Ordnung zweiter Classe, d. h. durch einen Punkt gehen i. A. zwei und in einer Ebene liegen i. A. zwei von ihnen. Die Congruenz geht in sich selbst über durch Drehung um die Gerade u und durch Spiegelung an einer Ebene, die beliebig durch u geht oder im Mittelpunkte der Involution zu u normal ist. Diese zu u normale Ebene enthält unendlich viele Strahlen der Congruenz, die einen Kreis umhüllen.

---

9. Brennpunkte der Curven zweiter Ordnung. 13. Vortrag.

52 **135.** Von einer Parabel den Brennpunkt F zu construiren.

a. Der Brennpunkt F liegt auf der Normalen, die auf einer beliebigen Tangente in ihrem Schnittpunkte mit der Scheiteltangente errichtet wird (Seite 172).

b. Der Brennpunkt hälftet den Abschnitt der Axe, welcher zwischen zwei conjugirten und zu einander rechtwinkligen Geraden liegt, z. B. zwischen der Tangente und der Normale eines Parabelpunktes (Seite 167).

c. Jede Parabeltangente bildet mit einem beliebigen Durchmesser dieselben Winkel, wie mit der Verbindungslinie ihres Berührungspunktes und des Brennpunktes F (Seite 167).

d. Durch den Brennpunkt geht die Verbindungslinie von je zwei Parabelpunkten, deren Tangenten sich rechtwinklig schneiden (Seite 168).

e. Alle den Tangentendreiecken der Parabel umschriebenen Kreise gehen durch den Brennpunkt F (Seite 175).

53 **136.** Von einer Parabel die Leitlinie (Directrix) f zu construiren.

a. Die Leitlinie ist die Polare des Brennpunktes.

b. Auf der Leitlinie f schneiden sich je zwei zu einander rechtwinklige Parabeltangenten (Seite 168).

c. Die Höhenpunkte aller Tangentendreiecke der Parabel liegen auf der Leitlinie (Nr. 125).

137. Die Leitlinien aller einem Dreieck eingeschriebenen Parabeln gehen durch den Höhenpunkt des Dreiecks; die Brennpunkte der Parabeln liegen auf dem, dem Dreieck umschriebenen Kreise. Fället man aus irgend einem Punkte dieses Kreises Normalen auf die Dreieckseiten, so liegen deren drei Fusspunkte in einer Geraden (Steiner), nämlich in der Scheiteltangente von einer der eingeschriebenen Parabeln.

138. Von einer Ellipse oder Hyperbel die beiden Brennpunkte zu construiren:

a. Als Doppelpunkte einer in der Hauptaxe liegenden Involution (Seite 166).

b. Mittelst der Scheiteltangenten der Hauptaxe. Diese begrenzen auf jeder dritten Tangente eine Strecke, die aus den Brennpunkten durch rechte Winkel projicirt wird (Seite 173).

c. Mittelst des Kreises, der die Curve in den Scheitelpunkten der Hauptaxe berührt. Errichtet man auf einer Tangente der Curve zwei Normalen in den beiden Punkten, die sie mit dem Kreise gemein hat, so schneiden diese Normalen die Hauptaxe in den Brennpunkten (Seite 172).

d. Indem man einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Katheten conjugirt sind und dessen Hypotenuse in der Nebenaxe liegt, einen Kreis umschreibt. Dieser schneidet die Hauptaxe in den beiden Brennpunkten (Seite 166).

e. Mit Hülfe des Satzes, dass die Summe resp. Differenz der beiden Brennstrahlen eines Curvenpunktes constant ist (Seite 171).

139. Eine Curve zweiter Ordnung zu construiren aus einem Brennpunkte, der zugehörigen Leitlinie und einem Punkte oder einer Tangente (Seite 168 und 170). Eine Parabel zu construiren aus dem Brennpunkte F und zwei Punkten oder Tangenten.

140. Eine Curve zweiter Ordnung zu construiren aus einem Brennpunkte und entweder drei Tangenten oder zwei Tangenten und einem ihrer Berührungspunkte (Seite 175). In beiden Fällen sofort den zweiten Brennpunkt zu zeichnen (Seite 168).

141. Werden von jeder einem Dreieck ABC eingeschriebenen Curve zweiter Ordnung die Brennpunkte einander zugeordnet, so wird dadurch zwischen den Punkten der Ebene eine involutorische Verwandtschaft zweiten Grades hergestellt, von welcher A, B, C die drei Hauptpunkte sind. Wenn nämlich der eine Brennpunkt eine beliebige Gerade u beschreibt, so beschreibt der andere eine durch A, B, C gehende und zu u projective Curve zweiter Ordnung (Seite 168). Diese Curve wird ein Kreis, wenn u unendlich fern liegt (Seite 175). Die Mittellinien der Dreieckswinkel sind sich selbst zugeordnet. Jede Gerade und jeder Punkt der Ebene ist Axe bezw. Mittelpunkt von einer der eingeschriebenen Curven.

58 **142.** Eine Curve zweiter Ordnung zu construiren aus den beiden Brennpunkten und einem Punkte oder einer Tangente (Seite 171 und 172).

143. Die Winkel, welche confocalen Kegelschnitten aus einem beliebigen Punkte P ihrer Ebene umschrieben werden können, werden von zwei zu einander normalen Geraden gehälftet (Seite 166—7), und zwar von den Tangenten der beiden durch P gehenden Kegelschnitte.

60 **144.** Die Gegenseiten eines Vierecks, das aus einem Poldreieck einer Curve zweiter Ordnung und dessen Höhenpunkt besteht, sind durch die Brennpunkte der Curve harmonisch getrennt. 166-7

63 **145.** Sind von einer Curve zweiter Ordnung zwei Punkte A, B und ein Brennpunkt F gegeben, so liegt der andere Brennpunkt F_1 auf einem der beiden durch F gehenden Kegelschnitte, die A und B zu Brennpunkten haben. Denn weil $AF \pm BF$ gegeben ist, so muss $AF_1 \pm BF_1$ eine constante Grösse sein (vgl. Seite 171). — Die zu F gehörige Leitlinie schneidet die Gerade AB in einem der beiden Punkte, durch welche die Mittellinien der von FA und FB gebildeten Winkel gehen (Seite 169).

146. Eine Curve zweiter Ordnung zu construiren aus einem Brennpunkte, dem Mittelpunkte und einem Punkte oder einer Tangente (Nr. 142).

59 **147.** Das Produkt der Abstände eines Brennpunktes von zwei parallelen Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel ist constant (Seite 172); ebenso das Produkt der Abstände beider Brennpunkte von einer beliebigen Tangente.

148. Eine Ellipse zu zeichnen, deren Axenlängen gegeben sind:

a. auf Grund des Satzes Nr. 66;

b. mit Benutzung der vier Scheiteltangenten (Nr. 23 und 24);

c. mit Hülfe der Brennpunkte, die mittelst der Axenlängen zu construiren sind.

149. Eine Parabel zu construiren, wenn gegeben sind der Brennpunkt und die Leitlinie (Seite 170), oder der Brennpunkt, die Axe und ein Punkt oder eine Tangente, oder der Brennpunkt und die Scheiteltangente. Concentrische Kreise werden in ihren Schnittpunkten mit einer beliebigen Geraden s von den Tangenten einer Parabel berührt; diese hat s zur Scheiteltangente und den Mittelpunkt der Kreise zum Brennpunkt (Seite 172).

60 **150.** Die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei in der Ebene gegebene Kreise berühren, liegen auf zwei confocalen Curven zweiter Ordnung (vgl. Seite 171). Die Mittelpunkte der gegebenen beiden Kreise sind die Brennpunkte dieser Curven.

151. Alle Punkte der Ebene, die von einer Geraden und einem Kreise gleichen Abstand haben, liegen auf zwei confocalen Parabeln (vgl. Nr. 150).

0 **152.** Wenn der eine Schenkel eines Winkels von gegebener Grösse eine Curve zweiter Ordnung beständig berührt, indess der andere sich um einen ihrer Brennpunkte dreht, so beschreibt der Scheitelpunkt einen Kreis, der die Curve zweimal berührt (Seite 172); wenn jedoch die Curve eine Parabel ist, so beschreibt der Scheitelpunkt eine ihrer Tangenten.

---

10. Aufgaben zweiten Grades. 17. Vortrag.

15 **153.** Einer Curve zweiter Ordnung soll ein einfaches $n$eck so eingeschrieben werden, dass die Seiten der Reihe nach durch n gegebene, nicht auf der Curve liegende Punkte gehen.

154. Auf einer Geraden sind zwei paar Punkte gegeben; ein drittes Punktepaar zu construiren, welches jedes dieser beiden Paare harmonisch trennt. Vgl. p. 45.

155. Einer Curve zweiter Ordnung soll ein einfaches $n$eck umschrieben werden, dessen Eckpunkte der Reihe nach auf n gegebenen, die Curve nicht berührenden Geraden liegen.

156. In der Ebene ist ein einfaches Fünfeck gegeben; es soll ein zweites gezeichnet werden, das dem gegebenen um- und zugleich eingeschrieben ist.

157. Durch einen gegebenen Punkt sind zwei Strahlen so zu ziehen, dass sie auf zwei gegebenen Geraden u, v Strecken von gegebenen Längen begrenzen.

158. Zwischen den Geraden u, v soll eine Linie so gezogen werden, dass sie von zwei gegebenen Punkten aus unter rechten Winkeln gesehen wird.

66 **159.** Auf einer gegebenen Geraden eine Strecke zu bestimmen, die aus zwei gegebenen Punkten unter gegebenen Winkeln gesehen wird.

68 **160.** Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade so zu legen, dass sie ein gegebenes Dreieck hälftet, oder dass sie mit zwei seiner Seiten ein Dreieck von gegebenem Inhalt bildet.

161. Einem Dreieck soll ein anderes umschrieben werden, dessen eine Seite von zwei gegebenen Geraden begrenzt wird und dessen andere zwei Seiten einen Winkel von gegebener Grösse einschliessen.

162. In zwei projectiven Büscheln die homologen rechten Winkel zu construiren (Nr. 18).

163. Man bestimme in zwei projectiven Punktreihen, die in derselben Geraden liegen, homologe Punkte, die einen gegebenen Abstand haben; ebenso in zwei concentrischen projectiven Büscheln homologe Strahlen, die einen Winkel von gegebener Grösse einschliessen.

164. In zwei projectiven Punktreihen erster Ordnung bestimme man zwei homologe Strecken von gegebenen Längen.

165. Eine Curve zweiter Ordnung hat im Allgemeinen zwei conjugirte Durchmesser, die mit conjugirten Durchmessern einer anderen in derselben Ebene liegenden Curve zweiter Ordnung parallel laufen. Nur wenn beide Curven Hyperbeln sind, kann eine Ausnahme eintreten (Seite 209).

166. Einem Viereck eine Curve zweiter Ordnung zu umschreiben, die eine gegebene Gerade berührt (Seite 158). Einem
67 Vierseit eine Curve zweiter Ordnung so einzuschreiben, dass sie durch einen gegebenen Punkt geht.

167. In der Ebene von zwei Curven zweiter Ordnung giebt es mindestens einen reellen Punkt U, der in Bezug auf beide Curven eine und dieselbe Polare u hat (Nr. 68). Die beiden reellen oder conjugirt-imaginären Punkte von u, die in Bezug auf jede der beiden Curven conjugirt sind (vgl. Seite 209), bilden mit U ein gemeinschaftliches Poldreieck der Curven. Zwei in einer Ebene liegende Curven zweiter Ordnung haben demnach im Allgemeinen ein gemeinschaftliches Poldreieck; dieses hat mindestens einen reellen Eckpunkt und eine reelle Seite.

II. Focalaxen und cyklische Ebenen von Kegeln zweiter Ordnung. 18. Vortrag.

168. Dreht sich ein gegebener Flächenwinkel um seine Scheitellinie s, so umhüllt die Verbindungsebene der beiden Geraden, in denen seine Schenkel zwei durch einen Punkt von s gelegte Ebenen beziehungsweise schneiden, einen diese Ebenen berührenden Kegel zweiter Ordnung, der s zur Focalaxe hat (Seite 220). — Wie lautet der reciproke Satz?

169. Aus den reellen Focalaxen f, f' eines Kegels zweiter Ordnung werden die Winkel, welche die zu der Symmetrie-Ebene ff' normalen Berührungsebenen in den übrigen Berührungsebenen begrenzen, durch rechte Flächenwinkel projicirt (vgl. Seite 173).

170. Die reellen cyklischen Ebenen $\varkappa$, $\varkappa'$ eines Kegels zweiter Ordnung schneiden jeden Flächenwinkel, dessen Schenkel die beiden zu der Hauptaxe $\varkappa\varkappa'$ normalen Scheitelstrahlen mit einem beliebigen Strahle des Kegels verbinden, in zwei rechten Winkeln.

171. Alle Flächenwinkel, welche confocalen Kegeln zweiter Ordnung aus einem beliebigen Punkte P umschrieben werden können, werden von zwei bestimmten Ebenen gehälftet; diese schneiden sich rechtwinklig und berühren in P zwei der confocalen Kegel (vgl. Nr. 143).

172. Alle Winkel, die concyklischen Kegeln zweiter Ordnung in einer durch ihren Mittelpunkt gehenden Ebene eingeschrieben werden können, werden von zwei bestimmten, zu einander normalen Strahlen gehälftet (Nr. 171). In diesen beiden Strahlen berührt die Ebene zwei der concyklischen Kegel.

173. Wenn vier Berührungsebenen eines Kegels $\varkappa$ zweiter Ordnung sich paarweise in zwei Strahlen eines mit $\varkappa$ confocalen Kegels schneiden, so berühren sie einen Rotationskegel. Sie bilden ein Vierseit, dessen drei paar Gegenkanten auf drei mit $\varkappa$ confocalen Kegeln liegen (vgl. Seite 181—2, auch wegen des Beweises).

174. Die vier Schnittlinien eines Kegels $\varkappa$ zweiter Ordnung mit zwei beliebigen Berührungsebenen eines concyklischen Kegels liegen allemal auf einem Rotationskegel. Sie bilden ein Vierkant, dessen drei paar Gegenebenen von drei mit $\varkappa$ concyklischen Kegeln berührt werden.

