



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

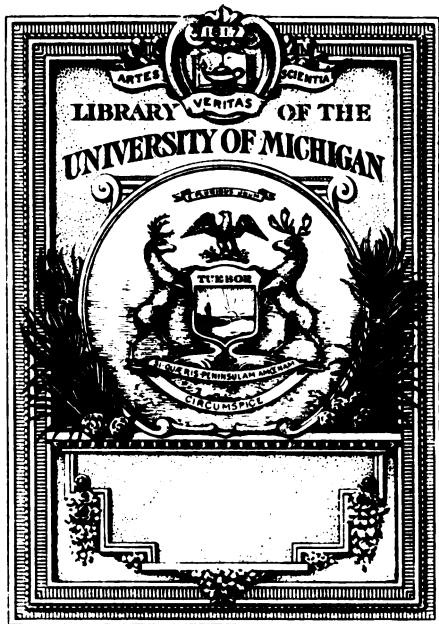
Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>





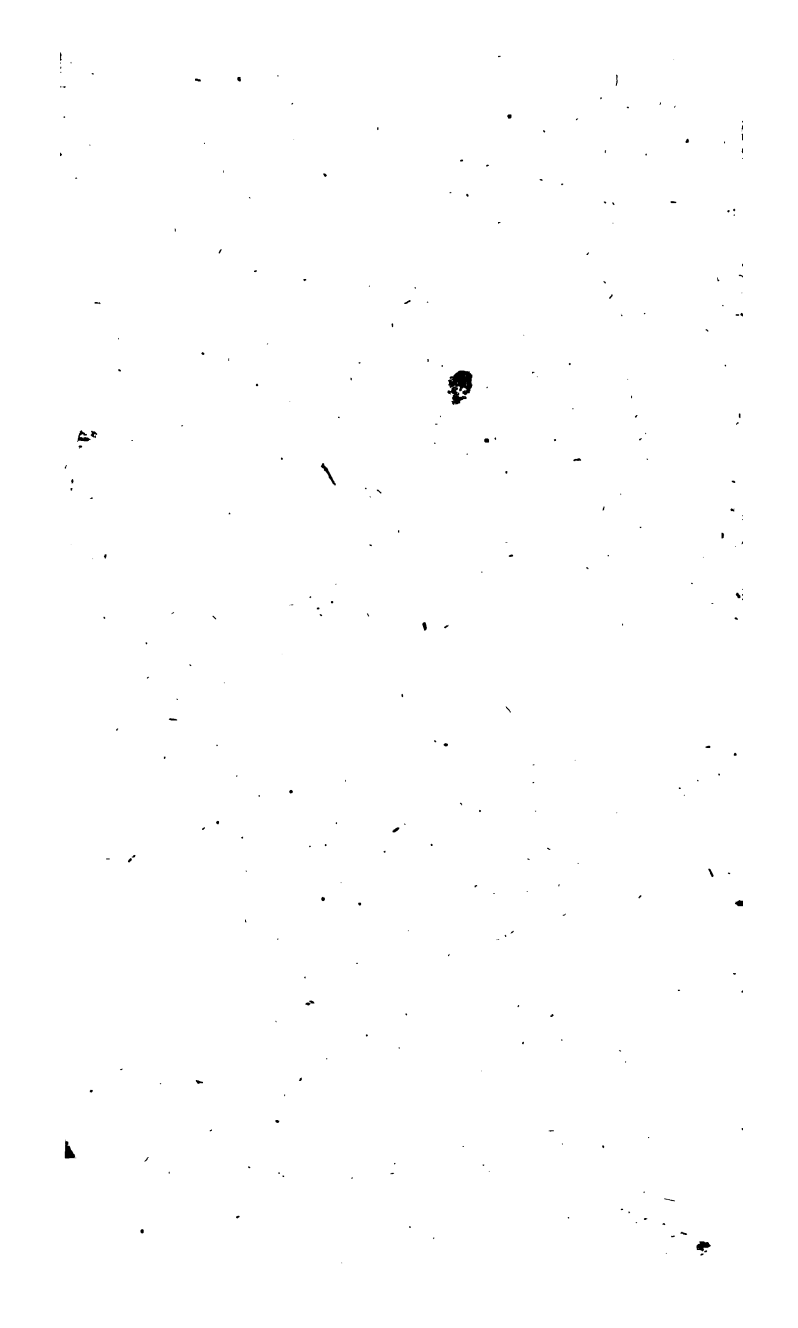
75

15 11

612 11

18

Q1
3
P1



E L E M E N S

D E S

M A T H E M A T I Q U E S .

Polynière
Par M. PIERRE POLYNIER,
Docteur en Médecine.



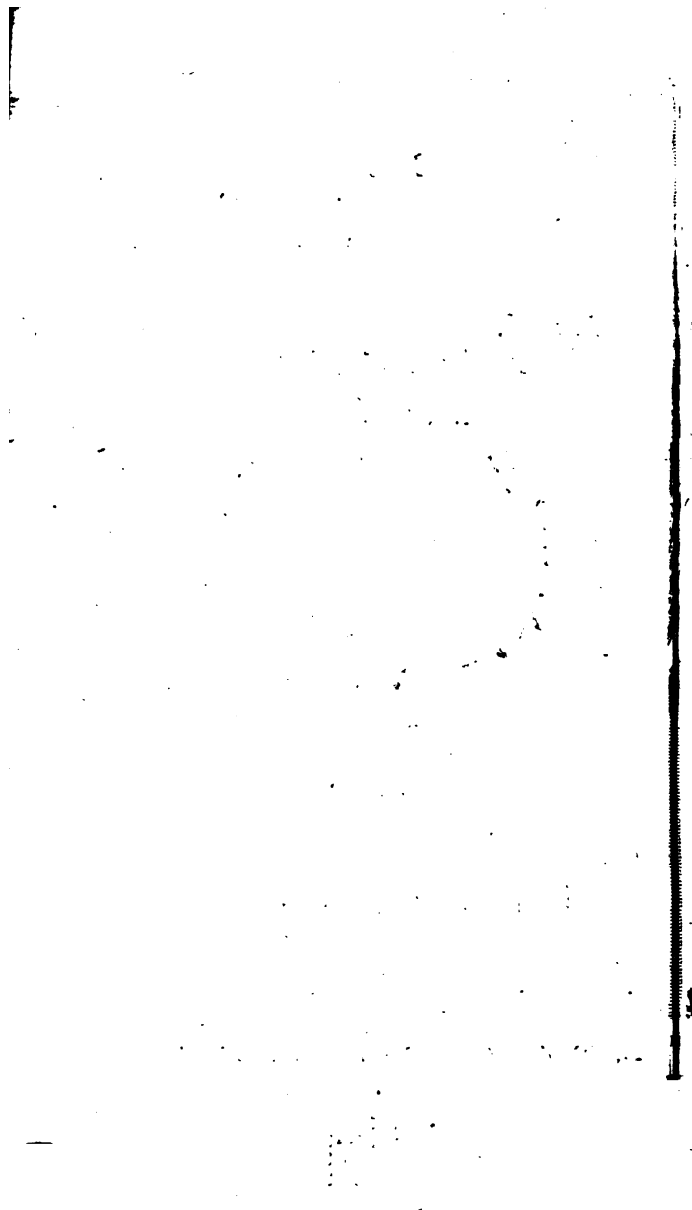
A P A R I S ,

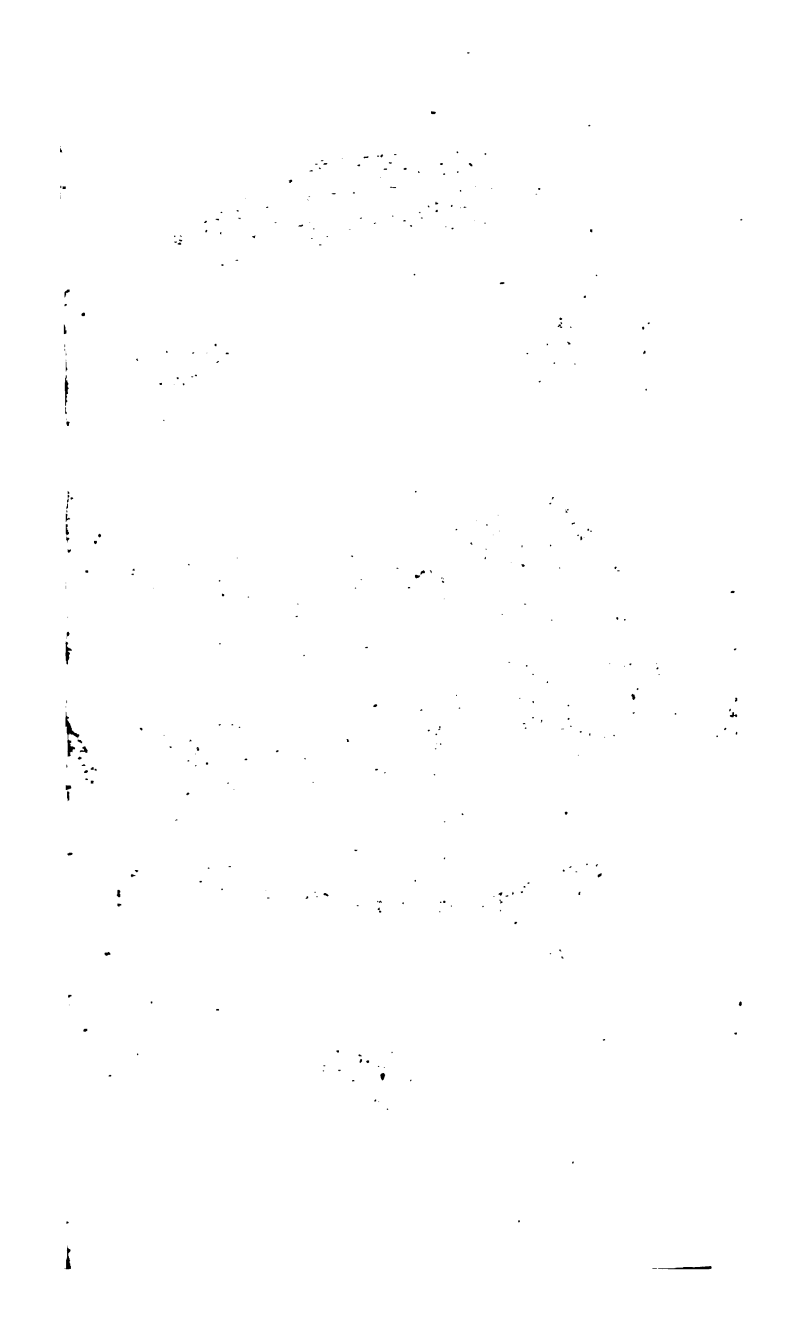
Chez { JEAN DE LAULNE rue de la
Harpe, proche le Collège d'Harcour,
à l'Image S. Jean-Baptiste.

{ ET
JACQUE QUILLAU Imprimeur-Juré-Libraire, rue Galande,
proche la rue du Fouare, aux Armes
de l'Université.

M D C C I V .

A V E C A P P R O B A T I O N E T P R I V I L E G E .







L. Duffler

Sculp. 1700



Hist. of Sci.
offenbacher

2-4-39
37860



A MONSIEUR
LE MARQUIS
DE CHAMILLART,



MONSIEUR,

*J'ai l'honneur de vous presenter le
premier fruit de mon application aux
Mathematiques. Rien ne peut mieux
seconder les heureuses dispositions que
vous avez pour les grandes choses ; rien
ne peut contribuer davantage à fortifier*

à ij

cette admirable justesse d'esprit dont la Providence vous a si libéralement partagé, que l'étude de ces Sciences ; l'équivoque ni le doute n'y peuvent jamais trouver place. Elles présentent toujours à l'esprit des veritez incontestables & liées ensemble par un ordre merveilleux ; elles l'accoutument à penser juste sur toutes sortes de matieres, à débrouiller les choses les plus confuses, & à éclaircir les plus obscures. C'est en effet cette exactitude scrupuleuse & parfaite qui fait le merite des Mathématiques ; & je croirois avoir réüssi heureusement dans cet Ouvrage, s'il étoit digne de votre estime par cet endroit ; au moins aura-t-il sur tous les autres qui pourront vous être presentez, l'avantage d'être le premier qui paroisse sous les auspices de votre illustre Nom.

S'il convenoit à un Geometre d'emprunter le secours de l'Eloquence pour exprimer les veritez qu'il connoît, qu'elle occasion n'aurois-je pas de pu-

blier ces grandes qualitez d'esprit & de cœur qui brillent en vous , & qui vont nous retracer ces rares vertus qui font le merite de votre Famille , & qui sont le principe de son élévation ?

Mais je ne peux m'empêcher de vous feliciter sur l'avantage que vous avez, MONSIEUR , d'être né avec les dispositions necessaires , pour être l'imitateur fidele des Exemples de toutes sortes de vertus politiques & morales , que vous avez devant les yeux dans la personne de ce grand Ministre votre Illustre Pere qui remplit si dignement au gré du Monarque & de ses Sujets , les deux plus importantes Charges de l'Etat. Le Public a déjà de votre part des gages d'une capacité digne de votre Rang. Vous avez donné des preuves éclatantes de la force & de la penetration de votre esprit. On a été surpris dans les épreuves publiques que vous avez données de votre sçavoir , qu'à un âge si peu avancé vous ayez fait des progrès

*ſe conſiderables dans les belles Lettres
& dans l'Eloquence. Les experiences
de Phyſique que vous avez faites vous-
même, & toutes celles que j'ai eu l'hon-
neur de faire devant Vous, dont vous
avez compris & expliqué les raiſons
avec une clarté, une facilité, & un
plaiſir extraordinaire ; les Theſes de
Philoſophie que vous avez ſoutenues
avec un applaudiffement general, ont
fait voir l'excellence de votre jugement,
& un genie capable de penetrer dans
les Sciences les plus ſublimes. Mais on
eſt moins ſurpris de ces heureux succès
de vos études, quand on ſçait, quelle
eſt votre docilité, votre zele vif & ar-
dent pour la perfection des Sciences, &
des beaux Arts, & pour la protection
des Sçavans ; cette joye ſenſible que
vous avez toujours eue de pouvoir vous
inſtruire avec eux dans des Conferences
frequentes & nombreuses par leur
concoure : enfin votre pieté ſincere, votre
modestie ſans affectation, & cette aver-
ſion conſtante & genereuſe que vous*

avez pour l'orgueil , vice presque inseparable d'une haute fortune.

Voilà les dispositions de cœur sur lesquelles sont fondez l'estime & l'amour que les Sçavans ont pour vous , les louanges qu'on ne peut se dispenser de vous donner , & ce qui anime le zele avec lequel je suis ,

M O N S I E U R ,

Votre tres-humble & tres-obéissant serviteur ,

P. POBYNIER.



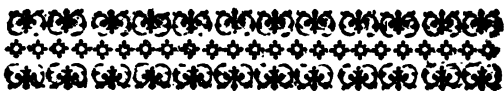
P R E F A C E.

LA methode que je donne ici , a eu jusques à present un succès si heureux , que parmi un assez bon nombre d'Etudians qui s'en sont servis depuis quelques années , il ne s'en est trouvé aucun qui n'ait témoigné en être fort content : & les progrès que plusieurs ont faits par son moyen dans les Mathematiques , m'ont fait esperer que la liberté que je prens de la donner au Public , ne lui déplairoit pas.

Tous ceux qui commencent à s'appliquer aux Mathematiques , ne voyent pas d'abord où ces Elemens les peuvent conduire. Ceux même qui les ignorent entierement , en font une espece de mépris , les traitent de Sciences vaines & inutiles , d'occupations de gens oisifs , qui passent tout leur temps dans un cabinet à considerer des lignes & des surfaces , incapables de songer à des choses plus solides & plus utiles. C'est pour instruire les uns , &

P R E F A C E.

pour guérir, s'il est possible, la prévention des autres, que j'ai cru devoir commencer par les reflexions suivantes.



D. E L'U T I L I T É *des Mathematiques.*

Premierement je considererai la nécessité où toutes sortes de personnes se trouvent d'avoir l'esprit exact, penetrant, situé dans toute la force, la vigueur & l'étendue dont il est capable. Pour être persuadé que les Mathematiques sont des sciences qui produisent tous ces bons effets ; il suffit de faire attention à la clarté de leurs principes , à la justesse des raisonnemens & à l'évidence des demonstrations qui s'y rencontrent continuellement. Dans ces sciences l'esprit s'accoutume à s'appliquer aux choses qu'il se propose à examiner ; il s'accoutume à connoître la verité , à la mettre dans son jour , à en établir les principes d'une maniere suivie. Cette habitude est une chose qu'on ne peut assez estimer, c'est un fruit d'un prix infini & le plus precieux de nos pre-

De l'utilité

mieres études. Rien ne rend l'esprit plus penetrant, plus vif, & plus en état de percer les nuages de l'erreur, que l'exercice où il se trouve dans les Mathematiques pour tirer d'un fort petit nombre de principes connus, mille choses qu'il ne connoissoit pas; pour les déduire par ordre, & par un enchaînement admirable. Il est rare qu'un esprit geometrique prenne la vrai-semblance pour la verité. Ceux qui ont vû plusieurs excellens ouvrages de peinture, par exemple, de graveure, de sculpture, sçavent beaucoup mieux juger d'une estampe, d'une statuë, &c. de même ceux qui sont accoûtumés à des idées claires, à des demonstrations exactes, jugent bien mieux du défaut ou de la perfection d'un raisonnement. Ils ne sont pas si sujets à se laisser tromper par quantité de maximes obscures & incertaines qui servent de fondemens aux faux raisonnemens dont les discours des hommes sont remplis. Ce qui met l'esprit dans sa force & dans son étendue, c'est de l'accôûtumer à comprendre plusieurs choses à la fois, ce sont ces demonstrations qu'on ne peut entendre qu'en appercevant la verité de cent autres demonstrations dont elles dépendent; parce qu'alors l'esprit est obligé de voir en même tems & ce qui éclaire

des Mathematiques.

& ce qui est éclairé. En embrassant tant de choses à la fois, il porte ses vûes beaucoup plus loin que dans ses actions ordinaires. De même qu'en s'accoutumant à porter des fardeaux pesans, il arrive qu'on ne sent presque plus le poids de ceux qui sont plus legers; c'est ainsi qu'en exerçant nôtre esprit à des veritez abstraites & difficiles, nous lui rendons faciles toutes celles qui demandent moins d'application. Les exercices du corps font qu'il agit avec plus de souplesse & d'agilité, l'endurcis- sent au travail, & le rendent enfin capable de supporter de grandes fatigues; de même aussi les travaux de l'esprit tels qu'ils se rencontrent dans les Mathematiques, le fortifient & l'accoutument à concevoir les choses difficiles, à y donner toute l'attention necessaire, le preparent à suivre le fil d'un raisonnement quelque long qu'il soit, & empêchent qu'il ne se rebute de la multitude des choses qu'il est souvent obligé d'examiner pour appercevoir la verité ou la fausseté dans des choses importantes. Ces sciences ouvrent l'esprit & l'habituent à bannir tous les doutes & toutes les probabilitéz, & à ne donner son consentement qu'à ce qui est évident & incontestable; parcequ'on ne veut y admettre que des veritez certaines

De l'utilité

de des demonstrations. Le soin qu'on a de définir tous les termes obscurs, afin d'éviter toutes les équivoques & les disputes de mots; cette adresse dont on se sert pour tirer de ce qui est connu des choses si cachées & si difficiles, font admirer & estimer les Mathématiques. Ces sciences surprennent l'esprit & lui sont agréables; parceque naturellement nous avons de l'inclination pour connoître la vérité, & ici elle paroît toute pure, & sans aucuns nuages; ici toutes choses nous portent à l'aimer; on y apprend à la discerner; on y trouve ce qui fortifie la raison, ce qui étend la vûe de l'esprit, & enfin ce qui donne lieu d'admirer la grandeur de l'ame de l'homme, & ce qui fait connoître qu'elle ne peut être que toute spirituelle & immortelle.

Considérons presentement en particulier l'usage des Mathématiques dans ce qui regarde la société des hommes, & faisons attention à la nécessité qu'il y a de se servir des lumières de ces sciences. Commençons par les Elemens.

L'Arithmétique est d'une utilité si universelle qu'il semble qu'il n'y a personne qui n'en puisse avoir besoin; car sans parler des autres parties des Mathématiques auxquelles elle est absolument nécessaire:

tout

Des Mathématiques.

tout le monde sçait que les Marchands, les Trésoriers, Financiers, Banquiers, Caissiers; en un mot ceux qui sont chargés de recettes de deniers, qui ont des partages ou distributions à faire, soit en paix, soit en guerre, soit dans le Bureau, soit dans les familles, ne peuvent réussir sans des calculs précis, & sans des supputations exactes, c'est-à-dire, sans la science des nombres.

L'Algebre est la science generale des grandeurs. Si on considère son étendue & la fécondité de ses démonstrations, on trouvera qu'elle conduit l'esprit pas à pas, & enfin lui facilite le moyen de découvrir des veritez les plus cachées. Après avoir donné des noms à des grandeurs, on trouve par un art admirable qu'en faisant certaines additions, soustractions, multiplications, &c. on apperçoit les fondemens & les suites des raisonnemens les plus subtils, & on se trouve en état de résoudre facilement les questions les plus épineuses. Rien n'est plus propre que l'Algebre pour ménager la capacité & l'étendue de nôtre esprit pour le faire atteindre aux veritez qu'il cherche, quand même elles sembleroient être au dessus de ses forces. Il y a une infinité d'occasions où l'Arithmetique & la Geometrie

De l'utilité

ordinaires ne peuvent donner aucunes lumières; c'est le seul calcul de l'Algebre qui représentant à nôtre esprit plusieurs idées en même tems sous des expressions tres-courtes, lui facilite le moyen de penetrer incomparablement plus loin. Les expressions de l'Algebre occupent si peu nôtre esprit par les sens qu'elles le laissent comme tout entier à lui-même sans le distraire, à des choses étrangères, & l'aident merveilleusement à parcourir avec beaucoup d'adresse, de promptitude & de facilité tous les rapports & toutes les proprietés des grandeurs qu'il examine. Je dirai même que dans les traités des Mathematiques, où ces sciences se trouvent fort approfondies, on trouve un tres-grand nombre de propositions démontrées par la Geometrie, qu'on n'auroit jamais osé tenter par cette voie, si on n'en avoit aperçu la verité par le moyen de l'Algebre qui pour cette raison a merité d'être appellée l'art d'inventer. Et en effet après que l'Algebre a fondé le gué, s'il m'est permis de parler ainsi, & qu'elle a découvert & présenté à l'esprit, une verité qu'elle cherchoit; il est souvent important, pour une entière satisfaction, de la rendre sensible à l'imagination par les figures de la Geometrie, & d'éclairer ainsi l'esprit autant qu'il le peut être.

des Mathematiques.

Les belles découvertes de ces derniers tems sur la resolution des équations, sur leur construction, sur les proprietéz admirables des lignes courbes, sur l'usage de cette nouvelle Geometrie des Infiniment-Petits qui est tant à la mode parmi les sçavans, sont des preuves authentiques de l'excellence de l'Algebre.

La Geometrie est d'une utilité si connue, que les ouvriers même tâchent de se la rendre familiere pour mesurer & toiser leurs ouvrages. S'il y a des partages à faire, soit à la ville, soit à la campagne; s'il y a des terres à vendre ou à acheter, c'est une necessité indispensable d'avoir recours à cette partie des Mathematiques pour en connoître exactement l'étendue, pour déterminer & limiter les possessions d'un chacun, & même souvent pour décider plusieurs procez. A peine pouvons-nous ouvrir les yeux sans appercevoir des cercles, des triangles, des polygonés, des spheres, & une infinité d'autres figures geometriques qui semblent nous inviter à chercher leurs proprietéz. Jamais on n'auroit porté la perfection des Arts jusqu'au point où nous la voyons, s'il n'y avoit eu dans ces derniers tems d'habiles Geometres qui ont fait leurs efforts pour les mettre en cet état. La Geometrie

De l'utilité

étant généralement approuvée de tout le monde, je n'en dirai pas davantage, j'ajouterai seulement qu'il est aussi impossible de bien entendre le reste des Mathématiques sans son secours ; qu'il est impossible de faire la lecture d'un livre sans connoître les lettres de l'alphabet.

L'Optique est la science des propriétés de la lumière, c'est cette partie des Mathématiques qui nous apprend à rendre raison des phénomènes de la vue, qui nous fait voir en quoi consiste plusieurs défauts de l'œil, la manière de les corriger, même d'augmenter la force de la vision. C'est dans l'Optique qu'on examine les propriétés des réfractions & des réflexions de la lumière. On y apprend la construction des lunettes d'approche qui nous font découvrir & appercevoir distinctement dans le Ciel & sur la terre des objets que leur grand éloignement nous rend insensibles, qui nous facilitent les observations des corps célestes, & peuvent servir dans les armées pour observer les marches & les campemens des troupes ennemies, sur la mer pour reconnoître les vaisseaux des pirates, des corsaires, &c. afin de se precautionner contre leurs insultes. On y apprend la construction des microscopes qui servent à nous

des Mathematiques.

faire voir les Corps , que leur petitesse déro-
be à nos yeux , & à nous faire reveler
plusieurs secrets de la nature. On établie
dans l'Optique des principes qui font con-
noître la cause des différentes couleurs &
des différentes apparences que nous voyons
en mille rencontres , des effets de toutes
fortes de miroirs. Jamais on n'auroit bien
connu la cause de l'Arc-en-ciel , de la mul-
tiplication apparente des objets par les lu-
nettes à facettes , des effets des lanternes &
des tableaux magiques , de l'impression
des objets dans le fond de l'œil , si on ne les
avoit imitez par des chambres obscures
des prismes triangulaires , &c. si on n'y
avoit enfin découvert & démontré un
grand nombre de veritez qui rendent l'Op-
tique tres curieuse & d'une grande utilité
pour bien entendre la Physique. L'Opti-
que nous donne les principes de la perspe-
ctive , en nous apprenant à représenter les
Corps en peinture , & à tromper agreable-
ment notre vûe.

Les Mechaniques sont la science du
mouvement & des forces mouvantes. Cette
science des Machines est une des plus belles
parties des Mathematiques. Y a-t-il rien
plus admirable que de pouvoir par le
moyen des leviers , des poulies , des roues ,

De l'utilité

&c. augmenter une force tant que la résistance de la matiere qu'on employe à ces machines le pourra supporter sans se briser ; de pouvoir élever des masses énormes aussi haut , ou les transporter aussi loin qu'on voudra ? Les moulins , les pressoirs , les horloges , les montres , les pompes foulantes & aspirantes , & les autres machines hydrauliques , une infinité d'instrumens & de machines dont les boutiques des ouvriers sont remplies , quoique fort ordinaires , sont tres ingenieuses dans leur invention & dans leurs usages. Mais sans sortir de nous-mêmes , nous trouverons que notre corps est une machine dont les ossemens sont des leviers , il y a des points d'appui , des cordages , des forces qui y sont appliquées , des fibres paralleles , obliques , circulaires , spirales ; des muscles triangulaires , pyramidaux , orbiculaires , & rhomboïdaux. Enfin nous trouverons que cette machine est un assemblage de ce qu'il y a de plus beau dans la Statique , l'Hydraulique & la Pneumatique. On ne peut sans une connoissance exacte des Mechaniques déterminer la force des muscles ni leur construction , raisonner avec justesse sur la maniere de marcher des animaux , de voler des oiseaux & de nager des poissons , ni même sur

des Mathematiques.

le mouvement circulaire du sang , sur la structure du cœur , sur les causes de sa dilatation & de sa contraction , sur le mouvement & sur l'usage de la respiration , sur la generation , la nutrition , l'accroissement des plantes & des animaux , &c.

L'Astronomie enseigne à observer le cours des Astres. C'est par le moyen de cette partie des Mathematiques qu'on connoît la durée de l'année , la cause de la diversité des climats , de la difference qui est entre les jours , de celle qui est entre les saisons. Les observations Astronomiques nous font connoître le tems precis de la revolution des corps celestes , leurs directions , retrogradations , conjonctions , oppositions & aspects. On a le moyen de predire certainement les Eclipses du Soleil , de la Lune , celles des satellites de Jupiter & de Saturne , long tems même avant qu'elles arrivent ; ce qui est d'une utilité merveilleuse pour perfectionner la Geographie & l'Hydrographie par la connoissance des longitudes. Il est impossible d'être un Physicien , parfait sans être Astronome , parcequ'un grand nombre de phenomenes & d'effets particuliers dépendent du mouvement des Astres qui sont des causes generales. On sçait , par exemple , le rapport & la liaison

De l'utilité

constante & invariable qu'il y a entre le flux & reflux de l'Océan & les mouvemens de la Lune ; personne aussi n'ignore les influences du Soleil sur la terre que nous habitons. Depuis qu'on a inventé les lunettes d'approche on a decouvert dans les corps celestes une infinité de choses tres-curieuses. On s'est apperçû qu'il y avoit des taches dans le Soleil ; qu'il y avoit des montagnes & des vallées dans la Lune ; que la planete de Venus avoit des phases comme la Lune ; que Jupiter étoit environné de satellites, & Saturne d'un anneau, &c. Cette decouverte des satellites est fort utile, comme je le viens de dire, pour déterminer la position des differens lieux de la terre sur un globe artificiel, pour déterminer les longitudes, afin de rendre la navigation plus parfaite & plus sûre.

La Gnomonique est la science des cadrans, elle enseigne à mesurer le tems, à le diviser en parties égales, à marquer sur différentes surfaces la projection ou representation des cercles horaires.

La Geographie nous enseigne la connoissance de la terre que nous habitons ; elle nous en décrit les particularitez. Quoiqu'il ne soit pas necessaire d'être fort profond dans les Mathematiques pour bien

des Mathematiques.

Sçavoir la Geographie, on peut dire néanmoins qu'elle en dépend dans ses points les plus essentiels.

On doit dire la même chose de la Chronologie, cette science si nécessaire pour fixer les Epoques des années qui sont en usage chez les différentes Nations de la terre, pour verifier l'histoire & y placer les evenemens les plus remarquables arrivez dans les Empires & dans les Etats du monde ; & enfin pour déterminer ces periodes de temps que la Religion a consacrées pour la celebration de ses Fêtes.

La navigation s'occupe principalement au trafic des marchandises ; à enrichir des Royaumes entiers ; à faire naître l'abondance dans les lieux les plus steriles. C'est par son moyen que l'or, l'argent & la plupart des autres métaux nous sont apportez. C'est par elle que les Nations les plus éloignées se communiquent reciproquement ce qui leur est nécessaire. C'est aussi par cet art que les armées navales remportent des victoires sur leurs ennemis. Or la navigation est fondée sur la connoissance de plusieurs parties des Mathematiques. Elle a besoin de la Geographie & d'une description exacte des mers qu'on appelle Hydrographie, pour tracer aux vaisseaux des routes assurées, pour affermir le courage des Pilotes sur un éle-

De l'utilité.

ment si inconstant, pour leur faire traverser l'Océan tout entier, & les faire arriver jusques dans ces nouveaux Mondes que les Empereurs Romains & les plus grands Conquerans de l'antiquité n'ont jamais connus. Elle a besoin de la Geometrie, de la connoissance des usages de la boussole & de l'Astronomie pour reconnoître son chemin. Elle a besoin des Mechaniques pour la construction de ses vaisseaux, pour la disposition, la figure & les usages du gouvernail qui sert à faire voguer le navire de quel côté on veut, pour les voiles, les mâts, les poulies, &c.

L'Architecture civile est l'art de construire des maisons: on y trouve les principes nécessaires pour donner la beauté, la solidité & la perfection aux édifices tant des particuliers, qu'à ceux qui sont destinez à l'usage du public, aux Eglises, par exemple, à la construction des ponts, aux écoles, aux Palais & lieux où s'assemblent les Cours de Justice, aux prisons, arsenaux, Hôpitaux, &c.

L'Architecture militaire, ou l'Art des fortifications, enseigne le moyen de disposer & de mettre à couvert un petit nombre de personnes pour faire résistance à un nombre beaucoup plus grand. C'est cette partie des Mathematiques que les plus vaillans

des Mathematiques.

Guerriers se font gloire de consulter, lorsqu'il s'agit, par exemple, d'assurer & de regler la marche & les campemens d'une armée, de choisir des postes avantageux, d'attaquer ou de défendre des villes, de prescrire l'ordre des batailles : on y trouve les moyens de renverser & de réduire en cendre des villes entieres. Cette science sert aussi aux divertissemens des peuples, lorsqu'on se propose de faire des feux d'artifices, & de celebrer des réjouissances publiques.

Je ne finirois jamais si je voulois rapporter ici toute l'utilité qu'on peut retirer des Mathematiques, ainsi j'ajouterai seulement que la Physique n'a jamais été plus parfaite que lorsque les plus grands Philosophes ont été d'excellens Mathematiciens. Depuis que la Philosophie naturelle a été jointe aux Mathematiques, & qu'elles se sont prêtes des secours reciproques on a fait des découvertes agreables & dignes d'être sçûes, que les Anciens avoient ignorées; & sans doute plus on cultivera les sciences, plus on se trouvera obligé de convenir que les Mathematiques sont du nombre de celles qui meritent qu'on s'y applique tres-serieusement.



AVERTISSEMENTS
pour se servir utilement de ce Livre.

1^o. **I**L faut avoir la precaution de ne lire point l'Arithmetique ni ce qui regarde l'Algebre sans avoir la plume à la main & du papier pour s'exercer sur les exemples que je propose, & pour en inventer ensuite de semblables. Dans la Geometrie il faut regarder les figures à mesure qu'on lit, & ne point se rebuter lorsqu'on ne comprend quelquefois pas d'abord tout ce qui se rencontre. Parceque dans les Mathematiques il faut de l'attention & de la persévérance; & il est rare que dans la premiere lecture qu'on fait de quelques élémens des Mathematiques que ce soit, on les possède parfaitement. Par cette premiere lecture on parcourt le tout autant exactement qu'on le peut, & ensuite on recommence à lire tout de nouveau, & quelquefois une troisième lecture n'est pas encore inutile.

2^o. Tant dans l'Arithmetique, dans l'Algebre,

Avertissemens.

gebre, que dans la Geometrie, il faut toujours examiner & verifier les citations, parcequ'elles leveront une infinité de difficultez. C'est là une veritable maniere de faire cet étude avec fruit.

3°. La premiere fois que ceux qui seront moins studieux que les autres, liront ces Elemens, ils pourront éviter de lire ce qui est depuis la page 105, jusqu'à la premiere proposition des proportions, & dans une seconde lecture ils liront le tout exactement.

4°. Il est bon d'être aussi averti que les lignes ponctuées sont marquées de cette sorte, pour les differencier des autres, qui sont attachées à la question. Ces lignes ponctuées sont seulement utiles pour la demonstration qu'on se propose de faire. La courbure des lignes ponctuées des figures de la page 475, servent seulement pour signifier que la ligne entiere *AB* est appelée *e*. Dans les plans & dans les solides j'ai aussi representé par des lignes ponctuées celles qu'on considere comme si on les voyoit au travers d'une surface ou d'un corps.

5°. Il faut encore remarquer une chose qui pourroit embarrasser ceux qui commencent l'étude des Mathematiques ; c'est

Avertissemens.

que dans la representation des plans & des solides on est souvent obligé d'y représenter des lignes perpendiculaires à d'autres lignes menées dans ces plans, par des lignes qui paroissent leur être obliques en les voyant marquées sur le papier où on lit. Mais il faut prendre garde que cette obliquité est un effet de la representation, de la perspective, & de la maniere de dessiner; parcequ'autrement on ne peut pas exprimer ces choses distinctement. Dans la page 201 on considere la ligne CB comme perpendiculaire à la ligne GE, qui est l'intersection des plans DH & FE. On voit dans la page 222 des quarez qu'on represente par des Rhombes; c'est la maniere dont on se sert pour représenter le cube sur le papier qui est une surface plane, c'est ce qu'on appelle projection en termes d'Optique. Ainsi dans la page 501 on considere la ligne AB comme perpendiculaire aux lignes EF & CD, quoique dans la representation elles paroissent obliques: parcequ'on considere le point A comme élevé en l'air au dessus de la surface plane GH. Dans les plans & dans les solides, cette maniere de représenter les lignes & les surfaces planes se rencontre tres souvent.

6°. Les Corollaires sont fort necessai-

Avertissement.

tes. Il ne faut pas les négliger en aucune maniere. On connoîtra dans la suite que leur utilité n'est pas moindre que celle des Propositions generales d'où elles viennent.

Lorsque dans la Geometrie il y aura plusieurs figures au même endroit avec les mêmes lettres, il faudra lire la demonstration en regardant la premiere figure, relire encore cette même demonstration & regarder la seconde figure : & ainsi de suite autant de fois qu'il y aura de ces figures ; parcequ'alors la même demonstration doit être appliquée à chacune de ces figures. C'est une voie qui abrege le discours, & qui applique la proposition à toutes les circonstances necessaires. Il y en a des exemples dans les pages 241. 243. 260. 292. 298. &c. Cet article merite attention.

Après avoir exposé quelques demonstrations dans toute leur étendue, je les ai ensuite exprimées d'une maniere plus courte pour les presenter à l'esprit dans une forme tres simple. En les apercevant ainsi dans un fort petit espace, il y a beaucoup plus de facilité à les comprendre & à les retenir. On en trouvera avec cette reduction dans les pages 130. 159. 261. 468. 474. 479. &c.

Dans les pages 66. 131. & dans les pro-

Avertissement.

positions 49. 50. &c. de la Geometrie, il faudra se souvenir de l'expression de la multiplication expliquée dans la page 40. Et dans les pages 468. 472. 487. &c. il faudra aussi se souvenir de l'expression des quarez expliquée dans la page 231.

Dans ces Elemens je n'ai mis de l'Arithmetique que ce que j'en ai cru être le plus necessaire ; & je me suis contenté de ne traiter que les premiers & les principaux fondemens de l'Algebre, afin de ne pas rebuter d'abord ceux qui commencent, & de ne pas fatiguer leur zèle par une plus longue suite de principes.

J'ai donné plus d'étendue à la Geometrie. Car cette partie elementaire, outre la théorie, contient la pratique qui suit en forme de Corollaires les propositions generales dont elle dépend.

Si quelquefois j'ai prouvé des veritez, que quelques-uns voudroient faire passer pour des axiomes, c'est que les demonstrations m'en ont paru tres faciles, & qu'en les proposant sans preuve, j'aurois cru pécher contre l'idée de perfection qu'on a dans les Mathematiques, & contre cette grande exactitude qui rend ces sciences si recommandables.

J'ai mis au commencement de chacune des 3 Parties de cet Ouvrage les définitions

Avertissement.

nécessaires , afin qu'étant de suite on les puisse trouver plus promptement , & pour que les citations en soient plus faciles.

Euclide étant un Auteur Elementaire fort ancien & le plus connu , ses Elemens de Geometrie sont ordinairement citez où supposez dans presque tous les Traitez particuliers des Mathematiques. Pour rendre la lecture de ces Traitez plus intelligible , lorsqu'on y trouve des veritez dont la demonstration est renvoïée aux Elemens d'Euclide , j'ai mis à la fin de ces nouveaux Elemens une Table qui contient par ordre les Propositions d'Euclide que j'y ai démontrées , c'est une circonstance où cet Ouvrage sera aussi utile que les Elemens d'Euclide même. Ceux qui voudront comparer ces Elemens avec ceux d'Euclide connoîtront facilement si la methode que j'ai observée est plus naturelle que celle de cet Auteur ; si les démonstrations que j'ai employées sont plus faciles , souvent plus directes , plus évidentes , & plus courtes.

Fautes à corriger.

- P** Age 40. lig. 13. est plus grand, ajoutez, ou égal
P. 70. lig. 24. $+ 5 - 5 = 50$, lis. $= 0$.
P. 101. lig. antepenult. de 27. lis. de 37.
P. 107. l. 9. $+ 216$. l. — 216.
P. 118. lig. dernière, 32. lis. 56.

- P. 151. lig. 7. :: b z. d. lisez b z. h.
 P. 166. lig. 17. numerateurs, lisez dénominateurs.
 P. 170. l. 15. $\frac{a}{b} =$, lisez $\frac{a}{b} = g$.
 P. 185. lig. 16. 4 onces, lisez 5.
 P. 188. lig. 26. 700 liv. lisez 720.
 P. 220. l. 17. est termi. lisez est un cercle; & p. 224 l.
 13. sont terminées, lisez sont deux cercles, qui
 sont des surfaces d'une infinité de côtes.
 P. 221. l. 25. aux, lisez à tous les. & l. 32. aux lisez à tous
 les.
 P. 225. lig. 8. cette ligne : ajoutez, de sorte que le
 centre soit toujours dans la ligne fixe.
 P. 252. lig. 4. du Coroll. 2. EG lisez FG.
 P. 257. lig. 21. B C B D. lisez B C < B D.
 P. 286. l. 17. concourir, ajoutez, en un point.
 P. 308. lisez 27. B F obliquement, lisez B E.
 P. 309 l. 19. de part & d'autre, lisez de part ou d'autre.
 P. 312. lig. 22. du, lisez au.
 P. 386. l. avant l'antepenultième, qui ont le même
 circuit, ajoutez, & qui sont quadrilaterales.
 P. 396. lig. 16. ou points, lisez pointes.
 P. 397. lig. 20. YA. lisez Ya.
 P. 404. l. 3. laquelle fera, lisez de sorte qu'elle fasse.
 P. 442 lig. 26. la lig. C H. lisez G H.
 P. 445. lig. 23. huit toises, lisez six toises.
 P. 446. lig. 6. huit toises, lisez six.
 P. 482. lig. 19. F G H, lisez F H G.
 P. 508. l. 2. on ne peut mener, ajoutez, dans le
 plan AB; & lig. 10. ajoutez, dans le plan CD.
 P. 538. l. 5. l'une à l'autre, aj. & de même hauteur.
 P. 539. citat. 4. Cor. prop. 74. lisez 75.
 P. 50 lig. dernière, par, lisez pour.
 P. 569. l. 3. du Cor. entre eux. En, effacez le point.
 & lisez, entre eux en.



E L E M E N S

D E S

M A T H E M A T I Q U E S :

P R E M I E R S P R I N C I P E S .

NO u s appellons *Grandeur* tout ce qui peut être augmenté, ou diminué.

On a donné le nom de *Mathématiques* aux Sciences dans lesquelles on considère les propriétés des *Grandeurs*.

Ces Sciences sont fondées sur trois sortes de Principes, sur des *Définitions*, des *Axiomes*, & des *Demandes*.

D E F I N I T I O N S G E N E R A L E S .

1. Les *Définitions* dans les *Mathématiques* sont des explications qui exposent la signification des mots dont on se sert. Par ces *Définitions* on explique, par exemple, ce qu'on doit entendre par les mots de *Triangle*, de *Point*, &c.

2. Les *Demandes* sont des suppositions si simples, que toute personne, pour peu de réflexion qu'il y fasse, les doit admettre, telle que seroit celle-ci: On demande, par exemple, pour parvenir à une *Démonstration*, qu'il soit permis de

A

mener une ligne d'un point à un autre point, ou d'imaginer qu'elle y soit menée.

3. Les Axiomes sont des veritez évidentes à toute personne qui y fait attention ; par exemple *un Tout est plus grand qu'une de ses parties, &c.*

4. La Proposition est une expression d'une verité qu'on veut découvrir, ou d'une chose qu'on veut faire.

5. La Demonstration est une application des Définitions, Demandes, & Axiomes, pour former une persuasion invincible.

6. Un Theorème est une Proposition dans laquelle il s'agit seulement de la démonstration d'une verité.

7. Un Problème est une Proposition dans laquelle il s'agit de faire quelque chose, & de démontrer que la maniere qu'on propose pour faire cette chose est infaillible, & un véritable chemin pour y parvenir.

8. Corollaires, ou Conséquents sont des veritez qui deviennent necessairement connues par les Propositions démontrées, ou par les Définitions exposées.

9. Cette marque = signifie Egal, & cette autre marque + signifie Plus, & cette troisième note ou marque - signifie moins ; par exemple $2 + 3 = 5$, c'est à dire deux plus 3, ou 2 avec trois sont égaux à 5, & $8 - 2 = 6$, c'est à dire 8 moins 2, ou 8 dont on a retranché 2, sont égaux à 6.

10. Cette note ou marque > signifie plus Grand, & cet autre signe ou note < signifie plus Petit ; par exemple $7 - 2 > 4$, c'est à dire 7 moins deux sont plus grands que 4 ; & $4 < 3 + 3$, c'est à dire, 4 plus petits que 3 plus 3,



DEMANDES GENERALES.

1. Lorsque plusieurs grandeurs sont parfaitement égales, qu'il soit permis de prendre l'une au lieu de l'autre.

2. Qu'il soit permis de nommer une grandeur du nom d'une, ou de plusieurs lettres de l'Alphabet

3. Que les grandeurs égales, ou de même nature soient exprimées par des lettres semblables, si cela est nécessaire pour une démonstration; par exemple d & d signifieront deux Nombres égaux, deux différences égales, &c.

4. Les Grandeurs inégales, ou de différente nature, seront exprimées par des lettres différentes; par exemple a & b , &c.

AXIOMES GENERAUX.

1. Une même chose ne peut être, & ne pas être en même-temps.

2. Un Tout est plus grand qu'une de ses Parties.

3. Un Tout est égal à toutes ses Parties prises ensemble; par exemple si les Grandeurs $b + d$ sont toutes les parties de x , alors $x = b + d$.

4. Si à Grandeurs égales on ajoute Grandeurs égales, les Touts qui en résulteront seront égaux; par exemple si les grandeurs $b + d = x$, en ajoutant f de part & d'autre, on aura $b + d + f = x + f$.

5. Réciproquement, si à des Grandeurs égales, d'autres Grandeurs étant ajoutées, ou plusieurs Grandeurs étant ajoutées successivement à la même, il résulte des Touts égaux; ces Grandeurs ajoutées seront égales; par exemple si une Gran-

Premiers Principes

4. Une Grandeur nommée x étant jointe à s , forme une troisième Grandeur égale à 14 , & qu'une Grandeur nommée y étant pareillement jointe à s , forme aussi une troisième Grandeur égale à 14 , les Grandeurs x & y seront égales entre elles; car si elles n'étoient pas égales entre elles, l'une jointe à s ne feroit pas la même somme, ou grandeur que l'autre jointe à ce même nombre s .

6. Les Grandeurs qui sont doubles, triples, quadruples, &c. d'une même grandeur, ou de Grandeurs égales sont égales entr'elles; par exemple si a contient trois fois f , & si c contient pareillement trois fois f , a & c sont des Grandeurs égales.

7. Si à Grandeurs égales on ajoute Grandeurs inégales, ou si à la même Grandeur on ajoute successivement Grandeurs inégales, les Touts qui en resulteront seront inégaux, & le plus grand Tout sera celui dans lequel se trouvera la plus grande des Grandeurs ajoutées; par exemple, si $a = b$ & c égales entr'elles, on ajoute d'une part d , & de l'autre part f , & si $d > f$, les Touts $b + d$, & $c + f$ seront inégaux, & $b + d$ sera le plus grand.

8. Si de Grandeurs ajoutées à Grandeurs égales il resulte des Touts inégaux, les Grandeurs ajoutées seront inégales, & celle-là sera la plus grande qui se trouvera dans le plus grand Tout. Par exemple si $a = b$, & qu'ajoutant f à la Grandeur a , & g à la Grandeur b , il arrive que $a + f > b + g$, les Grandeurs f & g seront inégales, & $f > g$.

9. Si de Grandeurs égales on ôte Grandeurs égales, les restes seront égaux; par exemple si $b + d + f = z + f$ retranchant de part & d'autre les Grandeurs égales f , il restera $b + d = z$.

10. Et reciproquement après avoir ôté cestaj

des Mathématiques.

Des grandeurs de Grandeurs égales, si les restes sont égaux, les Grandeurs retranchées seront égales entr'elles.

11. Une moitié d'une Grandeur plus grande, est plus grande qu'une moitié d'une plus petite; un tiers d'une Grandeur plus grande, est plus grand qu'un tiers d'une plus petite, pareillement un quart, &c. par exemple si $a > b$, & que f soit un tiers de a , & que g soit un tiers de b , on aura aussi $f > g$.

12. Chaque moitié de Grandeurs égales sont égales entr'elles, les tiers pareillement, &c.

13. Reciproquement lorsqu'une moitié de Grandeur est égale à une moitié d'une autre, les Grandeurs auxquelles ces moitiés appartiennent sont égales entr'elles. La même vérité sera constante, si un tiers d'une Grandeur est égal au tiers d'une autre, ou si un quart est égal au quart d'une autre, &c.

14. Lorsqu'une moitié d'une grandeur est plus grande qu'une moitié d'une autre; la première Grandeur entière est plus grande que cette autre pareillement entière. La même chose est évidente, si un tiers d'une grandeur est plus grand que le tiers d'une autre, &c.

15. Si de Grandeurs égales on ôte des Grandeurs inégales, les restes seront inégaux, & le plus grand reste sera celui qui sera le reste que laissera la plus petite Grandeur retranchée; par exemple soit $a + b = c + d$, si $b > c$, en retranchant d'une part b . & de l'autre c , il restera $a < d$.

16. Reciproquement si certaines Grandeurs retranchées de Grandeurs égales, laissent des restes inégaux, ces Grandeurs retranchées seront inégales, & celle là sera la plus grande qui lais-

sera le plus petit reste ; par exemple si $h + m = n + o$, & qu'après avoir retranché d'une part h , & de l'autre n , il reste $m < o$, il est évident que la Grandeur, retranchée h , sera plus grande que l'autre Grandeur retranchée n .

17. Si de Grandeurs inégales on ôte des Grandeurs égales, les restes seront inégaux, & le plus grand reste sera celui qui sera reste de la Grandeur qui étoit la plus grande ; par exemple, si $a + b > c + b$, après avoir retranché d'une part b , & avoir aussi retranché de l'autre pareille Grandeur b , il restera encore $a > c$.

18. Les Grandeurs égales à une troisième, sont égales entre elles ; par exemple si $a = d$, & si $b = d$, on aura $a = b$.

19. Les Grandeurs qui surpassent une troisième d'un excès égal, sont égales entre elles ; par exemple si $a - c = f$, & si $g - c = f$, c'est à dire, si a & g surpassent f de la même grandeur c , on aura $a = g$.

20. Les Grandeurs qui sont moindres qu'une troisième d'une Grandeur égale, sont pareillement égales entre elles ; par exemple si $a + b = m$, & si $b + b = m$, c'est à dire si a & b sont moindres que m de la grandeur b , on aura $a = b$.

21. Reciproquement les Grandeurs qui sont égales entre elles, sont égales à une troisième, ou surpassent une troisième Grandeur d'un excès égal, ou enfin sont moindres qu'une troisième, d'une grandeur égale.

22. Si de trois Grandeurs a, b, c , la première a est plus grande que la deuxième b , & si la deuxième b est plus grande que la troisième c , la première a sera plus grande que la troisième c .

AVERTISSEMENT.

Il faut observer que les Definitions, Demandes, & Axiomes qu'en vient d'exposer, conviennent generalement à toutes les Parties des Mathematiques; cependant chaque Partie Elementaire des Mathematiques aura encore ses Definitions, ses Demandes, & ses Axiomes particuliers.



DES PARTIES

DE

MATHEMATIQUES.

Les Parties élémentaires des Mathematiques sont l'Arithmetique, l'Algebre, & la Geometrie.

Les autres Parties des Mathematiques; par exemple l'Astronomie, les Mechaniques, l'Optique, les Fortifications, la Navigation, &c. ne sont qu'une application des Parties Elementaires des Mathematiques à la Physique.

Nous partagerons cet Ouvrage en trois Parties.

Dans la premiere, nous ne parlerons que des operations d'Arithmetique, dont l'usage est le plus frequent.

Dans la seconde, nous exposerons les princi-

8 *Premiers Principes*

aux fondemens de l'Algebre, pour traiter ensuite la doctrine des Proportions avec toute la brieveté & l'exactitude qui nous seront possibles.

Dans la troisiéme Partie, nous ferons un choix, & un arrangement des Propositions les plus nécessaires de la Geometrie, qui y seront démontrées d'une maniere tres simple.

La clarté, la nouveauté, & l'ordre methodique qu'on a observé dans cet Ouvrage & dans les Demonstrations des Propositions qui s'y rencontrent, ne contribuent pas peu à en faciliter l'intelligence. On ose même dire qu'on y trouvera un grand secours pour entendre ce qu'il y a de plus beau, de plus utile, & de plus relevé dans la Physique. Enfin on y trouvera une ouverture considerable pour le reste des Mathematiques.





ELEME NS

DES

MATHEMATIQUES.

PREMIERE PARTIE.



DE

L'ARITHMETIQUE.

DEFINITIONS D'ARITHMETIQUE.

1. **U**NITÉ est une chose considérée, sans faire attention aux Parties qui la composent, ou sans faire attention à une autre chose dont elle peut être partie; par exemple, un sol, un écu, une toise, un pied, &c.

2. Nombre est une Collection d'unités; par exemple, six toises.

3. L'Arithmétique est une Partie Elementaire des Mathematiques, dans laquelle on traite seulement des Nombres.

Il y a de dix sortes de signes, ou caracteres dont on se sert pour exprimer toutes sortes de Nombres, & on les appelle *Chifres*; sçavoir,

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0,
un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, zero

DEMANDES D'ARITHMÉTIQUE.

1. Le dernier chiffre 0, qu'on appelle *zero*, ne signifie rien seul ; mais seulement lorsqu'il est mis après les autres dont il augmente la valeur.

2. La valeur des chiffres ne dépend pas seulement de leur figure, mais aussi elle dépend de leur arrangement.

3. Lorsque plusieurs chiffres sont rangez de suite, ceux qui sont dans la première place, (commençant à compter de droit à gauche,) ne valent jamais plus qu'eux-mêmes ; ceux qui sont dans la seconde place, valent dix fois ce qu'ils vaudroient s'ils étoient dans la première, &c. 1, par exemple, dans la première place ne vaut qu'une seule unité ; dans la seconde place il vaut dix : dans la troisième il vaut dix fois ce qu'il auroit valu dans la seconde, sçavoir, dix dizaines, ou une centaine ; dans la quatrième place, il vaut dix fois ce qu'il auroit valu dans la troisième ; sçavoir, dix centaines ou un mille, &c.

de quintillions	de quadrillions	de trillions	de billions ou milliards	de millions	de milles	d'unités.
centaine dixaine nombre	centaine dixaine nombre	centaine dixaine nombre	centaine dixaine nombre	centaine dixaine nombre	centaine dixaine nombre	centaine dixaine nombre
1 1 1,	1 1 1,	1 1 1,	1 1 1,	1 1 1,	1 1 1,	1 1 1,
2 2 2,	2 2 2,	2 2 2,	2 2 2,	2 2 2,	2 2 2,	2 2 2,
3,	&c.					

4. Les zeros servent pour augmenter la valeur des chiffres qui les precedent, en faisant voir

Que ces chiffres sont dans un rang plus reculé, comme si après ζ il y a deux zeros, ces deux zeros font voir que ζ est dans le troisième rang, & qu'ainsi il vaut cinq cens, ou 500.

Lorsqu'il y a plusieurs chiffres de suite, on les separe de trois en trois par tranches, avec de petites virgules pour éviter la confusion; la premiere tranche est appellée Unitez; la seconde Milles, &c.

On traitera seulement dans cette premiere Partie, de l'Addition, Soustraction, Multiplication, & Division des nombres entiers, & on fera ensuite les mêmes operations sur les Fractions ou nombres rompus.

AXIOMES D'ARITHMETIQUE.

1. Si deux nombres sont parfaitement égaux, lorsqu'on retranchera d'un de ces nombres la valeur de l'autre, il ne restera rien.

Après avoir retranché un nombre d'un autre, s'il reste quelque chose, pour connoître ce qui reste est le véritable reste qu'on cherche, il faut l'ajouter avec ce qu'on a retranché, & il doit resulter de cette addition un nombre égal à celui dont on a retranché, puisqu'il n'est composé que de deux choses; sçavoir de ce qui reste, & de ce qui a été retranché.

DE L'ADDITION DES NOMBRES.

DEFINITION.

L'ADDITION est un assemblage de deux, ou de plusieurs nombres en un seul, qu'on appelle *Somme* ou *Total*.

Pour faite cette operation , il faut écrire les chiffres qui expriment les nombres qu'on veut assembler : de sorte que les unitez soient sous les unitez , les dixaines sous les dixaines , les centaines sous les centaines , &c.

Après avoir mené une ligne sous ces nombres ainsi disposez , il faut assembler ceux qui sont de même espece , c'est à dire , qui sont les uns sur les autres ; & lorsque leur somme est au dessous de dix , on l'écrit sous chaque rangée ; mais si elle excède neuf , alors parcequ'il faut plusieurs chiffres pour l'exprimer , on écrit seulement le dernier qui se trouve vers la main droite , & on reserve ce qui se trouveroit vers la main gauche , pour ajoûter à la colomne de chiffres suivante , & ainsi de suite jusqu'à la fin.

E X E M P L E S

Pour ajoûter ces quatre nombres 618 , 907 , 25 , 8840 , après les avoir disposez l'un sur l'autre , comme on vient d'enseigner , on commence vers la main droite , disant : 0 & 5 font 5 , & 7 font 12 & 8 font 20 ; j'écris 0 sous la premiere rangée , & je retiens deux dixaines , qui se trouvent en 20 , lesquelles deux dixaines doivent être ajoûtées dans la deuxième rangée en cette sorte ; que j'avois retenus , & 4 font 6 & 2 font 8 , & (omettant le zero ,) 1 font neuf ; j'écris sous la deuxième rangée. Ensuite dans le troisième rang , je dis , 8 & 9 font 17 & 6 font 23 ; j'écris 3 & je retiens 2 , que je joins dans le quatrième rang avec 8 , disant : 8 & 2 que j'avois retenus , font 10 ; j'écris zero & j'avance un , parceque

$$\begin{array}{r}
 618 \\
 907 \\
 25 \\
 8840 \\
 \hline
 \text{tot. } 10390
 \end{array}$$

c'est

Arithmétique.

s'est tout. On trouve que la somme totale, qui résulte de tous ces nombres est 10390, c'est à dire dix mille trois cents quatre-vingt dix.

A U T R E E X E M P L E.

Pour ajouter ces	9 l.	12 s.
nombres 9 livres 12		
sols; 13 l. 15 s. & 8 s. Il	13	15
faut commencer par		8
les sols, disant: 8 & 5	Total 23 l. 15 s.	
font 13 & 2 font 15; j'é-		
cris 5 & je retiens 1 qui vaut une dizaine que je		
joins avec les dizaines des sols, disant: 1 que j'ay		
retenu, & 1 font 2 & 1 font 3 dizaines de sols, mais		
parcequ'il faut deux dizaines de sols pour faire		
une livre, je trouve que les trois dizaines de sols		
font 1 livre., reste 10 sols que j'écris à côté du		
5, & je retiens 1 livre que je joins avec les livres,		
disant: 1 livre provenüe des sols, & 3 font 4,		
& 9 font 13; j'écris 3 & je retiens 1; ensuite		
dans le second rang, je dis: 1 que j'ay retenu		
& 1 font 2; j'écris 2; & partant je trouve que le to-		
tal ou la somme de ces trois nombres est 23 l. 15 s.		

A U T R E E X E M P L E.

Pour ajouter ces	112 l.	12 s.	4 d.
nombres 112 l. 12 s.	2429	17	3. — A
4 d; 2429 l. 17 s. 3 d;	820	10	10
& 820 l. 10 s. 10 d. Il			
faut commencer par	3363 l.	0 s.	5 d.
les deniers, disant:			
10 deniers & 3 font 13 deniers valant 1 sol & 1			
denier; j'écris la petite ligne A, pour mar-			
quer 1 sol, & je retiens 1 denier que j'ajoute avec			

B

4, ce qui fait 5 que j'écris sous les deniers :

Ensuite je compte

combien il y a de petites lignes mar-
quées à côté des deniers ; j'en trouve une ; cela signifie que c'est un sol

qu'il faut joindre avec les sols, disant : 1 & 7 (negligeant le 0) font 8 & 2 font 10 ; j'écris 0 & je retiens 3 que je joins avec les dizaines des sols, disant : 2 retenu & 1 font 2 & 1 font 3 & 1 font 4 dizaines de sols ; & parce qu'il faut deux dizaines de sols pour faire une livre, je prens la moitié de ces 4 dizaines de sols, cela fait 2 l. que je joins avec les livres, disant : 2 l. provenuës des sols & 9 (negligeant le 0) font 11 & 2 font 13 ; j'écris 3 & je retiens 1 dizaine que je joins à la colonne suivante, disant : 1 retenu & 2 font 3 & 2 font 5 & 1 font 6 ; j'écris 6. Ensuite passant à la troisième colonne, je dis : 8 & 4 font 12 & 1 font 13 ; j'écris 3 & je retiens 1. Enfin au quatrième rang, je dis : 1 dizaine de cent que j'ay retenu avec 2 font 3, j'écris 3.

Et partant je trouve que la somme ou le total des trois nombres proposez est 3363 l. 6 s. 5 d.

DE LA SOUSTRACTION

DES NOMBRES.

DEFINITIONS.

LA Soustraction est une opération par laquelle on retranche ou ôte un petit nombre d'un plus grand.

2. Le nombre qui reste après ce retranchement est appelée *Difference* de ces deux nombres; par exemple ayant ôté 8 de 14, le reste qui est 6 est la *Difference* de 8 à 14.

Pour faire cette operation, il faut placer le nombre qu'on veut retrancher ou soustraire, sous le plus grand nombre, duquel on veut retrancher le plus petit; de sorte que les unitez soient sous les unitez, les dizaines sous les dizaines, &c.

Ensuite il faut mettre une ligne au dessous de ces chiffres, au dessous de laquelle on écrit le *reste*, ou *residu*, ou *difference*.

Enfin on soustrait les nombres inférieurs des supérieurs l'un après l'autre, & on écrit de suite les restes au dessous de la ligne.

E X E M P L E.

de	4 5 8
ôtant	2 3 4
reste	2 2 4

Pour soustraire 234 de 458, après les avoir disposez, comme il a été enseigné, il faut commencer vers la main droite à la premiere colonne, disant : de 8 j'ôte 4 reste 4 que j'écris. Ensuite à la seconde colonne, je dis : de 5 ôtant 3, reste 2 que j'écris. Et à la troisième colonne ou rangée, je dis : de 4 ôtant 2, reste 2 que j'écris. Partant je trouve qu'après avoir retranché 234 de 458, il reste 224.

A U T R E , E X E M P L E.

de	4 2 6 0 3 l. 15 s.
ôtant	2 0 7 1 4
reste	4 0 5 3 2 l. 11 s.

Pour retrancher 2071 l. 4 s. de 42603 l. 15 s. après avoir rangé ces deux nombres l'un sur l'autre,

il faut commencer par les sols vers la main droi-
 re, disant : de 5
 ôtant 4, reste 1 que
 j'écris sous le 4. En-
 suite aux dizaines
 de sols, je dis : de
 1 ôtant rien, reste 1 que j'écris. Des sols il faut
 passer aux livres ; disant : de 3 je retranche 1,
 reste 2, que j'écris. Ensuite au deuxième rang ;
 je dis : de 6 retranchant 7, cela ne peut être ;
 sur le 6 qui precede j'emprunte une unité, la-
 quelle étant transportée en la place du zero vau-
 dra 10, & partant, je dirai : de 10 retranchant
 7, il reste 3 que j'écris sous le 7. Ensuite au troi-
 sième rang, je dis : de 5 (parceque des 6 j'a-
 vois emprunté une unité, & pour m'en souvenir
 j'avois marqué un point dessus le 6) ôtant 0, reste
 5 que j'écris. Au quatrième rang, je dis : de 2
 retranchant 2 reste rien, partant j'écris 0, parce-
 qu'il ne faut point laisser de place vuide en pa-
 reille rencontre. Et au cinquième rang, je dis :
 de 4 retranchant rien, reste 4 que j'écris : par-
 tant je trouve qu'il reste 40532 l. 11 s.

AUTRE EXEMPLE.

Pour souf-	de	2 2 0 4 6 l.	12 s.	6 d.
braire de	ôter	1 6 7 8 4	18	10
22046 l. 12 s.				
6 d. le nom-	reste	5 2 6 1 l.	13 s.	8 d.
bre de 16784				

18 s. 10 d. Il faut commencer par les deniers,
 disant : de 6 deniers je retranche 10, cela n'est
 pas possible, il faut emprunter sur les sols une unité
 valant douze deniers ; pour me souvenir de cet
 emprunt, je laisse un point sur le 2 qui est dans

le rang des unitez de sols où j'ay emprunté, & je joins ces 12 deniers empruntez avec les 6 deniers, d'où on proposoit de retrancher 10, cela fait 18 deniers, dont retranchant 10, il reste 8 deniers, que j'écris sous le rang des deniers. Ensuite je passe aux unitez des sols, disant: de 1 je retranche 8, cela n'est pas possible, j'emprunte la dizaine qui le precede, sur laquelle je manque un point pour me souvenir de cet emprunt, & je dis 8 de 11 j'ôte 8 reste 3 que j'écris sous des unitez de sols. Ensuite aux dizaines de sols, je dis: de 0 j'ôte 1 (car la dizaine des 12 sols a été empruntée, au lieu de laquelle il n'y a plus rien) cela n'est pas possible, c'est pourquoy passant aux unitez de livres, j'emprunte sur le 6 une livre valant 20 sols, c'est à dire, deux dizaines de sols, & je dis: de deux dizaines de sols en ôtant une, reste 1, que j'écris à côté du 3 pour faire 13 sols.

Après cela je passe aux unitez de livres, & je dis: de 5 j'ôte 4 (car puisque des 6 on avoit emprunté 1 pour porter aux sols, il n'en reste plus que 5) reste 1 que j'écris. Ensuite au deuxième rang, je dis: de 4 j'ôte 8, cela n'est pas possible: partant je cherche si on peut emprunter des chiffres precedens, je trouve que du zero precedent on ne peut rien emprunter, qu'on ne peut pareillement rien emprunter du 2 qui precede le zero, parceque ce 2 lui-même n'est pas suffisant pour le 6 qui est au dessous, & je trouve qu'on peut emprunter du dernier 2; j'emprunte donc un, & pour m'en souvenir j'y en marque un point. Cet 1 ainsi emprunté étant transporté sur le pénultième 2, vaut * 10; mais de ces 10 je reserve encore une unité; partant au dessus

* Demande 3^e d'Arithmétique.

du pénultième 2, je marque un point qui fait souvenir des 9 que j'y ay laissez. Or cette unité réservée étant transportée au dessus du zero, vaut dix en cette place ; mais de ces 10 je reserve encore une unité : partant il ne restera que 9 au dessus du zero, & cette unité ainsi réservée étant mise devant le 4, fera 10 : or en la joignant avec ce 4, cela fera 14 ; on dira donc de 14 ôtant 8, reste 6 que j'écris sous le deuxième rang.

Au troisième rang, je dis : de 9, qu'on vient de transporter au dessus du zero, ôtant 7, reste 2 que j'écris sous le troisième rang.

Au quatrième rang, je dis : neuf qu'on vient de transporter au dessus du 2 étant joints avec ce 2, cela fait 11 ; or de 11 j'ôte 6 reste 5 que j'écris sous le quatrième rang.

Enfin au cinquième rang, je dis : de 2 ôtant 1, reste 0 (car on avoit emprunté une unité du 2, cela fait qu'il n'y a plus que 1) je n'écris rien, parceque les zeros sont inutiles lorsqu'ils ne sont point precedez d'aucun autre chiffre : partant je trouve qu'il reste 5161 L. 13 s. 8 d.

Observations sur l'Addition & la Soustraction.

Pour être certain si l'Addition est exacte, il faut retrancher du total ou de la somme de cette operation, chacune des sommes qu'on a ajoutées ; s'il ne reste rien ; c'est une preuve manifeste que l'operation est tres exacte : s'il reste quelque chose, il faut la recommencer.

On peut faire ce retranchement ou soustraction, comme on le vient d'enseigner, ou bien de cette maniere.

Soit par exemple l'addition de 62, 55, & 28 ; pour être assuré que 145 est véritable-

ment, le total qu'on cherche. Je retranche de
 145 les dixaines de ces trois nombres pris sepa-
 rément, & ensuite leurs unitez; puisqu'il n'y a
 dans ces trois nombres que des dixaines &
 & des unitez. Je commence par les dixaines,
 & je dis: 6 & 5 sont 11 & 2 sont 13; de 14
 qui sont au dessous, j'ôte 13, ... 6 2
 reste 1 que j'écris sous le 4. ... 5 5
 Cet 1 avec le 5 suivant fera. ... 2 8
 15. Je passe aux unitez, & je
 dis: 2 & 5 sont 7 & 8 sont
 15, de 15 que je trouve
 au dessous, j'ôte 15, qui est la
 somme des unitez, reste 0. Et
 partant on a bien réussi, parceque s'il restoit
 quelque chose, on auroit mal compté, & il fau-
 droit recommencer l'operation.

somme 145

preuve 20

Soit par
 exemple 253 l. 12 s. 4 d.
 une autre 192 13 6
 somme 521 l.
 13 s. 6 d. on
 souhaite sça-
 voir si c'est
 veritable-
 ment & sans

somme 521 l. 13 s. 6 d.

preuve 222 21 0

erreur la somme ou total des trois nombres
 253 l. 12. s. 4 d. &c. on retranchera de ce total
 521 l. 13 s. 6 d. ce qui se rencontre séparément
 dans ces trois nombres; sçavoir, des centaines,
 des dixaines, & des unitez de livres, & ensuite
 des dixaines & unitez de sols, & enfin des unitez
 de deniers; on feroit la même chose s'il y avoit
 des milles, &c. On commencera par les cen-
 taines, disant: 2 & 1 sont 3; de 5 qui est au
 dessous, ôtez 3, reste 2, qu'on écrira au dessous de

5, & ce 2 fera avec le 2 qui est ensuite du 5, 229
 & on passe-
 ra aux di- 2 5 3 l. 12 l. 4 l. 1
 xaines, di- 1 9 2 13 6
 sant : 5 & 9
 sont 14 &
 7 sont 21 ; *somme* 5 2 1 l. 13 l. 6 d.
 de 22 qui
 sont au dé- *preuve* 2 1 2 1 0
 sous, j'ôte

21, reste 1 qu'on écrira sous le 2 ; ce qui avec le 2
 suivant fera 11. On passera aux unités, disant : 3
 & 2 sont 5 & 5 sont 10, de 11 qui sont au
 dessous, ôtez 10 reste 1 qu'on écrira sous le 1 : or
 cette dernière unité qui reste, est une livre qui
 vaut deux dizaines de sols, & en y joignant la
 dizaine des 13 sols du total, cela fait 3 dizaines,
 dont retranchant 2 dizaines qui se trouvent dans
 la colonne des sols, reste 1 qu'on écrit sous la
 dizaine des 13 l. ce qui fera encore avec le 3, 13 l.
 On passera aux unités de sols, disant : 2 & 3 sont
 5 & 7 sont 12 ; de 13 qui sont au dessous, ôtez
 12 reste 1 l. Or ce sol qui reste, joint avec les 6
 deniers qui sont au dessous des deniers, fait 1 l.
 6 d. qui étant retranchés de 1 l. 6 d. qui se trou-
 vent dans les deniers, il ne reste rien : ce qui
 fait voir * qu'on a bien réussi ; parce que s'il res-
 toit quelque chose, on seroit dans l'erreur, & il
 faudroit recommencer entièrement la supputa-
 tion. On fera de même à l'égard des autres
 exemples.

La preuve de la soustraction sera faite en
 ajoutant le reste ou residu, avec le nombre qui
 a été retranché ; & si l'opération est exacte, la

* Ax. 1. d'Arithmétique.

somme de ces deux nombres doit * être égale
 au nombre dont on a retranché ; si cela n'arrive
 pas , l'operation n'est pas exacte , partant il faut
 la recommencer. Car la somme de la grandeur
 retranchée & de la grandeur restante , doit ne-
 cessairement être égale à la grandeur dont on a
 fait le retranche-

de	1600
étant	620
<i>residu ou reste</i>	980
<i>preuve</i>	1600

ment , puisque les
 parties prises en-
 semble sont égales
 au Tout dont elles
 sont parties. Donc
 pour être assuré
 qu'en retranchant de 1600 , ce nombre 620 , le
 reste est 980 , c'est à dire , que 620 & 980 sont
 les parties du Tout 1600 , j'ajoute ces deux sommes
 620 & 980 , & si elles font 1600 , je conclus qu'elles
 sont véritablement les parties de 1600 , & par
 conséquent que mon operation est bien faite.
 On suivra la même methode dans les autres
 exemples.

DE LA MULTIPLICATION DES NOMBRES.

DEFINITIONS.

I. LA Multiplication est une addition abrégée
 par laquelle on ajoute un nombre autant
 de fois à lui-même , qu'il y a d'unités dans un
 autre nombre. Par exemple , multiplier 6 par 3 .

* *Ar. 2. d'Arithmetique.*

c'est ajouter le nombre 6 à lui-même autant de fois qu'il y a d'unités en 3, c'est à dire, 3 fois pour avoir 18, qui est le nombre qu'on cherche.

2. Le nombre cherché par la Multiplication, qui exprime le total ou la somme de l'addition d'un autre nombre ajouté à lui-même autant de fois qu'il y a d'unités dans un troisième, est appelé *Produit de la Multiplication*; par exemple, 24 est le produit de 3 multiplié par 8.

3. Les deux nombres dont un est ajouté à lui-même autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre, sont appelés *Racines du Produit de la Multiplication*; par exemple 5 & 7 sont les racines de 35, parce que 5 multiplié par 7, fait 35.

COROLLAIRE. I.

En multipliant un nombre par l'autre, indifféremment, c'est à dire, le premier par le second, ou le second par le premier; il en résulte toujours le même produit. Cela est si évident, que ce seroit embrouïller & obscurcir cette vérité, que de la vouloir démontrer; par exemple, 2 fois 3 est la même chose que 3 fois 2, sçavoir 6; si on dit 8 fois 5, ou 5 fois 8, on trouvera toujours 40 pour produit. Puisqu'on voit ainsi, il suit des définitions qu'on vient d'exposer, que le produit de la Multiplication contient autant de fois une de ses racines, que l'autre racine contient de fois l'unité. Car, comme on vient de dire, ce produit n'est rien autre chose qu'une des racines ajoutée à elle-même autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre racine. Par exemple le nombre 54, qui est le produit de 9 multiplié par 6, contient autant de fois 9, que 6 contient de fois 1; pareillement le même nombre 54 contient autant de fois 6, que 9 contient de fois 1. Ce Co-

naire mérite qu'on y fasse attention, parce qu'on en tirera plusieurs avantages.

Pour trouver le nombre qu'on cherche par la multiplication, il faut placer les deux nombres à multiplier l'un sur l'autre de la même manière que dans les opérations précédentes. Les exemples qu'on verra dans la suite, feront mieux connoître comment il faut faire la multiplication, que tous les préceptes qu'on en pourroit donner par avance.

EXEMPLE.