175. Wird um einen sphärischen Kegelschnitt k ein unendlich dünner geschlossener Faden von gegebener Länge geschlungen und durch eine bewegliche Spitze A so auf der Kugelfläche gespannt gehalten, dass er sich an einen Bogen von k und an zwei in A convergirende sphärische Tangenten von k anlegt, so beschreibt die Spitze A bei ihrer Bewegung einen mit k confocalen Kegelschnitt auf der Kugel. Die Differenz aus der Summe der beiden Tangenten und dem von ihnen eingeschlossenen Kegelschnittbogen bleibt constant (vgl. Seite 183). Kegelschnittbögen, deren Differenz durch Kreisbögen genau dargestellt werden kann, lassen sich hiernach auf einem sphärischen Kegelschnitt leicht construiren.

176. Wenn ein sphärisches $m$eck einem sphärischen Kegelschnitt k umschrieben und einem mit k confocalen Kegelschnitt k_1 eingeschrieben ist, so giebt es unendlich viele sphärische $m$ecke, welche k um- und zugleich k_1 eingeschrieben sind. Sie alle haben gleichen Umfang (vgl. Seite 187).

Von concyklischen sphärischen Kegelschnitten gilt der nämliche Satz; nur haben die $m$ecke nicht gleichen Umfang, sondern gleiche Winkelsumme und somit gleichen Inhalt.

177. Unter den Kegeln zweiter Ordnung sind ausser den geraden oder Rotationskegeln hervorzuheben:

a. die gleichseitigen (Schröter), denen rechtwinklige Dreikante eingeschrieben werden können,
b. die Kegel, denen rechtwinklige Dreikante umschrieben werden können,
c. die orthognalen Kegel (Schröter), deren cyklische Ebenen zu zwei Kegelstrahlen normal sind (Nr. 38),
d. die Kegel, deren Focalaxen zu zwei Berührungsebenen normal sind,
e. die Kegel des Pappus*), die von den Ebenen zweier Geraden in je zwei normalen Strahlen geschnitten werden (die beiden Geraden sind die Polstrahlen der cyklischen Ebenen),
f. die Kegel des Hachette*), an welche von den Strahlen zweier Ebenen je zwei normale Berührungsebenen gehen,
g. und h. die Kegel, deren Focalaxen oder deren cyklische Ebenen sich rechtwinklig schneiden.

---

*) Vgl. Theod. Meyer, Ueber die Kegel des Pappus und des Hachette, Strassburger Inaug.-Diss. Berlin 1884.

178. Die Mittellinien von zwei veränderlichen Nebenwinkeln beschreiben einen Kegel des Pappus, wenn der eine Schenkel sich in einer Ebene γ bewegt, indess der andere g festbleibt. Die Ebene γ ist eine cyklische des Kegels, und g ist ihr Polstrahl.

Aus einem Punkte P einer Kugel werden die grössten Kugelkreise durch Kegel des Pappus projicirt.

Siehe Vorwort.

12. Polvierecke und Polvierseite von Kegelschnitten.

179. Ein vollständiges Viereck nenne ich ein „Polviereck" eines Kegelschnittes γ^2, wenn von seinen sechs Seiten jede ihrer Gegenseite conjugirt ist in Bezug auf γ^2. Ebenso soll ein vollständiges Vierseit ein „Polvierseit" des Kegelschnittes heissen, wenn jeder von seinen sechs Eckpunkten dem ihm gegenüber liegenden Eckpunkte conjugirt ist. Die Polaren der Eckpunkte eines Polvierecks bilden ein Polvierseit; und zwar gehen die sechs Seiten des Vierecks durch die sechs Eckpunkte der Vierseits.

69 **180.** Wenn zwei paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks aus conjugirten Strahlen bestehen, so gilt das Gleiche von dem dritten Paare (Hesse), und das Viereck ist ein Polviereck des Kegelschnittes γ^2. Denn die Polare eines beliebigen Eckpunktes schneidet das Viereck in einer Involution (Seite 155), und zwar jene beiden (und folglich alle drei) Paare von Gegenseiten in Paaren conjugirter Punkte; hieraus aber folgt, dass von jeder durch den Eckpunkt gehenden Seite der Pol auf der Gegenseite liegt. W. z. B. w.

Aehnlich beweist man den reciproken Satz von Hesse: Ein
70 vollständiges Vierseit ist ein Polvierseit von γ^2, wenn zwei paar Gegenpunkte von conjugirten Punkten gebildet werden.

181. Verbindet man die Eckpunkte A, B, C eines Dreiecks
71 mit den Polen der ihnen gegenüberliegenden Seiten, so gehen die drei Verbindungslinien durch einen Punkt D, der mit A, B und C ein Polviereck des Kegelschnittes γ^2 bildet (Nr. 180). Drei beliebig angenommene Eckpunkte A, B, C eines Polvierecks bestimmen also den vierten D. Sind insbesondere A und B conjugirt in Bezug auf γ^2, so bilden sie mit D ein Poldreieck von γ^2.
72 Jedes Viereck, das aus einem Poldreieck von γ^2 und einem beliebigen Punkte der Ebene besteht, ist ein Polviereck von γ^2

(Nr. 179). Es giebt auch uneigentliche Polvierecke, von deren Eckpunkten drei in einer Geraden liegen oder zwei sich vereinigen.

182. Bringt man die Seiten a, b, c eines Dreiecks zum Durchschnitt mit den Polaren der ihnen gegenüberliegenden Eckpunkte, so erhält man drei Punkte einer Geraden d, die mit a, b und c ein Polvierseit des Kegelschnittes γ^2 bildet (Nr. 180). Drei Seiten eines Polvierseits bestimmen also die vierte; nur wenn sie ein Poldreieck von γ^2 bilden, kann jede Gerade der Ebene als vierte Seite angenommen werden.

183. Wenn zwei Polvierecke $ABCD$ und $ABC'D'$ von γ^2 zwei Eckpunkte A, B mit
73 einander gemein haben, so liegen ihre sechs Eckpunkte auf einer Curve zweiter Ordnung, die unter Umständen in zwei conjugirte Gerade, AB und CD, zerfallen kann.

Wenn zwei Polvierseite von γ^2 zwei gemeinschaftliche Seiten haben, so berühren ihre sechs Seiten eine „Curve zweiter Classe“ (d. h. sie gehören einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung an). Diese Curve kann in zwei conjugirte Punkte zerfallen.

Nämlich die Strahlenbüschel A, B werden projectiv auf einander bezogen, wenn man jedem Strahle von A den ihm conjugirten Strahl von B zuweist. Es ist also $A(CDC'D') \barwedge B(DCD'C')$, und (nach Seite 152) folglich $A(CDC'D') \barwedge B(CDC'D')$, wie im Satze links behauptet wird.

184. Da ein Poldreieck von γ^2 durch jeden Punkt der Ebene zu einem Polviereck ergänzt wird, so ergeben sich aus dem vorhergehenden Doppelsatze sofort die folgenden Sätze:

Wenn ein Poldreieck und ein Polviereck von γ^2 einen gemeinschaftlichen Eckpunkt besitzen, so liegen ihre sechs Eckpunkte auf einer Curve zweiter Ordnung.

Wenn ein Poldreiseit und ein Polvierseit von γ^2 eine gemeinschaftliche Seite haben, so berühren ihre sechs Seiten eine Curve zweiter Classe.

Zwei beliebigen Poldreiecken eines Kegelschnittes γ^2 kann allemal eine Curve zweiter Ordnung umschrieben und eine Curve zweiter Classe eingeschrieben werden (vergl. auch Seite 153). Diese Curven können aber in zwei Gerade resp. zwei Punkte zerfallen.

185. Zwei Kegelschnitte γ^2 und γ_1^2, die in derselben Ebene liegen, haben unendlich viele gemeinschaftliche Polvierecke und Polvierseite. Man kann zwei Seiten a, b eines gemeinschaftlichen Polvierecks willkürlich annehmen; die ihnen gegenüberliegenden

Seiten a_1, b_1 verbinden die beiden Pole von a resp. b in Bezug auf γ^2 und γ_1^2 mit einander.

Wenn zwei gemeinschaftliche Polvierecke $ABCD$ und $AB'C'D'$ von γ^2 und γ_1^2 einen Eckpunkt A mit einander gemein haben, so liegen ihre sieben Eckpunkte auf einer Curve zweiter Ordnung.

Wenn zwei gemeinschaftliche Polvierseite von γ^2 und γ_1^2 eine Seite mit einander gemein haben, so berühren ihre sieben Seiten eine Curve zweiter Classe.

Ist nämlich $ABB'P$ ein Polviereck von γ^2 und $ABB'Q$ ein solches von γ_1^2, so haben die Curven zweiter Ordnung $(ABCDB'P)$ und $(ABCDB'Q)$ fünf gemeinschaftliche Punkte und fallen deshalb zusammen mit dem Kegelschnitt $(ABB'PQ)$; ebenso aber fallen die Curven zweiter Ordnung $(AB'C'D'BP)$ und $(AB'C'D'BQ)$ mit $(ABB'PQ)$ zusammen.

186. In Bezug auf drei beliebig gegebene Kegelschnitte γ^2, γ_1^2, γ_2^2 der Ebene hat eine Gerade a drei Pole, die im Allgemeinen nicht in einer Geraden liegen. Beschreibt a einen Strahlenbüschel U, so beschreiben diese Pole drei zu U und deshalb auch zu einander projective Punktreihen u, u_1, u_2; und von den Strahlen, welche die homologen Punkte von u und u_1 verbinden, gehen im Allgemeinen höchstens drei durch die entsprechenden Punkte von u_2 (Seite 136). Diese drei Strahlen, von denen mindestens einer reell ist, sind je einem Strahle von U conjugirt bezüglich der drei Kegelschnitte γ^2, γ_1^2, γ_2^2. Daraus ergiebt sich die eine Hälfte des Doppelsatzes:

Es giebt in der Ebene unendlich viele Paare von Strahlen, die in Bezug auf drei beliebige Kegelschnitte conjugirt sind. Diese Strahlenpaare umhüllen im Allgemeinen eine Curve dritter Classe; je zwei von ihnen bilden zwei paar Gegenseiten eines gemeinschaftlichen Polvierecks der drei Kegelschnitte (Nr. 180). Drei Tangenten, die von irgend einem Punkte U an die Curve dritter Classe gehen, bilden mit ihren conjugirten Tangenten die drei paar

Es giebt in der Ebene unendlich viele Paare von Punkten, die in Bezug auf drei beliebige Kegelschnitte conjugirt sind. Der Ort dieser Punktepaare ist im Allgemeinen eine Curve dritter Ordnung; je zwei von ihnen bilden zwei paar Gegenpunkte eines gemeinschaftlichen Polvierseits der drei Kegelschnitte. Drei Punkte, in denen irgend eine Gerade die Curve dritter Ordnung schneidet, bilden mit ihren conjugirten Curvenpunkten die drei paar

Gegenseiten eines solchen gemeinschaftlichen Polvierecks.

Gegenpunkte eines solchen gemeinschaftlichen Polvierseits.

13 Lineare Systeme und Gewebe von Kegelschnitten.

187. Wenn einem Polviereck eines Kegelschnittes γ^2 ein Kegelschnitt k^2 umschrieben ist, so stehen die beiden Curven γ^2 und k^2 in folgenden merkwürdigen Beziehungen zu einander:

a. Drei beliebige Punkte von k^2 bestimmen ein Polviereck von γ^2 (Nr. 181), dessen vierter Eckpunkt gleichfalls auf k^2 liegt.

b. Bringt man k^2 zum Durchschnitt mit zwei Geraden, die in Bezug auf γ^2 conjugirt sind, so erhält man die vier Eckpunkte eines Polvierecks von γ^2.

c. Der Curve k^2 können demnach dreifach unendlich viele Polvierecke, im Allgemeinen aber auch einfach unendlich viele reelle Poldreiecke von γ^2 eingeschrieben werden; jeder von γ^2 eingeschlossene Punkt der Curve k^2 ist Eckpunkt von einem dieser Poldreiecke.

d. Die Polare eines Punktes von k^2 bezüglich der Curve γ^2 schneidet die eine oder auch jede der beiden Curven in zwei reellen Punkten, die bezüglich der anderen Curve conjugirt sind.

e. Zwei Tangenten von γ^2, deren Berührungspunkte conjugirt sind in Bezug auf k^2, schneiden sich allemal in einem Punkte von k^2.

a_1. Drei beliebige Tangenten von γ^2 bestimmen ein Polvierseit von k^2, dessen vierte Seite gleichfalls Tangente von γ^2 ist.

b_1. Zieht man an γ^2 Tangenten aus zwei Punkten, die in Bezug auf k^2 conjugirt sind, so bilden diese Tangenten ein Polvierseit von k^2.

c_1. Der Curve γ^2 können demnach dreifach unendlich viele Polvierseite, im Allgemeinen aber auch einfach unendlich viele reelle Poldreiseite von k^2 umschrieben werden; jede von k^2 ausgeschlossene Tangente der Curve γ^2 gehört zu einem dieser Poldreiseite.

d_1. Aus dem Pole einer Tangente von γ^2 bezüglich der Curve k^2 gehen an die eine oder auch an jede der beiden Curven zwei reelle Tangenten, die bezüglich der anderen Curve conjugirt sind.

e_1. Zwei Punkte von k^2, deren Tangenten conjugirt sind in Bezug auf γ^2, liegen allemal auf einer Tangente von γ^2.

f. und f_1. Die Curve k^2 liegt entweder ganz ausserhalb γ^2 oder theils ausserhalb, theils innerhalb; keine der beiden Curven schliesst die andere ein.

188. Zum Beweise dieser Sätze diene Folgendes. Zwei Eckpunkte des Polvierecks von γ^2, welchem der Kegelschnitt k^2 umschrieben ist, bestimmen mit einem beliebigen dritten Punkte A von k^2 ein zweites, der k^2 eingeschriebenes Polviereck von γ^2 (Nr. 181 und 183); aus diesem zweiten aber kann ebenso ein drittes abgeleitet werden, von welchem zwei Eckpunkte A, B beliebig auf k^2 angenommen sind, und dieses dritte führt zu einem vierten, der k^2 eingeschriebenen Polviereck von γ^2, welches drei beliebige Punkte A, B, C von k^2 zu Eckpunkten hat. Damit ist der Satz a. bewiesen, woraus b. ohne Weiteres folgt. — Sei a die Polare von A in Bezug auf γ^2, und möge diese mit γ^2 keinen reellen Punkt gemein haben, also A innerhalb γ^2 liegen. Dann schneidet a die Gegenseiten der Polvierecke von γ^2, welche A zum Eckpunkt haben, in Paaren von Punkten, die hinsichtlich γ^2 conjugirt sind (Nr. 180); und die so entstehende Involution a ist elliptisch und hat keine reellen Doppelpunkte. Die Kegelschnitte, die einem beliebigen jener Polvierecke umschrieben werden können, müssen deshalb die Gerade a in je zwei reellen, conjugirten Punkten schneiden, die mit A ein reelles Poldreieck von γ^2 bilden; denn diese Kegelschnitte folgen stetig auf einander, unendlich viele von ihnen haben mit der Involution a je zwei reelle, einander zugeordnete Punkte gemein (Seite 157), und unmöglich kann einer von ihnen mit a zwei imaginäre Punkte gemein haben, weil sonst zwischen ihm und den eben genannten ein anderer liegen würde, welcher a in einem reellen Doppelpunkte berührte. Damit sind die Sätze c. und f. bewiesen, woraus d. und e. sich leicht ergeben.