Pour multiplier 247 par 3, c'est à dire, pour trouver un nombre égal à 247 répété 3 fois, ou à 247 fois 3, qui est la même chose; après les avoir disposés, comme il a été enseigné, il faut commencer vers la main droite, disant 3 fois 7, ou 7 fois 3, qui est la même chose, sont 21: j'écris 1 sous le premier chiffre 3, & je retiens dans ma mémoire 2 dizaines pour le rang suivant; je dis ensuite, 3 fois 4 sont 12, & 2 que j'avois retenus sont 14, j'écris 4 & je retiens 1; enfin je dis, 3 fois 2 sont 6 & 1 que j'avois retenu, sont 7 que j'écris: partant je trouve que le produit de cette multiplication est 741.

AUTRE EXEMPLE.

Pour multiplier 275 par 24, c'est à dire, pour trouver quelle somme produit 24 fois 275; il faut dire 4 fois 5 sont 20, & écrire 0 sous le 4 & retenir 2 dizaines. Ensuite 4 fois 7, ou 7 fois 4 sont 28, &

275	275
24	24
1100	1100
550	550
produit	6600

2 que j'avois retenus sont 30, j'écris 0 & je retiens 3 dixaines. 4 fois 2 sont 8, & 3 que j'avois retenus, sont 11, j'écris 1 sous le 2 multiplié, & j'avance 1 dixaine, parceque c'est tout.

Ensuite il faut multiplier 275 par les 2 dixaines de 24 en cette sorte ; 2 fois 5 sont 10, j'écris 0 sous les dixaines de 24, & je retiens 1 ; ensuite 2 fois 7 sont 14, & 1 que j'avois retenu, sont 15, j'écris 5 & je retiens 1 ; 2 fois 2 sont 4 & 1 que j'avois retenu sont 5, j'écris 5. Ces deux produits partiels ainsi arrangez étant par l'addition réduits en une somme, on trouve que le produit total est 6600, qu'on cherchoit.

OBSERVATION I.

1. Lorsqu'il faut multiplier un nombre par des livres, sols ou deniers, on commence toujours par les moindres especes de monnoye. Or pour multiplier par les deniers & avoir dans la même operation un produit réduit en sols, selon les deniers qui se rencontrent depuis 1 jusqu'à onze, il faut prendre de la somme qu'on veut multiplier, ces parties ; sçavoir,

Lorsqu'il y a 1 denier, pour avoir en sols la valeur du produit, on prendra une douzième partie du nombre proposé, parcequ'un denier est une 12^e partie d'un fol.

A 2 deniers, on prendra une sixième partie, parceque 2 deniers sont la sixième partie d'un fol.

A 3 deniers, on prendra un quart, parceque 3 deniers sont le quart d'un fol.

A 4 deniers, on prendra une tierce partie, parceque 4 deniers sont le tiers d'un fol.

A 5 deniers, on prendra un quart & une sixième partie, parceque 5 deniers sont composez de 3 deniers & de 2 deniers.

A 6 d. on prendra la moitié du nombre proposé, parceque 6 d. font la moitié d'un sol.

A 7 d. on prendra le tiers, & ensuite le quart, parceque 7 d. font composez de 4 d. & de 3 d.

A 8 deniers, il faut prendre les deux tiers l'un après l'autre, parceque 8 deniers sont composez de deux fois 4 deniers.

A 9 deniers, il faut prendre une moitié & ensuite le quart, parceque 9 deniers sont composez de 6 deniers & de 3 d.

A 10 deniers, il faut prendre une moitié & un tiers, parceque 10 deniers sont composez de 6 deniers & de 4 deniers.

A 11 deniers, il faut prendre 2 fois le tiers, & une fois le quart, pour avoir en sols la valeur du produit des deniers, parceque 11 deniers sont composez de deux fois 4 & de 1 fois 3.

Les exemples suivans rendront l'intelligence & l'application de ces choses claires & faciles, pour peu d'attention qu'on y fasse.

OBSERVATION II.

Lorsqu'on prend quelque moitié, tiers, ou quart, &c. d'un nombre, il faut toujours commencer vers la main gauche, afin que s'il reste quelques unitéz à chaque chiffre, elles soient jointes au suivant en qualité de dixaines.

OBSERVATION III.

Lorsqu'on veut reduire en livres un nombre de sols, par exemple pour reduire en livres 428 sols; il faut separer le dernier chiffre 8, & prendre la moitié des autres, disant: la moitié de 4 est 2 qu'il faut écrire, la moitié de 2 est 1 qu'il faut aussi écrire, & le chiffre 8 qu'on avoit separé signifie 8 sols; partant 428 sols sont 21 livres 8 sols.

$$\begin{array}{r} 42 \overline{) 8 \text{ s.}} \\ \underline{21} \phantom{\text{ s.}} \\ 21 \text{ liv. } 8 \text{ s.} \end{array}$$

Pour reduire en livres 12196 l. après avoir séparé le dernier chiffre 6, on prend la moitié des autres: on ne dira pas la moitié de 1, mais on dira la moitié de 12 est 6 qu'il faut écrire. On ne dit point la moitié de 1;

$$\begin{array}{r} 1219 \mid 6 \text{ l.} \\ \hline \end{array}$$

$$609 \text{ l. } 16 \text{ s.}$$

C'est pour cela qu'on écrit 0 au dessous, parcequ'il ne faut pas laisser de place vuide en pareille rencontre; mais cet 1 vaut 10 à l'égard du 4 suivant, & y joignant ce 9., cela fera 19; on dira la moitié de 19 est 9 reste 1, il faut écrire 9 sous le 9, & 1 qui reste est une dizaine qu'il faut écrire devant le 6 pour signifier 16 l. partant 12196 sols font 609 livres 16 sols.

E X E M P L E.

Si on veut connoître quelle somme produisent 48 Muids de vin à raison de 35 livres 12 sols chaque Muid, c'est chercher quelle somme produisent 48 fois 35 livres 12 sols.

Il faut commencer par les sols, disant: 2 fois 8 sont 16; partant j'écris 6 sous le 5 & je retiens 1; 2 fois 4 sont 8, & un que j'avois retenu sont 9; j'écris 9. Ensuite je multiplie par la dizaine des 12 sols, disant: 1 fois 8 sont 8, j'écris 8 sous le 9, au rang des dizaines; 1 fois 4 sont 4, j'écris 4. Après avoir additionné ou assemblé ces deux produits de sols ainsi arrangez, je trouve que le produit total des 48 fois 12 sols

$$\begin{array}{r} 48 \text{ muids} \\ \cdot \cdot \cdot 35 \text{ l. } 12 \text{ s.} \\ \hline \end{array}$$

$$96 \text{ s.}$$

$$48$$

$$57 \mid 6 \text{ s.}$$

$$28 \text{ l. } 16 \text{ s.}$$

$$240$$

$$144$$

$$1708 \text{ l. } 16 \text{ s.}$$

Arithmétique.

est 576 l. je reduits ces 576 l. en livres, comme il a été enseigné; je trouve pour leur valeur 28 l. 16 s. que j'écris au dessous.

Ensuite je multiplie par les livres, disant: 8 fois 5, ou 5 fois 8 font 40, j'écris 0 sous le 8 des livres provenus des sols, & je retiens 4: 4 fois 5 font 20, & 4 que j'avois retenus font 24; j'écris 4 & j'avance 2. Je multiplie ensuite par les dizaines de 35, disant: 3 fois 8 font 24; j'écris 4 au rang des dizaines sous le produit precedent & je retiens 2: trois fois 4 font 12, & 2 que j'avois retenus font 14; j'écris 4 & j'avance 1. Après avoir additionné ces trois produits, je trouve 1708 l. 16 s. pour la valeur totale des 48 Muids de vin.

AUTRE EXEMPLE.

2008 aunes.							
... 207 l. 10 s. 6 d.							
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: right;">1004 s.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2008 0</td> <td></td> </tr> </table>		1004 s.		2008 0			
1004 s.							
2008 0							
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: right;">2108</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">4 s.</td> </tr> </table>		2108	4 s.				
2108	4 s.						
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: right;">1054 l.</td> <td style="text-align: right;">4 s.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">14056</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">40160</td> <td></td> </tr> </table>		1054 l.	4 s.	14056		40160	
1054 l.	4 s.						
14056							
40160							
<p><i>produit</i> 416710 l. 4 s.</p>							

On demande quelle somme d'argent doivent coûter 2008 aunes de marchandise à raison de 207 l. 10 s. 6 d. je commence par les deniers, & à cause des 6 deniers, je prends la moitié de 208, en cette sorte commençant vers la main

2008 *annes.*
 ... 207 l. 10 s. 6 d.

1004 s.
 20080

2108 | 4 s.

1054 l. 4 s.
 34056
 40160

produit 416710 l. 4 s.

gauche, disant: la moitié de 2 est 1, que j'écris sous le 2; la moitié de 0 est 0 que j'écris ensuite; la moitié de 0 est 0, que j'écris pareillement; enfin la moitié de 8 est 4, que j'écris sous le 8. Partant je trouve que 2008 fois 6 deniers produisent 1004 sols.

Je multiplie ensuite par les sols; mais parce que les 0 ne multiplient point ou ne produisent rien, pour le zero des 10 sols, j'écris 0 sous le 4 du produit des deniers. Ensuite je multiplie par la dixaine des 10 sols, disant: 1 fois 8 sont 8, j'écris 8 au rang des dixaines: 1 fois 0 est 0, j'écris 0: 1 fois 0 est 0, j'écris 0: 1 fois 2 sont 2, j'écris 2. J'assemble après cela ces deux produits, dont je trouve que la somme est 21084 sols, que je réduis en livres, comme il a été enseigné, & je trouve pour leur valeur 1054 l. 4 s.

Ensuite je multiplie par les unitez de livres, disant: 7 fois 8 sont 56; j'écris 6 & je retiens 5; 7 fois 0 n'est rien, mais 5 que j'avois retenus, sont 5; j'é-

cris 5 : 7 fois 0 est 0 ; j'écris 0 : 7 fois 2 ou 2 fois 7 font 14 ; j'écris 4 & j'avance 1. Ensuite parce-que les zeros ne produisent rien , pour le 0 qui precede le 7 des 207 ; j'écris 0 au rang des dixai-nes sous le 5 du produit precedent , & je multiplie par les 2 centaines, disant : 2 fois 8 font 16 ; j'écris 6 au rang des centaines, & je retiens 1 : 2 fois 0 font 0, mais 1 que j'avois retenu est 1 ; j'écris 1 sous le 4 : 2 fois 0 font 0 ; j'écris 0 : enfin 2 fois 2 font 4 ; j'écris 4. Après avoir assemblé ces trois produits ainsi arrangez , je trouve que les 2008 aunes de marchandises couteront 416710 l. 4. s.

AUTRE EXEMPLE.

On demande quelle somme il faut pour payer 147 arpens , ou acres de terre , à raison de 253 l. 14 s. 9 d. chacun. Je commence par les deniers ; je prens pour 9 d. une moitié , & ensuite un quart de 147 , l'un après l'autre, comme il a été enseigné. On ne prend pas la moitié de 1, parceque 2 n'est pas en 1, mais on joint cet 1 avec le 4 suivant, & on dit, la moitié de 14 est 7, qu'il faut écrire sous le 4 : la moitié de 7 est 3, reste 1, il faut

147				
20253	l.	14	s.	9 d.
73	s.	6	d.	
36				
588				
147				
216		8	s.	3 d.
108	l.	8	s.	3 d.
441				
735				
294				
37299	l.	8	s.	3 d.

écrire 3 sous le 7, & cet 1 qui reste est une moitié de sol valant 6 d. j'écris 6 d. Ensuite je prens le quart, commençant toujours vers la main gauche; je trouve qu'il ne faut point chercher en

combien de fois 4, mais je joins cet 1 avec le 4 suivant, & je dis: en 14 combien de fois 4, c'est à dire, le quart de 14 est 3, reste 2, j'écris 3 sous le 4, & les 2 qui restent étant comparez avec le 7 qui suit, valent 2 dizaines; partant je dis: le quart de 27 est 6, reste 3, j'écris 6; mais ces 3 qui restent sont 3 quarts de sol valants 9 d. j'écris 9 d.

1 4 7	l.	14	s.	9	d.
2. 253					

73	s.	6	d.
36			
588			
147			

216	8	s.	3	d.
-----	---	----	---	----

108	l.	8	s.	3	d.
-----	----	---	----	---	----

441					
-----	--	--	--	--	--

735					
-----	--	--	--	--	--

294					
-----	--	--	--	--	--

37299	l.	8	s.	3	d.
-------	----	---	----	---	----

Après cela je multiplie par les sols, disant: 4 fois 7 sont 28; j'écris 8 & je retiens 2: 4 fois 4 sont 16 & 2 retenus sont 18, j'écris 8 & je retiens 1; 4 fois 1 sont 4, & 1 que j'ay retenu sont 5, j'écris 5. Je multiplie par la dizaine des sols, disant: 1 fois 7 sont 7; j'écris 7 au rang des dizaines: 1 fois 4 sont 4; j'écris 4: 1 fois 1 est 1; j'écris 1. Après avoir assemblé ces produits, tant des deniers que des sols, je trouve que leur produit total est 2168 s. 3 d. dont la valeur en livres est 108 l. 8 s. 3 d. que j'écris au dessous.

Enfin je multiplie par les livres, disant: 3 fois 7 sont 21 l. j'écris 1 l. sous le 8 du produit

des sols, & je retiens 2 : 3 fois 4 font 12, & 2 que j'avois retenus font 14 ; j'écris 4. & je retiens 1 : 3 fois 1, ou une fois 3 font 3, & 1 que j'avois retenu, font 4 ; j'écris 4. Ensuite je dis : 5 fois 7 font 35 ; j'écris 5 sous le 4 au rang des dizaines, & je retiens 9 : 4 fois 5 ; ou 5 fois 4 font 20 ; & trois que j'avois retenus, font 23 ; j'écris 3 & je retiens 2 : 1 fois 5 font 5, & 2 que j'avois retenu font 7 ; j'écris 7. Enfin je multiplie par les centaines, disant : 2 fois 7 font 14 ; j'écris 4 au rang des centaines, & je retiens 1 : 2 fois 4 font 8, & 1 que j'avois retenu, font 9 ; j'écris 9 : 2 fois 1, ou une fois 2 font 2 ; j'écris 2. Après avoir assemblé, comme il a été enseigné dans l'addition, ces 4 produits ainsi arrangez, on trouvera que pour payer les 147 arpents de terre, il faut la somme de 37299 livres 8 sols 3 deniers.

A V E R T I S S E M E N T.

Pour reduire un nombre de livres en sols, il faut multiplier ce nombre par 20 sols, puisque chaque livre vaut 20 sols ; le produit de cette multiplication donnera en sols la valeur des livres : par exemple pour reduire 12 livres en sols, on multipliera 12 par 20, parceque 12 l. font 12 fois 20 sols.

Pour reduire un nombre de sols en deniers, il faut multiplier ce nombre par 12, puisque chaque sol vaut 12 deniers ; le produit de cette multiplication donnera la valeur des sols en deniers : par exemple pour reduire 15 sols en deniers, on multiplie 15 par 12, parceque 15 sols font 15 fois 12 deniers.

DE LA DIVISION DES NOMBRES.

DEFINITIONS.

1. LA Division est une operation par laquelle on partage un nombre en autant de parties égales, qu'il y a d'unités dans un autre.

2. Le nombre qui exprime une de ces parties égales, est appelé *Quotient*.

3. Le nombre qu'on veut partager, est appelé *Nombre à diviser*.

4. Le nombre qui exprime en combien de parties on veut diviser l'autre, est appelé *Diviseur*.

Pour diviser un nombre par un autre, on cherche combien de fois le Diviseur est contenu dans le nombre à diviser; le nombre qui exprimera combien de fois l'un sera contenu dans l'autre, sera le véritable Quotient de la division: ce qu'on fera voir évidemment dans le premier des Corollaires, qui suivront après qu'on aura exposé la manière de faire cette operation.

Il faut écrire le nombre à diviser, ensuite mener une ligne, écrire le diviseur dessous, commençant de gauche à droit, & au bout de la ligne qu'on vient de mener, on écrira le quotient, comme on verra dans la suite.

E X E M P L E.

Pour diviser 128 par 4, c'est à dire, pour trou-

ver quel est le
quart de 128, ou
en 128 combien
de fois 4: après
avoir écrit le
nombre 128 &

$$\begin{array}{r}
 \text{0 (0)} \\
 \text{128} \\
 \hline
 \text{4} \quad \text{4}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 0 \\ 128 \\ \hline 4 \quad 4 \end{array}} \right\} \text{32 quot.}$$

avoir mené la ligne au deffous, je ne peux pas écrire le diviseur 4 au deffous de 1, parceque 4 ne sont pas contenus en 1, mais je l'écris sous le 2, & je cherche en 12 combien de fois 4, il y est 3 fois, j'écris 3 en un lieu particulier où je veux placer le quotient. Ensuite je multiplie ce 3 du quotient par le diviseur 4, ce qui fait 12: or ces 12 étant retranchez de 12, qui sont les deux premiers chiffres du nombre à diviser, il ne reste rien. Partant j'écris 0 au deffus du 2, & je retranche le diviseur 4 & les deux premiers chiffres 12 du nombre à diviser. Ensuite j'avance le diviseur 4 sous 8, & je dis en 8 combien de fois 4: je trouve que 4 y sont 2 fois; j'écris 2 au quotient. Ensuite je multiplie le diviseur 4 par ce 2, ce qui produit 8. Or retranchant ce produit 8 du chiffre 8 du nombre à diviser, il ne reste rien: partant j'écris 0 au deffus de 8 avec une petite separation, & je tranche le 4 & le 8. Cela fait, je trouve 32 pour quotient de cette division; c'est à dire que 32 est une quatrième partie de 128, ou que 32 est 4 fois en 128, ou enfin que 128 contient autans de fois 4 que 32 contient de fois l'unité.

AUTRE EXEMPLE.

Pour diviser 804 en 5 parties égales; après avoir écrit le diviseur 5 sous le 8, premier chiffre du nombre à diviser, vers la main gauche; je dis en 8 combien y a-t-il de fois 5: il y est une



Premiere Partie.

$$\begin{array}{r}
 \text{nombre à diviser } 804 \\
 \text{diviseur } 5 \quad \underline{5} \quad \underline{5} \quad \underline{5} \\
 \hline
 304 \text{ reste } 4
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 804 \\ 5 \\ \hline 304 \end{array}} \right\} 160 \text{ quotient.}$$

fois, j'écris 1 au quotient. Ensuite (multipliant ce que je viens d'écrire au quotient par le diviseur) je dis 1 fois 5 font 5. Or 5 étant retranché de 8, il reste 3 que j'écris sur 8 après avoir tranché le 8 & le 5 avec une petite ligne pour marquer que l'opération est finie à leur égard. Je récris le diviseur 5 sous le 0 du nombre à diviser, & considérant le 3 que je viens de trouver de reste sur le chiffre 8, devant le 0 du nombre à diviser, cela fait 30; je cherche en 30 combien de fois le nombre 5? je l'y trouve 6 fois que j'écris au quotient, & je multiplie ce 6 du quotient par le diviseur 5, cela fait 30. Or ce nombre 30 étant retranché du premier nombre 30, il ne reste rien; partant (ayant tranché le diviseur 5 & le premier nombre 30) j'écris 0 au dessus de 0. Enfin considérant ce dernier 0 comme placé devant le 4 du nombre à diviser, cela ne fait que 4; je cherche en 4 combien de fois 5? ce nombre 5 n'y étant point contenu, j'écris au quotient 0, & je dis 5 fois 0 produisent 0, lequel 0 ou rien étant retranché de 4, il reste 4 que je separe avec une petite ligne d'avec les autres chiffres tranchés. Ainsi je trouve pour quotient de cette division 160 & 4. qui restent, c'est à dire que 160 est une 5^e partie de 804, excepté 4: ou bien que le nombre 5 est contenu 160 fois dans 804 moins 4. Ce nombre 4 reste encore à diviser.

AUTRE EXEMPLE.

• Lorsque le nombre diviseur est exprimé par

plusieurs chiffres, il est un peu plus difficile d'apprendre cette operation que les autres ; c'est pour cela qu'il faut s'y appliquer un peu davantage, & s'y exercer frequemment par plusieurs exemples ; après cela on y trouvera la même facilité que dans les autres.

Pour diviser 934 par 25, après avoir écrit 25 sous 93, il faut chercher en son esprit combien de fois 2 se rencontrent

$$\begin{array}{r} 10 \\ 25 \overline{) 934} \\ \underline{50} \\ 43 \\ \underline{50} \\ 84 \\ \underline{75} \\ 9 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} 10 \\ 25 \overline{) 934} \\ \underline{50} \\ 43 \\ \underline{50} \\ 84 \\ \underline{75} \\ 9 \end{array}} \right\} 37$$

en 9. On trouve véritablement 4 fois 2 en 9, mais il ne faut écrire au quotient que 3 fois. (souvent on met au quotient moins qu'on ne trouve véritablement, à cause de quelques dizaines qui reparent cela dans l'operation, ce qu'on connoitra facilement dans la suite, & par l'usage). Or multipliant ce 3 du quotient par 5 du diviseur, cela fait 15, j'imagine des dizaines préposées au 3 qui est sur le 5, autant qu'il est nécessaire pour former un nombre dans lequel 15 soit contenu. Dans cette occasion ici, il faut imaginer que le 3 qui est sur le 5 soit précédé de 2 dizaines, cela fera 23 ; & dire, si de 23 on retranche le nombre 15, dont on vient de parler, il reste 8 que j'écris dessus le 3, & je retiens les 2 dizaines que j'avois imaginées, & je tranche le 3 & le 5 de dessous. Ensuite je multiplie le 2 de dessous le 9 par le 3 que j'ay écrit au quotient, cela fait 6 avec les 2 dizaines que je viens de retenir, cela fait 8. Or ces 8 étant retranchés de 9, il reste 1 que j'écris sur le 9, & je tranche le 9 & le 2 de dessous.

Ensuite je r'écris le diviseur 25 : de sorte que le 5 suive le 5 precedent & soit sous le 4, & le 2 sous le 5 precedent. Et je cherche en 18 combien de fois est contenu le 2 qui est en bas sous le

colonne du 8. Je trouve qu'il y est contenu 9 fois ; mais (parceque j'aurai dans un moment occasion de retenir quelques dizaines qui contribueront à suppléer le reste) j'écrirai au quotient seulement 7. Or disant 5 fois 7 sont 35 (imaginant 4 preposez au 4 de dessus) ces 35 étant retranchez de 44, il reste 9 que j'écris sur le 4, & je retiens ces 4 dizaines. Ensuite je multiplie encore le 7 du quotient par le 2 qui est sous le 5, cela fait 14, auquel nombre joignant les 4 dizaines que je viens de retenir, cela fait 18. Or ces 18 étant retranchez des 18 qui sont au dessus de 93, il ne reste rien. Partant j'écris 0 sur le 8 ; & parcequ'il n'y a plus de chiffre du nombre à diviser sous lequel je puisse avancer ou r'écrire le diviseur 25, je separe avec une petite ligne le 0 & le 9. que je viens d'écrire, pour marquer que c'est ce qui reste à diviser par 25. Enfin je trouve que le quotient de cette division est 37, reste 9.

$$\begin{array}{r}
 0 \\
 25 \overline{) 89} \\
 \underline{175} \\
 140 \\
 \underline{125} \\
 15
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 0 \\ 25 \overline{) 89} \\ \underline{175} \\ 140 \\ \underline{125} \\ 15 \end{array}} \right\} 37$$

AUTRE EXEMPLE.

Pour diviser 158094

$$\begin{array}{r}
 053 \\
 259 \overline{) 158094} \\
 \underline{1295} \\
 2854 \\
 \underline{2295} \\
 559
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 053 \\ 259 \overline{) 158094} \\ \underline{1295} \\ 2854 \\ \underline{2295} \\ 559 \end{array}} \right\} 3$$

par 509, à cause que le diviseur 509 n'est point contenu dans 158 qui sont les 3 premiers chiffres du nombre à diviser, j'écris le premier chiffre 5 du diviseur sous le 5 deuxième chiffre du nombre à diviser, & le reste de suite. Cela fait, je cherche en 15 combien 5 sont contenus de fois, j'y trouve ce nombre 3 trois fois, j'écris 3 au quotient, que je multiplie par le 9 dernier chiffre

chifre du diviseur ; cela fait 27 (en imaginant 3 dizaines apposées devant le 0 de dessus le 9, cela fera 30.) Or 27 produit du quotient & de ce 9 du diviseur étant retranchez de ces 30 imaginez dans le nombre à diviser, il reste 3, Partant j'écris 3 au dessus du 0, & je retiens les 3 dizaines que j'avois imaginées, & je tranche le 9 & le 0 de dessus. Ensuite je multiplie ce 3 du quotient par le 0 du diviseur ; cela ne produit que 0 ou rien, auquel j'ajoute ces 3 dizaines que je viens de retenir, cela fait 3 que je retranche du 8 du nombre à diviser, il reste 5 que j'écris au dessus de ce 8, & je tranche le 0 & le 8, qui sont l'un sur l'autre. Ensuite je multiplie ce même 3 du quotient par le 5 du diviseur, cela fait 15. Or ces 15 étant retranchez de 15 qui sont le commencement du nombre à diviser, il reste 0. Partant j'écris 0 sur le 5.

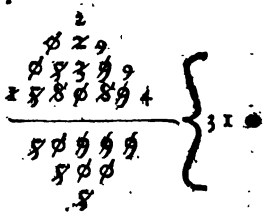
Après cela je r'écris le diviseur en plaçant son dernier chifre 9 sous le 8 du nombre à diviser après le 9 precedent, & le reste des autres chiffres de suite vers la main gauche.

$$\begin{array}{r}
 02 \\
 \phi 8 3 9 \\
 \times 5 8 \phi 8 9 4 \\
 \hline
 5 \phi 5 5 \\
 5 \phi
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 02 \\ \phi 8 3 9 \\ \times 5 8 \phi 8 9 4 \\ \hline 5 \phi 5 5 \\ 5 \phi \end{array}} \right\} 31$$

Le 0 qui est sur le 5, & le 5 qui est sur le 8 ne formant que le nombre de 5, je cherche en 5 combien il y a de fois 5, je trouve que ce nombre 5 est seulement contenu une fois en 5, j'écris 1 au quotient. Je multiplie cet 1 par 9 qui est le dernier chifre du diviseur, cela ne produit que 9. Or ce 9 ne peut être retranché du 8 qui est dessus ; mais en imaginant 1 dizaine preposée à ce 8, cela fera 18, dont 9 étant retranchez, il reste 9 que j'écris sur le 8, je tranche ce 9 & ce 8, & je retiens cette dizaine imaginée. En-

suite je multiplie cet 1 du quotient par 0 du di-
 viseur, cela produit 0, y ajoutant cette dizaine
 que je viens de retenir, cela fait 1 qui étant re-
 tranché du 3 qui est sur le 0, reste 2 que j'écris
 sur ce 3. Je multiplie le 1 du quotient par 5 der-
 nier chiffre du diviseur, cela ne fait que 5 (par-
 ceque l'unité ne multiplie jamais) qui étant re-
 tranché du 5 qui est dessus le 8, il ne reste rien,
 j'écris 0 sur le 5 & je tranche le 5 du diviseur, &
 le 5 & le 0 qui sont sur le 8 & le 5 du nombre à
 diviser.

J'écris une troisié-
 me fois le diviseur
 sous le nombre à di-
 viser : de sorte que
 son dernier chiffre 9
 soit sous le 9, & en-
 suite les autres chi-
 fres sous les autres
 de droit à gauche ;
 & je dis : le 0 qui est



au dessus du 5 & le 2 qui est ensuite au dessus du
 3 ne font que 2 : or en 2 combien de fois 5 ? il
 n'y est point, & partant j'écris 0 au quotient.
 Ensuite je multiplie le 9 du diviseur par le 0 du
 quotient, & je dis : 9 fois 0 c'est 0, de 9 qui est
 au dessus étant 0, reste 9 que j'écris au dessus
 du 9 & je tranche les deux 9 precedens. Après cela,
 0 multiplié par 0 produit 0, de 9 qui est au des-
 sus du 8, étant 0, reste 9, que j'écris au dessus
 du dernier 8 precedent, que je tranche avec le
 0 du diviseur. Je dis encore : 5 fois 0 c'est 0,
 de 2 qui est au dessus du 3 étant 0, reste 2, que
 j'écris au dessus du 2, & je tranche le 2 precedent
 & le 5 du diviseur.

Enfin je r'écris le diviseur, de sorte que son

dernier chiffre 9 soit sous le 4 du nombre à diviser, ensuite des autres derniers chiffres du même diviseur, & que les autres chiffres de ce même

diviseur soient sous les autres immédiatement suivans vers la main gauche. Je cherche en 29 combien il y a de fois 5, je trouve que ce nombre y est 5 fois, j'écris 5 au quotient. Par

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 4} \\
 \underline{ 0} 2 \ 9 \ 4 \\
 5 \ 8 \ 3 \ 9 \ 9 \ 9 \ 9 \\
 \underline{5 \ 8 \ 8 \ 0 \ 8 \ 9 \ 4} \\
 8 \ 0 \ 9 \ 9 \ 9 \ 9 \\
 \underline{5 \ 0 \ 0 \ 0} \\
 8 \ 8
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 2 \overline{) 4} \\ \underline{ 0} 2 \ 9 \ 4 \\ 5 \ 8 \ 3 \ 9 \ 9 \ 9 \ 9 \\ \underline{5 \ 8 \ 8 \ 0 \ 8 \ 9 \ 4} \\ 8 \ 0 \ 9 \ 9 \ 9 \ 9 \\ \underline{5 \ 0 \ 0 \ 0} \\ 8 \ 8 \end{array}} \right\} 3105$$

ce nombre 5 du quotient je multiplie 9, dernier chiffre du diviseur, ce qui produit 45; j'imagine autant de dizaines préposées au 4 qui est sur ce 9, qu'il est nécessaire pour que 45 y soient contenus; je dis: 45 étant retranché de 54, il reste 9 que j'écris sur le 4, je retiens 5, je tranche le 9 & le 4 qui est au dessus. Ensuite je multiplie 5 par 0, cela produit 0 auquel ajoutant 5 que je viens de retenir, cela fait 5 qui étant retranché du 9, qui est sur le 9, il reste 4 que j'écris sur le 9, & je tranche ce 9 & le 0 du diviseur. Je multiplie le nombre 5 du quotient par le nombre 5 du diviseur, cela fait 25, lequel nombre étant retranché de 29, il reste 4 que j'écris sur le 9 après avoir tranché les 29 & le 5 du diviseur; cela fait je sépare avec une ligne ce reste 449. Bientôt je trouve que le quotient de cette division est 3105, & qu'il reste 449.

A V E R T I S S E M E N T.

1. Lorsqu'il arrive que le produit du chiffre du quotient & du dernier chiffre du diviseur vers la

main gauche seul, ou joint avec quelques dizaines, si on en avoit retenu, forme un nombre plus grand que celui qui est au dessus du diviseur, dont on voudroit retrancher ce produit; c'est une marque que le chiffre écrit au quotient exprime un nombre de fois trop grand. Partant il convient le diminuer de quelque unité.

2. Au contraire, après avoir multiplié le chiffre du quotient par le diviseur, comme il a été enseigné, s'il arrive que ce qui reste au dessus du diviseur ou avant qu'on l'ait r'écrit, ou lorsqu'il est en sa dernière place, est plus grand que le même diviseur; c'est une marque que le chiffre écrit au quotient n'exprime pas un nombre assez grand: partant qu'il faut augmenter ce nombre de quelque unité.

3. A chaque position ou promotion du diviseur, on ne doit jamais poser au quotient aucun chiffre qui exprime un nombre plus grand que 9.

4. Lorsqu'on se contente d'indiquer une multiplication de deux ou plusieurs grandeurs, on interpose ce signe \times ; par exemple $2 \times 3 = 6$. Cela signifie 2 multipliez par 3 produisent une grandeur égale à 6.

5. Lorsqu'on veut seulement exprimer la division d'une grandeur par un autre, on interpose

ce signe \div ; par exemple $\frac{6}{2} = 3$; cela signifie

que 6 divisez par 2 donnent pour quotient une

grandeur égale à 3. Si on écrit seulement $\frac{5}{4}$, ce-

la signifie 5 unitez divisées par 4; c'est ce qu'on appelle *Fraction*, comme on verra dans la suite.

6. Le terme ou mot qui est particulièrement

en usage dans l'Addition, c'est *6* ; par exemple $6 + 5$ font 8.

7. Le terme qui est particulièrement en usage dans la Soustraction, c'est *de* ; par exemple, si de 7 on retranche 4, reste 3.

8. Le terme qui est particulièrement en usage dans la Multiplication, c'est *fois* ; par exemple $6 \text{ fois } 8$ font 48.

9. Le terme qui est particulièrement en usage dans la Division, c'est *en* ; par exemple *en* 12, combien de fois 2 ? 6 fois.

Reflexions Fondamentales.

La pratique de la Division fait naître les cinq Corollaires suivans qu'il est important de bien remarquer.

COROLLAIRE I.

Pour faire la Division, il faut chercher combien de fois le diviseur est contenu dans le nombre à diviser, & l'ayant trouvé, ce nombre de fois est le quotient qu'on cherche. Soit par exemple le nombre 15 à diviser par 5 ; je cherche en 15, combien il y a de fois 5, je l'y trouve 3 fois ; je dis que 3 est le quotient, c'est à dire, une 3^e partie de 15 ; car nous venons de voir que 3 fois ce diviseur 5 produit 15 ; parceque 5 est 3 fois en 15. Il est certain que 5 fois 3 font aussi 15 ; puisque 3 fois 5, ou 5 fois 3 font le même produit ; & partant, puisque 5 fois 3 font 15, il est évident que ce nombre 3 est une 3^e partie de 15 ; car il faut l'ajouter 5 fois à lui-même pour faire le nombre 15. Donc le nombre qui exprime combien de fois un nombre est contenu dans un au-

est, est le quotient de ce dernier nombre divisé par l'autre.

COROLLAIRE II.

Il suit de ces choses que le nombre à diviser contient autant de fois le diviseur, que le quotient contient de fois l'unité; car le diviseur est contenu autant de fois dans le nombre à diviser, que l'unité se trouve exprimée de fois par le quotient.

COROLLAIRE III.

Le produit du quotient de la Division multiplié par le diviseur, est toujours égal au nombre à diviser. Car puisque * le nombre à diviser contient autant de fois le diviseur, que le quotient contient de fois l'unité; si j'ajoute le diviseur à lui-même autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient, c'est à dire, ** si je multiplie le diviseur par le quotient, le produit de cette multiplication fera égal au nombre à diviser.

COROLLAIRE IV.

La Multiplication & la Division se servent de preuves l'une à l'autre. Car on est certain que le nombre 8, par exemple, multiplié par 5 produit 40, si 8 étant ajouté à lui-même 5 fois, fait 40; c'est à dire, si 8 sont contenus 5 fois dans 40, ce qu'on peut sçavoir en divisant 40 par 8. Au contraire on est certain qu'ayant divisé 40 par 8, le

* Cor. 2. *preced.*

** *Déf. de la Multip.*

quotient est 5, si 5 est 8 fois dans 40; ce qu'on connoit en multipliant le quotient 5 par le diviseur 8.

De même, si 3489 est le quotient de 136098 divisé par 39, & 27 restans; pour être assuré que cette operation est bien faite,

il faut multiplier ce quotient 3489 par 39, & au produit ajouter le reste 27. Alors si la somme qui en resultera est égale au nombre à diviser, on doit

$$\begin{array}{r}
 33(2 \\
 2947(7 \\
 236098 \} 3489 \\
 \hline
 39999 \\
 333
 \end{array}$$

être certain que l'operation est très exacte. S'il arrivoit autrement, l'operation ne seroit pas juste, & il faudroit la recommencer.

Enfin pour connoître si 741000 est le véritable produit de 570 multiplié par 1300, il faut diviser 741000 par 570, & on doit trouver 1300 au quotient sans aucun reste; ou bien il faut diviser 741000 par 1300, & on trouvera aussi sans aucun reste 570 pour le quotient. S'il arrivoit autrement, l'operation seroit vicieuse & fautive, & il faudroit la recommencer plus exactement.

$$\begin{array}{r}
 570 \\
 1300 \\
 \hline
 171000 \\
 570 \\
 \hline
 741000
 \end{array}$$

COROLLAIRE V.

La Division est une Soustraction abrégée. Car afin qu'on puisse assurer que le diviseur est contenu un certain nombre de fois dans le nombre à diviser; il faut que du nombre à diviser on puisse retrancher le diviseur autant de fois qu'on a trouvé qu'il y étoit contenu. Par exemple, si on divise 24 par 6, on dira que le diviseur 6 est 4 fois en 24; & pour en être certain, on retranchera 4 fois 6 du nombre 24, c'est à dire que de 24 on retranchera le produit de 6 multiplié par 4.



DES FRACTIONS.

DEFINITIONS.

UNB Fraction est la maniere d'exprimer une ou plusieurs parties d'un ou de plusieurs *tous*, *unitex*, ou *entiers*, divisez chacun en un certain nombre de parties égales. Par exemple, la disposition de ces deux chiffres $\frac{3}{4}$ signifie trois des parties égales d'un *entier* partagé en 4, c'est à dire trois quarts. Cette autre expression $\frac{7}{3}$ fait connoître que, plusieurs entiers, par exemple, plusieurs écus étant divisez chacun en trois parties égales, on veut marquer 7 de ces parties égales, c'est à dire, 7 tiers.

Je peux encore dire qu'une Fraction est une division indiquée seulement, c'est à dire, dont on exprime le quotient en écrivant la grandeur à diviser au dessus d'une petite ligne, ensuite en écrivant le diviseur au dessous. Par exemple, pour exprimer le quotient de 5 unitex divisées par 8, on écrit $\frac{5}{8}$, ce qui signifie cinq huitièmes, c'est à dire, que, si on considère un Tout divisé en huit parties égales, cette Fraction $\frac{5}{8}$ signifiera 5 des parties égales, qui sont des huitièmes.

Pour bien entendre comment 5 unitex peuvent être divisées en 8 parties égales, & comment le quotient de cette division est 5 huitièmes du Tout ou de l'Entier 5; il faut considérer chacune de ces 5 unitex comme partagée en 8 parties égales, ce qui produira 40 huitièmes d'unité. Alors en divisant ces 40 huitièmes parties égales

égales d'unité par ce nombre 8, c'est la même chose que si on divisoit ces 5 unités par 8; puisque ce nombre de 5 unités & les 40 huitièmes parties de chacune de ces unités sont la même chose, & que le quotient de la division de 40 huitièmes parties d'unité par 8, sont 5 huitièmes parties d'unité.

2. Le dénominateur d'une fraction est la grandeur inférieure à la petite ligne interposée, parce que cette grandeur dénomme ou exprime dans les nombres les cinquièmes, septièmes, dixièmes, &c. parties de l'unité; comme dans cet exem-

ple $\frac{2}{3}$, le nombre 3 fait connoître que ce sont des tiers d'unité.

3. Le numérateur d'une fraction est la grandeur supérieure à la petite ligne interposée, parce que cette grandeur exprime combien de parties de l'unité, qui sont dénommées par le chiffre inférieur, vaut la fraction. Par exemple dans

cette fraction $\frac{4}{7}$ on trouve pour numérateur 4;

qui fait connoître que la valeur de cette fraction est 4 septièmes parties d'unité.

On fait à l'égard des fractions les mêmes opérations qu'on vient de faire pour les nombres entiers; mais avant que d'en venir à la pratique, il faut remarquer les 4 choses suivantes.

*Observations essentielles pour l'usage
des Fractions.*

1. Pour réduire une fraction à de moindres termes, c'est à dire, pour exprimer une fraction par des termes plus simples; par exemple pour

trouver une fraction equivalente à $\frac{6}{18}$, & qui

soit exprimée par des chiffres moindres que 6 & que 18, il faut chercher un nombre par lequel on puisse diviser également le numérateur & le dénominateur sans aucun reste. Comme dans cet

exemple $\frac{6}{18}$, on trouve que 2 peut diviser 6 & 18

sans reste, on mettra le quotient de 6 divisé par 2 pour numérateur de la nouvelle Fraction, & le quotient du dénominateur divisé par le même

nombre 2, pour dénominateur, & on aura $\frac{3}{9}$

pour la nouvelle fraction, qui vaut autant que

$\frac{6}{18}$. Mais on peut encore trouver un nombre

qui divisera également 6 & 9 sans reste, sçavoir 3.

& partant on aura $\frac{2}{3}$ au lieu de $\frac{3}{9}$, ou de $\frac{6}{18}$.

Pour trouver facilement le diviseur commun, il faut diviser le plus grand des deux nombres qui expriment la fraction par le plus petit; & s'il reste quelque chose, le nombre qui a servi de diviseur à la division précédente, sera divisé par ce reste; & si après cette division il reste encore quelque nombre, ce sera un nouveau diviseur pour le nombre qui a servi de diviseur à la division précédente. On continuera de même jusqu'à ce qu'on soit parvenu à quelque division où il ne reste rien; le dernier de ces diviseurs sera le diviseur commun au numérateur & au

Dénominateur de la fraction proposée.

Soit par exemple cette fraction $\frac{45}{72}$, & qu'an

numérateur 45, & au dénominateur 72, il soit nécessaire de trouver un diviseur commun sans reste. Il faut diviser 72 par 45, il restera 27; ensuite on divisera 45 par le reste 27, il restera 18; on divisera encore 27 par 18, il restera 9; & enfin on divisera 18 par 9, & il ne restera rien; ce qui fera connoître que 9 sera le plus grand & commun diviseur du numérateur, & du dénomi-

nateur de la fraction $\frac{45}{72}$ qui sera réduite par ce moyen à son équivalente $\frac{5}{8}$. Mais s'il arrivoit

qu'après avoir fait toutes ces divisions, il y eut pour reste 1, ce seroit une marque que la fraction ne pourroit être réduite à de moindres termes.

S'il se rencontroit un ou plusieurs 0 à la fin du numérateur & du dénominateur d'une fraction, on réduira facilement cette fraction à moindres termes, en ôtant autant de zeros de la fin du numérateur, que de la fin du dénominateur;

par exemple, cette fraction $\frac{400}{500}$ sera réduite à

son équivalente ou égale $\frac{4}{5}$, en retranchant de

part & d'autre 00: puisque dans cet exemple c'est la même chose que si on divisoit le numérateur 400 & le dénominateur 500, par le nombre 100. Si on ôtoit seulement un zero, ce seroit diviser par 10, &c.

2. Réduire deux fractions à même dénomi-

nation, c'est leur chercher un dénominateur commun sans changer leur valeur ; par exemple,

pour reduire $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ à une même dénomina-

tion, il faut multiplier les dénominateurs 3 & 4

l'un par l'autre, on aura

12 qui sera

le dénominateur commun. Ensuite

on multiplier

ra le numérateur 2 d'une

de ces fractions par le dénominateur 4 de l'autre,

& on aura 8 qu'on écrira au dessus du 2. Enfin on

multipliera le dénominateur 3 par le numérateur 3,

on aura 9 qu'on écrira sur le 3. Et partant

on aura au lieu de $\frac{2}{3}$ son égale $\frac{8}{12}$; & au lieu

de $\frac{3}{4}$ on aura son égale $\frac{9}{12}$. Or $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$ sont en

même dénomination, ce qu'il falloit chercher.

Lorsqu'il y a plus de deux fractions ; par exem-

ple $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, il faut multiplier tous les déno-

minateurs de suite l'un par l'autre, comme dans

cet exemple ; 3 fois 4 font 12, & 5 fois 12 font 60

qui sera le dénominateur commun ; & pour

avoir les numerateurs, on prendra pour le numérateur de la premiere fraction les deux tiers

de 60, sçavoir 40 ; pour le numérateur de la seconde, on prendra les trois quarts de 60, sçavoir,

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{4} = \frac{8}{12} \quad \left\{ \quad \frac{3}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{9}{12} \right.$$

voir 45 ; & pour le numerateur de la troisieme, on prendra les quatre cinquiemes de 60 : on fera de même lorsqu'il y aura un plus grand nombre de

fractions. On trouvera $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, au lieu de $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, & $\frac{4}{5}$; la raison de cela est facile à com-

prendre, parcequ'en cet exemple on considere le Tout ou l'Entier divisé en 60 parties égales. Ainsi lorsqu'on prendra les deux tiers de 60, on aura les deux tiers d'un Entier ; ce qui est la même chose que la premiere fraction : on dira la même chose des autres.

3. Pour connoître la valeur d'une fraction par rapport à l'Entier, dont elle exprime une ou plusieurs parties ; par exemple pour connoître la va-

leur des $\frac{3}{4}$ d'une livre, il faut multiplier 20 sols

valeur de la livre par le numerateur 3 de la fraction, & diviser le produit 60 par le dénominateur 4 de la fraction, le quotient de cette division sera 15 sols, qui est la valeur cherchée ; parceque les trois quarts d'une livre est la même chose que le quart de trois livres, comme on a observé dans la definition de fraction qui est la premiere des precedentes

4. Pour reduire des Entiers ou unitez en fraction, il faut multiplier le nombre de ces unitez par le dénominateur de la fraction, dans laquelle on les veut reduire ; par exemple pour reduire 4 en cinquiemes, il faut multiplier 4 par 5, on aura 20, auquel on mettra 5 pour dénominateur,

& on aura $\frac{20}{5}$. Cela est évident, puisque chaque

unité vaut 5 cinquièmes, quatre quarts, dix dixièmes, &c.

Reciproquement enfin pour reduire des fractions en Entiers, lorsque cela est possible, il faut diviser le numerateur par le dénominateur, & le quotient de cette division exprimera combien la fraction vaut d'Entiers, par exemple, pour sça-

voir combien cette fraction $\frac{15}{5}$ vaut d'Entiers, en

divisant 15 par 5, on trouvera que cette fraction vaut 3 Entiers; puisqu'il faut 5 cinquièmes pour faire un entier, ou trois tiers, ou 13 treizièmes, &c.

DE L'ADDITION DES FRACTIONS.

SI les fractions qu'on veut assembler sont en même dénomination; par exemple $\frac{4}{5}$ & $\frac{3}{5}$, il faut assembler les numerateurs, & soucrire à leur somme le dénominateur commun, & on aura $\frac{7}{5}$.

Si les fractions ne sont pas en même dénomination, il faut les y reduire*, & ensuite assembler les numerateurs, comme on vient d'enseigner; par exemple pour assembler $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$;

* 2^e Observation précédente.

on trouvera leurs équivalentes $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$ en même

dénomination : on fera l'addition de 8 & de 9

& on aura $\frac{17}{12}$ pour la somme des deux fractions

$\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$; ce qui est la même chose que 1 entier

& $\frac{5}{12}$.

DE LA SOUSTRACTION DES FRACTIONS.

ON peut soustraire ou retrancher une fraction d'une autre fraction, ou d'un ou de plusieurs entiers.

Pour soustraire une fraction, par exemple

$\frac{3}{7}$, d'une autre fraction $\frac{5}{7}$ de même dénomina-

tion ; il faut soustraire le numérateur, de l'autre

numérateur 5, & on aura pour reste $\frac{2}{7}$.

Si les Fractions ne sont pas en même dénomination, il faut les y réduire, & soustraire ensuite le numérateur de l'une, du numérateur de

l'autre ; par exemple pour ôter la fraction $\frac{2}{7}$ de

$\frac{3}{8}$, après les avoir réduites à même dénomina-

tion, on aura leurs équivalentes $\frac{16}{56}$ & $\frac{35}{56}$, & après avoir soustraits 16 de 35, on trouvera pour reste $\frac{19}{56}$.

Pour retrancher une fraction d'un ou plusieurs entiers, il faut réduire ces entiers en fraction de même dénomination que la fraction qu'on veut retrancher. Ensuite on soustrait le numérateur de l'une, du numérateur de l'autre, comme on vient d'enseigner : par exemple pour soustraire

$\frac{4}{5}$ de 3 entiers, après avoir réduit les trois entiers en cinquièmes, on aura $\frac{15}{5}$, dont $\frac{4}{5}$ étant ôté, reste $\frac{11}{5}$, & ainsi des autres.

On peut voir facilement par ce moyen laquelle de deux fractions inégales est la plus grande, & de combien l'une excède l'autre. On trouvera, par exemple que $\frac{3}{4}$ excède $\frac{2}{3}$ de la valeur de $\frac{1}{12}$.

Si on veut faire la preuve de l'addition de fractions, il faut retrancher du total chaque fraction qui a été assemblée; & après cela, s'il ne reste rien, on a bien réussi, s'il arrive autrement, on s'est trompé.

Pour faire la preuve de la soustraction des fractions, il faut ajouter ce qu'on trouve qui reste avec ce qu'on a retranché, & le total doit être

égal à la fraction dont on a retranché. Ces preuves ont le même fondement que dans les nombres entiers.

DE LA MULTIPLICATION DES FRACTIONS.

ON peut multiplier des fractions par des fractions, ou des entiers par des fractions; ou enfin des entiers & fractions par des entiers & fractions.

Pour multiplier des fractions l'une par l'autre, il faut multiplier leurs numérateurs l'un par l'autre; le produit qui en résultera sera le numérateur de la fraction qu'on cherche pour produit; il faut ensuite multiplier les dénominateurs l'un par l'autre, & le produit sera le dénominateur de la fraction qu'on cherche. Par exemple, pour multiplier

$\frac{4}{5}$ par $\frac{3}{8}$, on aura pour produit $\frac{12}{40}$,

& après l'avoir réduit à moindres termes, on

aura $\frac{3}{10}$.

Pour multiplier un nombre par une fraction; on réduira ce nombre en fraction; ce qu'on peut faire en deux manières; ou en mettant à ce nombre pour dénominateur 1, ou en le multipliant par le dénominateur de la fraction, comme on a enseigné. Ensuite on fera la multiplication de ces deux fractions. Par exemple, pour multiplier

plier 4 par $\frac{2}{3}$, il faudra multiplier $\frac{4}{1}$ par $\frac{2}{3}$ comme on vient d'enseigner, & on aura pour produit $\frac{8}{3}$.

Pour multiplier des entiers & fractions par des entiers & fractions; par exemple, pour multiplier $5\frac{1}{2}$ par $3\frac{2}{5}$, il faut réduire $5\frac{1}{2}$ dans une seule fraction, sçavoir $\frac{11}{2}$. Il faut pareillement réduire $3\frac{2}{5}$ en une seule fraction $\frac{17}{5}$. Ensuite on multipliera $\frac{11}{2}$ par $\frac{17}{5}$, ce qui est la même chose que de multiplier 5 & $\frac{1}{2}$ par 3 & $\frac{2}{5}$, on aura pour produit $\frac{187}{10}$.

DE LA DIVISION DES FRACTIONS.

ON peut diviser une fraction par une autre fraction, ou des entiers par une fraction, ou enfin des entiers & fractions par des entiers & fractions.

Pour diviser une fraction par une autre, il faut multiplier le numérateur de la fraction à diviser par le dénominateur de la fraction qui tient lieu

Aritmétique.

33

de diviseur, & ce produit sera le numérateur de la fraction qui est le quotient cherché. Ensuite il faut multiplier le numérateur de la fraction qui tient lieu de diviseur par le dénominateur de la fraction à diviser, & ce produit sera le dénominateur du quotient cherché; par exemple pour

diviser $\frac{2}{5}$ par $\frac{3}{5}$, il faut multiplier le numérateur 2 de la fraction $\frac{2}{5}$ par le dénominateur 5 de la fraction $\frac{3}{5}$, on aura 10 pour le numérateur du quotient, & on multipliera le dénominateur 3 de la fraction à diviser $\frac{2}{3}$, par le numérateur 5 du diviseur $\frac{3}{5}$, & on aura 9 pour dénominateur du quotient cherché, qui est $\frac{10}{9}$.

Pour diviser un entier par une fraction, on réduira cet entier en fraction, en mettant 1 pour dénominateur: par exemple, pour diviser 5 par

$\frac{4}{5}$, c'est la même chose que si on divise $\frac{5}{1}$ par

$\frac{4}{5}$, ce qu'on fera, comme on vient d'enseigner,

& on aura pour quotient $\frac{15}{4}$.

Pour diviser des entiers & des fractions par des entiers & des fractions, on réduira l'entier & la fraction à diviser, en une seule fraction. On réduira pareillement l'entier & la fraction qui

tient lieu de diviseur, en une seule fraction, & on fera ensuite la division, comme on vient d'en-

seigner. Par exemple pour diviser $6\frac{1}{2}$ par $5\frac{2}{3}$, s'est diviser $\frac{13}{2}$ par $\frac{17}{3}$, & on aura $\frac{39}{34}$ pour

quotient.

On fait la preuve de la multiplication des fractions comme dans les nombres entiers, en divisant le produit par une des fractions qui a été multipliée; & on doit trouver pour quotient l'autre fraction qui a été multipliée, si on a bien réussi.

On fait aussi la preuve de la division des fractions comme dans les nombres entiers, en multipliant la fraction qui est le quotient cherché, par la fraction qui est le diviseur; si on a bien réussi, le produit de cette multiplication est égal à la fraction à diviser.

Le produit d'une multiplication de fractions est plus petit que chacune des deux fractions, qui ont été multipliées l'une par l'autre; & le quotient d'une division de fractions est plus grand que la fraction à diviser. Le contraire de ces deux choses arrive dans la multiplication & dans la division des nombres entiers. On rendra raison de cela dans la suite.

S'il se rencontre des fractions de fractions:

par exemple, $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, pour les réduire à une

fraction simple; c'est à dire, pour connoître quelle est la fraction, qui vaut les deux tiers de quatre cinquièmes; il faut multiplier séparément le numérateur & le dénominateur de

$\frac{4}{5}$ par le dénominateur 3 de $\frac{2}{3}$, alors on aura $\frac{12}{15}$ qui est la même chose que $\frac{4}{5}$, puisqu'en réduisant $\frac{12}{15}$ à moindres termes, on trouve $\frac{4}{5}$. Or prenant 2 fois le tiers de $\frac{12}{15}$, on trouve $\frac{8}{15}$ qui est la valeur cherchée des deux tiers de $\frac{4}{5}$.

Après avoir multiplié le dénominateur 5 de la fraction $\frac{4}{5}$ par 3 dénominateur de la fraction $\frac{2}{3}$, on pouvoit se contenter de multiplier le numérateur 4 de la fraction $\frac{4}{5}$ par le numérateur 2 de la fraction $\frac{2}{3}$, on auroit aussi $\frac{8}{15}$, parceque ce numérateur 2 marque deux parties de son dénominateur 3. Au lieu que lorsqu'on multiplie 3 par 4, on a $\frac{12}{15}$, dont on se demande que 2 de ses trois parties égales, qu'on trouve en multipliant seulement 2 par 4.

On considérera donc comme une règle générale que pour réduire des fractions de fractions à des fractions simples, il faut multiplier les numérateurs de suite l'un par l'autre ; ce produit sera le numérateur de la fraction simple cherchée. On multipliera aussi de suite les dénominateurs l'un par l'autre, &c. ce

produit sera le dénominateur commun de la fraction simple qu'on cherche : par exemple , pour connoître la valeur ou la fraction simple

des $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$. Je dirai : 2 fois 3 font 6 ;

& 5 fois 6 font 30. Ensuite 3 fois 4 font 12 ; & 6 fois 12 font 72. Et partant la fraction simple cher-

chée est $\frac{30}{72} = \frac{5}{12}$. On agira de la même ma-

nere à l'égard des autres fractions de fractions.





E L E M E N S
 D E S
M A T H E M A T I Q U E S .
SECONDE PARTIE.
 DE
L'ALGEBRE.

DEFINITIONS D'ALGEBRE.

1. **L'**ALGEBRE est une partie fondamentale des Mathematiques, dans laquelle on traite des grandeurs considerées generalement.

2. La difference de deux grandeurs inégales est ce qui reste après avoir retranché de la plus grande une grandeur égale à la plus petite.

C O R O L L A I R E .

Donc lorsqu'on dit qu'une grandeur, par

60 *Seconde Partie.*

exemple a est contenuë dans une autre b , on peut être partie de cette grandeur b ; c'est à dire, qu'on considère dans la grandeur b une partie $c = a$, & qu'au lieu de a on prend * c partie de b , ou qui est contenuë dans b . Ensuite ce qu'on dit de c doit être entendu de a , puisqu'on peut prendre l'une pour l'autre.

3. Rapport ou raison est une comparaison d'une grandeur à une autre grandeur; & dans cette comparaison on fait attention à la manière d'être d'une de ces grandeurs au regard de l'autre.

A V E R T I S S E M E N T.

On peut comparer deux grandeurs entre elles en deux manières; 1^o, En faisant seulement attention à leurs différences; c'est à dire, en examinant de combien l'une surpasse l'autre, ou l'excez de l'une & le défaut de l'autre. 2^o, En considérant combien de fois, ou de quelle manière une grandeur en contient une autre; d'où il est évident qu'il y a deux sortes de rapports.

4. Rapport Arithmétique est une comparaison faite entre des grandeurs, dans laquelle on n'a égard qu'aux différences.

C O R O L L A I R E.

Donc il n'y a aucun rapport Arithmétique entre deux grandeurs de diverses espèces; mais seulement entre deux grandeurs de même espèce, comme entre un nombre & un nombre, un temps & un temps, un son & un son, une distance de chemin & une distance de chemin; & il n'y a

* *Demande première générale.*

point de rapport Arithmetique, par exemple, entre un mois & une lieue, puisqu'un mois n'est pas contenu dans une lieue, une grandeur ne pouvant * être contenue que dans une grandeur de même espèce.

5. Proportion Arithmetique est une égalité de la difference qui est entre deux grandeurs, & de la difference qui est entre deux autres grandeurs; c'est à dire, si l'excez d'une grandeur au dessus d'une autre est égal à l'excez d'une troisième grandeur au dessus d'une quatrième; ou bien si la premiere grandeur est surpassée par la seconde d'un excès égal à celui par lequel la 3^e grandeur est surpassée par la 4^e; on dit que ces quatre grandeurs sont en proportion Arithmetique: par exemple, 5, 2, 14, 11, &c. on les écrit ainsi, 5. 2. 14. 11. Ce qui signifie, 5 sont à 2 comme 14 à 11. Ou bien la grandeur 5 surpassé 2, de la même maniere que 14 surpassé 11.

6. Extrêmes proportionnelles, ou termes extrêmes sont la 1^{re} & 4^e grandeurs d'une proportion Arithmetique; & les moyennes proportionnelles ou termes moyens sont la 2^e & 3^e des 4 grandeurs de cette proportion.

A P P R E S S E M E N T.

Lorsque deux grandeurs moyennes proportionnelles sont égales, on réduit la proportion à trois termes, celui du milieu tenant la place de ces deux moyennes proportionnelles. Par exemple, si $a. b : b. c.$ on l'écrit ainsi — $a. b. c.$ ce qui signifie comme dans l'expression précédente, a est à b , comme b est à c .

* Cfr. *diff. 1. Algebr.*

7. Proportion continue est celle, qui est réduite à trois termes, à cause de l'égalité des termes moyens, comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

8. Progression Arithmétique est une suite de plus de trois grandeurs rangées de telle manière qu'elles soient toujours en augmentant, ou toujours en diminuant, de sorte que toutes les différences soient égales entre elles: par exemple, $5, 7, 9, 11, 13, \&c.$ ou bien $14, 10, 6, 2, \&c.$

C O R O L L A I R E.

Puisqu'il y a une différence égale entre tous les termes d'une progression; il est évident qu'en connoissant le premier terme avec la différence qui est entre les termes suivans de cette progression, on connoitra facilement chacun des termes de cette progression: par exemple dans cette progression, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, et $f = g$, &c.

1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. &c.

Si la différence qui est entre a & b est $m = 3$; celle qui est entre b & c est encore m ; & ainsi de suite. Or puisque le second terme b n'est que le premier a augmenté de la différence qui regne dans cette progression; connoissant le premier terme a avec la différence de cette progression, on connoitra b ; parceque $a + m = b$. Or connoissant b , on connoitra c ; parceque $a + m + m$, ou $a + 2m = c$. On connoitra de cette manière tous les autres termes.

Si la progression étoit en diminuant, au lieu de préposer $+$ aux différences, on mettroit $-$; par exemple, si $g = 4$ est la différence, on aura $b, b - g, b - 2g, b - 3g, \&c.$

18. 14. 10. 6. &c.

Parant on peut facilement exprimer la pro-

maniere des deux progressions precedentes ; d'une maniere qu'on verra dans tous les termes ce qu'ils ont de commun, & en quoi ils different

$$\frac{a}{1} : \frac{a+m}{4} : \frac{a+2m}{7} : \frac{a+3m}{10} : \dots$$

9. Rapport Geometrique est une comparaison faite entre deux grandeurs; & dans cette comparaison on considere de quelle maniere une grandeur en contient une autre ; ou de quelle maniere une grandeur est contenue dans une autre. Par exemple, si on compare 15 à 5, & qu'on fasse attention que le nombre 15 contient trois fois le nombre 5, ou que 5 est contenu trois fois dans 15 ; cette consideration, ou maniere de contenir est ce qu'on appelle *rappoit* ou *raison Geometrique*.

COROLLAIRE.

Donc il ne peut y avoir un rappoit Geometrique qu'entre deux grandeurs de même espece ; puisque * une grandeur ne peut contenir qu'une grandeur de même espece, ou être contenue que dans une grandeur de même espece. Par exemple, il n'y a aucun rappoit entre la distance de Noël à Pâque, & la distance de Paris à Rouen.

10. L'antecedent d'un rappoit est la grandeur qu'on compare à une autre ; & le consequent de ce rappoit est la grandeur à laquelle une autre est comparée.

11. Les termes d'un rappoit sont l'antecedent & le consequent.

AVERTISSEMENT.

C'est un usage dans les Mathematiques, lorsqu'on parle du rappoit d'une grandeur à une autre, sans determiner s'il est Arithmetique ou

* Cor. déf. 2. Algeb.

Geometrique, qu'on doit toujours entendre que c'est du rapport Geometrique dont on parle.

12. L'exposant d'un rapport est le quotient de l'antecedent divisé par le consequent. Par exemple, l'exposant du rapport de 30 à 10 est 3, parceque ce quotient 3 expose *quoties*, c'est à dire, combien de fois le nombre 30 contient le diviseur 10.

COROLLAIRE I.

Il suit de cette definition que les rapports sont entre eux comme leurs exposants; ou que tel est le quotient de la division de l'antecedent par le consequent, tel est le rapport de cet antecedent à ce consequent. C'est à dire, que si ce quotient est grand, ce rapport sera grand; si le quotient est petit, le rapport sera petit; enfin si le quotient de l'antecedent divisé par le consequent est égal au quotient d'un autre antecedent divisé par un autre consequent: le rapport du premier antecedent au premier consequent, sera égal au rapport du second antecedent au second consequent, ces rapports seront les mêmes; ces rapports seront semblables. Puisque * rapport n'est autre chose que la maniere de contenir ou d'être contenu; ce qui est exprimé par le quotient d'un terme de rapport divisé par l'autre terme. Par exemple, le rapport de 16 à 2 est plus grand que le rapport de 10 à 5, parceque le quotient de 16 divisé par 2 est plus grand que le quotient de 10 divisé par 5: 16 contenant 8 fois 2, & 10 contenant seulement 2 fois 5. Soit

pareillement $\frac{9}{6} = \frac{6}{4}$; cela exprime que le

*. Déf. 9. *Algeb.*

rapport de 9 à 6 est égal au rapport de 6 à 4 ; puisque le quotient de 9 divisé par 6 est égal au quotient de 6 divisé par 4. Ce qui fait voir que l'antecedent de l'un de ces rapports contient autant de fois ou de la même maniere son consequent, que l'antecedent de l'autre rapport contient son consequent.

COROLLAIRE II.

Reciproquement tel est le rapport d'un antecedent à son consequent ; tel est aussi le quotient de cet antecedent divisé par son consequent.

COROLLAIRE III.

Donc deux rapports égaux à un 3^e sont égaux entr'eux. Soit, par exemple, le rapport de b à c égal au rapport de d à f , & le rapport de g à h égal au même rapport de d à f : je dis que le rapport de b à c est égal au rapport de g à h . Car, [a] puisque le rapport de b à c est égal au rap-

port de d à f , on aura [b] le quotient $\frac{b}{c} = \frac{d}{f}$;

puisque [a] le rapport de g à h est égal au rapport de d à f , on aura pareillement le quotient

$\frac{g}{h} = \frac{d}{f}$. Donc [c] $\frac{b}{c} = \frac{g}{h}$; & partant [d] on

aura le rapport de b à c égal au rapport de g à h .

13. Proportion ou analogie, c'est la similitude ou égalité de deux rapports. On écrit une

[a] *Supposit.* [b] *Cor. 2. déf. pref.*

[c] *Ar. 18. gener.* [d] *Cor. 1. déf. pref.*

proportion de cette maniere, $24. 6 :: 16. 4.$ ou

$$\frac{24}{6} = \frac{16}{4}; \text{ ce qui signifie, } 24 \text{ Volt à } 6, \text{ comme}$$

16 à 4.

16. Les termes extrêmes d'une proportion sont le premier antecédent & le dernier conséquent; les termes moyens d'une proportion sont le premier conséquent & le second antecédent. Par exemple, si $a. b :: c. d.$ les termes extrêmes de cette proportion sont a & d , & les termes moyens sont b & c .

15. Une grandeur moyenne proportionnelle est celle qui étant répétée deux fois, tient lieu de termes moyens dans une proportion. Par exemple, si $3. 6 :: 6. 12.$ le nombre 6 sera la moyenne proportionnelle. On abrège cette Analogie de cette sorte $\text{---} 3. 6. 12.$ ce qu'on appelle Proportion continue.

16. Progression Geometrique est une suite de plus de trois grandeurs rangées de telle sorte que le rapport de la première à la seconde, est égal au rapport de la 2^e à la 3^e; & que le rapport de la 2^e à la 3^e, est égal au rapport de la 3^e à la 4^e, & ainsi du reste, ce qu'on écrit de cette maniere; $\text{---} 32. 16. 8. 4. 2.$ c'est à dire, 32 sont à 16, comme 16 à 8, &c. ou $\text{---} 5. 15. 45. 135,$ &c.

17. Rapport composé est celui dont l'exposant est égal au produit des exposants de plusieurs rapports. Par exemple, le rapport de 16 à 2 est composé du rapport du nombre 16 au nombre 8, de 8 à 4, & de 4 à 2. Car l'exposant du rapport du nombre 16 à 2, qui est 8, est égal au produit des exposants du rapport de 16 à 8, de 8 à 4, & de 4 à 2, qui sont $2 \times 2 \times 2 = 8.$

La composition du rapport de 16 à 2 peut

peut être considérée en plusieurs autres manières. On peut dire, par exemple, que ce rapport est composé du rapport de 16 à 12; de 12 à 8; de 8 à 6; &c. de 6 à 2: parce qu'on trouvera en effet que le produit des exposants de ces rapports multipliés de suite l'un par l'autre est égal au nombre 2 exposant du rapport de 16 à 2. Car

l'exposant du rapport de 16 à 12, qui est $1\frac{1}{3}$,

étant multiplié par l'exposant du rapport de 12 à

8, qui est $1\frac{1}{2}$; & le produit 2 de ces deux ex-

posants étant encore multiplié par l'exposant

du rapport de 8 à 6, qui est $1\frac{2}{3}$ produira $2\frac{2}{3}$;

enfin l'exposant 3 du rapport de 6 à 2 étant mul-

tiplié par ce dernier produit $2\frac{2}{3}$, il en resul-

tera un dernier produit 2 égal à l'exposant du rapport de 16 à 2.

18. Rapport doublé ou raison doublée, c'est un rapport composé de deux rapports égaux; rapport triplé est un rapport composé de trois rapports égaux; quadruplé, de quatre rapports égaux, &c. Par exemple, le rapport de 12 à 3 est doublé, étant composé du rapport de 12 à 6, &c. de 6 à 3, qui sont des rapports égaux.

19. Les grandeurs réciproquement proportionnelles, ou en raison ou rapport réciproque, sont celles qui servent de termes à une analogie,

2 Cor. 1. déf. 12. Algèbre.

& qui sont rangées de telle sorte que le premier antecedent d'un rapport, & le consequent de l'autre rapport se trouvent ensemble; c'est à dire, dans un même produit, ou dans une même fraction, ou qui appartiennent à une même grandeur; ou enfin, ce qui est la même chose, quand l'analogie commence dans une grandeur, & finit dans la même. Par exemple, les racines de ces deux produits $a b$ & $c d$ sont en raison reciproque, ou reciproquement proportionnelles, si $a, c :: d, b$, ou si $a, d :: c, b$. Pareillement les numerateurs & denominateurs de ces deux fractions

$\frac{f}{g}$ & $\frac{x}{z}$ sont en raison reciproque, si $f, x :: g, z$.

g. Pour entendre encore mieux ceci, il faut seulement remarquer qu'on commence le raisonnement dans une grandeur, qu'on le continue dans la seconde, & que de la seconde on revient à la premiere dans laquelle on finit.

20. Proposition converse ou reciproque d'une autre proposition, est celle dans laquelle on suppose comme constant & certain ce qui étoit en question, ou ce qu'on cherchoit dans l'autre proposition; & dans laquelle on prétend conclure & démontrer ce qui étoit supposé comme certain & constant dans cette autre proposition. Par exemple, soit cette proposition: *Si une grandeur est égale à une autre; la moitié de la premiere sera égale à la moitié de la seconde.* Sa converse sera telle. *Si la moitié d'une grandeur est égale à la moitié de l'autre grandeur; la premiere grandeur sera égale à la seconde.*

21. Nombre pair est celui qu'on peut diviser en deux parties égales sans fraction ou sans reste; & le nombre impair est celui qu'on ne peut par-

ager en deux parties égales sans reste, ou sans fraction; par exemple, 6 est un nombre pair, 7 est impair.

12. Equation ou égalité est une double expression d'une grandeur, ou une grandeur exprimée en deux manieres, ou deux expressions de deux grandeurs égales. Par exemple $4x + 24 = 44$, c'est une équation, c'est à dire, une double expression; car $4x + 24$ est une expression, & 44 en est un autre. Cependant $4x + 24$ est la même chose que 44, dans la supposition qu'on fait que $4x + 24 = 44$. On appelle membres ou parties d'une équation ce qui est de part & d'autre du signe d'égalité $=$; par exemple $4x + 24$ & 44 sont les membres de cette équation $4x + 24 = 44$.

DEMANDES D'ALGEBRE.

1. On a de coutume d'employer de petites lettres de l'alphabet, pour les expressions dont on se sert en Algebre. Les grandeurs connues sont ordinairement exprimées par les premières lettres de l'alphabet; & les grandeurs inconnues, par les dernières lettres de l'alphabet.

2. Si on veut exprimer une grandeur prise un certain nombre de fois, on met devant la lettre qui exprime cette grandeur, un chiffre qui exprime combien de fois cette grandeur doit être prise. Par exemple $2a$ signifie la grandeur a prise deux fois; de même $4b$, ou $6b$ signifie le quadruple, ou le sextuple de b ; & ainsi du reste.

3. Une lettre qui ne paroît point être précédée d'aucun signe est toujours supposée être précédée de ce signe $+$, parcequ'alors on ne conçoit pas qu'elle soit retranchée. Ainsi dans cette expression $b + d$ je peux mettre $+$ devant b , c'est à dire,

$+b + d$, ce qui sera la même chose que $b + d$

4. Quand il y a un signe interposé entre deux grandeurs ; par exemple $f + g$, ce signe est toujours attribué à la grandeur qu'il précède. Dans cet exemple $+$ est attribué à g , & cela signifie f plus g ; de même s'il y avoit $-$.

5. Une grandeur exprimée par une lettre, qui n'est précédée d'aucun chiffre, est censée être précédée par 1 ; par exemple a est la même chose que $1 a$.

6. Le changement de position dans les chiffres écrits de suite, cause une diversité dans les nombres ; par exemple 12 est différent de 21, quoique ce ne soient que les mêmes chiffres transposés. Les grandeurs peuvent être écrites l'une devant l'autre indifféremment, & sans que la valeur de l'expression change ; par exemple, $4c + b = b + 4c$. $ab = ba$, & ainsi des autres.

AXIOMES D'ALGÈBRE.

1. Une grandeur précédée du signe $+$, & une pareille grandeur précédée du signe $-$ sont ensemble égales à zéro, ou rien ; par exemple $+f - f = f - f = 0$; c'est à dire, plus f & moins f ne font rien.

S'il se trouve dans une expression deux grandeurs précédées des signes contraires, on réduira cette expression à une plus simple, ou plus courte, suivant ce premier Axiome. Par exemple $aa + ab - ab - cc$ sera réduite à celle-ci qui lui est équivalente $aa - cc$; puisque $ab - ab = 0$.

2. La plus grande de deux grandeurs moins la différence est égale à la plus petite ; & la plus petite plus la différence est égale à la plus gran-

de Par exemple, si $a > b$, & que la difference soit c , on aura $a - c = b$, ou bien $b + c = a$.
 Donc, s'il est necessaire pour une demonstration, par-tout où on trouvera a , on pourra substituer $b + c$; & par tout où on trouvera b , on pourra mettre $a - c$.

DE L'ADDITION DES GRANDEURS

EXPRIMÉES GÉNÉRALEMENT.

Quand on veut ajouter ensemble des grandeurs, dont chacune est exprimée par une ou plusieurs lettres, il suffit de les écrire de suite sans rien changer à leurs signes : c'est une regle generale pour l'Addition. Par exemple, pour assembler a avec $2a$ & avec $3a$, on écrira $a + 2a + 3a$; pour assembler $a - b + c$ avec $2a + 2b + 4c$, on écrira seulement $a - b + c + 2a + 2b + 4c$; & pour abréger ces expressions lorsque cela est possible, il faut écrire ces grandeurs l'une au dessous de l'autre, & observer trois choses.

1°. Que les grandeurs exprimées par des lettres semblables, & qui ont les mêmes signes, doivent être ajoutées ensemble; & que leur somme soit précédée du signe qui précédoit chacune en particulier. Par exemple, si on veut

* Première demande generale.

ajouter ces grandeurs $3a$ avec
 $a b - d$ avec $a - b$, on aura
 pour la somme $4a - 3b - d$;

EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} 3a - 2b - d \\ a - b \\ \hline 4a - 3b - d \end{array}$$

AUTRES EXEMPLES.

$3b$	a	$4d$	$8c$	ab
b	b	x	$4d$	bx
$2b$	a	$8d$	m	cx
				cx

$6b$	$a + b + c$	$12d + x$	$8c + 4d + m$	$ab + bx + 2cx$
------	-------------	-----------	---------------	-----------------

2°. Si les grandeurs égales ou exprimées par des lettres semblables sont précédées par des signes différents, c'est à dire, par $+$ ou $-$; au lieu d'assembler ces grandeurs, ces signes font connaître qu'elles doivent être retranchées l'une de l'autre. Or dans cette circonstance, après avoir retranché la valeur du plus petit chiffre, qui précède une de ces grandeurs ainsi exprimées, de la valeur du chiffre qui précède l'autre; on conserve à ce qui reste le signe, qui appartenait à la grandeur précédée du plus grand chiffre. Par exemple pour assembler $8b$ avec $-5b$; ce signe $-$ marque qu'il ne faut point assembler $5b$ avec $-5b$, mais plutôt retrancher $5b$ du nombre $8b$; &c au lieu de la somme qu'on auroit eue, on aura $3b$ pour reste.

3°. Lorsque dans l'expression d'une grandeur on trouve une lettre précédée du signe $+$, &c une autre semblable précédée du signe $-$; ces deux lettres

lettres doivent être effacées ; soit par exemple $a - b + c + b$; cette expression renferme $-b$ & $+b$. Or * plus & moins la même grandeur n'est rien. Ainsi après avoir effacé $-b$ & $+b$, on aura $a + c$, qui est la même chose que $a - b + c + b$.

COROLLAIRE.

Il suit de ces observations que, si on veut ajouter ensemble plusieurs grandeurs ; par exemple $f - g + h$ avec $2f + g - h$; suivant la règle générale après les avoir écrites de suite avec leurs signes, on aura $f - g + h + 2f + g - h$; & que s'il se trouve des grandeurs égales ou semblables précédées de chiffres égaux, & de signes contraires, comme dans cet exemple où on trouve $-g$ & $+g$, $+h$ & $-h$, on effacera deux à deux ces grandeurs semblables, & on aura $3f$ pour la somme de ces mêmes grandeurs.

Lorsque les grandeurs exprimées par les mêmes lettres seront précédées de chiffres inégaux avec des signes contraires, on retranchera, comme on a dit, la valeur du plus petit de ces chiffres de la valeur de l'autre, & on mettra au reste le signe qui appartenait au plus grand de ces chiffres. Par exemple, si on veut ajouter $a + b - 3$ avec $2a - 3b + 8$, on aura $a + b - 3 + 2a - 3b + 8$; on effacera $+b$, & * dans la grandeur $-3b$ on retranchera & effacera $-b$; il restera encore $a - 3 + 2a - 2b + 8$; on effacera encore -3 ; & dans le nombre $+8$, on effacera

* Ar. I. d'Algebre, page 70.

74

aussi $+ 9$,
 & il restera $a + 2a$
 $- 2b + 7$.
 Enfin on
 assemblera
 a avec
 $+ 2a$, &
 on aura
 $3a - 2b$
 $+ 7$, pour
 la somme
 ou total des grandeurs $a + b - 3$ & $2a - 3b$
 $+ 8$.

Seconde Partie.

EXEMPLE

$$\begin{array}{r} a + b - 3 \\ 2a - 3b + 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a + b - 3 + 2a - 3b + 8 \\ a - 3 + 2a - 2b + 8 \\ 3a - 2b + 7 \end{array}$$

Somme $3a - 2b + 7$.

AUTRE EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} 3ab + bc - 3bh \\ 4ab - 2bc + 2bh \\ 2ab + 4bc - fg \end{array}$$

Somme $5ab + 3bc - bh - fg$.

AUTRES EXEMPLES.

$$\begin{array}{r|l} a + 4d & a + 5ab + b \\ 3 - d & a + ab + 6 \end{array}$$

Somme $2a + 3d \quad | \quad 2a + 4ab$.

Pour abréger la règle générale qu'on a établie pour l'addition on écrira l'une sous l'autre les grandeurs qu'on veut assembler avec leurs signes de $+$ ou de $-$. On mettra chaque grandeur littérale sous celle qui lui est semblable,

* Suivant la première des observations précédentes, p. 71.

comme il a été enseigné dans l'addition des nombres. On ajoutera ensemble tous les nombres qui précèdent les grandeurs semblables qui ont le même signe $+$, & qu'on a écrite l'une sur l'autre. On fera la même chose des nombres qui précèdent les grandeurs semblables qui ont le même signe $-$, s'il y en a. Enfin s'il n'y a point de grandeurs semblables, qui aient différents signes; ensuite de la somme des chiffres, qui ont précédé celles qui avoient les mêmes signes, on écrira la lettre qui étoit précédée de chaque chiffre en particulier. Et s'il y a des grandeurs semblables qui aient différents signes, on soustraira la plus petite somme de la plus grande, & on écrira le reste avec le signe qui précédoit la plus grande.

DE LA SOUSTRACON DES GRANDEURS.

EXPRIMÉES GÉNÉRALEMENT.

LORSQU'ON veut soustraire une grandeur d'une autre, il suffit de changer tous les signes de la grandeur qu'on veut soustraire, & d'ajouter ensuite cette grandeur à celle dont on vouloit faire cette soustraction, de la manière qu'on le vient d'enseigner; la somme qui en résulte est le reste qu'on cherche par cette soustraction.

Par exemple pour soustraire $4a - 3b$ de $7a + 6b$, en changeant les signes de $4a - 3b$, je trouve $-4a + 3b$, & l'ajoutant à $7a + 6b$,

EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} a: 7a + 6b \\ \text{moins} 4a - 3b \\ \hline \text{reste} 3a + 9b. \end{array}$$

G ij

je trouve $3a + 9b$, qui est le reste que je cherche par cette operation.

A U T R E E X E M P L E .

$$\begin{array}{l} \text{de.} \quad 2a - 4b + c - 3d \\ \text{ôter} \quad a + 7b - 4c + 2m. \end{array}$$

$$\text{reste.} \quad a - 11b + 5c - 3d - 2m.$$

Pour être persuadé qu'en changeant les signes de la grandeur à retrancher, & faisant ensuite une addition, il résulte une soustraction; il faut considérer que dans le premier exemple, au lieu de $+4a$ on met $-4a$, ce qui marque clairement une soustraction; au lieu de $-3b$ on met $+3b$, cela fait encore voir une soustraction ou negation de la negation $-3b$, ce qui fait la grandeur affirmative ou positive $+3b$. La même chose paroîtra évidemment à l'égard des autres exemples.

DE LA MULTIPLICATION DES GRANDEURS EXPRIMÉES GÉNÉRALEMENT.

IL y a deux suppositions ou demandes particulières pour la Multiplication.

1. Pour exprimer le produit de grandeurs multipliées l'une par l'autre; par exemple de la grandeur a multipliée par la grandeur b , on écrit ces grandeurs l'une auprès de l'autre, c'est.

à dire, ab ou ba , qui est l'expression du produit de a multiplié par b . Si je veux multiplier ces grandeurs b, d, c , l'une par l'autre; je multiplie d'abord b par d , ce qui fait bd , & en suite je multiplie bd par c , & je trouve bdc qui exprime le produit que je cherche. Je pourrais aussi multiplier c par d , ou d par c , & multiplier le produit cd par b pour avoir $cd b$ qui est le même produit que bdc , ou bcd . Quoiqu'il soit indifférent d'écrire ba , ou ab , pour exprimer le produit de a multiplié par b ; cependant l'usage est qu'on arrange ces lettres de telle maniere que les premières de l'Alphabeth soient prononcées ou écrites les premières; ainsi je mettrai plutôt ab , & de même des autres produits.

2. Lorsqu'il se rencontre un produit de plusieurs grandeurs égales ou exprimées par les mêmes lettres, par exemple aaa ; on abrège cette expression en cette maniere a^3 , qui signifie la même chose que aaa . De même au lieu de bbb , on peut mettre b^3 ; & ainsi des autres, en écrivant un peu plus haut le chiffre qui suit la lettre.

Il est donc évident que ces deux expressions $a + b$ & ab ne signifient pas la même chose; puisque $a + b$ signifie seulement que a est ajouté à b ; & que ab signifie que a est multiplié par b . Si je veux que a vaille 6 & que b vaille 5; la première expression $a + b$ vaudra $6 + 5 = 11$, & la seconde ab vaudra $6 \times 5 = 30$.

Il faut bien prendre garde aussi à ne pas prendre cette expression $3d$ pour celle-ci d^3 . Car $3d$ n'est que la somme de 3 grandeurs égales dont chacune est appellée d , ou 3 fois la même grandeur d ; & d^3 signifie que le produit de d multi-

plié par d , qui est dd , est encore multiplié par la même grandeur d . Si je veux que d vaille 5, $3d$ vaudront $5 + 5 + 5 = 15$, & d^3 vaudra 125.

AVERTISSEMENT.

1. Lorsqu'on multiplie l'une par l'autre, des grandeurs qui ont des signes semblables, c'est à dire $+$ & $+$, ou $-$ & $-$; leur produit doit toujours avoir le signe $+$, & si elles ont des signes differens, leur produit doit avoir le signe $-$.

Pour bien entendre cela, il faut premièrement remarquer que multiplier une grandeur par une autre, c'est ^[1] repeter ou prendre cette grandeur autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre. Or on peut prendre une grandeur plusieurs fois en deux manieres, sçavoir pour l'ajouter plusieurs fois & en faire un total positif & affirmatif; ou pour la retrancher plusieurs fois & en faire un total negatif.

Soient par exemple $+c = 4$ & $+d = 5$; si je multiplie $+c$ par $+d$, le produit de ces deux grandeurs sera $cd = 20$, qui aura le signe $+$. Parceque les signes qui precedent c & d étant tous deux affirmatifs, par cette multiplication j'ajouterai c autant de fois à lui même qu'il y a d'unités dans la grandeur d ^[1]; ou bien j'ajouterai d à lui même autant de fois qu'il y a d'unités dans c , ce qui revient à la même chose. Il ne doit donc paroître dans cette circonstance aucun signe de négation. Donc $+$ multiplié par $+$ donne au produit $+$.

[1] Définition de la multiplication, page 21.

Soient

Soient presentement deux grandeurs qui ayent des signes négatifs ; par exemple, $-f$ & $-g$; si je multiplie $-f$ par $-g$, leur produit sera fg qui aura le signe $+$. Parceque les signes qui precedent f & g étant tous deux négatifs, l'un montre qu'au lieu d'ajouter l'autre grandeur plusieurs fois, il faut la retrancher plusieurs fois. Dans cet exemple $-g$ exprime qu'il faut retrancher $-f$ autant de fois que $-g$ exprime ou contient d'unités ; or retrancher ou nier $-f$ plusieurs fois, c'est affirmer ou mettre plusieurs fois $+f$; cette négation de négation est une affirmation. Ce qui est clair, puisque pour exprimer la soustraction d'une grandeur qui a déjà le signe $-$, je dois lui donner le signe $+$. Car le signe $-$ exprime que cette grandeur doit être retranchée. Or ensuite si je ne veux pas la retrancher, je dois lui ôter le signe $-$, & la laisser dans son état réel, affirmatif & positif. Afin d'exprimer ce dernier état, il faut donc en donner une marque qui est le signe $+$. Quand je multiplie -3 par -7 , je cherche combien de fois je dois retrancher la soustraction, ou négation que je m'étois proposé de faire de 7. Je trouve que je prens la resolution, ou que je me propose, de ne point ôter une fois 7, encore une fois 7, & encore une fois 7. C'est à dire que je veux laisser 7 trois fois, ce qui doit enfin produire $+21$. Donc $-$ multiplié par $-$ donne pour produit $+$.

2. Lorsque de deux grandeurs à multiplier il y en a une precedée du signe $+$ & l'autre du signe $-$; le produit doit toujours être precedé du signe $-$. Par exemple, soit $+e$ à multiplier par $-m$, ou $-m$ par $+e$, ce qui est la même

chose ; le produit de ces deux grandeurs sera $-sm$. Parceque la grandeur precedée du signe $-$, exprime qu'il faut retrancher plusieurs fois celle qui est precedée du signe $+$, comme dans cet exemple, $-m$ exprime qu'il faut retrancher $+s$ autant de fois que m exprime d'unitez. Le produit qui n'est que l'addition de tous ces retranchemens doit donc être precedé du signe négatif ou de soustraction $-$. Supposons que $+s = +5$, & que $-m = -2$. Quand je multiplie -2 par $+5$, je cherche combien il faut que je retranche pour retrancher moins deux fois 5 , je trouve qu'il faut retrancher $+5$, & encore $+5$; c'est à dire qu'il faut retrancher 10 , & pour l'exprimer j'écris -10 . Je peux de même dire que la grandeur precedée du signe $+$, exprime combien de fois il faut repeter ou affirmer la négation de la grandeur qui est precedée du signe $-$.

E X E M P L E I.

$$\begin{array}{r} a - 3d \\ 3a - 4d \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3aa - 9ad \\ -4ad + 12dd \end{array}$$

Prod. $3aa - 13ad + 12dd$

Soient ces deux grandeurs $a - 3d$ & $3a - 4d$, à multiplier l'une par l'autre, il faut les écrire l'une au dessous de l'autre. Il est indifferent de commencer à multiplier de gauche à droit, ou de droit

Algebre.

ou de droit à gauche. Si on commence de droit à gauche, cette multiplication aura plus de ressemblance à la multiplication ordinaire par chiffres : mais parceque lorsqu'on commence de gauche à droit, on arrange plus facilement les produits; c'est pour cela que nous commencerons de gauche à droit par la grandeur a , disant : $1a$ multiplié par $3a$ produit $3aa$; car on multiplie d'abord l'un par l'autre les chiffres qui precedent chaque lettre : comme dans cet exemple on multiplie 1 par 3 , ce qui produit 3 ; & ensuite de ce 3 on écrit a & a proche l'un de l'autre. Après cela multipliant $-3d$ par $+3a$, cela * produit $-9ad$, qu'on écrit avec son signe après $3aa$,

Il faut passer ensuite à la seconde partie de la grandeur $3a - 4d$, qui est $-4d$, disant : $+a$ multiplié par $-4d$ produit $-4ad$, que j'écris sous $-9ad$; parceque $-9ad$ est déjà une grandeur semblable. S'il n'y en avoit point de semblables, on pourroit écrire ce dernier produit $-4ad$ sous $3aa$ ou ailleurs indifféremment. Ensuite il faut dire $-3d$ multipliez par $-4d$ produisent $+12dd$ qu'il faut écrire après le produit $-4ad$. Enfin selon ce qu'on a enseigné dans l'addition après avoir ajouté ces produits, on trouvera pour le produit total qu'on cherche, $3aa - 13ad + 12dd$, qui résulte de la grandeur $a - 3d$ multipliée par $3a - 4d$.

E X E M P L E II.

Pour multiplier $ab + 4bc - fg$ par $h + 2m$, il faut dire ab multiplié par h , produit abh qu'il faut écrire. $+4bc$ multiplié par h produit

* 2^e Partie de l'avertissement précédent, page 78.

$+ 4bc$ qu'il faut écrire ensuite de abh . — fg multiplié par $+ h$ produit $— fgh$, il faut aussi écrire ce dernier produit, ensuite des autres.

$$\begin{array}{r} ab + abc - fg \\ b + 2m. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} abb + abch - fgh \\ 2abm + 8bcm - 2fgm. \end{array}$$

$$\text{produit } abb + abch + 2abm - fgh + 8bcm - 2fgm.$$

Après cela il faut multiplier $ab + 4bc - fg$ par $2m$, disant : ab multiplié par $2m$ produit $2abm$, qu'on écrira où on voudra, parceque dans le rang des autres produits il n'y en a point de semblables à ce dernier. On continuera, disant : $+ 4bc$ multiplié par $+ 2m$, produit $8bcm$, qu'on écrira ensuite du produit précédent. Enfin $— fg$ multiplié par $+ 2m$, produit $— 2fgm$, qu'il faut pareillement écrire. Après avoir fait l'addition de tous ces produits, on trouvera que le produit qu'on cherche est $abb + abch + 2abm - fgh + 8bcm - 2fgm$.

AUTRES EXEMPLES.

$$\begin{array}{r} a + b + c \\ \text{par } a + b - c \end{array}$$

$$\begin{array}{r} aa + ab + ac \\ ab + bb + bc \\ - ac - bc - cc \end{array}$$

$$aa + 2ab + bb - cc$$

$$ac + gb + fm$$

$$ad - gn + mm$$

$$acdd + ddgb + ddgm$$

$$- acgn - gbn - fgmm$$

$$+ acmm + gmm + fm^2$$

$$acdd + ddgb + ddgm - acgn - gbn - fgmm$$

$$+ acmm + gmm + fm^2$$



DE LA DIVISION DES GRANDEURS

EXPRIMEES GENERALEMENT.

AVERTISSEMENT.

DANS la Multiplication on est convenu que pour exprimer le produit de plusieurs grandeurs multipliées entr'elles, on les écriroit l'une auprès de l'autre : la Division étant entièrement opposée à la Multiplication, on est pareillement convenu que pour diviser une grandeur par une autre, on effaceroit dans la grandeur à diviser les lettres qui s'y pourroient trouver semblables à celles du diviseur, & qu'on prendroit pour quotient les lettres qui resteroient. Par exemple, pour diviser *ef* par *c*, on a pour

quotient f ; pour diviser $a d e$ par d on a pour quotient $a e$.

E X E M P L E S.

$$\frac{\text{grandeur à diviser } e f}{\text{diviseur } d} \left\{ \begin{array}{l} f \text{ quotient} \end{array} \right.$$

$$\frac{\text{grandeur à diviser } a d e}{\text{diviseur } d} \left\{ \begin{array}{l} a e \text{ quotient} \end{array} \right.$$

1. Lorsque la grandeur à diviser & le diviseur sont précédés des mêmes signes, leur quotient doit toujours être précédé du signe $+$.

Soit une grandeur $+ b g$ à diviser par $+ d$, le quotient sera $+ g$; parceque, 1^o. la grandeur $b g$ est [¹] précédée du signe $+$; 2^o. le diviseur d est [²] aussi précédé du signe $+$; 3^o. enfin le diviseur & le quotient sont [³] les deux racines qui ont produit la grandeur à diviser $b g$. Il suit donc nécessairement que le quotient soit aussi précédé du signe $+$. Car si le quotient étoit précédé du signe $-$; puisque la grandeur à diviser n'est que le produit du diviseur par le quotient, ce produit $b g$ seroit précédé du signe $-$, ce qui seroit contre la supposition, qui est que $b g$ est précédé de $+$.

[¹] Par la supposition présente.

[²] Coroll. 3. de la Division des nombres en Arithmétique, page 42. & sup. 1. de la Multip. des grandeurs littérales, page 76.

Algebra.

Soit encore la grandeur $-m$ à diviser par $-n$, le quotient sera $+m$ par la même raison qu'on vient de dire. Car 1°. le diviseur n est (1) précédé du signe $-$. 2°. La grandeur à diviser m est (1) précédée du signe $-$. 3°. Le diviseur & le quotient sont deux grandeurs qui étant multipliées l'une par l'autre produisent $-m$. C'est donc une nécessité que le quotient m soit précédé du signe $+$, parceque s'il étoit précédé du signe $-$, le produit de ce quotient par ce diviseur savoir m seroit (2) précédé du signe $+$, ce qui seroit contre la supposition.

3. Lorsque la grandeur à diviser & le diviseur sont précédés des signes différens, leur quotient sera précédé du signe $-$.

Soit par exemple ad à diviser par $-a$, le quotient sera $-d$. 3°. Le diviseur est précédé du signe $-$, c'est donc une nécessité que le quotient soit aussi précédé du signe $-$, afin que le produit du diviseur $-a$ par le quotient soit la même chose que la grandeur à diviser ad . On feroit un pareil raisonnement s'il falloit diviser $-op$ par $+p$, & on auroit pour quotient $-o$.

E X E M P L E S.

Soit la grandeur $dg + gf + db + fb$ à diviser par $d + f$. Il faut écrire ce diviseur $d + f$ dessous la grandeur à diviser. On peut commencer de gauche à droit, & dire, le signe $+$ qui précède dg , divisé par le signe $+$ qui précède d dans le diviseur, donne au quotient $+$; ensuite d divisé par d , donne pour quo-

(1) Par supp.

(2) Part. 1. de l'arithm. de la multip. litt. page 77.

tient g , on écrira
 g au quotient.
 Ensuite multi-
 pliant le quo-
 tient $+g$ par la
 grandeur $+f$

$$\begin{array}{r} \\ -dg - gf \\ dg + gf + dh + fh \\ \hline d + f \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} \\ -dg - gf \\ dg + gf + dh + fh \\ \hline d + f \end{array}} \right\} g$$

du diviseur, cela produit gf , qu'il convient retrancher, & partant on lui prépose le signe $-$, & on cherche s'il y a dans la grandeur à diviser quelque grandeur de même genre; & dans cet exemple on trouve $+gf$; au dessus de cette grandeur on écrit $-gf$, qui est le produit précédent retranché. Ensuite ces deux grandeurs semblables étant précédées de chiffres égaux & de signes différens, selon ce qu'on a enseigné dans l'addition, elles se détruisent, on les tranche, & il ne reste rien, on écrit o au dessus. Ensuite le quotient $+g$ étant multiplié par l'autre partie $+d$ du diviseur, produit $+dg$ qu'il faut retrancher, & pour cela on prépose le signe $-$, & on écrit $-dg$ au dessus de la grandeur semblable $+dg$. Ces deux grandeurs se détruisant à cause de leurs signes différens, on les efface & au dessus on écrit o .

Il reste encore $+dh + fh$ à diviser, on dira $+d$ qui précède dh , divisé par $+f$, qui précède $d + f$, donne au quotient $+h$. Ensuite dh divisé par d , donne pour quotient h ; il faut écrire $+h$ au quotient. $+h$ qu'on vient d'écrire au quotient multiplié par $+f$ du diviseur, produit $+fh$ qu'il faut retrancher, & pour cela lui préposer le signe $-$. Et après cela il faut examiner dans la grandeur à diviser s'il se trouve quelque grandeur semblable à fh , on y trouve $+fh$, au dessus on écrit $-fh$, de sorte que ces deux grandeurs par l'addition se détruisent,

$$\begin{array}{r} \overset{\circ}{-}dg - \overset{\circ}{-}gf - \overset{\circ}{-}db - \overset{\circ}{-}fb \\ \underline{dg + gf + db + fb} \\ d + f \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} \overset{\circ}{-}dg - \overset{\circ}{-}gf - \overset{\circ}{-}db - \overset{\circ}{-}fb \\ \underline{dg + gf + db + fb} \\ d + f \end{array}} \right\} g + b$$

lent, on les efface, & au dessus on écrit 0. En
 fin on multiplie $+h$ qui est au quotient par
 $+d$ qui est au diviseur, cela produit $+db$,
 qu'on retranche, & pour cela on prepose le
 signe $-$, & on l'écrit au dessus de la grandeur
 semblable $+db$: ces deux grandeurs se dé-
 truisant, on les tranche, & on écrit 0 au dessus.
 Partant la grandeur $dg + gf + db + fb$
 étant divisée par $d + f$, donne pour quotient
 $g + h$.

AUTRE EXEMPLE.

Pour diviser la grandeur $cc + 2cf + ff$ par $c + f$, après avoir écrit le diviseur $c + f$ au dessous, il faut dire

$$\begin{array}{r} \overset{\circ}{+}cc + \overset{\circ}{+}cf \\ \underline{-cc - cf} \\ cc + 2cf + ff \\ \underline{c + f} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} \overset{\circ}{+}cc + \overset{\circ}{+}cf \\ \underline{-cc - cf} \\ cc + 2cf + ff \\ \underline{c + f} \end{array}} \right\} c$$

$+cc$ divisé par $+c$, donne pour quotient $+c$. Ensuite $+c$ qui est au quotient multiplié par $+f$ qui est au diviseur, produit $+cf$ qu'il faut retrancher; & pour cela il faut lui preposer le signe $-$, & écrire $-cf$ au dessus de $+2cf$. Ensuite par l'addition de ces deux grandeurs il restera $+cf$ qu'on écrira au dessus de $-cf$, & on tranchera $-cf$ & $+2cf$; ensuite on multipliera $+c$ qui est au quotient par $+c$ qui est au diviseur, & on

aura pour produit $+cc$, qu'on retranchera en l'écrivant avec le signe $-$ au dessus de c , & par l'addition ces deux grandeurs se détruisant, on les effacera, & au dessus on écrira o .

Il restera encore à diviser $+cf+ff$; on dira $+cf$ divisé par $+c$ donne au quotient $+f$, or $+f$ du quotient multiplié par $+c$ du diviseur produit $+cc$ qu'on retranchera de la grandeur

$$\begin{array}{r} o \\ -cf \\ o + cf \\ -cc - cf - ff \\ \hline cc + 2cf + ff \\ c + f \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} o \\ -cf \\ o + cf \\ -cc - cf - ff \\ \hline cc + 2cf + ff \\ c + f \end{array}} \right\} c + f$$

à diviser en écrivant $-ff$ au dessus de $+ff$; ces deux grandeurs se détruisant on les effacera, & on écrira o au dessus. Enfin $+f$ du quotient multiplié par $+c$ du diviseur, produit $+cf$, qu'on retranchera de $+cf$, en écrivant au dessus $-cf$, ces deux grandeurs se détruisant on les effacera, & on écrira o au dessus. Et partant la grandeur $cc + 2cf + ff$ étant divisée par $c + f$ donnera au quotient $c + f$.

AUTRE EXEMPLE.

Pour diviser la grandeur $dd - ee$ par $d + e$, il faut dire $+dd$ divisé par $+d$ donne pour quotient $+d$. Or $+d$ qu'on vient d'écrire au quotient multiplié par $+e$ qui est au diviseur produit $+de$ qu'il faut retrancher, & pour cet effet lui preposer le signe $-$, mais comme dans la grandeur $dd - ee$ on ne trouve

$$\begin{array}{r} o - de \\ -dd \\ dd - ee \\ \hline d + e \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} o - de \\ -dd \\ dd - ee \\ \hline d + e \end{array}} \right\} d$$

point de grandeur semblable à ce produit $-de$, on l'écrira cependant à l'écart au dessus de $-ee$. Ensuite $+d$ qui est au quotient étant multiplié par $+d$ qui est au diviseur, produit $+dd$ qu'on retranchera de la grandeur à diviser, en écrivant $-dd$ au dessus de la grandeur $+dd$ qui s'y rencontre. Ces deux dernieres grandeurs se détruisant, on les effacera & on écrira o au dessus.

Il reste encore à

diviser $-de$ & $-ee$.

On dira, $-de$ divisé

par $+d$ donne pour

quotient $-e$. Or $-e$

étant multiplié par $+e$

produit $-ee$ qu'il faut

retrancher; pour re-

trancher $-ee$ il faut

écrire $+ee$, comme

on a enseigné dans la

soustraction. On écrira

donc $+ee$ au dessus de la grandeur $-ee$ qui

se rencontre dans la grandeur à diviser; mais

comme ces deux grandeurs $-ee$ & $+ee$ se dé-

truisent, on les effacera & on écrira o au

dessus. Enfin $-e$ qui est au quotient, mul-

tiplié par $+d$ qui est au diviseur produit

$-de$ qu'il faut retrancher en lui préposant le

signe $+$, & comme il s'en rencontre une de

même espece dans la grandeur à diviser, sça-

voir $-de$, on écrira au dessus ce produit $+de$;

ces deux grandeurs se détruisant on les efface-

ra, & on mettra o au dessus pour marquer qu'il

ne reste rien. Et partant la grandeur $dd - ee$;

étant divisée par $d + e$, le quotient est $d - e$;

& il ne reste rien.

$$\begin{array}{r}
 o \\
 +dd \\
 -de \\
 o \\
 -dd + ee \\
 dd - ee \\
 \hline
 d + e
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \right\}
 d - e$$



AUTRE EXEMPLE

$$\begin{array}{r}
 -4aab \\
 -8a^3 \\
 \hline
 8a^3 - a^2b + \frac{1}{2}b^2 \\
 \hline
 2a + b
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} -4aab \\ -8a^3 \\ \hline 8a^3 - a^2b + \frac{1}{2}b^2 \\ \hline 2a + b \end{array}} \right\} 4aa$$

Soit la grandeur $8a^3 - a^2b + \frac{1}{2}b^2$ à divi-

ser par $2a + b$. Il faut écrire le diviseur $2a + b$ sous la grandeur à diviser. Après cela il faut diviser le nombre 8 qui précède a^3 par le nombre 2 qui précède la grandeur a dans le diviseur; comme on l'a enseigné dans la division des nombres, on aura 4 qu'on écrira pour quotient; ensuite a^2 étant divisé par a donne pour quotient aa qu'on écrira au quotient immédiatement après le 4. Or $+4aa$ qu'on vient d'écrire au quotient multiplié par $+b$, produit $+4aab$ qu'il faut retrancher, & pour cela lui préposer le signe $-$; mais parceque dans la grandeur à diviser on ne trouve point de aab , on écrit à l'écart fort au loin $-4aab$ dont on vient de parler. Ensuite il faut multiplier $4aa$ du quotient par $2a$ du diviseur, cela fait $8a^3$ qu'il faut retrancher; c'est pour cela qu'on lui prépose le signe $-$ en l'écrivant au dessus de la grandeur de même genre. Ces deux grandeurs $-8a^3$ & $+8a^3$ se détruisant, on les tranche, & on écrit 0 au dessus pour marquer qu'il ne reste rien.

$$\begin{array}{r}
 + 4 a a b \\
 - 4 a a b \\
 \hline
 + a b b \\
 - 2 a^2 + 2 a b b \\
 2 a^2 - a b b + \frac{x}{2} b^2 \\
 \hline
 2 a + b
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} + 4 a a b \\ - 4 a a b \\ + a b b \\ - 2 a^2 + 2 a b b \\ 2 a^2 - a b b + \frac{x}{2} b^2 \\ \hline 2 a + b \end{array}} \right\} 4 a a - 2 a b$$

Il reste encore à diviser $- 4 a a b - a b b$

$\div \frac{1}{2} b^2$. On dira, — qui precede $4 a a b$ divisé

par $+$ qui precede $2 a + b$, donne au quotient — qu'on écrira ensuite de $4 a a$. Après cela on dira, 4 qui precede $a a b$ divisé par 2 qui precede a dans le diviseur, donne pour quotient 2 qu'on écrira au quotient. $a a b$ divisé par a donne pour quotient $a b$ qu'on écrira au quotient. Or $- 2 a b$ qu'on vient d'écrire au quotient multiplié par $+ b$ qui est au diviseur, produit $- 2 a b b$ qu'il faut retrancher, & pour cela on lui préposera le signe $+$, & comme on trouve dans la grandeur à diviser une grandeur semblable à ce dernier produit, on écrira au dessus $+ 2 a b b$, & après en avoir fait l'addition avec $- a b b$, il resulta $+ a b b$ qu'on écrit au dessus, & on efface les deux précédentes grandeurs. Ensuite $- 2 a b$ du quotient multiplié par $+ 2 a$ du diviseur, produit $- 4 a a b$ qu'il faut retrancher, & pour cela on écrit $+ 4 a a b$ au dessus de $- 4 a a b$ qui lui est semblable; ces deux grandeurs se détruisant

par l'addition à cause de leurs signes contraires; on les efface, & on écrit au dessus 0 pour marquer qu'il ne reste rien.

$$\begin{array}{r}
 0 \\
 \overline{+} 4 a a b \\
 \underline{-} 4 a a b \\
 0 \\
 \overline{-} a b b : \\
 0 \overline{+} a b b \underline{-} \frac{1}{2} b^2 \\
 \underline{-} 2 a^3 \overline{+} 2 a b \quad 2 \\
 \underline{-} 2 a^3 \underline{-} a b b \overline{+} \frac{1}{2} b^2 \\
 \hline
 2 a \overline{+} b
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 a a \\ - 2 a b \\ \overline{+} \frac{1}{2} b b \end{array}$$

Il reste encore à diviser $\overline{+} a b b \overline{+} \frac{1}{2} b^2$; on dira, $\overline{+} 1 a b b$ divisé par $2 a$, donne pour quotient $\overline{+} \frac{1}{2} b b$, qu'on écrit au quotient; parceque, comme on a averti ci-devant, lorsqu'il ne paroît point qu'une grandeur soit précédée de chiffres, on y sous-entend toujours 1. Or 1 divisé par 2 donne pour quotient $\frac{1}{2}$ qu'on prépose à $b b$ au quotient avec le signe $\overline{+}$. Ensuite $\overline{+} \frac{1}{2} b b$ qu'on vient d'écrire au quotient étant multiplié par b qui est au diviseur, produit $\overline{+} \frac{1}{2} b^2$ qu'il

fait retrancher ; & pour cela on écrit $-\frac{1}{2}bb$
 au dessus de la grandeur semblable qui se trouve
 et dans $2a^2 - ab^2 + \frac{1}{2}b^2$, ces deux grand
 deurs se détruisant par l'addition à cause de leurs
 signes contraires, on les efface, & on écrit 0 au
 dessus. Enfin $+\frac{1}{2}bb$ qui est au quotient mul
 tiplié par $2a$ du diviseur, produit $+1abb$ qu'il
 faut retrancher, & on écrira $-abb$ au dessus de
 la grandeur semblable qui restoit encore à diviser,
 ces deux grandeurs se détruisant, on les efface
 & on écrira 0 au dessus. Et partant $2a^2 - abb$
 $+\frac{1}{2}b^2$ divisé par $2a + b$ donne pour quotient
 $aa - 2ab + \frac{1}{2}bb$.

AUTRE EXEMPLE

$$\begin{array}{r}
 +9\frac{1}{3}abef \\
 -4\frac{2}{3}abef \\
 \hline
 7aegh \\
 7aegh - 3bbgh + 14abef - 6b^2f + 7bm^3 \\
 \hline
 3gb + 2bf
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} 2\frac{1}{3}ae$$

Pour diviser $7aegh - 3bbgh + 14abef - 6b^2f + 7bm^3$ par $3gb + 2bf$, après avoir écrit le diviseur
 au dessous de la grandeur à diviser, on dira, $+7$
 H. iiii.

divisé par $+3$, donne pour quotient $+2\frac{x}{3}$; & ac^2b divisé par gh , donne pour quotient ac . On écrira au quotient $2\frac{x}{3}ac$. Or $+2\frac{x}{3}ac$ du quotient multiplié par $+2bf$ du diviseur produit $+4\frac{x^2}{3}acbf$ qu'on retranche en lui préposant le signe $-$, & on l'écrit au dessus de la grandeur qui lui est semblable $4acbf$ qui se trouve à diviser, par l'addition il résulte de ces deux grandeurs $+9\frac{x}{3}acbf$ qu'on écrit au dessus. Ensuite $+2\frac{x}{3}ac$ du quotient multiplié par $3gb$ du diviseur, produit $7acgb$ qu'on retranche de pareille grandeur à diviser, après l'avoir écrite au dessus avec le signe $-$, il ne reste rien, on les tranche & on écrit au dessus 0.

Il reste encore à diviser $-3bbgh + 9\frac{x}{3}acbf - 6b^2f + b^3m^3$; on dit, $-3bbgh$ divisé par $+3gh$ donne pour quotient $-bb$ qu'on y écrit. Or $-bb$ du quotient multiplié par $+2bf$ du diviseur, produit $-2b^2f$ qu'il faut retrancher, & pour cela mettre $+2b^2f$ qu'on écrira au dessus de la grandeur $-6b^2f$ qui lui est semblable, & par l'addition de ces deux grandeurs il résultera $-4b^2f$ qu'on écrira au dessus, & on tranchera les deux précédentes. Ensuite $-bb$ multiplié par $3gb$ produit $-3gb^2b$ qu'on retranchera en lui préposant le signe $+$,

$$\begin{array}{r}
 + 9 \frac{x}{3} abcf - 4 b^2 f \\
 - 7 a c g b + 3 b b g h - 4 \frac{x}{3} abcf + 2 b^2 f \\
 7 a c g b - 3 b b g h + 14 a c b f - 4 b^2 f + b m^2 \\
 \hline
 3 g b + 2 b f
 \end{array}$$

Quotient $\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{x}{3} a c - b b \\ \frac{9 \frac{x}{3} abcf - 4 b^2 f + b m^2}{3 g b + 2 b f} \end{array} \right.$

& l'écrivant au dessus de la grandeur de même espèce $- 3 b b g h$. Ces deux grandeurs se détruiront par l'addition à cause de leurs signes contraires, on les tranchera & on écrira au dessus.

Il restera encore $+ 9 \frac{x}{3} a b c f - 4 b^2 f + b m^2$

qu'on ne peut diviser par $3 g b + 2 b f$ à cause que dans cette grandeur restante il ne se trouve point de lettres semblables à $g h$ du diviseur ; c'est pour cela qu'on écrira ce reste ensuite du quotient qu'on vient de trouver, & au dessous de ce reste on écrira le diviseur, & on mettra cette marque $\frac{\quad}{\quad}$ entre ces deux grandeurs, ce qui fera une fraction ; & partant le quotient de cette division

$$\begin{array}{r}
 9 \frac{x}{3} abcf + 4 b^2 f + b m^2 \\
 \frac{2 \frac{x}{3} a c - b b}{3} \frac{\quad}{3 g b + 2 b f}
 \end{array}$$

Multiplication.

$$\begin{array}{r} \text{quot. } 2 \frac{1}{3} a - b b \\ \text{divis. } 3 g b + 2 b f \\ \hline 7 a e g b - 3 b b g b + 4 \frac{2}{3} a b e f - 2 b^3 f \\ 9 \frac{1}{3} a e b f - 4 b^3 f + b m^2 \\ \hline \text{produit } 7 a e g b - 3 b b g b + 14 a b e f - 6 b^3 f + b m^2 \end{array}$$

La preuve de ces divisions se fait comme dans l'Arithmétique, en multipliant le quotient par le diviseur ; & s'il y a un reste, on l'ajoute au produit de cette multiplication, & on trouve enfin la grandeur qui étoit à diviser, si on a bien réussi.

AVERTISSEMENT.

Les grandeurs qu'on ne peut diviser sans reste sont le plus souvent écrites au dessus de leur diviseur en forme de fraction. On fait toujours la même chose à l'égard des grandeurs, qui ne contiennent point de lettres semblables à celles du diviseur. Par exemple pour diviser $c d$ par $c + d$

on écrit $\frac{c d}{c + d}$, ce qui en exprime le quotient.

Pour diviser $a b - c d$ par $b + d$ on écrit $\frac{a b - c d}{b + d}$. Pour diviser $a b$ par f , on écrit $\frac{a b}{f}$;

& alors ces divisions indiquées sont des fractions.

DE L'EXTRACTION DES RACINES.

DEFINITIONS.

1. **RACINE** est une grandeur qui étant multipliée par elle-même ou par une autre, produit une autre grandeur ; par exemple a est racine du produit ab , ou du produit aa , ou a^2 . La grandeur b est aussi racine du même produit ab ou du produit bb . f, g, h , sont les racines du produit $fg h$. &c ; sont les racines de leur produit 18 , &c.

2. Puissance ou degré d'une grandeur est le produit de cette même grandeur multipliée une ou plusieurs fois par elle-même ; par exemple bb , b^2 , f^2 , &c. sont les puissances de b, c, f , &c.

Il y a plusieurs sortes de puissances ou degrés.

3. La première puissance ou le premier degré d'une grandeur est le produit d'une grandeur multipliée par 1 ; par exemple $1a$, ou a est la première puissance de la grandeur a ; d est la première puissance de la grandeur d , &c.

4. La 2^e puissance, ou le 2^e degré, ou le carré d'une grandeur est le produit de cette grandeur multipliée une fois par elle-même ; par exemple la 2^e puissance de c est cc ou c^2 , le carré de $5a^2b^2$ est $25a^4b^4$. Le carré ou 2^e puissance de 6 est 36, de 8 est 64, &c.

5. La 3^e puissance ou le 3^e degré, ou le cube d'une grandeur est le produit de cette grandeur mul-

multipliée par son carré, ou par la 2^e puissance. Par exemple le cube, ou 3^e puissance de f est fff ou f^3 ; le cube de $2d$ est $8d^3$; le cube de 4 est 64 ; de 15 est 125 , &c.

6. La 4^e puissance, ou le 4^e degré, ou le quatrième carré, ou le sus-solide d'une grandeur est le produit de cette grandeur par son cube ou par la 3^e puissance: par exemple la 4^e puissance de d est d^4 ; la 4^e puissance de a est $aaaa$ ou a^4 ; &c ainsi des autres grandeurs.

7. Lorsque pour abrégé l'expression d'une puissance, on écrit un chiffre supérieur à côté de la racine de cette puissance, ce chiffre est appelé exposant de cette puissance; par exemple au lieu d'écrire $aaaa$, si on écrit a^4 , on appelle ce 4 l'exposant de la puissance $aaaa$.

A P E R T I S S E M E N T.

Une grandeur est reconnue pour carrée, lorsqu'on peut partager en deux parties égales les lettres qui expriment cette grandeur, de telle manière que les mêmes lettres se rencontrent de part & d'autre: par exemple $ffgghh$ est le carré de $fggh$, parceque cette grandeur $fggh$ multipliée par elle-même produit $ffgghh$. On dira aussi qu'une grandeur est cube lorsqu'on peut partager en trois parties égales les lettres qui l'expriment; &c ainsi des autres.

8. Extraction de racine, ou résolution d'une puissance, c'est trouver la grandeur qui étant multipliée par elle-même un certain nombre de fois produise cette puissance; par exemple chercher un nombre qui étant multiplié par lui-même produise le nombre carré 144, c'est extraire la racine de 144 qui est 12.

Lorsque

Lorsque la puissance, dont est question, est un quarré, la racine qu'on cherche est appellée racine quarrée; si cette puissance est un cube, la racine est appellée racine cubique; si cette puissance est du 4^e degré, la racine est appellée racine quatriéme, de même des autres. Enfin la racine tire son nom de la puissance dont elle est racine.

Lorsque les grandeurs sont simples, ou qu'elles s'expriment avec peu de lettres, comme aa ou ccc , il est tres-facile de voir leurs racines. On connoît par exemple évidemment que la racine quarrée de aa est a ; que la racine cubique de f^3 est f ; & ainsi des autres.

Pour extraire les racines des grands nombres, il est necessaire de sçavoir les quarrés, les cubes, &c. de chaque caractere, depuis 1 jusqu'à 9; principalement les quarrés, parcequ'ils sont plus d'usage que les autres puissances.

Racines 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

Quarrez 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. 100.

Cubes 1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. 512. 729. 1000.

Lorsqu'on souhaite trouver la racine de quelque grand nombre; par exemple, si on cherche la racine quarrée de 1369, il faut separer ces chiffres de deux en deux, & commencer de droit à gauche, ensuite faire une ligne au dessous, & à son extremité on écrira les racines cherchées, dans la même forme qu'on écrit le quotient dans la division, comme on verra dans la suite.

Pour rendre raison de ce partage de chiffres, il faut observer que si un nombre est exprimé par plus de deux chiffres, la racine est exprimée par

plus d'un chiffre ; parceque 100 est le plus petit nombre de ceux qui sont exprimez par trois chiffres, & sa racine quarrée qui est 10 est le plus petit nombre de ceux qui sont exprimez par deux chiffres. Tous les nombres qui sont au dessus de 100, ont donc pour racine un nombre exprimé par plus d'un chiffre ; & tous les nombres qui sont au dessous de 100, c'est à dire, qui sont exprimez par moins que trois chiffres, ont une racine quarrée moindre que 10, & ont donc une racine exprimée par un seul chiffre. Or quand il faut extraire la racine d'un nombre, il faut partager ce nombre en certaines parties, ou tranches, telles qu'on y puisse trouver les plus grands quarrés dont les racines soient exprimées chacune par un seul chiffre. Pour satisfaire à ce dessein, on commence de droit à gauche, & on separe ces chiffres de deux en deux ; parceque la racine d'un nombre quarré exprimé par deux chiffres, est toujours exprimée par un seul chiffre.

On cherche l'un après l'autre les chiffres qui expriment cette racine. On commence par le premier chiffre de cette même racine qui est vers la main gauche, & qui est de plus grande valeur que les autres ; on continue de gauche à droit. Ce premier chiffre étant trouvé, on s'en sert pour trouver le second ; les deux premiers étant ensuite considerez comme un seul nombre servent à trouver le troisième chiffre de la racine qu'on cherche ; les trois premiers étant considerez comme un seul nombre servent à trouver le 4^e chiffre, & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ne reste plus de Chiffre à trouver.

C'est pour cela qu'on ne considère jamais la

Algebre.

Racine qu'on cherche que comme une grandeur composée de deux parties $a + b$. a represente le chiffre ou les chiffres trouvez, & b represente le chiffre qu'on cherche. Le quarré de cette grandeur $a + b$ qui est $aa + 2ab + bb$ sert de règle dans les extractions des racines quarrées.

E X E M P L E.

Soit ce nombre 1369, dont il faut extraire la racine quarrée, c'est à dire, trouver le nombre qui étant multiplié une fois par lui-même produise 1369.

On separera les chiffres de deux en deux, comme il a été enseigné, ensuite il faut considerer qu'il y aura autant de chiffres pour exprimer la racine qu'on cherche, qu'il y a de tranches dans le nombre 1369; & partant comme

$$\begin{array}{r} \\ 37 \\ \hline 1369 \end{array}$$

$$a = 3.$$

$$b = 7.$$

il s'y trouve deux tranches de chiffres, sçavoir 13 & 69, cela marque qu'il n'y aura que deux chiffres pour exprimer cette racine cherchée, dont le premier chiffre est appellé a & le second b .

Mais parceque le quarré de $a + b$ qui represente le nombre 1369, contient le quarré de a , & deux fois le produit de a multiplié par b , ou ce qui est la même chose, le produit du double de a multiplié par b & encore le quarré b ; c'est pour cela que nous ferons l'extraction des racines de ces trois produits l'une après l'autre.

1^o. C'est dans la premiere tranche vers la main gauche qu'on trouve toujours le quarré de

premier chiffre de la racine cherchée ; comme on le verra dans la suite ; à cause de cela , je cherche la racine du quarré , qui approche le plus près de 13 , & je trouve que c'est 3 racine de 9 ; j'écris 3 au rang des racines. Ce chiffre 3 est représenté par a : je retranche ensuite de 13 le quarré aa , c'est à dire le quarré de la racine 3 , qu'on vient de trouver , qui est 9 , il reste 4 , que j'écris sur le 3.

2°. Dans les produits $2ab + bb$ outre la racine $a = 3$ qui vient d'être connue , il reste encore à trouver la valeur de l'autre racine b . Cette 2^e racine se trouve dans ce qui peut rester dans la premiere tranche , après qu'on en a retranché le quarré de la premiere racine , & dans le premier chiffre vers la main gauche de la deuxième tranche , ce qu'on fera voir par la suite ; mais lorsqu'on connoît un produit avec une de ses racines , il est facile de trouver l'autre racine de ce produit , en divisant ce même produit par la racine connue ; le quotient de cette division donnera l'autre racine qu'on cherche. Dans cet exemple , le 4 qui reste écrit au dessus de 13 , & le 6 , premier chiffre de la 2^e tranche font 46 , dans lequel nombre est le produit dont le double de a , c'est à dire le double de 3 est une des racines qui vient d'être connue ; & partant si on divise ce produit par 6 qui est le double de 3 , on trouvera pour quotient 7 , second chiffre de la racine cherchée qui est représenté par b ; & partant si on multiplie ce dernier chiffre trouvé par ce double du premier chiffre trouvé , on aura 42 , c'est à dire $2ab$, on retranchera ces 42 des 46 dont on vient de parler , il reste 4 qu'on écrira sur le 6.

3°. Enfin des 49 qui restent , on retranchera

le carré de cette dernière racine 7, qui est 49, il ne restera rien; on écrira 0 au dessus, & on conclura que la racine 37 est exacte; c'est à dire que le nombre 1369 est un nombre carré dont la racine est précisément 37.

Il reste présentement à faire voir que le carré du premier chiffre de la racine cherchée se trouve toujours dans la première tranche du nombre dont on veut extraire la racine; que le produit du double du premier chiffre de la racine cherchée multiplié par le deuxième chiffre de cette racine, est dans ce qui peut rester de la première tranche, & dans le premier chiffre de la deuxième tranche vers la main gauche; Enfin que le carré du 2^e chiffre de la racine cherchée est dans ce qui reste, & dans le dernier chiffre de la deuxième tranche en commençant de gauche à droit.

Pour connoître ces choses évidemment, il n'y a qu'à faire le carré de la racine cherchée 37, c'est à dire, multiplier 37 par 37, & remarquer quand on dit 7 fois 7 sont 49, que c'est le carré du second chiffre de la racine qui se trouve indubitablement dans la seconde tranche en comptant de gauche à droit. Ensuite quand on dit 3 fois 7 dizaines sont 21; on écrit 2 au rang des dizaines, & le 1 dans un rang plus avancé, sous les centaines. Quand

on multiplie par 3 qui sont les dizaines de 27, en disant encore: 3 fois 7, ou 7 fois 3 dizaines sont 21 qu'on écrit au dessous des 21 dizaines précé-

$$a + b = 37$$

$$a + b = 37$$

$$bb = 49$$

$$2ab \begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$$

$$aa = 9$$

$$21 \quad 69$$

dentes : on voit évidemment que ces deux 21 sont deux fois le produit du dernier chiffre 3 de la racine cherchée multiplié par le second chiffre 7 ; ce qui est la même chose que le produit du double du premier chiffre par le second , parceque l'un & l'autre sont 42. Enfin 3 étant multiplié par 3, qui sont des centaines, on trouve 9 pour produit qu'on écrit dans son rang : on trouve que ce 9 est le quarré du premier chiffre 3 de la racine cherchée. De sorte qu'en commençant de droit à gauche, si on partage maintenant de deux en deux ces produits écrits de cette maniere sans les changer de situation, on trouvera le quarré du premier chiffre de la racine dans la premiere tranche, & les autres produits de suite, comme on vient de dire.

AUTRE EXEMPLE.

Pour connoître la racine quarrée du nombre 64857, ou du nombre quarré qui en approche le plus près, il faut separer de deux en deux les chiffres qui expriment

$$\begin{array}{r|l}
 & 2 \\
 2 & 43 \\
 \hline
 6 & 48 \quad 57 \\
 & 48 \\
 & \hline
 & 2
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r|l} & 2 \\ 2 & 43 \\ 6 & 48 \quad 57 \\ & 48 \\ & \hline & 2 \end{array}} \right\} 23$$

ce nombre en commençant de droit à gauche. Il se trouvera trois tranches ; ensuite il faut commencer de gauche à droit à la premiere tranche, disant : la racine du nombre quarré qui approche le plus près de 6 c'est 2, qu'il faut écrire au rang des chiffres de la racine qu'on cherche. Après cela on retranche du nombre 6 le quarré de ce chiffre 2 qui est 4, il reste 2 qu'on écrit sur le 6, & on tranche ce 6.

Le premier chiffre 2 de la racine cherchée vient

d'être connu, il est représenté par a ; mais parce que dans $aa + 2ab + bb$ qui est le quarré de $a + b$ outre la racine du quarré aa , il faut encore connoître en chiffre la valeur de l'autre racine qui est dans le produit $2ab$. Pour y réussir on considerera que le 2 qui est au dessus du 6 & le 4 qui est dans la deuxième tranche fera 24, &c, comme on a enseigné dans l'exemple precedent, on divisera 24 par le double de la racine qu'on vient de trouver, qui est le double de 2 égal à $4 = 2a$; & pour cela on écrira ce nombre 4 sous le 4 de la deuxième tranche. Si le double de cette racine étoit exprimé par deux chiffres, on écriroit toujours le dernier sous le premier de la deuxième tranche, & l'autre sous les autres chiffres vers la main gauche. On dira en 24 combien y a-t-il de fois 4? on l'y trouve véritablement 6 fois; mais il faut observer que si je l'écrivois 6 fois, il ne me resteroit que 2 dans la deuxième tranche, d'où je ne pourrois plus soustraire le quarré de ce nombre 6, & partant j'écris au rang des racines seulement le chiffre 5. Ensuite je multiplie ce second chiffre $5 = b$ de la racine cherchée par 4, ce qui fait $20 = 2ab$, que je retranche de 24, il reste 4 que j'écris sur le 4 de la deuxième tranche. Ensuite je tranche le 2 qui est sur le 6, & ce 4 de la deuxième tranche comme inutiles; après cela il reste encore le 4 qui est au dessus du 4 de la deuxième tranche & le 8 suivant, ce qui fait 48 dont on retranchera le quarré du chiffre 5 qui est $25 = bb$, il restera 23 qu'on écrira au dessus de ces 48, & on tranchera ensuite ces 48.

Après cela, il faut considerer que les deux chiffres 25 de la racine cherchée sont exprimez par a . Or puisque dans le quarré $aa + 2ab$

$+bb$, nous connoissons déjà la racine du carré aa qui est 25, il nous reste encore à connoître en chiffres la valeur de l'autre racine qui se trouve dans les

2	3	$(4$	
2	43	8	$(r$
6	48	87	257
			$\}$
	48	66	
	28	2	

produits $2ab + bb$; mais ce produit $2ab$ se trouve dans les chiffres qui viennent de rester dans la deuxième tranche, & dans le 5. de la troisième. Je doublerai donc la racine de $aa = 25$ que je viens de trouver, ce qui fera 50, dont j'écris le dernier chiffre 0. sous le premier de la troisième tranche, & l'autre qui est 5. sous le 3. qui précède vers la main gauche, & si dans ce double il se trouvoit plus de deux chiffres j'écris le 3^e sous la 5^e colonne qui précéderoit, & ainsi des autres. Après cela je fais une division, & je dis: en 23 combien y a-t-il de fois ce dernier 5 qui se trouve au dessous du 3? Je trouve qu'il peut y être 4 fois, j'écris 4 au rang des racines. Et partant ce 4 sera le 3^e chiffre de la racine cherchée. Je multiplie ensuite ce 4 par les 50 = 200, & le produit est 200, je le retranche des 235 qui sont au dessus en cette sorte: 4 fois 0 c'est 0, qui étant retranché de 5, il reste 5 que j'écris au dessus du 5. Ensuite 4 fois 5 font 20 qui étant retranchés des 23 qui sont au dessus, il reste 3 que j'écris au dessus du 3.

Enfin des 357, qui restent, je retranche le carré de ce dernier chiffre 4, qui est 16 = bb , & pour cela j'écris 16 en posant 6 sous le dernier chiffre 7, & la dizaine 1 sous la colonne précédente. Je dis ensuite de 7 ôtez 6, reste 1 que j'écris sur le 7. De 5, ôtez 1 qu'on vient d'écrire

Algebre.

103

au dessous, reste 4 que j'écris au dessus du 5. En partant il reste encore 341, que je separe après avoir tranché le reste; & je conclus que le nombre 64857 n'est pas un nombre quarré; mais que 254 est la racine du nombre quarré qui approche le plus près de ce nombre 64857, ce qu'on cherchoit, c'est à dire que si de 64857 on retranche 341, on aura un nombre quarré 64516, dont la racine est 254.

Il faut remarquer que s'il y avoit une 4^e tranche, on doubleroit la racine trouvée, & on opereroit, comme on a fait en passant de la 2^e à la 3^e tranche; de même s'il y avoit une 5^e tranche, &c.

AUTRE EXEMPLE.

$$\begin{array}{r}
 \overset{\circ}{aa} + \overset{\circ}{10ab} \qquad \qquad \overset{\circ}{-25bb} \qquad \qquad \qquad 7 \\
 \hline
 aa - 10ab + 2ac + 25bb - 10bc + cc \quad \left. \vphantom{aa} \right\} a - 5b \\
 \hline
 2a \qquad \qquad \qquad 25bb
 \end{array}$$

Pour tirer la racine quarrée de $aa - 10ab + 2ac + 25bb - 10bc + cc$, je dis : la racine quarrée de aa est a que j'écris au rang des racines. Ensuite dans la grandeur proposée je retranche ou j'efface le quarré aa de cette racine.

2^o. Je double cette racine a , & j'écris $2a$ pour diviseur, disant : $-10ab$ divisé par $+2a$ donne pour quotient $-5b$, je multiplie $-5b$ par $+2a$, ce qui produit $-10ab$ que je retranche de pareille grandeur en l'effaçant dans l'exemple proposé, il ne reste rien, j'écris 0 au dessus. Ensuite je retranche le quarré de cette dernière racine trouvée $-5b$ qui est $+25bb$, de pareille

grandeur qui se trouve dans l'exemple proposé, il ne reste rien, je les efface l'une & l'autre, & j'écris 0 au dessus.

$$\begin{array}{r}
 \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\
 \hline
 aa + 10ab - 2ac - 25bb + 10bc - cc \\
 aa - 10ab + 2ac + 25bb - 10bc + cc \quad \left. \vphantom{aa - 10ab + 2ac + 25bb - 10bc + cc} \right\} a - 5b + c \\
 \hline
 2a \quad 25bb \quad 2a - 10b \quad cc
 \end{array}$$

3^o. Je considère la racine trouvée $a - 5b + c$ comme dans les nombres, & je la double pour me servir de diviseur, je trouve $2a - 10b$ que j'écris au dessous de la grandeur proposée. Je dis $+ 2ac$ divisé par $+ 2a$, donne pour quotient $+ c$, que j'écris pour racine cherchée. Ensuite je multiplie cette dernière racine par $- 10b$ du dernier diviseur, cela produit $- 10bc$ que je retranche de $- 10bc$ qui se trouve dans l'exemple proposé, il ne reste rien, partant je les efface & j'écris 0 au dessus. Après cela je multiplie cette dernière racine cherchée $+ c$ par $+ 2a$ du dernier diviseur, ce qui fait $+ 2ac$ qu'on retranche de pareille grandeur qui se rencontre dans l'exemple proposé, il ne reste rien, on les efface, & on écrit 0 au dessus. Enfin on retranche le carré de $+ c$, dernière racine trouvée, de pareille grandeur qui se rencontre dans l'exemple proposé, & il ne reste rien. Partant je conclus que la racine quarrée de $aa - 10ab + 2ac + 25bb - 10bc + cc$ est précisément $a - 5b + c$.

Il faut remarquer que dans cet exemple la racine cherchée peut aussi être $- a + 5b - c$ en changeant tous les signes de la racine précédente cherchée; parceque si on multiplie cette gran-

des par elle-même, on trouvera pour son quatrième la grandeur qu'on vient de proposer pour exemple. Pour faire l'extraction de cette racine avec ces derniers signes, on peut commencer en disant : la racine quarrée de aa est $-a$; & ainsi du reste.

• Pour tirer la racine quarrée de $16\ aa + 72\ ab - 96\ ac + 81\ bb + 216\ bc + 144\ cc$, on commencera comme dans l'exemple precedent à écrire au rang des racines $4a$ qui est la racine de $16\ aa$, & on continuera l'operation comme dans l'exemple precedent. Enfin on trouvera pour racine $4a + 9b + 12c$.

Afin de mieux s'exercer dans les commencemens qu'on étudie ces choses, on peut prendre des racines à volonté & les quarrer; & ensuite de quanté en extraire la racine, comme on vient d'enseignier.

• Pour preuve que l'extraction qu'on a faite de la racine quarrée est telle qu'on la souhaite, il faut multiplier la racine trouvée par elle-même; & au produit de cette multiplication, on ajoutera le reste s'il s'en est trouvé après l'extraction. Cette somme sera un nombre égal à celui dont on a tiré la racine, si on a bien réussi. Si cela n'arrive pas, l'operation sera mal faite; & il faudra la recommencer. Pour montrer qu'on a bien réussi dans l'extraction de la racine quarrée du nombre 6487 qu'on a proposé dans un des exemples precedents, il faut multiplier la racine trouvée 254 par elle-même, & au produit de cette multiplication ajouter le reste 341, on trouvera enfin le même nombre dont on a tiré la racine.

• S'il se rencontroit une fraction dont on vouloit tirer la racine quarrée, si cela étoit possible;

par exemple $\frac{36}{81}$, on prendra la racine quarrée

de du numerateur 36, & ensuite on prendra la racine quarrée 9 du dénominateur 81, & on aura

$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ pour la racine cherchée; parceque

cette fraction $\frac{6}{9}$ multipliée par elle-même pro-

duit $\frac{36}{81}$. Par la même raison on trouvera que la

racine quarrée de cette fraction $\frac{ff}{gg}$ est $\frac{f}{g}$.

Après avoir fait les extractions des racines; comme on vient d'enseigner; s'il reste quelque chose, c'est une marque qu'on ne peut en trouver qu'une racine approchée, ou seulement la racine du nombre quarré qui approche le plus près du nombre proposé. S'il reste quelque chose après avoir tenté l'extraction de la racine d'une grandeur litterale on évite cette extraction, qui à cause de ce reste n'est point exacte. On verra dans la suite de quelle maniere on doit exprimer ces racines à l'égard des quatzes, des cubes, &c.

AUTRE EXEMPLE.

Pour connoître la racine cubique du nombre 105154067, ou du nombre cube qui en approche le plus près, il faut separer de trois en trois les chiffres qui expriment ce nombre, en commençant comme dans l'extraction de la racine quarrée de droit à gauche. On rendra raison de cela, comme on a fait pour la racine quarrée; parceque 1000 est le plus petit des nombres cubes exprimez

prenez par plus de 3 chiffres, dont la racine cubique qui est 10 est aussi la plus petite de celles qui sont exprimées par plusieurs chiffres. Donc tout nombre au dessous de 1000, c'est à dire, qui est exprimé par moins que 4 chiffres aura sa racine cubique exprimée par un seul chiffre. Lorsqu'on fait l'extraction de la racine cubique d'un nombre, on cherche les racines des plus grands cubes qui sont dans ce nombre, exprimées chacune par un chiffre seulement. On est assuré de trouver ces racines en separant les chiffres de ce nombre de 3 en 3. Si on vouloit extraire la racine de la 4^e puissance, on separeroit les chiffres de 4 en 4; pour la 5^e puissance; de 5 en 5, &c. on feroit toujours un raisonnement semblable au precedent.

Il faut encore se ressouvenir de la regle generale pour les extractions de toutes sortes de racines, qui est qu'on represente toujours la racine qu'on cherche comme une grandeur composée de deux parties $a + b$; a represente le chiffre ou les chiffres trouvez, & b represente le chiffre qu'on cherche. Le cube de cette grandeur $a + b$ qui est $a^3 + 3a^2b + 3abb + b^3$ sert de regle dans les extractions des racines cubiques.

Il faut commencer vers la main gauche à la premiere tranche, disant: la racine du nombre cube,

$$\begin{array}{r|l}
 7 & \\
 \hline
 4 & 2 \quad | \quad 5 \\
 2 & 8 \quad | \quad 294 \quad | \quad 067 \\
 \hline
 6 & 4 \quad 8 \\
 & 4
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r|l} 7 & \\ \hline 4 & 2 \quad | \quad 5 \\ 2 & 8 \quad | \quad 294 \quad | \quad 067 \\ \hline 6 & 4 \quad 8 \\ & 4 \end{array}} \right\} + 7$$

qui approche le plus près de 105 c'est 4 qu'il faut écrire au rang des chiffres de la racine qu'on cherche. Après cela on retranche du nombre 105 le cube 64 de ce nombre 4, il reste 41 qu'on écrit au dessus

de 105, & on efface ces 105.

Le premier chiffre $4 = a$ de la racine cherchée vient d'être connu ; mais en suivant nôtre règle generale, il reste encore à connoître en chiffres la valeur de l'autre racine b qui est dans le produit $3 a b$. La valeur de ce second chiffre se trouve dans les 41 restants de la premiere tranche, & dans le 1 de la 2^e tranche, c'est à dire dans 411. On triplera donc le quarré de la racine qu'on vient de trouver, & on aura $48 = 3 a a$ qui servira de diviseur. Il faudra l'écrire au dessous, de sorte que son dernier chiffre 8 se trouve sous le premier 1 de la 2^e tranche. Ensuite on dira comme dans l'extraction de la racine quarrée, en 41 qui reste sur 05 combien y a t-il de fois 4 qu'on vient d'écrire au dessous ? on l'y trouve 10 fois ; mais parcequ'on n'écrit jamais au quotient d'une division plus de 9 à chaque position, & que même dans la circonstance presente, après avoir tenté, on ne peut ni écrire 9 fois, ni 8 fois ; parceque les restes qui se trouveroient dans les premieres & secondes tranches ne seroient pas suffisants pour qu'on en pût encore retrancher la valeur de $3 a b b + b^3$, c'est pour cela qu'on n'écrit que 7 au rang des racines. Il faut ensuite multiplier ce second chiffre $7 = b$ de la racine par 8, cela fait 56 qu'on retranche de 61, en imaginant 6 dizaines avec le 1 de la premiere tranche, comme dans la division, il reste 5 qu'on écrit sur 1, & on retient 6. Après cela on dit 4 fois 7 font 28, & 6 qu'on vient de retenir font 34 qu'on retranche de 41, il reste 7 qu'on écrit au dessus de 1. Ce qu'on vient de faire est la même chose que si de 411 on retranchoit $336 = 3 a a b$ produit de 48 multiplié par 7, & qu'on écrivit au dessus le reste 75. Ensuite pour satisfaire au troisiéme

produit $3abb$, on multipliera $49 = bb$, qui est le quarré de 7 par le triple de 4 qui est $12 = 3a$, on aura pour produit $588 = 3abb$ qu'on écrira, de sorte que son dernier chiffre 8 se trouve sous le chiffre 5 de la 2^e tranche. Ensuite on soustraira ce nombre 588 de ce qui reste au dessus, comme on a enseigné dans la soustraction, & on écrira encore le reste au dessus, après avoir tranché les chiffres precedents comme

$$\begin{array}{r}
 \text{I} \\
 \overline{7 \quad 6} \\
 \begin{array}{r}
 \cancel{4} \cancel{2} \mid \cancel{5} \cancel{7} \\
 \cancel{2} \cancel{0} \cancel{8} \mid \cancel{2} \cancel{8} \cancel{4} \mid 067
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 \cancel{6} \cancel{4} \quad \cancel{8} \cancel{8} \\
 \cancel{4} \quad \cancel{8} \\
 \cancel{8}
 \end{array}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} \cancel{4} \cancel{2} \mid \cancel{5} \cancel{7} \\ \cancel{2} \cancel{0} \cancel{8} \mid \cancel{2} \cancel{8} \cancel{4} \mid 067 \end{array}} \right\} 47$$

$$\begin{array}{r}
 \text{I} \quad 3 \\
 \overline{7 \quad 6 \quad 3} \\
 \begin{array}{r}
 \cancel{4} \cancel{2} \mid \cancel{5} \cancel{7} \cancel{1} \\
 \cancel{2} \cancel{0} \cancel{8} \mid \cancel{2} \cancel{8} \cancel{4} \mid 067
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 \cancel{6} \cancel{4} \quad \cancel{8} \cancel{8} \quad \cancel{3} \\
 \cancel{4} \quad \cancel{8} \quad \cancel{4} \\
 \cancel{8} \quad \cancel{3}
 \end{array}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} \cancel{4} \cancel{2} \mid \cancel{5} \cancel{7} \cancel{1} \\ \cancel{2} \cancel{0} \cancel{8} \mid \cancel{2} \cancel{8} \cancel{4} \mid 067 \end{array}} \right\} 47$$

inutiles. Enfin on écrira encore au dessous $343 = b^3$ qui est le cube de 7, qu'on retranchera à la maniere ordinaire de ce qui reste au dessus. Cela étant fini dans ces deux premieres tranches, on passera à la troisieme.

Il faut presentement remarquer que les deux chiffres 47 de la racine qu'on cherche, sont exprimez par a ; & que dans le cube $a^3 + 3a^2b + 3abb + b^3$, qui represente le nombre propose, dont on veut tirer la racine cube, nous venons de connoître la racine du cube a^3 qui

$$\begin{array}{r|l}
 10 & \\
 2 & 3 \ 0 \ 0 \\
 7 & 6 \ 3 \ 8 \quad (0 \ 1 \\
 4 \ 2 & 9 \ 7 \ 2 \quad 6 \ 2 \ 1 \\
 2 \ 0 \ 8 & 1 \ 8 \ 4 \quad 6 \ 6 \ 7 \\
 \hline
 6 \ 4 & 8 \ 8 \ 3 \quad 7 \ 4 \ 8 \\
 4 & 8 \ 4 \ 2 \quad 6 \\
 8 & 3 \ 6 \ 9 \\
 & 6
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r|l} 10 \\ 2 \\ 7 \\ 4 \ 2 \\ 2 \ 0 \ 8 \end{array}} \right\} 472$$

est 47, il reste encore à connoître la valeur en chiffres de l'autre racine qui se trouve dans le 2^e produit $3ab$. La valeur de ce produit se trouve dans ce qui vient de rester de la 2^e tranche, & dans le premier chiffre de la 3^e. On triplera donc le carré de 47 qui est $6627 = 3ab$, qu'on écrira pour diviseur, de sorte que son dernier chiffre 7 se trouve sous le premier chiffre 0 de la 3^e tranche. Au lieu qu'il faut passer de la 2^e à la 3^e tranche; s'il falloit passer de la 3^e à la 4^e, on suivroit toujours la même méthode. Après cela on fait une division, disant: en 13 combien y a-t-il de fois 6, on l'écrira 2 fois au rang des racines. Ensuite on multipliera $6627 = 3ab$ par ce nombre 2 ab , comme on vient de faire lorsqu'on a trouvé le chiffre 7, & on aura pour produit $13254 = 3ab^2$, qu'on retranchera de 13310 qui sont les chiffres restants de la 2^e tranche & le premier de la 3^e. On aura pour reste 56 qu'on écrit au dessus de 10 qui sont les deux derniers chiffres de ce nombre 13310, après avoir tranché les précédents. Ensuite on multipliera le triple de 47 $= 8$ par 4 carré de 2 $= b$ dernier chiffre trouvé de la racine, on aura pour produit $364 = 3ab^2$. On écrira

et nombre au dessous des autres, de sorte que son dernier chiffre 4 soit sous le 2^o de la 3^e tranche. Après cela on retranchera à la maniere ordinaire ce nombre 564 de 566 qui se trouvent au dessus, il restera 2 qu'on écrira sur le dernier 6 de ce nombre après avoir effacé les precedents. Enfin des 27 qui restent, on retranchera 8 = b^3 cube du dernier chiffre de la racine, & il restera encore 19 qu'on separera après avoir tranché les autres comme inutiles.

Et partant on conchièra que la racine cherchée 472 n'est pas précisément la racine cubique du nombre proposé; mais que si de ce nombre proposé on retranchoit les 19 qui restent, on auroit pour reste un nombre cube, dont la racine est précisément 472, qui est ce qu'on cherchoit par cette operation.

Pour tirer la racine cubique de $a^3 + 9aab + 6aac + 27abb + 36abc + 27b^3 + 12acc + 34bbc + 36bcc + 8c^3$, on suivra la même methode & le même raisonnement qu'on vient de mettre en usage pour les nombres, excepté seulement qu'il n'est point nécessaire de partager par tranches de 3 en 3 les parties litterales de cette grandeur, comme on a fait dans les chiffres; & on trouvera que la racine cherchée sera $a + 3b + 2c$,

L'exemple precedent de la grandeur litterale, dont on a fait l'extraction de la racine quarrée, & les autres exemples proposez en nombres, donnent une ouverture suffisante pour l'extraction des racines de toutes sortes de puissances. Par exemple pour tirer la racine d'une 4^e puissance d'une grandeur proposée en nombres, on partagera les chiffres de 4 en 4, commençant de droit à gauche, & on prendra pour regle la

n^{e} puissance de $a + b$ qui est $a^n + n a^{n-1} b + n a^{n-2} b^2 + \dots + n a b^{n-1} + b^n$; & ainsi des autres puissances.

Pour faire la preuve de l'extraction de la racine cubique, il faut multiplier par elle-même la racine trouvée, ce qui produira le carré de cette racine. Il faut ensuite multiplier ce carré par cette même racine trouvée, le produit de cette dernière multiplication sera le cube de cette racine, qui sera précisément égal au nombre proposé; si après cette extraction il n'est rien resté, & s'il étoit resté quelque chose, en l'ajoutant à ce cube on doit pareillement, si on a bien réussi, trouver une somme égale au nombre dont on a voulu faire l'extraction de la racine cubique; si cela arrive autrement, l'opération est vicieuse & mal faite. Pour être certain si 472 est véritablement la racine du nombre 105154067 proposé dans un des exemples précédents, ou du nombre qui en approche le plus près, il faut cuber cette racine trouvée 472, & à son cube ajouter le reste 19, si on a bien réussi, on trouvera enfin le nombre dont on s'étoit proposé d'extraire la racine. On agira de même à l'égard des autres exemples.

Remarques pour l'approximation des racines des Nombres.

Un Nombre n'est point un nombre carré, lorsqu'on ne peut trouver un autre nombre entier, lequel étant multiplié par lui-même, donne un produit égal à ce premier nombre. On en jugera de même du nombre qui n'est point cube, & ainsi des autres puissances: tels sont les nombres 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, &c. Mais quoiqu'on ne

puisse trouver précisément une racine quarrée
 d'un nombre qui n'est point quarré, on peut ce-
 pendant trouver une racine, qui approchera si
 près de la racine cherchée de ce nombre qui n'est
 point quarré, que l'excès de cette racine cher-
 chée par dessus la racine trouvée, sera moindre
 que la valeur de telle fraction qu'on voudra
 assigner. Ainsi on a un moyen d'approcher à
 l'infini de la racine quarrée du nombre qui n'est
 point quarré. Enfin quoique le nombre entier
 dont on ne peut trouver la racine, ne soit pas
 un nombre quarré ou un nombre cube, &c. d'u-
 ne racine connue & déterminée par des nom-
 bres entiers, ou par des entiers & fractions, on
 le considère cependant comme un nombre quarré,
 cube, &c. de la racine inconnue qu'on ne
 peut trouver, & c'est cette considération qui con-
 duit à l'extraction d'une racine qui approche si
 près de la racine cherchée, qu'il ne s'en faudra pas
 telle fraction qu'on voudra déterminer, qu'on
 aura rencontré au juste la racine de ce nombre.

La règle générale pour parvenir à cette ap-
 proximation est de multiplier le nombre propo-
 sé qu'on considère comme la puissance dont on
 veut extraire la racine, par la puissance sembla-
 ble du nombre qu'on veut être le denominateur
 de la fraction, qui sera jointe à la racine du
 quarré qui approchera le plus près du nombre
 proposé. Par exemple si on veut trouver la raci-
 ne approchée de 39, on fait d'abord réflexion
 que la racine du nombre quarré, qui approche le
 plus près de 39, c'est 6. Mais le quarré de 6
 n'est que 36; il faut donc davantage que 6 pour
 faire la racine quarrée de 39; il faut moins que
 7; parceque le quarré de 7 est 49, qui est plus
 grand que 39. Enfin il faut donc ajouter à 6 une

fraction, de sorte que le carré de 6 , & cette fraction approche des 39 , autant qu'on voudra. Je veux par exemple qu'à cette racine 6 on joigne des treizièmes, & qu'il ne s'en faille

pas $\frac{1}{13}$ qu'on ne sçache précisément la racine

de 39 . Il faut considerer 39 comme un carré, dont on cherche la racine, & à cause des treizièmes qu'on veut avoir, il faut multiplier ce nombre 39 par 169 qui est le carré de 13 , & on aura pour produit 6591 , dont on aura pour racine carrée 81 reste 30 . On negligera ce reste 30 , & on fera seulement attention à cette racine 81 , qu'on divisera par 13 , qui est la racine du

carré 169 ; & on aura pour quotient $6\frac{3}{13}$. Et

partant on conclura que $6\frac{3}{13}$ approche si près

de la racine cherchée, que si on ajoutoit un treizième, on auroit une racine trop grande; par-

ceque le carré de $6\frac{4}{13}$ est $\frac{6724}{169} = 39\frac{133}{169}$, au

lieu que le carré de $6\frac{3}{13}$ est $\frac{6561}{169} = 38\frac{139}{169}$.