189. Die Sätze a_1. bis f_1. der Nr. 187 können analog wie a. bis f. bewiesen werden, sobald gezeigt ist, dass dem Kegelschnitt γ^2 irgend ein Polvierseit von k^2 umschrieben werden kann. Um diesen Nachweis zu liefern, nehmen wir auf k^2 drei Punkte P, Q, R an, deren Verbindungslinien ausserhalb γ^2 liegen, was (Nr. 187 f.) allemal möglich ist. Die drei Punkte bestimmen ein der k^2 eingeschriebenes Polviereck $PQRS$ von γ^2, dessen Gegenseiten sich in drei ausserhalb γ^2 liegenden Punkten U, V, W schneiden; diese Schnittpunkte aber sind paarweise conjugirt in Bezug auf k^2, und zwei von ihnen, U und V, liegen ausserhalb k^2. Werden nun von U und V Tangentenpaare an γ^2 gezogen, so trennen diese je zwei Gegenseiten des Polvierecks $PQRS$ harmonisch (Seite 105). Die zwei paar Tangenten bilden folglich ein Vierseit, dessen Gegenpunkte paarweise durch jedes paar Gegenseiten des Vierecks $PQRS$ harmonisch getrennt sind; und da einer E der sechs Eckpunkte des Vierseits, wie man leicht einsieht, von k^2 eingeschlossen ist, so ist er auch durch k^2 von seinem Gegenpunkte harmonisch getrennt (Seite 158). Von den Eckpunkten des Vierseits sind also zwei, U und E, ihren Gegenpunkten conjugirt hinsichtlich k^2, dieses der γ^2 umschriebene Vierseit ist folglich ein Polvierseit von k^2 (Nr. 180); w. z. b. w.

190. Von zwei Kegelschnitten k^2 und γ^2, von denen der eine k^2 einem Polviereck des anderen γ^2 umschrieben oder dieser einem Polvierseit von jenem eingeschrieben ist, sage ich*): „Die Curve zweiter Ordnung k^2 stützt oder trägt die Curve zweiter Classe γ^2, und umgekehrt γ^2 stützt sich oder ruht auf k^2." Wenn k^2 in zwei Strahlen oder γ^2 in zwei Punkte zerfällt, so sage ich demgemäss:

Ein Strahlenpaar stützt die Curve zweiter Classe γ^2, wenn seine Strahlen in Bezug auf γ^2 conjugirt sind.	Ein Punktepaar ruht auf der Curve zweiter Ordnung k^2, wenn seine Punkte in Bezug auf k^2 conjugirt sind.

Und weil eine Gerade nur dann, wenn sie γ^2 berührt, sich selbst conjugirt ist, so setze ich hinzu:

Eine zweifache Gerade stützt die Curve zweiter Classe γ^2, wenn sie γ^2 berührt.	Ein zweifacher Punkt ruht auf der Curve zweiter Ordnung k^2, wenn er auf k^2 liegt.

191. Alle Kegelschnitte, die eine gegebene Curve zweiter Classe γ^2 stützen und durch drei beliebige Punkte gehen, sind dem Polviereck von γ^2 umschrieben, welches die drei Punkte zu Eckpunkten hat (Nr. 187a); durch einen beliebigen vierten Punkt der Ebene geht demnach nur einer von ihnen. Also:

Die Kegelschnitte k^2, die eine gegebene Curve zweiter Classe γ^2 stützen, bilden eine Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen, die wir ein „lineares Kegelschnitt-System vierter Stufe"	Die Kegelschnitte γ^2, die auf einer gegebenen Curve zweiter Ordnung k^2 ruhen, bilden eine Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen, die wir ein „lineares Kegelschnitt-Gewebe vierter Stufe"

*) Vergl. meine analytisch-geometrischen Arbeiten in Crelle-Borchardt's Journal für die r. u. a. Mathematik, Bd. 82.

nennen wollen. Einem beliebigen Viereck kann im Allgemeinen nur ein Kegelschnitt dieses Systemes umschrieben werden. Das Viereck ist ein Polviereck von γ^2, und alle ihm umschriebenen Kegelschnitte gehören zu dem Systeme, wenn irgend zwei dieser Kegelschnitte die Curve ^{2} stützen.

nennen wollen. Einem beliebigen Vierseit kann i. A. nur ein Kegelschnitt dieses Gewebes eingeschrieben werden. Das Vierseit ist ein Polvierseit von k^2, und alle ihm eingeschriebenen Kegelschnitte gehören zu dem Gewebe, wenn irgend zwei von ihnen auf der Curve k^2 ruhen.

192. Von den Kegelschnitten, die zwei gegebene Curven zweiter Classe γ^2 und γ_1^2 stützen, geht durch drei beliebige Punkte A, B, C der Ebene im Allgemeinen ein einziger; dieser enthält auch die beiden Punkte, die A, B und C zu einem Polviereck von γ^2 resp. γ_1^2 ergänzen. Ueberhaupt können wir sagen:

Alle Kegelschnitte k^2, welche zwei, drei oder vier beliebig in der Ebene angenommene Curven zweiter Classe stützen, bilden eine drei-, zwei-, resp. einfach unendliche Mannigfaltigkeit, die wir ein „lineares Kegelschnitt-System dritter, zweiter, resp. erster Stufe" nennen wollen.

Alle Kegelschnitte γ^2, die sich auf zwei, drei oder vier beliebig in der Ebene angenommene Curven zweiter Ordnung stützen, bilden eine drei-, zwei-, resp. einfach unendliche Mannigfaltigkeit, die wir ein „lineares Kegelschnitt-Gewebe dritter, zweiter, resp. erster Stufe" nennen wollen.

Bei besonderer gegenseitiger Lage der gegebenen Curven erleiden diese Sätze Ausnahmen, die sich weiter unten von selbst ergeben. Die Stufenzahl giebt nicht blos an, wie viele Dimensionen ein Kegelschnitt-System oder -Gewebe hat, sondern sie ist, wie wir sehen werden (Nr. 203 und 210), zugleich die Zahl der Punkte resp. Tangenten, die je einen seiner Kegelschnitte festlegen.

193. Die linearen Kegelschnitt-Systeme erster und zweiter Stufe werden gewöhnlich „Kegelschnitt-Büschel" resp. „Kegelschnitt-Netze" genannt; ebenso führen die reciproken Gebilde auch die Namen „Schaar" resp. „Schaarschaar von Kegelschnitten". Allerdings pflegt man den Kegelschnittbüschel und die Kegelschnittschaar zu definiren als die Gesammtheit der Kegelschnitte, die einem Viereck umschrieben resp. einem Vierseit eingeschrieben werden können; aber diese Definitionen sind in den obigen enthalten, wie der folgende Satz lehrt:

Wenn zwei Kegelschnitte eines linearen Kegelschnitt-Systemes einem Viereck umschrieben sind, so ist dieses ein gemeinschaftliches Polviereck aller Curven zweiter Classe, die auf das System sich stützen (Nr. 191); dem Systeme gehören folglich alle dem Viereck umschriebenen Kegelschnitte an.

Wenn zwei Kegelschnitte eines linearen Kegelschnitt-Gewebes einem Vierseit eingeschrieben sind, so ist dieses ein gemeinschaftliches Polvierseit aller Curven zweiter Ordnung, die das Gewebe stützen (Nr. 191); dem Gewebe gehören folglich alle dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte an.

194. Die Theorie des linearen Kegelschnitt-Systemes vierter Stufe ist nicht wesentlich verschieden von der Polarentheorie der Curve zweiter Classe γ^2, die auf allen seinen Kegelschnitten ruht. Wir heben deshalb nur hervor, dass das System ein specielles ist, wenn γ^2 sich auf zwei Punkte P, Q oder auch auf einen zweifachen Punkt R reducirt. Also:

Die Kegelschnitte der Ebene, die durch einen gegebenen Punkt R gehen oder bezüglich deren zwei Punkte P, Q conjugirt sind, bilden ein specielles lineares Kegelschnitt-System vierter Stufe.

Die Kegelschnitte der Ebene, die eine gegebene Gerade berühren oder bezüglich deren zwei gegebene Gerade conjugirt sind, bilden ein specielles lineares Kegelschnitt-Gewebe vierter Stufe.

Z. B. die Parabeln der Ebene bilden ein specielles Kegelschnitt-Gewebe und die gleichzeitigen Hyperbeln bilden ein specielles Kegelschnitt-System vierter Stufe. Die Curve zweiter Classe γ^2, die auf den gleichseitigen Hyperbeln ruht, reducirt sich auf die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte (Seite 210). Die Kegelschnitte der Ebene, von denen eine Axe gegebene Richtung hat, bilden ein specielles System vierter Stufe, dem alle Kreise der Ebene angehören; jedem Viereck, dessen Eckpunkte auf zweien dieser Kegelschnitte liegen, kann ein Kreis umschrieben werden.

14 Lineare Kegelschnitt-Systeme und -Gewebe dritter und erster Stufe.*)

195. Sind von einem Polviereck einer Curve zweiter Classe γ^2 zwei Eckpunkte A, B gegeben nebst der zu AB conjugirten

*) Vergl. Schröter-Steiner, Die Theorie der Kegelschnitte, III. Aufl. von R. Sturm S. 213—340 (Leipzig 1889).

Seite u, so bilden die anderen beiden Eckpunkte C, D auf u zwei zugeordnete Punkte einer Involution. Man erhält diese Involution, wenn man jedem Strahle AC oder AD von A den ihm conjugirten Strahl BD resp. BC von B zuweist, und sodann die Strahlenbüschel A und B, die dadurch projectiv auf einander bezogen werden, mit u zum Durchschnitt bringt.

Will man nun von zwei Curven zweiter Classe γ^2 und γ_1^2 ein gemeinschaftliches Polviereck construiren, das die Punkte A, B zu Eckpunkten hat, so hat man die anderen beiden Eckpunkte C, D auf der Verbindungslinie der beiden Pole von AB nach γ^2 und γ_1^2 zu suchen. Die Punkte C, D aber sind einander zugeordnet in zwei auf u liegenden Involutionen, und deshalb völlig bestimmt (Seite 209), wenn die Punktreihen nicht ausnahmsweise identisch sind. Die Doppelpunkte von jeder dieser Involutionen sind conjugirt in Bezug auf alle dem Polviereck $ABCD$ umschriebenen Kegelschnitte; und zwar geht, wie wir früher (Seite 214) bewiesen haben, auch dann durch einen beliebigen Punkt P allemal einer dieser Kegelschnitte, wenn C und D imaginär werden. Daraus schliessen wir (vergl. Nr. 192):

196. Die Kegelschnitte, welche zwei Curven zweiter Classe γ^2 und γ_1^2 stützen und durch zwei reelle Punkte gehen, sind einem gemeinschaftlichen Polviereck von γ^2 und γ_1^2 umschrieben, dessen übrige zwei Eckpunkte aber conjugirt-imaginär sein können.

Die Kegelschnitte, welche auf zwei Curven zweiter Ordnung k^2 und k_1^2 ruhen und zwei reelle Gerade berühren, sind einem gemeinschaftlichen Polviereck von k^2 und k_1^2 eingeschrieben, dessen übrige zwei Seiten aber conjugirt-imaginär sein können.

Wir dürfen (Seite 206) dieses Polviereck als gegeben betrachten, wenn ausser seinen beiden reellen Punkten A, B irgend ein ihm umschriebener Kegelschnitt bekannt ist nebst der Geraden u, auf der die anderen beiden Eckpunkte liegen. Sind zwei ihm umschriebene Kegelschnitte gegeben, so projiciren wir alle Punkte des einen aus A sowohl wie aus B auf den anderen; wir erhalten dann in diesem anderen Kegelschnitt zwei projective Punktreihen, welche die übrigen zwei Eckpunkte C, D des Polvierecks entsprechend gemein haben, und die Gerade u oder CD ergiebt sich, auch wenn C und D imaginär sind, durch eine bekannte Construction (Seite 201). Das Polviereck ist also auch durch zwei ihm umschriebene Kegelschnitte völlig bestimmt; alle ihm umschriebenen Kegelschnitte stützen sowohl γ^2 wie γ_1^2.

197. Auf Grund dieser Bemerkungen und der Sätze von Nr. 193 können wir nun folgenden wichtigen Satz beweisen, der die Kegelschnitt-Systeme und -Gewebe dritter Stufe mit denen erster Stufe auf das Innigste verknüpft*):

Mit einem linearen Kegelschnittsysteme dritter Stufe ist allemal eine Kegelschnittschaar derartig verbunden, dass jede Curve der Schaar auf jeder Curve des Systemes ruht.

Mit einem linearen Kegelschnittgewebe dritter Stufe ist allemal ein Kegelschnittbüschel derartig verbunden, dass jede Curve des Büschels alle Curven des Gewebes stützt.

Es seien γ^2, γ_1^2 die beiden Curven zweiter Classe, die auf allen Kegelschnitten des linearen Systemes dritter Stufe ruhen und das System bestimmen (Nr. 192). Wir wählen in dem Systeme vier Kegelschnitte k, l, m, n so, dass k, l und m durch einen beliebig gegebenen reellen Punkt P gehen und sich paarweise in drei verschiedenen gemeinschaftlichen Polvierecken (kl), (km), (lm), von γ^2 und γ_1^2 schneiden; der vierte Kegelschnitt n gehe nicht durch P, werde aber von k in einem gemeinschaftlichen Polviereck (kn) von γ^2 und γ_1^2 geschnitten, welches zwei oder vier reelle Eckpunkte hat. Wir bezeichnen endlich mit δ^2 irgend einen von γ^2 und γ_1^2 verschiedenen Kegelschnitt der Schaar, die auf k, l, m, n sich stützt (Nr. 192 und 193). Wir beweisen dann den Satz links, indem wir darthun, dass auf jedem Kegelschnitte des linearen Systemes dritter Stufe, z. B. auf demjenigen, welcher durch irgend drei reelle Punkte A, B, C geht (Nr. 192), allemal ausser γ^2 und γ_1^2 auch die Curve δ^2 ruht.