On doit opérer de la même manière à l'égard des autres nombres dont on veut extraire les racines approchées, & ce qu'on dit à l'égard des treizièmes; on le peut dire de même de toute autre fraction qu'on se veut proposer.

Mais à cause que dans l'approximation des racines carrées, cubes, ou toute autre que ce soit, il est beaucoup plus facile de se servir des

centièmes, qu'on appelle fractions décimales, ou millièmes, ou millièmes parties, &c. pour ajouter à la racine du nombre carré qui approche le plus près de celui qu'on se propose. C'est pour cela que si on veut faire l'extraction de la racine carrée d'un nombre qui n'est point carré, on ajoute à ce nombre 00, parcequ'il se trouve par ce moyen multiplié par 100, carré de 10. Si on écrit ensuite à ce nombre proposé quatre zeros, il se trouvera multiplié par 10000, qui est le carré de 100, & alors on aura pour fraction des centièmes. Enfin quand on ajoute des zeros, il faut toujours les ajouter deux à deux à cause des quarrés de 10, 100, 1000, &c. On voit par ce moyen que plus on ajoutera de zeros, plus la racine trouvée approchera de celle qu'on cherche. On est par exemple plus assuré qu'on est plus proche de la racine qu'on cherche, s'il s'en faut moins qu'une millième partie d'unité, que s'il s'en falloit moins qu'une dixième.

Par exemple pour avoir la racine approchée de 24, j'ajoute ensuite de 24 deux zeros, & par ce moyen 24 se trouvera multiplié par 100 qui est le carré de 10, ce qui produira 2400 dont on aura pour racine 48, reste 96 qu'on negli-

gera, & on divisera 48 par 10, on aura $4\frac{8}{10}$

$= 4\frac{4}{5}$, qui sera la racine carrée approchée

de 24.

Si on vouloit faire par approximation l'extraction de la racine cubique d'un nombre qui ne seroit pas cube, on lui ajouteroit 3 zeros, ou 6 zeros, ou 9, &c. parcequ'alors le nombre pro-

posé étant considéré comme cube de la racine cherchée, se trouveroit multiplié par 1000, qui est le cube de 10; ou par 1000000, qui est le cube de 100. Ensuite on tireroit la racine cubique de ce produit, & on diviseroit cette racine trouvée par 10, si on avoit ajouté 3 zeros, par 100, si on en avoit ajouté 6; &c. on auroit au quotient de cette division la racine cubique approchée qu'on chercheroit.

Si on vouloit faire par approximation l'extraction de la racine 4^e d'un nombre qui ne seroit pas précisément une 4^e puissance, on lui ajouteroit 4 zeros, ou 8 zeros, &c. ensuite on feroit l'extraction de la racine 4^e, suivant les regles generales qu'on a pratiquées pour les extractions de racines quarrées, &c. enfin on opereroit, comme on vient d'enseigner.

La certitude de cette pratique est facile à comprendre. Soit le nombre 39 qu'on vient de proposer dans un des exemples precedents; puisqu'il est considéré comme un quarré dont on cherche la racine, on aura $39 = aa$. Soit l'autre nombre pris à volonté $13 = b$, dont le quarré $169 = bb$; si on multiplie aa par bb , on aura $aabb$, dont la racine quarrée est ab , puisque ab multiplié par lui-même, produit $aabb$. Or cette racine ab étant divisée par $b = 13$, donne pour quotient a qui est la racine de $aa = 39$. Soit par exemple 56 dont on cherche la racine cubique: puisqu'on considère ce nombre comme cube, on aura $56 = a^3$. Soit un autre nombre, par exemple $1000 = b^3$, dont la racine cubique est $10 = b$; si on multiplie a^3 par b^3 , on aura pour produit $a^3 b^3 = 56000$, dont la racine cubique est ab . Or cette racine étant divisée par $10 = b$, on aura a pour la racine cubique de 56.

On fera un pareil raisonnement à l'égard de l'extraction de la racine des autres puissances lorsqu'on veut avoir des racines approchées. On voit évidemment que la fraction jointe au nombre entier qui est la racine exacte de la puissance qui approche le plus près du nombre proposé seroit précisément la racine cherchée, s'il ne restoit rien après ces dernières extractions. Mais à cause de ce reste qu'on est obligé de négliger, on ne peut avoir que des racines approchées.



DES RACINES

*dont on ne peut faire l'extraction
exactement.*

1. **U**NE puissance parfaite est celle dont on peut extraire la racine sans reste. Par exemple a^3 est une puissance parfaite ; parce que la racine exacte est a . Le nombre 25 est une puissance parfaite : mais $a b$ n'est pas une puissance parfaite, ni 12, &c.

2. Lorsqu'on ne peut faire l'extraction de la racine d'un nombre proposé sans qu'il reste quelque chose, souvent on se contente d'exprimer cette racine par ce signe $\sqrt{\quad}$, appelé *Signe radical*. On écrit ce signe devant le nombre proposé, & sur ce même signe on écrit encore un chiffre qui est l'exposant de la racine dont il s'agit ; on l'appelle aussi *l'exposant du signe radical*. Par exemple, pour exprimer la racine quar-

racine, on écrit $\sqrt{2}$; la racine cubique, on écrit $\sqrt[3]{}$;

la racine de la 4^e puissance, on écrit $\sqrt[4]{}$, &c. Lorsqu'on écrit seulement ce signe $\sqrt{}$ devant quelque grandeur, cela signifie racine quarrée.

Par exemple cette expression $\sqrt{158}$, ou $\sqrt[2]{158}$,

signifie la racine quarrée de 158; $\sqrt[3]{abc}$, c'est à dire, racine cubique de abc . Si la grandeur dont on veut exprimer la racine, à plusieurs parties; on écrit le signe radical devant cette grandeur, & depuis le signe on mene une ligne au dessus de la grandeur, pour marquer qu'elle est toute sous ce même signe. Par exemple

$\sqrt[4]{a + bc}$, cela signifie la racine 4^e de $a + bc$; & ainsi des autres. Pour exprimer la racine dont il s'agit, on se contente d'écrire le signe radical devant les grandeurs litterales dont on ne peut extraire cette racine sans qu'il y ait un reste.

3. Les racines sourdes, ou irrationnelles, sont celles qu'on ne peut exprimer que par le moyen de ce signe $\sqrt{}$, sur lequel on écrit 2, 3, ou 4, &c. pour exposant de ces racines.

4. Les racines imaginaires ou impossibles sont celles des grandeurs entierement négatives, & lorsque les exposans de ces racines sont des nombres pairs. Par exemple $\sqrt{-38}$, ou $\sqrt{-12}$, ou $\sqrt{-a^4}$, ou $\sqrt{-dd}$, &c. sont des racines imaginaires ou impossibles. Parce qu'on ne peut trouver aucune grandeur telle qu'elle puisse être, soit négative ou positive, dont le quarré ou la 4^e puissance, ou la 6^e, &c.

soient négatives ; puisque , comme on a vu [°] dans la multiplication , $+$ par $+$, ou $-$ par $-$, produit toujours $+$.

Quand on veut approfondir l'Algebre , les racines sourdes sont fort frequentes. Parceque l'extraction des racines , principalement de celles qui sont quarrées , ou qui sont cubiques , est une operation fort ordinaire. Outre cela il est certain qu'il y a plus de nombres qui ne sont ni quarrés ni cubiques , que de nombres quarrés ou cubiques. Par exemple , depuis 1 jusqu'à 30 il n'y a que 4 , 9 , 16 , & 25 qui soient quarrés exactement , & les autres nombres 2 , 3 , 5 , 6 , 7 , &c. ne sont point des puissances parfaites. Ainsi il est évident qu'on doit trouver souvent des racines sourdes. Or on peut ajouter une racine sourde avec une autre racine sourde , ou l'en soustraire , les multiplier , ou les diviser l'une par l'autre , quoiqu'on ne connoisse pas précisément la valeur de chacune , & ces operations , entr'autres la multiplication , sont d'un grand usage dans la pratique de l'Algebre ; c'est pourquoy il est fort necessaire de sçavoir comment on les peut faire sur ces sortes de grandeurs. Pour faire ces operations , il faut premierement sçavoir préparer les racines sourdes , 1°. en les reduisant à un même nom , ou à un même signe ; 2°. En les reduisant à leurs expressions les plus simples , quand cela est possible.

Reduction des grandeurs irrationnelles à un même nom , ou même signe.

Cette preparation est fondée sur un principe

[°] Avertiss. pag. 77.

dont tout le monde convient, qui est qu'une racine est toujours la même, c'est à dire qu'elle ne devient ni plus grande ni plus petite, lorsque de racine quarrée qu'elle étoit, on fait qu'elle est racine cubique, ou racine 4^e, racine 5^e, &c. Par exemple, f est la racine de toutes ces puissances f^2 , f^3 , f^4 , f^5 . Ce qui montre clairement que les racines de ces puissances ne sont pas plus grandes l'une que l'autre.

Pour reduire différentes grandeurs irrationnelles sous un même signe sans changer leur valeur, il faut chercher le plus petit nombre qui puisse être divisé sans reste par les exposans des signes radicaux sous lesquels sont ces grandeurs irrationnelles. Ensuite il faut élever chacune de ces deux grandeurs à une puissance qui ait pour exposant le nouveau nombre, lequel sera aussi l'exposant du nouveau signe radical.

Soient ces racines sourdes \sqrt{bc} & $\sqrt[3]{fg}$ à réduire sous un même signe radical. L'exposant

de $\sqrt{}$ est 2, & l'exposant de $\sqrt[3]{}$ est 3. Pour trouver un nombre qui puisse être divisé sans reste par 2, & ensuite par 3, je peux multiplier 2 par 3 pour avoir 6. Mais parceque cette voye est quelquefois trop longue, j'aime mieux chercher ce nombre en y réfléchissant. Ce nombre 6 me fait donc con-

noître qu'il faut élever \sqrt{bc} & $\sqrt[3]{fg}$ à la 6^e puissance, ce qui se fait en prenant le cube de

bc devant lequel j'écrirai ce signe $\sqrt[6]{}$, & en prenant le quarté de fg devant lequel j'écrirai aussi $\sqrt[6]{}$, & j'aurai $\sqrt[6]{bc} = \sqrt{bc}$, & $\sqrt[6]{ffgg} =$

$\sqrt[3]{fg}$. Car cette grandeur bc est considerée comme un quarré, & \sqrt{bc} en exprime la racine. Or le quarré de bc qui est b^2c^2 est la 4^e puissance de \sqrt{bc} , puisqu'en multipliant un quarré par lui-même, cela forme une 4^e puissance; si on multiplie encore cette 4^e puissance b^2c^2 par bc qui est le quarré de sa racine, cela formera la 6^e puissance cherchée. On fera le même raisonnement pour connoître que $\sqrt[6]{ffgg}$

$$= \sqrt[3]{fg}.$$

Soient les grandeurs irrationnelles \sqrt{cd} & $\sqrt[4]{fgh}$ à reduire à un même nom, ou sous un même signe. Je fais reflexion que le nombre 4 peut être divisé exactement par le nombre 4 qui

est l'exposant de $\sqrt[4]{fgh}$, & que ce même nombre 4 peut aussi être divisé exactement par 2 qui est l'exposant de \sqrt{cd} . Cela fait donc connoître que les puissances de ces deux racines doivent devenir des quatrièmes puissances, & pour cela il faut prendre le quarré de \sqrt{cd} , & on aura $\sqrt[4]{ccdd} = \sqrt{cd}$, & $\sqrt[4]{fgh}$ ne changera point.

Reduction des grandeurs irrationnelles à leurs expressions les plus simples.

Si la grandeur enfermée sous un signe radical étoit une puissance parfaite, c'est à dire; dont on pût tirer une racine exacte; & si l'exposant de cette puissance parfaite étoit égal à l'exposant du signe radical; pour rendre l'expression plus simple, il faudroit seulement ex-

traire la racine exprimée. Soit, par exemple, cette expression \sqrt{cc} ; le signe radical exprime une racine quarrée, & cc est un quarré. Il faut reduire \sqrt{cc} à c qui est la racine de cc . de même il faut reduire cette expression

$\sqrt{bb - 2bc + cc}$ à celle-ci, $b - c$.

Mais si la grandeur contenue sous le signe radical n'est pas une puissance parfaite, ou si son exposant n'est pas aussi l'exposant du signe radical; il faudra reduire l'expression à ses plus simples termes, lorsque cela est possible, en cette sorte.

Il faut diviser la grandeur proposée, par un diviseur qui la puisse diviser exactement, c'est à dire, sans reste, & de sorte que ce quotient soit une puissance parfaite. Si cette grandeur est un nombre, il faut chercher ce diviseur dans les nombres premiers 2, 3, 5, 7, &c. de sorte que, s'il est possible, il soit tel que le quotient de la division soit un nombre quarré, s'il s'agit d'une racine quarrée, ou cubique; s'il s'agit d'une racine cubique, &c. & s'il se rencontroit plusieurs diviseurs tels qu'on les souhaite, il faudroit toujours preferer le plus grand. Si entre ces quotients, on n'en peut trouver qui soient quarrés, cubes, &c.; on ne peut faire la reduction. Il faut prendre la racine de cette puissance parfaite, c'est à dire, de ce nombre quarré, ou cubique, &c., l'écrire devant le signe radical, & écrire le diviseur après le signe radical.

Soit proposée $\sqrt{a^3 b}$ pour être reduite à l'expression la plus simple. Entre tous les diviseurs qui peuvent diviser exactement $a^3 b$, je trouve ab qui le divise de telle maniere que le quotient aa est un quarré dont je prends la racine a que j'écris devant le signe radical, après ce mè-

Le signe j'écris le diviseur ab ; & je trouve $a\sqrt{ab}$ au lieu de $\sqrt{a^3b}$. J'ai choisi un diviseur tel qu'il me donneit un quarré pour quotient. Parceque $\sqrt{\quad}$ signifie *racine quarrée*. S'il y

avoit eu $\sqrt[3]{a^3b}$, il auroit fallu prendre b pour diviseur, afin d'avoir pour quotient un cube sca-

voir a^3 , & j'aurois écrit $a\sqrt[3]{b}$. On trouvera de même que $\sqrt{ddf} = d\sqrt{f}$; puisque $d = \sqrt{d^2}$. Car multiplier \sqrt{f} par d , dont le produit est $d\sqrt{f}$, ou multiplier $\sqrt{d^2}$ par \sqrt{f} , dont le produit est \sqrt{ddf} ; c'est la même chose.

Soit encore cette autre grandeur $\sqrt[3]{bbcc^3}$ à reduire à une expression la plus simple. Entre tous les diviseurs de $bbcc^3$ il en faut choisir un qui donne pour quotient un quarré. Je trouve que c'est c qui donne pour quotient le quarré $bbcc$ dont j'écris la racine bc devant le signe radical, j'écris le diviseur c après ce signe radical, & je trouve $bc\sqrt{c}$. De même $\sqrt[3]{a^4b^3}$ sera reduite à $ab\sqrt{b}$.

Soit enfin cette racine sourde $\sqrt{80}$, je la reduirai à cette expression plus simple & équivalente $4\sqrt{5}$, c'est à dire que la racine quarrée de 80 est la même chose que le produit du nombre 4 multiplié par la racine quarrée de 5. Car j'ay divisé 80 par 5, & j'ai trouvé pour quotient le nombre quarré 16. Si je multiplie presentement 16 par 5, j'aurai ^[1]80. En multipliant 16 par 5, je multiplie^[2] aussi la racine de 16 par la racine de 5, & le produit de ces deux racines est égal à la racine de 80. La racine de 16 est 4

[1] Cor. 3. de la division pag. 42.

[2] Demonst. de la Multip. des rac. sourdes pag. 129.

c'est pour cela qu'on écrit $4\sqrt{5}$ au lieu de $\sqrt{20}$; Cela est facile à comprendre; puisque $4 = \sqrt{16}$ & que multiplier $\sqrt{16}$ par $\sqrt{5}$, ou 4 par $\sqrt{5}$, c'est la même chose. On réduira de même $\sqrt{12a^3b}$ à cette expression équivalente $2a\sqrt{3ab}$. Car le plus grand diviseur de $12a^3b$ qui puisse donner au quotient des quarrés, sçavoir 4 & aa , c'est 3 & ab .

Si la grandeur proposée sous le signe radical, étoit une fraction; & s'il étoit possible de la réduire à une expression plus simple: il seroit autant facile d'y réussir qu'à l'égard des autres grandeurs. Car pour cela il n'y auroit qu'à réduire le Numerateur à son expression la plus simple, & le dénominateur pareillement à son expression la plus simple; & alors ce numerateur & ce dénominateur ainsi réduits, seroient le numerateur & le dénominateur d'une nouvelle fraction égale à la proposée.

Soit, par exemple, $\sqrt{\frac{b^3c}{ddf}}$ à réduire à son expression le plus simple. Le numerateur sera réduit à $b\sqrt{bc}$, & le dénominateur sera réduit à $d\sqrt{f}$; dont on formera la fraction $\frac{b\sqrt{bc}}{d\sqrt{f}}$ qui sera égale à $\sqrt{\frac{b^3c}{ddf}}$.

Si on propose $\sqrt{\frac{48}{27}a^3b}$, ou $\sqrt{\frac{48a^3b}{27}}$, à réduire à l'expression la plus simple, on trouve $\frac{4a\sqrt{3ab}}{3\sqrt{3}}$. Mais le numerateur de cette fra-

tion $\frac{4a\sqrt[3]{ab}}{3\sqrt[3]{3}}$ se trouvant multiplié par $\sqrt[3]{3}$, &

étant en même temps divisé par $\sqrt[3]{3}$; puisque la Division détruit ce que fait la Multiplication : on aura donc encore cette fraction

$\frac{4a\sqrt[3]{ab}}{3\sqrt[3]{3}}$ réduite à son équivalente $\frac{4a\sqrt[3]{ab}}{3}$.

REMARQUE.

Si on élève ce qui est écrit devant le signe radical, à la puissance exprimée par l'exposant de ce même signe, & si on multiplie ce qui est sous le signe radical par cette nouvelle puissance; au lieu d'une expression plus simple, ce produit en donnera une plus composée, & on pourra mettre le tout sous le même signe radical, pour avoir la même expression qui étoit auparavant la réduction.

Soit, par exemple, $3b\sqrt[2]{af}$. Si j'éleve $3b$ à la puissance exprimée par $\sqrt[2]{}$, je trouverai $9bb$ pour le carré de $3b$. Si je multiplie $9bb$ par af , je trouverai $9bbaf$, & remettant le signe radical $\sqrt[2]{}$ devant ce produit, j'aurai $\sqrt[2]{9bbaf} = 3b\sqrt[2]{af}$. Ceci sert pour s'assurer si on a bien fait la réduction de la grandeur irrationnelle, à sa plus simple expression.

Par ce même moyen il est tres-facile de mettre une grandeur proposée sous un tel signe radical qu'on voudra, en l'élevant à la puissance du signe radical sous lequel on veut mettre cette grandeur. Par exemple, si on veut mettre bc

sous $\sqrt[3]{}$, il faut écrire $\sqrt[3]{b^3c^3}$.

Lorsqu'on veut réduire des grandeurs irra-

tionnelles à un même nom, si elles avoient déjà été réduites à leurs expressions les plus simples; il faut les remettre dans leur premier état, en mettant le tout sous leurs signes radicaux, comme je viens d'enseigner.

De l'Addition des grandeurs irrationnelles.

La methode generale pour assembler plusieurs racines sourdes est de les écrire de suite, en mettant devant chacune le signe radical avec l'exposant de la racine qu'on veut exprimer, & en interposant le signe $+$. Par exemple cette grandeur \sqrt{bc} sera ajoutée à \sqrt{fg} en cette maniere $\sqrt{bc} + \sqrt{fg}$. Pour ajouter la racine cubique de 7 avec la racine 5^e de 14, il faut écrire

$$\sqrt[3]{7} + \sqrt[5]{14}.$$

Les grandeurs irrationnelles étant reduites à des expressions simples, & étant de même nom, ou reduites aux mêmes signes; si les grandeurs qui sont sous le signe radical sont égales, il faut ajouter ce qui est devant le signe radical, & laisser sous ce même signe ce qu'on y a trouvé.

Soit par exemple $4\sqrt{2}$ à ajouter avec $3\sqrt{2}$, il faut dire 4 & 3 font 7 , & écrire $7\sqrt{2}$ pour la somme qu'on cherche; ce qui est évident. Car soit $\sqrt{2} = a$. On aura donc $4\sqrt{2} = 4a$; & $3\sqrt{2} = 3a$. Donc $7\sqrt{2} = 7a$.

R E M A R Q U E.

La somme des racines de 19 & de 23 est plus grande que la racine de 42 qui est la somme de 19 & de 23 : de même que la somme des racines de 4 & de 9 est plus grande que la racine de 13

qui est la somme de 4 & de 9. Car la somme des racines de 4 & de 9 est 5, & la racine de 13 n'est pas 4.

De la Soustraction des grandeurs irrationnelles.

Pour retrancher une racine sourde d'une autre, il faut écrire celle dont on veut retrancher, & ensuite écrire l'autre précédée du signe —.

Pour retrancher $\sqrt[3]{bc}$ de $\sqrt[6]{b^4}$ il faut écrire $\sqrt[6]{b^4} - \sqrt[3]{bc}$.

Les grandeurs irrationnelles étant reduites à des expressions simples, & étant de même nom; si les grandeurs qui sont sous le signe radical sont égales, il faut soustraire l'une de l'autre celles qui sont devant le signe radical. Par exemple pour retrancher $5\sqrt{7}$ de $8\sqrt{7}$, on écrira pour reste $3\sqrt{7}$.

De la Multiplication des grandeurs irrationnelles.

Il faut les reduire, au moins, à même nom, ou sous des signes semblables. Ensuite il faut multiplier les grandeurs dont les racines sont proposées, l'une par l'autre, & devant le produit écrire le signe radical avec son exposant, comme il étoit à chacune de ces grandeurs avant, qu'elles fussent multipliées.

Soit \sqrt{df} à multiplier par \sqrt{gh} , le produit sera \sqrt{dfgh} . Pour multiplier $\sqrt{9}$ par $\sqrt{6}$, il faut écrire $\sqrt{54}$ qui sera le produit.

Pour rendre raison de cette maniere de multiplier les racines sourdes, il faut remarquer que la racine du produit de deux puissances de même

nom multipliées l'une par l'autre est égale au produit des racines de ces deux puissances. Car soit le carré xx multiplié par yy , on aura xy dont la racine carrée est xy qui est le produit des racines x & y des deux carrés xx & yy . De même, si on multiplie le cube f^3 par h^3 , on aura le produit $fffhhhh$ dont la racine cubique fh est égale au produit des racines cubiques f & h de ces deux puissances; ce qui est aussi évident pour les autres puissances. Or à l'égard de ces grandeurs, par exemple $\sqrt{9}$ & $\sqrt{6}$, j'ai considéré 9 & 6 comme des carrés dont les racines sont inconnues. Soit $\sqrt{9} = x$, & $\sqrt{6} = z$; j'aurai $9 = xx$, & $6 = zz$. Au lieu de multiplier 9 par 6 , on peut donc multiplier ce qui leur est égal, savoir xx par zz , & on aura $xxzz = 54$, dont la racine $xz = \sqrt{54}$.

Si les racines sourdes qu'on veut multiplier l'une par l'autre, étant de même nom, ont aussi été réduites à des expressions plus simples; il faudra multiplier les grandeurs qui précèdent les signes radicaux, l'une par l'autre, & écrire le produit devant un de ces signes. Il faudra aussi multiplier les grandeurs qui sont sous les signes radicaux, & écrire le produit sous ce même signe; alors on aura le produit qu'on cherchoit.

Soit $b\sqrt{c}$ à multiplier par $f\sqrt{g}$, je multiplierai b par f , & j'écrirai le produit bf devant le signe radical. Je multiplierai aussi c par g , & j'écrirai le produit sous le signe radical \sqrt{cg} pour avoir ce produit $bf\sqrt{cg}$.

De même $\sqrt{2}$ étant multipliée par $3\sqrt{7}$ donne pour produit $15\sqrt{14}$.

Pour faciliter davantage la multiplication de ces sortes de grandeurs dans toutes les circonstances

Rances, il faut remarquer qu'on peut écrire \sqrt{x} devant ou après le signe radical, quand même il ne s'y seroit pas trouvé auparavant. Parceque

$$a = \sqrt{1a} = \sqrt{1a^1} = \frac{1a^1}{1} = \frac{1a^1}{1} \sqrt{1}, \text{ c'est à dire}$$

que devant a on ^[1] sous-entend 1 ; on considère a comme une première puissance ^[2] dont l'exposant est 1 ; on considère a comme une fraction ^[3] dont le diviseur est 1 ; enfin on considère a comme multiplié par $\sqrt{1}$, puisque $\sqrt{1} = 1$, ou que 1 est la racine de toutes les puissances de 1 . Il faut dire la même chose de toute autre grandeur simple, par exemple ab , ggh , &c.

C'est sur ce principe que, pour multiplier cette grandeur $df\sqrt{g}$ par \sqrt{hmn} , au lieu de \sqrt{hmn} j'écrirai $1\sqrt{hmn}$. Et, comme je viens d'enseigner, je multiplierai df par 1 , ce qui ne produira que df , ensuite je multiplierai g par hmn , pour avoir $ghmn$, & le produit que je cherchois sera $df\sqrt{ghmn}$.

Le produit de $b\sqrt{af}$ par $c\sqrt{af}$ est $bc\sqrt{aaff}$. Or dans ce produit $bc\sqrt{aaff}$, on trouve $aaff$ qui est un carré dont la racine est af qui multiplie bc . On trouvera donc que $bc\sqrt{aaff} = bc\sqrt{af}$, en multipliant bc par \sqrt{aaff} . Cela fait voir que, quand on multiplie des racines sourdes l'une par l'autre, si les mêmes grandeurs se trouvent sous les signes radicaux de la 2^e puissance, le produit des grandeurs qui précèdent les signes radicaux étant multiplié par la grandeur qui se trouve sous un de ces signes, donne le produit qu'on cherche.

Enfin si on multiplie $af\sqrt{bd}$ par $5\sqrt{bd}$, le

[1] Demande 5. d'Algeb. pag. 70.

[2] Pag. 95. & 96. Def. 3. & 7.

[3] Pag. 53.

produit sera \sqrt{afbd} . De même cette grandeur \sqrt{fgh} multipliée par \sqrt{fgh} , ou, ce qui est la même chose, $1\sqrt{fgh}$ par $1\sqrt{fgh}$, fait $1fgh = fgh$.

S'il y a des fractions devant le signe radical, ou sous le signe radical, même devant & après ce même signe; la multiplication de ces racines sourdes n'en sera pas plus difficile. Soit la

grandeur $\frac{b}{c}\sqrt{\frac{g}{c}}$ à multiplier par $f\sqrt{\frac{gh}{c}}$, ou,

ce qui est la même chose, $\frac{b}{c}\sqrt{\frac{g}{c}}$ par $\frac{f}{1}\sqrt{\frac{gh}{c}}$;

le produit sera $\frac{bf}{c}\sqrt{\frac{ggh}{cc}}$, qu'on réduira à

$\frac{bfg}{cc}\sqrt{gh}$. Parcequ'en divisant $\frac{ggh}{cc}$ par h , on a

pour quotient le carré $\frac{gg}{cc}$, dont la racine $\frac{g}{c}$

multiplie $\frac{bf}{c}$.

Si on multiplie $\frac{b}{c}\sqrt{\frac{f}{b}}$ par \sqrt{b} , ou par

$\frac{1}{1}\sqrt{\frac{b}{1}}$ qui est la même chose que \sqrt{b} , on

aura $\frac{b}{c}\sqrt{\frac{fb}{b}}$ pour le produit qui est égal à

$\frac{b}{c}\sqrt{f}$. Parceque $\frac{fb}{b} = f$. On dira la même

chose des autres.

Après ce qu'on a vu jusqu'ici, on ne trouvera aucune difficulté dans la multiplication des grandeurs irrationnelles complexes, c'est à dire,

dans la multiplication des grandeurs irrationnelles composées de plusieurs parties. Car il faut faire la multiplication de ces sortes de grandeurs à la maniere ordinaire, en multipliant chacune des parties de la grandeur à multiplier, par chacune des parties du multiplicateur, & la somme de tous leurs produits formera le produit total.

Soit $f + g\sqrt{m}$ à multiplier par $f + g\sqrt{m}$. Après les avoir écrites l'une sous l'autre, je dis f multipliée par f fait ff , j'écris ff . Ensuite je dis $g\sqrt{m}$ multipliée par f , fait $fg\sqrt{m}$ que j'écris. Je dis encore, f multipliée par $g\sqrt{m}$ fait $fg\sqrt{m}$ que j'écris. Enfin $g\sqrt{m}$ multipliée par $g\sqrt{m}$, fait $gg\sqrt{m}\sqrt{m} = ggm$ que j'écris aussi, & je trouve pour le produit total $ff + 2fg\sqrt{m} + ggm$.

$$\begin{array}{r} f + g\sqrt{m} \\ f + g\sqrt{m} \\ \hline ff + fg\sqrt{m} \\ fg\sqrt{m} + ggm \\ \hline ff + 2fg\sqrt{m} + ggm. \end{array}$$

Je trouverai par la même Methode que cette grandeur $5f + 3b\sqrt{d}$ multipliée par $2f - m\sqrt{u}$, fait $10ff + 6fb\sqrt{d} - 5mf\sqrt{u} - 3mb\sqrt{du}$.

Si on se propose $m\sqrt{nu + xy}$ à multiplier par $\sqrt{nu + xy}$; on trouvera $mn + mxy$ pour produit. Car nu & xy sont considérées comme une seule grandeur qui est sous le même signe radical.

Or $nu + xy$ est le carré de $\sqrt{nu + xy}$. Pour multiplier ces deux grandeurs l'une par l'autre il suffit donc d'ôter le signe radical, & de multiplier $nu + xy$ par m qui precede. De même, si on

multiplie $b\sqrt{bf + cc}$ par $b\sqrt{bf + cc}$, le

produit sera $b^3f + bbcc$. Mais $b\sqrt{bf+cc}$
multipliée par $b\sqrt{bf-cc}$, fait $bb\sqrt{bbff-c^2}$.

Parceque $b\sqrt{bf+cc}$, & $b\sqrt{bf-cc}$ ne
sont pas la même grandeur.

Si on avoit $m\sqrt{nu+xy}$ à multiplier par
 $fg-hm$, il faudroit mettre $fg-hm$ sous le
signe radical comme j'ai enseigné [1]; & alors

on auroit $m\sqrt{nu+xy}$ à multiplier par
 $\sqrt{ffgg-2fghm+hhmm}$.

Enfin si on multiplie $\sqrt{bc} + \sqrt{mm-ux}$
par $\sqrt{bc} - \sqrt{mm-ux}$, le produit sera
 $bc - mm - ux$. Pour entendre cela, il suf-
fit présentement de faire attention à l'opera-
tion.

$$\text{Mult. } \sqrt{bc} + \sqrt{mm-ux}$$

$$\text{Par } \sqrt{bc} - \sqrt{mm-ux}$$

$$bc + \sqrt{bcm m - bcux}$$

$$- \sqrt{bcm m - bcux} - mm + ux$$

$$\text{Produit } bc - mm + ux.$$

On trouvera par la même methode que

[1] Pages 127. & 128.

$m + \sqrt{ux + yz}$ étant multipliée par $m -$

$\sqrt{ux + yz}$ fait $mm - ux - yz$.

La multiplication des racines sourdes étant assez importante pour qu'on tâche de prevenir toutes les difficultés autant qu'il sera possible, je

proposerai encore un exemple. Soit $\sqrt{ab +}$

$\sqrt{aa - bb}$ à multiplier par $\sqrt{ab - \sqrt{aa - bb}}$; afin de rendre cette operation plus simple, soit $ab = m$, & $aa - bb = n$. J'aurai donc à

multiplier $\sqrt{m + \sqrt{n}}$ par $\sqrt{m - \sqrt{n}}$ dont le

produit est $\sqrt{mm + m\sqrt{n} - m\sqrt{n} - n} =$

$\sqrt{mm - n} = \sqrt{aabb - aa + bb}$, en remettant au lieu de m & de n ce qui leur est égal.

Pour exprimer le produit de deux racines sourdes multipliées l'une par l'autre, on se contente quelquefois de les écrire l'une après l'autre, & on interpose le signe de multiplica-

tion \times . Par exemple pour multiplier $\sqrt[3]{ab + bc}$ par $\sqrt[5]{bd}$, on écrit $\sqrt[3]{ab + bc} \times \sqrt[5]{bd}$.

R E M A R Q U E.

Le produit de deux racines sourdes est connu lorsque le produit des grandeurs dont on a exprimé ces racines est un quarré. Par exemple, on connoît que le produit de $\sqrt{12}$ multipliée par $\sqrt{3}$ est $6 = \sqrt{36}$.

De la division des grandeurs irrationnelles.

Il faut les réduire au moins à même nom, ou sous des signes semblables, comme dans la Multiplication. Ensuite il faut écrire la grandeur dont on exprime la racine à diviser, & au dessous il faut écrire la grandeur dont la racine exprimée est le diviseur. Enfin il faut interposer le signe de division —, & devant le tout mettre le signe radical.

Soit $\sqrt[3]{ab}$ à diviser par $\sqrt[3]{cd}$, il faut écrire $\sqrt[3]{\frac{ab}{cd}}$. Pour diviser f par \sqrt{g} , il faut écrire

$\frac{f}{\sqrt{g}}$. Pour diviser $\sqrt{6}$ par 10, il faut écrire $\frac{\sqrt{6}}{10}$.

Pour démontrer cette operation; soit $\sqrt{18} = y$ & $\sqrt{7} = x$: Je dis que $\sqrt{\frac{18}{7}} = \frac{y}{x}$. Car; puisqu'on considère 18 comme un carré dont la racine est y , on aura $18 = yy$, de même $7 = xx$. Donc $\sqrt{\frac{18}{7}} = \sqrt{\frac{yy}{xx}} = \frac{y}{x}$ [1], ce qu'il falloit démontrer.

Si les racines sourdes qu'on veut diviser l'une par l'autre étant de même nom, ont été réduites à des expressions plus simples; il faudra diviser les grandeurs qui précèdent les signes radicaux, l'une par l'autre, & écrire le quotient devant un de ces signes radicaux. Il faudra aussi diviser les grandeurs qui sont sous les signes radicaux, l'une par l'autre, & écrire le quotient

[1] Pag. 107. & 108.

sous un de ces mêmes signes ; & alors on aura le quotient qu'on cherchoit.

Soit $dh\sqrt[m]{m}$ à diviser par $fh\sqrt[n]{n}$, j'écris $\frac{d}{f}\sqrt[n]{\frac{m}{n}}$. Si je divise $8\sqrt[6]{6}$ par $7\sqrt[6]{6}$, je trouve $\frac{8}{7}\sqrt[6]{\frac{6}{6}} = \frac{8}{7}\sqrt[6]{1} =$

$$\frac{8}{7}$$

S'il y a des fractions dans ces grandeurs irrationnelles, la division de ces racines sourdes n'en sera pas plus difficile. Soit $\frac{b}{m}\sqrt[n]{gn}$ à di-

viser par $\frac{d}{f}\sqrt[h]{hx}$; il faut diviser la fraction

$\frac{b}{m}$ par $\frac{d}{f}$, & le quotient sera $\frac{bf}{dm}$ que j'écrirai devant le signe radical, & sous ce même signe j'écrirai les grandeurs gn & hx en fraction, de cette maniere $\frac{bf}{dm}\sqrt[\frac{n}{h}{x}]{\frac{gn}{hx}}$ ce qui ex-

primera le quotient que je cherchois.

Pour diviser $\frac{m}{n}\sqrt[n]{\frac{mx}{n}}$ par $m\sqrt[n]{nx}$, ou par

$\frac{m}{1}\sqrt[\frac{n}{1}]{\frac{nx}{1}}$, je trouverai $\frac{m}{mn}\sqrt[\frac{mx}{nnx}]$ pour quo-

tient qui est égal à $\frac{1}{n}\sqrt[\frac{m}{nn}]$.

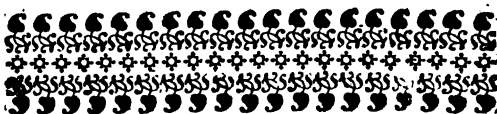
Pour exprimer le quotient d'une racine sourde divisée par une autre, souvent on ne fait qu'écrire la grandeur à diviser avec son signe radical, & au dessous on écrit l'autre grandeur

aussi avec son signe radical , & on interpose le signe de division — . Par exemple , pour di-

viser $\sqrt{ab + bf}$ par $\sqrt[3]{cd}$, on écrit $\frac{\sqrt{ab + bf}}{\sqrt[3]{cd}}$

Pour diviser $\sqrt[5]{38}$ par $\sqrt[3]{12}$, on écrit $\frac{\sqrt[5]{38}}{\sqrt[3]{12}}$. De

même des autres.



DES COMBINAISONS & des changemens d'ordre.

UN nombre de choses étant déterminé , si on les veut toutes prendre deux à deux , trois à trois , &c. & trouver toutes leurs dispositions ou conjonctions ; l'artifice dont on se fert pour y réussir exactement est appelé *Combinaison*. Si je veux , par exemple , combiner ces quatre grandeurs , ou ces quatre lettres de l'Alphabeth , *a* , *e* , *i* , *o* , & trouver toutes leurs dispositions en les prenant trois à trois ; j'observe un ordre , en commençant par *a* ; & je combine *a* avec lui-même , & avec tous les autres *e* , *i* , &c. en cette sorte , *aa . ae . ai . ao* . Ensuite je combine *e* avec *a* , avec *e* , &c. en cette sorte

ea .

aa. ee. ei. eo. Je fais la même chose à l'égard de *i*, de même enfin à l'égard de *o*. Et je trouve que ces quatre lettres *a, e, i, o*, peuvent être combinées en seize manieres différentes en les prenant 2 à 2. Pour les prendre 3 à 3, je commence à combiner *a* avec *aa, ae, &c.* & j'observe le même ordre que dans la premiere combinaison, en combinant ensuite *b* avec *aa, ae, &c.* Je trouve que ces 4 lettres peuvent être combinées en 64 manieres en les prenant 3 à 3. Ce qui me fait appercevoir que, si je multiplie 64 par 4 qui est le nombre de ces 4 lettres; je trouverai qu'on peut encore combiner ces 4 lettres en 256 manieres, en les prenant 4 à 4. Je peux suivre la même methode pour les nombres qui seront plus grands. Les Logiciens connoissent l'utilité de ceci pour trouver leurs 64 modes. Je me suis aussi servi de cette methode pour trouver trois parties différentes dans la prop. 13. de la Geometrie, & pour en trouver 6 dans la prop. 14. Dans cette dernière occasion je neglige les combinaisons dans lesquelles la même grandeur se rencontre deux fois, & celles qui ne sont différentes que par la transposition des grandeurs. Parcequ'entre quatre différentes choses proposées, j'ai intention d'en supposer deux & de prouver les deux autres. L'art des combinaisons est souvent fort utile.

Les changemens d'ordre ont aussi leur merite particulier. Ce n'est autre chose que la methode de trouver en combien de manieres plusieurs choses proposées peuvent être placées différemment. Je veux sçavoir, par exemple, en combien de manieres différentes ces quatre grandeurs, ou ces quatre lettres *e, f, g, h*, peuvent être placées. La premiere *e* prise seule ne

peut être placée qu'en une maniere. Mais si on lui joint la 2^e, *f* ; on trouve qu'on la peut placer en deux manieres. Car on peut mettre *f* devant ou après *e*, ce qui fera ces deux changemens de place *fe*, *ef*. Si on y ajoute une 3^e qui est *g* : il est évident qu'on peut mettre *g* en trois places de *fe*, sçavoir au commencement ; & cela fera *gfe* ; au milieu & cela fera *fge* ; & à la fin, & cela fera *fe g*. On peut aussi faire la même chose dans *ef*. Ce qui fait voir qu'on peut placer trois choses en six manieres differentes. Si j'ajoute une 4^e lettre, je considere que cette 4^e lettre peut se trouver en quatre places dans chacun des six changemens dont on a trouvé que trois lettres étoient capables. D'où je connois que quatre choses peuvent être placées en six fois quatre differentes manieres, c'est à dire en vingt-quatre. Ce qui fait encore voir que si j'ajoute une 5^e lettre en suivant le même ordre qu'on vient de pratiquer ; elle peut faire vingt-quatre fois cinq changemens : & ainsi de suite. Cette methode peut servir, entr'autres usages, pour trouver tous les changemens possibles des lettres d'un nom, afin de choisir celui qu'on voudra. C'est par ce moyen qu'en ne faisant que changer de place, les lettres du nom d'un sçavant Philosophe de l'Université de Caën, nommé *Petrus Cali*, on a trouvé *Pater Lucis*. En transposant les lettres du mot *Logica*, on trouve *Caligo*.

AVERTISSEMENT.

Dans les démonstrations suivantes des proportions des grandeurs, j'employerai les expressions generales d'Algebre, croyant par ce moyen

meux satisfaire aux applications presqu'infinies qu'on peut faire des veritez que j'y établirai. Je prefere cette voye universelle, l'estimant davantage que la maniere dont on a coûtumé de se servir dans la Geometrie dans laquelle, pour demontrer ces mêmes veritez, on employe ordinairement des lignes; & après cela on pretend, que ce qu'on a démontré par ces lignes, & à l'égard de ces mêmes lignes, doit avoir la même certitude pour les surfaces, les solides, les nombres, & pour toute autre especé de grandeur. Il arrive même assez souvent qu'on se contente dans ces circonstances de s'exprimer par des chiffres. Il est vrai que les chiffres sont utiles pour rendre plusieurs veritez plus sensibles; mais ils ne peuvent passer que pour des exemples qui ne peuvent servir de preuve solide pour une demonstration generale.

Ceux qui commencent à s'appliquer à l'étude des Mathematiques, trouvent souvent de la difficulté à croire que les demonstrations des proportions faites par ces deux dernieres methodes, ayent autant d'étendue, que leurs Auteurs leur en attribuent; c'est pour cela que j'ai mieux aimé demontrer ces veritez par des expressions d'Algebre, qui conviennent à toutes sortes de grandeurs, afin de pouvoir me servir de ces mêmes veritez comme de principes incontestables, tant dans la Geometrie, que dans le reste des Mathematiques. Je ferai en sorte que la maniere dont ces veritez y seront démontrées diminuera le nombre des propositions, sans en diminuer l'étendue; que la nouveauté des demonstrations ne portera aucun préjudice à leur simplicité, & conservera la verité dans sa force, dans sa pureté, & dans son évidence qui en est le caractere inseparable.



DES PROPORTIONS DES GRANDEURS EN GENERAL.

PREMIERE PROPOSITION.

La somme des termes extrêmes d'une proportion Arithmétique, est égale à la somme des termes moyens.

DEMONSTRATION.

SOient en proportion Arithmétique, ces quatre grandeurs $d, f : g, h$; ou 2. 5 : 7. 10, il faut démontrer que l'addition de d avec h , forme une somme ou total égale à celle de f & de g ; c'est à dire, que $d + h = f + g$, ou que 2 + 10 = 5 + 7.

Que la différence de d à f soit nommée b , la différence de g à h sera donc ⁽¹⁾ aussi b . Donc si $d < f$ & $g < h$, il est évident ⁽²⁾ que $d + b = f$, & que $g + b = h$. Et partant les quatre termes de cette proportion peuvent être réduits à cette expression $d, d + b :: g, g + b$. Il faut donc démontrer que le premier terme d & le dernier qui est $g + b$ pris ensemble, sont égaux

⁽¹⁾ *Disf. 5. p. 61.* ⁽²⁾ *Idem. p. 70.*

sur le 1.^{er} terme $d + b$, & au 3.^e terme qui est g , pris ensemble, c'est à dire, que $d + g + b = d + b + g$. Ce qui est évident, puisque de part & d'autre du signe d'égalité il y a des grandeurs égales entr'elles, ce qu'il falloit démontrer.

Si $d > f$ & $g > h$, la démonstration sera faite comme la précédente, & au lieu du premier terme d , on (*) prendra $b + f$; au lieu de g on prendra $b + h$; ou bien au lieu du second terme f , on prendra $d - b$; & au lieu de h , on prendra $g - b$.

Cette proportion 2. 5 : 7. 10. étant la même que celle-ci, 2. 2 + 3 : 7. 7 + 3, il est évident que les termes moyens 2 + 3 + 7 sont la même chose que la somme des extrêmes 2 + 7 + 3; & partant qu'il y a égalité de part & d'autre.

COROLLAIRE I.

Donc dans une progression Arithmétique la somme de deux termes également éloignés des deux extrêmes, est égale à celle des extrêmes. Soit une progression prise à volonté; par exemple, $\div d. e. f. g. h$. Ces termes e & g sont également éloignés des extrêmes d & h ; il faut démontrer que $e + g = d + h$. Il y a (**) même différence entre d & e , qu'entre g & h . Donc ces 4 grandeurs $d. e. g. h$ sont en proportion Arithmétique; & (†) partant $d + h = e + g$.

COROLLAIRE II.

“Dans une proportion continuë, ou dans une

(*) *Ar. 2. d'Algeb.* (†) *Déf. 8. pag. 62.*

(†) *Prop. présente.*

progression dont le nombre des termes est impair, le double du terme du milieu est égal à la somme des termes extrêmes. Soit cette progression Arithmétique $\frac{a}{:} b. c. d. e$, dont le terme du milieu est c . Ce terme c tient ⁽¹⁾ lieu de deux termes, sçavoir de conséquent à b , & d'antécédent à d . Ce seul terme étant repeté peut donc tenir lieu de deux termes moyens, & avec b & d faire cette proportion $b, c : c, d$. Et ⁽²⁾ partant $2c = b + d$; mais on sçait ^[3] que $b + d = a + e$. Donc aussi $2c = a + e$. On dira par la même raison que la somme des deux extrêmes des trois grandeurs qui sont en proportion continuë Arithmétique, est double de la grandeur moyenne.

COROLLAIRE III.

Donc pour trouver à trois grandeurs données une 4^e proportionnelle Arithmétique, il faut retrancher la première de la somme des deux autres. Puisque cette somme est égale à celle de la première & de la 4^e, ce qui restera sera la 4^e proportionnelle cherchée. Par exemple si on a ces trois grandeurs f, g, h , on aura pour 4^e proportionnelle $g + h - f$; c'est à dire, que $f. g : h. g + h - f$.

COROLLAIRE IV.

Pour trouver à deux grandeurs données une 3^e continüement proportionnelle Arithmétique, il faut retrancher la première du double de la 2^e; par exemple à b & à c ; on trouvera pour 3^e proportionnelle $2c - b$; c'est à dire que $\frac{b}{:} b, c$.

(1) Déf. 7. d'Algeb. (2) Prop. presente,

[3] Cor. 2. prop. pres.

21 — b.

COROLLAIRE V.

Pour trouver entre deux grandeurs données une moyenne proportionnelle arithmétique, il faut prendre la moitié de la somme de ces deux grandeurs données; cette moitié sera la moyenne proportionnelle cherchée. Par exemple, entre 2 & 8 je trouverai 5 pour moyenne proportionnelle. Car soit appelée x cette moyenne proportionnelle cherchée; j'aurai donc $2, x : x, 8$. Alors [1] $2x = 10$. Donc [2] $x = 5$.

PROPOSITION II.

Le produit des termes extrêmes d'une proportion geometrique est toujours égal au produit des termes moyens.

DEMONSTRATION.

Soient quatre grandeurs qui forment une proportion geometrique $a, b :: c, d$. Je dis que le produit des termes extrêmes qui est ad , est égal au produit des termes moyens qui est bc .

Je nommerai x l'exposant du rapport de a à b , c'est-à-dire que $\frac{a}{b} = x$; le produit bx du quotient x multiplié par le diviseur b sera [1] égal à la grandeur à diviser a .

[1] Prop. presente.

[2] Ax. 12. Gen.

[3] Cor. 3. de la divis. des Nomb. pag. 42.

Le rapport de c à d est [1] égal à celui de a à b : J'aurai [2] donc aussi $\frac{c}{d} = x$; & [3] $dx = c$.

Je viens de démontrer que l'antecedent $a = bx$ & que l'antecedent $c = dx$: presentement je démontre que le rapport de bx à b , est égal au rapport de a à b ; & que le rapport de dx à d , est égal à celui de c à d . J'ai nommé x l'exposant du rapport de a à b ,

$$\left\{ \begin{array}{l} a . b :: c . d . \\ \frac{a}{b} = x . \quad \frac{c}{d} = x . \\ \text{Donc } bx = a . \text{ Donc } dx = c \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} bx . b :: a . b . \\ dx . d :: c . d . \\ \text{Donc } bx . b :: dx . d . \\ \text{Donc } bdx = bdx . \end{array} \right\}$$

il est évident [4] que l'exposant du rapport de bx à b , est aussi x . Donc [5] $bx . b :: a . b$. Je trouve de même que l'exposant du rapport de c à d est appelé x , & que l'exposant du rapport de dx à d est [4] aussi x . Donc $dx . d :: c . d$.

En la place de la grandeur a je peux donc [5] substituer bx , & en la place de c je peux aussi lui substituer dx . Enfin au lieu de cette proportion $a . b :: c . d$, j'aurai son équivalente, sçavoir, $bx . b :: dx . d$.

Il paroît évidemment que le produit des termes extrêmes de cette dernière proportion est égal au produit des termes moyens ; c'est-à-dire que $bdx = bdx$; puisque de part & d'autre du signe d'égalité on apperçoit les mêmes grandeurs. Or multiplier l'un par l'autre les deux termes extrêmes, & l'un par l'autre les deux termes moyens de cette seconde-proportion $bx . b :: dx . d$. C'est [5] la même

[1] Par supposit.

[2] Cor. 2. def. 12. d'Algeb. page 65.

[3] Cor. 3. de la divis. des Nomb. pag. 42.

[4] Cor. 4. Def. 12. d'Algeb. page 64.

[5] Demande 1. generale, pag. 3.

Algebre.

131

chose que multiplier l'un par l'autre les deux termes extrêmes, & l'un par l'autre les deux termes moyens de la premiere ; puisqu'on vient de voir que ces deux proportions sont égales en toutes manieres. Donc $ad = bc$, ce qu'il falloit démontrer.

En appliquant cette proposition generale à cet exemple particulier qu'on voudra, comme à cette proportion $6 . 2 :: 15 . 5$, on trouvera toujours que $6 \times 5 = 2 \times 15 = 30$.

REMARQUE.

De la même maniere que je viens de faire voir l'égalité ou équivalence des deux analogies ; c'est ainsi que dans le Corollaire de la proposition 3^e suivante, &c. il est facile de faire voir que les rapports de cette proportion $dx : d :: gx : g$ sont égaux aux deux de cette autre analogie $e . d :: e . g$ pour conclure ensuite que ce qui sera démontré de l'une de ces deux analogies sera aussi démontré de l'autre ; parcequ'elles sont égales en toutes manieres. Presque toutes les démonstrations des Propositions suivantes sans en excepter même la premiere partie de la proposition 8^e dépendent de cette seconde proposition & de la 3^e.

COROLLAIRE I.

Dans une progression geometrique, le produit des deux termes également éloignés des deux extrêmes, est égal au produit des termes extrêmes. Par exemple dans cette progression $\div a . b . c . d . e$ les termes b & d sont également éloignés des extrêmes a & e , je dis que $bd = ae$. Car puisque [1] la progression est une suite de rapports égaux

[1] Def. 16. d'Algeb. pag. 66.

entr'eux ; on a $a . b :: d . e$. Donc $[^1]$ $bd = ac$. On démontrera de même que $ec = bd$.

COROLLAIRE II.

• Pour trouver à trois grandeurs données une 4^e grandeur proportionnelle geometrique, il faut multiplier la 3^e par la 2^e ; & diviser le produit par la premiere.

Ce Corollaire est le fondement de la Regle de proportion, ses usages sont en très grand nombre, Soient par exemple ces 3 grandeurs 12 . 8 . 30 . auxquelles je cherche une 4^e proportionnelle geometrique ; c'est-à-dire, que ces 3 nombres m'étant proposez, je veux leur chercher

un 4^e nombre auquel le 3^e qui est 30, soit comme 12 est à 8. Je nommerai x cette 4^e proportionnelle ; & multipliant 30 par 8, je trouverai $[^1]$ $12x = 240$. Or la 12^e partie de $12x$ est $[^2]$ égale à la 12^e partie de 240 ; c'est-à-dire que $x = 20$. Je connoîtrai donc que la valeur de x , ou du 4^e terme, qui est le Nombre que je cherchois, est 20.

En general pour trouver à ces 3 grandeurs f , g , h , une 4^e proportionnelle, je multiplie g par h ; ensuite je divise le produit gh par f ; & j'ai pour 4^e proportionnelle $\frac{gh}{f}$; parceque $[^1]$ le produit des moyennes gh est égal au produit de la premiere grandeur multipliée par cette 4^e proportionnelle inconnue. Presentement je peux prendre $[^2]$ le produit gh pour celui qui seroit venu de la grandeur f , & de la quatrième qui

$[^1]$ Prop. presente.

$[^2]$ Ax. 12. gen.

$[^3]$ Demande 1. gener. pag. 3.

est inconnue

est inconnue, multipliées l'une par l'autre, & partant en divisant ce produit gh par f , le quotient ⁽¹⁾ sera nécessairement la 4^e grandeur proportionnelle inconnue qu'on cherchoit; c'est à

dire, que $f. g :: h. \frac{gh}{f}$.

COROLLAIRE III.

Donc lorsqu'on trouve une fraction dont le numerateur est un produit, il est facile d'y trouver 4 grandeurs proportionnelles. Soit par exemple

$\frac{ab}{c}$: on trouvera ces 4 proportionnelles $c, a :: b, \frac{ab}{c}$, ou $c, b :: a, \frac{ab}{c}$, Puisqu'on voit évidemment que $\frac{ba}{c}$ est une 4^e proportionnelle

au diviseur c & aux deux racines a & b du produit ab .

COROLLAIRE IV.

Donc pour trouver à deux grandeurs données une 3^e continuellement proportionnelle geometrique, il faut diviser le quarré de la 2^e par la premiere, & le quotient sera la 3^e proportionnelle cherchée. Par exemple soient les deux grandeurs a & b , je dis que leur 3^e continuellement

proportionnelle sera $\frac{bb}{a}$; c'est à dire que $a. b. \frac{bb}{a}$, Puisque cette analogie est ⁽²⁾ équi-

[¹] Cor. 4. de la div. page 42. [²] Déf. 15. Algeb.

valente à celle-ci $a, b :: b, \frac{bb}{a}$ ce qui revient à

ce qui est énoncé dans le Corollaire 2 précédent. Enfin entre deux grandeurs données, on aura pour moyenne proportionnelle la racine quarrée du produit de ces deux grandeurs. Par exemple entre 8 & 12, on aura pour moyenne proportionnelle $\sqrt{96}$, c'est à dire que $\frac{8}{\sqrt{96}} = \sqrt{96} = \frac{12}{\sqrt{96}}$.

PROPOSITION III

Si le produit des termes extrêmes de quatre grandeurs est égal au produit des termes moyens, ces quatre grandeurs seront proportionnelles entr'elles.

DEMONSTRATION.

Cette proposition est la converse ou reciproque de la precedente. Soit $a d = b c$, je dis que $a, b :: c, d$. Car si a n'étoit pas à b comme c à d . Il faudroit que la grandeur a fût trop grande ou trop petite; & partant pour avoir $a, b :: c, d$, il faudroit augmenter ou diminuer a de ce qu'il seroit nécessaire pour cela. Supposons, par exemple, qu'il faille ajouter à a la grandeur m . On aura donc $a + m, b :: c, d$. & partant $[1] a d + d m$ sera égal à $b c$: mais $[2] a d = b c$, il faudroit donc $[3]$ que $a d + d m = a d$, c'est à dire que le tout fût égal à une de ses parties, ce qui est $[4]$ impossible. S'il avoit fallu retrancher m de a , on auroit donc en

[1] Prop. 2.

[2] Supposit.

[3] Ax. 13. general. [4] Ax. 2. general.

$m = m, b :: c, d$. Et partant ⁽¹⁾ $ad = dm$
 $= bc$; mais ⁽²⁾ $ad = bc$; donc ⁽³⁾ $ad = dm$
 auroit été égal à ad , c'est à dire que $ad = dm$,
 qui n'est qu'une partie de ad , auroit été égale au
 tout ad , ce qui est ⁽⁴⁾ encore impossible. Donc
 en supposant $ad = bc$; si a n'étoit pas à b com-
 me c à d , il faudroit que le tout fût égal à une
 de ses parties; donc de même qu'il est impossi-
 ble qu'un tout soit égal à une de ses parties, il est
 pareillement impossible que a ne soit pas à b
 comme c à d . Donc $a, b :: c, d$. lorsque
 $ad = bc$, ce qu'il falloit démontrer.

Ces sortes de démonstrations sont appellées
 indirectes, qui font voir qu'il est impossible que
 la chose soit autrement que comme on la pro-
 pose; parceque si elle étoit autrement, on se-
 roit obligé d'accorder une chose évidemment
 fausse, contraire à un axiome. La démonstra-
 tion suivante est directe, parcequ'on y fait voir
 que par une suite nécessaire des principes qu'on
 a établis, la chose doit être telle qu'on la pro-
 pose.

AUTRE DEMONSTRATION.

Soit $ad = cb$, je dis que $a, b :: c, d$. car
 soit $\frac{a}{b} = f$; donc ⁽¹⁾ $bf = a$; & partant dans

le produit ad en substituant bf au lieu de a ;
 on aura $bfd = cb$, & divisant le tout par b ;
 on aura $fd = c$; parceque deux grandeurs
 égales étant divisées par deux grandeurs égales,

⁽¹⁾ Prop. 2. ⁽²⁾ Par suppos. [⁽³⁾] Ax. 18. general.

[⁽⁴⁾] Ax. 2. gen. ⁽⁵⁾ Cor. 3. de la divis. pag. 42.

donnent des quotiens égaux entr'eux, cela est [1] évident. Or au lieu de c troisième de ces 4 grandeurs $a . b . c . d$. si on substitue la grandeur fd qui lui est égale, on aura $a . b . fd$.

d ; on trouvera encore $\frac{fd}{d} = f$. Mais [2]

$\frac{a}{b} = f$. Partant (3) $a . b :: fd . d$. & re-

mettant au lieu de la grandeur fd son égale c , on aura $a . b :: c . d$, ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

On tire immédiatement de cette proposition entr'autres conséquences cinq manières de raisonner, tres celebres dans les Mathematiques, & qui tiennent un des premiers rangs entre les principes de ces sciences.

Pour démontrer la certitude de ces raisonnemens, je prendrai cette analogie $c . d :: e . g$, qui me servira d'exemple pour toutes les autres imaginables qu'on pourra faire à l'égard des autres grandeurs. Que l'exposant du rapport de

c à d soit appelé x ; c'est à dire, que $\frac{c}{d} = x$;

il est constant que $dx = c$, l'exposant du rapport de e à g sera aussi égal à x , puisque [2] les rapports sont égaux; & on aura (4) $gx = e$; & partant au lieu cette analogie $c . d :: e . g$, on aura son équivalente $dx . d :: gx . g$. Cela

[1] Ax. 12. gen. [2] Supposit. (3) Cor. 1. déf. 12. Algeb. (4) Cor. 3. déf. de la divis. p. 42.

Étant bien conçu, il sera tres facile d'appercevoir l'évidence des conclusions suivantes.

$$\text{Si } dx \cdot d :: gx \cdot g :$$

1.

Donc $d \cdot dx :: g \cdot gx$, c'est à dire, le consequent est à l'antecedent, comme le consequent à l'antecedent. Dans les Mathematiques on appelle cette maniere de conclure, *Raison inverse*.

2.

Donc $dx \cdot gx :: d \cdot g$, c'est à dire, l'antecedent est à l'antecedent, comme le consequent au consequent. On appelle cette conclusion, *Raison alterne*.

3.

Donc $dx + d \cdot d :: gx + g \cdot g$, c'est à dire, l'antecedent plus le consequent est au consequent, comme l'antecedent plus le consequent est au consequent. On appelle cette conclusion, *composition de raison*.

4.

Donc $dx - d \cdot d :: gx - g \cdot g$, c'est à dire, l'antecedent moins le consequent est au consequent, comme l'antecedent moins le consequent est au consequent. On appelle cette conclusion, *division de Raison*.

§.

Donc $dx, dx - d :: gx, gx - g$. c'est à dire, l'antecedent est à l'antecedent moins le consequent, comme l'antecedent est à l'antecedent moins le consequent. On appelle cette conclusion, *conversion de Raison*.

Dans chacune de ces cinq dernieres analogies; le produit des termes extrêmes est égal au produit des termes moyens. Par exemple dans la premiere on trouve le produit des termes extrêmes $d gx = d gx$, c'est à dire, égal au produit des termes moyens, puisque de part & d'autre du signe d'égalité, on trouve les mêmes grandeurs. Dans les autres, on trouvera pareille égalité de produits; & partant dans tous ces cinq changemens les quatre grandeurs qui y sont énoncées sont toujours (1) proportionnelles.

Au lieu de cette analogie $dx, d :: gx, g$; reprenant son équivalente $c, d :: e, g$, on en concluera la même chose.

$$\text{si } c . d :: e . g$$

$$\text{Donc } \left\{ \begin{array}{l} \text{invers.} \quad d . c :: g . e . \\ \text{alter.} \quad c . e :: d . g . \\ \text{composit.} \quad c + d . d :: e + g . g . \\ \text{divis.} \quad c - d . d :: e - g . g . \\ \text{convers.} \quad c . c - d :: e . e - g . \end{array} \right.$$

(1) Prop. pres.



PROPOSITION IV.

1°. Le produit d'une multiplication est à une des grandeurs multipliées, comme l'autre grandeur multipliée est à l'unité.

2°. Une grandeur à diviser est au diviseur, comme le quotient est à l'unité.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit la grandeur a multipliée par b : je dis que le produit $a b . b :: a . 1$. ou que $a b . a :: b . 1$. Car [1] $1 a b = a b$. Donc [2] $a b . b :: a . 1$. Ce qu'il falloit démontrer.

Cette vérité étoit déjà connue [3] ; puisque [4] le produit de la multiplication contient autant de fois une des grandeurs multipliées, que l'autre grandeur multipliée contient l'unité. Soit le nombre 5 multiplié par 12, il est évident que le produit $60 . 12 :: 5 . 1$. & que $60 . 5 :: 12 . 1$.

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soit la grandeur c divisée par d , & le quotient soit x : je dis que $c . d :: x . 1$. Car [5] $c = d x$, c'est à dire [1], $1 c = d x$. Donc [2] $c . d :: x . 1$. Ce qu'il falloit démontrer.

L'évidence de cette seconde partie a déjà paru, lorsqu'on a remarqué [6] que la grandeur à di-

[1] Demande 5^e d'Algeb.

[2] Prop. 3.

[3] Cor. 1. Def. 12. Algeb. pag. 64.

[4] Cor. des def. de la Multip. pag. 22.

[5] Cor. 3. de la Division. pag. 42.

[6] Cor. 2. de la Division. pag. 42.

vifér contient autant de fois le divifeur que le quotient contient l'unité. Soit le nombre 40 divisé par 5, dont le quotient est 8; on trouvera que $40.5 :: 8.1$.

COROLLAIRE I.

Lorsqu'il se rencontre un produit de grandeurs littérales, & que dans ce produit on aperçoit les racines de ce même produit; il est facile d'y trouver les termes d'une proportion géométrique & de les arranger. Soit, par exemple, ab , on y trouvera cette proportion $ab.b :: a.1$. ou bien $ab.a :: b.1$.

COROLLAIRE II.

Lorsqu'il se rencontre une fraction ou division indiquée, il est pareillement facile d'y trouver les termes d'une proportion géométrique,

Soit par exemple $\frac{a}{b}$, je dis que $a.b :: \frac{a}{b}.1$,

car $\frac{a}{b}$ exprime le quotient de a divisé par

b . Soit $\frac{7}{9}$, je dis [1] que $7.9 :: \frac{7}{9}.1$. puis

que $\frac{7}{9}$ est le quotient de 7 divisé par 9.

COROLLAIRE III.

La valeur du produit de deux fractions multipliées l'une par l'autre, doit être plus petite que la valeur de chacune de ces deux fractions multipliées, l'une ou l'autre étant plus petite qu'un entier. Parceque [2] le produit de ces deux fractions est à une des fractions multipliées, comme l'autre fraction multipliée est à l'unité. Or, si cette autre fraction multipliée est plus petite qu'un entier, le produit de ces deux fractions sera aussi plus petit que l'une ou l'autre prise à volonté

[1] Part. 2. prop. pres. [2] Part. 1. prop. pres.

Le quotient d'une fraction divisée par l'autre est toujours plus grand que la fraction divisée, lorsque la fraction à diviser est plus petite qu'un

entier. Soit par exemple la fraction $\frac{a}{b}$ divisée

par $\frac{c}{d}$; on aura pour quotient $\frac{ad}{bc}$; je dis que

$\frac{ad}{bc} > \frac{a}{b}$; car $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} :: \frac{ad}{bc} \cdot 1$. & **

$\frac{a}{b} \cdot \frac{ad}{bc} :: \frac{c}{d} \cdot 1$. Or (1) la fraction $\frac{a}{b}$

< 1 . Donc aussi $\frac{a}{b} < \frac{ad}{bc}$; c'est à dire que le

quotient $\frac{ad}{bc}$ est plus grand que la fraction divisée

$\frac{a}{b}$. On avoit déjà remarqué la vérité du Cor-

ollaire present dans la page 56.

PROPOSITION V.

Les grandeurs qui sont également multipliées donnent des produits qui sont entr'eux, comme ces mêmes grandeurs sont entr'elles avant qu'elles soient multipliées.

DEMONSTRATION.

Soient les grandeurs c & d , & qu'on multi-

* Part. I. prop. pres.

** Cor. prop. 3. art. 2. (2) Supposet.

plie l'une & l'autre par une autre grandeur f ;
je dis que $c . d :: cf . df$. Cela est évident
puisque * le produit des termes extrêmes cdf est
égal au produit des termes moyens dcf ; &
partant $c . d :: cf . df$. ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Donc les racines sourdes de même nom ;
reduites aux expressions les plus simples , sont
entre elles comme les grandeurs qui precedent
le signe radical, si dans l'une & dans l'autre des ra-
cines comparées il se trouve des grandeurs éga-
les precedées du signe radical. Par exemple , on
trouvera que $a\sqrt{b} . f\sqrt{b} :: a . f$. puisque a
& f sont également multipliées par \sqrt{b} . de
même ; $\sqrt{7} . 9\sqrt{7} :: 3 . 9$.

COROLLAIRE II.

Il suit de cette proposition qu'on ne change
point la valeur des fractions qu'on réduit à mê-
me dénomination. Par exemple , si on réduit à

même dénomination les fractions $\frac{b}{c}$ & $\frac{d}{f}$, on

aura $\frac{b}{c} = \frac{bf}{cf}$, & $\frac{d}{f} = \frac{cd}{cf}$. car on voit clai-

rement que dans cette réduction b & c sont mul-
tipliées également par f ; & partant. [1] que le

quotient de b divisé par c , c'est à dire, $\frac{b}{c} = \frac{bf}{cf}$.

* Prop. 2. [1] Prop. pref. & Cor. 2. déf. 12. Algeb.

Pareillement dans la fraction $\frac{c d}{e f}$ on voit que c & f sont multipliées également par e ; & partant que $\frac{d}{f} = \frac{c d}{e f}$. Car $d . f :: c d . e f$. c'est à dire * que les quotients $\frac{d}{f}$ & $\frac{c d}{e f}$ sont égaux entr'eux. La même chose paroitra évidemment en reduisant $\frac{4}{5}$ & $\frac{3}{7}$ à même dénomination.

COROLLAIRE III.

Donc lorsque les racines des quarréz sont égales, les quarréz qui en proviennent sont égaux. Par exemple si $a = b$, on aura $aa = bb$. Car [1] $a . b :: aa . bb$. puisque ce n'est rien autre chose que a & b multipliez également, la supposition étant que $a = b$. & partant de même que (2) $a = b$; ainsi $aa = bb$.

COROLLAIRE IV.

Réciproquement les quarréz étant égaux, leurs racines seront égales. Par exemple si $aa = bb$, je dis que $a = b$; car si a n'étoit pas égal à b , on pourroit ajouter à cette grandeur a ou en retrancher ce qui seroit nécessaire pour former une grandeur égale à b . On pourroit par exemple ajouter m pour faire cette somme

* Cor. 3. déf. 12. d'Algebre.

[1] Prop. presente. (2) Par supposit.

$a + m = b$; or si $a + m = b$, on vient de démontrer que le carré de $a + m$ seroit égal au carré de b , c'est à dire que $aa + 2am + mm = bb$; mais ⁽¹⁾ on avoit aussi $aa = bb$. Et partant $aa + 2am + mm$ seroit ⁽²⁾ égal au seul carré aa , c'est à dire le tour à une de ses parties; ce qui est ⁽³⁾ impossible.

Donc enfin si les racines sont inégales, les quarrés seront inégaux; car si les quarrés étoient égaux, les racines seroient égales; ce qui est contre la supposition.

Et au contraire si les quarrés sont inégaux, les racines seront inégales par un raisonnement semblable au précédent.

PROPOSITION VI.

Les quotients des grandeurs également divisées sont entr'eux, comme ces mêmes grandeurs auparavant qu'elles soient divisées.

DÉMONSTRATION.

Soient par exemple les deux grandeurs d & f , & que l'une & l'autre soit divisée par b ; je dis que $d . f :: \frac{d}{b} . \frac{f}{b}$. Cela est évident: car, puisque le produit des termes extrêmes $\frac{df}{b}$ est égal au produit des termes moyens $\frac{fd}{b}$, c'est à dire;

⁽¹⁾ Par supposit. ⁽²⁾ Ax. 13. gener.

⁽³⁾ Ax. 2. gener.

que $\frac{df}{b} = \frac{fd}{b}$, on * aura $d.f :: \frac{d}{b} . \frac{f}{b}$, ce
 qu'il falloit demontrer.

COROLLAIRE I.

Donc on peut reduire une fraction à une expression plus simple, ou à moindre dénomination, sans changer la valeur de cette fraction.

Par exemple pour reduire $\frac{12}{15}$ à une expression

plus simple, je cherche un diviseur commun pour 12 & 15, je trouve que c'est 3, qui divise 12 & 15 également sans reste. Après avoir divisé 12 par 3, on a pour quotient 4, qui sera le numerateur de la nouvelle fraction; & après avoir divisé 15 par la même grandeur 3, le quotient

est 5, qui sera le denominateur. Or $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

puisque [1] 12 sont à 15, comme le quotient de 12 divisé par 3, est au quotient de 15 divisé par

3, c'est à dire, que $12 . 15 :: \frac{12}{3} = 4 . \frac{15}{3} = 5$

on trouvera par le même raisonnement que

$\frac{cd}{fd} = \frac{c}{f}$, en divisant le numerateur cd , & le

denominateur fd par d ,

* Prop. 3. [1] Par la Prop. pres.

COROLLAIRE II.

Donc lorsqu'il y a quatre grandeurs telles que la première ait plus grand rapport à la seconde, que la 3^e à la 4^e, le produit des termes extrêmes est plus grand que le produit des termes moyens. Soit par exemple $a . d > b . c$, je dis que $a c > d b$; car l'exposant du rapport de a à d

soit nommé f , c'est à dire $\frac{a}{d} = f$; au lieu de

la grandeur a , on aura son [1] égale $d f$. Soit

$\frac{b}{c} = g$, on aura aussi $c g = b$. & [2] $f > g$;

Enfin au lieu des quatre grandeurs précédentes $a . d . b . c$, on aura leurs équivalentes $d f . d . c g . c$. Le produit des termes extrêmes, sçavoir $d f c$ est plus grand que $d c g$, qui est le produit des termes moyens; car en divisant $d f c$ & $d c g$ par $d c$, on aura [3] $d f c . d c g :: f . g$. Or [2] $f > g$; donc pareillement $d f c > d c g$, c'est à dire le produit des termes extrêmes est plus grand que le produit des termes moyens $d b$.

[1] Cor. de la divis. pag. 42. [2] Supposé.

[3] Prop. présente.



PROPOSITION VII.

Si on divise des grandeurs égales, ou la même plusieurs fois, par d'autres grandeurs; les quotients seront entr'eux reciproquement comme les diviseurs.

DEMONSTRATION.

Soit la grandeur d divisée par f . Soit encore la même grandeur d divisée par b : je dis que

$\frac{d}{f} \cdot \frac{d}{b} :: b \cdot f$. Car le produit $\frac{df}{f}$ des termes extrêmes de ces quatre grandeurs, est égal

au produit $\frac{db}{b}$ des termes moyens, parceque [1]

$\frac{df}{f} = d$, & $\frac{db}{b} = d$. Donc [2] $\frac{df}{f} = \frac{db}{b}$. On

conclura donc enfin [3] que $\frac{d}{f} \cdot \frac{d}{b} :: b \cdot f$.

Ce qu'il falloit démontrer.

[1] Part. I. de l'Avertiss. pag. 31.

[2] Ax 18. Gen.

[3] Prop. 3.

PROPOSITION VIII.

- 1^o. Les grandeurs égales ont même rapport à une 3^e grandeur ou à des grandeurs égales.
 2^o. Reciproquement les grandeurs qui ont même rapport à une 3^e grandeur, ou à des grandeurs égales, sont égales entr'elles.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit $a = b$, je dis que $a . c :: b . c$. car [1]

$$\frac{a}{c} . \frac{b}{c} :: a . b, \text{ mais } [2] a = b. \text{ Donc } \frac{a}{c} = \frac{b}{c}.$$

& partant [3] $a . c :: b . c$, ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soit $h . d :: f . d$, je dis que $h = f$. Car

[1] Prop. 6.

[2] Par supposit.

[3] Def. 12, & Cor. I. def. 12. d'Algeb.

(¹) $\frac{b}{d} = \frac{f}{d}$. mais (²) $b . f :: \frac{b}{d} . \frac{f}{d}$. Donc
 $b = f$. ce qu'il falloit demontrer.

PROPOSITION IX.

- 1^o. Une même grandeur a même rapport à des grandeurs égales entr'elles.
 2^o. Réciproquement si une même grandeur a même rapport à d'autres grandeurs, ces dernières grandeurs seront égales entr'elles.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit par exemple la grandeur c , & $d = f$; je dis que $c . d :: c . f$. cela sera (¹) évident si

$\frac{c}{d} = \frac{c}{f}$. Or c'est une chose constante; car (²)

$\frac{c}{d} . \frac{c}{f} :: f . d$. or (¹) $f = d$. donc $\frac{c}{d} = \frac{c}{f}$.

& partant $c . d :: c . f$. ce qu'il falloit demontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Soit $g . b :: g . m$. je dis que $b = m$. car

(¹) Par supposit. & Cor. 2. déf. 12. Alg. (²) Prop. 6.