198. Die Vierecke (kl), (km), (lm) und (kn) sind Polvierecke auch von δ^2 (Nr. 191), weil δ^2 auf jeden der vier Kegelschnitte k, l, m, n sich stützt; δ^2 ruht folglich auch auf den vier Kegelschnitten, die jenen vier Polvierecken umschrieben sind und durch den beliebigen Punkt A gehen. Drei von diesen neuen Kegelschnitten sind dem durch P und A bestimmten gemeinschaftlichen

*) Diesen Satz verdanken wir Henry J. S. Smith (Proceedings of the London Math. Society 1868, vol. II p. 85). Vgl. Darboux „Sur les systèmes linéaires de coniques et de surfaces du II. degré“ im Bulletin des sc. math. et astr. I. p. 348, 1870, und Rosanes „Ueber Systeme von Kegelschnitten“ in den Mathem. Annalen, Bd. 6, S. 264, 1872.

Polviereck von γ^2 und γ_1^2 umschrieben (Nr. 196). Der vierte geht nicht durch P, wenn, wie wir annehmen dürfen, A nicht auf k liegt; er schneidet also die drei ersteren in drei verschiedenen gemeinschaftlichen Polvierecken von γ^2, γ_1^2 und δ^2. Unter den vier Kegelschnitten, die durch den Punkt B gehen und diesen drei Polvierecken und dem durch P und A bestimmten Polviereck von γ^2, γ_1^2 und δ^2 umschrieben sind, giebt es deshalb mindestens zwei verschiedene, die Curven γ^2, γ_1^2 und δ^2 stützende; sie schneiden sich in dem gemeinschaftlichen Polviereck von γ^2 und γ_1^2, welches A und B zu reellen Eckpunkten hat und auch von δ^2 ein Polviereck ist; und der durch den Punkt C gehende, diesem letzten Polviereck umschriebene Kegelschnitt stützt folglich auch die Curve δ^2. Damit ist der Satz (Nr. 197, links) bewiesen.

199. Zwei Curven zweiter Classe γ^2, γ_1^2 der Ebene bestimmen also nicht blos ein lineares Kegelschnitt-System dritter Stufe, sondern auch eine sie enthaltende Kegelschnittschaar, deren Curven auf allen Curven des Systemes ruhen.

Zwei Curven zweiter Ordnung k^2, k_1^2 der Ebene bestimmen nicht blos ein lineares Kegelschnitt-Gewebe dritter Stufe, sondern auch einen sie enthaltenden Kegelschnittbüschel, auf dessen Curven sich alle Curven des Gewebes stützen.

Das System enthält unendlich viele Kegelschnitte, die in Strahlenpaare zerfallen; eine beliebige Gerade s der Ebene bildet mit der Geraden s', welche die Pole von s in Bezug auf γ^2 und γ_1^2 verbindet, ein Strahlenpaar s, s' des Systemes. Das Paar stützt alle Curven der Kegelschnittschaar, und seine beiden Strahlen sind in Bezug auf jede dieser Curven conjugirt (Nr. 190). Daraus folgt:

Die Pole einer Geraden s in Bezug auf alle Curven der Kegelschnittschaar liegen auf einer Geraden s'. Diese bildet mit s ein Strahlenpaar des zugehörigen Kegelschnitt-Systemes dritter Stufe und ist der Geraden s in einer involutorischen Verwandtschaft zweiten Grades zugeordnet (Nr. 68, 72).

Die Polaren eines Punktes S in Bezug auf alle Curven des Kegelschnittbüschels gehen durch einen Punkt S'. Dieser bildet mit S ein Punktepaar des zugehörigen Kegelschnitt-Gewebes dritter Stufe und ist dem Punkte S in einer involutorischen quadratischen Verwandtschaft zugeordnet.

Insbesondere liegen von dem Kegelschnitten der Schaar die Mittelpunkte auf einer Geraden; diese ist der unendlich fernen Geraden conjugirt bezüglich der Schaar.

200. Ist s eine gemeinschaftliche Tangente von γ^2 und γ_1^2, so fällt sie mit s' zusammen, ist also eine zweifache Gerade des Systemes und sich selbst conjugirt bezüglich aller Curven der Schaar. Also:

Eine Gerade, die irgend zwei Kegelschnitte der Schaar berührt, ist gemeinschaftliche Tangente von allen Curven der Schaar und zweifache Gerade des zugehörigen Kegelschnitt-Systemes dritter Stufe. Alle einem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte bilden eine Kegelschnittschaar; das zugehörige System dritter Stufe enthält alle Kegelschnitte, von denen das Vierseit ein Polvierseit ist (Nr. 195).

Ein Punkt, durch den irgend zwei Kegelschnitte des Büschels gehen, liegt auf allen Curven des Büschels und ist ein zweifacher Punkt des zugehörigen Kegelschnittgewebes dritter Stufe. Alle einem Viereck umschriebenen Kegelschnitte bilden einen Kegelschnittbüschel; das zugehörige Gewebe dritter Stufe enthält alle Kegelschnitte, von denen das Viereck ein Polviereck ist.

201. Wenn um einen Punkt A eine Gerade s sich dreht, so beschreiben ihre Pole in Bezug auf γ^2 und γ_1^2 zwei zu dem Büschel A projective Punktreihen a, a_1, und die Verbindungslinie s' dieser Pole beschreibt im Allgemeinen einen Büschel zweiter Ordnung. Dieser enthält alle Strahlen, die bezüglich der Kegelschnittschaar je einem Strahle von A conjugirt sind (Nr. 199); er enthält auch die Polaren $a, a_1, \ldots$ von A nach γ^2, γ_1^2 und jeder anderen Curve der Schaar. Diese Polaren nun kann man construiren, indem man von irgend zwei Strahlen g, h von A die Pole bezüglich jeder Curve der Schaar bestimmt und diese beiden Pole verbindet. Und da die Verbindungslinien, wie soeben gezeigt wurde, einem Büschel zweiter Ordnung angehören, so ergiebt sich (vgl. Nr. 199):

Die Pole von zwei beliebigen Geraden g, h bezüglich der Curven einer Kegelschnittschaar sind homologe Punkte von zwei projectiven Punktreihen erster Ordnung g_1, h_1. Die Polaren eines Punktes A liegen im Allgemeinen in einem Büschel zweiter Ordnung, dessen Strahlen denen von A conjugirt sind bezüglich der Kegelschnittschaar.

Die Polaren von zwei beliebigen Punkten bezüglich der Curven eines Kegelschnittbüschels sind homologe Strahlen von zwei projectiven Strahlenbüscheln erster Ordnung. Die Pole einer Geraden a liegen im Allgemeinen auf einer Curve zweiter Ordnung, deren Punkte denen von a conjugirt sind bezüglich des Kegelschnittbüschels.

Auch die Mittelpunkte der Kegelschnitte eines Büschels liegen demnach im Allgemeinen auf einer Curve zweiter Ordnung. Insbesondere liegen die Mittelpunkte der sechs Seiten und die Schnittpunkte der drei paar Gegenseiten eines Vierecks auf einer Curve zweiter Ordnung.

Auf Grund dieser Sätze können wir die Definition aufstellen:

Vier Kegelschnitte einer Schaar heissen „harmonisch", wenn die Pole einer (und dann jeder) Geraden bezüglich der vier Kegelschnitte vier harmonische Punkte sind.

Vier Kegelschnitte eines Büschels heissen „harmonisch", wenn die Polaren eines (und dann jedes) Punktes bezüglich der vier Kegelschnitte vier harmonische Strahlen sind.

Dadurch wird es möglich, die Schaaren und Büschel von Kegelschnitten auf einander und auf Elementargebilde projectiv zu beziehen.

202. Durch einen Punkt A gehen im Allgemeinen zwei bezüglich der Kegelschnittschaar conjugirte Strahlen (Nr. 201). Daraus ergiebt sich:

Die Tangentenpaare, die aus einem beliebigen Punkte A an die Kegelschnitte einer Schaar gezogen werden können, bilden eine Involution. Die beiden Doppelstrahlen dieser Involution sind conjugirt bezüglich der Kegelschnittschaar; sie berühren in A je eine Curve der Schaar.

Die Punktepaare, in denen eine beliebige Gerade die Kegelschnitte eines Büschels schneidet, bilden eine Involution. Die beiden Doppelpunkte dieser Involution sind conjugirt bezüglich des Kegelschnittbüschels; in ihnen berührt die Gerade zwei Curven des Büschels.

203. Die Kegelschnittschaar ist bestimmt durch vier beliebige Kegelschnitte des linearen Systemes dritter Stufe, worauf sie ruht (Nr. 192, 197), insbesondere auch durch vier Strahlenpaare des Systemes. Wählt man diese Strahlenpaare so, dass ihre vier Schnittpunkte auf einer beliebigen Geraden l liegen, so ergiebt sich sofort, dass l von einer einzigen Curve der Schaar berührt wird; diese Curve muss nämlich auch die vier Geraden berühren, die von l durch die vier Strahlenpaare harmonisch getrennt sind (Nr. 190). Sind zwei Curven γ^2, γ_1^2 der Schaar gegeben, so kann man an diese dritte Curve leicht aus jedem Punkte A von l eine zweite Tangente ziehen auf Grund des letzten Satzes (Nr. 202). Also:

Eine beliebige Gerade der Ebene wird von nur einer Curve der Kegelschnittschaar berührt; durch einen beliebigen Punkt gehen aber i. A. zwei Curven der Schaar (Nr. 202).	Durch einen beliebigen Punkt der Ebene geht nur eine Curve des Kegelschnittbüschels; eine beliebige Gerade aber wird i. A. von zwei Curven des Büschels berührt.

Die Kegelschnittschaar enthält demnach eine Parabel, wenn nicht alle ihre Curven Parabeln sind; der Kegelschnittbüschel kann zwei Parabeln enthalten.

204. Eine Gerade u, deren Pole in Bezug auf γ^2 und γ_1^2 sich in einem Punkte U vereinigen (Nr. 68), bildet mit jedem Strahle von U ein Strahlenpaar des Kegelschnitt-Systemes dritter Stufe und ist die Polare von U bezüglich aller Curven der Kegelschnittschaar (vgl. Nr. 199). Daraus folgt mit Rücksicht auf Nr. 167:

„Die Kegelschnitte einer Schaar (oder eines Büschels) haben im „Allgemeinen ein gemeinschaftliches Poldreieck.“

Das Poldreieck ist reell und leicht zu construiren, wenn irgend zwei der Kegelschnitte vier reelle Punkte oder Tangenten mit einander gemein haben (Seite 103); es hat in jedem Falle mindestens eine reelle Seite u und einen reellen Eckpunkt U. Wenn die Kegelschnitte γ^2 und γ_1^2 sich nicht berühren, so liegt U nicht auf seiner Polare u; und wenn ausserdem das gemeinschaftliche Poldreieck UVW von γ^2 und γ_1^2 imaginär ist, so sind die beiden nach γ^2 und γ_1^2 conjugirten Punkte V, W von u imaginär. Die zwei paar Schnittpunkte von γ^2 und γ_1^2 mit u müssen in diesem Falle beide reell sein und sich gegenseitig trennen (Seite 209), und jeder der Kegelschnitte γ^2, γ_1^2 schliesst folglich einen Theil des anderen ein. Daraus und aus dem Vorhergehenden ergiebt sich leicht:

„Wenn das gemeinschaftliche Poldreieck einer Schaar oder eines „Büschels von Kegelschnitten imaginär ist, so haben die Kegel„schnitte paarweise zwei und nur zwei reelle Punkte, ebenso „aber nur zwei reelle Tangenten mit einander gemein. Diese „beiden Tangenten schneiden sich auf der reellen Seite u des „Poldreiecks, und die beiden reellen Punkte liegen mit seinem „reellen Eckpunkte U in einer Geraden“;

denn anderenfalls würde der Punkt, den u mit der Verbindungslinie der beiden Punkte gemein hat, bezüglich beider Kegelschnitte dem Punkte U und einem Punkte der Verbindungslinie conjugirt, also ein zweiter reeller Eckpunkt des gemeinschaftlichen Poldreiecks sein, und das Poldreieck wäre reell.

205. Dreht sich eine Gerade s um einen Punkt P der Geraden u, so beschreiben ihre beiden Pole in Bezug auf γ^2 und γ_1^2 zwei projective Punktreihen, die den Punkt U entsprechend gemein haben; die Verbindungslinie der beiden Pole dreht sich folglich um einen Punkt P', und da die Pole von PU in u liegen, so ist auch P' ein Punkt von u. Legen wir nun durch P irgend einen Kegelschnitt k^2, welcher die beiden Kegelschnitte γ^2 und γ_1^2 stützt, so muss dieser auch durch P' gehen; denn zwei beliebige conjugirte Strahlen von P und P' schneiden ihn in einem gemeinschaftlichen Polviereck von γ^2 und γ_1^2 (Nr. 187b), und da wenigstens zwei von u verschiedene Seiten dieses Polvierecks durch P gehen, so müssen die ihnen conjugirten Gegenseiten (also auch k^2) durch P' gehen. Da nun u von einem Kegelschnittbüschel, der einem beliebigen Polviereck der Kegelschnitte γ^2 und γ_1^2 umschrieben ist, in einer Involution geschnitten wird, so ergiebt sich:

Jede reelle Seite u des Poldreiecks der Kegelschnittschaar schneidet die Curven und Strahlenpaare des zugehörigen Kegelschnitt-Systemes dritter Stufe in den Punktepaaren P, P' einer Involution. Die Doppelpunkte dieser Involution u bilden ein Punktepaar der Kegelschnittschaar, weil sie bezüglich aller Kegelschnitte des Systemes conjugirt sind.

Aus jedem reellen Eckpunkte U des Poldreiecks eines Kegelschnittbüschels gehen an die Curven und Punktepaare des zugehörigen Kegelschnitt-Gewebes Strahlenpaare einer Involution. Die Doppelstrahlen dieser Involution U bilden ein Strahlenpaar des Kegelschnittbüschels, weil sie bezüglich aller Kegelschnitte des Gewebes conjugirt sind.