(³) Cor. 1. déf. 12. Alg. (⁴) Prop. 7.

$$[F] \frac{g}{b} = \frac{g}{m} \text{, or } [1] \frac{g}{b} \cdot \frac{g}{m} :: m, b \text{, donc de}$$

même que $\frac{g}{b} = \frac{g}{m}$, ainsi $m = b$, ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION X.

1°. La plus grande de deux grandeurs a plus grand rapport à une 3^e grandeur ou à grandeurs égales, & la plus petite à plus petit rapport à cette 3^e grandeur.

2°. Reciproquement si de deux grandeurs la première a plus grand rapport à une 3^e, & si la seconde a un moindre rapport à cette 3^e; la première grandeur sera plus grande que la seconde.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit la grandeur $a > b$, je dis que $a \cdot c > b$:

c'est à dire, que $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. car [1] les quotients de $\frac{a}{c}$ & de $\frac{b}{c}$ seront entr'eux comme a à b ; mais [2] $a > b$; donc $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$, c'est à dire;

[4] $a \cdot c > b \cdot c$, ce qu'il falloit démontrer.

[1] Par supposit. & Cor. 2. déf. 12. d'Algeb.

[2] Prop. 7. [3] Prop. 6.

[4] Cor. 1. déf. 12. d'Algeb.

D E M O N S T R A T I O N
D E L A S E C O N D E P A R T I E .

Soit $a . c > b . c$, c'est à dire , que
 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. je dis que $a > b$. car [1] $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} ::$
 $a . b$. mais [2] $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. donc pareillement
 on aura $a > b$. ce qu'il falloit démontrer.

P R O P O S I T I O N X I .

- 1^o. Une 3^e grandeur a un plus petit rapport à la plus grande de deux grandeurs inégales , & a plus grand rapport à la plus petite grandeur.
 2^o. Reciproquement , si une 3^e grandeur a un plus petit rapport à une des deux grandeurs , & un plus grand rapport à l'autre ; la premiere de ces grandeurs sera plus grande que la seconde . }

D E M O N S T R A T I O N
D E L A P R E M I E R E P A R T I E .

Soit $d > f$, & soit une 3^e grandeur par exemple h , je dis que $h . d < h . f$. c'est à dire que
 $\frac{h}{d} < \frac{h}{f}$. car [3] $\frac{h}{d} \cdot \frac{h}{f} :: f . d$. or [2] $f < d$.
 Donc $\frac{h}{d} < \frac{h}{f}$. Donc [4] $h . d < h . f$. ce qu'il falloit démontrer.

[1] Prop. 6.

[2] Par supposit.

[3] Prop. 7.

[4] Cor. 1, def. 12. Algeb.

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soit $d.g < d.b$, c'est à dire, si $\frac{d}{g} < \frac{d}{b}$,

je dis que $g > b$, car [1] $\frac{d}{g} \cdot \frac{d}{b} :: b.g$. Or

[2] $\frac{d}{g} < \frac{d}{b}$. Donc pareillement $b < g$, ou, ce qui est la même chose, $g > b$, ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XII.

Si des grandeurs proportionnelles sont multipliées par d'autres grandeurs proportionnelles de même ordre; leurs produits seront proportionnels entr'eux.

DEMONSTRATION.

Soient plusieurs rangées de grandeurs proportionnelles, par exemple $a.b :: c.d$, & $e.f :: g.h$. écrives l'une sous l'autre; de sorte que les antecedens e & g d'une rangée soient sous les antecedens a & c de l'autre, & les consequens f & h de l'une sous les consequens b & d de l'autre, & toujours dans ce même ordre, quelque nombre qu'il y ait de ces rangées; si on multiplie par ordre les antecedens a & e , c & g l'un par l'autre, & si on multiplie aussi par ordre les consequens b & f , d & h l'un par l'autre: un produit $a e$ des antecedens sera au produit $b f$ de leurs consequens, comme un autre produit $c g$ des autres antecedens sera au produit $d h$ de leurs consequens; & ainsi de suite. Pour le démontrer,

[1] Prop. 7.

[2] Supposé.

dans la premiere analogie soit l'exposant du rapport de a à b nommé x , c'est à dire,

$$\frac{a}{b} = x.$$

$$\begin{array}{l} a . b :: c . d . \\ e . f :: g . h . \end{array}$$

Donc $b x$

$= a$; mais puisque ^[1] le rapport de c à d est égal au rapport de a à b , on aura ^[2] aussi

Les memes que les grandeurs precedentes. $\left\{ \begin{array}{l} b x . b :: d x . d ; \\ f x . f :: h x . h ; \end{array} \right.$

$$\text{donc } b x f x . b f :: d x h x . d h .$$

$$\frac{c}{d} = x, \&$$

$$\text{donc enfin } a e . b f :: c g . d h .$$

partant $d x = c$. Dans la seconde analogie soit

$$\frac{e}{f} = x, \text{ on aura } f x = e; \text{ par la même raison}$$

que dans l'analogie precedente, on trouvera

$$\text{aussi } \frac{g}{h} = x, \& \text{ le produit } h x = g. \text{ Dans la}$$

premiere proportion, au lieu de l'antecedent a on prendra ce qui lui est égal, sçavoir $b x$; & au lieu de c on prendra $d x$. Dans la seconde proportion, au lieu de l'antecedent e on prendra ce qui lui est égal, sçavoir $f x$; & au lieu de g on prendra $h x$. De sorte qu'en la place des deux analogies proposées, on aura leurs équivalentes, $b x . b :: d x . d .$ & $f x . f :: h x . h .$ Or il est constant que le produit $b x f x$ des premiers antecedents est au produit $b f$ des

[1] Supposit. [2] Cor. 2, déf. 12. d'Algeb.

premiers consequents, comme le produit dx
 bx des seconds antecedents est au produit db
 des seconds consequents; c'est à dire, que
 $bx \cdot fx \cdot bf :: dx \cdot bx \cdot db$. Car le produit des
 termes extrêmes $bx \cdot fx \cdot db = bf \cdot dx \cdot bx$ produit
 des termes moyens: ce qui paroît évidemment,
 puisque de part & d'autre du signe d'égalité on
 aperçoit les mêmes grandeurs; & partant si au
 lieu du produit des antecedents bx & fx , on
 prend le produit ae des antecedents a & e qui leur
 sont égaux; & au lieu du produit des ante-
 cedents dx & bx , si on prend le produit de
 leurs égaux, sçavoir cg ; on aura $ae \cdot bf ::$
 $eg \cdot db$. ce qu'il falloit démontrer.

S'il y avoit plus de deux rangées de propor-
 tionnelles; par exemple, s'il y en avoit 3, 4, 5,
 &c. on se serviroit pour la démonstration du mê-
 me raisonnement qu'on vient de mettre en
 usage.

COROLLAIRE I.

La proposition présente & la 6^e sont le fon-
 dement de deux autres manieres de composer
 les grandeurs proportionnelles, qui sont enco-
 re d'un grand usage dans les Mathematiques.
 Et on peut dire que les cinq manieres énoncées
 par le Corollaire de la proposit. 3. avec les
 deux suivantes, sont si nécessaires pour avancer
 dans les Mathematiques, qu'il faut avouer que
 ceux qui voudroient y prétendre sans le secours
 de cette subtile dialectique, feroient des efforts
 inutiles. Cependant quoique d'abord il s'en
 trouve qui ont quelque peine à s'y accoutumer, il
 ne faut pas pour cela y renoncer; parceque la
 fréquente application qu'on en fera dans la suite
 les rendra tres-familieres.

I.

Soient deux rangées de quatre grandeurs ; par exemple $a . b . c . d .$ & $b . f . d . b .$ telles que $a . b :: c . d .$ & $b . f :: d . b .$, je les arrange en écrivant le second antecédent c & le second conséquent d de la première analogie sous le premier antecédent a , &

$$\begin{array}{r} a . b . f . \\ c . d . b . \end{array}$$

Donc $a . f :: c . b .$

sous le premier conséquent b . Ensuite le premier & le second conséquent de la première analogie, sçavoir b & d serviront d'antecedents à la seconde ; & j'écrirai seulement ensuite l'un sur l'autre les conséquents f & b ; cela formera deux nouvelles rangées chacune de 3 grandeurs. Je dis que la première grandeur a de la première rangée est à la dernière f de la même rangée ; comme la première c de la deuxième rangée est à la dernière b de la même rangée, c'est à dire que $a . f :: c . b .$

Pour se convaincre de cette vérité, il faut écrire les deux rangées de proportionnelles

$$a . b :: c . d . \text{ \&}$$

$$b . f . d . b . \text{ l'une}$$

sur l'autre, on trou-

vera [1] que ces pro-

duits seront propo-

tionnels $ab . bf ::$

$cd . db$. Mais au

lieu du rapport de

ab à bf , on peut prendre le rapport de a à f qui

$$a . b :: c . d .$$

$$b . f :: d . b .$$

$$ab . bf :: cd . db .$$

donc $a . f :: c . b .$

[1] Prop. presents.

lui est [1] égal; & au lieu du rapport de cd à db , on peut prendre son égal qui est celui de c à b ; mais puisque le rapport de ab à bf est (2) égal au rapport de cd à db : on aura $a . f :: c . b$.

Cette maniere de conclure est appellée *proportion bien ordonnée*.

S'il y avoit plus de deux rangées de grandeurs proportionnelles telles que les conséquents de la premiere analogie fussent égaux aux antecedens de la seconde, & que les conséquents de la seconde fussent égaux aux antecedens de la 3^e; & ainsi de suite, on les disposeroit en deux rangées comme les proportionnelles precedentes, & on conclueroit que la premiere du premier rang seroit à la quantième du même rang: comme la premiere du second rang est à une pareille quantième du même rang. Par exemple soient $l . m ::$

$n . o$; & $m . p ::$

$o . q$, & $p . r ::$

$q . s$, & $r . t ::$

$s . u$. &c, je

dis que $l . r ::$

$n . s$; que $l . t ::$

$n . u$. &c. la

demonstration

en est entierement semblable à la precedente,

2.

S'il y a deux rangées chacune de quatre grandeurs proportionnelles; par exemple $a . d ::$ $f . g$, & $d . m :: h . f$, de sorte que le premier consequent de la premiere analogie soit égal au premier antecedent de la 2^e; & que le 2^e an-

[1] Prop. 6. (2) Prop. pres.

recedent de la premiere analogie soit égal au 2^e.
 consequent de la 2^e;

j'écris les antecedents
 & les consequents de la
 premiere analogie l'un
 sous l'autre, de sorte
 que le second antece-

$$a . d . m .$$

$$b . f . g .$$

$$\text{donc } a . m :: b . g .$$

dent *f* soit sous le premier consequent *d*; ensuite
 j'écris le premier consequent *m* de la seconde
 analogie dans le premier rang. Enfin j'écris le
 second antecedent *b* de la 2^e analogie sous le
 premier antecedent *a* de la premiere; & le se-
 cond consequent *f* devient le même que le 2^e
 antecedent de la premiere proportion; cela for-
 me encore deux nouvelles rangées, chacune de
 trois grandeurs. Je dis, comme dans le premier
 article de ce Corollaire: donc $a . m :: b . g .$

Pour connoître la verité de cette conclusion,
 il faut écrire les deux rangées de proportionnel-
 les $a . d :: f . g .$ & $d . m :: b . f .$ l'une
 sous l'autre, on

trouvera qu'en
 multipliant par
 ordre, [1] on au-
 ra $a d . d m ::$
 $f h . g f .$ mais
 [2] $a d . d m ::$
 $a . m .$ & $f h .$
 $g f :: b . g .$ donc $a . m :: b . g .$

$$a . d :: f . g .$$

$$d . m :: b . f .$$

$$a d . d m :: f b . g f .$$

$$\text{Donc } a . m :: b . g .$$

Cette maniere de conclure est appellée pro-
 portion troublée.

COROLLAIRE II.

1. Les quarez de quatre grandeurs propor-

[1] Prop. pref.

[2] Prop. 6.

tionnelles sont aussi proportionnels entr'eux; de même les cubes, &c. Par exemple, si $a . b :: c . d$, on [1] aura $aa . bb :: cc . dd$, parceque c'est la même chose que si on avoit multiplié l'une par l'autre ces deux rangées de proportionnelles $a . b :: c . d$; & $a . b :: c . d$. On aura pareillement $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$, parceque ce sont les produits de ces deux rangées de proportionnelles $aa . bb :: cc . dd$. & $a . b :: c . d$, multipliées par ordre.

2. Réciproquement lorsque quatre quarrés sont proportionnels, leurs racines sont aussi proportionnelles. Soit $ee . ff :: gg . hh$. Je dis que $e . f :: g . h$. Car, si e n'étoit pas à f comme g à h , on pourroit augmenter l'un ou l'autre de ces antécédens, jusqu'à ce que la proportion fût parfaite. S'il étoit nécessaire d'augmenter le premier antécédent e , par exemple, jusqu'à ce qu'il devînt à $f :: g . h$. Supposons que e étant augmenté d'une grandeur que j'appellerai m , on ait $e + m . f :: g . h$; il est constant [2] qu'on auroit $ee + 2em + mm . ff :: gg . hh$. mais [3] $ee . ff :: gg . hh$. & partant [4] on auroit $ee + 2em + mm . ff :: ee . ff$. Le quarré $ee + 2em + mm$ seroit donc [5] égal à ee , ce qui est [6] impossible.

[1] Prop. pres.

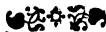
[2] Part. I. Cor. pres.

[3] Supposit.

[4] Cor. 3. def. 12. d'Algeb.

[5] Prop. 8. 2^e partie.

[6] Ax. 2. general.



PROPOSITION XIII.

Si il y a deux rangées de grandeurs proportionnelles, & si on divise par ordre les grandeurs de la premiere rangée par les grandeurs correspondantes de la seconde rangée: les quotients de ces divisions seront proportionnels entr'eux.

DEMONSTRATION.

Soit la premiere rangée de grandeurs proportionnelles $a . b :: c . d$. Soit encore une seconde rangée $f . g :: h . m$. je dis que

$$\frac{a}{f} . \frac{b}{g} :: \frac{c}{h} . \frac{d}{m} .$$

Cela est constant * si le

produit du quotient $\frac{a}{f}$ multiplié par $\frac{d}{m}$ est égal

au produit de $\frac{b}{g}$ & de $\frac{c}{h}$ multipliez l'un par

l'autre. Or cela est évident, puisque

* $ad = bc$, & que $fm = gh$. Car le numérateur de la

fraction $\frac{ad}{fm}$ étant

égal au numérateur de l'autre

fraction $\frac{bc}{gh}$, & le dénominateur de l'une

étant égal au dénominateur de l'autre; $\frac{ad}{fm}$

* Prop. 3.



$$\begin{array}{r} a . b :: c . d \\ f . g :: h . m \\ \hline \text{Donc } \frac{a}{f} . \frac{b}{g} :: \frac{c}{h} . \frac{d}{m} . \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ad = bc \\ fm = gh \end{array}$$

Iera la même chose que $\frac{bc}{gh}$. Le produit des termes extrêmes sera donc égal au produit des termes moyens. Donc * $\frac{a}{f} \cdot \frac{b}{g} :: \frac{c}{h} \cdot \frac{d}{m}$.
ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIV.

Lorsqu'il y a six grandeurs telles que la première soit à la 2^e, comme la 3^e à la 4^e; & la 5^e à la 2^e, comme la 6^e à la 4^e: la somme de la première & de la 5^e sera à la 2^e, comme la somme de la 3^e & de la 6^e à la 4^e.

DEMONSTRATION.

Soient les six grandeurs $a . b . c . d . f . g$. telles que a soit à b comme c à d , & que la 5^e f soit à la 2^e b , comme la 6^e g est à la 4^e d ; je dis que $a + f . b :: c + g . d$. Pour le démontrer, soit appelé x l'exposant du rapport de a à b , c'est à dire que $\frac{a}{b} = x$; l'exposant du rapport de c à d sera [1] aussi x , puisque [2] ces rapports sont égaux. On aura donc [3] $bx = a$, & $dx = c$. soit appelé y l'exposant

* Prop. 3.

[1] Cor. 2. Def. 12. *Algeb.*

[2] *Supposit.*

[3] Cor. 3. de la division, pag. 42.

$$\left. \begin{array}{l} a : b :: c : d . \\ f : b :: g : d . \end{array} \right\}$$

$$\frac{a}{b} = x . \quad \frac{c}{d} = x . \quad \frac{f}{b} = y . \quad \frac{g}{d} = y .$$

$$\text{Donc } bx = a . \quad dx = c . \quad by = f . \quad dy = g .$$

$$bx . b :: dx . d .$$

$$by . b :: dy . d .$$

$$\text{Donc } bx + by . b :: dx + dy . d .$$

$$\text{Car } bdx + bdy = bdx + bdy .$$

$$\text{Donc } a + f . b :: c + g . d .$$

du rapport de f à b , c'est à dire que $\frac{f}{b} = y$;

l'exposant du rapport de g à d fera [1] aussiy ; ces rapports étant [2] égaux. Dans ces deux analogies $a . b :: c . d$ & $f . b :: g . d$, en substituant au lieu de a, c, f , & g , les grandeurs égales bx, dx, by , & dy ; au lieu des deux analogies précédentes, on aura [3] ces deux équivalentes $bx . b :: dx . d$, & $by . b :: dy . d$. Or [4] il est évident que $bx + by . b :: dx + dy . d$. Car le produit $bdx + bdy$ des termes extrêmes est égal au produit $bdx + bdy$ des moyens. Au lieu de $bx + dy$, & au lieu de $dx + dy$, remettant [3] les grandeurs qui leur sont égales $a, f ; c, g$, on trouvera que $a + f . b :: c + g . d$. Ce qu'il falloit démontrer.

[1] Cor. 2. Def. 12. Algeb.

[2] Supposit.

[3] Demand. 1. Gen.

[4] Prop. 3.

Si on avoit ces 6 grandeurs h, m, o, p, u, x ; telles que $h, m :: o, p$. & que $h, u :: o, x$, on concluroit, donc $h, m+u :: o, p+x$. Car [1] en changeant la premiere analogie en celle-ci $m, h :: p, o$. & en changeant la seconde en celle-ci $u, h :: x, o$, on trouvera par la démonstration qu'on vient de faire, que $m+u, h :: p+x, o$. & enfin [1] que $h, m+u :: o, p+x$.

$$\left. \begin{array}{l} h, m :: o, p \\ h, u :: o, x \end{array} \right\} \text{Inver. } \begin{array}{l} m, h :: p, o \\ u, h :: x, o \end{array}$$

Donc $m+u, h :: p+x, o$.

Enfin $h, m+u :: o, p+x$.

PROPOSITION XV.

S'il y a une suite de rapports égaux entr'eux ; la somme des antecedents sera à la somme des consequents, comme un des antecedents est à son consequent.

DEMONSTRATION.

Soient ces rapports égaux entr'eux, $a, b :: c, d :: e, f$. &c. je dis que la somme des antecedents $a+c+e$ est à la somme des consequents $b+d+f$ comme a est à b , ou c à d , ou e à f . Pour le démontrer, soit nommé x l'exposant du rapport de a à b , c'est à dire que $\frac{a}{b} = x$, on aura [2] aussi $\frac{c}{d} = x$, & $\frac{e}{f} = x$; puisque [3] ces rapports sont égaux.

[1] Part. I. Cor. Prop. 3.

[2] Cor. 2. Def. 12. Algeb.

[3] Supposit.

$$\left. \begin{array}{l}
 a, b :: c, d :: e, f. \\
 \frac{a}{b} = x, \frac{c}{d} = x, \frac{e}{f} = x \\
 \text{Donc } bx = a, dx = c, fx = e.
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 bx, b :: dx, d :: fx, f. \\
 bx + dx + fx, b + d + f :: \\
 bx, b. \\
 bbx + bdx + bfx = b bx + \\
 b dx + b fx.
 \end{array}$$

Donc $a + c + e, b + d + f :: a, b.$

Donc $bx = a, dx = c, fx = e$, & au lieu des grandeurs a, c & e , en substituant leurs égales, on aura $bx, b :: dx, d :: fx, f$. Or il est évident [1] que $bx + dx + fx, b + d + f :: bx, b$. Car le produit $bbx + bdx + bfx$ des termes extrêmes est égal au produit $bbx + bdx + bfx$ des termes moyens. Au lieu de $bx + dx + fx$, reprenant ce qui y est égal $a + c + e$; on concluera que $a + c + e, b + d + f :: a, b$. Or [2] le rapport de c à d est égal à celui de a à b , qui est aussi égal à celui de e à f . Donc la somme des antecédens $a + c + e$ est à la somme des conséquens $b + d + f$, comme un antecédent à son conséquent, ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVI.

1. La plus grande de deux grandeurs inégales est égale à la moitié de la somme faite de ces deux grandeurs & de la moitié de leur différence.
2. La plus petite de ces deux grandeurs est égale à la moitié de la somme de ces mêmes grandeurs moins la moitié de la différence.

[1] Prop. 3.

[2] Supposât.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les deux grandeurs a & b , telles que $a > b$, & que leur différence soit c : Je dis que la grandeur a est égale à la moitié de $a + b$ & de c . Car alors ^[1] on aura $a - c = b$.

Mais on cherche la somme des grandeurs a & b ; il faut donc ajouter a avec ce qu'on vient de trouver égal à b . On aura donc $a + a - c = a + b$, c'est à dire ^[2] $2a - c = a + b$. Si on divise le tout par 2, on trouvera ^[3] $a - \frac{c}{2} = \frac{a + b}{2}$. Si à ces deux dernières gran-

deurs on ajoute de part & d'autre $\frac{c}{2}$, on aura

^[4] $a = \frac{a + b}{2} + \frac{c}{2}$. ce qu'il falloit démon-
strer.

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Puisque ^[5] $a > b$, & que la différence est c ; je dis que la grandeur b est égale à $\frac{a + b}{2} - \frac{c}{2}$.

^[1] Ax. 2. d'Algeb.

^[2] Add. des grandeurs pag. 71. observ. 1.

^[3] Prop. 6. ou ax. 12. gen.

^[4] Ax. 4. gen. & ax. 1. d'Algeb.

^[5] Supposit.

Tar on aura [1] $b + c = a$. Pour avoir une grandeur égale à la somme des grandeurs a & b , il faut donc ajouter la grandeur b à $b + c$, & on aura $b + c + b = a + b$, c'est à dire que $2b + c = a + b$. Si on divise par 2 ces grandeurs $2b + c$, & $a + b$; on trouvera

$$[2] b + \frac{c}{2} = \frac{a + b}{2}. \text{ Si on retranche de part}$$

& d'autre $\frac{c}{2}$; on aura [3] $b = \frac{a + b}{2} - \frac{c}{2}$.

Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVII.

Dans ces deux produits ab & cd au lieu des racines b & d , si on substitue d'autres grandeurs g & h , & si $b.d :: g.h$; on aura deux nouveaux produits ag & ch qui seront entr'eux, comme ab est à cd , c'est à dire que ab sera à $cd :: ag.ch$.

DEMONSTRATION.

Le produit des termes extrêmes $abcb$ est égal au produit des termes moyens $cdag$. Car en divisant ces deux produits $abcb$ & $cdag$ par ac qui s'y trouve commun; on aura [2] $abcb.cdag :: bh.dg$. Mais [4], puisque $b.d :: g.h$, on aura [5] $bh = dg$. Donc pareillement $abcb = cdag$. Donc [6] $ab.cd :: ag.ch$, ce qu'il falloit démontrer.

[1] Ax. 2. d'Algebr.

[2] Prop. 6.

[3] Ax. 9. Gen.

[4] Par supposé.

[5] Prop. 2.

[6] Prop. 3.

PROPOSITION XVIII.

Le rapport du produit de plusieurs antecedents au produit de plusieurs consequents, est composé du rapport du premier antecedent au premier consequent; du rapport du 2^e antecedent au 2^e consequent; du rapport du 3^e antecedent au 3^e consequent; & ainsi de suite.

DEMONSTRATION.

Soit l'antecedent a & le consequent b ; soit encore l'antecedent c & le consequent d . Si on multiplie l'antecedent a par l'antecedent c , on aura pour produit ac . Si on multiplie le consequent b par le consequent d , on aura pour produit bd ; je dis que le rapport de ac à bd est composé du rapport de a à b , & du rapport de c à d . Pour en faire la démonstration, * il suffit de faire voir que l'exposant du rapport du produit ac à bd est égal au produit des exposants des rapports de a à b & de c à d .

Soit l'exposant du rapport de a à b appelé f , c'est à dire que $\frac{a}{b} = f$; donc $bf = a$:

Soit $\frac{c}{d} = g$; donc $dg = c$. Au lieu des antecedents a & c on aura donc leurs équivalents bf & dg ; & au lieu du produit ac des antecedents a & c , on aura son équivalent $bfdg$. Or divisant le produit $bfdg$ des antecedents par bd

* Def. 17. *Algeb.*

$$\frac{a \cdot b}{c \cdot d} \qquad \frac{a}{b} = f \qquad \frac{c}{d} = g$$

ac . bd Donc bf = a Donc dg = c

$$\frac{bf \cdot b}{dg \cdot d} \qquad \frac{bf dg}{bd} = fg$$

bfdg . bd

produit des consequents, on aura pour quotient fg qui sera l'exposant du rapport de ac à bd ; mais fg est le produit de l'exposant du rapport de a à b & de celui de c à d . Donc [1] le rapport du produit des antecedents au produit des consequents, est composé du rapport de chaque antecedent à chaque consequent, ce qu'il falloit démontrer.

S'il y avoit un troisieme antecedent e & un troisieme consequent h , le rapport du produit ace au produit $b d h$ seroit composé du rapport de a à b ; du rapport de c à d ; du rapport de e à h ; & ainsi des autres, s'il y en avoit davantage. La démonstration en est tres-facile, & entierement semblable à celle qu'on vient de faire pour ac & bd .

$$\frac{a \cdot b}{c \cdot d}$$

$$\frac{e \cdot h}{\qquad \qquad}$$

ace . b d h

COROLLAIRE I.

Les quarez sont entr'eux en raison doublée de celle de leurs racines. Par exemple cc & dd

[1] Déf. 17. Algeb.

sont deux quarrés qui sont l'un à l'autre en raison composée de celle de c à d , & encore de celle de c à d . Or ces deux rapports sont égaux. Donc le rapport de cc à dd est * doublé de celui de c à d . On peut aussi démontrer facilement par un raisonnement semblable à celui qu'on vient de faire, que les cubes sont entr'eux en raison triplée de celle de leurs racines; par exemple, que le rapport de d^3 à f^3 est triplé du rapport de d à f ; & ainsi des autres puissances.

COROLLAIRE II.

Le produit de deux fractions multipliées l'une par l'autre est une 3^e fraction dont le numérateur est le produit des numérateurs de ces deux fractions, & dont le dénominateur est le produit des dénominateurs de ces deux mêmes fractions.

Soient les fractions $\frac{b}{c}$ & $\frac{f}{g}$ à multiplier l'une par l'autre: Je dis que leur produit est exprimé par $\frac{bf}{cg}$. Car [1] le rapport de bf

à cg est composé du rapport de b à c , & du rapport de f à g . Le quotient du produit bf divisé par cg est donc [2] égal au produit des quotients de b divisé par c , & de f divisée par g .

La méthode dont on se sert pour diviser une fraction par une autre, peut être facilement démontrée.

Soit $\frac{c}{d}$ à diviser par $\frac{b}{f}$: Je dis que

* Déf. 18. *Algeb.*

[1] *Prop. pref.*

[2] *Def. 17. Geo.*

le quotient qu'on cherche, est exprimé par cette fraction $\frac{c f}{b d}$. Car si on réduit [1] ces deux fra-

tions à même dénomination, [2] on aura $\frac{d f}{d f} =$

$\frac{c}{d} \cdot \frac{d b}{d f} = \frac{c b}{d f}$. Mais [3] $\frac{c f}{d f} \cdot \frac{d b}{d f} :: c f \cdot$

db . au lieu des fractions $\frac{c f}{d f}$ & $\frac{d b}{d f}$ en substi-

tuant leurs égales $\frac{c}{d}$ & $\frac{b}{f}$; on aura $\frac{c}{d} \cdot$

$\frac{b}{f} :: c f \cdot db$. Le quotient de la fraction $\frac{c}{d}$

divisée par $\frac{b}{f}$ sera donc [4] égal à $\frac{c f}{d b}$.

R E M A R Q U E.

On peut tres-facilement démontrer l'addition, la soustraction, la multiplication & la division des fractions, en faisant attention à la methode dont on se sert dans ces operations.

Si on veut ajouter $\frac{g}{b}$ à $\frac{f}{m}$; je dis que

$\frac{g m + b f}{b m} = \frac{g}{b} + \frac{f}{m}$. Car le quotient de

$\frac{g}{b}$ soit appelé x , c'est à dire, $\frac{g}{b} = x$; & soit

[1] Pag. 47. Observation 2,

[2] Cor. 2. prop. 5.

[3] Prop. 6.

[4] Def. 13. Algeb. & Cor. 2. def. 12.

$\frac{f}{m} = y$, on [1] aura $g = hx$, & $f = my$. au lieu des fractions $\frac{g}{h}$ & $\frac{f}{m}$ je prendrai donc leurs égales $\frac{hx}{h}$ & $\frac{my}{m}$, & [2] en les réduisant à même dénomination je trouverai $\frac{hxm}{hm}$ & $\frac{hmy}{hm}$ qui seront égales à $\frac{g}{h}$ & $\frac{f}{m}$. Or en assemblant les numérateurs hxm & hmy & en appliquant à leur somme le dénominateur commun hm , il est évident [3] que $\frac{hxm + hmy}{hm} = x + y$ qui est la somme des quotients de ces deux fractions.

Si on veut soustraire $\frac{f}{m}$ de $\frac{g}{h}$; il est encore évident qu'en soustrayant $\frac{hmy}{hm} = \frac{f}{m}$ de $\frac{hxm}{hm} = \frac{g}{h}$, c'est à dire, en soustrayant le numérateur hmy de hxm , & appliquant le dénominateur commun hm , on aura $\frac{hxm - hmy}{hm} = x - y = \frac{g}{h} - \frac{f}{m}$ [1].

Si on veut multiplier $\frac{g}{h}$ par $\frac{f}{m}$; en multi-

[1] Cor. 3. Page 42. de la division.

[2] Page 47. Observ. 2.

[3] Page 81. part. 1. de l'avertiss.

multipliant l'une par l'autre leurs équivalentes $\frac{hx}{b}$ & $\frac{my}{m}$, c'est à dire, en multipliant le numérateur hx par my , & le dénominateur b par m , on aura $\frac{hxmy}{bm} = xy$ qui est le produit de la fraction $\frac{g}{b}$ multipliée par $\frac{f}{m}$. Puisque [1] $\frac{g}{b} = x$, & que $\frac{f}{m} = y$.

Si on veut diviser $\frac{g}{b}$ par $\frac{f}{m}$; en faisant attention à leurs égales $\frac{hx}{b}$ & $\frac{my}{m}$, on multipliera le numérateur hx par le dénominateur m , & le dénominateur b par my pour avoir $\frac{hxm}{bmy} = \frac{x}{y}$ qui sera le quotient de la fraction $\frac{g}{b}$ divisée par $\frac{f}{m}$.

[1] *Supposé.*



PROPOSITION XIX.

S'il y a une suite de grandeurs : le rapport de la première à la dernière sera composé des rapports des grandeurs interposées.

DEMONSTRATION.

Soient les grandeurs a, b, c, d ; je dis que le rapport de la grandeur a à d est composé du rapport de a à b , de celui de b à c , &c du rapport de c à d ; pour le démontrer, il suffit ^[1] de faire voir que l'exposant du rapport de a à d est égal au produit des exposans de ces autres rapports.

$$\left. \begin{array}{l} a. \quad b. \quad c. \quad d. \\ \hline \frac{a}{b} = \quad . \quad \frac{b}{c} = x. \quad \frac{c}{d} = p. \\ d^p x y = a. \quad d^p x = b. \quad d^p = c. \\ \frac{d^p x y}{d} = p x y. \end{array} \right\}$$

L'exposant du rapport de c à d soit appelé p , c'est à dire, ^[1] $\frac{c}{d} = p$. Donc ^[2] $d^p = c$, soit

^[1] Def. 17. *Algeb.*

^[2] Def. 12. *Algeb.*

^[3] Cor. 3. de la divis. pag. 42.

encore l'exposant du rapport de b à c appelé x , c'est à dire, $\frac{b}{c} = x$; donc $cx = b$; mais au

lieu de c en lui substituant ce qui lui est égal, sçavoir dp , on aura $dp x = b$. Soit enfin l'exposant du rapport de a à b appelé y , c'est à dire, $\frac{a}{b} = y$. Donc $by = a$; mais au lieu de b

en lui substituant ce qui lui est égal, sçavoir $dp x$, on aura $dp xy = a$. Or présentement pour connoître l'exposant du rapport de la grandeur a à la grandeur d ; il faut diviser a ou son égale $dp xy$ par d , on aura pour quotient ou exposant $p xy$ qui est égal au produit des rapports de a à b , de b à c , & de c à d multipliez l'un par l'autre. Le rapport de a à d est donc [1] composé des rapports des grandeurs interpolées entre a & d , ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE

Dans toute progression geometrique, les quarrés de deux termes qui sont immédiatement de suite, sont entr'eux comme le premier terme au troisième. Soit la progression $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{e}$. je dis que $bb \cdot dd :: b \cdot f$. Car [2] le rapport de bb à dd est doublé du rapport de b à d . Or [3] le rapport de b à f est pareillement doublé du rapport de b à d , puisque le rapport de b à f est composé de celui de b à d & de celui de d à f qui sont [4] égaux. Il y a

[1] Def. 17. *Algeb.*

[2] Cor. 1. Prop. 18.

[3] Prop. pref. & def. 18. d. *Algeb.*

[4] Supposis. ou def. 16. *Algeb.*

donc même rapport entre bb & dd qu'entre b & f . Donc $bb . dd :: b . f$. On fera un pareil raisonnement pour démontrer que les cubes de deux termes qui sont immédiatement de suite dans une progression géométrique, sont entr'eux comme le premier terme au quatrième, c'est à dire, en raison triplée; par exemple que b^3 est à d^3 comme b à g . On connoitra aussi les rapports des autres puissances, en y faisant l'application du Corollaire présent.

PROPOSITION XX.

Le produit de deux grandeurs est une grandeur moyenne proportionnelle entre les quarrés de ces grandeurs.

DEMONSTRATION.

Soient les grandeurs a & b , dont le produit est ab : Je dis que $\frac{aa}{ab} = \frac{ab}{bb}$. Car le produit des termes extrêmes $aabb$ est égal au produit $abab$ ou $^1 aabb$ des termes moyens. Donc $^2 aa . ab :: ab . bb$. Ce qu'il falloit démontrer.



DE LA REGLE DE PROPORTION.

La regle de Proportion est une operation d'Arithmetique fondée sur la principale propriété des proportions qui est que le produit des termes extrêmes de quatre grandeurs proportionnelles est égal au produit des termes moyens, comme on verra par la suite. Cette operation est aussi

[¹] Demand. 6. Algeb.

[²] Prop. 3.

appelée *Regle de trois*, parceque trois grandeurs étant connus, on se sert de cette pratique pour trouver une 4^e proportionnelle. Enfin on l'appelle *Regle d'or*, à cause de ses usages infinis & de son utilité tres-grande dans les Mathématiques.

En general il y a de deux sortes de regles de Proportion, la simple, & la composée ou complexe. La simple est celle qui ne contient que 3 termes connus, & la composée est celle qui en contient plus de 3. Il faut premierement examiner la regle de Proportion simple & la maniere de s'en servir; ensuite on passera à la composée.

La regle de Proportion simple est encore de deux sortes, sçavoir la directe, & l'indirecte.

La regle de Proportion directe est celle dans laquelle le premier terme est au second, comme le 3^e est au 4^e qu'on cherche; ou, ce qui est la même chose, lorsque le rapport du premier terme au 3^e est égal au rapport du second & du 4^e qu'on cherche; c'est à dire, si le 3^e terme est plus grand que le premier, le 4^e terme qu'on cherche doit être dans la même Proportion plus grand que le second; & si le 3^e terme est plus petit que le premier, le 4^e terme qu'on cherche doit être pareillement plus petit à proportion que le second: ou enfin, ce qui revient aux mêmes choses, c'est à dire, lorsque la Proportion va du plus au plus, ou du moins au moins. Par exemple, si 8 aunes de marchandise coûtent 32 liv. il est évident que 72 aunes de la même marchandise doivent coûter davantage, sçavoir 288 liv. qui est le 4^e terme qu'on cherche par cette operation. Si 15 hommes ont gagné par leur travail 48 liv. 5 des mêmes hommes ne

gagneront en même-temps que 16 liv. qui est encore le 4^e terme qu'on cherchoit, ce qui va du moins au moins; c'est à dire, que moins il y a d'hommes, moins il y a de gain; & partant ces exemples conviennent à la règle directe.

La règle de Proportion indirecte est celle dans laquelle le rapport du premier terme au 3^e est égal au rapport du 4^e qu'on cherche, au second; c'est à dire, si le premier terme est plus grand que le 3^e; le 4^e terme qu'on cherche sera à proportion plus grand que le 2^e; si le premier est plus petit que le 3^e, le 4^e sera aussi plus petit que le 2^e. Ce qui est la même chose que de dire; la règle de proportion est indirecte, si le 3^e terme étant plus grand que le premier, le 4^e qu'on cherche doit être plus petit que le 2^e; ou si le 3^e terme étant plus petit que le premier, le 4^e qu'on cherche est plus grand que le 2^e. Enfin on connoît la règle de Proportion indirecte, & on la distingue d'avec la règle directe, lorsque le sens de la question va du plus au moins ou du moins au plus; ce qu'il est important de bien remarquer pour ne s'y point tromper. Par exemple, si 15 personnes ont dépensé une certaine somme d'argent en 6 mois; en combien de temps 40 personnes dépenseront-ils une pareille somme? il est évident que plus le 3^e terme est grand, moins il faudra de temps pour dépenser la somme d'argent dont il s'agit, ce qui va du plus au moins. Si 6 ouvriers font un certain nombre de toises de maçonnerie en 8 jours; en combien de jours 4 ouvriers feront-ils le même ouvrage? il est encore évident que moins il y aura d'ouvriers; il faudra plus de temps pour faire cet ouvrage; & partant que le sens de la question est du moins au plus, ce qui fait con-

notre que ces exemples appartiennent à la regle indirecte.

Lorsqu'on rencontre une question qui appartient à la regle de Proportion simple, soit qu'elle soit directe ou indirecte, afin de sçavoir quel doit être le premier, le 2^e & le 3^e terme, il les faut disposer de telle maniere que le premier & le 3^e soient de même nom, & que le second soit mis au milieu auquel le 4^e qu'on cherche sera semblable.

Exemples de la regle de Proportion directe.

Si 14 personnes dépensent 98 liv. en un certain temps; combien dépensent 20 personnes en autant de temps?

Pour résoudre cette question, il faut examiner si elle appartient à la regle de Proportion directe ou à l'indirecte. Le but de la question fait connoître qu'il s'agit d'une regle de Proportion directe; on arrange les termes de cette maniere.

Si 14 person. dépen. 98 liv. combien 20 personnes?

Il faut observer que dans cet exemple & dans tous les autres semblables, il ne faut que trouver un 4^e terme ou nombre proportionnel aux trois autres qui sont connus. J'appelle x ce 4^e terme qu'on cherche, ainsi l'analogie est telle $14 . 98 :: 20 . x$. Il est seulement question de trouver la valeur de x ; & pour y réussir on multiplie le 3^e qui est 20, par le 2^e qui est 98, on a pour produit $1960 = 14x$ *. Or en divisant ces deux grandeurs égales par 14, qui est la racine qui nous est connue dans le produit $14x$, on aura d'une part 140, & de l'autre x ; & partant

*. Prop. 2.

[¹] on aura $140 = z$, c'est à dire que le 4^e terme qu'on cherchoit est 140 ; & partant que $14 : 98 :: 20 : 140$, d'où on conclura que si 14. personnes dépensent 98 liv. 20 personnes dépenseront en autant de temps 140 liv. Cette pratique est entièrement fondée sur le Coroll. 2^e de la Prop 2.

AUTRE EXEMPLE.

Si 34 aunes de marchandise coûtent 80 liv. 14 f. 6 d. combien couteront à proportion 15 aunes de la même marchandise,

On refoudra cette question comme la précédente en multipliant le 3^e terme par le 2^e qui est 80 liv. 14 f. 6 d. & on aura pour produit 1210 liv. 17 f. 6 d. on divisera 1210 l. par le premier terme 34, on aura pour quotient de la première division 35 liv. reste 20 liv. qu'on réduira en sols en les multipliant par 20, on aura 400 sols, auxquels on ajoutera 17 f. qui se sont trouvez dans le produit 1210 liv. 17 f. 6 d. & on aura 417 f. qu'on divisera encore par 34, on trouvera 12 f. pour quotient de cette 2^e division, reste 9 f. qu'on réduira en deniers en les multipliant par 12, on aura 108 d. auxquels on ajoutera 6 d. qui se trouvent séparément dans le produit du 3^e terme multiplié par le second, & on aura 114 d. on divisera enfin ce nombre 114 par 34, & on trouvera pour quotient 3 d. reste 12 qu'on mettra

avec le diviseur 34 en cette forme de fraction $\frac{12}{34}$.

& en la réduisant à moindres termes, on aura

[¹] Prop. 6.

$\frac{6}{17}$ qu'on écrira ensuite des 6 d. d'où on conclura que si 34 aunes de marchandise coûtent 80 liv. 14 s. 6 d. 15 aunes de pareille marchandise

couteront au même prix 35 liv. 12 s. 3 d. & $\frac{6}{17}$ de denier.

Si on veut sçavoir combien coûte chaque pinte de vin lorsque le muid coûte 60 liv. & contient 230 pintes ; on dispose les termes de la question de cette sorte.

Si 230 pintes coûtent 60 liv. combien 1 pinte & suivant la methode qu'on vient d'enseigner, on trouvera que la valeur de chaque pinte est

$$5 \text{ s. } 2 \text{ d. } \frac{14}{23}$$

De même si 128 aunes de marchandise coûtent 300 livres, on trouveroit la valeur de chaque aune.

AUTRE EXEMPLE.

S'il se rencontroit une question proposée de cette maniere. Si 25 l. pesant ont coûté 18 l. combien de l. pesant couteront 60 l. En faisant restriction sur l'arrangement de 25, 18 & 60, il est évident que c'est un 3^e terme qu'on cherche, qu'il est facile de trouver en multipliant le premier 25 & le dernier 60 l'un par l'autre ; & divisant leur produit 1500 par le 2^e terme qui est connu, on a au quotient de cette division 83 livres pesant,

& $\frac{1}{3}$ pour 3^e terme, d'où on conclut que si 25

livres pesant content 18 livres, il faudra au même

prix 83 livres pesant, & $\frac{1}{3}$ pour avoir de la

marchandise suffisamment pour 60 liv. Cette pratique est encore fondée sur les Cor. 2 & 4 de la Prop. 2. On pourroit aussi (*) arranger les termes de cette question de cette sorte ; 18 livres pesant . 25 livres :: 60 livres pesant . x. Et alors on trouveroit le 4^e terme comme dans les exemples précédents.

S'il se rencontre une question pareille à celle-ci ; 3 liv. de canelle content 15 liv. 12 s. combien coûteront 8 livres 5 onces ? Il faut réduire le premier terme 3 livres en onces, & le 3^e 8 livres pareillement en onces, & y ajouter les 5 onces qui en dépendent, afin que ces termes soient de même espèce ; & on change la question en celle-ci qui lui est équivalente : si 48 onces de canelle content 15 liv. 12 s. combien 133 onces ? & on achevera l'opération comme on a enseigné.

*Exemples de la regle de Proportion
indirecte.*

Supposons qu'il y ait dans une Ville 1300 hommes en garnison, & que le Gouverneur ait entre les mains une certaine somme d'argent, dont il a ordre de donner 23 s. par jour à chacun jusqu'à un certain temps ; le nombre des soldats a été augmenté jusqu'à 2500, on demande combien le Gouverneur doit donner à chacun, afin que la somme qu'il a entre les mains suffise jusqu'au temps limité ? Il est évident que le nombre

(*) Cor. Prop. 3. Art. 2.

Les soldats étant augmenté, il doit donner moins à chacun. On dispose les termes de cette sorte.

Si 1800 hommes reçoivent chacun 23 sols ; combien 2500 hommes recevront-ils chacun ?

Pour résoudre cette question & toutes les autres semblables ou de même genre, on multiplie le premier terme 1800 par le second, & on divise le produit 41400 *l.* par le 3^e terme 2500, on

trouve 16 *l.* 6 *d.* & $\frac{1800}{2500} = \frac{18}{25}$ pour le 4^e terme

cherché ; c'est à dire que le Gouverneur doit

donner à chaque soldat 16 *l.* 6 *d.* $\frac{18}{25}$ pour satis-

faire à la question.

Pour connoître la certitude de cette pratique tant pour la question proposée que pour les autres semblables, il faut considérer cette règle indirecte comme réduite à une directe ; c'est à dire, que puisque la question est telle que le premier terme est au 3^e, comme le 4^e qu'on cherche est au second ; j'appelle *x* ce 4^e terme qu'on cherche, & j'arrange tous les termes de cette sorte en Proportion directe.

1800 hommes, 2500 hommes :: *x*, 23 *l.*

De sorte que dans la disposition précédente lorsqu'on a multiplié le premier terme par le second, & qu'on a divisé le produit de cette multiplication par le 3^e, c'est la même chose que si dans cette dernière disposition des termes, on multiplioit le premier terme par le dernier, & qu'on divisât le produit par le 2^e terme ; ce qui montre que les Corollaires 2 & 4 de la Prop. 2 sont le fondement de cette pratique, & que dans le temps qu'on multiplie le premier terme

par le second, & qu'on divise le produit par le troisieme, cela suppose tacitement qu'on a fait dans la question proposée une réduction de la regle de Proportion indirecte à une directe. On peut donc facilement remarquer que si la regle est directe, on connoît le produit des deux termes moyens, & un des extrêmes; & si la regle est indirecte, on connoît le produit des extrêmes, & seulement un des termes moyens.

AUTRE EXEMPLE.

Supposons qu'il y ait dans une Place assiégée 4000 soldats pour la défense, & qu'il n'y ait des vivres que pour 8 mois; que le Gouverneur ait été averti qu'on ne peut lui donner du secours pour faire lever le siege que dans 10 mois, on demande quel nombre de soldats il doit mettre hors de la place, afin de soutenir le siege pendant ces 10 mois sans rien diminuer de ce qu'on donnoit chaque jour à chaque soldat. Le but de la question fait connoître que plus il y aura de temps, moins il faudra de soldats pour pouvoir continuer de la même maniere l'usage des provisions; c'est pour cela qu'on arrangera les termes de cette sorte.

Si 8 mois suffisent à 4000 soldats, à combien suffiront 10 mois?

On trouvera en operant comme dans l'exemple precedent, que le Gouverneur doit seulement conserver 3000 soldats, & renvoyer les autres 1000 soldats.

AUTRES EXEMPLES.

Un homme n'ayant qu'une certaine somme

d'argent à dépenser pour donner du pain aux pauvres, veut sçavoir combien il aura de pain pour la même somme, lorsque le bled deviendra plus ou moins cher; par exemple, lorsque la mesure du bled valoit 18 liv. pour une certaine somme d'argent il avoit 8 onces de pain; combien d'onces en aura-t-il pour la même somme, lorsque la même mesure de bled ne vaudra que 12 liv. On arrangera les termes de la question de cette sorte.

Si 18 livres donnent 8 onces, combien 12 livres?

On connoît facilement par la seule exposition de la question, que cette mesure de bled valant moins, on aura davantage de pain pour la même somme d'argent; & on trouvera après l'opération qu'on en aura 12 onces.

Dans une armée il faut chaque jour 36 muids de vin, dont chacun contient 330 pintes; on demande combien il faudra de muids lorsque chacun ne contiendra que 225 pintes? On fait reflexion que moins chaque muid contiendra de pintes, plus il faudra de muids. On arrange les termes de la question de cette sorte 330. 36 & 225, & on trouve par la supputation, comme on a

enseigné, qu'il faudra par jour 52 muids & $\frac{4}{5}$ de muid.

Une personne se propose de faire faire un manteau de 5 aunes d'une étoffe dont la largeur

est de $\frac{3}{4}$ d'aune; on demande combien il faut

dra d'aunes pour le doubler avec une étoffe d'une demie aune de largeur? On fait reflexion que moins cette étoffe aura de largeur, plus il en faudra d'aunes en longueur pour la doublure; parce

qu'il faut que la doublure ait autant d'étendue que le reste de l'habit, on arrangerá les termes

de cette manière, $\frac{3}{4}$ de largeur ; 5 aunes de longueur ; $\frac{1}{2}$ de largeur, & on trouve par la supputation qu'il faudra 7 aunes & $\frac{1}{2}$ de doublure,

La règle de Proportion composée est de deux sortes, la directe & l'indirecte.

La règle de Proportion composée directe est celle qu'on réduit à une règle de Proportion simple directe, & la composée indirecte est celle qu'on réduit à une règle simple indirecte.

Exemples de la règle de Proportion composée.

Si 6 hommes gagnent en 8 jours 76 livres ; Combien gagneront 4 hommes en 15 jours.

Pour résoudre cette question, il faut la réduire à une règle de Proportion simple ; & afin d'y réussir, il faut observer que dans ces sortes de questions il y a toujours trois choses principales & connues ; les autres étant seulement accessoires & comme appartenantes à ces trois choses.

Ceux qui se souviennent des principes de la Grammaire, en peuvent faire ici usage pour distinguer facilement ces choses principales ou principaux termes ; parceque le premier est toujours nominatif du verbe qui est en usage dans la question ; le second de ces principaux termes est régime de ce verbe ; & le 3^e de ces principaux termes est encore un nominatif de ce même verbe.

Dans la question présente, les hommes & les

76 livres sont les principales choses. Pour faire une réduction de cette question à une question de regle de Proportion simple, il faut considerer que si 6 hommes gagnent en 8 jours 76 livres, c'est la même chose que si un homme gaignoit les mêmes 76 livres en 48 jours; puisque suivant cette question on suppose que chacun des 6 hommes travaille pendant 8 jours pour gagner les 76 liv. ce qui est équivalent au travail d'un seul homme pendant 6 fois 8 jours. De même l'autre partie de la question, où on demande combien gagneront 4 hommes en 15 jours, est la même chose que si on demandoit combien doit gagner un travail de 60 jours; parceque dans cette partie on suppose que chacun des 4 hommes travaille 15 jours; par ce moyen on reduira la question precedente à celle-ci :

Si 48 jours de travail donnent 76 livres, combien 60 jours de travail ?

On peut encore regarder cette réduction d'une autre maniere sans en changer la valeur des termes; si 48 hommes gagnent 76 livres, combien 60 hommes? Car lorsque 6 hommes travaillent pendant 8 jours, c'est le travail de 6 hommes repeté 8 fois, ce qui est équivalent au travail de 48 hommes pendant un jour. De même dans la dernière partie de la question, on cherche à proportion le prix du travail de 4 hommes repeté 15 fois pendant les 15 jours, ce qui est équivalent au travail de 60 hommes pendant un jour; & en operant comme on a enseigné dans la regle de Proportion simple, on trouvera que 4 hommes pendant 15 jours gagneront 95 livres à proportion de ce que 6 hommes ont gagné 76 livres en 8 jours.

Il suffit d'avoit bien entendu ces choses pour

pouvoir ensuite facilement reduire toutes les questions semblables ou de même espece que la precedente, à des regles de Proportion simples, suivant cette methode generale qui est de multiplier entr'eux tous les termes qui dépendent l'un de l'autre, c'est à dire, qui conviennent l'un à l'autre. Après cela le seul discernement sera connoître l'arrangement qu'il faudra donner à ces termes.

On multiplie plusieurs grandeurs entr'elles, lorsqu'on en multiplie deux l'une par l'autre, & qu'on multiplie encore leur produit par une 3^e; & ainsi de suite.

AUTRE EXEMPLE.

Si 12 massons ont fait pendant 5 jours 20 toises d'ouvrage, combien 8 massons en feront-ils pendant 3 jours.

On reduira cette question à cette regle de Proportion simple,

Si 60 massons font 20 toises, combien 24 massons? Et on trouvera pour 4^e terme cherché 8 toises.

AUTRE EXEMPLE.

On pouvoit proposer la question de l'exemple precedent de cette maniere :

Si 12 massons pendant 5 jours ont fait 20 toises d'ouvrage; en combien de jours 8 massons feront-ils 8 toises, à proportion.

Il faut reduire cette question à une regle de Proportion simple, comme les precedentes. Pour cela je nomme x le nombre des jours que je cherche, & je trouverai.

60 massons . 20 toises :: 82 massons . 8 toises.

On sçait que c'est un des termes moyens de la Proportion,

Proportion, ſçavoir le ſecond antecedent $8x$ qui eſt inconnu. On le trouve* en multipliant le premier 60 par le dernier 8 , & en diviſant le produit 480 par le terme moyen connu 20 , & on a au quotient de cette diviſion 24 pour le 3^e terme de la Proportion; mais par la maniere de reduire ces queſtions à des regles ſimples, qu'on vient d'enſeigner, on connoit que ce 3^e terme 24 eſt un produit dont le nombre 8 qui ſe trouve dans cette derniere queſtion eſt une des racines; en diviſant 24 par 8 , le quotient de cette diviſion fait connoître l'autre racine $3 = x$, ce qui fait qu'on rétablit la queſtion de cette maniere.

Si 12 maſſons pendant 5 jours ont fait 20 toifes: 8 maſſons en 3 jours feront les 8 toifes propoſées.

On pouvoit encore dire [1] que le produit des extrêmes $480 = 160x$ qui eſt le produit des termes moyens, & que diviſant l'un & l'autre de ces termes par 160 , on trouvera [2] $3 = x$ pour quotient, & partant 3 eſt le nombre des jours qu'on cherchoit.

A U T R E E X E M P L E.

Si 38 ouvriers font un foſſé de 72 toifes en 8 jours, on demande en combien de jours 60 ouvriers en feront 50 toifes? Auparavant que de reduire cette queſtion à une queſtion ſimple, on mettra les termes dans cet ordre,

38 ouvriers. 8 jours. 72 toifes : : 60 ouvriers
 2 jours. 50 toifes.

On reduira cette queſtion à une regle de proportion ſimple qui ſera telle.

* Cor. 2. & 4. Prop. 2.

[1] Prop. 2.

[2] Prop. 6.

304 ouvriers . 72 toises :: 60 x ouvriers . 50 toises.

On voit clairement , comme dans l'exemple precedent , que c'est un des termes moyens , sçavoir la valeur du 2^e antecedent qu'on cherche. On a mis 304 ouvriers pour le premier terme , parceque le travail de ces 38 ouvriers est repeté successivement autant de fois qu'il y a de jours , ce qui est la même chose que s'il avoit fallu à chaque jour employer 38 ouvriers nouveaux , ce qui fait que cet ouvrage de 72 toises peut être considéré comme l'ouvrage de 304 ouvriers. De même on peut considerer le 3^e terme comme un ouvrage de 60 x ouvriers , en prenant x pour le nombre des jours. On resoudra cette question comme la precedente, & on trouvera pa pour la valeur de x qui est le nombre des jours,

$$3 \text{ jours } \& \frac{14}{27}$$

AUTRE EXEMPLE.

Si 2 ouvriers qui ont fait chacun 5 aunes d'étoffe par jour , ont gagné 350 liv. en 18 jours , combien auront gagné 16 ouvriers qui auront fait chacun 4 aunes par jour pendant 30 jours ?

L'état de cette question fait connoître que les 5 aunes d'étoffe & les 18 jours appartiennent aux 2 ouvriers , & partant qu'on peut multiplier le nombre de ces deux ouvriers par 18 , & le produit 36 par les 5 aunes pour avoir 180 qui sera le premier terme d'une regle de Proportion simple à laquelle sera reduite la question ; parceque si 2 ouvriers ont travaillé pendant 18 jours , c'est la même chose que si 36 ouvriers avoient travaillé pendant un jour ; puisque c'est le travail

de deux ouvriers. repeté 18 fois. Or puisque par la supposition chacun faisoit 5 aunes d'étofe, le travail de tous ces ouvriers seroit 180 aunes d'étofe qui avoient produit 350 liv. de gain. De la même maniere qu'on vient de trouver le premier terme, on trouvera le 3^e de la regle de Proportion simple qu'on vient de former; car le travail de 16 ouvriers pendant 30 jours est le même que le travail de 480 ouvriers pendant un jour. Or puisque par la supposition chacun fait 4 aunes d'étofe, le travail fera 1920 aunes: de sorte qu'on aura la question proposée reduite à cette regle de Proportion simple.

Si 180 aunes donnent 350 liv. combien 1920 aunes?
On trouvera pour 4^e terme 3733 liv. 6 s. 8 d.

A U T R E E X E M P L E.

Si 14 livres pesant apportées de 30 lieuës en 12-jours coutent pour le port 23 liv. combien coutera le port de 6 liv. pour 18 lieuës en 3 jours.

On reduira cette question à une regle de Proportion simple, comme on a enseigné dans l'exemple precedent.

Si 5040 coutent 23 liv. combien 324 ?

Pour bien entendre cela, il faut considerer que si on transporte 14 livres pesant pendant 12 jours, c'est repeter 14 livres pesant 12 fois; ce qui est équivalent à 168 livres pesant portées pendant un jour; Chaque nombre de 14 livres pesant étant considéré comme porté pendant un jour; ainsi il est facile de connoître qu'on peut regarder le total qui est 168, comme transporté pendant un jour. Or (1) ces 168 liv. pesant ont

(1) Par supposé.

été portées pendant 30 lieues, chacune de ces livres a donc été portée 30 lieues, & partant c'est la même chose que si une livre pesant avoit été portée pendant 5040 lieues; puisque c'est la même chose que si on considéroit une de ces 168 livres pesant répétée 168 fois à chacune des 30 lieues. Or 30 fois 168 produit 5040 lieues parcourues par cette livre pesant. On fera le même raisonnement pour le 3^e terme 324 de la règle simple; & on trouvera pour réponse à la question que le port des 6 livres pesant pour 18 lieues en

3 jours, coutera 2 liv. 9 sols 6 d. & $\frac{420}{5040}$ de deniers

$$\text{deniers} = \frac{6}{7}.$$

AUTRE EXEMPLE.

Supposons qu'il y ait dans une Ville assiégée 2500 soldats, & que pendant 4 mois chacun reçoive par jour 16 onces de pain; s'il ne reste ensuite dans cette place que 1800 soldats pendant 3 mois, on demande combien chacun recevra par jour seulement, afin que ces provisions puissent suffire pendant ce temps.

Il faut réduire cette question à une règle de Proportion simple, en multipliant le nombre 2500 par 4 mois, & le produit qui est 10000 sera le premier terme de la règle simple, & 16 onces de pain sera le second, & en multipliant 1800 soldats par 3 mois, on aura 5400 pour produit, qui sera le 3^e terme de cette règle de Proportion simple.

Pour rendre raison du premier terme 10000, il faut observer, comme dans les exemples précédents, que 2500 soldats pendant 4 mois est la

même chose que 10000 soldats pendant 1 mois ; puisque ce n'est autre chose que 2500 repeté une fois chaque mois , c'est à dire , 4 fois pendant les 4 mois. On dira la même chose pour le 3^e terme 5400 soldats ; & on fera cet arrangement.

Si 10000 soldats reçoivent 16 onces , combien 5400 ?

Il est facile de remarquer que moins il y aura de soldats , plus ils recevront chaque jour , & partant que cette regle simple est indirecte. En faisant le calcul , par la regle simple indirecte , comme on a enseigné , on trouvera que chacun

des 18000 recevra 29 onces & $\frac{17}{27}$ d'once ; mais

puisque la livre vaut 16 onces , cela est équiva-

valent à 1 livre & $\frac{1}{2}$, 4 onces & $\frac{17}{27}$.

On fait la preuve d'une regle de Proportion par une autre regle de Proportion , dans laquelle on met pour un des termes connus celui qu'on a trouvé par la première regle , & on suppose pour inconnu un des termes connus de cette première regle ; par exemple , si 15 livres de marchandise coûtent 18 francs , combien 10 livres de la même marchandise ? On trouve pour 4^e terme 12 francs , qui est la somme qu'on vouloit connoître. Pour preuve que cette operation est exacte , on dit , si 10 livres de marchandise coutent 12 francs , comme on vient de trouver , combien 15 livres de la même marchandise ? Si on a réussi dans la première question , on trouvera dans cette seconde pour 4^e terme le second de la première question qui étoit connu. On fera de même pour les autres regles de Proportion simples ou composées ;

par exemple , si une personne pendant 5 mois s'est servi de 800 livres appartenantes à un autre , on demande quelle somme ce premier doit prêter à cet autre pour 3 mois , afin d'égaliser la recompense ; comme il se propose de lui prêter pour moins de temps , il faut qu'il lui prête une plus grande somme , & partant c'est une regle inverſe , on trouve par le calcul que ce second

doit prêter au premier 1333 livres $\frac{1}{3}$. Pour

preuve de cela on fait cette autre question : si 3

mois donnent 1333 livres $\frac{1}{3}$, combien 5 mois ?

Et on trouve par la regle inverſe les 800 livres de la question precedente , ce qui fait voir qu'on a bien réuſſi.

DE LA REGLE DE COMPAGNIE.

La regle de Compagnie ou de ſociété eſt une operation par laquelle on partage un nombre en parties proportionnelles à des nombres donnez.

Il y a deux ſortes de regle de Compagnie , ſçavoir la ſimple & la compoſée. La regle de Compagnie ſimple eſt celle où on n'a point égard au temps , & la compoſée eſt celle où on a égard à divers temps.

Exemples de la regle de Compagnie ſimple.

Trois perſonnes ont fait une bourſe commune pour acheter ou faire faire des marchandises ; le premier a mis 420 livres , le ſecond 230 livres,

& le troisieme 70 livres ; & après leurs negotiations , ils ont gagné tous ensemble 300 livres. Ils demandent à partager ce profit entr'eux à proportion de l'argent que chacun a mis.

<i>gain 300 livres.</i>	}	<i>420 liv. mise du premier.</i> <i>230 liv. mise du second.</i> <i>70 liv. mise du troisieme.</i>
-------------------------	---	--

total des mises *720 livres.*

Pour résoudre cette question & toutes les autres semblables , il faut faire autant de regles de Proportion qu'il y a de mises ; & mettre pour premier terme la somme de toutes les mises , & pour 2^e terme on mettra le gain ou profit , & pour chaque 3^e terme , on mettra la somme que chaque personne a payée.

Dans la question presente , pour trouver le gain de la premiere personne qui a mis 420 liv. on dira :

Si 720 liv. qui sont la mise totale , ont donné 300 livres de gain ; combien donneront 420 livres qui sont la mise du premier ?

Par le moyen de cette regle de Proportion , on trouvera 175 livres pour 4^e terme , comme on a enseigné.

Pour trouver ce qui appartient à la seconde personne qui a mis 230 liv. on dira :

Si 720 liv. donnent 300 livres , combien 230 livres

On trouvera par cette regle de Proportion , qu'il appartient 85 liv. 16 s. 8 d. à celui qui a mis 230 livres.

Pour trouver ce qui appartient à la troisième personne qui a mis 70 livres, on dira :

Si 720 liv. donnent 300 livres, combien 70 livres?

On trouvera que celui qui a contribué de la somme de 70 livres, doit recevoir 29 livres 3 l. 4 d. du profit. Au lieu de 3 personnes, s'il y en avoit 4, 5, 6, &c. on suivroit toujours la même méthode.

Pour preuve de la justesse de cette operation, on ajoutera ensemble ce qui revient à chacun du gain, & si le total qui en resultera est précisément égal au gain, l'operation est tres-bien faite; s'il arrivoit autrement il y auroit erreur, & il faudroit la recommencer. Dans l'exemple qu'on vient de proposer, on trouvera que 175 liv. 9 s. liv. 16 l. 8 d. & 29 liv. 3 l. 4 d. font 300 liv. ce qui montre qu'on a bien réussi.

On pouvoit encore résoudre cette question d'une autre maniere, en cherchant combien chacune des 700 livres qui font le total des mises, doit emporter des 300 livres de profit, par cette regle de proportion :

Si 720 liv. donnent 300 livres, combien 1 livre?

Lorsque par cette operation on a connu ce qu'une livre des 700 liv. emporte de profit, qui est 8 l. 4 d. on multiplie ensuite les 420 l. que le premier a payées par 8 l. 4 d., & on trouve au produit 175 livres, qui est le même nombre qu'on a trouvé par l'autre methode qu'on vient d'enseigner; on multiplie aussi 230 livres par 8 l. 4 d. & 70 liv. par 8 l. 4 d., & on trouve au produit de ces multiplications ce qu'on cherche. Au lieu des 300 liv. de profit, si c'étoit 300 liv. de perte, on partageroit à ces 3 personnes cette perte de la même maniere à proportion de l'argent que chacun a mis, c'est à dire, que celui qui a mis

l'avantage perdrait l'avantage ; & ainsi des autres.

A U T R E E X E M P L E.

Un homme cede à ses creanciers son bien qui est 2500 livres ; au premier de ces creanciers il doit 1260 livres , au second 272 , au troisiéme 848 , & au quatriéme 620 livres ; mais comme le bien de ce debiteur n'est point suffisant pour satisfaire entierement ces creanciers , il est question de leur en faire une repartition à proportion de ce qui leur est dû.

<i>bien à partager 2500 livres.</i>	}	2 6 0 livres
		2 7 2
		8 4 8
		6 2 0
<i>total des dettes</i>		3 0 0 0 livres.

On fera ces supputations comme on a enseigné dans l'exemple precedent , & on trouvera que le premier à qui il est dû 1260 livres , doit recevoir 1050 livres des 2500 liv. le second à qui il est dû 272 livres , recevra 226 livres 13 sols 4 d. le troisiéme à qui il est dû 848 livres , recevra 706 livres 13 s. 4 d. & le quatriéme à qui il est dû 620 liv. recevra 516 liv. 13 s. 4 d.

Il faut remarquer que s'il se rencontre outre les livres, des sols & des deniers dans les mises de chaque personne , ou dans le gain ou perte commune , avant que de mettre en usage les regles de trois , il faut reduire toutes les sommes aux moindres especes de monnoye ; par exemple en

deniers s'ils y rencontre des deniers , ou en sols si outre les livres il ne s'y rencontre que des sols ; ou bien on ne reduira en sols ou en deniers que le premier & le 3^e terme de chaque regle de trois ; & enfin on achevera comme on vient d'enseigner. Pour entendre cela plus facilement , il faut faire attention à l'exemple suivant.

Trois personnes ont 250 l. 15 s. à payer , de sorte que chacun contribuera à ce paiement à proportion de son bien. Le premier à 300 l. 12 s. de revenu ; le 2^e à 230 l. 7 s. & le 3^e à 50 l. 18 s. On demande combien chacun payera de la somme proposée.

$$250 \text{ l. } 15 \text{ s.} = 5015 \text{ s.} \left\{ \begin{array}{l} 300 \text{ liv. } 12 \text{ s.} = 6012 \text{ s.} \\ 230 \text{ liv. } 7 \text{ s.} = 4607 \text{ s.} \\ 50 \text{ liv. } 18 \text{ s.} = 1018 \text{ s.} \end{array} \right.$$

$$581 \text{ liv. } 17 \text{ s.} = 11637 \text{ s.}$$

Il faut reduire en sols le total du bien de ces trois personnes , & on trouvera 11637 s. Il faut aussi reduire en sols 300 l. qui sont le bien du premier , on y ajoutera les 12 s. & on trouvera 6012 s. Il faut faire la même chose à l'égard des deux autres ; Ensuite il faut faire une regle de Proportion , & au lieu de 581 l. 17 s. qu'on mettroit pour le premier terme , on y mettra sa valeur en sols , ce qui est équivalent. 250 l. 15 s. seront le 2^e terme , & le 3^e sera 6012 s. qui sont la valeur de 300 l. 12 s. & on dira :

Si 11637 s. donnent 250 l. 15 s. combien 6012 sols ?

Après avoir cherché combien produisent 6012 fois 250 l. 15 s. on trouve 1507509 l. & après les avoir divisées par 11637 on trouve pour quotient

129 l. 10 s. 10 d. $\frac{7830}{11637}$ que doit payer le premier

de ces trois personnes qui a 300 l. 12 s. de revenu.

On auroit trouvé la même chose si on avoit aussi réduit en sols les 250 l. 15 s. & si on avoit formé cette regle de Proportion.

Si 11637 s. donnent 5015 s. combien 6012 sols ?

Et après avoir multiplié le 3^e terme par le 2^e on auroit trouvé 30150180 sols ; & après les avoir divisez par 11637, on auroit trouvé pour quotient

$$1590 \text{ f. } 10 \text{ d. } \frac{7830}{11637} = 129 \text{ l. } 10 \text{ s. } 10 \text{ d. } \frac{7830}{11637}$$

comme on avoit déjà trouvé.

En continuant l'opération, on trouvera que la 2^e personne qui a 230 l. 7 s. de revenu, payera

$$99 \text{ l. } 5 \text{ s. } 4 \text{ d. } \frac{9372}{11637}, \text{ \& que le } 3^{\text{e}} \text{ payera } 21 \text{ l. } 18 \text{ s. } 8 \text{ d. } \frac{8072}{11637}$$

Exemple de la regle de Compagnie composée.

Trois personnes se sont associez & ont pris resolution de negotier: le premier a employé 1200 livres, & après que 4 mois ont été finis il a retiré son argent; le second a employé 950 livres pour 6 mois; & le troisiéme a employé 600 livres pour 10 mois; ils ont gagné 1400 liv. On demande combien il en doit appartenir à chacun à proportion de l'argent qu'il a employé, & du temps qu'il l'a laissé en commerce.

Pour résoudre cette question, il faut multiplier la mise du premier par le temps qu'il a servi son

Gain 1400 liv.

}	1200 liv. pour 4 mois	4800 liv.
	950 pour 6 mois	5700
	600 pour 10 mois	6000

 16500 liv.

argent, & on aura 4800 livres; il faut multiplier la mise du 2^e par son temps, le produit est 5700 livres; enfin la mise du 3^e par le sien, cela fait 6000 livres: de sorte qu'on considerera ces 3 sommes 4800 liv. 5700 liv. & 6000 liv. comme fournies par ces trois personnes, & que leur somme totale qui est 16500 liv. a produit le gain des 1400 liv. ce qui se reduit à une regle de Compagnie simple, dans laquelle on operera, comme on a enseigné dans le premier des exemples precedents.

A V E R T I S S E M E N T.

Il y a plusieurs autres questions qu'on trouve dans les traitez particuliers d'Arithmetique faits par differens Auteurs; mais parce qu'on peut résoudre facilement ces questions par les principes qu'on vient d'établir, je n'ai pas cru qu'il fût nécessaire de s'y arrêter plus long-temps. Les regles qu'ils appellent d'Alliage & de fausses positions, même plusieurs questions où on employe ordinairement un calcul d'Arithmetique assez laborieux, sont pratiquées & résolues beaucoup plus facilement & plus clairement par les équations qui meritent assez qu'on en fasse un traité particulier. Ainsi de peur d'être ennuyeux à ceux qui commencent à s'appliquer à l'étude des Mathematiques, je finirai ici cette seconde Partie.

ELEMENS

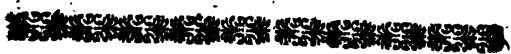


E L E M E N S

D E S

M A T H E M A T I Q U E S

T R O I S I È M E P A R T I E.



D E L A G E O M E T R I E.

D E F I N I T I O N S D E G E O M E T R I E

LA Géométrie est une partie fondamentale des Mathématiques, dans laquelle on traite des lignes, des surfaces, & des solides.

Cette 3^e partie sera partagée en trois Chapitres. Dans le premier on traitera des lignes; dans le second, des surfaces; & dans le 3^e, des solides, après avoir exposé les définitions qui leur conviennent, & qui sont nécessaires pour l'intelligence de leurs propriétés.

&

2. Un point Mathématique est ce qu'on considère comme n'ayant aucune partie ; c'est à dire, sans y faire attention à aucune longueur, largeur, ni profondeur.

3. Une ligne est une grandeur considérée comme étendue en longueur sans largeur & sans profondeur ; par exemple la distance de Paris à Cogn.

COROLLAIRE I.

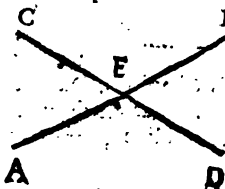
Si on considère qu'un point puisse être transporté d'une station à une autre, la trace ou le vestige par où ce point aurois passé sera une ligne, puisque ce sera une longueur sans largeur & sans profondeur.

COROLLAIRE II.

Donc les deux extrémités, c'est à dire, le commencement & la fin d'une ligne sont deux points ; puisque c'est le point qui commence à être mû, qui en fait le commencement, & que c'est ce même point qui cesse d'être mû qui en fait la fin.

COROLLAIRE III.

Donc lorsque deux lignes se coupent, leur commune section est un point. Soient les deux lignes AB & CD qui se coupent en E, je dis que leur commune section est un point : car si elle étoit deux, ou plusieurs points, il faudroit que la ligne



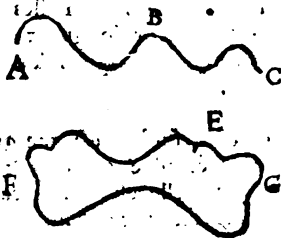
A B, ou C D. est de la largeur, ce qui est contra la definition presente.

Il y a des lignes de deux sortes, de droites, & de courbes.

4. Une ligne droite est celle qui est la plus courte de toutes les lignes qu'on peut mener d'un point à un autre point; par exemple A B.

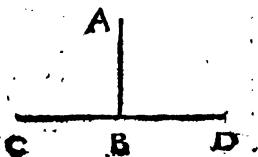


5. Une ligne courbe est celle qui étant menée d'un point à un autre point, n'est pas la plus courte de celles qui puissent être terminées par ces deux points; ou laquelle étant menée d'un point revient au même point; par exemple la ligne A B C ou E F G.



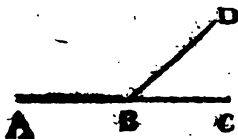
Les lignes droites considérées à l'égard l'une de l'autre sont de trois sortes, perpendiculaires, obliques, & parallèles.

6. Une ligne perpendiculaire à une autre ligne droite est celle qui rencontre cette autre ligne; & qui ne penche ou n'incline d'une part ni d'autre; par exemple la ligne A B est perpendiculaire à la ligne droite C D, si cette ligne A B ne penche ou n'incline de part ni d'autre.

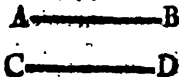


7. Une ligne droite oblique à une autre ligne

droite, est celle qui rencontrant cette autre ligne, penche ou incline plus d'un côté que d'un autre; par exemple la ligne BD , qui rencontre la ligne AC & qui incline plus vers le point C que vers A , est oblique à la ligne AC .



8. Les lignes parallèles sont celles qui sont également distantes entr'elles dans toute leur longueur; par exemple les lignes AB & CD .