206. Die Strahlenbüschel P, P' (Nr. 205) sind projectiv, wenn jedem Strahle des einen der ihm hinsichtlich γ^2 und γ_1^2 conjugirte Strahl des anderen zugewiesen wird; sie erzeugen eine Curve zweiter Ordnung, die in den Punkten P und P' von PU und $P'U$ berührt wird. Ist das gemeinschaftliche Poldreieck reell, so geht diese Curve durch die Doppelpunkte der beiden Involutionen v und w, die in den anderen beiden Seiten des Poldreiecks sich ergeben; und wenn die Doppelpunkte der Involution u imaginär, also P und P' durch v und w getrennt sind, so hat eine der Involutionen v und w mit der Curve zweiter Ordnung zwei reelle, die andere mit ihr zwei imaginäre Doppelpunkte gemein.

Die Strahlen eines reellen Doppelpunktes O von u, v oder w sind involutorisch gepaart, sodass je zwei zugeordnete Strahlen von O bezüglich beider Kegelschnitte γ^2, γ_1^2 conjugirt sind; und O ist der Schnittpunkt von zwei gemeinschaftlichen (reellen oder imaginären) Tangenten dieser Kegelschnitte, nämlich der beiden Doppelstrahlen der Involution O. — Ist das gemeinschaftliche Poldreieck von γ^2 und γ_1^2 imaginär, so schneiden sich auf seiner reellen Seite u zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten auf γ^2 und γ_1^2 in einem Punkte O (Nr. 204), woraus folgt, dass die Involution u in diesem Falle zwei reelle Doppelpunkte besitzt. Aus dem Allen ergiebt sich:

Die Kegelschnittschaar enthält mindestens ein reelles Punktepaar und im Allgemeinen höchstens drei solche. Ihre drei Punktepaare liegen (auch wenn zwei von ihnen imaginär sind) auf den drei Seiten des Poldreiecks der Schaar; sie bilden die drei paar Gegenpunkte eines reellen oder imaginären Vierseits, welchem die Kegelschnittschaar eingeschrieben ist.

Der Kegelschnittbüschel enthält mindestens ein reelles Strahlenpaar und im Allgemeinen höchstens drei solche. Seine drei Strahlenpaare schneiden sich (auch wenn zwei von ihnen imaginär sind) in den drei Eckpunkten des Poldreiecks des Büschels; sie bilden die drei paar Gegenseiten eines reellen oder imaginären Vierecks, welchem der Büschel umschrieben ist.

207. Ausser verschiedenen Uebergangsarten, deren Curven sich in einem Punkte berühren oder osculiren, unterscheiden wir:

drei Hauptarten der Kegelschnittschaar, jenachdem ihre Curven vier, oder zwei, oder keine reelle Tangenten miteinander gemein haben. Nur die Kegelschnittschaaren der zweiten Hauptart haben ein imaginäres Poldreieck (Nr. 204), und nur die von der ersten Hauptart enthalten drei reelle Punktepaare. Zwei Kegelschnitte einer Schaar erster oder dritter Art haben entweder keine oder vier reelle Schnittpunkte; zwei

drei Hauptarten des Kegelschnittbüschels, jenachdem seine Curven vier, oder zwei, oder keine reelle Punkte mit einander gemein haben. Nur die Kegelschnittbüschel der zweiten Hauptart haben ein imaginäres Poldreieck, und nur die von der ersten Hauptart enthalten drei reelle Strahlenpaare. Zwei Kegelschnitte eines Büschels erster oder dritter Art haben entweder keine oder vier reelle Tangenten gemein; zwei Kegelschnitte

Kegelschnitte einer Schaar zweiter Art haben allemal zwei reelle Schnittpunkte (Nr. 204).

Wenn alle Curven einer Kegelschnittschaar in Punktepaare zerfallen, was auf zwei Arten möglich ist, so ist die Schaar eine specielle; desgleichen wenn sie einen zweifachen Punkt enthält. Demgemäss bilden die Kegelschnitte, welche durch die reellen oder imaginären Doppelpunkte einer Punktinvolution gehen, oder aber bezüglich deren irgend ein Punkt eine gegebene Polare hat, ein specielles lineares System dritter Stufe; aber auch dann ist ein solches System speciell, wenn seine Kegelschnitte einen Punkt mit einander gemein haben.

eines Büschels zweiter Art haben allemal zwei reelle Tangenten gemein.

Wenn alle Curven eines Kegelschnittbüschels in Strahlenpaare zerfallen, so ist der Büschel ein specieller; ebenso wenn er eine zweifache Gerade enthält. Demgemäss bilden die Kegelschnitte, welche die reellen oder imaginären Doppelstrahlen einer Strahleninvolution berühren, oder bezüglich deren irgend eine Gerade einen gegebenen Pol hat, ein specielles lineares Gewebe dritter Stufe; aber auch dann ist ein solches Gewebe speciell, wenn seine Kegelschnitte eine gemeinschaftliche Tangente haben.

208. Confocale Kegelschnitte bilden eine Schaar von der dritten Hauptart; ihre beiden Brennpunkte bilden das einzige reelle Punktepaar, und die unendlich fernen Kreispunkte bilden ein imaginäres Punktepaar der Schaar. Das zugehörige lineare Kegelschnitt-System dritter Stufe besteht aus den gleichseitigen Hyperbeln, bezüglich deren die beiden Brennpunkte conjugirt sind. Die durch zwei reelle Punkte gehenden Kreise bilden einen Kegelschnittbüschel von der zweiten, die zu ihnen orthogonalen Kreise bilden einen Büschel von der dritten Hauptart. Ein specielles lineares Gewebe dritter Stufe wird gebildet von den Kegelschnitten, die einen gegebenen Punkt F zum Brennpunkt haben; die Kegelschnitte des zugehörigen Büschels zerfallen in je zwei Strahlen, die sich in F rechtwinklig schneiden. Concentrische Kegelschnitte bilden ein specielles lineares System dritter Stufe: die Curven der zugehörigen Schaar zerfallen in den Mittelpunkt der concentrischen Kegelschnitte und je einen unendlich fernen Punkt. Auch die Kreise der Ebene bilden ein specielles lineares System; die zugehörige Kegelschnittschaar besteht aus den Punktepaaren der Involution, in welcher die unendlich ferne Gerade eine rechtwinklige Strahleninvolution schneidet.

209. Wenn ein lineares Kegelschnittgewebe dritter Stufe auf einem Büschel gleichseitiger Hyperbel ruht, so enthält es von jedem seiner Kegelschnitte alle confocalen (Nr. 208) und besteht aus zweifach unendlich vielen Schaaren confocaler Kegelschnitte. Die beiden Brennpunkte einer beliebigen dieser Schaaren sind conjugirt bezüglich des Hyperbelbüschels und bilden ein Punktepaar des Gewebes. Ein beliebiger Punkt F der Ebene ist Brennpunkt einer Schaar des Gewebes; wenn er sich auf einer Geraden bewegt, so beschreibt der andere Brennpunkt F_1 einen Kegelschnitt, der dem Poldreieck des Hyperbelbüschels umschrieben ist. Ist F ein Schnittpunkt der gleichseitigen Hyperbeln, so fällt F_1 mit ihm zusammen; das Gewebe enthält demnach i. A. vier Schaaren concentrischer Kreise, in deren Mittelpunkten die Hyperbeln des Büschels sich schneiden. Die vier Schnittpunkte bilden ein Polviereck des Gewebes, dessen Gegenseiten sich rechtwinklig schneiden. Das Gewebe enthält unendlich viele Schaaren confocaler Parabeln; die eigentlichen Brennpunkte dieser Parabeln liegen auf einem Kreise, dem Orte der Mittelpunkte aller Hyperbeln des Büschels, und sind je einen unendlich fernen Punkte conjugirt bezüglich des Büschels. Wenn nämlich ein Punkt die unendlich ferne Gerade durchläuft, so beschreiben seine Polaren in Bezug auf beliebige zwei der gleichzeitigen Hyperbeln zwei gleiche und gleichlaufende Strahlenbüschel, die jenen Kreis erzeugen. Der Kreis enthält die Mittelpunkte der sechs Seiten und die Schnittpunkte der drei paar Gegenseiten des Vierecks, welchem der Hyperbelbüschel umschrieben ist (Nr. 201); er ist der Feuerbach'sche Kreis der vier Dreiecke des Vierecks.

---

15 Das Kegelschnittnetz und die Schaarschaar.*)

210. Drei Curven zweiter Classe γ^2, γ_1^2, γ_2^2, die in einer Ebene, aber nicht in einer Kegelschnittschaar liegen, bestimmen

Drei Curven zweiter Ordnung, die in einer Ebene, aber nicht in einem Kegelschnittbüschel liegen, bestimmen ein lineares

*) Vgl. Schröter-Steiner, Die Theorie der Kegelschnitte, III. Aufl. von R. Sturm, Seite 469—502 (Leipzig 1898).

ein lineares Kegelschnitt-System zweiter Stufe (ein Kegelschnitt-Netz), auf dessen Curven sie ruhen (Nr. 192, 193).

Kegelschnittgewebe zweiter Stufe (eine Schaarschaar), dessen Curven auf ihnen ruhen.

Die Kegelschnitte des Netzes, welche ausser jenen drei Curven zweiter Classe noch eine beliebig angenommene vierte, z. B. einen zweifachen Punkt stützen, bilden (Nr. 192) einen Kegelschnittbüschel. Daraus folgt (vergl. Nr. 203):

Durch jeden Punkt der Ebene geht ein Büschel von Kegelschnitten des Netzes; durch zwei beliebige Punkte geht im Allgemeinen nur ein Kegelschnitt des Netzes.

Jede Gerade der Ebene berührt eine Schaar von Kegelschnitten der Schaarschaar; von zwei beliebigen Geraden wird im Allgemeinen nur ein Kegelschnitt der Schaarschaar berührt.

211. Je zwei der drei Curven γ^2, γ_1^2, γ_2^2 bestimmen ein lineares, das Netz enthaltendes Kegelschnitt-System dritter Stufe und zugleich eine Kegelschnittschaar, deren Curven auf allen Curven dieses Systemes, also auch auf allen Curven des Kegelschnitt-Netzes ruhen (Nr. 199). Das Netz stützt demnach die drei durch γ^2, γ_1^2, γ_2^2 bestimmten Kegelschnittschaaren, aber ebenso jede vierte Schaar, die irgend zwei Curven jener drei ersten Schaaren enthält. Alle diese Schaaren liegen in der Schaarschaar, welche durch drei beliebige Curven des Netzes bestimmt ist, denn sie stützen sich auch auf diese drei Curven; auch beweist man ohne Schwierigkeit, dass jede Curve der Schaarschaar unendlich vielen jener Schaaren angehört und folglich auf jeder Curve des Netzes ruht. Daher der wichtige Satz:

Mit einem Kegelschnittnetze ist allemal eine Schaarschaar (und umgekehrt) derartig verbunden, dass jede Curve der Schaarschaar sich auf jede Curve des Netzes stützt. Drei beliebige Curven des Netzes oder der Schaarschaar genügen zur Bestimmung beider Kegelschnitt-Mannigfaltigkeiten.

Das Netz und die Schaarschaar, von denen in den folgenden Sätzen die Rede ist, sind in der eben angegebenen Weise mit einander verbunden, sodass die Schaarschaar auf das Netz sich stützt.

212. Das Kegelschnittnetz enthält unendlich viele Strahlenpaare, die im Allgemeinen eine Curve dritter Classe Γ^3, die Cayley'sche Curve des Netzes, einhüllen und sich zu zweien in (gemeinschaftlichen) Polvierecken von γ^2, γ_1^2, γ_2^2 und der zugehörigen Schaarschaar schneiden (Nr. 186). Die Strahlen eines solchen Paares sind conjugirt hinsichtlich der Schaarschaar, d. h. hinsichtlich aller ihrer Curven (Nr. 190); die Pole des einen Strahles bezüglich dieser Curven liegen demnach sämmtlich auf dem anderen Strahle. Die Seiten der Polvierecke der Schaarschaar berühren die Cayley'sche Curve Γ^3, und je zwei Gegenseiten eines Polvierecks bilden ein Strahlenpaar des Netzes.

Zwei beliebige Polvierecke der Schaarschaar sind allemal einer Curve des Netzes eingeschrieben; denn der Kegelschnitt, der dem einen Polviereck umschrieben ist und durch einen Eckpunkt U des anderen geht, muss dem durch U gehenden Kegelschnittbüschel des Netzes angehören (Nr. 210) und deshalb auch durch die übrigen drei Eckpunkte des zweiten Polvierecks gehen. — Ebenso ergiebt sich:

213. Die Kegelschnitt-Schaarschaar enthält unendlich viele Punktepaare. Diese liegen im Allgemeinen auf einer Curve dritter Ordnung C^3, der sogenannten Jacobi'schen Curve des zugehörigen Netzes, und je zwei von ihnen bilden zwei paar Gegenpunkte eines Polvierseits des Netzes. Die Punkte eines solchen Paares sind conjugirt hinsichtlich des Netzes, d. h. hinsichtlich aller seiner Curven; die Polaren des einen Punktes bezüglich dieser Curven gehen demnach alle durch den anderen Punkt. Jedes Punktepaar der Schaarschaar ist harmonisch getrennt durch jedes Strahlenpaar des Netzes. Die Eckpunkte der Polvierseite des Netzes liegen auf der Jacobi'schen Curve C^3, und je zwei Gegenpunkte eines Polvierseits bilden ein Punktepaar der Schaarschaar. Zwei beliebige Polvierseite des Netzes sind allemal einer Curve der Schaarschaar umschrieben (vgl. Nr. 212).

Wenn von zwei Kegelschnitten der eine einen Büschel beschreibt, so umhüllen die Verbindungslinien ihrer Schnittpunkte i. A. eine Curve dritter Classe (Nr. 211, 212); und wenn der eine eine Schaar beschreibt, so bewegen sich die Schnittpunkte ihrer gemeinschaftlichen Tangenten i. A. auf einer Curve dritter Ordnung. Der unveränderliche andere Kegelschnitt kann aus zwei Geraden bezw. Punkten bestehen.

214. Durch drei beliebige Strahlenpaare, die nicht die drei paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks bilden, ist das Kegelschnittnetz nebst der zugehörigen Schaarschaar bestimmt (Nr. 211). Umschreibt man dem Polviereck der Schaarschaar, in welchem sich zwei der Strahlenpaare schneiden, einen Kegelschnittbüschel, und bringt man dessen Curven mit dem dritten Strahlenpaare zum Schnitt, so erhält man alle solche Polvierecke der Schaarschaar, deren Eckpunkte auf diesem dritten Strahlenpaare liegen (Nr. 212), und damit auch alle Strahlenpaare des Netzes und die von ihnen eingehüllte Curve dritter Classe Γ^3. Da nun das dritte Strahlenpaar ein ganz beliebiges des Netzes ist, und da seine Geraden den Kegelschnittbüschel in Punkt-Involutionen schneiden (Seite 157—8), so ergiebt sich:

„Jede Tangente der Cayley'schen Curve Γ^3 trifft die Kegel„schnitte des Netzes in Punktepaaren einer Involution. Die „Doppelpunkte dieser Involution bilden ein Punktepaar der „Schaarschaar und liegen auf der Jacobi'schen Curve C^3“; denn sie sind conjugirt bezüglich aller Curven des Netzes, indem sie durch drei beliebige derselben harmonisch getrennt sind. Hieraus folgt:

„In einem beliebigen Punkte P von C^3 berühren sich unendlich „viele Kegelschnitte des Netzes; diese bilden einen Büschel und „berühren in P die Tangente von Γ^3, welche P mit seinem „conjugirten Punkte verbindet.“

215. Durch drei beliebige Punktepaare, die nicht die drei paar Gegenpunkte eines vollständigen Vierseits bilden, ist die Schaarschaar nebst dem zugehörigen Kegelschnittnetze bestimmt; man kann aus ihnen alle übrigen Punktepaare der Schaarschaar und die Curve dritter Ordnung C^3, auf welcher sie liegen, ableiten (vgl. Nr. 214).

„Die Tangentenpaare, die aus einem beliebigen Punkte P der „Jacobi'schen Curve C^3 an die Kegelschnitte der Schaarschaar „gezogen werden können, bilden eine Involution. Die Doppel„strahlen dieser Involution bilden ein Strahlenpaar des Netzes „und berühren die Cayley'sche Curve Γ^3.“

216. Aus dem beliebigen Punkte P von C^3 werden auch die Punktepaare der Schaarschaar durch Strahlenpaare der Involution projicirt.

Von einer beliebigen Tangente der Γ^3 werden die Strahlenpaare des Netzes in Punktepaaren einer Involution geschnitten.

Uebrigens schneidet jedes Strahlenpaar der Involution links die Curve C in zwei Punktepaaren der Schaarschaar. Verbindet man also einen beliebigen Punkt P von C^3 mit irgend einem Punktepaare Q, Q_1 der Schaarschaar, so schneidet C^3 die beiden

Verbindungslinien in noch einem Punktepaare der Schaarschaar. Man kann auf diese Art alle Punktepaare auf C^3 construiren, wenn C^3 und ein Paar Q, Q_1 gegeben sind. — Beiläufig ergiebt sich:

Der Ort eines Punktes, aus welchem drei beliebige Punktepaare der Ebene durch eine Involution projicirt werden, ist eine Curve dritter Ordnung.

Der Ort einer Geraden, welche drei beliebige Strahlenpaare der Ebene in einer Involution schneidet, ist eine Curve dritter Classe.

Auf der Jacobi'schen Curve C^3 liegt der Schnittpunkt jedes Strahlenpaares des Netzes; andererseits wird die Cayley'sche Curve Γ^3 von den Verbindungslinien der Punktepaare der Schaarschaar eingehüllt (Nr. 214, vgl. auch Nr. 221).

217. Die Punkte von C^3 sind paarweise conjugirt hinsichtlich des Netzes, und die Tangenten von Γ^3 sind paarweise conjugirt hinsichtlich der Schaarschaar (Nr. 212 und 213). Wir setzen nun fest:

Drei Punkte von C^3, deren conjugirte auf einer Geraden liegen, sollen ein „Punkttripel" der Curve C^3 heissen.

Drei Tangenten von Γ^3, deren conjugirte durch einen Punkt gehen, sollen ein „Tangententripel" der Curve Γ^3 heissen.

Da zwei Punktepaare der Schaarschaar allemal von einem durch sie bestimmten Polvierseit des Netzes zwei paar Gegenpunkte bilden (Nr. 213), so ergiebt sich sofort:

Die drei Punkte jedes Tripels von C^3 bilden mit ihren conjugirten Punkten die drei paar Gegenpunkte eines Polvierseits des Netzes. Jedes Polvierseit des Netzes enthält vier Punkttripel von C^3. Zwei Punkte von C^3, deren Verbindungslinie durch einen gegebenen Punkt P_1 von C^3 geht, bilden allemal mit dem zu P_1 conjugirten Punkte P ein Tripel der Jacobi'schen Curve C^3.

Die drei Tangenten jedes Tripels von Γ^3 bilden mit ihren conjugirten Tangenten die drei paar Gegenseiten eines Polvierecks der Schaarschaar. Jedes Polviereck der Schaarschaar enthält vier Tangententripel von Γ^3. Zwei Tangenten von Γ^3, die sich auf einer gegebenen Tangente t von Γ^3 schneiden, bilden mit der zu t conjugirten Tangente ein Tripel von Γ^3.

218. Die beiden von zwei Tripeln der C^3 gebildeten Dreiecke sind allemal einem Kegelschnitt der Schaarschaar umschrieben (Nr. 213), weil sie in zwei Polvierseiten des Netzes liegen (Nr. 217). Daraus aber folgt (Nr. 48):

Zwei beliebige Punkttripel von C^3 sind allemal einer Curve zweiter Ordnung eingeschrieben. Wenn also ein Kegelschnitt einem Tripel von C^3 umschrieben ist und durch zwei beliebige Punkte P, Q dieser Curve geht, so ist er auch dem durch P und Q bestimmten Tripel von C^3 umschrieben.

Zwei beliebige Tangententripel von Γ^3 sind allemal einer Curve zweiter Classe umschrieben. Wenn also ein Kegelschnitt einem Tripel von Γ^3 eingeschrieben ist und noch zwei beliebige Tangenten p, q von Γ^3 berührt, so ist er auch dem durch p und q bestimmten Tripel von Γ^3 eingeschrieben.

219. Das zweite Tripel (links) fällt mit dem ersten zusammen, wenn P und Q sich zwei Punkten des ersten Tripels unbegrenzt auf C^3 nähern, und es ergiebt sich daraus:

Jedem Punkttripel von C^3 kann ein Kegelschnitt umschrieben werden, der die Curve C^3 in den drei Punkten des Tripels berührt.

Jedem Tangententripel von Γ^3 kann ein Kegelschnitt eingeschrieben werden, der in den Berührungspunkten der drei Tangenten die Curve Γ^3 berührt.

Hierzu erhalten wir aus den letzten Sätzen von Nr. 217 die Zusätze:

In dem Punkte Q von C^3, der mit zwei conjugirten Punkten P, P_1 ein Tripel von C^3 bildet, schneiden sich die Tangenten von P und P_1*).

Auf der Tangente von Γ^3, die mit zwei conjugirten Tangenten t, t_1 ein Tripel von Γ^3 bildet, liegen die Berührungspunkte von t und t_1.

220. Mit Rücksicht auf die Schlusssätze von Nr. 217 folgt aus Nr. 218:

Die Punktepaare von C^3, deren Verbindungslinien durch einen gegebenen Punkt P_1 von C^3 gehen, liegen auf je einem der Kegelschnitte, die einem beliebigen Tripel von C^3 umschrieben sind und durch den zu P_1 conjugirten Punkt P gehen.

Die Tangentenpaare von Γ^3, die sich auf einer gegebenen Tangente t_1 von Γ^3 schneiden, berühren je einen der Kegelschnitte, die einem beliebigen Tangententripel von Γ^3 eingeschrieben sind und die zu t_1 conjugirte Tangente t berühren.

Der Büschel P_1 und der Kegelschnittbüschel links sind durch die Punktepaare von C^3, die Punktreihe t_1 und die Kegelschnitt-

*) Die Tangenten von C^3 in den drei paar Gegenpunkten eines Polvierseits des Netzes schneiden sich auf C^3 in drei Punkten einer Geraden, der „Begleiterin" der vier Geraden des Vierseits.

schaar rechts sind durch die Tangentenpaare von Γ^3 projectiv so auf einander bezogen, dass sie die Curve C^3 resp. Γ^3 erzeugen. Zum Beweise dieser beiläufigen Bemerkung ist aber hier nicht der Ort.

221. Die Seiten des gemeinschaftlichen Poldreiecks von irgend zwei Kegelschnitten k^2, k_1^2 des Netzes gehören einem durch sie bestimmten Polvierseit eines beliebigen dritten Kegelschnittes k_2^2 des Netzes an (Nr. 182). Dieses ist ein gemeinschaftliches Polvierseit von k^2, k_1^2 und k_2^2 und folglich ein Polvierseit des Netzes. Daraus folgt (vgl. Nr. 217):

Das gemeinschaftliche Poldreieck von zwei beliebigen Kegelschnitten des Netzes ist ein Punkttripel von C^3. Insbesondere schneiden sich die drei paar Gegenseiten eines jeden Polvierecks der Schaarschaar in einem Punkttripel von C^3.

Das gemeinschaftliche Poldreiseit von zwei beliebigen Kegelschnitten der Schaarschaar ist ein Tangententripel von Γ^3. Insbesondere bilden die Diagonalen eines jeden Polvierseits des Netzes ein Tangententripel von Γ^3.

Die erste Hälfte dieser Sätze ist umkehrbar.

Jeder Punkt, dessen Polaren in Bezug auf zwei Curven des Netzes zusammenfallen, liegt auf C^3; denn er ist einem Punkte der Polare conjugirt bezüglich des Netzes. Jede Gerade, deren Pole in Bezug auf zwei Curven der Schaarschaar zusammenfallen, berührt die Curve Γ^3. Daraus folgt (vgl. Nr. 214):

„Wenn zwei Kegelschnitte des Netzes oder der Schaarschaar „sich berühren, so liegt ihr Berührungspunkt auf C^3, und ihre „Tangente in diesem Punkte berührt die Curve Γ^3".

222. Alle Geraden, welche drei beliebig in der Ebene gegebene Kegelschnitte in je einer Involution von Punkten schneiden, umhüllen eine Curve dritter Classe Γ^3 (Nr. 214). Die Curve berührt auch die Verbindungslinien der Schnittpunkte von je zwei der drei Kegelschnitte (Nr. 212).

Alle Punkte, aus denen an drei beliebige Kegelschnitte der Ebene Involutionen von je drei paar Tangenten gehen, liegen auf einer Curve dritter Ordnung C^3. Diese geht auch durch die Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten von je zwei der Kegelschnitte.

223. Da zwei conjugirte Punkte Q, Q_1 der Curve C^3 durch je zwei conjugirte Tangenten der Curve Γ^3 harmonisch getrennt sind (Nr. 213), und da dem Punkte Q_1 von C^3, der mit zwei conjugirten Punkten P, P_1 in einer Geraden liegt, der Schnittpunkt Q der Tangenten von P und P_1 conjugirt ist (Nr. 219 und 217), so ergiebt sich:

Jede Tangente von C^3 bildet mit den drei Tangenten, die von ihrem Berührungspunkte P an Γ^3 gezogen werden können, einen harmonischen Strahlenbüschel;	Jeder Punkt von Γ^3 bildet mit den drei Punkten, in denen seine Tangente die Curve C^3 schneidet, eine harmonische Punktreihe;

und zwar ist die Tangente von C^3 durch zwei conjugirte Tangenten der Curve Γ^3 harmonisch getrennt von PP_1. Wenn P_1 ein Wendepunkt von C^3 ist, so fällt Q mit P_1 und Q_1 mit P zusammen, und PP_1 berührt in P die Curve C^3; und umgekehrt. Wegen des Satzes rechts aber fällt alsdann auch der Punkt, in welchem Γ^3 von der Tangente PP_1 berührt wird, mit P zusammen. Daher der Satz:

„Die Curven C^3 und Γ^3 berühren sich in allen ihren gemein-„schaftlichen Punkten. Die Tangente jedes gemeinschaftlichen „Punktes P schneidet die Jacobi'sche Curve C^3 in einem ihrer „Wendepunkte P_1; sie wird in P von einer Rückkehrtangente „der Cayley'schen Curve Γ^3 geschnitten."

224. In der Schaarschaar ist eine Schaar von Parabeln enthalten (Nr. 210); und zwar liegen deren Brennpunkte auf einem Kreise, und ihre Leitlinien schneiden sich in einem Punkte K (vergl. Nr. 137). Das Netz enthält im Allgemeinen einen Kreis (sein Mittelpunkt ist K), einen Büschel gleichseitiger Hyperbeln und unendlich viele Parabeln, von denen durch einen beliebigen Punkt höchstens zwei gehen (Nr. 210 und 203). Die Schnittpunkte der gleichseitigen Hyperbeln des Netzes sind die Mittelpunkte von je einem Kreise der Schaarschaar (vgl. Nr. 209).

Die Kegelschnitte der Schaarschaar bilden mit den zu ihnen confocalen Kegelschnitten ein lineares Gewebe dritter Stufe, das auf dem Büschel gleichseitiger Hyperbeln ruht. (Nr. 209). Die beiden Brennpunkte eines beliebigen Kegelschnittes der Schaarschaar bilden ein Punktepaar des Gewebes und sind conjugirt bezüglich des Hyperbelbüschels; sie sind also einander zugeordnet in einer involutorischen Verwandtschaft zweiten Grades.

225. Die Kegelschnitte einer beliebigen Schaar bilden mit ihren confocalen Kegelschnitten eine Schaarschaar; diese ruht auf einem Netze gleichseitiger Hyperbeln (Nr. 208), und ihre Punktepaare bestehen aus den Brennpunkten je eines Kegelschnitts der

Schaar. Von den Kegelschnitten einer beliebigen Schaar liegen demnach die Brennpunkte auf einer Curve C^3 dritter Ordnung, ihre Axen aber umhüllen eine Curve Γ^3 dritter Classe*). Jede dieser Axen a ist bezüglich der Schaarschaar einer zu ihr normalen Geraden a_1 conjugirt, mit der sie ein Strahlenpaar des Netzes bildet; der Punkt aa_1 liegt auf C^3. Die unendlich ferne Gerade der Ebene ist der Centrallinie der Schaarschaar conjugirt; sie berührt die Curve Γ^3 und hat mit C^3 die unendlich fernen imaginären Kreispunkte (Seite 210) und den unendlich fernen Punkt der Centrallinie gemein. Jedem Punkte F von C^3 ist ein Punkt F_1 dieser Curve conjugirt bezüglich des Netzes, und zwar sind F, F_1 die Brennpunkte confocaler Kegelschnitte der Schaarschaar.