9. Une surface est une grandeur considérée comme étendue en long & en large sans profondeur; telle est la surface d'une Campagne qu'on mesure par arpens, ou par toises, &c.

COROLLAIRE I.

Si on considère qu'une ligne puisse être transportée de travers ou transversalement d'une station à une autre station, ou qu'une ligne courbe fasse une révolution au tour de ses deux extrémités, la trace ou le vestige par où cette ligne aura passé sera une surface; puisque ce sera une grandeur étendue en longueur à cause de la longueur de la ligne, en largeur à cause du mouvement transversal de cette ligne, & sans profondeur parce que cette ligne même n'a (*) aucune profondeur.

(*) Déf. 2. Géom.

COROLLAIRE II.

Donc les deux extrémités, c'est à dire le commencement & la fin d'une surface sont deux lignes, puisque c'est la même ligne qui commence à être mûe, qui en fait le commencement; que c'est cette même ligne qui cesse d'être mûe en fait la fin, & que les points qui terminent cette ligne mise en mouvement, d'écrivent ⁽¹⁾ chacun une ligne.

Il y a de deux sortes de surfaces, des plans & des courbes.

10. Une surface plane ou seulement plan, est celle dans laquelle on peut mener à volonté une, ou plusieurs lignes droites; c'est à dire, qu'une ligne droite touche

dans tous ses points dans quelque situation transversale ou de travers qu'on la passe appliquer sur cette surface.

Telle peut être la surface AB.

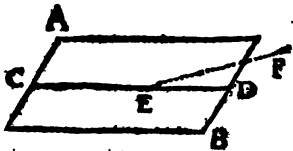


COROLLAIRE.

Si une ligne droite, par exemple CE, est dans un plan AB, ou si cette ligne y a quelque une de ses parties, cette ligne droite étant prolongée, par exemple en D, la partie ED sera aussi dans le même plan AB, & quelque loi qu'on la prolonge, elle sera toujours dans le même plan;

(1) Cor. 1. déf. 2. Geom.

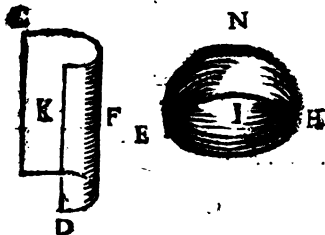
car si cette ligne droite CE étant prolongée n'étoit pas toujours dans le même plan AB prolongé aussi s'il est nécessaire, il s'ensuivroit que cette ligne droite ne se confondroit pas avec cette surface, ou ne la toucheroit pas dans toute sa longueur; &



partant * cette surface ne seroit pas plane, ce qui est contre la supposition. Donc une ligne droite menée dans un plan, ne peut être selon une de ses parties CE dans un plan quelconque AB , & élevée au dessus de ce plan selon une de ses parties EF .

II. Une surface courbe est celle sur laquelle on ne peut mener plusieurs lignes droites à volonté,

s'est à dire, dans toutes sortes de positions transversales, ou que ces lignes droites ne peuvent toucher dans toute leur



longueur; telle est la surface CD ou EH .

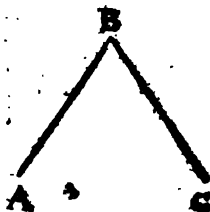
Si on considère l'intérieur de la courbure de cette surface telle qu'elle est en K , ou en I , on l'appelle surface concave; & si on considère l'extérieur de cette courbure telle qu'elle est en E , ou en N , on l'appelle surface convexe.

* Déf. présente.

Il faut presentement faire attention aux definitions qui conviennent aux proprietes des lignes menées sur les surfaces ; aux definitions qui conviennent aux surfaces considerées l'une à l'égard de l'autre, & enfin aux lignes qui servent de termes, de bornes, ou de limites à des surfaces.

12. Un angle est l'écartement ou ouverture comprise entre deux différentes lignes, qui concourent ; par exemple A B C.

Il y a en general trois sortes d'angles compris par des lignes, sçavoir angle rectiligne, curviligne, & mixte.



13. Un angle rectiligne est un écartement ou ouverture formée par deux lignes droites ; par exemple l'angle A B C. Le curviligne est l'ouverture comprise par deux lignes courbes ; & le mixte, par une courbe & une ligne droite. Dans la suite on traitera seulement des angles rectilignes.

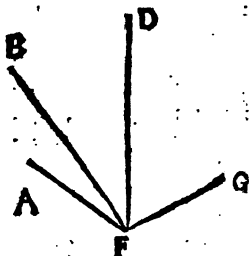
Il faut observer qu'en se servant de lettres pour exprimer un angle formé par des lignes, la lettre du milieu de l'expression marquera toujours la pointe ou le sommet de l'angle qui est le point de concours ; par exemple, dans l'expression de l'angle A B C ou C B A qui est la même chose, le sommet ou pointe de cet angle est le point B.

C O R O L L A I R E.

Il suit de cette definition que tel est l'écartement de deux lignes qui concourent, tel sera

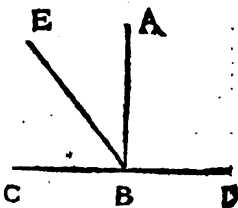
l'angle qu'elles forment, c'est à dire; que plus cet écartement sera grand, plus aussi cet angle sera grand; & que plus cet écartement sera petit, l'angle sera petit: & qu'enfin on n'a point égard à la longueur des

lignes qui forment un angle pour déterminer la grandeur de cet angle; par exemple, l'angle AFG est plus grand que l'angle BFD, qui n'en est qu'une partie, quoique les côtez BF & DF de l'angle BFD soient plus



longs que les côtez AF & FG de l'angle AFG. Les angles rectilignes sont de trois sortes, droits, obtus, & aigus.

14. Un angle droit est celui qui est compris ou formé par une ligne perpendiculaire à une autre ligne. Tel est l'angle ABD, si AB est perpendiculaire à BD.



15. Un angle obtus est celui qui est plus grand ou plus ouvert qu'un angle droit; par exemple, l'angle EBD, qui est plus grand que l'angle droit ABD.

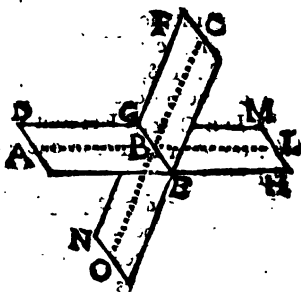
16. Un angle aigu est celui qui est plus petit qu'un angle droit; par exemple, l'angle EBC qui est plus petit que l'angle droit ABC.

En general les angles aigus ou obtus sont appelés *angles obliques*.

Des angles rectilignes, soit qu'ils soient droits, obtus, ou aigus, peuvent encore recevoir differens-noms: on les peut appeller angles plans, angles de plans, & angles alternes.

17. Angle plan est celui qui est designé sur une surface plane, comme l'angle ABC de la definition 11.

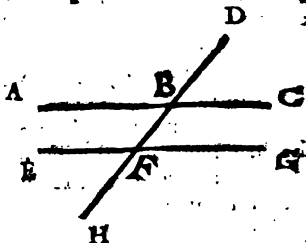
18. Un angle de plans ou de deux plans est l'écartement, qui est entre deux lignes perpendiculaires à la commune section de ces deux plans, par un même point, chacune de ces deux perpendiculaires étant menée dans chaque plan; par exemple si la ligne AB menée dans le plan DE est perpendiculaire à la commune section



GE , & si la ligne CB menée dans le plan FE est aussi perpendiculaire à cette commune section GE par le même point B , l'écartement de ces deux lignes AB & CB est l'angle compris par les deux plans DE & FE ; l'angle des plans FE & GH doit être considéré comme le precedent; & ainsi des autres.

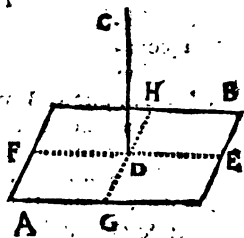
19. Angles alternes sont ceux qui ont le sommet dans différentes lignes, & qui sont posés de part & d'autre d'une ligne droite, qui coupe ces mêmes lignes; on les appelle alternes internes lorsqu'ils sont entre ces lignes qu'une

autre ligne coupe ; & alternes externes lorsqu'ils ne sont pas entre ces mêmes lignes, dans lesquelles leur sommet est posé. ABF & BFG , EFB & FBC sont des angles alternes internes ; DBC & EFH , ABD & HFG sont des angles alternes externes.



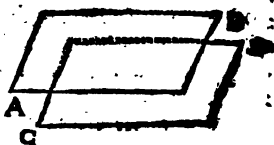
Les angles posés d'un même côté de la ligne DH sont aussi intérieurs & extérieurs. CBF & GFB sont intérieurs du même côté, de même des angles ABF & EFB : les angles DBC & GFE sont extérieurs du même côté : on dira la même chose des angles ABD & EFH .

20. La ligne droite perpendiculaire à un plan est celle qui est perpendiculaire à toutes les lignes droites qu'on peut mener dans ce même plan par l'extrémité de cette ligne ; par exemple CD est perpendiculaire au plan AB , si elle est perpendiculaire aux lignes FE , GH , &c. qui sont menées dans ce plan par l'extrémité D de cette ligne droite CD .



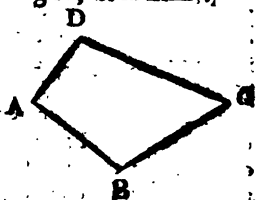
21. Les plans parallèles sont ceux qui sont

Egalement distans
l'un de l'autre dans
toute leur étendue ;
par exemple A B &
C D.

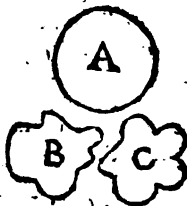


Une surface plane
à cause de ses
limites ou termes est de trois sortes ; la surface
plane rectiligne , la curviligne , & la mixte.

21. La surface plane
rectiligne est celle qui
est terminée par des
lignes droites ; par
exemple , A B C D.



23. La surface plane
curviligne est celle qui
est terminée par une, ou
plusieurs lignes courbes,
comme les surfaces A ,
B , C , &c.



24. La surface plane
mixte est celle qui est
terminée par des li-
gnes droites & des li-
gnes courbes ; comme
D , E , F , &c.



Mais parcequ'il y a une infinité de sortes de
surfaces curvilignes & de surfaces mixtes ; &
qu'entre les surfaces planes , les seules rectilignes

Les courbures circulaires sont les plus nécessaires, & sont celles qui sont d'un plus fréquent usage dans les Mathématiques ; c'est pour cela qu'on traitera seulement de ces deux dernières sortes.

25. Un cercle est une surface plane terminée par une ligne courbe dont tous les points sont également distans d'un point pris dans cette surface ; telle est la surface BD terminée par la ligne courbe $BEDFB$.



26. La circonférence d'un cercle, ou une ligne circulaire, est une ligne courbe, qui termine le cercle de toutes parts ; telle est la ligne courbe $BEDFB$.

27. Un arc de cercle est une partie de circonférence telle qu'elle soit ; par exemple la partie BE ou ED .

28. Le centre d'un cercle est un point pris dans ce cercle, qui est également distant de tous les points de la circonférence ; par exemple le point C .

COROLLAIRE.

Donc pour d'écrire un cercle, il faut concevoir qu'une ligne droite ; par exemple BC soit mise au tour d'une de ses extrémités fixes C dans un même plan ; car la ligne courbe $BEDFB$ que cette ligne BC aura d'écrire par le mouvement du point B , lorsqu'elle sera revenue dans la même situation d'où elle avoit commencé à se mouvoir, sera une circonférence de cercle ; puisque chacun des points de cette ligne

Ligne courbe sera également distant de l'autre extrémité fixe C de cette ligne droite mobile.

L'espace ou surface plane qui sera terminée par cette ligne courbe sera le cercle, & l'extrémité fixe de cette ligne mobile sera le centre,

29. Un rayon de cercle est une ligne droite menée du centre à la circonférence; par exemple C B.

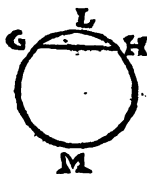
C O R O L L A I R E I.

Donc les rayons d'un même cercle sont égaux entr'eux; puisqu'ils sont tous menés du centre à quelque point de la circonférence, & que (*) le centre d'un cercle est également distant de tous les points de la circonférence.

C O R O L L A I R E II.

Donc les lignes droites menées du centre du cercle, plus courtes qu'un rayon se termineront dans le cercle sans parvenir à la circonférence; & les lignes menées du centre plus longues qu'un rayon outrepasseront la circonférence, & se termineront hors le cercle: car elles se termineront plus loin du centre, que chaque point de la circonférence, c'est à dire, qu'elles outrepasseront les bornes du cercle.

30. Une corde ou soutendante d'un arc de cercle est une ligne droite menée d'une des extrémités de cet arc à son autre extrémité; par exemple GH. Une corde appartient en même-temps à deux arcs, dont

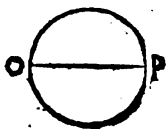


Def. 23. G10.

S

elle est soutendante; par exemple GH appartient à GLH , elle appartient aussi à l'arc $G M H$.

31. Un diamètre est une ligne menée d'un point à un autre point de la circonférence, & qui passe par le centre, comme la ligne OP ,



COROLLAIRE,

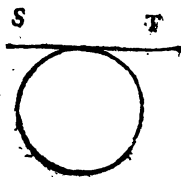
Chaque diamètre est double d'un rayon; Donc tous les diamètres sont égaux entr'eux; parceque ⁽¹⁾ les grandeurs qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entr'elles.

32. Un segment de cercle est une partie du cercle, terminée par une corde ou ligne soutendante, & par l'arc soutenu par cette corde; par exemple la partie GLH ou $G M H$ du cercle de la définition 30.

33. Un secteur de cercle est une partie du cercle terminée par deux rayons qui forment un angle, & par l'arc intercepté entre ces deux rayons; par exemple l'espace $AMNA$.



34. Une ligne touchante la circonférence d'un cercle, est une ligne droite menée dans le plan du cercle, qui rencontre la circonférence de ce cercle sans la couper aucunement, c'est à dire, qu'elle



(1) *Ax. 6. general.*

n'entre en aucune maniere dans le cercle ; par exemple la ligne S T.

35. Un degré est la trois-cens soixantième partie d'une circonférence de cercle ; c'est à dire , si on divise une circonférence de cercle en 360 parties égales , chaque partie sera appelée un degré.

36. Une minute est une soixantième partie d'un degré , c'est à dire que , si on divise un degré en 60 parties égales , une de ces parties est une minute ou prime.

37. Une seconde est une soixantième partie d'une minute , c'est à dire que , si on divise une minute en 60 parties égales , une de ces parties est une seconde ; en subdivisant de cette maniere par 60 , on trouvera des tierces , des quartes , &c. à l'infini.

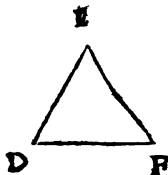
Nous commencerons les définitions qui conviennent aux surfaces planes rectilignes par celles du triangle rectiligne ; parcequ'on peut reduire toutes ces surfaces en triangles , en menant des lignes droites à tous les angles de ces surfaces , d'un point pris à volonté dans ces mêmes surfaces.

38. un triangle rectiligne est une surface plane terminée par trois lignes droites , comme A B C.

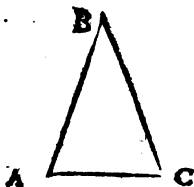
Il y a de trois sortes de triangles si on considère seulement leurs côtes ; sçavoir , Equilateral , Ifoſcele & Scalène : & si on considère seulement leurs angles , on en trouvera encore de trois sortes ; sçavoir Oſigone ou Acutangle ; Rectangle , & Ambligone ou Obtufangle.



39. Un triangle équilatéral est celui qui a les trois côtés égaux entr'eux ; par exemple D E F.



40. Un triangle Isoscele est celui qui a seulement deux côtés égaux ; par exemple le triangle ABC qui a deux côtés AB & BC égaux entr'eux.

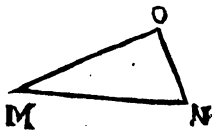


41. Un triangle scalene est celui qui a ses trois côtés inégaux entr'eux ; par exemple le triangle G H L.



42. Un triangle acutangle ou oxigone est celui dont tous les angles sont aigus ; par exemple le triangle A B C ou D E F.

43. Un triangle rectangle est celui dont un des angles est droit ; par exemple le triangle M N O, dont l'angle M O N est droit.



44. Un triangle amblygone ou obtufangle est celui dont un des angles est obtus ; par exemple le triangle G L H dont l'angle G H L est obtus.

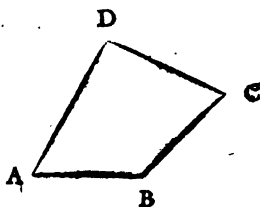
45. L'hypoténuse d'un triangle rectangle est le côté opposé à l'angle droit ; par exemple

MN est l'hypotenuse du triangle rectangle MNO de la définition 43.

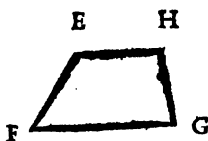
46. La base d'un triangle est le troisième côté qui reste lorsqu'on a parlé des deux autres ; par exemple si on a parlé des deux côtés AB & AC, du triangle ABC, le troisième côté BC sera appelé base. La base des autres surfaces, ou des solides, est ordinairement le côté inférieur.

Les surfaces rectilignes quadrilaterales ou quadrilatères, ou terminées par quatre lignes droites, en general sont de trois sortes, trapezes, trapezoides, & parallelogrammes.

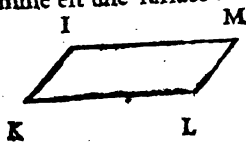
47. Un trapeze est une surface terminée par quatre lignes droites, dont aucune n'est parallele à l'autre ; par exemple la surface ABCD.



48. Un trapezoide est une surface terminée par quatre lignes droites dont deux sont paralleles entr'elles ; par exemple, la surface EFGH, dont les deux côtés ou lignes EH & FG sont paralleles entr'elles.



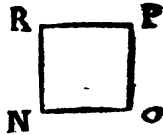
49. Un parallelogramme est une surface terminée par des lignes droites, dont les côtés ou lignes opposées sont paralleles entr'elles ; par exem-



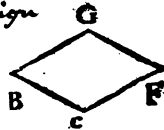
ple la surface KM , dont les côtez KL & IM oppozés sont paralleles l'un à l'autre, & dont les côtez IK & LM sont aussi paralleles l'un à l'autre.

Il y a quatre sortes de parallelogrammes quadrilateraux, sçavoir le **Quarré**, le **Rhombé**, le **Parallelogramme Oblong** ou **Rectangle**, & le **Rhomboide**.

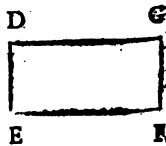
50. un quarré est un parallelogramme dont deux des côtez comprennent un angle droit, & sont égaux entr'eux; par exemple le parallelogramme NP dont les côtez NO & NR comprennent l'angle droit ONR , & sont égaux entr'eux.



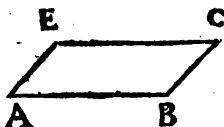
51. Un rhombé est un parallelogramme dont deux côtez comprennent un angle oblique, c'est à dire, *aigu* ~~obtus~~ ou *obtus*, & ces deux côtez sont égaux entr'eux; par exemple le parallelogramme BF , dont les côtez BC & BG sont égaux entr'eux, & comprennent par leur écartement l'angle oblique CBG .



52. Un parallelogramme oblong, ou simplement **rectangle**, est un parallelogramme dont les deux côtez comprennent un angle droit, & sont inégaux entr'eux; par exemple le parallelogramme EG , dont les côtez EF & ED sont inégaux, & comprennent l'angle droit DEF .

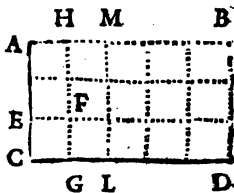


33. Un rhomboïde est un parallelogramme, dont deux côtez comprennent un angle oblique, c'est à dire, aigu ou obtus, & ces deux côtez sont inégaux entr'eux ; par exemple le parallelogramme AC dont les côtez AB & AE sont inégaux, & comprennent l'angle oblique BAE.



COROLLAIRE I.

Donc en general, si deux lignes menées dans un même plan concourent en un point, & si on suppose qu'une de ces deux lignes soit mue transversalement selon la longueur de l'autre, & toujours parallelement à elle-même lorsqu'elle étoit dans sa premiere situation ; étant arrivée à l'extrémité de l'autre, un parallelogramme sera décrit : par exemple si la ligne AC est mue transversalement, selon la longueur de CD, ou CD selon la longueur de CA & toujours parallelement à leur premiere situation ; lorsque AC sera parvenue à l'extrémité de CD en BD, ou que CD sera parvenue à l'extrémité de AC



en AB, la surface CB qui sera décrite sera un parallelogramme ; puisque les côtez AG & BD sont paralleles, & que les côtez AB & CD seront aussi paralleles par la supposition

qu'on a faite que ces côtez étoient toujours parallèles pendant leur mouvement.

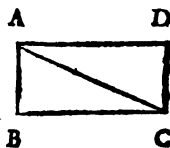
COROLLAIRE II.

Donc la surface d'un quarré ou d'un parallélogramme rectangle est décrite par un des côtez perpendiculaires à l'autre, mû transversalement selon la longueur de cet autre, c'est à dire, repeté autant de fois qu'il y a de points dans cet autre côté; ce qui est la même chose que de multiplier un côté par l'autre: & partant pour avoir la surface du rectangle CB, dont un des côtez AC est de 3 toises, & l'autre CD de 5 toises, il faut multiplier AC par CD, ou CD par AC, on trouvera pour cette surface 15 toises quarrées. Parceque chaque toise lineaire de la ligne AC, par exemple CE dans la promotion transversale qui en sera faite de la situation CE en FG décrira une toise quarrée CF: de sorte que la ligne AC contenant 3 toises lineaires étant parvenue en GH aura décrit 3 toises quarrées; si on en fait encore une promotion jusqu'en LM, elle décrira encore 3 toises quarrées, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'elle soit parvenue en BD. Et partant si le côté d'un quarré est multiplié par l'autre, on connoitra au produit de cette multiplication la valeur de la surface de ce quarré. Pareillement si on multiplie le côté d'un rectangle par un autre, on aura pour produit la surface de ce rectangle. On ne doit pas conclure la même chose du rhombe & du rhomboïde; comme il sera démontré dans la suite.

COROLLAIRE III.

Donc les côtez oppozés des parallelogram-

mes sont égaux entr'eux ; par exemple les côtes AB & DC sont égaux entr'eux ; puisque * le parallélogramme BD est décrit par la ligne AB transportée transversalement en DC ; par le même raisonnement $AD = BC$. On dira la même chose des autres parallélogrammes.



54. Une ligne diagonale est une ligne menée du sommet d'un des angles par le sommet de l'angle opposé d'un parallélogramme ; par exemple la ligne AC qui est menée du sommet de l'angle A , au sommet de l'angle opposé C du parallélogramme BD .

55. Une surface régulière est celle dont tous les côtes sont égaux entr'eux, & dont pareillement tous les angles sont égaux entr'eux, comme la surface M , & la surface NP de la définition 50.



56. Un polygone est une surface terminée par un nombre de côtes plus grand que 4 ; par exemple M .

C O R O L L A I R E.

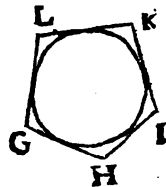
Puisqu'on peut ⁽¹⁾ considerer une ligne comme une trace ou vestige d'un point mû d'une station à une autre station ; & que le plus court chemin qu'on puisse imaginer dans la course d'un point qui est en mouvement, est le chemin que ce point parcourt en passant d'une sta-

* Cor. 1, déf. présente. (1) Cor. 1, déf. 3, Geo.

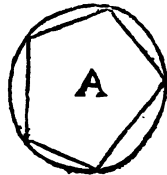
tion à une autre qui lui est infiniment proche ; & le chemin le plus court de tous ceux qu'on peut imaginer d'un point à un autre point étant ⁽¹⁾ une ligne droite ; la ligne menée d'un point à un autre point qui est infiniment proche, est une ligne droite ; & partant toute ligne droite ou courbe peut être considérée comme une infinité de petites lignes droites infiniment petites. Donc enfin une ligne courbe, par exemple une circonférence de cercle, est * un polygone d'une infinité de côtés infiniment petits.

Les polygones sont distingués entr'eux par le nombre de leurs angles ou de leurs côtés, c'est à dire, qu'une surface de 5 côtés est appelée pentagone ; une de 6 côtés, Hexagone ; une de 7 côtés, Heptagone ; une de 8 côtés, Octogone ; une de 9 côtés, Enneagone ; une de 10, Decagone, &c.

57. Une surface plane circonscrite à un cercle, est celle dont tous les côtés touchent la circonférence de ce cercle ; par exemple la surface GHIKL, dont chacun des côtés GH, HI, &c. touchent une même circonférence de cercle.



58. Une surface plane inscrite dans un cercle, est celle par tous les sommets des angles de laquelle une circonférence de cercle passe ; par exemple la surface A.

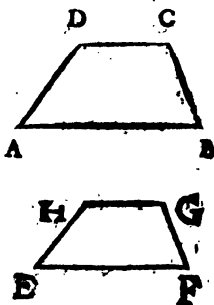


(1) Déf. 4. Geo.

* Déf. 56. présente.

59. Dans les surfaces rectilignes & équiangles l'une à l'autre, un côté est homologue à un autre, lorsque le premier se termine aux sommets des angles d'une surface, qui sont égaux aux angles de l'autre surface, au sommet desquels se termine le second côté homologue, On dira la même chose des autres côtes homo-

logues; par exemple si les surfaces $A B C D$ & $E F G H$ sont équiangles l'une à l'autre, c'est à dire, si l'angle $A B C$ d'une de ces surfaces est égal à l'angle $E F G$ de l'autre, & si l'angle $B C D = F G H$, & $C D A = G H E$, & $D A B = H E F$, le côté $A B$ & le côté $E F$ se-



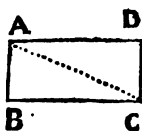
ront homologues; parceque, suivant ce qu'on vient de dire, $A B$ se termine aux sommets des angles A & B qui sont * égaux aux angles E & F , chacun à chacun. Par la même raison $B C$ & $F G$ sont homologues, de même $A D$ & $E H$, &c.

Dans les triangles équiangles l'un à l'autre, les côtes homologues sont ceux qui sont oppozés à angles égaux.

60. Deux surfaces semblables sont celles dont chaque angle de l'une est égal à chaque angle de l'autre, & dont les côtes homologues qui comprennent des angles égaux dans une de ces surfaces, sont proportionnels aux côtes homologues qui comprennent pareils angles égaux dans

* Par supposit,

l'autre surface ; par exemple la surface BD est semblable à EG , si l'angle $DAB = GHE$, si $ABC = HEF$, si $BCD = EFG$; si $CDA = FGH$; & si le côté $DA . AB :: GH . HE$; & si $AB . BC :: HE . EF$; si $BC . CD :: EF . FG$; & enfin si $CD . DA :: FG . GH$.



On fera libre aussi de comparer chaque côté d'une de ces surfaces à chaque côté qui lui correspond dans l'autre ; par exemple $AD . HG :: AB . HE$; $BC . EF$. &c. la similitude de ces surfaces subsistera toujours. Car s'il se trouve une surface dont les côtés soient entr'eux selon la première manière de comparer qu'on vient d'exposer, ces mêmes côtés seront aussi * entr'eux selon la seconde.

On se sert indifféremment de ces deux manières de comparer les côtés des surfaces semblables, parcequ'une de ces manières ne peut être vraie sans que l'autre le soit.

Il faut seulement remarquer que, lorsque selon la seconde de ces deux manières on compare les côtés homologues d'un triangle ou autre surface aux côtés homologues d'un autre triangle semblable ou de quelqu'autre surface semblable, les antécédens d'une même analogie se doivent rencontrer dans le même triangle ou dans la même surface.

C O R O L L A I R E.

Donc les quarez sont deux surfaces semblables

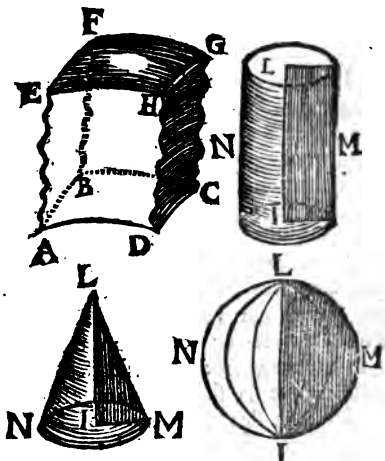
* *Cor. Prop. 3. Art. 2. Algeb,*

entr'elles,

61. Les corps, ou les solides sont des grandeurs étendus en long, en large, & en profond; par exemple une pierre, une piece de bois, &c.

COROLLAIRE I.

Donc si on considere qu'une surface puisse être transportée de travers ou transversalement d'une station à une autre station, ou qu'une surface fasse



une revolution autour de-deux points d'une des lignes qui la terminent; un corps ou solide sera décrit par la trace ou le vestige par où cette surface aura passé. Car ce sera une grandeur étendue en longueur & en largeur à cause de la longueur & largeur de la surface

¶ Cor. Prop. 3. Art. 1.

mûe, & cette grandeur outre la longueur & largeur sera aussi étendue en profondeur, à cause du mouvement transversal. Par exemple si la surface AC est transportée de sa situation AC en EG, l'espace ABCDEFGH qui sera décrit par ce mouvement, sera un solide. Pareillement si quelque surface, par exemple, ILM fait une révolution au tour des deux points I & L de la ligne IL, qui est un de ses termes ou limites, ILMN sera un solide.

COROLLAIRE II.

Donc les extrêmités d'un corps sont des surfaces; parceque si on considère que ce corps soit décrit par une surface transportée d'une station à une autre station, la surface qui commencera à se mouvoir, & cette même surface qui cessera de se mouvoir, servira à terminer ce corps; les autres extrêmités sont décrites par le mouvement transversal de chaque ligne, qui terminera cette surface en mouvement. Si on considère que ce corps soit décrit par la révolution d'une surface au tour d'un ou plusieurs points; le mouvement transversal des lignes qui seront mûes avec la surface dont elles seront termes, décriront des surfaces.

Il y a plusieurs sortes de solides, mais dans ces Elemens on traitera seulement des Pyramides, des Cones, des Prismes, des Cylindres & des Spheres; parceque ce sont les especes des solides, qui sont le plus en usage, & dont la connoissance est tres-necessaire.

62. Une Pyramide est un solide, qui a pour terme une surface quelconque rectiligne, & qui a ensuite pour autres termes plusieurs triangles;

de sorte qu'un des angles de chacun se termine à un sommet commun, & que chacun de ces mêmes triangles a pour base un côté de cette surface rectiligne ; tel est le corps $ABCD$.

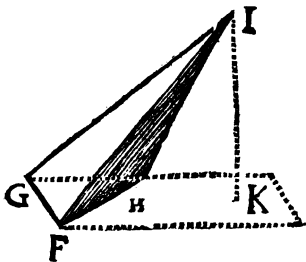


63. Un angle solide est l'écartement ou ouverture de plus de deux plans qui se rencontrent l'un l'autre, & qui se finissent en pointe dans un sommet commun, en terminant d'une part un espace concave. Dans la pyramide $ABCD$, les plans ADC , CDB , & BDA qui se rencontrent dans les lignes AD , DC & DB , forment un angle solide dont le sommet est D . Dans une chambre, les deux murailles & le plancher qui se rencontrent forment un angle solide.

Il y a des pyramides droites & des pyramides obliques.

64. Une pyramide droite est celle du sommet de laquelle on peut mener une ligne perpendiculaire sur la base, sans qu'il soit pour cela nécessaire de prolonger cette base ; ou bien du sommet de laquelle une ligne étant menée perpendiculairement à la base, se trouve au dedans de cette pyramide.

Par exemple, la pyramide $ABC D$ du sommet D de laquelle une ligne DE est menée perpendiculairement sur la base ABC sans que cette base soit prolongée, est une pyramide droite.



65. Une pyramide oblique est celle du sommet

de laquelle une ligne ne peut être menée perpendiculairement que sur la base prolongée. Par exemple, la pyramide $F G H I$ du sommet I de laquelle la ligne $I K$ est menée perpendiculairement sur la surface $G F H$ prolongée, est une pyramide oblique.

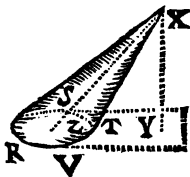
66. Une pyramide polygone est celle dont la base a plus que quatre côtés. En particulier, ces pyramides sont distinguées entr'elles par la variété de leurs bases; c'est à dire qu'une pyramide sera nommée triangulaire, si sa base est un triangle; Quadrangulaire, si sa base est un Quadrilatere; Pentagone, si sa base est un Pentagone, Exagone, &c.

67. Un cone est une pyramide dont la base est terminée par une infinité de côtés; c'est à dire, dont la base est un cercle, par exemple le solide $L M N O P$.

Il y a des Cones qui sont droits, & d'autres qui sont obliques.

68. Un Cone droit est celui du sommet duquel une ligne étant menée perpendiculairement à la base, passe par le centre du cercle qui en fait la base. Par exemple le Cone $L M N O P$ du sommet P duquel la ligne $P R$ étant menée perpendiculairement à la base $L M N O$, passe par le centre R de cette base.

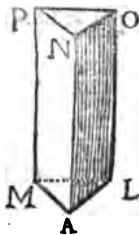
69. Un Cone oblique est celui du sommet duquel une ligne menée perpendiculairement à la base, ne passe point par le centre du cercle qui en fait la base. Par exemple le Cone $R S T V X$ du sommet X , duquel la ligne $X Y$ menée perpen-



diculairement à la base, ne passe point par le centre Z de cette base, mais par un autre point de cette base prolongée s'il est nécessaire.

70. L'axe d'un Cone est la ligne menée de son sommet au milieu ou centre de sa base. Par exemple la ligne PR est l'axe du cone LMNOP, & la ligne XZ est l'axe du cone R V T S X.

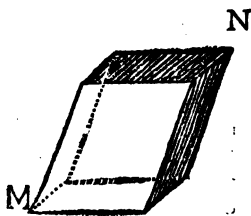
71. Un prisme est un solide terminé par des surfaces planes rectilignes, dont deux sont parallèles entr'elles, égales, & desquelles deux surfaces chaque côté de l'une est égal à chaque côté de l'autre, & les autres surfaces sont des parallélogrammes. Par exemple ALMNOP, dont les deux surfaces ALM & NOP sont parallèles & égales, & les autres, sçavoir AP, AO, LP, sont des parallélogrammes; est un prisme.



Il y a des prismes droits & des prismes obliques.

72. Un prisme droit est celui dont les surfaces parallèles sont perpendiculaires aux parallélogrammes, qui le terminent ou qui en font le contours; par exemple le prisme LAMNPO.

73. Un prisme oblique est celui dont les surfaces parallèles ne sont point perpendiculaires aux parallélogrammes qui le terminent; par exemple, le prisme MN.

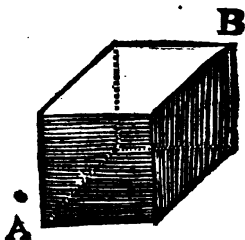


Il y a des prismes qu'on appelle particulièrement Parallelepèdes,

74. Un parallépipède est un prisme terminé par six parallélogrammes, dont ceux qui sont oppoſez ſont égaux & parallèles entr'eux; par exemple le ſolide M N, ou A B.

Il y a des parallépipèdes qu'on appelle cubes.

75. Un cube eſt un parallépipède terminé par ſix quarrés égaux entr'eux; par exemple le ſolide A B.

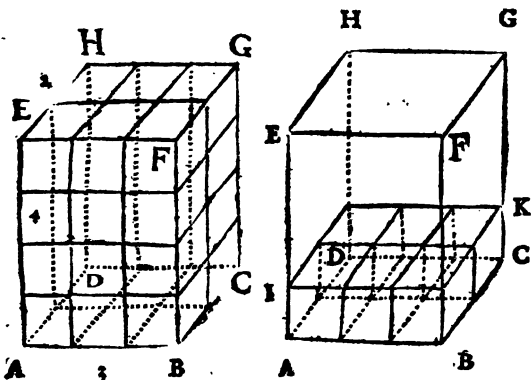


C O R O L L A I R E I.

Donc ſi on ſuppoſe qu'une ſurface plane rectiligne quelconque ſoit mûe tranſverſalement ſelon la longueur d'une ligne droite fixe, & que les côtes qui la terminent ſoient toujours pendant ce mouvement parallèles à eux mêmes conſiderez dans la première poſition; lorsque cette ſurface ceſſera de ſe mouvoir, l'eſpace qu'elle aura parcouru ſera un prisme. Car 1°. il y aura deux des ſurfaces qui termineront ce ſolide, qui ſeront parallèles entr'elles. 2°. Les autres ſurfaces ſeront des ſurfaces parallélogrammes; puisqu'elles ſeront décrites par le mouvement tranſverſal des lignes droites, qui termineront cette ſurface plane en mouvement, & puisque ce mouvement tranſverſal ſera fait parallèlement & ſelon la longueur d'une ligne droite, ſans varier de part ni d'autre.

COROLLAIRE II.

Donc la solidité d'un prisme rectangle est décrite & exprimée par une des surfaces paralleles mûe transversalement selon la longueur d'une ligne droite qui lui est perpendiculaire ; c'est à dire, par une des surfaces paralleles, repetée autant de fois qu'il y a de points dans la longueur de cette ligne, ce qui est la même chose que de multiplier une des surfaces paralleles d'un prisme rectangle par sa hauteur. Par exemple, pour connoître la solidité du prisme rectangle ABCDEFGH,



dont la largeur est de deux pieds lineaires, & la longueur de 3 pieds, & la hauteur de 4 ; il faut connoître la base AC : si cette base AC est un rectangle, on multipliera 2 par 3, & on aura 6 pieds quarrés pour la surface AC, laquelle étant multipliée par la hauteur, sçavoir 6 pieds quarrés par 4 pieds lineaires ; on aura 24 pieds cubes pour la solidité de ce prisme entier. Parceque chaque pied quarré de la sur-

face AC étant mû transversalement selon la hauteur d'un pied lineaire en IK, décrira un pied cube. Or dans la surface AC il y a 6 pieds quarez; donc lorsque cette surface AC sera mûe parallèlement à elle-même de la hauteur d'un pied lineaire, qu'elle sera, par exemple, en IK, elle aura décrit 6 pieds cubes. Donc cette surface de 6 pieds quarez étant mûe de la hauteur de 4 pieds lineaires, elle aura décrit 24 pieds cubes, solidité du prisme entier proposé.

76. Un cylindre est un prisme, dont deux surfaces qui sont paralleles, sont terminées chacune par une infinité de côtez, c'est à dire, dont deux surfaces paralleles sont deux cercles; par exemple AB.

77. L'axe d'un cylindre est une ligne droite menée du centre d'un des cercles paralleles au centre de l'autre, par exemple la ligne CD.

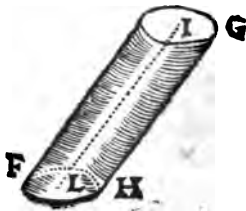
Il y a de deux sortes de cylindres, de droits & d'obliques.

78. Un cylindre droit est celui dont l'axe est perpendiculaire à la base. Par exemple le cylindre AB, dont l'axe CD est perpendiculaire à la base AE, est un cylindre droit,

79. Un cylindre oblique est celui, dont l'axe n'est pas perpendiculaire à la base; par exemple le cylindre FG, dont l'axe IL n'est point perpendiculaire à la base FH, est un cylindre oblique.



A



H

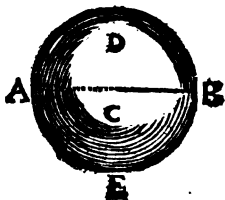
COROLLAIRE I.

Donc pour décrire un cylindre, il faut supposer une ligne droite fixe par une de ses extrémités dans le centre d'un cercle, & immobile selon sa longueur; ensuite que ce cercle soit mis toujours parallèlement à lui-même jusqu'à l'autre extrémité de cette ligne: ce cercle après avoir cessé de se mouvoir aura décrit un cylindre par son mouvement, & cette ligne selon la longueur de laquelle il aura été mis en sera l'axe. Car le solide décrit par le mouvement transversal de ce cercle, sera terminé par deux cercles égaux, & les côtes infiniment petits de la circonférence de ce cercle, auront décrit par leur mouvement transversal une infinité de parallélogrammes d'une largeur infiniment petite, & de la longueur du cylindre, qui termineront tous ce même cylindre.

COROLLAIRE II.

Donc pour connoître la solidité d'un cylindre rectangle, il suffit de multiplier la surface qui est le cercle de la base, par la hauteur de ce cylindre; & le produit de cette multiplication exprimera la valeur du cylindre. Parceque ce cylindre n'est que sa base circulaire, répétée autant de fois qu'il y a de points dans sa hauteur.

80. Une sphere, globe, ou boule est un corps ou solide terminé par une surface courbe, dont tous les points possibles sont également distans d'un seul point pris dans



te solide. Par exemple le corps $A D B C$ qui est terminé par la surface $A B C D E$, & dans lequel le point C est également distant de tous les points de cette surface, est une sphere.

81. Le centre d'une sphere est le point pris dans ce solide, qui est également distant de tous les points de la surface de ce même corps; par exemple le point C .

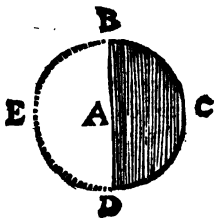
82. Un rayon de sphere est une ligne droite menée du centre à sa surface; & un diamètre de sphere est la ligne droite qui est menée d'un point à un autre point de sa surface, & qui passe par le centre, $C B$ par exemple est un rayon, & $A B$ est un diamètre.

C O R O L L A I R E I.

Donc les rayons d'une sphere sont égaux entr'eux. Car puisque le centre d'une sphere est également distant de tous les points de sa surface, & que les rayons sont des lignes droites menées du centre à la surface; il faut necessairement qu'ils soient tous égaux entr'eux. Pareillement tous les diametres de la même sphere sont égaux entr'eux, puisqu'ils sont chacun doubles de Rayons qui sont égaux entr'eux.

C O R O L L A I R E I I.

Donc si on suppose qu'un demi cercle, par exemple $D B C D$ soit mû ou fasse une revolution au tour de son axe ou diamètre $B D$, lorsque ce demi cercle sera revenu dans la



même situation, d'où il étoit parti ; par ce mouvement il aura décrit une sphere, puisque l'arc B C D de circonference qui termine d'une part ce demi cercle D B C D, décrira une surface courbe dont tous les points seront également distans du point A, qui en sera le centre : enfin cet espace ainsi décrit & terminé par cette surface courbe sera un solide ; puisque outre la longueur & largeur qui sont dans le demi cercle, il y aura profondeur à cause du mouvement transversal qui se trouve dans la circonvolution de ce demi cercle.

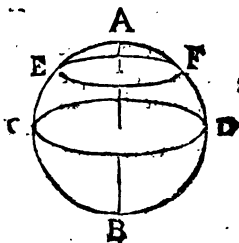
83. L'axe d'une sphere est un de ses diamètres ; au tour duquel la sphere tourne ou fait quelque revolution ; par exemple B D.

84. Les poles d'une sphere sont les deux points qui sont les extrémités de l'axe ; par exemple le point B & le point D.

85. Un grand cercle d'une sphere est celui, dont le plan passe par le centre de cette sphere, & dont la circonference est décrite sur la surface de cette même sphere.

86. Un petit cercle d'une sphere est celui, dont le plan ne passe point par le centre de cette sphere, & dont la circonference est décrite sur la surface de cette même sphere.

87. Les poles d'un arc de cercle ou d'un cercle de la sphere sont deux points pris sur la surface de la même sphere, chacun également éloigné de la circonference de ce cercle ; où (ce qui est la même



me chose) ce sont les extrémités du diamètre de la sphere, qui est perpendiculaire au plan de ce cercle par le centre. Par exemple les poles du grand cercle CD , & du petit cercle EF qui lui est parallele, sont les deux points A & B .

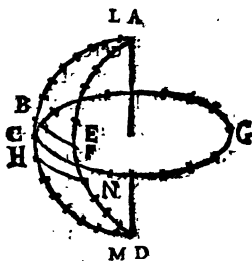
88. Un polyèdre est un solide de plusieurs angles & de plusieurs surfaces planes.

En particulier on distingue les polyèdres par le nombre de leurs surfaces. Par exemple une pyramide triangulaire sera appelée un corps de quatre surfaces ou Tetraèdre; un cube sera appelé un corps de six surfaces ou Hexaèdre, &c.

C O R O L L A I R E.

Done une sphere doit être considerée comme un polyèdre d'une infinité de surfaces, qui sont quadrilaterales & infiniment petites. Car puisque une sphere est * décrite par le mouvement de circonvolution d'un demi cercle par exemple

$ACDA$ au tour de son diamètre AD ; & qu'une circonférence de cercle est ** considerée comme un polygone d'une infinité de côtés; si on considère un grand cercle, par exemple CG , dont le plan



soit perpendiculaire au diamètre AD du demi cercle $ACDA$; qu'une petite ligne par exemple BC soit un infinitième côté de la demi circon-

* Cor. 2. déf. 82. Geom. ** Cor. déf. 56. Geom.
ference

terence du cercle $A C D$, & que $C F$ soit un infinitième côté de la circonférence du cercle $C G$, Lorsque le demi cercle $A C D$ en faisant sa révolution aura avancé de la distance de la ligne $C F$ infiniment petite qui est un côté de la circonférence du cercle $C G$, la figure quadrilaterale $C E$ infiniment petite, sera une de celles qui seront décrites pendant ce mouvement. La ligne infiniment petite $C H$ décrira aussi par son mouvement des figures quadrilaterales $C N$, &c. & ainsi des autres infinitièmes. A l'égard de chacune des deux lignes infiniment petites $A L$ & $D M$, qui ont une de leurs extrémités dans les extrémités du diamètre $A D$, elles décriront pendant ce mouvement deux cercles infiniment petits; car chacune de ces deux infinitièmes est perpendiculaire à un diamètre. Parcequ'on démontrera dans la suite qu'une ligne qui touche une circonférence de cercle, est perpendiculaire au diamètre qui se termine au point d'attouchement, & une de ces lignes infiniment petite étant prolongée est la touchante.

C O R O L L A I R E I I

Donc si du centre de la sphere on mene des lignes aux angles de ces quadrilateres infiniment petits, cela determinera une infinité de petites pyramides qui auront toutes leur sommet dans le centre de la sphere, & leur base infiniment petite dans la surface de cette sphere. On aura aussi deux cones, dont chacun aura pour axe la moitié du diamètre du demi cercle, qui aura fait la révolution, & dont la base infiniment petite sera aussi dans la surface de la sphere.

89. Deux solides semblables sont ceux, dont le premier est terminé par des plans semblables à ceux qui terminent le second, chacun à chacun, & en pareil nombre de part & d'autre.

90. Une figure est une grandeur étendue en long & en large seulement; ou en long, en large, & en profond, terminée de toutes parts. Un triangle, par exemple, est une figure; une pyramide est une figure, &c.

A V E R T I S S E M E N T.

1°. De même que les figures rectilignes peuvent être réduites en triangles, ainsi les corps ou solides peuvent être divisez & réduits en pyramides triangulaires. Par exemple, le solide

ABCDEF GHIK sera réduit premièrement en prismes

triangulaires

ABC FGH,

ACDFHI,

ADEFIK,

en supposant

des plans menez d'un des

angles des

plans qui

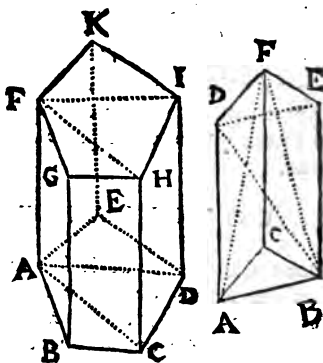
terminent: ce

solide, aux

angles des autres

plans qui

le terminent.



2°. Chaque prisme triangulaire ABCDEF sera réduit dans ces trois pyramides ABCF, DEFB & ABDF, en le supposant coupé par les deux plans ABF & BFD.

3. Afin de pouvoit facilement distinguer les

pyramides triangulaires dont il est question dans le solide representé par la seconde des deux dernieres figures, il faut premierement considerer un triangle comme base de la pyramide qu'on y cherche, & observer ensuite ⁽¹⁾ les trois triangles qui auront chacun pour base un des trois côtez de ce premier triangle, & qui auront en outre un sommet commun. Cette remarque est fort utile lorsque dans des solides on est obligé d'examiner des pyramides, ou de les comparer l'une à l'autre.

4°. Une grandeur exprimée par une seule petite lettre de l'alphabet est ordinairement appellée une ligne. Parceque dans l'Algebre on n'exprime une ligne droite que par une petite lettre de l'alphabet.

Un produit de deux grandeurs differentes exprimées generalement comme ab est appellé un plan ou rectangle compris sous a & b . Parcequ'un rectangle dont un côté seroit a & l'autre b , auroit $*ab$ pour l'expression de sa surface; un rectangle n'étant rien autre chose qu'un de ses côtez multipliez par l'autre.

Un produit formé par deux grandeurs égales comme aa est appellé le quarré de a . Parcequ'en multipliant par lui-même le côté appellé a d'un quarré, on a la surface aa de ce quarré.

En Geometrie on exprime le quarré d'une ligne, par exemple, de AB en cette maniere AB^2 , ou AB^2 , ou $AB \times AB$.

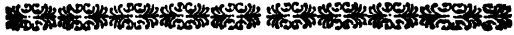
Un produit de trois grandeurs exprimées generalement, comme abc , est appellé un solide; parceque ces trois grandeurs expriment les

(1) Déf. 62. Geo.

* Cor. 2. déf. 52.

trois dimensions qui se rencontrent dans un corps ou solide.

Un produit de trois grandeurs égales, ou le produit d'une grandeur multipliée deux fois par elle-même, comme bbb , est un solide appelé cube, dont une racine est b .



DEMANDES

DE GEOMETRIE.

ON suppose dans la Geometrie que ce qui est énoncé dans ces trois articles est possible, & qu'on ne refusera point de l'accorder lorsque cela sera nécessaire pour une démonstration.

1. Qu'il soit permis de mener une ligne d'un point à un autre point, ou du moins de supposer qu'elle soit menée.

2. Qu'il soit permis de prolonger ou continuer une ligne droite si loin qu'on voudra.

3. Qu'enfin on accorde qu'au tour d'un point on décrive une circonférence de cercle, à telle ouverture de compas qu'on voudra.



AXIOMES

DE GEOMETRIE.

1. LES lignes appliquées l'une sur l'autre, qui ne se surpassent point l'une l'autre, sont égales entr'elles & semblables, de même des

angles. Pareillement les surfaces appliquées l'une sur l'autre, lesquelles ne se surpassent ou excèdent aucunement l'une l'autre, c'est à dire, qui conviennent entre elles en toutes manieres, sont aussi égales entr'elles.

2. Il est impossible qu'entre plusieurs grandeurs prises à volonté $a, b, c, d,$ &c. il y en ait deux, par exemple a & b qui soient telles que a soit plus grande ou plus petite que toutes les autres restantes $b, c, d,$ & qu'en même-temps b soit aussi plus grande ou plus petite que toutes les autres $a, c, d,$ &c.

Pour rendre cet axiome encore plus évident, supposons entre plusieurs grandeurs que a & b soient chacune plus petites que les autres; a est * plus petite que chacuné des autres. Donc cette grandeur a sera plus petite que b . Pareillement b est * plus petite que chacuné des autres. Donc b sera plus petite que a , c'est à dire que a sera plus grande que b . Donc a seroit en même-temps plus petite que b , & en même-temps plus grande que la même grandeur b . Il faudroit donc que a fût plus grande & ne le fût pas en même-temps, ce qui est (*) évidemment impossible.

COROLLAIRE I.

Il est impossible qu'entre plusieurs grandeurs il y en ait une plus petite que la plus petite.

COROLLAIRE II.

Donc pour aller d'un terme à un autre, il n'y a qu'un seul chemin, qui soit le plus court de tous.

* Par supposit. (*) Ax. 1. general.
V

COROLLAIRE III.

Donc d'un point à un autre point, on ne peut mener qu'une seule ligne droite ; puisque ⁽¹⁾ la ligne droite occupe le plus court chemin qu'il y a d'un point à un autre point , & que ⁽²⁾ ce chemin est unique.

COROLLAIRE IV.

Donc la mesure de la distance d'un point à un autre point est une ligne droite menée d'un de ces points à l'autre. Car cette ligne droite est une mesure constante , unique & immuable : puisqu'on n'en peut mener qu'une seule d'un de ces points à l'autre.

(1) *Déf. 4. Geo.*

(2) *Cor. 2. Ax. présent.*





C H A P I T R E I.

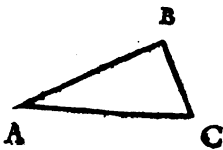
D E S L I G N E S.

P R O P O S I T I O N I.

Si des extrémités d'une ligne droite on mène deux autres lignes quelconques concourantes du même côté, la somme de ces lignes concourantes sera plus grande que la seule ligne droite des extrémités de laquelle elles sont menées.

D E M O N S T R A T I O N.

Soit la ligne droite AC , & que par ses extrémités A & C , on mène deux autres lignes AB & CB qui concourent du même côté : je dis que la somme de ces lignes concourantes $AB + BC$ est plus grande que la seule ligne AC . Car la ligne droite AC occupe* le plus court chemin qui est du point A au point C : mais les lignes AB & BC n'occupent pas le chemin AC qui est le plus court. Donc elles

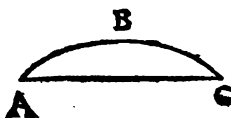


* Déf. 4. Geo.

occupent un chemin plus long que la seule ligne AC . Donc la somme des lignes $AB + BC$ est plus grande que AC , ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

Il suit de cette proposition que la ligne courbe ABC est plus grande que la seule ligne droite AC , si l'une & l'autre sont terminées par les mêmes points.



P R O P O S I T I O N II.

Si de deux points on mène deux lignes qui concourent dans un 3^e point, & si de ces deux mêmes points on mène encore dans le même plan deux lignes droites qui concourent vers & entre les deux précédentes; la somme des deux premières sera plus grande que la somme des deux dernières.

D E M O N S T R A T I O N.

Soient les deux points A & B dont on mène les lignes AC & BC concourantes au point C , & dont on mène encore les lignes AD & BD concourantes au point D vers C , & entre les premières lignes AC & BC . Je dis que $AC + CB > AD + DB$. Pour le démontrer il faut * prolonger AD jusqu'à la rencontre de la ligne BC en E . Or (*) $AC + CE > AE$.

* Demand. 2. Geo. (*) Prop. 1. Geo.

Donc en ajoutant de part & d'autre EB , on aura * $AC + CE + EB > AE + EB$. Mais

(¹) $CE + EB = CB$.

Donc $AC + CB >$

$AE + EB$. Enfin $BE +$

$ED > BD$. Donc en

ajoutant de part & d'autre

DA , on aura * $BE +$

$ED + DA > BD +$

DA . Ce qui est la même

chose que de dire

$AE + EB > AD +$

DB ; puisque $AD +$

$DE = AE$. Mais on vient de trouver que

$AC + CB > AE + EB$. Donc $AC + CB$

$> AE + EB > AD + DB$. Donc enfin

(²) $AC + CB > AD + DB$. ce qu'il falloit de-

montrer.



PROPOSITION III,

Chaque point d'une ligne droite perpendiculaire au milieu d'une autre ligne droite, est également distant des deux extrémités de la ligne, au milieu de laquelle cette première ligne est perpendiculaire.

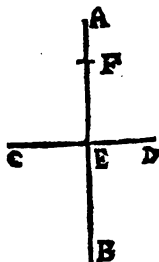
DEMONSTRATION.

Soit la ligne AB perpendiculaire à la ligne SCD par le point E qui en est le milieu : je dis que chaque point de la ligne AB , par

* Ax. 7. gener. (¹) Ax. 3. Geo.

(²) Ax. 22. gener.

exemple *F*, est également distant des points *C* & *D* extrémités de la ligne *CD*. Car pour que les points *F* & *C* fussent plus proches l'un de l'autre, que le même point *F* l'est du point *D*, il faudroit que la ligne *AB* fût plus inclinée vers *C* que vers *D*, ou que la ligne *AB* ne fût pas perpendiculaire à la ligne *CD* par son point du milieu *E*. Mais l'un & l'autre est contre la supposition. Donc le point *F* sera également distant du point *C* & du point *D* extrémités de la ligne *CD* au milieu de laquelle *AB* est perpendiculaire, ce qu'il falloit démontrer.



On dira la même chose de tous les autres points de la ligne *AB*.

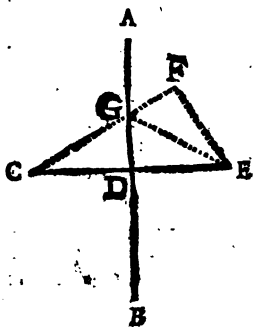
PROPOSITION IV.

Une ligne perpendiculaire à une autre ligne droite par le point du milieu de cette dernière, passe par tous les points qui sont également distans des extrémités de la ligne au milieu de laquelle elle est perpendiculaire.

DEMONSTRATION.

Soit la ligne *AB* perpendiculaire à la ligne *SCE* par le point *E*, milieu de cette ligne *CE* : je dis que la ligne *AB* passera par tous l.

points qui sont également distans des extrémités C & E de la ligne CE . Car la ligne AB prolongée si loin qu'on voudra ayant ^[1] chacun de ses points également distans des extrémités C & E de la ligne CE , il suffit pour la proposition présente de démontrer qu'il n'y a aucun point pris hors de la ligne AB qui soit également distant des extrémités C & E . Soit par exemple le point F pris à volonté hors la ligne AB : je dis que ce point F n'est pas également distant des extrémités C & E , c'est à dire



qu'ayant mené les lignes FC & FE , on aura $FC > FE$. Du point G on passe FC , au point E , soit menée la ligne GE . On sçait ^[2] que $CG = GE$. en ajoutant de part & d'autre GF , on aura ^[3] $CG + GF = EG + GF$. Mais ^[1] $EG + GF > EF$. Donc aussi ^[4] $CG + GF > EF$, c'est à dire que $FC > FE$. Donc le point F n'est point également distant de C & de E . Donc enfin AB passé par tous les points également distans de C & de E , ce qu'il falloit démontrer.

On fera le même raisonnement pour tous les autres points pris hors la ligne AB .

[1] Prop. 3. Geo.

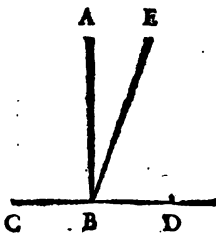
[2] Ax. 4. Gen.

[3] Prop. 1. Geo.

[4] Dem. 1. Gen.

COROLLAIRE.

Par un même point, par exemple, par le point B de la ligne CD , on ne peut mener dans le même plan $CAED$ plusieurs lignes perpendiculaires à la même ligne. Soit la ligne AB perpendiculaire à la ligne CD par le point B , & soit menée par le même point B une autre ligne BE : je dis qu'il est impossible que cette ligne BE soit perpendiculaire à la même ligne CD par le même point B . Car ayant pris de part & d'autre du point B les lignes égales BC & BD , il faudroit [1] que cette ligne BE eût chacun de tous ses points également distans du point C & du point D . Or on vient de démontrer qu'il n'y a que les points de la perpendiculaire AB qui soient également distans des extrémités C & D de la ligne CD . Donc la ligne EB ne peut être perpendiculaire à CD .



[1] Prop. 3. Geo.



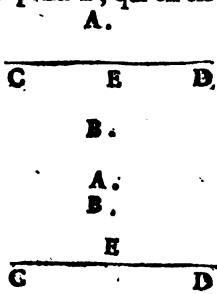
PROPOSITION

PROPOSITION V.

Une ligne droite qui passe par deux points, ou qui a deux de ses points, dont chacun est également distant des deux extrémités d'une autre ligne droite, est perpendiculaire à cette autre ligne droite par le point qui en est le milieu.

DEMONSTRATION.

SOient les deux points *A* & *B*, chacun également distant des extrémités *C* & *D* de la ligne *CD*: je dis que la ligne droite qui passera par ces deux points *A* & *B* sera perpendiculaire à la ligne *CD* par le point *E*, qui en est le milieu. Car la ligne droite qui passera par ces deux points *A* & *B*, passera par le même chemin par où passeroit la ligne qui seroit perpendiculaire à *CD* par son milieu *E*; puisque cette ligne qui seroit perpendiculaire à *CD* par le milieu *E*, passeroit (*) par les points *A* & *B*. Donc (²) elle se confondroit avec cette ligne droite menée par les points *A* & *B*. Et partant la ligne menée par les points *A* & *B*, seroit la même que la ligne perpendiculaire à *CD* par le milieu *E*, ce qu'il falloit démontrer.

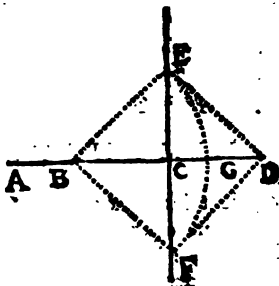


(*) Prop. 4. Geo. (²) Cor. 3. Ax. 2. Geo.

COROLLAIRE I.

Si une ligne, par exemple, EF est perpendiculaire à une autre ligne AD ; réciproquement cette autre AD fera aussi perpendiculaire à EF .

Car sur la ligne AD de part & d'autre de EF prenons les parties CB & CD égales entr'elles. Du point B comme



centre, & de l'intervalle BF prise à volonté plus longue que BC soit décrit l'arc de cercle FGE . Puisque ⁽¹⁾ EF est perpendiculaire à BD , pp. 3 ⁽²⁾ $DE = EB$ ⁽³⁾ $= BF$ ⁽²⁾ $= FD$. Donc $BE = BF$, & $DE = FD$; & partant chacun des points B & D sont également distans des points E & F . Donc ⁽⁴⁾ BD ou AD sera perpendiculaire à EF .

COROLLAIRE II.

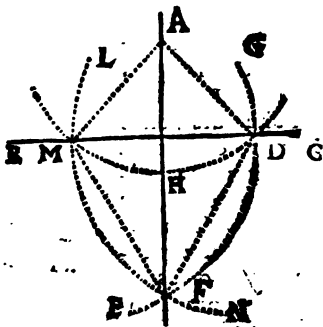
- Cette proposition sert de fondement à des méthodes qu'on pratique souvent pour mener une ligne perpendiculaire à une autre ligne par un point donné. Ce point peut être donné hors la ligne donnée, ou peut être donné dans la ligne donnée.

⁽¹⁾ Par supposit. ⁽²⁾ Prop. 3. Geo.

⁽³⁾ Cor. I. déf. 29. ⁽⁴⁾ Prop. pres.

Soit par exemple le point *A* donné hors la ligne *BC*, & que par ce point *A* il faille mener une ligne perpendiculaire à cette ligne

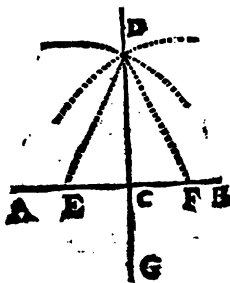
BC. Il faut poser un pied du compas dans le point donné *A*, & ouvrir ce compas suffisamment pour décrire un arc *MHD* qui soit coupé par la ligne donnée



BC en deux points *M* & *D*. Ensuite des points *M* & *D* comme centres, on décrira deux arcs *EMD* & *NFM* d'une ouverture de compas suffisante pour qu'ils se coupent par exemple en *F*. Enfin par le point donné *A*, & par ce point d'intersection *F* on mènera la ligne *AF*; je dis que cette ligne *AF* est la perpendiculaire qu'on cherche. Car 1°. le point *A* est également distant des points *M* & *D*. Parceque *AM* & *AD* sont rayons du même arc de cercle *MHD*. 2°. Le point *F* est également distant des points *M* & *D*. Car les lignes *MF* & *DF* sont des rayons d'arcs de cercles *EMD* & *NFM* décrits de la même ouverture de compas. Donc la ligne *AF* passant par les deux points *A* & *F* également distans des extrémités *M* & *D* de la ligne *MD*, sera (*) perpendiculaire à la ligne *MD*.

(*) Prop. pref.

Soit par exemple le point C donné dans la ligne AB , & que par ce point il faille mener une ligne perpendiculaire à cette ligne AB ; il faut mettre un pied du compas dans ce point donné C , & prendre sur la ligne AB de part & d'autre de ce point C les lignes égales CF & CE . Ensuite des points E & F , on décrira deux arcs d'une même ouverture de compas prise à volonté, & assez grande pour qu'ils se coupent, par exemple dans le point D . Ensuite il faut mener



par ce point d'intersection D , & par ce point donné C la ligne DG : je dis que cette ligne DG sera la perpendiculaire qu'on cherche. Car 1°. le point C est ⁽¹⁾ également distant de E & de F . 2°. Le point D est aussi également distant de E & de F , puisque les lignes ED & FD sont rayons égaux, étant ⁽²⁾ mesurées par la même ouverture de compas. Donc ⁽³⁾ la ligne DC passe par les points D & C également distans de E & F . Donc ⁽⁴⁾ DG est perpendiculaire à AB .

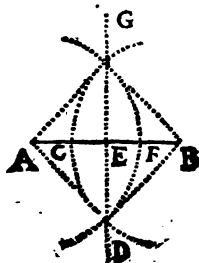
Si le point donné est à l'extrémité d'une ligne droite, on trouvera dans la suite une autre méthode pour mener par ce point une perpendiculaire à cette ligne donnée.

⁽¹⁾ Par construction. ⁽²⁾ Par supposition.

⁽³⁾ Prop. 4. Geo. 1. Prop. pref.

COROLLAIRE III.

On tire encore de cette proposition une methode pour couper geometriquement, c'est à dire, par regles infailibles, une ligne en deux parties égales. Soit la ligne AB qu'il faille couper en deux parties égales. Il faut des extrêmitéz A & B de cette ligne AB décrire les arcs DFG & DCG d'une même ouverture de compas prise à volonté, & assez grande pour que ces deux arcs se coupent dans les points G & D . Je mene ensuite par ces deux points d'interfection G & D la ligne droite GD : je dis que le point E par où cette ligne GD coupe la ligne AB est le milieu de AB . Parceque les points G & D sont également distans de A & de B , à cause que les rayons $AD, DB; AG, BG$ sont [¹] me- surez par la même ouverture de compas. Et partant [²] la ligne GD est perpendiculaire à AB par le milieu. Donc enfin $AE = EB$.



[¹] *Par suppos.*

[²] *Prop. pres.* ✱

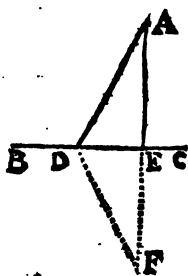


PROPOSITION VI.

1. La ligne menée d'un point pris hors d'une ligne droite perpendiculairement à cette même ligne, est la plus courte de toutes les lignes qu'on peut mener de ce point à cette même ligne droite.
2. Réciproquement, la ligne qui est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener d'un point pris hors d'une ligne droite à cette même ligne, lui est perpendiculaire.

D E M O N S T R A T I O N
D E L A P R E M I E R E P A R T I E.

Soit le point *A* pris à volonté hors la ligne *BC*, & que de ce point *A* on mene la ligne *AE* perpendiculairement à la ligne *BC*. Je dis que cette ligne *AE* est la plus courte de toutes les lignes qu'on peut mener du point *A* à cette ligne *BC*; qu'elle sera, par exemple, plus courte que la ligne *AD* menée à volonté du point *A* à cette ligne *BC*. Pour le démontrer soit ^[1] prolongée la perpendiculaire *AE* jusqu'en *F*, de sorte que *EF* devienne égale à *AE*; qu'on mene ensuite la ligne *DF*.



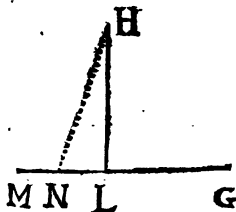
[1] Demande 2. Géom.

Puisque AF est perpendiculaire à BC , réciproquement [2] BC est perpendiculaire à AF ; & à cause que [2] $AE = EF$, BC est perpendiculaire au milieu de AF . Donc [3] $DA = DF$. Or [4] $AF < AD + DF$. Donc [5] la moitié de AF ; c'est à dire la perpendiculaire AE sera plus petite que la moitié de $AD + DF$ qui est AD , ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Si du point H pris à volonté hors la ligne MG , on mene la ligne HL à cette ligne MG ; de sorte que la ligne HL soit la plus courte de toutes celles qu'on peut mener de ce point H à cette même ligne MG , je dis que cette ligne HL sera perpendiculaire à MG .

Car si HL n'étoit pas perpendiculaire à MG , & que ce fût, par exemple, la ligne HN qui fût perpendiculaire à MG , la ligne perpendiculaire HN



menée du point H à MG ne seroit pas la plus courte de toutes; car on en auroit une qui seroit encore plus courte, sçavoir cette ligne HL qu'on suppose la plus courte de toutes; mais la ligne menée du point H perpendiculairement à la

[1] Cor. I. Prop. 5. Geo. [2] Par construction,

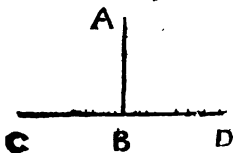
[3] Prop. 3. Geo. [4] Prop. I. Geo.

[5] Ax. II. geom.

ligne MG est ^[1] la plus courte de celles qu'on peut mener du point H à la ligne MG , & ^[2] il est évidemment impossible qu'il y ait une ligne plus courte que la plus courte. Donc la ligne HL étant la plus courte de toutes celles qu'on peut mener d'un point H à une autre ligne MG , est perpendiculaire à cette ligne MG , ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Donc d'un même point, par exemple du point A pris hors d'une ligne droite CD dans un même plan, on ne peut mener à cette ligne CD que la seule ligne perpendiculaire AB . Parce que ^[3] la perpendiculaire AB est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du point A à la ligne CD . Donc ^[3] elle est unique.



COROLLAIRE II.

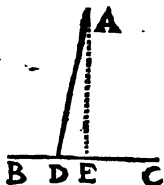
Si par un point également distant des extrémités d'une ligne droite on lui mène une autre ligne droite perpendiculairement, cette dernière sera perpendiculaire au milieu de la première. Soit le point A également distant des ex-

^[1] Première partie de la Prop. pres.

^[2] 2^e. Partie de la Prop. pres.

^[3] Ax. 2. Geo.

trèmitiez B & C de la ligne BC ; par ce point A soit menée une ligne , par exemple , AD perpendiculaire à BC : je dis que AD doit necessairement être perpendiculaire à BC par le point du milieu. Car si ce n'étoit pas par le point du milieu , ce seroit par un autre point ; par le point E milieu de la ligne BC soit menée la ligne EA perpendiculaire à cette ligne BC , la ligne EA passera ^[1] par le point A ; & partant du point A on pourroit mener deux lignes perpendiculaires à la même ligne BC dans le même plan , ce qui est ^[2] impossible.

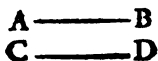


COROLLAIRE III.

Donc la distance d'un point à une ligne droite doit être mesurée par une perpendiculaire menée de ce point à cette ligne. Puisque ^[3] cette perpendiculaire est la plus courte distance , unique & immuable.

COROLLAIRE IV.

Donc si la ligne AB est parallele à la ligne CD , toutes les lignes menées perpendiculairement de l'une à l'autre , seront égales entr'elles. Car , puisque



[1] Prop. 4. Geo. [2] Cor. 1. Prop. pres.

[3] Premiere part. Prop. pres.

[¹] la ligne AB est également distante dans toute la longueur de la ligne CD , chaque point de cette ligne AB sera aussi également distant de la ligne CD . Or la distance de chaque point de la ligne AB à la ligne CD est [²] mesurée par la ligne qui en est menée perpendiculairement à la ligne CD . Donc toutes les perpendiculaires menées d'une parallèle à l'autre sont égales entr'elles.

COROLLAIRE V.

Si les lignes AB & AD sont menées du point A pris dans la perpendiculaire AC à des points de la ligne BD également distans de la perpendiculaire AC , ces lignes obliques AB & AD seront égales entr'elles. Puisque [³] la ligne AC perpendiculaire au milieu de BD a le point A également distant des points B & D .



COROLLAIRE VI.

Reciproquement si les obliques AB & AD menées d'un point A de la perpendiculaire sur la ligne BD sont égales entr'elles, les distances BC & CD de la perpendiculaire seront [²] aussi égales entr'elles.

[¹] Déf. 8. Geo.

[²] Cor. 2. Prop. prés.

[³] Prop. 3. Geo.



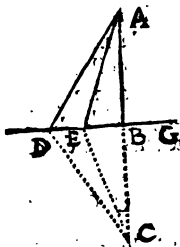
PROPOSITION VII.

Entre les lignes droites menées d'un point pris hors d'une ligne droite à cette ligne, celles qui sont plus éloignées de la perpendiculaire sont plus longues, & celles qui en sont plus proches sont plus courtes.

DEMONSTRATION.

Soit donné le point *A* pris à volonté hors la ligne *DG*, de ce point *A* soit menée la ligne *AB* perpendiculairement à la ligne *DG*, & ensuite de ce point *A* à la

ligne *DG* soient menées à volonté les lignes *AE*, *AD*, &c. Je dis que la ligne *AD* qui est plus éloignée de la perpendiculaire *AB*, est plus longue que la ligne *AE*, qui est plus proche de cette perpendiculaire. Pour le



démontrer sur la perpendiculaire *AB* prolongée suffisamment soit prise la partie $BC = AB$, & soient menées les lignes droites *CE* & *CD*. Puisque *AC* est ^[1] perpendiculaire à *DG*; *DG* sera ^[2] aussi perpendiculaire à *AC*, même au milieu de *AC*. Donc ^[3] $AD = DC$ & $AE = EC$. Mais ^[4] $AD + DC > AE + EC$. Donc

[1] *Supposé.* [2] *Cor. 1. Prop. 5. Geo.*

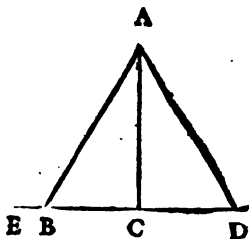
[3] *Prop. 3. Geo.* [4] *Prop. 2. Geo.*

[¹] $AD > AE$, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Donc d'un même point A pris à volonté hors d'une ligne droite ED , on ne peut mener à

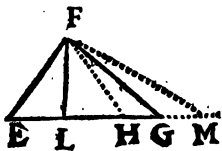
cette même ligne plus de deux lignes droites égales entr'elles. Soient par exemple les lignes AB & AD également distantes de la perpendiculaire AC , elles seront [²] égales



entr'elles. Si on en menoit une 3^e du même point A à la même ligne ED , il faudroit nécessairement la mener plus proche de AC que AB ou AD , ou il faudroit la mener plus éloignée de cette même perpendiculaire AC . Donc cette 3^e ligne oblique seroit plus petite ou plus grande que chacune de ces deux AB ou AD .

COROLLAIRE II.

Si du point F on mène les lignes FG & FE , de sorte que EG se termine au point G plus éloigné de la ligne perpendiculaire FL , que le



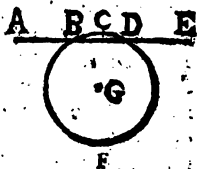
point E auquel se termine la ligne FE : je dis

[²] *Ax. II. gen.* [¹] *Cor. 6. Prop. 5. prec. Geom.*
que

que la ligne FG est plus grande que FE . Car prenant le point H autant éloigné du point L que le point E , alors [1] nous aurons $FH = FE$. Or [2] $FG > FH$. Donc $FG > FE$.

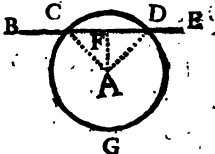
COROLLAIRE III.

Une ligne droite ne peut couper une circonférence de cercle qu'en deux points. Car si la ligne AE , par exemple, pouvoit couper la circonférence $BFDC$ en trois points B, C, D , du centre G on pourroit mener trois lignes droites [3] égales entr'elles à ces 3 points B, C, D , qui seroient [4] communs & à la ligne droite AE & à la circonférence; & il est [5] impossible que du centre G on puisse mener 3 lignes droites à AE qui soient égales entre elles. La ligne AE ne peut rencontrer cette circonférence en 4 points, puisque le nombre 4 suppose le nombre 3.



COROLLAIRE IV.

Une ligne droite qui rencontre une circonférence de cercle en deux points, coupe cette circonférence. Soit la ligne BE qui rencontre la circonférence CGD dans les points C & D : je dis que cette ligne BE coupe la circonférence CGD . Pour le démontrer, il faut mener du centre A aux points C & D les rayons AC, AD , & la perpendiculaire AF . Il est évident que, lorsqu'une ligne prolongée, s'il est nécessaire, se trouve de part & d'autre d'une autre ligne, cette première ligne coupera la seconde. Or la ligne BE rencontrant [6] la circonférence CGD dans les points C & D , se trouve de part & d'autre de la circonférence CGD .



Premierement, BE se trouve d'un côté de la cir

[1] Cor. 5. Prop. 6. Geo.

[2] Prop. pres.

[3] Cor. 1. déf. 29. Geo.

[4] Supposé.

[5] Cor. 1. Prop. pres.

circconférence DCG ; car cette circconférence se trouve entre le centre A & les parties BC & DE de la ligne BE ; puisque toutes les lignes menées du centre A à ces parties BC & DE sont ^[1] chacune plus longues que les rayons AC & AD ; étant plus éloignées de la perpendiculaire AF que les rayons AC & AD .

Secondement, OD qui est partie de BE , se trouve sur un autre côté de la circconférence ; car CB se trouve entre le centre & la circconférence GGD ; puisque ^[2] toutes les lignes qu'on pourra mener du centre A à la ligne CD seront chacune plus courtes que les rayons AC & AD , de sorte que la perpendiculaire AF sera ^[3] la plus courte. Toutes les lignes qu'on pourra mener du centre A à la ligne CD , se termineront donc entre le centre & la circconférence. Or toutes les extrémités de ces lignes seront dans la ligne même CD . Cette ligne CD sera donc entre le centre & la circconférence. La ligne BE coupera donc le cercle.

COROLLAIRE V.

Si une ligne droite touche une circconférence de cercle, elle la touchera donc en un seul point. Car si elle la touchoit en deux, elle la couperoit ^[4]. Elle ne seroit donc pas touchante ; ce qui est contraire à la supposition.

PROPOSITION VII.

Deux lignes droites ne peuvent avoir un segment commun, c'est-à-dire, ne peuvent avoir une partie commune.

DEMONSTRATION.

Soient les lignes BD & BC ; je dis que ces deux lignes BD & BC ne peuvent avoir une partie commune, par exemple AB ; c'est-à-dire, que si ABC est une ligne droite, ABD ne peut être aussi une ligne droite. Pour le démontrer, soit menée par le point B la ligne EF perpendiculaire à la ligne ABC qu'on suppose

[1] Prop. précédente.

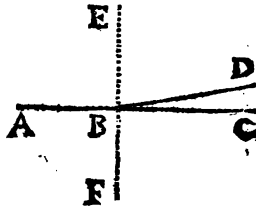
[2] Cor. 2. *lib.* 29. *Geo.*

[3] *Part.* 1. Prop. 6. *Geo.*

[4] Cor. 4. Prop. *pres.*

une ligne

une ligne droite. Reciproquement ^[1] toute cette ligne ABC sera perpendiculaire à EF . Pareillement AB partie de AC sera perpendiculaire à EF . Or si AB & BD étoient aussi une même ligne droite, la ligne AB étant prolongée passeroit par BD ; & après avoir pris BF égale à BE , cette ligne ABD passeroit ^[2] par tous les points également distans des points E & F , & partant ^[3] BD seroit aussi perpendiculaire à EF . Donc les deux lignes BC & BD seroient perpendiculaires à la même ligne EF par le même point B dans un même plan, ce qui est ^[4] impossible. Et partant deux lignes droites, par exemple BD , BC , ne peuvent avoir une partie commune AB , ce qu'il falloit démontrer.



COROLLAIRE.

Donc la position ou situation d'une ligne droite est déterminée par la position de deux de ses points. Soient les points A & B , je dis que la position de la ligne qui passe par ces deux points est de-



[1] Cor. 1. Prop. 5. Geo. [2] Prop. 4. Geo.

[3] Prop. 5. Geo. [4] Cor. Prop. 4. Geo.

terminée. 1°. Du point *A* au point *B* on ne peut [1] mener qu'une seule ligne droite. 2°. Si on prolonge cette ligne *AB*, la position de toute la ligne *ABC* est déterminée, c'est à dire qu'elle ne peut passer indifféremment par le point *C* ou par le point *D* dans différentes positions; mais qu'elle doit passer nécessairement, par exemple, par le point *C* dans cette seule position *ABC*. Car supposons qu'elle passe par le point *C*; supposons pareillement qu'elle pût passer par le point *D*, il faudroit donc que *ABD* & *ABC* fussent deux lignes droites, ce qui est [2] impossible.

PROPOSITION IX.

1. Si on prend un point hors le centre & la circonférence d'un cercle; la ligne droite menée de ce point à cette circonférence, laquelle étant prolongée passe par le centre, sera la plus courte de toutes celles qu'on peut mener de ce point à cette circonférence.
2. Reciproquement si une ligne droite menée d'un point pris hors le centre, & la circonférence d'un cercle à cette circonférence, est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener de ce point à cette circonférence; si on la prolonge, elle passera par le centre.

DEMONSTRATION

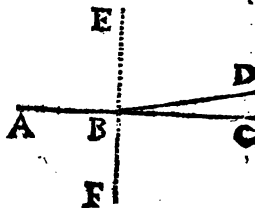
DE LA PREMIÈRE PARTIE.

UN point peut être pris hors le centre & la circonférence d'un cercle en deux manières;

[1] Cor. 3. Ax. 2. Geo.

[2] Prop. pref.

une ligne droite. Reciproquement [1] toute cette ligne ABC sera perpendiculaire à EF . Pareillement AB partie de AC sera perpendiculaire à EF . Or si AB & BD étoient aussi une même ligne droite, la ligne AB étant prolongée passeroit par BD ; & après avoir pris BF égale à BE , cette ligne ABD passeroit [2] par tous les points également distans des points E & F , & partant [3] BD seroit aussi perpendiculaire à EF . Donc les deux lignes BC & BD seroient perpendiculaires à la même ligne EF par le même point B dans un même plan, ce qui est [4] impossible. Et partant deux lignes droites, par exemple BD , BC , ne peuvent avoir une partie commune AB , ce qu'il falloit démontrer.



C O R O L L A I R E.

Donc la position ou situation d'une ligne droite est déterminée par la position de deux de ses points. Soient les points A & B , je dis que la position de la ligne qui passe par ces deux points est de-

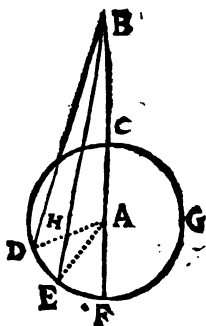


[1] Cor. 1. Prop. 5. Geo. [2] Prop. 4. Geo.

[3] Prop. 5. Geo. [4] Cor. Prop. 4. Geo.

circonférence. Car $* BE + EA > BA$, c'est à dire, que $BE + EA > BC + CA$. Donc en retranchant de part & d'autre les rayons EA & AC , on aura $(^1) BC < BE$, ce qu'il falloit démontrer.

On démontrera la même chose à l'égard de la ligne BD & de toutes les autres.



D E M O N S T R A T I O N

D E L A S E C O N D E P A R T I E.

Soit la ligne BC menée du point B pris hors le centre & la circonférence du cercle $CDEFG$ à cette même circonférence ; si cette ligne BC est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener de ce point B à cette circonférence : je dis que si on la prolonge, elle doit passer par le centre A . Parceque $(^2)$ la ligne menée d'un point pris hors le centre & la circonférence d'un cercle à cette circonférence, qui étant prolongée passe par le centre, est la plus courte de toutes. Or une ligne menée d'un point pris hors le centre & la circonférence d'un cercle, étant la plus courte de celles qu'on peut mener de ce point à cette circonférence, si elle ne passoit pas par le centre étant prolongée ; la ligne menée du point pris hors le centre & la circonférence du cercle à cette circonférence, qui étant pro-

* Prop. 1. Geo. $(^1)$ Ax. 17. gener.

$(^2)$ Part. 1. Prop. prof.

longée passeroit par le centre ne seroit pas la plus courte de toutes celles qu'on peut mener de ce point à cette circonférence. Car si cette ligne BC qui seroit ⁽¹⁾ la plus courte de toutes ne passoit par le centre, elle passeroit par ailleurs & seroit plus courte que celle qui étant prolongée passeroit par le centre; puisqu'on la supposeroit la plus courte de toutes, ce qui est contraire à la première partie de la Proposition présente. Or ⁽²⁾ il ne peut y avoir une ligne BC plus courte que la plus courte. Donc la ligne qui est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener d'un point pris hors le centre & la circonférence, étant prolongée passera par le centre, ce qu'il falloit démontrer.

P R O P O S I T I O N X.

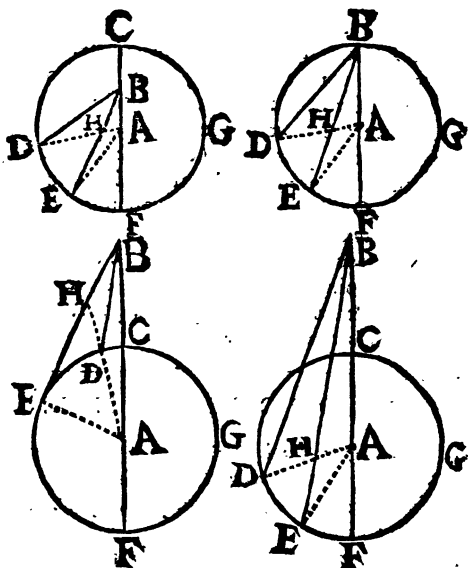
1. Entre toutes les lignes qu'on peut mener d'un point pris hors le centre d'un cercle à la circonférence de ce cercle, celle qui passera par le centre est la plus longue de toutes.
2. La ligne menée d'un point pris hors le centre d'un cercle à la circonférence du même cercle, & qui se termine à un point de la circonférence plus proche du point où se termine celle qui passe par le centre, est plus longue que celle qui se termine du même côté de celle qui passe par le centre, à un point plus éloigné.

D E M O N S T R A T I O N

D E L A P R E M I E R E P A R T I E.

SOit le point B pris hors le centre du cercle $DEFGC$, c'est à dire, ou entre le centre &

⁽¹⁾ Supposit. ⁽²⁾ Cor. 1. Ax. 2. gener.



la circonférence, ou sur la circonférence, ou hors le cercle : je dis que la ligne BF qui passe par le centre A est la plus longue de toutes, par exemple, qu'elle est plus longue que BE , BD , &c. Soient menez les rayons AE , AD , &c. $AF = AE^*$. Donc en ajoutant de part & d'autre AB , on aura $(^2) BA + AF = BA + AE$. Mais $(^2) BA + AE > BE$. Donc $(^3) BA + AF$, c'est à dire, $BF > BE$, ce qu'il falloit démontrer.

* Cor. I. déf. 29. Geo. $(^1)$ Ax. 4. gen.

$(^2)$ Prop. 1. Geo. $(^3)$ Demande 1. geo.

Par le même raisonnement on démontrera la même chose à l'égard de BD & de toutes les autres.

D E M O N S T R A T I O N

D E L A S E C O N D E P A R T I E .

Soient les lignes BE & BD menées du point B pris hors le centre du cercle $CDEFG$ à la circonférence de ce cercle : je dis que la ligne BE qui se termine au point E plus proche du point F où se termine celle qui passe par le centre, est plus longue que la ligne BD qui se termine à un point D plus éloigné & du même côté de celle qui passe par le centre. Pour le démontrer, soient menés du centre A aux points D & E , les rayons AD & AE . Il est constant * que $HD < HE$, puisque le point H est pris hors le centre & la circonférence du cercle $CDEFG$. Donc en ajoutant de part & d'autre BH , on aura $EH + HB > DH + HB$. Mais $DH + HB > BD$. Donc BE sera plus grande que BD , ce qu'il falloit démontrer.

* Part. I. de la Prop. 9. Geo.

[¹] Ax. 7. general.

[²] Prop. 1. Geo.

[³] Ax 22. general.



PROPOSITION XI.

Entre les arcs du même cercle, ou des cercles égaux, qui n'excedent point une demie circonférence ;

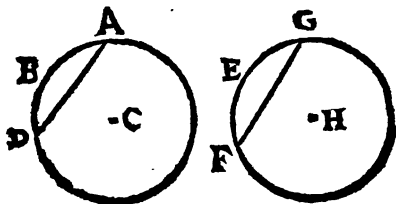
1. Ceux qui sont égaux sont soutenus par des cordes égales ;

2. Les plus grands sont soutenus par des cordes plus grandes, & les plus petits, par des cordes plus petites.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les arcs égaux ABD & GEF de cercles égaux : je dis que les cordes AD & GF sont aussi égales entr'elles. Car supposons



que l'arc GEF soit appliqué sur l'arc ABD , de sorte que le point G soit posé sur le point A , & le point F sur le point D ; ces deux arcs ABD , & GEF se confondront en un seul arc ABD ; puisque l'un & l'autre sont * décrits à même distance des centres C & H . Les cordes AD & GF ayant donc par cette application les points A & D communs, cette ligne

* Par supposit.

se confondra avec la ligne AD . Car [1] dans cette situation l'une & l'autre ne peuvent être deux lignes droites différentes. Les arcs égaux sont donc soutenus par des cordes égales, ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soit l'arc AHC plus grand que l'arc DGE ; je dis que la corde AC est plus grande que la corde DE . Pour le démontrer; sur le plus grand arc AHC , je prens un arc AHB qui soit égal à l'arc proposé DGE , & je mene la corde AB . Alors cette corde AB sera [2] égale à la corde DE . Or la corde AC est [3] plus grande que la corde AB . Cette corde AC est [4] donc plus grande que la corde DE , ce qu'il falloit démontrer.



COROLLAIRE I.

Reciproquement les plus grandes cordes soutiennent des arcs plus grands, & les plus petites cordes soutiennent des arcs plus petits. Soit la corde AC plus grande que la corde ED ; je dis que l'arc AHC est plus grand que l'arc EGD . Car l'arc

[1] Cor. 3. Ax. 2. Geo. page 234.

[2] Part. 1. Prop. pres.

[3] Part. 2. Prop. 10. Geo. page 261.

[4] Demande 1. Gen.

AHC peut seulement être plus grand ou plus petit que *EGD*, ou égal à *EGD*. Or dans la supposition présente l'arc *AHC* ne peut être plus petit que l'arc *EGD*. Car [1] la corde *AC* seroit plus petite que la corde *ED*, ce qui est contre la supposition. L'arc *AHC* ne peut être égal à l'arc *EGD*. Car [2] la corde *AC* seroit égale à la corde *ED*, ce qui est encore contre la supposition. Il reste donc que l'arc *AHC* est plus grand que l'arc *EGD*.

COROLLAIRE II.

Les cordes égales soutiennent des arcs égaux. Car si ces arcs n'étoient égaux, celui qui seroit plus grand seroit [2] soutenu par une plus grande corde, & le plus petit par une plus petite corde. Ces cordes ne seroient donc pas égales, ce qui seroit contre la supposition.

PROPOSITION XII.

1. Une ligne perpendiculaire à un rayon par le point qui est commun à ce rayon, & à la circonférence, est touchante.
2. Si une ligne droite touche une circonférence de cercle; une autre ligne droite étant menée par le centre au point d'attouchement, sera perpendiculaire à cette touchante.
3. Une ligne menée perpendiculairement à une touchante par le point d'attouchement, passe par le centre.

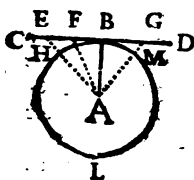
[1] Part. 2. Prop. pres.

[2] Part. 1. Prop. pres.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit la ligne CD perpendiculaire au rayon AB par son extremité B : Je dis que cette ligne CD



touchera la circonference $BHLM$.

Car CD étant [1] perpendiculaire à AB , réciproquement [2] AB est perpendiculaire à CD . Toutes les lignes AE , AF , AG , &c. qui seront menées du point A à tous les points possibles de la ligne

CD seront [3] chacune plus longues que le rayon AB , ou que ses égaux AH , AM , &c. Les extremités de ces lignes AE , AF , AG , &c. qui seront dans la ligne même CD , seront donc [4] hors de la circonference $BHEM$. La ligne CD perpendiculaire [5] au rayon AB , a donc tous ses points hors de la circonference $BHLM$, excepté le point B . Cette ligne CD touche donc [6] la circonference $BHLM$, ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

Une ligne droite peut toucher une circonference de cercle, & personne ne doit le nier : cela est évident par cette premiere partie.

[1] Par supposition.

[2] Cor. 1. Prop. 5. Geo. pag. 242.

[3] Part. 1. Prop. 8. Geo. pag. 246.

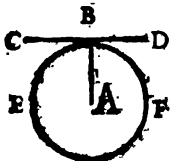
[4] Cor. 2. def. 29. Geo. pag. 205.

[5] Def. 34. Cor. 5. Prop. 7. Geo. pag. 254.

D E M O N S T R A T I O N

DE LA SECONDE PARTIE.

Soit la touchante CD , & son point d'attouchement soit B : je dis que le rayon AB mené du centre A au point d'attouchement B , est perpendiculaire à la touchante CD . Car la touchante CD rencontre [1] la circonférence BEF par le point F qui est l'extrémité du rayon AB , cette touchante CD ne rencontrera la



circonférence BEF [2] que dans ce seul point B . Tous les autres points de la ligne CD seront [3] donc plus éloignés du centre A que le point B . La ligne AB fera donc la plus courte de celles qu'on peut mener du centre A à la touchante CD . Le rayon AB sera donc [4] perpendiculaire à la touchante, ce qu'il falloit démontrer.

D E M O N S T R A T I O N

DE LA TROISIÈME PARTIE.

Soit la ligne touchante AB , & par son point d'attouchement G ; soit menée la ligne CE perpendiculaire à cette touchante AB : je dis que la perpendiculaire CE passera par le centre du cer-

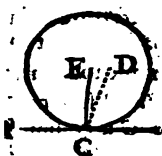
[1] Par Supposition.

[2] Cor. 3. Prop. 7. Geom. pag. 254.

[3] Cor. 2. def. 29. Geo. page 205.

[4] Part. 2. Prop. 6. Geo. pag. 246.

ele. Pour le démontrer il suffit de faire voir qu'il est impossible que le centre du cercle puisse



être ailleurs que dans cette ligne CE prolongée, s'il est nécessaire. Car si le centre du cercle étoit ailleurs que dans la ligne perpendiculaire CE , s'il étoit, par exemple, en D , alors du point D au point d'atouchement C

ayant mené la ligne DC , cette ligne DC seroit [1] perpendiculaire à la touchante AB . Mais [2] CE étoit aussi perpendiculaire à AB . Parce même point C il y auroit donc deux lignes perpendiculaires à la même ligne AB dans le même plan, ce qui est [3] impossible. Il est donc pareillement impossible que la ligne perpendiculaire à la touchante AB par le point d'atouchement, ne passe par le centre du cercle, ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E I.

La ligne touchante menée par l'extrémité d'un rayon, est perpendiculaire à ce rayon. Car cette extrémité de rayon est [4] le seul point qui soit commun à la circonférence & à la touchante. Ce même rayon est donc [1] perpendiculaire à la touchante; & réciproquement la touchante lui est [2] perpendiculaire. Ce Corollaire est la converse de la première partie de la proposition précédente.

[1] Partie 2. Prop. prés.

[2] Par la supposition.

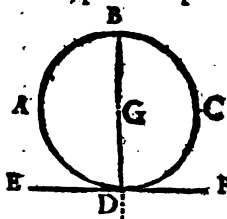
[3] Cor. Prop. 4. Geom. pag. 240.

[4] Cor. 5. Prop. 7. pag. 254.

[5] Cor. 1. Prop. 5. Geom. pag. 242.

COROLLAIRE II.

Soit le point D donné dans la circonférence du cercle, par exemple $ADCB$; & que par ce point D



il faille mener une touchante. Pour y réussir il faut mener du centre G à ce point donné D le rayon GD & [1] ensuite mener la ligne EF perpendiculaire au rayon GD par ce point D ; cette ligne EF sera [2] touchante

de la circonférence $ADCB$ par le point donné D .

COROLLAIRE III.

Une ligne menée par le centre d'un cercle perpendiculairement à une touchante, passera par le point d'attouchement. Cette vérité est évidente, puisqu'il est impossible que cette perpendiculaire ne passe par le point d'attouchement. Car si cette perpendiculaire passoit par un autre point de la touchante, que par celui d'attouchement, alors ayant mené du centre au point d'attouchement un rayon, il seroit [3] aussi perpendiculaire à la touchante. Il y auroit donc deux perpendiculaires menées du centre à la touchante, ce qui est [4] impossible. Ce Corollaire est l'inverse ou reciproque de la troisième partie de la proposition présente.

[1] Cor. 2. Prop. 5. Page 243.

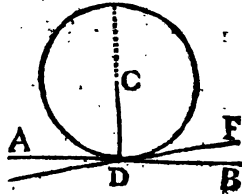
[2] Part. 1. Prop. préf.

[3] Part. 2. Prop. préf.

[4] Cor. Prop. 4. Geom. pag. 243.

COROLLAIRE IV.

Par le même point d'une circonference de cercle on ne peut mener qu'une touchante à cette circonference. Soit par exemple le point *D* d'une circonference de cercle, si on pouvoit mener par ce point *D* les deux lignes *AB* & *EF*, de sorte que l'une & l'autre fussent touchantes, l'une & l'autre seroient [1] perpendiculaires à la même ligne ou au même rayon *CD* par le même point, & dans le même plan, ce qui est [2] impossible. Toute ligne menée par l'extrémité d'un rayon, & qui forme avec ce rayon quelque angle oblique ne peut donc toucher la circonference du cercle. Car autrement il pourroit y avoir deux touchantes par le même point, sçavoir la perpendiculaire [1] & [3] cette oblique.



COROLLAIRE V.

Si on mene par quelque point d'une circonference de cercle une ligne droite touchante, & si par le même point on mene encore une autre ligne droite, cette dernière ligne droite coupera la circonference car ou elle coupera, ou elle touchera

[1] Cor. 1. Prop. pres.

[2] Cor. Prop. 4. Geo. pag. 249.

[3] Par supposition.

cette circonférence. Or elle ne la peut toucher car il y auroit par le même point deux lignes touchantes, ce qui est [1] impossible. Cette dernière lui coupera donc la circonférence.

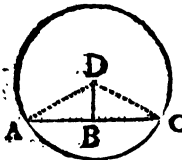
PROPOSITION XIII.

1. La ligne menée du centre du cercle perpendiculairement à une corde, sera perpendiculaire par le milieu de cette corde.
2. Réciproquement, la ligne menée perpendiculairement à une corde de ce cercle par le point du milieu de cette corde, passera par le centre du cercle.
3. La ligne menée du centre du cercle par le milieu d'une corde, sera perpendiculaire à cette corde.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Soit la ligne DB menée du centre D du cercle perpendiculairement à la corde AC : je dis que cette ligne DB est perpendiculaire au milieu de cette corde. Car [1] la ligne menée d'un point également distant des extrémités A



& C de la corde AC , perpendiculairement à cette ligne, sera perpendiculaire au milieu de cette même ligne AC . Or la ligne DB menée perpendiculairement à la ligne AC par le centre D , est menée par un point également distant des extrémités A & C de la ligne AC , puisque [2] les

[1] Cor. 4. Prop. 9. pres.

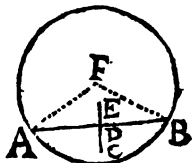
[2] Cor. 2. Prop. 6. Geo. pag. 248.

[3] Cor. 1. Def. 29. Geo. Page 205.

rayons DA & DC sont égaux entr'eux. Donc la ligne DB menée perpendiculairement du centre D à la corde AC sera perpendiculaire par le milieu de cette corde, ce qu'il falloit démontrer.

D E M O N S T R A T I O N
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit la ligne EC perpendiculaire à la corde AB par le milieu de cette corde : je dis que la ligne EC étant prolongée passera par le point F centre du cercle. Car la ligne EC étant perpendiculaire au milieu d'une autre AB passera (*) par tous les points qui sont également distans des extrémités A & B . Or le centre F est également distant des extrémités A & B . Puisque les rayons FA , FB sont égaux entr'eux. Donc la ligne EC perpendiculaire à la corde AB par le milieu, passera par le centre F si elle est prolongée, ce qu'il falloit démontrer.



D E M O N S T R A T I O N
DE LA TROISIÈME PARTIE.

Soit la ligne DB menée du centre D du cercle au milieu B de la corde AC : je dis que cette ligne DB sera perpendiculaire à cette corde AC . Car cette ligne DB aura deux de ses points également distans des ex-

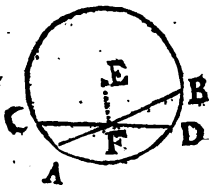
* Cor. 1. déf. 29. Geo.

(*) Prop. 4. Geo.

doivent être également distans d'un même point qui est le centre, si ces trois points étoient en ligne droite, on n'y pourroit faire passer de * circonférence de cercle; puisqu'on n'y pourroit trouver un quatrième point dont on pût mener à ces trois points trois lignes droites égales entr'elles.

COROLLAIRE III.

Il suit de la troisième partie de cette proposition, que deux des cordes du même cercle qui se coupent dans un point qui n'est point le centre, ne se couperont jamais par le milieu l'une l'autre. Soient les deux cordes AB & CD prises à volonté qui se coupent dans un point F hors le centre: je dis que ce point F ne peut être le milieu de l'une & de l'autre de ces cordes AB & CD . Car si ce point



F étoit le milieu de ces deux cordes, soit menée la ligne EF du centre E au point d'intersection F , cette ligne EF seroit [¹] perpendiculaire aux cordes AB & CD , & réciproquement [²] ces cordes AB & CD seroient perpendiculaires à la même ligne EF par le même point, dans le même plan, ce qui est [³] impossible. Donc il est pareillement impossible que les cordes AB & CD se puissent couper l'une l'autre par le milieu.

* *Cor. I. Prop. 7. Geo.* [¹] *3^e Part. Prop. pref.*
 [²] *Cor. I. Prop. 5. Geo.* [³] *Cor. Prop. 4. Geo.*

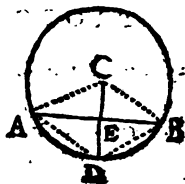
PROPOSITION XIV.

1. La ligne droite menée par le milieu d'un arc de cercle, & par le milieu de la corde soutenant de cet arc, sera perpendiculaire à cette corde, & passera par le centre du cercle.
2. La ligne droite menée perpendiculairement par le milieu de la corde de cercle, passera par le centre de ce cercle, & par le milieu de l'arc soutenu par cette corde.
3. La ligne menée par le centre du cercle, & par le milieu de sa corde, sera perpendiculaire à cette corde, & passera par le milieu de l'arc soutenu par cette corde.
4. La ligne menée par le milieu de l'arc, & perpendiculairement à la corde qui en est soutenant, coupera cette corde par le milieu, & passera par le centre du cercle.
5. La ligne menée par le milieu de l'arc d'une conférence de cercle & par le centre, sera perpendiculaire à la corde soutenant de cet arc, & coupera cette corde par le milieu.
6. Enfin la ligne menée par le centre du cercle perpendiculairement à une corde, coupera cette corde par le milieu, & coupera pareillement en deux parties égales l'arc soutenu par cette corde.

D E M O N S T R A T I O N
DE LA PREMIERE PARTIE.

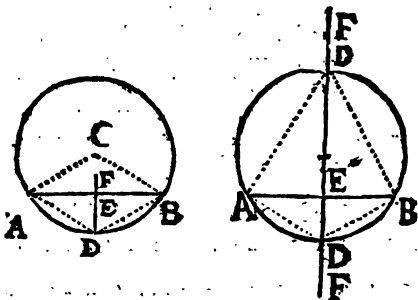
Soit la ligne droite DE menée par le milieu D de l'arc ADB , & par le milieu E de la corde AB soutenant de cet arc ADB ; je dis

que cette ligne DE est perpendiculaire à la corde AB , & qu'elle passera par le centre C du cercle. Car 1°. la ligne DE aura [1] le point E également distant des extrémités A & B de la ligne AB . 2°. Puisque l'arc AD est [2] égal à l'arc DB , les cordes AD & DB seront [3] égales entr'elles. Donc la même ligne DE aura aussi le point D également distant des extrémités A & B . Donc la ligne DE sera [4] perpendiculaire à la corde AB , & [5] passera par le centre C , ce qu'il fallait démontrer.



DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Soit la ligne EF menée perpendiculairement à la corde AB par son point du milieu : je dis que cette ligne passera par le centre du cercle



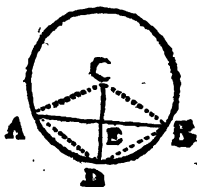
[1] *Supposit.* [2] *Part. I. Prop. II. Geo.*
 [3] *Prop. 5. Geo.* [4] *Prop. 4. Geo.*

& par le milieu de l'arc soutenu par cette corde. Car 1°. cette ligne EF passera [1] par le centre C du cercle. 2°. Cette même ligne aura [2] son point D également distant des extrémités A & B . Donc les cordes AD & DB seront [3] égales entr'elles; & partant [4] les arcs AD & DB soutenus par ces cordes seront aussi égaux entr'eux. Donc le point D par où passe la ligne FE est le milieu de l'arc ADB soutenu par la corde AB , ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION

DE LA TROISIÈME PARTIE.

Soit la ligne CE menée par le centre C du cercle, & par le milieu E de la corde AB . Je dis que cette ligne CE est perpendiculaire à la corde AB , & que si on la prolonge elle passera par le milieu de l'arc ADB soutenu par cette corde.



1°. La ligne CE [5] sera perpendiculaire à la corde AB . 2°. Cette ligne CE passera par le milieu de l'arc ADB soutenu par cette corde AB . Car puisque CE est [3] perpendiculaire au milieu de la corde AB , cette même ligne CE aura [2] le point D également distant des extrémités A & B de cette corde AB ; & partant les cordes AD & DB seront égales entr'elles. Donc les arcs AD & DB seront

[1] Prop. 4. Geo.

[2] Prop. 3. Geo.

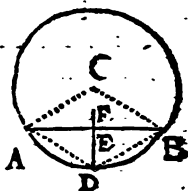
[3] Cor. 4. Ax. 2. Geo. [4] Cor. 2. Prop. II. Geo.

[5] 3° Part. de la Prop. 12. Geo.

[¹] aussi égaux entr'eux. Donc la ligne CE étant prolongée partagera l'arc ADB en deux parties égales ; ce qu'il falloit démontrer.

D E M O N S T R A T I O N D E L A Q U A T R I È M E P A R T I E .

Soit la ligne DE menée par le milieu D de l'arc ADB perpendiculairement à la corde AB : je dis que cette ligne DE coupera la corde AB en deux parties égales, & qu'elle passera par le centre G du cercle. Car 1^o. puisque l'arc AD est égal à l'arc DB , les cordes AD & DB seront [¹] égales entr'elles ; & partant le point D sera également distant des extrémités A & B de la ligne AB . Donc [²] la perpendiculaire DE passera par le milieu E de la ligne AB . 2^o. Cette ligne DE [³] passera par le centre C du cercle, ce qu'il falloit démontrer.



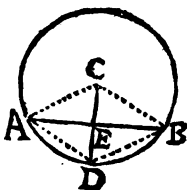
D E M O N S T R A T I O N D E L A C I N Q U I È M E P A R T I E .

Soit la ligne DC menée par le milieu D de l'arc ADB , & par le centre C du cercle : je dis que cette ligne DC est perpendiculaire à la corde AB , & que le point E par où passe cette ligne DC est le milieu de la corde AB . Car 1^o. le point D sera également distant des points A &

[¹] Cor. 2. Prop. 11. Geo. [²] Prop. 11. Geo.

[³] Cor. 2. Prop. 6. Geo. [⁴] Prop. 4. Geo.

B ; comme on l'a fait voir dans les demonstrations precedentes. 1°. Le centre C est aussi également distant des mêmes points A & B . Donc cette ligne CD sera perpendiculaire au milieu de la corde AB , ce qu'il falloit demonst.



D E M O N S T R A T I O N D E L A S I X I È M E P A R T I E .

Soit la ligne CE menée par le centre C d'un cercle , perpendiculairement à une corde AB : je dis que la ligne CE coupera cette corde AB par le milieu E , & coupera pareillement l'arc ADB en deux parties égales au point D . Car 1°. la ligne CE sera ⁽¹⁾ perpendiculaire au milieu de la corde AB ; donc elle la coupera en deux parties égales. 2°. Cette ligne CE étant perpendiculaire au milieu E de la corde AB , aura ⁽²⁾ chacun de ses points également distans des extrémités A & B ; & partant ⁽³⁾ les lignes AD & DB seront égales entr'elles. Donc ⁽⁴⁾ les arcs AD & DB seront égaux entr'eux , c'est à dire que l'arc ADB sera partagé en deux parties égales par la ligne droite CE prolongée , ce qu'il falloit demonst.

C O R O L L A I R È I .

D'un point pris hors le centre d'un cercle ; c'est à dire , pris entre le centre & la circonférence , ou sur la circonférence , ou

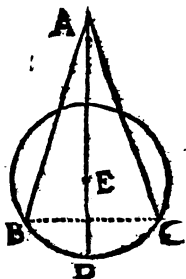
⁽¹⁾ Part. 1. Prop. 13. Geo.

⁽²⁾ Prop. 3. Geo.

⁽³⁾ Cor. 4. Ax. 2. Geo.

⁽⁴⁾ Cor. 2. Prop. 11.

hors le cercle, par exemple du point A les lignes menées à des points de la circonférence, par exemple B & C , également distans de part & d'autre du point D où se termine la ligne menée de ce point A qui passe par le centre, sont égales entr'elles. Car ⁽¹⁾ la ligne qui passe par le centre & par ce point D est perpendiculaire à la sôuêrillante de l'arc BDC aux deux extrêmités duquel ces lignes AB & AC sont menées. Donc le point A est ⁽²⁾ également distant de B & de C . Donc $AB = AC$.



COROLLAIRE II.

Donc réciproquement si les lignes AB & AC sont égales entr'elles, les points B & C sont également distans de part & d'autre de l'extrêmité D de la ligne menée du point A , & qui passe par le centre. Parcequ'alors les points A & E seront ⁽³⁾ également distans des points B & C ; & partant ⁽⁴⁾ la ligne AD sera perpendiculaire au milieu de la corde BC . Donc ⁽⁵⁾ son extrêmité ou point D sera également distante de B & de C .

COROLLAIRE III.

Donc d'un point A pris hors le centre d'un cercle, c'est à dire, ou entre le centre & la circonférence, ou sur la circonférence ou hors le

⁽¹⁾ Prop. 5. Geo.

⁽²⁾ Prop. 3. Geo.

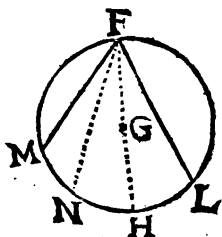
⁽³⁾ Suppos. & Cor. 1. déf. 29. & Cor. 4. Ax. 2. Geo.

⁽⁴⁾ Prop. 5. Geo.

cercle , on ne peut mener à cette circonference que deux lignes égales entr'elles ; car si on en menoit une 3^e, on la meneroit de part & d'autre des lignes AB ou AC : & partant cette 3^e ligne seroit * plus longue ou plus courte. Donc on n'en peut pas mener trois égales.

COROLLAIRE IV.

Donc si on prend un point , par exemple F , hors le centre d'un cercle $LFMNH$, la ligne FL qu'on menera de ce point F à la circonference , qui se terminera d'un côté de la ligne FH qui passe par le



centre , à un point plus près du point H où se termine cette même ligne FH , sera plus longue que la ligne FM qui se terminera de l'autre côté à un point M plus éloigné. Car soit pris le point N autant éloigné du

point H que le point L , on aura ** $FN = FL$; mais [1] $FM < FN$. Donc $FM < FL$.

COROLLAIRE V.

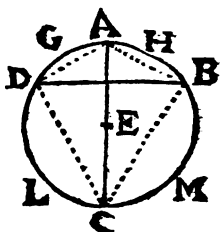
Donc le diamètre d'un cercle partage la circonference en deux parties égales. Pour le démontrer soit menée à volonté la corde DB , & par son milieu soit menée la ligne AC perpendiculairement à cette même corde ; la ligne

* 2^e Part. de la Prop. 10. Geo.

** Cor. 1. Prop. pres.

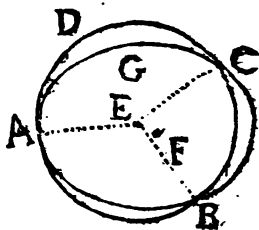
[1] 2^e Part. Prop. 10.

AC passera * par le centre E , & étant terminée de part & d'autre par la circonférence elle sera un diamètre. Or ** les points D & B seront autant l'un que l'autre éloignés des points A & C ; & partant la corde $DA = BA$. Donc l'arc $DGA = AHB$. Pareillement puisque la corde $CD = CB$, on aura l'arc $CLD = CMB$. Donc [1] les arcs $CLD + DGA = CMB + BHA$, c'est à dire, que tout l'arc $CLDGA = CMBHA$.



COROLLAIRE VI.

Donc deux circonférences de cercles ne peuvent se couper qu'en deux points. Car si les deux circonférences $ABCD$ & $ABCG$ se pouvoient couper en trois points A , B , & C , il faudroit que du point E , centre du cercle $ABCD$, on pût mener trois lignes droites à ces trois points A , B , & C , qui

* 2^e Part. Prop. 13. Geo.

** Prop. 3. Geo.

[1] Part. I. Prop. II. Geo. & Ax. 4. geo.

fussent * égales entr'elles, ce qui est [1] impossible ; puisque de ce point E qui est pris hors le centre F du cercle $ABCG$ on ne peut mener à la circonférence $ABCG$ plus de deux lignes droites égales entr'elles.

PROPOSITION XV.

1. Une ligne perpendiculaire à une de deux parallèles, est aussi perpendiculaire à l'autre parallèle.
2. Reciproquement si deux lignes sont perpendiculaires à une même ligne droite, ces deux lignes sont parallèles entr'elles.

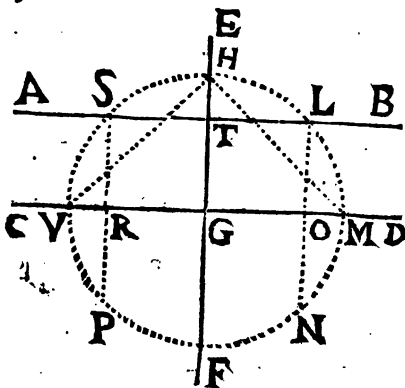
DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les lignes AB & CD parallèles entr'elles, & que la ligne EF soit perpendiculaire à la ligne AB : je dis que cette ligne EF est aussi perpendiculaire à l'autre parallèle CD . Pour le démontrer du point G & d'une ouverture de compas GH prise à volonté plus grande que GT soit décrite la circonférence de cercle $HSTFML$. Du point L soit menée la ligne LO perpendiculairement à CD , & prolongée jusqu'au point N rencontre de cette circonférence. Pareillement du point S soit menée la ligne SR perpendiculairement à CD , & prolongée jusqu'à la rencontre F de la cir-

* Cor. 1. des. 29. Geo.

[1] Cor. 3. Prop. prof.

conference ; ensuite du point H aux points V & M soient menées les cordes HV & HM .



Puisque LN est perpendiculaire à GM , réciproquement [1] GM est perpendiculaire à LN ; & partant [2] $LO = ON$. On aura par le même raisonnement $SR = RP$, puisque [3] SP est perpendiculaire à GC . Or à cause des parallèles AB & CD ; la moitié SR de la ligne SP est [4] égale à la moitié LO de la ligne LN . Donc [5] toute la corde $SP = LN$; & partant les arcs SVP & LMN sont [6] égaux entr'eux , & [7] la moitié SV de l'arc SVP sera aussi égale à la moitié LM de l'arc LMN . Or la ligne EG étant [8] perpendiculaire à la

[1] *Cor. I. Prop. 5. Geo.* [2] *Part. I. Prop. 13. Geo.*

[3] *Par construction.* [4] *Cor. 4. Prop. 6. Geo.*

[5] *Ax. 13. Geo.* [6] *Part. I. Prop. 11. Geo.*

[7] *Ax. 12. general.* [8] *Supposit.*

corde SE , on aura [1] l'arc $HL = HS$. Donc en ajoutant l'arc HL à l'arc LM , & l'arc HS à l'arc SV , on aura [2] $HLM = HSV$; & partant les cordes [3] HM & HV seront égales. Pareillement [4] $GV = GM$. Donc la ligne EF aura deux de ses points, sçavoir H & G également distans des points V & M . Donc enfin [5] EF sera aussi perpendiculaire à la seconde ligne parallele CD , ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les lignes AB & CD perpendiculaires à la même ligne EF : je dis que ces deux lignes sont paralleles entr'elles. Pour le démontrer soit décrite du point G la circonférence $HSVPNMELH$, & soient menées les mêmes lignes ponctuées, & de la même maniere que dans la premiere partie de la proposition presente. Puisque [6] les lignes AB & CD sont perpendiculaires à EF , reciproquement EF sera perpendiculaire à SL & à VM ; & partant on aura [7] l'arc $VSH = HEM$. On aura pareillement [8] l'arc $SH = HL$. Donc [9] l'arc SV sera égal à LM ; mais puisque SP & LN sont [10] perpendiculaires à CD , l'arc $SV = VP$ [11] & $LM = MN$. Donc [12] la corde $SP = LN$. Donc [13] enfin la ligne perpendiculaire SR sera

[1] Part. 6. Prop. 14. Geo. [2] Ax. 4. gener.

[3] Part. I. Prop. II. Geo. [4] Cor. 1. déf. 29. Geo.

[5] Prop. 5. Geo. [6] Supposit.

[7] Prop. 3. & Cor. 2. Prop. II. Geo.

[8] Ax. 9. general. [9] Par construction.

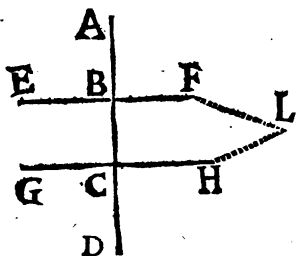
[10] Ax. 12. general. & Part. I. Prop. 13. Geo.

égale à la perpendiculaire LO ; & partant ; puisque * la position d'une ligne droite suit nécessairement celle de deux de ses points , on trouvera que les deux points S & L de la ligne AB étant [1] également distans de la ligne CD , la ligne AB sera pareillement également distante de CD . Donc [2] ces deux lignes AB & CD seront parallèles entr'elles , ce qu'il falloit démontrer,

COROLLAIRE I.

Donc deux lignes perpendiculaires à une même ligne droite , ou deux lignes parallèles entr'elles étant

prolongées ne peuvent jamais concourir nulle part. Soient les deux lignes EF & GH perpendiculaires à AD , ou parallèles entr'elles , &



que AD leur soit perpendiculaire ; s'il étoit possible que ces lignes EF & GH étant prolongées pussent concourir en quelque lieu du monde , par exemple en L , il faudroit que de ce point L il y eût deux lignes LB & LC menées perpendiculairement à la même ligne AD dans un même plan , ce qui est [3] impossible. Donc

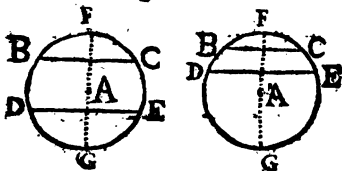
* *Cor. Prop. 8. Geo.* [1] *Cor. 3. Prop. 6. Geo.*

[2] *Déf. 8. Geo.* [3] *Cor. I. Prop. 6. Geo.*

ces lignes EF & GH ne peuvent donc se rencontrer nulle-part.

COROLLAIRE II.

Les arcs BD & CE compris entre les cordes parallèles BC & DE , sont égaux entr'eux. Car soit mené



le diamètre FG perpendiculairement à une des deux cordes BC ou DE . Alors ^[1] ce diamètre FG sera aussi perpendiculaire à l'autre corde, & même ^[2] sera perpendiculaire à l'une & à l'autre par leur milieu. Outre cela ^[3] ce même diamètre FG coupera les arcs BFC & DGE chacun en deux parties égales, c'est-à-dire que $BF = FC$, & que $DG = GE$. Si à l'arc BF on ajoute DG d'une part, & si à l'arc CF on ajoute GE d'une autre part, on aura $BF + DG = CF + GE$, & ^[4] l'arc entier $FDG = FEG$. Retranchons d'une part $BF + DG$, & de l'autre part $CF + GE$; les arcs BD & CE compris entre les cordes parallèles BC & DE , resteront ^[5] égaux entr'eux,

[1] Prop. pref.

[2] Part. I. Prop. 13. Geom.

[3] Part. V. Prop. 14. Geom.

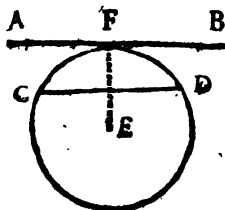
[4] Cor. 5. Prop. 14. Geom.

[5] Ax. 9. Geom.



COROLLAIRE III.

Une ligne touchante parallèle à une corde de cercle, divise en deux parties égales par le point d'attouchement l'arc soutenu par cette corde. Soit



la ligne touchante AB parallèle à la corde CD : je dis que l'arc CFD soutenu par cette corde est divisé en deux parties égales par le point d'attouchement F . Car soit mené le rayon EF du centre E à ce point d'attouchement F . Alors le rayon EF fera ^[1] perpendiculaire à la touchante AB ; ce même rayon EF , sera donc ^[2] aussi perpendiculaire à la corde CD , & partagera ^[3] en deux parties égales, l'arc CFD au point d'attouchement F , qui est aussi un point de la touchante AB .

COROLLAIRE IV.

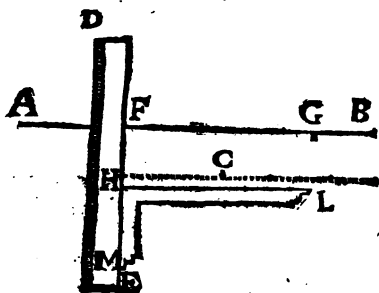
On peut tirer de cette proposition une me

[1] Part. 2. Prop. 12. Geo.

[2] Part. 1. Prop. préf.

[3] Prop. 14. Geo. Part. 6.

mode pour mener par un point donné hors d'une ligne donnée, une ligne parallele à cette ligne donnée. Et on peut s'en servir fort com-



modément ; principalement dans les desseins d'Architecture civile, ou militaire, lorsqu'il s'agit de mener une ligne parallele à une autre ligne par un point donné. Soit par exemple le point *C* donné hors la ligne *AB*, par lequel point *C* on veut mener une ligne parallele à *AB*. Il faut prendre une regle de bois *DE* avec une équerre *LHM* d'une assez bonne épaisseur, parcequ'on s'en sert avec plus de justesse pour mener les lignes necessaires ; on applique d'abord le côté *HL* de cette équerre sur la ligne *AB*, par exemple de *F* en *G*, & on pose la regle *DE* le long du côté *HM* de cette équerre. Ensuite retenant avec une main la regle *DE* toujours dans la même situation,

avec l'autre main on fait glisser l'équerre le long de cette règle *DE* jusqu'à ce que le point *C* paroisse ; enfin on mène la ligne *HC*, qui est * la ligne parallèle qu'on cherchoit.

* *Part. 2. Prop. Pres.*



P R O P O S I T I O N X V I .

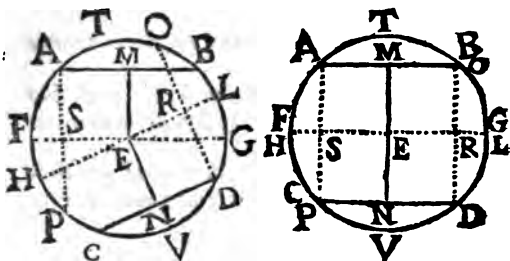
1. *Les cordes de cercle également éloignées du centre sont égales entr'elles.*
2. *Reciproquement lorsque les cordes de cercle sont égales entr'elles, elles sont également éloignées du centre.*
3. *Le diamètre d'un cercle est plus grand que chacune des autres cordes qu'on peut mener dans ce cercle.*

D E M O N S T R A T I O N
D E L A P R E M I E R E P A R T I E .

Soient les cordes AB & CD également éloignées du centre E du cercle $ACDB$: je dis que ces cordes sont égales entr'elles. Pour le démontrer soit mené par le centre E le diamètre FG parallèle à la corde AB ; par le même centre E soit encore mené le diamètre HL parallèle à l'autre corde CD . Du centre E soient menées les lignes EM & EN perpendiculaires aux cordes AB & CD ; ces perpendiculaires seront [1] les mesures des distances du centre à ces cordes. D'une des extrémités d'une des cordes AB ou CD , par exemple du point A soit menée la ligne AS perpendiculairement au diamètre FG , & cette ligne AS soit prolongée jusqu'à la rencontre de la circonférence en P . Enfin d'une extrémité de l'autre corde soit

[1] *Cor. 3. Prop. 6. Geo.*

mente la ligne DR perpendiculaire sur le diamètre HL , & cette ligne DR soit prolongée jusqu'au point O rencontre de la circonférence.



Puisque^[1] les distances EM & EN du centre à ces cordes sont égales, les perpendiculaires AS & DR seront^[2] aussi égales, c'est à dire,^[3] que les cordes entières AP & DO seront égales. Donc^[4] les arcs AFP & DLO seront égaux : & enfin^[5] leurs moitez AF & DL seront égales entr'elles. Or puisque AP est perpendiculaire au diamètre FG , réciproquement GF fera^[6] perpendiculaire à AP , & même^[7] partagera l'arc AFP en deux parties égales au point F ; par le même raisonnement le diamètre HL partagera l'arc DLO en deux parties égales au point L . Puisque nous venons de trouver que les moitez de ces arcs qui sont AF & DL sont égales entr'elles, il est constant

[1] *Supposit.* [2] *Cor. 4. Prop. 6. & Dem. 1. gen.*

[3] *Part. 1. Prop. 13. Geo. & Ax. 13. gen.*

[4] *Cor. 2. Prop. 11. Geo.* [5] *Ax. 12. gen.*

[6] *Cor. 1. Prop. 5. Geo.*

[7] *Part. 6. Prop. 14. Geo.*

qu'en ajoutant à AF son égal ^[1] BG , & en ajoutant à DL son égal HC , on aura ^[2] la somme des arcs $AF+BG=DL+HC$. Mais l'arc FTG est ^[3] une moitié de la circonférence, qui est égale à l'autre moitié HVL . Donc en ôtant $AF+BG$ de l'arc FTG , & ôtant $DL+HC$ de l'arc HVL , il restera l'arc ^[4] $ATB=CVD$. Donc ^[5] les cordes AB & CD seront égales entr'elles, ce qu'il falloit démontrer.

D E M O N S T R A T I O N

DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les cordes AB & CD égales entr'elles : je dis qu'elles sont également éloignées du centre E , c'est à dire ^[6] que les perpendiculaires EM & EN sont égales entr'elles. Pour le démontrer, après avoir mené les perpendiculaires EM & EN , soient menées les autres lignes FG , HL ; AP , DO comme dans la première partie de la proposition présente.

Puisque ^[7] $AB=CD$, les arcs ATB & CVD seront ^[8] égaux entr'eux; mais ^[3] l'arc $FTG=HVL$. Donc ôtant d'une part l'arc ATB & ôtant de l'autre part l'arc CVD , il restera ^[4] la somme des arcs $AF+BG=HC+LD$; mais ^[9] les moitiés de chacune de ces deux sommes d'arcs, sçavoir AF & DL seront égales entr'elles. Donc ^[0] deux fois AF , c'est à

[1] Cor. 2. Prop. 15. Geo. [2] Ax. 4. gen.

[3] Cor. 5. Prop. 14. Geo. [4] Ax. 9. gen.

[5] Part. 1. Prop. 11. Geo. [6] Cor. 3. Prop. 6. Geo.

[7] Supposit. [8] Cor. 2. Prop. 11. Geo.

[9] Cor. 2. Prop. 15. & Ax. 12. gener.

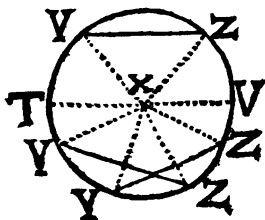
(0) Ax. 13. gen. & Part. 6. Prop. 14. Geo.

dire, l'arc AFP sera égal à deux fois DE qui est l'arc DLO : or puisque les arcs AFP & DLO sont égaux entr'eux, les cordes AP & DO seront ⁽¹⁾ égales entr'elles. Donc les lignes GF & HL menées par le centre E , & par le milieu de ces arcs AFP & DLO ⁽²⁾ seront perpendiculaires par le milieu de ces cordes ; & partant ⁽³⁾ les perpendiculaires AS & DR seront égales entr'elles. Or ⁽⁴⁾ la perpendiculaire $AS = EM$, & la perpendiculaire $RD = EN$. Donc ⁽⁵⁾ la perpendiculaire $EM = EN$; donc les cordes égales AB & CD seront ⁽⁶⁾ également éloignées du centre E , ce qu'il falloit démontrer.

D E M O N S T R A T I O N

DE LA TROISIÈME PARTIE.

Soit le diamètre TV , je dis que ce diamètre est plus grand que toute autre ligne TZ menée dans le cercle, & terminée de part & d'autre à la circonférence. Pour le démontrer soient menez les rayons XT & XZ . Il est constant ⁽¹⁾ que $TX = ZX$, & que $VX = ZX$. Donc ⁽²⁾ $TX + XV = ZX$



⁽¹⁾ Part. 1. Prop. 11. Geo. ⁽²⁾ Part. 5. Prop. 14. Geo.

⁽³⁾ Part. 1. Prop. 14. & Ax. 12. gen.

⁽⁴⁾ Cor. 4. Prop. 6. Geo. ⁽⁵⁾ Demande 1. gen.

⁽⁶⁾ Cor. 3. Prop. 6. Geo. ⁽⁷⁾ Cor. 1. déf. 29. Geo.

⁽⁸⁾ Ax. 4. gen.

+ XZ. Or ^[1] YX + XZ > YZ. Donc ^[2] le diametre TXV > YZ, ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVII.

1. Les cordes de cercle les plus proches du centre sont plus grandes que celles qui en sont plus éloignées.
2. Reciproquement lorsqu'une corde de cercle est plus grande qu'une autre, celle qui est plus grande est plus proche du centre que celle qui est plus petite.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit la corde BF plus proche du centre A, que la corde CE : je dis que cette corde BF est plus grande que la corde CE. Pour le démontrer, je mène du centre A la ligne AG perpendiculaire à la corde BF, & la ligne AL perpendiculaire à la corde CE; ces perpendiculaires AG & AL seront ^[3] les distances des cordes BF & CE. La distance AL étant



^[4] plus longue que AG, j'en retrancherai la partie AH égale à AG, & par le point H je menerai la corde MN perpendiculaire à AL. Alors les cordes BF & MN seront ^[5] égales entr'elles. Or la corde MN étant soutendante de l'arc MDN, sera ^[6] plus grande que la corde CE qui est soutendante de l'arc plus petit CDE. Au lieu de MN prenant son égale BF, je trouverai donc que la corde BF qui est plus proche du centre A, est plus grande que la corde CE qui en est plus éloignée, ce qu'il falloit démontrer.

^[1] Prop. 1. Geo.	^[4] Supposition.
^[2] Demande 1. gen.	^[5] Part. 1. prop. 16. Geo.
^[3] Cor. 3. prop. 6. Geo.	^[6] Part. 2. prop. 11. Geo.

Bb iiij

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soit la corde AB plus grande que CD : je dis que AB est plus proche du centre E que la corde CD . Car AB ne peut être qu'en ces trois situations, sçavoir, plus proche du centre E que la corde CD , ou autant éloignée que la corde CD , ou enfin plus éloignée que la corde CD .

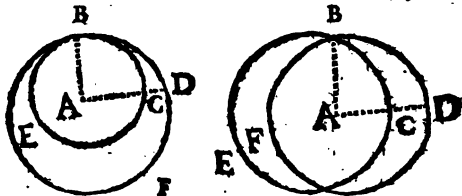
Or AB ne peut être autant éloignée du centre E que CD . Car AB seroit ^[1] égale à CD , ce qui est contre la supposition. AB ne peut être plus éloignée du centre E que CD ; car cette corde AB seroit ^[2] plus petite que CD , ce qui est encore contre la supposition. La corde AB qui est la plus grande, sera donc plus proche du centre E , que CD , ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVIII.

Deux circonferences de cercles qui se coupent, ou qui se touchent intérieurement, n'ont pas le même centre.

DEMONSTRATION.

Soient les circonferences des cercles BEC & BFD qui se coupent, ou qui se touchent au point B , je dis qu'aucun point, par exemple le point A , ne peut être un centre commun à ces deux cercles. Pour le



démontrer, de ce point A soit menée au point de rencontre la ligne droite AB , & du même point soit encore menée une autre ligne ACD qui se ter-

^[1] Part. 1. prop. 16. Geo. ^[2] Part. 1. prop. 17. mine 3

nine à la dernière circonférence. S'il étoit possible que ce point A fût un centre commun à ces deux cercles, les rayons du cercle BFD seroient égaux aux rayons du cercle BEC , & partant ^[1] on auroit $AD = AB$. Pareillement ^[2] AC seroit égal à AB . Donc ^[3] il faudroit que la ligne AD fût égale à AC ; ce qui est ^[3] impossible. Donc les cercles dont les circonférences se coupent, ou se touchent intérieurement ne peuvent avoir un centre commun, ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

Donc deux circonférences de cercles qui ont le même centre, ne peuvent se couper ni se toucher, Car si elles pouvoient se couper ou se toucher, ces cercles ^[4] n'auroient pas le même centre, ce qui est contre la supposition.

P R O P O S I T I O N X I X.

La ligne droite menée par les centres de deux cercles dont les circonférences se touchent, passe par l'attouchement ou rencontre de ces circonférences.

D E M O N S T R A T I O N.

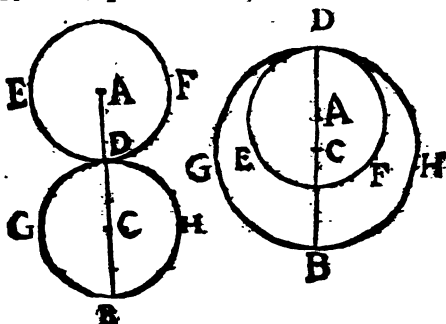
Soit la ligne AB menée par les deux centres A & C des deux cercles EDF & $GBHD$: je dis que cette ligne AB prolongée, s'il est né-

^[1] Cor. 1. déf. 29. Geo.

^[2] Ax. 18. général.

^[3] Ax. 2. gen. ^[4] Prop. prof.

cessaire, passera par l'attouchement D des circonférences de ces cercles. Car si on considère le centre A comme un point pris hors le centre C du cercle $H D G E$, la ligne $A D$ qui passe par le centre C est [1] la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du point A à la circonférence du cercle $H D G E$. Donc cette ligne se termine à l'endroit de cette circonférence $G B H D$, qui est le plus proche de ce centre A .



Or l'endroit de cette circonférence touchante $G B H D$ qui est le plus proche du centre A est l'attouchement D . Puisque les circonférences qui se touchent, se rencontrent de telle sorte que l'une n'entre point dans le cercle de l'autre. Donc la ligne $A B$ qui passe par les centres des circonférences $F D E$ & $H B G D$ qui se touchent passe par l'attouchement, ce qu'il falloit démon-
strer.

C O R O L L A I R E.

Donc l'attouchement de deux circonférences

[1] Part. I. Prop. 9. Cor.

de cercles n'est qu'un seul point. Car si l'attouchement D , par exemple, consistoit en plusieurs points qui fussent communs aux deux circonferences FED & $HDGB$, on pourroit mener de ce point A à la circonference $HDGB$ plusieurs lignes qui se termineroient à ces points communs. Donc [1] ces lignes seroient égales à la ligne AD qui est partie de AB laquelle passant par le centre, passe [2] par l'attouchement. Donc cette ligne AD ne seroit pas la plus couste de toutes, puisque ces autres lignes menées du point A à ces points communs lui seroient égales. Or cette ligne AD est (3) la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du centre A à la circonferance $HDGB$. Donc l'attouchement D n'est qu'un seul point.



DES ANGLÉS RECTILIGNES.

PROPOSITION XX.

La mesure d'un angle rectiligne est l'arc décrit de son sommet & compris entre ses côtés.

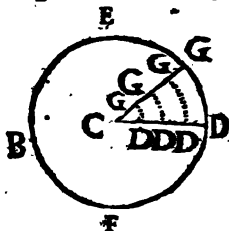
DEMONSTRATION.

SOit l'angle rectiligne GCD : je dis que sa mesure est l'arc GD compris entre ses côtés

[1] Cor. 1. déf. 29. Geo. [2] Prop. pres.

[3] Part. 1. Prop. 9. Geo.

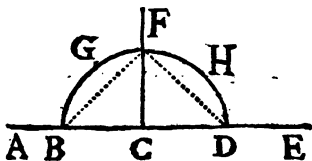
CG & CD , & décrit de son sommet C pris pour centre. Car considérons la ligne CG appliquée sur CD , & qu'ensuite cette ligne CG soit mue vers E , ou bien CD vers F autour de leur extrémité fixe C , afin que cette ligne parvienne dans la situation CG , le point G en s'écartant



ou le point D en s'écartant du point G décrira l'arc DG qui en [3] fera comme la trace ou le vestige. Donc l'arc DG sera la mesure de l'ouverture ou écartement de l'angle GCD , ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Donc chaque angle droit a pour mesure un quart de circonférence de cercle. Soit la ligne FC perpendiculaire à la ligne AE ; du point C soit décrit l'arc de cercle $BGFHD$ qui est [2] une demie circonférence. Il est [3] constant que le point F est également distant des points B & D ; & partant les cordes BF & FD étant [4] égales, les arcs



[2] Cor. 1. déf. 3. Geo.

[3] Cor. 5. Prop. 14. Geo.

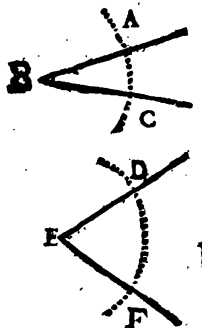
[4] Prop. 3. Geo.

[5] Cor. 4. Ax. 2. Geo.

$\angle BGF$ & $\angle FHD$ seront ⁽¹⁾ aussi égaux entr'eux. Or ⁽²⁾ $\angle BGF$ est la mesure de l'angle droit BCF . Pareillement l'arc FHD est la mesure de l'angle FCD , & les arcs BGF & FHD étant égaux, sont chacun la moitié de la moitié d'une circonférence. Donc les angles droits BCF & FCD ont chacun pour mesure un quart de circonférence de cercle.

C O R O L L A I R E II.

Donc on connoitra l'égalité ou inégalité des angles rectilignes par l'égalité ou inégalité des arcs compris entre leurs côtes décrits de leurs pointes ou sommets à la même ouverture de compas prise à volonté. On connoitra par exemple, que l'angle ABC est plus petit que DEF , si l'arc AC est plus petit que DF , l'un & l'autre arc étant décrits à même ouverture de compas; & si l'arc AC étoit égal à l'arc DF , l'angle ABC seroit égal à DEF .



Reciproquement lorsqu'un angle est égal à un autre, l'arc qui en est la mesure est égal à l'arc qui est la mesure de l'autre, lorsque ces deux arcs sont décrits à même ouverture de compas; & lorsque deux angles sont inégaux, les arcs qui en sont mesures sont inégaux; enfin l'angle qui est le plus grand a le plus grand arc pour mesure.

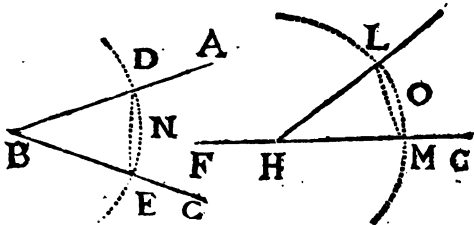
(1) Cor. 2. Prop. II. Geo. (2) Prop. pres.

COROLLAIRE III.

Puisque les Mathématiciens sont convenus entr'eux que la division ordinaire de la circonférence d'un cercle seroit de 360 parties égales qu'ils ont appellées degrez ; il suit du Corollaire premier de la Proposition présente qu'un angle droit a pour mesure un arc de 90 degrez. Donc tous les angles droits sont égaux entr'eux, parcequ'ils ont chacun la même mesure. Puisqu'un angle obtus est * plus grand qu'un angle droit, il aura pour mesure un arc de cercle plus grand qu'un quart de circonférence, c'est à dire, plus grand qu'un arc de 90 degrez. Enfin puisqu'un angle aigu est plus petit qu'un angle droit, il aura pour mesure un arc plus petit qu'un arc de 90 degrez.

COROLLAIRE IV.

Donc il est facile de faire un angle rectiligné égal à un autre. Soit par exemple l'angle ABC , & que sur la ligne FG , on se propose de faire un angle égal à l'angle ABC , & dont

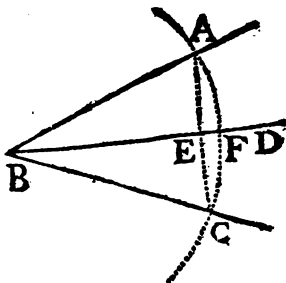


* Déf. 15. Geom.

le sommet soit au point *H*. On décrira des points *B* & *H* des arcs *DNE* & *LOM* à même ouverture de compas; ensuite on ouvrira le compas du point *E* au point *D*, & on transportera cette ouverture sur l'arc *MOË* de *M* en *L*, & enfin on menera par les points *H* & *L* la ligne *HL*: je dis que l'angle $LHG = ABC$. Car après avoir mené les cordes *ED* & *ML*, on trouve qu'elles sont égales entr'elles, l'une & l'autre étant mesurée par la même ouverture de compas. Donc * les arcs *DNE* & *LOM* sont aussi égaux entr'eux; & parant [2] $ABC = LHG$.

COROLLAIRE V.

On peut tirer de cette proposition une méthode pour partager ou couper geometriquement un angle en deux parties égales. Soit l'angle *ABC*; pour le partager en deux parties égales on décrira du sommet *B*, d'une intervalle ou ouverture de compas prise à volonté l'arc *AFC*. On menera la corde *AC*, ensuite on coupera [2] cette corde en deux parties égales au point *E*; & du point *B* par le point *E* milieu de ce se corde,



* Cor. 2. Prop. II. Geo.

[1] Prop. pres.

[2] Cor. 3. Prop. 5. Geo.

on mènera la ligne BD : je dis que l'angle $ABD = DBC$; & partant que la question est résolue. Car l'arc AF qui est ^[1] la mesure de cet angle ABD est ^[2] égal à l'arc CF mesure de l'angle DBC .

C O R O L L A I R E V I.

On trouve par le moyen du Corollaire 5^e de la Proposition présente, une méthode pour diviser un angle géométriquement en parties égales 4, 8, 16, &c. en continuant à diviser en deux parties égales chaque partie de cet angle.

A V E R T I S S E M E N T.

Parcequ'on n'a pas encore trouvé une méthode pour diviser un angle avec la règle & le compas en un nombre de parties égales pris à volonté ; par exemple en 3, 5, 7, 9, &c. c'est pour cela qu'on se contentera d'indiquer la division suivante en forme d'observation ; car on n'y réussira pas par des voyes géométriques, mais seulement en cherchant ou tâtonnant.

R E M A R Q U E.

Pour diviser la circonférence d'un cercle en 360 parties égales ou degrés ;

1^o. Il faut diviser la circonférence du cercle donné en deux parties égales entr'elles par le moyen d'un diamètre ; chacune de ces moitiés vaudra 180 degrés, puisque le tout en vaut 360.

[1] Prop. pref.

[2] Part. 3. Prop. 14. Geom.

2°. Il faut diviser chacune de ces moitiés en deux parties égales : chacune de ces parties égales vaudra ou contiendra 90 degrez, ce qui est la 4^e partie de la circonférence.

3°. Il faut diviser ce quart de cercle en trois parties égales : chacune de ces parties vaudra ou contiendra 30 degrez, on transportera ensuite ces 3 parties sur chacun des 3 autres quarts de cercle.

4°. Il faut diviser une de ces dernières parties en trois autres parties égales, dont chacune contiendra 10 degrez, & transporter ces mêmes parties sur le reste de la circonférence avant que de changer l'ouverture du compas.

5°. Il faut diviser chacune de ces dernières parties en deux autres dont chacune comprendra 5 degrez.

6°. Enfin il faut diviser chacune de ces dernières parties en cinq autres parties, dont une étant transportée 360 fois sur la circonférence, déterminera ces 360 degrez ou parties égales.

Un cercle ou une circonférence de cercle divisée de cette sorte, servira d'instrument pour connoître non seulement chaque partie de toute autre circonférence, mais aussi pour connoître la grandeur des angles.



PROPOSITION XXI.

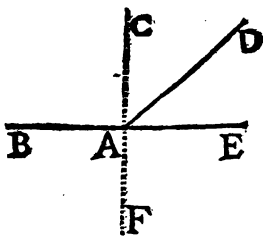
1. Une ligne droite rencontrant une autre ligne droite, forme de part & d'autre deux angles qui sont, pris ensemble, égaux à deux droits.
2. Réciproquement si deux lignes droites rencontrent une autre ligne, & forment avec elle deux angles, qui, pris ensemble, soient égaux à deux droits, ces deux lignes droites qui seront particulières à chaque angle ne formeront qu'une seule ligne droite.

DEMONSTRATION
DE LA PREMIÈRE PARTIE.

UNE ligne droite en peut rencontrer une autre en deux manières, ou perpendiculairement ou obliquement.

Si une ligne droite en rencontre une autre perpendiculairement, il est constant qu'elle forme avec elle deux angles pris ensemble égaux à deux droits, puisque chacun est [1] droit.

Mais si une ligne, par exemple AD en rencontre une autre BF obliquement dans le point A ; je dis que la somme des angles BAD & DAE est égale à deux angles droits. Pour le démontrer soit me-



[1] Déf. 14. Geo.

née par le même point A la ligne CF perpendiculairement à BE ; il est évident que la somme des angles BAD & DAE a la même ouverture que les deux angles droits BAC & CAE pris ensemble. Donc * les angles BAD & DAE pris ensemble sont égaux aux deux angles droits BAC & CAE , ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION.

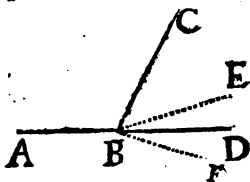
DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les lignes droites AB & DB qui rencontrent la ligne CB au point B , de sorte que les angles ABC & CBD pris ensemble soient égaux à deux droits : je dis que ces lignes AB & DB ne feront qu'une seule ligne droite, c'est à dire que la ligne droite AB étant prolongée passera par BD , ne pouvant passer par ailleurs. Car si cette ligne droite pouvoit passer par ailleurs, ce seroit de part & d'autre de BD , par exemple par BE ou par BF . Si cette ligne AB étant prolongée passoit par BE , la ligne ABE seroit une ligne droite;

& partant [1] l'angle CBE avec CB seroit la valeur de deux angles droits. Mais

[2] pareillement

l'angle CBD avec le même angle CBA fait aussi la même valeur de deux angles droits. Donc [3] l'angle CBD seroit égal à l'angle CBE , ce qui est [4] impossible. Donc la ligne AB étant prolongée ne peut passer par BE . On démon-



* Cor. 2. Prop. 10. Geo.

[1] Part. 1. Prop. pres. [2] Supposit.

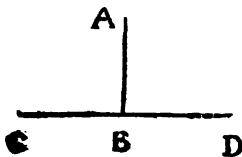
[3] Ax. 5. general. [4] Ax. 2. gen.

trera de la même manière que AB étant prolongée ne peut passer par BF . Donc cette ligne AB passera par BD , ce qu'il falloit démontrer.

Il suit trois Corollaires de la première partie de la Proposition présente.

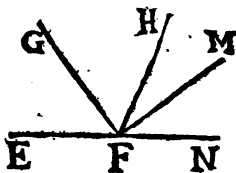
COROLLAIRE I.

Si une ligne droite, par exemple AB , rencontre une autre ligne droite CD , de sorte qu'elle forme d'une part un angle ABC qui soit droit; l'autre angle ABD sera aussi droit. Car les deux pris ensemble sont égaux à deux droits, & on en connoît déjà un ^[1] qui est ABC .



COROLLAIRE II.

Tous les angles EFG , GFH , HFM , MFN posés du même côté d'une ligne droite, par exemple EN , dans un même plan, & qui ont tous le même sommet F , sont égaux à deux droits. Puisque ^[2] les angles HFE & MFN sont égaux à la somme des angles EFG , GFH , HFM , MFN ; & que les angles HFE & MFN sont ^[3] ensemble égaux à deux droits,

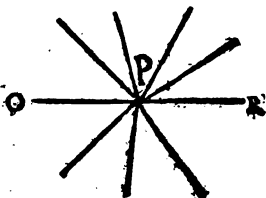


^[1] *Supposé.* ^[2] *Ax. 3. general.*

^[3] *Part. I, Prop. pres.*

COROLLAIRE III.

Donc enfin tous les angles possibles autour du même point P & dans un même plan sont pris ensemble, égaux à quatre angles droits. Parceque la somme des angles posez d'un même côté de la ligne OR est égale à deux droits, & la somme des autres angles posez de l'autre côté de cette ligne droite est aussi égale à deux droits; ce qui fait pour la somme totale, quatre angles droits.



PROPOSITION XXII.

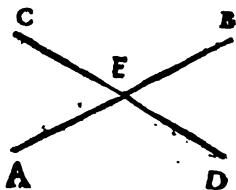
- 1^o. Deux lignes droites qui se coupent forment les angles opposés au sommet égaux entr'eux.
 2^o. Reciproquement si quatre lignes droites se rencontrent dans un point, de sorte que les angles opposés au sommet soient égaux entr'eux, ces quatre lignes ne seront que deux lignes droites.

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les deux lignes droites AB & CD qui se coupent l'une l'autre dans le point E : je dis que les angles AED & CEB qui sont opposés au sommet sont égaux entr'eux; & que

pareillement les angles AEC & DEB aussi opposés par le sommet sont égaux entr'eux.