Die Tangentenpaare, die von F an die Curven der Schaarschaar gehen, bilden eine symmetrische Involution, deren zu einander normale Doppelstrahlen conjugirt sind bezüglich der Schaarschaar und die Curve Γ^3 berühren. Durch dieselbe symmetrische Strahleninvolution werden die Punktepaare der Schaarschaar aus dem beliebigen Punkte F der Curve C^3 projicirt. Durch zwei dieser Punktepaare A, A_1 und B, B_1 ist die Schaarschaar nebst dem zugehörigen Netze und den Curven C^3 und Γ^3 bestimmt; ebenso durch zwei ihrer Kegelschnitte, die nicht confocal sind. Die Curve C^3 ist der Ort der Punkte, aus denen A, A_1 und B, B_1 durch zwei paar Strahlen einer symmetrischen Involution projicirt werden. Zieht man an einen der Kegelschnitte, die A, A_1 zu Brennpunkten haben, zwei paar Tangenten durch B, B_1, so schneiden sich diese in noch vier anderen Punkten von C^3 (vgl. Nr. 213). Durch jeden Punkt F von C^3 gehen drei Tangenten an Γ^3; von diesen sind zwei conjugirt und normal, und die dritte verbindet F mit dem conjugirten Punkte F_1 von C^3. Die Curve Γ^3 ist zweizügig (vgl. Nr. 226), C^3 ist einzügig.

Die drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits, die drei Symmetrieaxen seiner drei paar Gegenpunkte und die zwölf Mittellinien seiner Winkel berühren mit der unendlich fernen Geraden eine Curve dritter Classe, den Ort der Axen aller dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte.

226. Die Kegelschnittnetze lassen sich in vier verschiedene Hauptarten eintheilen, zwischen denen eine Anzahl von Arten

*) Vgl. Siebeck in Crelle's Journal 64 S. 177—180. — Besteht die Schaar aus Parabeln, so zerfällt die Curve C^3 in die unendlich ferne Gerade und einen Kreis, den Ort der eigentlichen Brennpunkte der Parabeln.

specieller Netze den Uebergang bilden. Wir unterscheiden diese Hauptarten mit Hülfe der Involutionen, in denen die Netze von den Geraden ihrer Strahlenpaare geschnitten werden (Nr. 214). Sind diese Involutionen theils elliptisch und theils hyperbolisch, d. h. haben sie theils imaginäre theils reelle Doppelpunkte, so umhüllen ihre Träger zwei verschiedene Zweige der Curve Γ^3; denn von stetig auf einander folgenden Tangenten dieser Curve wird das Netz in gleichartigen Involutionen geschnitten, schon weil die Doppelpunkte auf der Curve C^3 liegen. Die beiden Zweige oder Linienzüge von Γ^3 haben nur dann eine gemeinschaftliche Tangente t_1 wenn die beiden Doppelpunkte der auf t_1 enthaltenen Involution zusammenfallen; da aber die Doppelpunkte bezüglich aller Kegelschnitte des Netzes conjugirt sind, so gehen in dem erwähnten Falle diese Kegelschnitte alle durch einen sich selbst conjugirten Punkt, und das Netz ist speciell.

227. Ein nicht specielles Kegelschnittnetz wird entweder von den Geraden aller seiner Strahlenpaare in hyperbolischen, oder von den beiden Geraden gewisser Paare in elliptischen Involutionen geschnitten, oder endlich von der einen Geraden eines jeden Paares in einer hyperbolischen und von der anderen Geraden in einer elliptischen Involution. Ich nenne das Netz im ersteren Falle hyperbolisch, im zweiten elliptisch und im dritten Falle dual. Ein Netz ist hyperbolisch, wenn es einen Kegelschnittbüschel dritter Art enthält, oder überhaupt zwei Kegelschnitte, die keine reellen Punkte gemein haben; denn ein Büschel dritter Art wird von den Geraden der Ebene in hyperbolischen Involutionen geschnitten. Die Kegelschnitte eines elliptischen oder dualen Netzes schneiden sich paarweise in mindestens zwei reellen Punkten.

228. Ist das Netz durch drei seiner Strahlenpaare gegeben, so können wir zwei der Paare als zwei paar Gegenseiten eines „in dem Netze enthaltenen" Vierecks auffassen. Durch das dritte Strahlenpaar und überhaupt durch jeden beliebigen Kegelschnitt des Netzes ist alsdann ein resp. kein Eckpunkt dieses Vierecks von den drei übrigen getrennt, wenn das Netz dual resp. hyperbolisch ist. Dagegen sind durch das dritte Strahlenpaar und überhaupt durch die Kegelschnitte des Netzes entweder zwei oder keine Eckpunkte des Vierecks von den übrigen getrennt, wenn das Netz elliptisch ist; und zwar allemal zwei, wenn zwei Gegenseiten des Vierecks das Netz in elliptischen Involutionen schneiden.

229. Von den Geraden seiner Strahlenpaare wird ein duales

Netz in je zwei ungleichartigen, dagegen ein hyperbolisches oder elliptisches Netz in je zwei gleichartigen Involutionen geschnitten. Jedes in einem dualen Netze enthaltene Viereck hat einen Eckpunkt, der von den drei übrigen durch die Strahlenpaare und Kegelschnitte des Netzes getrennt ist; die drei durch jenen Eckpunkt gehenden Seiten des Vierecks schneiden das Netz in elliptischen, die übrigen drei Seiten schneiden es in hyperbolischen Involutionen. In einem elliptischen Netze giebt es unendlich viele Vierecke, von denen zwei paar Gegenseiten das Netz in elliptischen und die übrigen beiden Gegenseiten das Netz in hyperbolischen Involutionen schneiden; die beiden Eckpunktepaare eines solchen Vierecks, die auf den letzteren zwei Gegenseiten liegen, sind durch die Kegelschnitte des Netzes von einander getrennt. Ein hyperbolisches Netz enthält kein Viereck, dessen Eckpunkte durch irgend einen Kegelschnitt des Netzes von einander getrennt sind.

230. Eine Schaarschaar von Kegelschnitten wird aus dem Punkten P seiner Punktepaare durch Strahleninvolutionen „projicirt", d. h. ihre Kegelschnitte senden durch jeden dieser Punkte P Tangentenpaare, die eine dieser Involutionen bilden (Nr. 215). Insbesondere werden die Punktepaare der Schaarschaar aus den Punkten P durch die Strahlenpaare jener Involutionen projicirt. Wenn die Involutionen theils elliptisch, theils hyperbolisch sind, so liegen ihre Mittelpunkte P auf zwei verschiedenen Zweigen der Curve dritter Ordnung C^3, und nur in speciellen Fällen hängen diese Zweige zusammen in einem Doppelpunkte (vgl. Nr. 226). Sind alle jene Involutionen hyperbolisch, so nennen wir die Schaarschaar hyperbolisch; sind sie paarweise theils elliptisch, theils hyperbolisch, so heisse die Schaarschaar elliptisch; wird endlich die Schaarschaar aus dem einen Punkte eines und dann jedes ihrer Punktepaare durch eine elliptische und aus dem anderen durch eine hyperbolische Involution projicirt, so nennen wir sie eine duale Schaarschaar.

231. Das duale Kegelschnittnetz bezeichne ich als Netz erster Art. Seine Cayley'sche Curve dritter Classe Γ^3 besteht aus einem paaren und einem unpaaren Zweige, ist also „zweizügig", und zwar wird das Netz von den Tangenten des paaren Zweiges in hyperbolischen und von denen des unpaaren Zweiges in elliptischen Involutionen geschnitten. Aus einem Eckpunkte eines jeden im Netze enthaltenen Vierecks gehen an den unpaaren Zweig eine oder drei, an den paaren Zweig zwei oder keine Tangenten (Nr. 229). Zwei conjugirte Tangenten von Γ^3 berühren niemals einen und denselben Zweig dieser Curve; wenn sie zusammen an Γ^3 sich hinbewegen, so beschreibt ihr Schnittpunkt die Jacobi'sche Curve C^3, welche „einzügig" ist, d. h. nur einen reellen Zweig besitzt. In jedem reellen Punkte P von C^3 schneiden sich zwei reelle conjugirte Tangenten von Γ^3. Die auf dem Netze ruhende Schaarschaar wird demnach aus den Punkten P ihrer Punktepaare durch hyperbolische Involutionen projicirt, die je zwei reelle conjugirte Tangenten von Γ^3 zu Doppelstrahlen haben. Das duale Netz ist also der Träger einer hyperbolischen Schaarschaar, deren Punktepaare auf einer einzügigen Curve dritter Ordnung C^3 liegen. Nur die Tangenten des paaren Zweiges von Γ^3 verbinden je zwei reelle conjugirte Punkte von C^3. Das duale Netz enthält Kegelschnittbüschel erster und zweiter Art, aber keine dritter Art; die auf ihm ruhende Schaarschaar enthält Kegelschnittschaaren erster, zweiter und dritter Art.

232. Das elliptische Kegelschnittnetz nenne ich ein Netz zweiter Art. Seine Cayley'sche Curve Γ^3 besteht aus einem paaren und einem unpaaren Zweige, und zwar wird das Netz von den Tangenten des paaren Zweiges in elliptischen und von denen des unpaaren Zweiges in hyperbolischen Involutionen geschnitten. Von einem im Netze enthaltenen Viereck schneiden nämlich entweder nur zwei oder je zwei Gegenseiten das Netz in hyperbolischen Involutionen, sodass durch jeden Eckpunkt entweder ein oder drei Träger hyperbolischer und entweder zwei oder keine Träger elliptischer Involutionen gehen. Zwei conjugirte Tangenten von Γ^3 berühren entweder beide den paaren oder beide den unpaaren Zweig dieser Curve; ihr Schnittpunkt liegt im ersteren Falle auf einem unpaaren, im letzteren auf einem paaren Zweige der Curve C^3, mit der sie im ersteren Falle keine weiteren reellen Punkte gemein haben. Die Jacobi'sche Curve C^3 besteht also bei dem Netze zweiter Art aus zwei verschiedenen Zweigen, und in ihren reellen Punkten schneiden sich je zwei reelle conjugirte Tangenten von Γ^3. Daraus folgt (vergl. Nr. 231), dass auch das elliptische Netz von einer hyperbolischen Schaarschaar der Träger ist. Nur die Tangenten des unpaaren Zweiges von Γ^3 verbinden je zwei reelle conjugirte Punkte von C^3, und zwar liegt einer dieser Punkte auf dem paaren, der andere auf dem unpaaren Zweige von C^3. Das elliptische Netz enthält nur Kegelschnittbüschel erster und zweiter Art (vergl. Nr. 227); die auf ihm ruhende Schaarschaar enthält Kegelschnittschaaren von allen drei Arten.

233. Ein hyperbolisches Kegelschnittnetz nenne ich ein Netz dritter oder vierter Art, je nachdem die auf ihm ruhende Schaarschaar dual oder elliptisch ist.

Das Netz dritter Art ist demnach das Reciproke einer Schaarschaar, die auf ein Netz erster Art sich stützt; seine Strahlenpaare umhüllen eine einzügige Curve Γ^3, wogegen C^3 aus zwei verschiedenen Zweigen besteht (Nr. 231). Jede reelle Tangente von Γ^3 verbindet zwei reelle conjugirte Punkte von C^3, die auf die beiden Zweige von C^3 sich vertheilen; durch einen reellen Punkt von C^3 dagegen gehen zwei reelle oder zwei imaginäre conjugirte Tangenten von Γ^3, jenachdem der Punkt auf dem paaren oder dem unpaaren Zweige von C^3 liegt. Das Netz enthält Kegelschnittbüschel erster, zweiter und dritter Art; die auf ihm ruhende Schaarschaar enthält Kegelschnittschaaren erster und zweiter Art, aber keine Schaar dritter Art.

234. Das Netz vierter Art ist das Reciproke einer Schaarschaar, die auf ein Netz zweiter Art sich stützt. Die zugehörigen Curven C^3 und Γ^3 bestehen demnach aus je zwei verschiedenen Zweigen oder Zügen (Nr. 232). Jede reelle Tangente von Γ^3 verbindet zwei reelle conjugirte Punkte von C^3; diese liegen auf dem paaren oder dem unpaaren Zweige von C^3, jenachdem die Tangente den unpaaren oder den paaren Zweig von Γ^3 berührt. Durch einen reellen Punkt von C^3 gehen zwei reelle oder zwei imaginäre conjugirte Tangenten von Γ^3, jenachdem der Punkt auf dem unpaaren oder dem paaren Zweige von C^3 liegt. Das Netz enthält Kegelschnittbüschel aller drei Arten; die auf ihm ruhende Schaarschaar enthält nur Schaaren erster und zweiter Art.

235. Andere als die angegebenen vier Hauptarten des Kegelschnittnetzes giebt es nicht, weil niemals ein hyperbolisches Netz der Träger einer hyperbolischen Schaarschaar ist. In einem hyperbolischen Netze nämlich giebt es allemal imaginäre Strahlenpaare mit reellem Schnittpunkte P; aus einem solchen Punkte P aber wird die zugehörige Schaarschaar durch eine elliptische Strahleninvolution projicirt, deren Doppelstrahlen jenes imaginäre Strahlenpaar bilden, und die Schaarschaar ist somit nicht hyperbolisch.

Wenn ein nicht specielles Netz eine Schaarschaar stützt, so ist von diesen beiden Kegelschnitt-Mannigfaltigkeiten allemal die eine hyperbolisch, die andere dagegen entweder elliptisch oder dual

(Nr. 231 bis 234). Von den zugehörigen beiden Curven Γ^3 und C^3 besteht endweder jede oder nur eine aus zwei verschiedenen Zweigen, und zwar jede, wenn eine der beiden Mannigfaltigkeiten elliptisch ist.

236. Die Schaarschaar ist speciell, wenn sie einen zweifachen Punkt Z enthält. Dieser ist ein Doppelpunkt von C^3, durch ihn gehen alle Kegelschnitte des zugehörigen Netzes, welches ebenfalls speciell ist, und die Curve Γ^3 zerfällt in den Strahlenbüschel Z und die Curve Γ^2 zweiter Classe, deren Tangenten den Strahlen von Z in Bezug auf zwei beliebige Curven der Schaarschaar conjugirt sind. Der Strahlenbüschel Z und der Tangentenbüschel von Γ^2 sind projectiv und erzeugen mit einander die Curve C^3 (Nr. 216).

Die Schaarschaar und das Netz sind ebenso speciell, wenn das Netz eine zweifache Gerade z enthält. Diese ist eine Doppeltangente von Γ^3, sie berührt alle Kegelschnitte der Schaarschaar, und in sie und eine Curve zweiter Ordnung zerfällt die Curve C^3. Die Kegelschnitte des Netzes berühren sich büschelweise in je zwei Punkten der Geraden z.

237. Die Kegelschnitte eines beliebigen Büschels bilden mit den zu ihnen concentrischen und homothetischen (d. h. ähnlichen und ähnlich liegenden) Kegelschnitten ein specielles Netz. Dieses enthält eine unendlich ferne zweifache Gerade und stützt eine Schaarschaar von Parabeln; seine Strahlenpaare bestehen aus den Asymptoten je eines Kegelschnitts des Büschels. Die Asymptotenpaare der Hyperbeln des Büschels umhüllen demnach eine Curve Γ^3 dritter Classe, die eine unendlich ferne Doppeltangente hat; sie schneiden eine beliebige der Asymptoten in Punktepaaren einer symmetrischen Involution (Nr. 216). Die Jacobi'sche Curve C^3 dieses speciellen Netzes zerfällt in die unendlich ferne Gerade und eine Curve zweiter Ordnung, den Ort der Mittelpunkte seiner Kegelschnitte. Jeder dieser Mittelpunkte ist bezüglich des Netzes einem unendlich fernen Punkte conjugirt, bildet mit ihm ein Punktepaar der Schaarschaar und liegt mit ihm auf einer Tangente von Γ^3.

Die Kegelschnitte eines beliebigen Netzes bilden mit den zu ihnen concentrischen und homothetischen Kegelschnitten ein lineares System dritter Stufe, das eine Schaar von Parabeln stützt. Jedes Strahlenpaar dieses Systemes besteht aus den Asymptoten eines Kegelschnittes des Netzes, und diese beiden Asymptoten sind demnach conjugirt bezüglich der Parabelschaar und einander zugeordnet in einer involutorischen Verwandtschaft zweiten Grades.

238. Die Schaarschaar ist noch specieller als vorhin (Nr. 236), wenn sie die Punktepaare einer Involution u enthält. Die Kegelschnitte des Netzes gehen alsdann durch die beiden Doppelpunkte von u, die Curve Γ^3 zerfällt in diese beiden Doppelpunkte und den Pol U der Geraden u bezüglich einer beliebigen Curve γ^2 der Schaarschaar, und C^3 zerfällt in die Gerade u und eine Curve zweiter Ordnung (vergl. Nr. 127 und 213). Die Gerade u ist hinsichtlich der Schaarschaar allen Strahlen des Büschels U conjugirt, und durch U geht eine gemeinschaftliche Sehne von je zwei Kegelschnitten des Netzes. Ist insbesondere die Involution u der Schnitt einer rechtwinkligen Strahleninvolution mit der unendlich fernen Geraden, so besteht das Netz aus lauter Kreisen (vergl. Nr. 208), und es ergiebt sich:

239. Die Kreise, welche eine gegebene Curve zweiter Classe γ^2 stützen, d. h. ihren Poldreiecken und Polvierecken umschrieben sind, bilden ein specielles Kegelschnittnetz. Die Sehnen, die sie paarweise mit einander gemein haben, schneiden sich im Mittelpunkt U von γ^2; sie sind parallel, wenn γ^2 eine Parabel ist. Ist γ^2 eine Ellipse oder Hyperbel, so sind demnach die Produkte aus den Abschnitten der Sekanten, die vom Mittelpunkte U an die Kreise gezogen werden können, constant, die Kreise haben gleiche „Potenz" in U, und es giebt einen mit γ^2 concentrischen Kreis, der alle Kreise des Netzes rechtwinklig schneidet (jedoch bei stumpfwinkligen Hyperbeln imaginär wird). Ist dagegen γ^2 eine Parabel, so liegen die Mittelpunkte aller Kreise des Netzes auf einer Geraden. Jeder Punkt dieser Geraden resp. jenes orthogonalen, mit γ^2 concentrischen Kreises kann als ein verschwindend kleiner Kreis des Netzes aufgefasst werden, und wir schliessen daraus, dass durch ihn zwei zu einander rechtwinklige Tangenten an γ^2 gezogen werden können. Die Sätze dieser Nummer hat Herr Faure entdeckt.

240. Aus den zu Nr. 238 reciproken Sätzen ergiebt sich u. A. Folgendes: Die Kegelschnitte, welche einen Punkt F zum Brennpunkt haben und sich auf eine Curve zweiter Ordnung k^2 stützen, bilden eine specielle Schaarschaar. Die beiden reellen Tangenten, die irgend zwei von ihnen mit einander gemein haben, schneiden sich allemal auf der Polare f von F in Bezug auf k^2. Die Cayley'sche Curve Γ^3 zerfällt in F und eine Curve zweiter Classe; die Jacobi'sche C^3 dagegen zerfällt in f und die beiden imaginären

Doppelstrahlen des rechtwinkligen Büschels F. Von jedem Polviereck der Schaarschaar schneiden sich zwei Gegenseiten rechtwinklig in F; die Schnittpunkte der übrigen zwei paar Gegenseiten liegen auf f. Ueberhaupt ist f die Polare von F in Bezug auf alle Kegelschnitte des Netzes, auf welchem die Schaarschaar ruht.

241. Ein sehr specielles Netz bilden die Kegelschnitte, die einem Dreieck ABC umschrieben werden können; von den Curven der zugehörigen Schaarschaar ist ABC ein gemeinschaftliches Poldreieck; die Curven C^3 und Γ^3 reduciren sich auf die drei Seiten resp. die drei Eckpunkte des Dreiecks. — Die Kegelschnitte, von denen ABC ein Poldreieck ist, bilden nicht allein eine sehr specielle Schaarschaar, sondern zugleich ein ebenso specielles Netz; auf dieses stützt sich die Schaarschaar, welche dem Dreieck eingeschrieben werden kann.

---

16. Lineare Systeme und Gewebe von concentrischen Kegeln zweiter Ordnung.

242. Die linearen Systeme und Gewebe von Kegelschnitten der Ebene werden aus einen beliebigen Punkte des Raumes durch lineare Systeme und Gewebe von Kegeln zweiter Ordnung projicirt, und die für sie bewiesenen Sätze lassen sich auf diese Kegelmannigfaltigkeiten übertragen. Wir heben unter diesen Mannigfaltigkeiten nur wenige besonders beachtenswerthe hervor, von denen aber die analogen Kegelschnittmannigfaltigkeiten keineswegs Schnitte sind.

Eine Schaar confocaler Kegel zweiter Ordnung ruht auf einem linearen System von ∞^3 gleichseitigen Kegeln; ihre beiden Focalaxen sind conjugirt bezüglich dieser gleichseitigen Kegel und bilden das einzige reelle Geradenpaar der Schaar. Durch die drei Hauptaxen der confocalen Kegel geht ein Netz von Kegeln des Systemes. Die ∞^2 Ebenenpaare des Systemes bestehen aus je zwei sich rechtwinklig schneidenden Ebenen, die bezüglich der confocalen Kegel conjugirt und durch die beiden Focalaxen harmonisch getrennt sind (Seite 219). Die Gegenebenen jedes Polvierkants der confocalen Schaar sind zu einander normal und bilden drei Ebenenpaare des Systemes; dem Polvierkant ist ein Büschel von Kegeln des Systemes umschrieben. Die Schaar enthält den imaginären

Ordnungskegel des rechtwinkligen polaren Strahlenbündels (vergl. Abth. II), weil jedem Kegel des Systemes rechtwinklige Poldreikante dieses Bündels eingeschrieben werden können.

243. Ein Büschel concyklischer Kegel zweiter Ordnung ist der Träger eines linearen Gewebes von ∞^3 Kegeln zweiter Ordnung, denen rechtwinklige Dreikante umschrieben werden können. Die beiden cyklischen Ebenen des Büschels sind conjugirt bezüglich aller Kegel des Gewebes und bilden das einzige reelle Ebenenpaar des Büschels. Die drei Symmetrieebenen der concyklischen Kegel berühren eine Schaarschaar von Kegeln des Gewebes. Die ∞^2 Geradenpaare des Gewebes bestehen aus je zwei sich rechtwinklig schneidenden Geraden, die bezüglich der concyklischen Kegel conjugirt und durch die beiden cyklischen Ebenen harmonisch getrennt sind (Seite 223). Die Gegenkanten jedes Polvierseits des Büschels schneiden sich rechtwinklig und bilden drei Geradenpaare des Gewebes. Zwei beliebige Polvierseite des Büschels sind einem Kegel des Gewebes umschrieben. Der Büschel enthält auch den imaginären Ordnungskegel des rechtwinkligen polaren Strahlenbündels (vergl. Nr. 242).

Die concyklischen Kegel werden von jeder Ebene, die zu einer ihrer cyklischen Ebenen parallel ist, in einem Büschel von Kreisen geschnitten, deren Potenzlinie auf der anderen cyklischen Ebene liegt; zwei dieser Kreise reduciren sich auf die Spuren der beiden Hauptaxen, deren Verbindungsebene zu den beiden cyklischen Ebenen normal ist. Ein Büschel von Kreisen, die keinen reellen Punkt gemein haben, wird demnach aus den Punkten des Kreises, der die Ebene des Büschels in dessen Punktkreisen rechtwinklig schneidet, durch Büschel concyklischer Kegel projicirt.

244. Die Kegel einer Schaar bilden mit den zu ihnen confocalen Kegeln eine Schaarschaar von Kegeln zweiter Ordnung. Diese ruht auf einem Netze gleichseitiger Kegel (Nr. 242), und ihre Geradenpaare bestehen aus den Focalaxen je eines Kegels der Schaar. Zwei so zusammengehörige Focalaxen sind conjugirt bezüglich aller Kegel des Netzes und harmonisch getrennt durch dessen Ebenenpaare; diese Ebenenpaare aber bestehen aus je zwei sich rechtwinklig schneidenden Ebenen, die bezüglich der Schaarschaar conjugirt sind.

Von den Kegeln einer beliebigen Schaar liegen demnach die Focalaxen auf einem Kegel dritter Ordnung K^3, dem Jacobi'schen eines Netzes gleichseitiger Kegel, und ihre Symmetrie-Ebenen umhüllen einen Kegel dritter Classe Γ^3, den Cayley'schen Kegel des Netzes (Nr. 212, 213). Die drei Symmetrie-Ebenen eines beliebigen Kegels der Schaar und seiner confocalen Kegel berühren Γ^3 und bilden ein rechtwinkliges Ebenentripel von Γ^3 (Nr. 221); das Dreikant der Hauptaxen des Kegels aber bildet mit seinem Höhenstrahl ein Polvierkant des Netzes, und je zwei Gegenebenen dieses Vierkants sind conjugirt hinsichtlich der Schaarschaar, berühren den Kegel Γ^3 und schneiden sich rechtwinklig in einem Strahle von K^3 (Nr. 212, 216).

Die drei Diagonalebenen eines Vierseits im Strahlenbündel, die zwölf Mittelebenen seiner Flächenwinkel und die sechs Ebenen, welche die Winkel seiner drei paar Gegenkanten rechtwinklig hälften, berühren einen Kegel dritter Classe Γ^3. Dieser wird umhüllt von den Symmetrie-Ebenen der dem Vierseit eingeschriebenen Kegel zweiter Ordnung.

245. Die ∞^1 Kegel eines Büschels bilden mit ihren concyklischen ein Kegelnetz. Dieses trägt eine Schaarschaar von Kegeln zweiter Ordnung, denen rechtwinklige Dreikante umschrieben werden können (Nr. 243), und seine Ebenenpaare bestehen aus den cyklischen Ebenen von je einem Kegel des Büschels. Die Ebenen jedes Paares sind conjugirt bezüglich aller Kegel der Schaarschaar und harmonisch getrennt durch deren Geradenpaare; die Geradenpaare der Schaarschaar aber bestehen aus je zwei sich rechtwinklig schneidenden Geraden, die hinsichtlich des Netzes conjugirt sind.

Von den Kegeln des beliebigen Büschels umhüllen demnach die cyklischen Ebenen einen Kegel dritter Classe Γ^3; ihre Hauptaxen aber liegen auf einem Kegel dritter Ordnung K^3, dem Jacobi'schen des Netzes. Die drei Hauptaxen von concyklischen Kegeln des Netzes bilden ein rechtwinkliges Strahlentripel von K^3 (Nr. 221); die sie verbindenden drei Symmetrieebenen schneiden also K^3 noch in drei Strahlen einer Ebene und bilden mit dieser ein Polvierseit der Schaarschaar, dessen Diagonalebenen den Kegel Γ^3 berühren und dessen Gegenkanten sich rechtwinklig schneiden. Je zwei der ∞^1 rechtwinkligen Strahlentripel von K^3 liegen auf einem gleichseitigen Kegel, und in den Strahlen jedes solchen Tripels wird K^3 von einem gleichseitigen Kegel berührt (Nr. 219).

Von einem beliebigen Vierkant liegen die drei Schnittlinien seiner Gegenebenen, die zwölf Mittellinien seiner Kantenwinkel und die (sechs) Symmetrieaxen von je zwei Gegenebenen auf einem

Kegel dritter Ordnung. Dieser enthält die Hauptaxen aller dem Vierkant umschriebenen Kegel zweiter Ordnung.

246. Die Kegel einer beliebigen Schaarschaar bilden mit den zu ihnen confocalen ein lineares Gewebe von ∞^3 concentrischen Kegeln. Dieses ruht auf einem Büschel gleichseitiger Kegel, und seine ∞^2 Geradenpaare bestehen aus den Focalaxen von je einem Kegel der Schaarschaar. Die beiden Focalaxen jedes Kegels der Schaarschaar sind demnach conjugirt bezüglich der gleichseitigen Kegel und harmonisch getrennt durch die Ebenenpaare des Büschels. Die Schaarschaar enthält i. A. vier Rotationskegel, in deren Rotationsaxen die Kegel des Büschels sich schneiden. Jede dieser vier Axen ist der Höhenstrahl des von den übrigen gebildeten Dreikants.

247. Die Kegel eines Netzes bilden mit ihren concyklischen ein lineares System von ∞^3 Kegeln. Dieses trägt eine Schaar von Kegeln, denen rechtwinklige Dreikante umschrieben werden können, und jedes seiner ∞^2 Ebenenpaare besteht aus den beiden, hinsichtlich der Schaar conjugirten cyklischen Ebenen eines Kegels des Netzes.

Wenn eine dieser beiden cyklischen Ebenen die Kegel der Schaar berührt, so fällt sie mit der ihr conjugirten anderen zusammen, und der zugehörige Kegel des Netzes ist ein Rotationskegel. Das Netz enthält also i. A. vier Rotationskegel; deren vier cyklische Ebenen berühren alle Kegel der Schaar und bilden ein Vierseit mit drei paar normalen Gegenkanten.