Car l'angle AED & l'angle AEC sont ^[1] égaux à deux droits; pareillement l'angle CEB & le même angle AEC pris ensemble sont



égaux à deux droits. Donc ^[2] l'angle AED est égal à l'angle CEB . Or ces deux angles sont opposés par le sommet, & on peut démontrer la même chose de la même manière à l'égard des angles AEC & DEB . Donc les angles opposés au sommet sont égaux entr'eux, ce qu'il falloit démontrer.

D E M O N S T R A T I O N DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les lignes AE , DE , CE , BE qui se rencontrent au point E , de sorte que l'angle AEC soit égal à l'angle DEB qui lui est opposé par le sommet, & que l'angle AED soit égal à l'angle CEB : je dis que les lignes AE & EB , CE & ED ne sont que deux lignes droites. Car puisque ^[1] l'angle $AEC = DEB$, si on ajoute d'une part l'angle AED & de l'autre l'angle CEB , on aura ^[2] $AEC + AED = DEB + CEB$. Mais ^[3] la somme de ces quatre angles qui ont leur sommet dans le point E vaut

^[1] Part. 1. Prop. 21. Geo. ^[2] Ax. 5. gen.

^[2] Supposit. ^[3] Ax. 4. gen.

^[3] Cor. 3. Prop. 21. Geo.

quatre angles droits. Donc $AEC + AED$ en vaudra la moitié, c'est à dire deux droits. Donc * les lignes CE & ED ne feront qu'une seule ligne droite. On trouvera par un raisonnement semblable au precedent que $AED + DEB = AEC + CEB$; & partant que $AED + DEB$ sont la moitié du total, c'est à dire que $AED + DEB$ sont égaux à deux droits: & que * les lignes AE & EB sont une seule ligne droite. Donc enfin ces quatre lignes ne font que deux lignes droites, ce qu'il falloit démontrer.

* *Part. 2, Prop. 21. Geo.*



PROPOSITION XXIII.

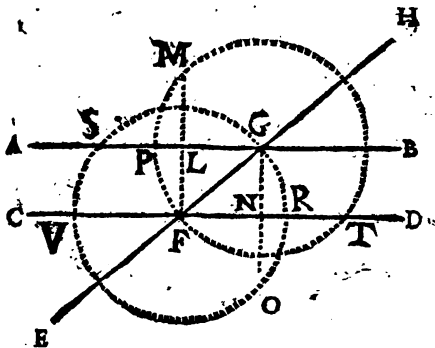
1°. Si deux lignes parallèles sont coupées par une troisième ligne droite, les angles alternes internes sont égaux entr'eux.

2°. Reciproquement si deux lignes droites sont coupées par une troisième, & si les angles alternes internes sont égaux entr'eux; ces deux lignes droites seront parallèles entr'elles.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Deux lignes parallèles peuvent être coupées par une troisième ou perpendiculairement



ou obliquement. Si elles sont coupées perpendiculairement, il est constant * non seulement

* Part. I. Prop. 15. Geo.

que les angles alternes internes sont égaux entr'eux, mais aussi que les huit angles qui sont formez par cette intersection sont égaux entr'eux, chacun à chacun; Car tous les angles droits sont [1] égaux entr'eux.

Mais si des lignes droites, par exemple les lignes AB & CD paralleles entr'elles, sont coupées-obliquement par la ligne EH : je dis que les angles AGF & GFD alternes internes sont égaux entr'eux. Pour le démontrer, des points F & G , pris pour centres & de l'intervale FG soient décrites les circonferences de cercles égales $GSYOR$ & MFT . Ensuite du point F soit menée FL perpendiculaire à AB , & prolongée jusques en M ; & du point G soit menée GN perpendiculaire à CD , & prolongée jusques en O .

Puisque FM est [2] perpendiculaire à GP , reciproquement [3] GP est perpendiculaire à FM . Donc GP coupe FM en deux parties égales, & [4] coupe pareillement l'arc MPF soutenu par cette corde FM en deux parties égales au point P . On dira la même chose à l'égard de la ligne FR , de la corde GO , & de l'arc GRO . Mais à cause des paralleles AB & CD , les perpendiculaires FL égale à la moitié de FM , & GN égale à la moitié de GO , sont [5] égales entr'elles; & [6] les cordes

[1] Cor. 3. Prop. 20. Geo.

[2] Par construction.

[3] Cor. 1. Prop. 5. Geo.

[4] Part. 6. Prop. 14. Geo.

[5] Cor. 4. Prop. 6. Geo.

[6] Ax. 12. general.

PROPOSITION XXIII.

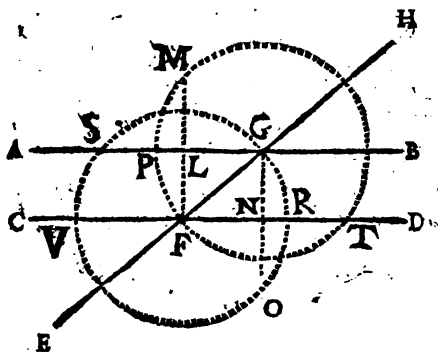
1°. Si deux lignes parallèles sont coupées par une troisième ligne droite, les angles alternes internes sont égaux entr'eux.

2°. Reciproquement si deux lignes droites sont coupées par une troisième, & si les angles alternes internes sont égaux entr'eux; ces deux lignes droites seront parallèles entr'elles.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Deux lignes parallèles peuvent être coupées par une troisième ou perpendiculairement



ou obliquement. Si elles sont coupées perpendiculairement, il est constant * non seulement

* Part. I. Prop. 15. Geo.

que les angles alternes internes sont égaux entr'eux, mais aussi que les huit angles qui sont formés par cette intersection sont égaux entr'eux, chacun à chacun; Car tous les angles droits sont ^[1] égaux entr'eux.

Mais si des lignes droites, par exemple les lignes AB & CD parallèles entr'elles, sont coupées-obliquement par la ligne EH : je dis que les angles AGF & GFD alternes internes sont égaux entr'eux. Pour le démontrer, des points F & G pris pour centres & de l'intervalle FG soient décrites les circonférences de cercles égales $GSYOR$ & MFT . Ensuite du point F soit menée FL perpendiculaire à AB , & prolongée jusques en M ; & du point G soit menée GN perpendiculaire à CD , & prolongée jusques en O .

Puisque FM est ^[2] perpendiculaire à GP , réciproquement ^[3] GP est perpendiculaire à FM . Donc GP coupe FM en deux parties égales, & ^[4] coupe pareillement l'arc MPF soutenu par cette corde FM en deux parties égales au point P . On dira la même chose à l'égard de la ligne FR , de la corde GO , & de l'arc GRO . Mais à cause des parallèles AB & CD , les perpendiculaires FL égale à la moitié de FM , & GN égale à la moitié de GO , sont ^[5] égales entr'elles; & ^[6] les cordes

[1] Cor. 3. Prop. 20. Geo.

[2] Par construction.

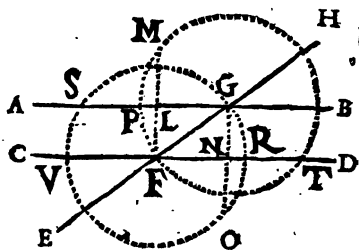
[3] Cor. 1. Prop. 5. Geo.

[4] Part. 6. Prop. 14. Geo.

[5] Cor. 4. Prop. 6. Geo.

[6] Ax. 12. general.

entieres GO & FM sont aussi égales entr'elles. Donc les arcs FPM & ORG de cercles égaux soutenus par ces cordes égales



sont ^[1] égaux. Donc les moitez FP & GR de ces arcs sont égales entr'elles, c'est à dire que les mesures des angles alternes internes AGF & GFD sont égales. Donc ces angles seront ^[2] égaux entr'eux. Pareillement puisque ^[3] l'arc $VSGR = PFTB$; retranchant d'une part l'arc GR & de l'autre l'arc PF , il restera ^[4] l'arc $VS G = FTB$. L'angle obtus VFG sera donc ^[2] égal à son alterne $FG B$. Donc en general les angles alternes internes seront égaux entr'eux, ce qu'il falloit demon-
trer.

^[1] Cor. 2. Prop. II. Geo.

^[2] Cor. 2. Prop. 20. Geo.

^[3] Cor. 5. Prop. 14. Geo.

^[4] Ax. 9. gener.

D E M O N S T R A T I O N

D E L A S E C O N D E P A R T I E .

Si une 3^e ligne droite en coupe deux autres, de sorte que les angles alternes internes qu'on suppose égaux soient droits, * il est déjà constant que ces lignes seront paralleles; mais si ces angles sont obliques, elles seront aussi paralleles: ce qu'on demontre de cette maniere. Soient les lignes AB & CD coupées par une 3^e ligne droite EH , & que l'angle AGF soit égal à son alterne GFD : je dis que ces lignes AB & CD sont paralleles entr'elles. Des points G & F pris pour centres, & de l'intervalle GF soient décrites des circonferences de cercles, & menées des lignes perpendiculaires de la même maniere que dans la premiere partie de la Proposition presente.

L'angle AGF étant [1] égal à GFR , l'arc PF mesure de l'angle AGF , sera égal à GR mesure de l'angle GFR . Donc [2] le double de l'arc FP , c'est à dire, l'arc FPM sera égal à GRO double de l'arc GR . Donc [3] la corde FM sera égale à GO ; mais la ligne FR étant [4] menée perpendiculairement à GO partage également cette corde GO , & l'arc GRO ; on dira la même chose à l'égard de la ligne GP de la corde MF & de l'arc MPF . Donc la perpendiculaire GN qui est une moitié de GO , sera [5] égale à la perpendiculaire LF qui est une moitié de MF . Donc

* Part. 2. Prop. 15. Geo.

[1] Supposé.

[2] Part. 6. Prop. 14. Geo. & Ax. 6. génér.

[3] Part. 1. Prop. 11. Geo.

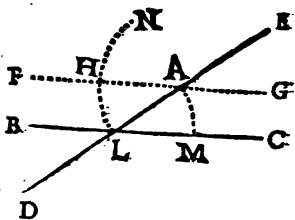
[4] Par construction, & Cor 1. Prop. 5. Geo.

[5] Ax. 12. gen.

puisque les points L & G de la ligne AB sont également distans de la ligne CD , leur distance étant * mesurée par les perpendiculaires égales LF & GN , la position de la ligne AB suivra [1] celle de ses deux points L & G , c'est à dire, que AB sera [2] parallèle à CD , ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

On peut tirer de cette seconde partie une méthode pour mener une ligne parallèle à une autre par un point donné. Soit le point donné A , & que par ce point il faille mener une ligne parallèle à une ligne donnée BC . Il faut mener par ce point A la ligne droite DE qui coupe la ligne droite donnée BC au point L . Ensuite du point L pris pour centre, & de l'intervalle LA on décrira l'arc AM . Du point A & du même intervalle AL on décrira encore l'arc LN sur lequel on prendra avec un compas de L en H l'arc LH égal à AM ; & par le point H & le point A on mènera la ligne FG : je dis que cette ligne FG est la ligne parallèle cherchée. Car les angles alternes internes FAL & ALC sont égaux entr'eux; puisque les arcs égaux HE &



* Cor. 3. Prop. 6. Geo.

[1] Cor. Prop. 8. Geo.

[2] Déf. 8. Geo.

AM en [1] sont la mesure. Donc [2] les lignes FG & BC sont parallèles.

PROPOSITION XXIV.

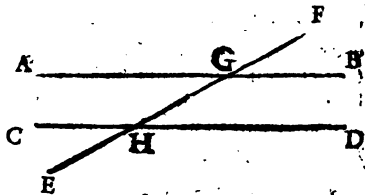
Si une ligne droite FE coupe deux lignes parallèles, par exemple AB & CD.

- 1°. L'angle extérieur FGB & l'angle intérieur GHD du même côté sont égaux entr'eux.
- 2°. Les angles alternes externes FGB & CHE sont aussi égaux entr'eux.
- 3°. La somme des angles intérieurs BGH & GHD du même côté est égale à deux angles droits.
- 4°. La somme des angles extérieurs FGB & DHE du même côté est égale à deux angles droits.

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

L'Angle [3] $FGB = AGH$. Or [4] l'angle $GHD = AGH$. Donc [5] l'angle $FGB = GHD$.

Or ces deux angles sont l'extérieur & l'intérieur du même côté.



Donc l'angle extérieur & l'intérieur du même

[1] Prop. 10. Geo.

[2] Prop. pref. 2^e Part.

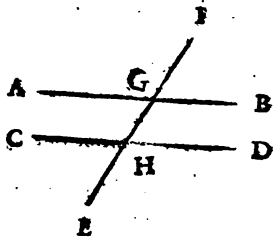
[3] Part. I. Prop. 22. Geo. [4] Part. I. Prop. 23. Geo.

[5] Ax. 18. gen.

même côté sont égaux entr'eux, ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

L'angle * $FGB = GHD$. Or [1] l'angle $CHE = GHD$. Donc [2] l'angle $FGB = CHE$. Or ces deux angles sont alternes externes. Donc les angles alternes externes sont égaux entr'eux, ce qu'il falloit démontrer.



DEMONSTRATION DE LA TROISIÈME PARTIE.

[3] La somme des angles FGB & BGH est égale à deux angles droits, au lieu de l'angle FGB , prenant [4] son égal * GHD , on aura encore les angles $BGH + GHD$ égaux à deux angles droits. Or ces angles BGH & GHD sont intérieurs & du même côté. Donc les angles intérieurs & du même côté, pris ensemble, sont égaux à deux angles droits, ce qu'il falloit démontrer.

* Prop. pres. Part. 1.

[1] Part. 1. Prop. 22. Géom.

[2] Ax. 18. general.

[3] Part. 1. Prop. 21. Géom.

[4] Demande 1. gen.

D E M O N S T R A T I O N

D E L A Q U A T R I E M E P A R T I E .

L'angle DHE & l'angle DHG , pris ensemble, sont [1] égaux à deux angles droits; au lieu de l'angle DHG , prenant [2] son égal [3] FGB , on aura les angles FGB & DHE , pris ensemble, égaux à deux droits. Or ces angles FGB & DHE sont extérieurs & du même côté. Donc la somme des angles extérieurs & du même côté, est égale à deux angles droits; ce qu'il falloit démontrer.

A V E R T I S S E M E N T,

Ce qu'on vient de démontrer dans la Proposition précédente, & ce qu'on démontrera dans la suivante, touchant les angles AGH & GHD ; FGB & CHE ; BGH & GHD ; FGB & CHE ; on le démontrera très-facilement, & on conclura la même chose par le même raisonnement à l'égard des angles CHG ; HGB ; AGF , EHD ; AGH , CHG ; AGF , CHE .

[1] Part. I. Prop. 21. Geom.

[2] Demande 1. gen.

[3] Prop. pres. Part. I.



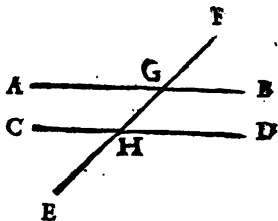
PROPOSITION XXV.

Si deux lignes droites, par exemple AB & CD , sont coupées par une troisième ligne droite EF , de sorte qu'il arrive,

- 1°. Ou que les angles extérieurs & intérieurs du même côté FGB & GHD soient égaux entr'eux;
 - 2°. Ou que les angles alternes externes FGB & $CHÉ$ soient égaux entr'eux;
 - 3°. Ou que la somme des angles intérieurs du même côté BGH & GHD soit égale à deux angles droits;
 - 4°. Ou enfin que la somme des angles extérieurs du même côté FGB & DHE soit égale à deux angles droits;
- Les lignes AB & CD seront parallèles l'une à l'autre.

D E M O N S T R A T I O N
DE LA PREMIERE PARTIE.

L'angle GHD est * égal à l'angle FGB ; mais l'angle AGH est [1] aussi égal au même angle FGB . Donc [2] l'angle AGH sera égal à l'angle GHD . Donc



* *Supposit.* [1] *Part. I. Prop. 22. Geo.*
[2] *Ax. 18. general.*

* Les lignes AB & CD seront paralleles entr'elles, ce qu'il falloit demonst. r.

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

L'angle FGB & l'angle CHE sont ^[1] égaux entr'eux. Donc au lieu de l'angle FGB en prenant ^[2] son ^[3] égal AGH ; & au lieu de l'angle CHE prenant son ^[3] égal GHD : on trouvera les angles alternes internes AGH & GHD égaux entr'eux. Donc * les lignes AB & CD seront paralleles entr'elles, ce qu'il falloit demonst. r.

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

L'angle DHG joint avec l'angle BGH fait ^[1] la valeur de deux angles droits. Or l'angle AGH joint avec le même angle BGH fait aussi la même valeur de deux angles droits. Donc ^[2] l'angle AGH sera égal à l'angle DHG . Donc * les lignes AB & CD sont paralleles, ce qu'il falloit demonst. r.

DEMONSTRATION

DE LA QUATRIEME PARTIE.

L'angle FGB joint avec l'angle DHE fait ^[1] la valeur de deux angles droits. Au lieu de l'angle FGB , si ^[2] on prend son ^[3] égal AGH , on trouvera aussi que l'angle AGH joint à l'angle EHD fera la valeur de deux angles droits. Mais ^[4] l'angle GHD joint avec l'angle EHD

* Part. 2. Prop. 23. Geo. ^[1] Par supposit.

^[2] Deman. 1. gen. ^[3] Part. 1. Prop. 22. Geo.

^[4] Part. 1. Prop. 21. Geo. ^[5] Ax. 5. gen.

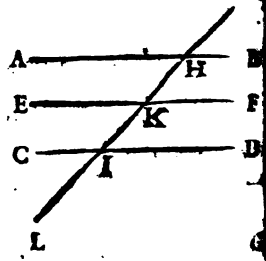
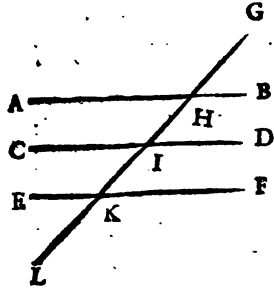
fait aussi la valeur de deux angles droits. Donc [1] l'angle *AGH* est égal à l'angle *GHD* ; & partant [2] les lignes *AB* & *CD* sont parallèles entr'elles, ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXVI.

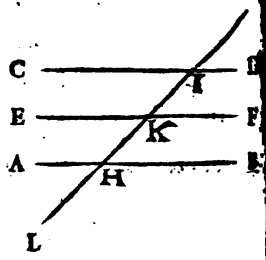
Les lignes parallèles à une 3^e sont parallèles entr'elles.

DEMONSTRATION.

Soient les lignes *AB* & *EF* parallèles à une troisième ligne *CD* : je dis que *AB* &



EF sont parallèles entr'elles. Car puisque *AB* est [3] parallèle à *CD*, on aura [4] l'angle *GHB* égal à l'angle *GID*. Pareillement puisque [4] la ligne *EF* est parallèle à *CD*,



[1] *Ax. 5. geo.*
[3] *Suppos.*

[2] *Part. 2. Prop. 23. Geo.*
[4] *Part. 1. Prop. 24. Geo.*
l'angle

L'angle GKF est [1] égal au même angle GID
 Donc [2] l'angle GHB est égal à l'angle GKF .
 Donc [3] la ligne AB est parallèle à EF , ce qu'il
 falloit démontrer.

PROPOSITION XXVII.

Si un angle a le sommet posé dans la circonférence
 d'un cercle, & s'il est compris par deux lignes
 qui coupent cette circonférence, ou par une ligne
 qui la coupe & l'autre qui la touche; il a pour
 sa mesure la moitié de l'arc qui est compris entre
 ses côtés.

DEMONSTRATION.

PREMIERE CIRCONSTANCE.

SI un angle, par exemple ABC , a son
 sommet B posé dans la circonférence d'un
 cercle, & est formé par deux lignes AB &
 BC qui coupent cette circonférence, de sorte
 que le centre se trouve sur une de ces lignes,
 ou entre ces mêmes lignes, la Demonstration
 de la Proposition présente est telle. Soient men-
 nées les lignes DE & FG par le centre pa-
 rallelement aux deux autres lignes AB & BC
 qui comprennent cet angle.

[4] L'angle $DHG = FHE$. Donc [5] l'arc DG

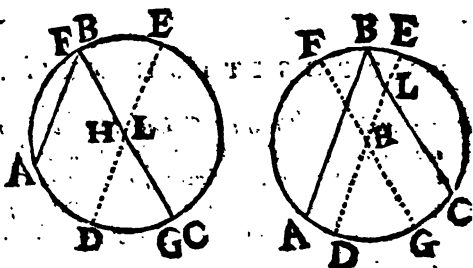
[2] Part. 1. Prop. 24. Geo. [3] Ax. 12. gener.

[3] Part. 1. Prop. 25. Geo.

[4] Part. 1. Prop. 22. Geo.

[5] Part. 2. Cor. 2. Prop. 29. Geo.

\widehat{FE} , mais l'arc $\widehat{FB} = \widehat{GC}$, & l'arc $\widehat{BE} = \widehat{AD}$. Donc au lieu de \widehat{FB} , c'est à dire de $\widehat{AD} + \widehat{BE}$, on peut prendre ce qui y est égal, $\widehat{AD} + \widehat{GC}$. Donc l'arc $\widehat{DG} = \widehat{AD} + \widehat{GC}$.



Donc puisque $\widehat{AD} + \widehat{GC} = \widehat{DG}$, l'arc \widehat{DG} sera la moitié de \widehat{AC} . Car lorsqu'une grandeur est partagée en deux parties telles que l'une est égale à l'autre, chacune de ces deux parties est la moitié du tout. Mais l'angle \widehat{DHG} a pour mesure cet arc \widehat{DG} : ce même angle $\widehat{DHG} = \widehat{DHC} = \widehat{ABC}$ [1]. Donc l'angle \widehat{ABC} qui a son sommet dans la circonférence, aura la même mesure, savoir \widehat{DG} , c'est à dire la moitié de l'arc \widehat{AC} sur lequel il est appuyé, ce qu'il falloit démontrer.

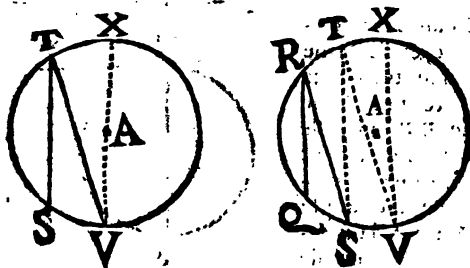
SECONDE CIRCONSTANCE.

Un angle peut avoir son sommet dans la circonférence, & être formé par deux lignes qui coupent cette circonférence de telle ma-

[1] Cor. 2. Prop. 15. Geo.

[2] Part. 1. Prop. 14. Geo.

Il est que le centre du cercle n'est sur une des lignes qui comprennent l'angle, ni entre ces mêmes lignes : tel est l'angle $\angle RQ$. Alors il faut mener par le point S où le côté le plus proche du centre A coupe la circonférence, une ligne parallèle à l'autre côté QR de l'angle; & par l'autre point T où cette dernière parallèle coupera la circonférence, il faut (s'il est nécessaire) mener encore une ligne TV parallèle au côté RS de l'angle le plus proche du centre A . Il faut continuer ainsi alternativement jusqu'à ce que le centre se trouve entre deux de ces dernières lignes parallèles ou sur une de ces mêmes lignes.



Il est évident ^[1] que l'angle $\angle TVX$, par exemple, a pour sa mesure $\frac{1}{2} TX$. Mais les

^[2] arcs TX, SV, RT, QS , &c. sont égaux entr'eux, & ^[3] tous les angles $\angle TVX, \angle STV, \angle TSR, \angle QRS$, &c. sont égaux entr'eux, parcequ'ils sont alternes & entre parallèles. Or ces

^[1] On le vient de démontrer.

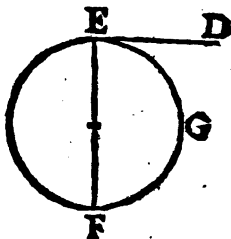
^[2] Cor. 2. Prop. 15. Geo.

^[3] Bart. 1. Prop. 23. Geo.

angles égaux ont des mesures égales. Puisque l'angle TVK a pour sa mesure $\frac{1}{2} TX$, l'angle QRS qui lui est égal, aura aussi pour sa mesure $\frac{1}{2} TX = \frac{1}{2} QS$. Donc l'angle QRS aura pour mesure $\frac{1}{2} QS$, ce qu'il falloit démontrer.

TROISIÈME CIRCONSTANCE.

Si un angle, par exemple DEF , a son sommet posé dans la circonférence, & est formé par une touchante DE & une autre ligne EF qui passe par le centre; il est évident que la mesure de cet angle DEF est [1] la moitié de l'arc ou de la demie circonférence EGF comprise entre ses côtés, puisque l'angle [2] DEF est droit.



Mais si un angle, par exemple RST , est formé par une ligne RS qui touche, & par une autre ST qui coupe la circonférence, de sorte que le centre du cercle ne soit pas entre les côtés de cet angle, ni sur un de ces côtés; il faut mener par le point T la ligne TV parallèle

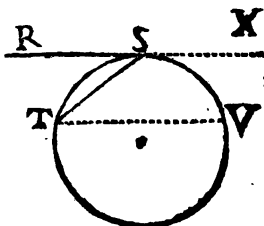
[1] Cor. 1. Prop. 20. Geo.

[2] Prop. 12. Geo.

le à la touchante RS . On vient de démontrer que

l'angle STV a pour mesure $\frac{1}{2}SV = * \frac{1}{2}ST$.

Or ^[1] l'angle RST
 $= STV$. Donc
 l'angle RST aura
 pour sa mesure la
 moitié de l'arc ST
 compris entre ses
 côtes, ce qu'il fal-
 loit démontrer.



Si le centre du
 cercle se rencontroit entre les côtes de l'angle,
 comme il arrive à l'égard de l'angle TSX
 dont le sommet S est posé sur la circonférence,
 & qui est formé par une touchante & une ligne
 qui coupe la circonférence, sa mesure sera

$\frac{1}{2}TVS$. Car les angles TSX & TSR , pris

ensemble, sont ^[2] égaux à deux droits. Donc
 ils ont ^[3] pour mesure la moitié de la circonférence
 STV , c'est à dire ^[4] la moitié de ST
 $+ TVS$; mais l'angle RST a déjà pour sa me-

sure $\frac{1}{2}TS$. Donc l'angle TSX aura pour sa

mesure la moitié du reste qui est l'arc TVS
 compris entre ses côtes, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

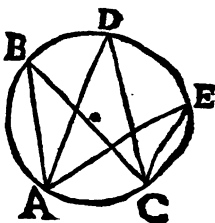
Donc tous les angles ABC , ADC , AEC ,

* Cor. 3. Prop. 15. Geo. ^[1] Part. 1. Prop. 23. Geo.

^[2] Part. 1. Prop. 21. Geo. ^[3] Cor. 1. Prop. 20. Geo.

^[4] Ax. 3. general. Ec ij.

&c. (quelque nombre qu'il y en ait) qui ont leur pointe ou sommet dans une même circonférence de cercle, & qui sont appuyez sur un même arc AC sont ^[1] tous égaux entr'eux; parcequ'ils ont ^[2] tous la même mesure, sçavoir la moitié du même arc AC .



COROLLAIRE I I.

Non-seulement les angles qui sont appuyez sur le même arc, & qui ont leur sommet dans la même circonférence sont égaux entr'eux; mais aussi les angles qui sont appuyez sur des arcs égaux, & qui ont leur sommet dans la même circonférence, sont pareillement égaux entr'eux. Si l'arc AC , par exemple, est égal à l'arc DF ; l'angle



ABC ayant ^[2] pour sa mesure la moitié de cet arc AC , & l'angle DEF ayant pour mesure

la moitié de l'arc DF ; & puisque ^[3] $\frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} DF$; ces deux angles ABC & DEF auront ^[2]

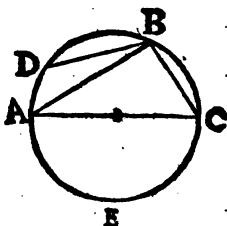
[1] Cor. 2. Prop. 20. Geo. [2] Prop. pres.

[3] Ax. 12. Gen.

pour mesure des arcs égaux. Donc ils seront pareillement égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

Un angle, par exemple ABC , dont le sommet B est dans la circonférence d'un cercle, & qui est appuyé sur la moitié de la circonférence de ce cercle, est un angle droit. Parceque cet angle a [¹] pour sa mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé, ou qui est compris entre ses côtez, c'est à dire la moitié de la demie circonférence AEC . Or la moitié d'une demie circonférence est un quart de circonférence, mesure [²] d'un angle droit. Donc l'angle ABC sera droit.



COROLLAIRE IV.

L'angle DBC qui a son sommet dans la circonférence; & qui est appuyé sur un arc plus grand qu'une demie circonférence de cercle est obtus. Parceque cet angle comprenant entre ses côtez un arc $DAEC$ plus grand qu'une demie circonférence de cercle, aura pour sa mesure

la moitié de cet arc $DAEC$. Or [¹] $\frac{1}{2} DAEC > \frac{1}{2} AEC$, c'est à dire que cet angle

[¹] Prop. pref. [²] Cor. 1. Prop. 20. Geo.

[³] Ax. II. gen.

Et c. iiiij

DBC aura pour sa mesure un arc plus grand qu'un quart de cercle. Donc ce même angle DBC sera ^[1] un angle obtus.

COROLLAIRE V.

Donc l'angle BAC qui a aussi son sommet posé dans la circonférence du cercle, & qui comprend entre ses côtés l'arc BC plus petit qu'une demie circonférence de cercle, sera un angle aigu. Parceque cet angle BAC aura pour sa mesure un arc plus petit qu'un quart de circonférence de cercle.

COROLLAIRE VI.

Enfin si deux angles, par exemple ABC & ADC , sont appuyez sur le

même arc, par exemple AC , & si le sommet B d'un, sçavoir de l'angle ABC , est dans le centre d'un cercle, & le sommet D ou pointe de l'autre ADC est dans la circonférence du même



cercle; il suit nécessairement que celui qui sera posé dans le centre du cercle, sera double de celui dont le sommet sera dans la circonférence. Parceque l'angle du centre aura ^[2] pour sa mesure tout l'arc sur lequel il est appuyé, & l'angle dont le sommet est dans la circonférence, a * pour sa mesure seulement la moitié de ce même arc sur lequel il est appuyé.

[1]. Cor. 3. Prop. 20. Geo.

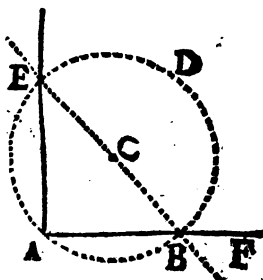
[2]. Prop. 20. Geo.

* Prop. prof.

COROLLAIRE VII.

On peut tirer de la proposition presente une methode pour mener une ligne perpendiculairement à une autre ligne par un point pris dans cette autre ligne.

Soit par exemple le point *A*, extrémité de la ligne *AF*, par lequel il faille mener une ligne perpendiculaire à cette ligne *AF*. Il faut mettre un pied du compas dans ce point donné *A*, & l'autre pied du compas



dans un autre point pris à volonté hors la ligne donnée *AF*, par exemple en *C*. Ensuite de l'intervalle *CA* on décrira une circonférence de cercle *ABDE*, de sorte qu'elle coupe la ligne donnée *AF* dans les points *A* & *B*. Par ce point *B* & par le centre *C* on mènera la ligne droite *BC* qui coupera la circonférence au point *E*. Par ce point *E* & par le point donné *A* on mènera la ligne *AE*: je dis que cette *AE* est la perpendiculaire qu'on cherchoit.

Car la ligne *BE* passant par le centre *C* est un diamètre du cercle, & partant l'angle *BAE* fera * appuyé sur une demie circonférence, dont [1] il aura la moitié pour mesure. Donc cet angle *BAE* fera [2] droit. Donc [3] la ligne

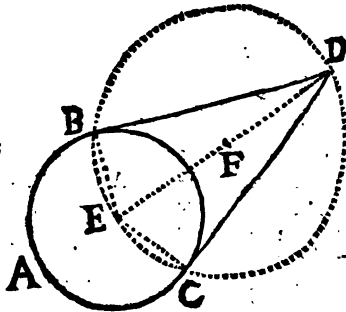
* Cor. 5. Prop. 14. Geo. [1] Cor. 3. Prop. pres.
 [2] Cor. 1. Prop. 20. Geo. [3] Déf. 14. Geo.

AE sera perpendiculaire à AF . C'est du Corollaire present dont j'ai fait mention à la fin du Corollaire 2 de la Proposition 3^e de cette Geometrie.

COROLLAIRE VIII.

On a enseigné [2] une methode pour mener une touchante à une

circonférence de cercle par un point donné dans cette circonférence. Mais si le point donné est hors du cercle, on tirera de la Proposition presente une



methode pour mener une touchante à la circonférence de ce cercle. Soit par exemple le point donné D hors la circonférence ABC , & que par ce point il faille mener une touchante à la circonférence ABC . Du point donné D on mènera au centre E du cercle donné la ligne droite DE . Ensuite on prendra cette ligne DE pour un diamètre, en décrivant de son milieu F , & de l'intervalle FE ou FD la circonférence $BECD$. Enfin du point D au point B ou C où cette dernière circonférence coupe la première, on mènera la ligne DB ou DC : je dis qu'au lieu

[2] Cor. 4. Prop. 12. Geo.

Une touchante menée du point donné D à la circonférence donnée ACB ; on en a deux, sçavoir DB & DC . Car après avoir mené aux points B & C les rayons EB & EC , on connoitra ^[1] que les angles DBE & DCE sont des angles droits; puisque chacun de ces angles est appuyé sur une demie circonférence ECD ou EBD . Ces lignes DB ou DC sont donc ^[2] les touchantes cherchées.

PROPOSITION XXVIII.

Un angle dont le sommet est posé entre le centre & la circonférence d'un cercle, a pour sa mesure la moitié de la somme faite de l'arc sur lequel il est appuyé, & de l'arc sur lequel est appuyé l'angle opposé par le sommet.

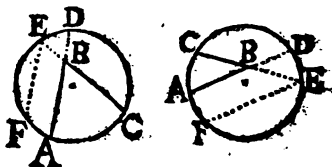
DEMONSTRATION.

Soit l'angle ABC dont le sommet B soit posé entre le centre & la circonférence du cercle $ACDE$: je dis que cet angle ABC a pour sa mesure la moitié de la somme faite des arcs AC sur lequel il est appuyé, & ED sur lequel est appuyé celui qui lui est opposé au sommet. Pour le démontrer soient prolongées les lignes AB & CB qui comprennent cet angle, jusqu'à la rencontre de la circonférence en A & en E . Ensuite d'un de ces points D ou E soit menée une ligne EF qui coupe la circonférence, & qui soit parallèle à un des côtés EA ; ou BC de l'angle. Alors

[1] Cor. 3. Prop. pref. page 331.

[2] Part. I. de la prop. 12. Geo. page 262.

l'angle FEC a [1] pour sa mesure la moitié de l'arc $FAC = FA + AC$. Or [2] l'arc $FA = ED$,



Au lieu de FA , si je prens ED , je trouverai que l'angle FEC aura pour sa mesure la moitié de $AC + ED$. L'angle $FEC = ABC$ [3]. L'angle ABC aura donc aussi pour sa mesure la moitié de $AC + ED$.

L'angle ABE ou [4] son égal CBD , aura aussi pour sa mesure la moitié de la somme des arcs $APE + CD$. Car [5] les angles ABC & ABE sont égaux à deux angles droits. La mesure de ces deux angles pris ensemble, est donc la moitié de la circonférence de cercle $ACDEF$. Or [6] la moitié de cette circonférence est la moitié des arcs AC , CD , DE , & EA qui la composent. Je viens de trouver que l'angle ABC a déjà pour sa mesure la moitié de la somme des arcs $AC + ED$. L'angle CBD a donc pour sa mesure la moitié du reste, c'est à dire la moitié de CD sur lequel il est appuyé, & de l'arc EA sur lequel est appuyé l'angle qui est opposé par le sommet.

En general tout angle, par exemple AEC dont le sommet E est placé entre le centre & la

[1] Prop. 27. Geo. p. 325.

[2] Cor. 2. Prop. 15. Geo. p. 287.

[3] Part. 1. Prop. 24. Geo. p. 319.

[4] Part. 1. Prop. 22. Geo. p. 311.

[5] Part. 1. Prop. 21. Geo. p. 308.

[6] Art. 3. Gen. p. 32.

circunference d'un cercle, soit que ce centre soit entre les côtes ou non, a donc pour sa mesure la moitié de la somme faite de l'arc AC sur lequel il est appuyé & de l'arc ED sur lequel est appuyé l'angle EBD opposé au précédent par le sommet, Ce qu'il falloit démontrer.

R E M A R Q U E.

Quand les côtes d'un angle rectiligne rencontrent une circonférence de cercle, le sommet de cet angle peut être en 4. principales positions. Nous venons de voir quel arc de cette circonférence on doit prendre, premièrement pour être la mesure de l'angle qui a son sommet posé dans le centre du cercle [1], secondement, pour être la mesure de celui qui a son sommet posé dans la circonférence [2], troisièmement, pour être la mesure de celui qui a son sommet posé entre le centre & la circonférence [3]. Il reste encore à démontrer quelle est la mesure de cet angle lorsqu'il a son sommet posé hors d'un cercle, ce qui sera déterminé évidemment dans la proposition suivante.

P R O P O S I T I O N X X I X.

1. Si le sommet d'un angle est posé hors d'un cercle, & si ses deux côtes rencontrent la circonférence de ce cercle; sa mesure sera la moitié de l'excès d'une Arc comprise entre ses côtes & plus éloignée de son sommet, surpassa l'Arc comprise entre ces mêmes côtes & plus près de son sommet.
2. Lorsqu'il y a plusieurs angles appuyés sur le même arc; celui qui a son sommet posé entre le centre

[1] Prop. 20. Géa. page 301.

[2] Prop. 27. Geo. page 325.

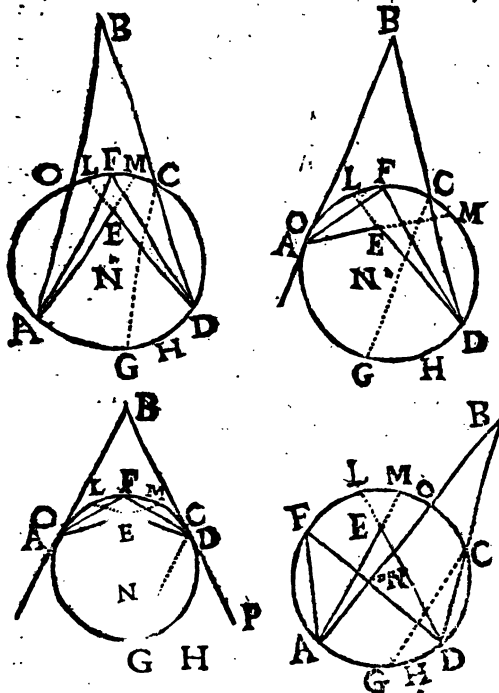
[3] Prop. préla.

La circonférence est plus grand que celui qui a son sommet posé sur la circonférence; & celui qui a son sommet posé sur la circonférence, est plus grand que celui qui a son sommet posé hors le cercle.

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit l'angle ABD dont le sommet B est posé hors le cercle $AGDCO$, & dont les deux côtes touchent, ou coupent la circonférence de ce cercle; ou enfin dont un côté la touche & l'autre la coupe: je dis que la mesure de l'angle ABD est la moitié de l'excès dont l'arc $AGHD$ compris entre les côtes BA & BD surpasse l'arc OC compris entre ces mêmes côtes, & qui est le plus proche du sommet B . Pour le démontrer, il faut mener par un des points où les côtes de l'angle ABD rencontrent cette circonférence, par exemple par le point C , la ligne EG parallèle à l'autre côté BA . Si de l'arc $AGHD$ je retranche l'arc $AG = OC$ [1], je trouverai [2] que l'arc GHD est l'excès dont cet arc $AGHD$ surpasse l'arc OC . Mais la moitié de cet arc GHD est [3] la mesure de l'angle GCD , ou de GCP si BD est touchante, & [4] l'angle $GCD = ABD$. L'angle ABD a donc aussi pour sa mesure la moitié de l'arc GHD , c'est à dire la moitié de l'excès dont l'arc AGD surpasse l'arc OC , ce qu'il falloit démontrer.

[1] Cor. 2. ou. 3. Prop. 15. Geo. p. 287.
 [2] Déf. 2. d'Alg. p. 59.
 [3] Prop. 27. Geo. p. 325.
 [4] Part. 1. Prop. 24. Geo. p. 319.



DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les angles ABD , AFD & AED appuyez sur le même arc AGD ; le sommet E de l'angle AED soit posé entre le centre N & la circonférence $AGDF$; le sommet F de l'angle AFD posé sur la circonférence même, & le sommet B de l'angle ABD posé hors le
Ff ij

cercle : je dis 1^o que l'angle AED est plus grand que AFD ; 2^o que cet angle AFD est plus grand que ABD . Pour le démontrer soient prolongez les côtes AE & DE de l'angle AED jusqu'aux points L & M où ils rencontrent la circonférence. L'angle AED a * pour sa mesure la moitié de l'arc $AGHD$ & encore la moitié de l'arc LM . L'angle AFD a [1] pour sa mesure seulement la moitié de l'arc $AGHD$. Donc [2] l'angle AED est plus grand que l'angle AFD . Or l'angle AFD qui a pour sa mesure la moitié de l'arc $AGHD$ est plus grand que l'angle ABD , qui a seulement pour sa mesure [3] la moitié de l'arc GHD partie de l'arc $AGHD$; & partant l'angle $AFD > ABD$. Donc [4] enfin l'angle $AED > AFD > ABD$, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

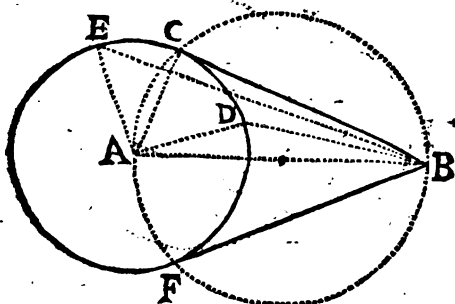
D'un point pris hors d'un cercle on ne peut mener que deux touchantes à ce cercle. Car du point B , par exemple, pris hors le cercle $FDCE$ après avoir mené les deux touchantes BC & BF , si on en pouvoit mener une 3^e, il faudroit la mener d'une part ou d'autre de la ligne AB , ou vers F ou vers C : si on la pouvoit mener vers C , il faudroit encore nécessairement la mener de part ou d'autre, par exemple en E ou en D . Or la ligne BE ne peut être touchante, ni la ligne BD . Car après avoir mené les rayons AE & AD , cette ligne BE fait

* Prop. 28. Geo. [1] Prop. 27. Geo.

[2] Cor. 2. Prop. 20. Geo. [3] Part. 1. Prop. pref.

[4] Ax. 22. geom.

* avec le rayon AE l'angle aigu BEA , qui est appuyé sur l'arc AFB , & la ligne BD fait avec le rayon AD l'angle BDA obtus, étant plus grand que l'angle droit BCA . Or si ces lignes étoient touchantes, elles feroient [1] avec le rayon mené du centre à leurs points d'attachement, des angles droits. Donc ces



lignes ne sont point touchantes. On fera le même raisonnement à l'égard de toutes les autres lignes droites menées du point B à la circonférence $FDCE$. Ne pouvant donc mener de ce point B trois touchantes à cette circonférence, à plus forte raison on n'en pourra pas mener 4 ou 5, puisque ces nombres renferment le nombre 3.

COROLLAIRE II.

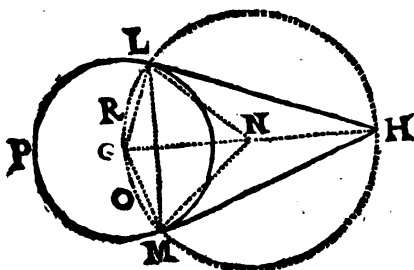
D'un même point pris hors d'un cercle, les deux touchantes qu'on peut [2] mener de ce

* Prop. pres. & déf. 16. Geo.

[1] Prop. 12. Geo.

[2] Cor. 1. Prop. pres.

point à ce cercle seront égales entr'elles. Soient les deux touchantes HL & HM menées du point H à la circonférence PML : je dis qu'elles sont égales entr'elles. La ligne menée de ce point H au centre G de la circonférence PML est perpendiculaire au milieu de la ligne LM .



Car les rayons NL & NM , égaux entr'eux, sont menez du point N centre de la circonférence MHL aux extrémités L & M de la ligne LM , qui sont aussi extrémités des touchantes HL & HM . Pareillement les rayons GL & GM sont égaux entr'eux, étant menez du centre G de la circonférence MPL aux mêmes extrémités L & M de la ligne LM . La ligne HG aura donc le point N & le point G également distans des extrémités L & M de la ligne LM . Donc HG sera * perpendiculaire au milieu de LM . Donc le point H sera (*) aussi également distant des mêmes points L & M . Donc les touchantes HL & HM seront égales entr'elles.

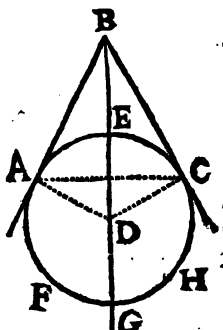
* Prop. 5. Geo.

(*) Prop. 3. Geo.

COROLLAIRE III.

Une ligne menée par le sommet d'un angle compris entre deux lignes qui touchent la circonférence d'un cercle, & par le centre de ce cercle, partage cet angle en deux parties égales. Soit l'angle compris entre les deux touchantes BA & BC :

je dis que la ligne BG menée par le sommet B de cet angle, & par le centre D du cercle $AGCE$ partagera l'angle ABC en deux parties égales, c'est à dire que l'angle $ABG = GBC$. Car les touchantes BA & BC sont * égales entr'elles. Les lignes DA & DC sont (1) aussi égales entr'elles. Donc la ligne BG



a deux de ses points B & D qui sont également distans des points extrêmes A & C de la ligne AC . Donc (2) cette ligne BG est perpendiculaire à AC . Donc (3) cette ligne BG partage l'arc AEC en deux parties égales, & partage aussi l'arc AGC en deux parties égales. Mais l'angle ABG a (4) pour sa mesure la moitié de l'excès dont l'arc AFG surpasse l'arc AE ; & l'angle GBC a pour sa mesure la moitié de

* Cor. 2. Prop. prof. (1) Cor. 1. déf. 29. Geo.

(2) Prop. 5. Geo.

(3) Part. 2. Prop. 14. Geo.

(4) Part. 1. Prop. prof.

l'excès dont l'arc GHC surpasse l'arc EC . Puisque $AE = EC$, & que $AFG = GHC$, ces deux excès sont * égaux entr'eux. Donc les mesures des angles ABG & GBC sont égales entr'elles. Donc ⁽¹⁾ l'angle ABC est partagé en deux parties égales par la ligne BG qui passe par le sommet B & par le centre D .

On pourroit encote démontrer la même chose d'une autre maniere. Car après avoir mené les rayons GL & GM aux points d'attouchement ⁽²⁾, on trouve que les arcs GRL & GOM de la circonférence $MHLG$ sont soutenus par des cordes égales GL & GM . Donc les angles LHG & GHM ayant leur sommet H dans la circonférence, & étant appuyez sur des arcs égaux de la même circonférence, sont ⁽³⁾ égaux entr'eux. Donc enfin l'angle LHM est partagé en deux parties égales par la ligne HG .

COROLLAIRE IV.

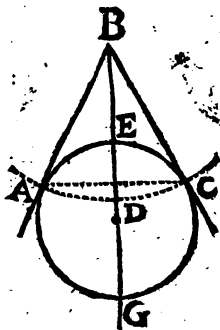
Reciproquement si une ligne menée par le sommet d'un angle compris entre deux touchantes de circonférence de cercle partage cet angle en deux parties égales, elle passera par le centre de ce cercle. Soit l'angle ABC compris entre les deux touchantes BA & BC : je dis que si la ligne BG partage en deux parties égales cet angle ABC , elle passera par le centre du cercle $AGCE$. Car puisque ⁽⁴⁾ l'angle $ABG = GBC$, les mesures de ces deux angles seront

* Ax. 21. général. ⁽¹⁾ Cor. 2. Prop. 10. Geo.

⁽²⁾ Fig. du Coroll. 2. de la Prop. pres.

⁽³⁾ Cor. 2. Prop. 27. Geo. ⁽⁴⁾ Supposé.

Égales entr'elles. Et alors si, d'une ouverture de compas égale à BA & du sommet B pris pour centre, on décrit un arc de cercle; puisque [2] les touchantes BA & BC sont égales entr'elles, cet arc de cercle passera [3] par le point C extrémité de la touchante BC . L'arc AD sera donc [3] égal à DC . La ligne BD , ou BG , sera donc [4] perpendiculaire à la corde AC toutendant de l'arc ADC & de l'arc AEC . Donc [5] cette ligne BG passera par le centre du cercle $AGCE$.

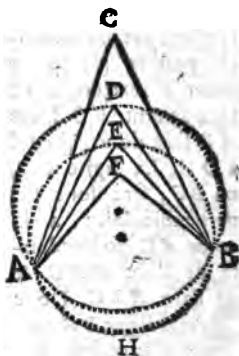


COROLLAIRE V,

Si de deux points, par exemple A & B , on mene deux lignés qui concourent en un point C , & si de ces deux mêmes points A & B on mene encore dans le même plan plusieurs lignes droites $AD, BD; AE, BE; AF, BF, \&c.$ qui concourent en differens points D, E, F , vers

- [2] Cor. 2. Prop. Pref.
- [3] Cor. 1. Def. 29. Geo.
- [4] Part. 2. ou Cor. 2. Prop. 20. Geo.
- [5] Part. 5. Prop. 14. Geo.
- [6] Part. 2. Prop. 13. Geo.

& entre les deux précédentes AC & BC ; l'angle, par exemple AFB , dont le sommet sera plus près de la ligne droite qu'on peut mener du point A au point B , sera plus grand que l'angle AEB qui en est plus éloigné: car si par les trois points A , E & B on fait ^[1] passer la circonférence de cercle $AEBE$, on trouvera ^[2] que l'angle AFB posé entre le centre & la circonférence est plus grand que l'angle AEB ; & que l'angle AEB est plus grand que l'angle ADB . On trouvera de la même manière que l'angle ADB est plus grand que l'angle ACB , en faisant passer par les trois points A , D , B une autre circonférence; & ainsi des autres angles quelque nombre qu'il y en ait.



[1] Cor. 2, Prop. 13. Geo.

[2] Part. 2. Prop. pres.





C H A P I T R E I I .

D E S S U R F A C E S .

EN T R E les proprietéz des surfaces, je considererai d'abord celles des surfaces planes, & je ne ferai attention qu'à ce qui s'y rencontre de plus necessaire pour s'instruire des principales propositions des premiers élémens de Geometrie. Ensuite dans le chapitre troisième j'enseignerai la maniere dont on peut connoître la grandeur des surfaces cylindriques & spheriques.

Mais puisqu'on reduit en triangles une surface plane terminée par plus de trois lignes droites, en y prenant un point à volonté, & de ce point menant des lignes droites à tous les angles de cette surface, il est évident que le triangle est la surface plane rectiligne la plus simple de toutes. C'est pour cela que dans la recherche de ce qu'il y a de plus élémentaire dans l'étude des proprietéz qui conviennent aux surfaces planes, nous commencerons par les triangles.

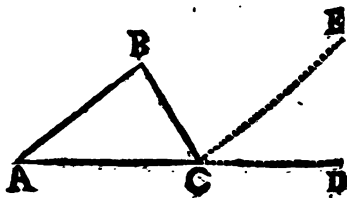


PROPOSITION XXX.

Si on prolonge un côté d'un triangle rectiligne, l'angle extérieur sera égal aux deux intérieurs opposés pris ensemble.

DEMONSTRATION.

Soit le triangle rectiligne ABC dont on prolongera un côté, par exemple AC ; je dis que l'angle extérieur BCD est égal aux deux intérieurs opposés A & B , pris ensemble. Pour le



démontrer, par le point C soit * menée la ligne CE parallèle à AB . Il est évident ** que l'angle $ABC = BCE$, & ['] que l'angle $ECD = BAC$. Or l'angle $BCD = BCE + ECD$; au lieu de $BCE + ECD$, on peut prendre ce qui y est égal, sçavoir $ABC + BAC$. Donc l'angle extérieur $BCD = ABC + BAC$, & qu'il falloit démontrer.

* Cor. 4. Prop. 15. ou Cor. Prop. 23. Geo.

** Part. I. Prop. 23. Geo.

['] Part. I. Prop. 24. Geo.

COROLLAIRE

COROLLAIRE.

Ayant prolongé un côté pris à volonté d'un triangle, l'angle extérieur, par exemple BCD , formé par ce moyen, sera * plus grand qu'aucun des intérieurs A & B opposés, puisqu'il sera [1] égal à la somme des angles A & B qui en seront les parties,

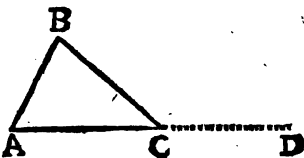
PROPOSITION XXXI.

Les trois angles de chaque triangle rectiligne, pris ensemble, sont égaux à deux angles droits.

DEMONSTRATION.

Soit un triangle rectiligne pris à volonté, par exemple ACB : je dis que ses trois angles pris ensemble $ABC + BAC + BCA$ sont égaux à deux angles droits.

Pour le démontrer soit prolongé un côté pris à volonté, par exemple AC .



L'angle extérieur $BCD = ABC + BAC$ [2].
Donc en ajoutant de part & d'autre l'angle ACB , on aura [3] $BCD + ACB = ABC + BAC + ACB$. Or [4] les angles BCD &

* *Ax. 2. gen.* [1] *Prop. pres.*

[2] *Prop. 30. Geo.* [3] *Ax. 4. gen.*

[4] *Part. I. Prop. 21. Geo.*

ACB pris ensemble sont égaux à deux droits. Donc * la somme des trois angles ABC , BAC , & ACB du triangle ABC est égale à deux angles droits, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Si un des angles d'un triangle est droit, les deux autres angles pris ensemble seront égaux à un droit. Car tous ces trois angles pris ensemble ne sont [1] égaux précisément qu'à deux droits.

Et réciproquement si un des angles d'un triangle est égal aux deux autres, cet angle est droit ; parcequ'alors il sera égal à la moitié du total de ces trois angles, lequel total ou somme est [1] la valeur de deux angles droits.

COROLLAIRE II.

Chacun des trois angles A , B , C du triangle ABC peut être aigu ; mais il ne peut y en avoir qu'un droit ou un obtus. Parcequ'il ne peut y en avoir deux droits ou deux obtus, ou un droit & un obtus. Car si deux angles droits ou deux obtus, ou un droit & un obtus pouvoient être dans un même triangle, ils feroient avec le 3^e angle une grandeur plus grande que deux angles droits, ce qui est contre la vérité de la Proposition présente. Et partant lorsque dans un triangle rectiligne il se rencontre un angle droit, ou un angle obtus, chacun des deux autres doit être aigu,

* Demande 1. gen.

[1] Prop. pres.

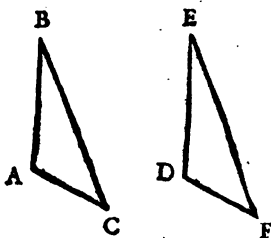
COROLLAIRE III.

La somme des trois angles d'un triangle rectiligne pris à volonté, est égale à la somme des trois angles d'un autre triangle rectiligne. Puisque la somme des trois angles d'un de ces triangles est * égale à deux angles droits, & que la somme des trois angles de l'autre triangle est aussi égale à la même grandeur qui est deux angles droits,

COROLLAIRE IV.

Si deux angles, par exemple A & C d'un triangle ABC (pris ensemble ou séparément) sont égaux aux deux angles D & F d'un autre triangle DEF ,

pris ensemble ou séparément; le 3^e angle restant B d'un de ces triangles ABC sera égal au 3^e angle restant E de l'autre triangle DEF . Parceque [1] la somme des trois angles A, B, C



d'un triangle ABC étant égale à la somme des trois angles $D, E, & F$ de l'autre; si on ôte d'une part la somme $A + C$ faite des angles A & C , & si on ôte de l'autre part la somme $D + F$ faite des autres angles D & F ; on

* Prop. pref.

[1] Cor. 3. Prof. pref.

NEA est égale à quatre angles droits ; parce que les angles intérieurs avec les angles extérieurs valent * autant de fois deux angles droits qu'il y a d'angles ou de côtes à cette surface rectiligne. Or ** la somme des angles intérieurs est égale à autant de fois deux angles droits moins quatre qu'il y a d'angles ou de côtes à cette même surface. Donc la somme des angles extérieurs $GAB + HBC$, &c. est égale à ces quatre angles droits.

COROLLAIRE I.

Il suit de la première partie de la Proposition présente que toutes les surfaces planes rectilignes qui auront un pareil nombre de côtes , auront le même nombre d'angles droits pour la valeur de la somme de leurs angles intérieurs.

COROLLAIRE II.

* Il suit de la seconde partie de la Proposition présente que toutes les surfaces rectilignes de quelque espèce qu'elles soient , c'est à dire , quel nombre de côtes qu'elles aient chacune , auront les sommes des angles extérieurs égales entr'elles ; puisque la somme des angles extérieurs de chacune est égale à quatre angles droits.

* *Part. I. Prop. 21. Geo.*

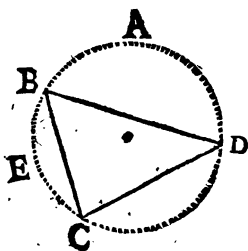
** *Part. I. Prop. pres.*

PROPOSITION XXXIII.

1. De deux côtes, ou de trois côtes inégaux entr'eux d'un triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle.
2. Reciproquement de deux, ou de trois angles inégaux entr'eux d'un triangle, le plus grand angle est opposé au plus grand côté.

D E M O N S T R A T I O N
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le triangle BCD dont le côté BD est plus grand que le côté BC : je dis que l'angle $BCD > BDC$. Car supposant * une circonférence de cercle décrite par les sommets des trois angles B, C, D ; l'arc BAD sera ^[1] plus grand que l'arc BEC . Donc ^[2] la moitié de cet arc BAD qui est ^[3] la mesure de l'angle C est plus grande que la moitié de l'arc BEC , qui est la mesure de l'angle D . Donc l'angle C opposé au plus grand côté BD sera plus grand que l'angle D opposé au plus petit côté BC , ce qu'il falloit démontrer.



* Cor. 2. Prop. 13. Geo. [1] Cor. I. Prop. II. Geo.
[2] Ax. II. gen. [3] Prop. 27. Geo.

D E M O N S T R A T I O N
D E L A S E C O N D E P A R T I E .

Si l'angle C du même triangle BCD est plus grand que l'angle D : je dis que le côté BD sera plus grand que le côté BC . Car * l'angle C étant plus grand que l'angle D , la moitié de l'arc BAD qui est la mesure de cet angle C , sera ^[1] plus grande que la moitié de l'arc BEC qui est la mesure de l'angle D . Donc l'arc BAD double de sa moitié sera ^[2] plus grand que l'arc BEC pareillement double de sa moitié. Donc ^[3] le côté BD sera plus grand que le côté BC , ce qu'il falloit démontrer.

P R O P O S I T I O N X X X I V .

1. Les côtés d'un triangle qui sont égaux entr'eux, sont opposés à des angles pareillement égaux entr'eux.
2. Reciproquement les angles d'un triangle qui sont égaux entr'eux, sont opposés à des côtés égaux entr'eux.

D E M O N S T R A T I O N
D E L A P R E M I E R E P A R T I E .

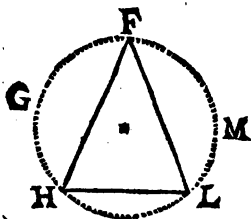
Soit le triangle FHL , dont les côtés FH & FL soient égaux entr'eux : je dis que les angles H & L opposés à ces côtés égaux, sont

* *Supposé.* [1] *Ax. II. gener.*

[2] *Ax. 14. gener.* [3] *Part. 2. Prop. II. Geo.*

aussi égaux entr'eux. Pour le demontrer suppo-
sons une circonference de cercle $HLMFG$ dé-
crite * par le som-

met des trois an-
gles H, L, F . Il est
constant [1] que les
arcs FGH & FML
seront aussi égaux
entr'eux ; & que les
angles H & L sont
[2] mesurez par la
moitié de ces arcs
 FML & FGH .



Donc les angles H & L seront égaux entr'eux ,
ce qu'il falloit demontrer.

D E M O N S T R A T I O N

D E L A S E C O N D E P A R T I E .

Soit le triangle HLF dont les angles H & L
soient égaux entr'eux : je dis que les côtez FL
& FH opposéz à ces angles égaux , sont aussi
égaux entr'eux. Après avoir mené la circonfé-
rence $HLMFG$ par les sommets des 3 angles
de ce triangle ; on trouve que puisque les an-
gles H & L sont [3] égaux entr'eux , les moitez
des arcs FML & FGH , qui en sont [2] la me-
sure , sont aussi [4] égales entr'elles ; & partant les
arcs FML & FGH qui sont doubles de ces
moitez , sont [5] aussi égaux entr'eux. Donc
[6] les côtez FL & FH , qui sont des cordes ou
soutendantes de ces arcs , sont égaux entr'eux.

* Cor. 2. Prop. 13. Geo.

[1] Cor. 2. Prop. 11. Geo.

[2] Prop. 27. Geo.

[3] Supposé.

[4] Cor. 2. Prop. 20. Geo.

[5] Ax. 6. gen.

[6] Part. I. Prop. 11. Geo.

Or ces côtes FL & FH sont opposés aux angles égaux H & L . Donc les angles d'un triangle égaux entr'eux sont opposés à côtes égaux, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Il suit de la Demonstration de la premiere partie de la Proposition presente, qu'un triangle équilatéral a tous ses angles égaux entr'eux, c'est à dire qu'il est équiangle. Car si on suppose une circonférence de cercle menée par les sommets des trois angles d'un triangle équilatéral, les côtes de ce triangle seront soutendantes d'arcs égaux entr'eux, dont les moitez seront * mesures des angles opposés.

COROLLAIRE II.

Il suit encore de la Demonstration de cette premiere partie, qu'un triangle Isoscele, c'est à dire **, qui a deux côtes égaux entr'eux, a les angles opposés à ces côtes égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

Il suit pareillement de la Demonstration de la 2^e partie de la Proposition presente, que lorsque les 3 angles d'un triangle sont égaux entr'eux, c'est à dire, que lorsqu'un triangle est équiangle, il est équilatéral, ou que ce triangle a tous ces côtes égaux entr'eux. Puisqu'ayant [1] décrit une circonférence de cercle par les sommets de ces trois angles, les côtes de ce triangle seront cordes ou soutendantes d'arcs égaux.

* Prop. 27. Geo. ** Déf. 40. Geo.

[1] Cor. 2. Prop. 13. Geo.

COROLLAIRE IV.

Il suit enfin de la Demonstration de la 2^e partie de la Proposition presente, que lorsque seulement deux angles d'un triangle sont égaux entr'eux, ce triangle est Ifoſcele, c'est à dire, * qu'il a les deux côtez oppoſez à ces deux angles, égaux entr'eux.

COROLLAIRE V.

Entre les usages de la proposition presente, j'en proposerai un pour mesurer une distance accessible seulement par une de ses extremités. Mais auparavant, il est necessaire de faire attention à la maniere de determiner une ligne droite sur le terrain.

Pour tracer dans la Campagne une ligne droite du point *B* au point *C*, à chacune des deux extremités *B* & *C*, il faut ficher dans la terre un picquet ou bâton; ensuite il faut se mettre un peu éloigné d'une des extremités de cette ligne, par exemple en *A*, & regarder le bâton planté en *B*, de telle sorte que ce même bâton couvre à la vûe & empêche d'appercevoir le bâton *CD*. Alors on fera planter ou ficher en terre, d'espace en espace, d'autres bâtons *E*, *F* &c. de sorte que regardant le bâton *B* en se tournant vers *CD*, il arrive que ce même bâton *B* couvre à la vûe les autres bâtons *E*, *F* &c. La ligne *BEFC* sera une ligne droite; parceque nous jugeons à la vûe qu'une ligne est droite, lorsqu'en la regardant par un bout selon sa longueur, on n'apperçoit aucun de ses points s'écarter à

* *Déf.* 40. *Geo.*



droit ou à gauche. On peut par ce moyen planter une rangée d'arbres ou d'autres choses en ligne droite. Si le bâton CD étoit difficile à appercevoir, à cause de son éloignement, on peut mettre du papier ou du linge blanc au point D , pour le rendre plus visible, ou bien on se sert de lunettes d'approches.

Soit la largeur d'une rivière, par exemple GI , qu'on souhaite connoître exactement, sans pour cela être obligé de la traverser.

Je suppose que cette largeur est accessible par le point G , & que rien n'empêche les opérations suivantes. Il faut construire un triangle Isoscele rectangle GKL . Après en avoir ajusté le plan sur un bâton fiché en terre, on dirigera le côté GL , selon la ligne donnée GI ; le triangle demeurant en cette situation, on prolongera la longueur du côté GK en ligne droite GM , comme on vient d'enseigner. Au sommet de l'angle droit G , on fichera en terre un bâton GH . Ensuite on transportera le triangle GKL vers M , jusqu'à ce qu'on soit parvenu en $PN O$; de sorte que ce triangle étant soutenu fixement par le bâton Q ,

& son côté NO étant dirigé selon la longueur de la ligne droite GM , en regardant le long du côté OP , on puisse appercevoir le point I . Alors on connoîtra la distance GO qui sera la même que GI ; & lorsqu'on mesurera GO , c'est la même chose que si on mesuroit GI . Parceque dans le triangle Ifofcele PON l'angle PNO étant * droit, l'angle NOP fera [¹] un demi angle droit. Et dans le triangle GOI l'angle IGO est droit, & l'angle GOI étant égal à la moitié d'un droit, on aura [²] GIO aussi égal à un demi droit. Donc [³] $GO = GI$.

• On peut sur le même principe connoître la mesure de la hauteur d'une tour RS , ou d'un arbre sans y monter. Pour cela il faut construire un triangle rectangle Ifofcele TVX , & attacher son côté TV sur un bâton pour le supporter. Au point X il faut attacher un filet, & à son extrémité un plomb. On éloignera ce triangle, ou on l'approchera de la tour RS , jusqu'à ce qu'ayant fiché en terre le bâton qui le supporte, & regardant le long du côté TX , on puisse appercevoir l'extrémité S . Alors sans remuer le triangle TVX , on regardera par le point X le long de ce côté XT , & on marquera le point Y où se termine le rayon visuel XTY : Je dis que la longueur YR est égale à la hauteur RS qu'on cherche. Car la ligne à plomb XZ est perpendiculaire à la ligne horizontale YR qui est sur la surface de la terre. Reciproquement cette ligne YR est [⁴] perpendiculaire à XZ ; mais la ligne TV est * aussi per-

* Par construction.

[¹] Cor. 2. Prop. pres. & Prop. 31. Geo.

[²] Prop. 31. Geo.

[³] Part. 2. Prop. pres.

[⁴] Cor. 1. Prop. 5. Geo.

pendiculaire à XZ . Donc TV & YZ sont * parallèles. Or l'angle XTV est ^[1] égal à la moitié d'un droit & ^[2] l'angle $XTV = STR$. Dans le triangle TRS , l'angle STR sera donc égal à la moitié d'un droit. Donc aussi l'angle TSR sera ^[3] aussi égal à la moitié d'un droit ; car on suppose que l'angle SRT est droit. Donc ^[3] la hauteur RS est égale à la distance TR qu'on peut mesurer facilement.

PROPOSITION XXXV.

- 1°. Deux côtes pris séparément d'un triangle étant égaux aux deux côtes aussi pris séparément d'un autre triangle, si l'angle compris par deux de ces côtes d'un de ces triangles est égal à l'angle compris par deux de ces mêmes côtes de l'autre triangle ; la base de l'un sera égale à la base de l'autre.
- 2°. Deux côtes pris séparément d'un triangle étant égaux aux deux côtes aussi pris séparément d'un autre triangle, si l'angle compris par deux de ces côtes d'un de ces triangles est plus grand que l'angle compris par deux de ces mêmes côtes de l'autre ; le triangle qui aura ce plus grand angle aura une base plus grande que celle de l'autre triangle.

DEMONSTRATION DE LA PREMIÈRE PARTIE.

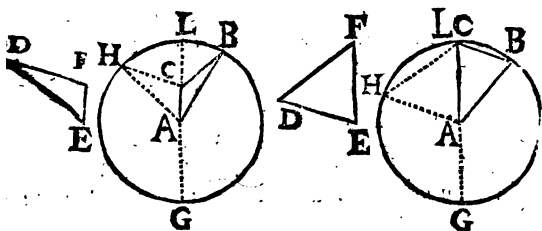
Soient les deux triangles ABC & DEF tels que le côté EF du triangle DEF soit égal

* Part. 2. Prop. 15. Geo.

[1] Prop. 31. Geo. & Cor. 2. Prop. pres.

[2] Part. 1. Prop. 24. Geo. [3] Part. 2. Prop. pres.

sur côté AC du triangle ABC , & que le côté ED soit égal au côté AB , enfin que l'angle DEF soit égal à l'angle CAB : Je dis que le



côté FD opposé à cet angle DEF est égal au côté CB opposé à l'angle CAB . Pour le démontrer, considérons le triangle DEF appliqué en HAC , de sorte que le côté EF soit posé sur le côté AC ; en appliquant le point E sur le point A , le point F tombera sur le point C à cause de l'égalité supposée. Le côté AH sera le même que le côté ED . Du point A comme centre, & de la distance de AH , on décrira une circonférence de cercle HGB , qui passera par l'extrémité B du côté de AB ; car ^[1] $AH = AB$.

Puisque ^[2] l'angle DEF , ou son égal HAC , est égal à l'angle CAB , leurs mesures qui sont ^[3] les arcs HL & BL , seront égales entr'elles. Or ^[4] l'arc $LHG = LBG$. Donc ôtant d'une part l'arc LH , & de l'autre l'arc LB , il restera ^[4] l'arc $HG = BG$; & partant les lignes CH & CB étant menées du point C pris hors le centre A du cercle, à la circonférence, se ter-

[1] *Supposé.*

[2] *Prop. 20. Geo.*

[3] *Cor. 5. Prop. 14. Geo.*

[4] *Ax. 9. gen.*

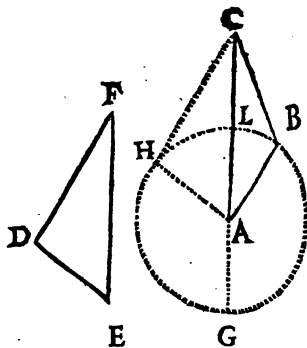
H h ij

mineront aux points H & B également distans du point G où se termine la ligne CG , qui passe par le centre A . Donc [1] $CH = CB$. Dans les triangles DEF & CAB , les côtez HC ou DF & CB oppozés à angles égaux seront donc égaux entr'eux, ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Soit le triangle DEF dont le côté EF est égal au côté AC d'un autre triangle CAB :

& le côté $ED = AB$,
& l'angle DEF est plus grand que l'angle CAB : je dis que le côté FD opposé à ce plus grand angle DEF est plus grand que le côté CB



opposé au plus petit angle. Pour le démontrer soient appliquez ces deux triangles, comme dans la première partie de la Proposition présente, & soit décrite la circonférence $HGBL$.

Puisque [2] l'angle DEF ou $HAC > CAB$, sa mesure [3] LH est plus grande que l'arc LB ,

[1] Cor. 1. Prop. 14. Geo.

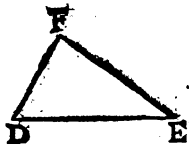
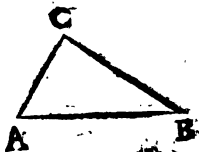
[2] Supposit.

[3] Cor. 2. Prop. 20. Geo.

mesure de l'angle CAB . Or ^[1] l'arc $LHG = LBG$.
 Donc en ôtant d'une part l'arc LH , & ôtant de
 l'autre l'arc LB , il restera ^[2] l'arc $HG < GB$;
 & partant le point C étant pris hors le cercle,
 on aura ^[3] la ligne CH plus grande que CB ;
 c'est à dire, que dans un de ces triangles le côté
 DF qui est opposé au plus grand angle DEF ,
 est plus grand que le côté CB , opposé au plus
 petit angle dans l'autre triangle, ce qu'il falloit
 démontrer.

COROLLAIRE I.

Réciproquement lorsque deux triangles ont
 deux côtés égaux l'un à l'autre, chacun à cha-
 cun, & la base de l'un étant égale à la base de
 l'autre; l'angle opposé à
 la base de l'un, est égal à
 à l'angle opposé à la base
 de l'autre. Soient par e-
 xemple les deux triangles
 ABC & DEF , tels que
 le côté AB soit égal
 au côté DE , & le côté
 $BC = EF$, & enfin la
 base $AC = DF$: je dis
 que l'angle $ABC = DEF$.
 Car si l'angle ABC étoit
 plus grand, ou plus petit
 que l'angle DEF , on au-
 roit ^[4] la base AC plus grande ou plus petite que
 DF , ce qui est contre la supposition présente.
 Donc l'angle $ABC = DEF$.



(1) Cor. 5. Prop. 14. Geo.

(2) Ax. 15. general.

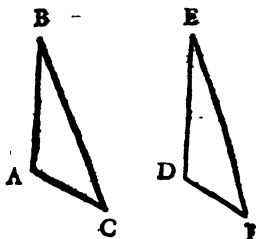
(3) Cor. 4. Prop. 14. Geo.

(4) Prop. pres. Part. 2.

COROLLAIRE I I.

Donc en general deux triangles équilatéraux l'un à l'autre, sont équiangles l'un à l'autre de telle sorte que les angles opposés à côtez égaux, sont égaux entre eux.

Soient les deux triangles ABC & DEF équilatéraux l'un à l'autre, c'est à dire que le côté $AB = DE$, que $BC = EF$, que $AC = DF$: je dis que les angles A & D , par



exemple, qui sont opposés aux côtez égaux BC & EF , sont égaux entr'eux. Car [1] les côtez AB & AC étant égaux aux côtés DE & DF , chacun à chacun, si les angles A & D n'étoient pas égaux, le plus grand de ces angles seroit [2] opposé au plus grand côté. Le côté BC ne seroit donc pas égal au côté EF , ce qui est contre la supposition. On trouvera par le même raisonnement que l'angle $B = E$, & que l'angle $C = F$. Parcequ'on trouve toujours que ces deux triangles ont deux côtez égaux, chacun à chacun, & des bases égales entr'elles. Enfin deux triangles équilatéraux l'un à l'autre sont [3] égaux. Car en les appliquant l'un sur l'autre, de sorte qu'on pose les côtez égaux sur les côtez égaux; ces triangles conviendront en toute

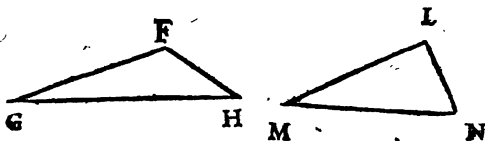
[1] *Supposit.* . [2] *Prop. pref. part. 2.*

[3] *Ax. 1. Geom.*

maniere ; c'est à dire , qu'ils ne s'excederont point l'un l'autre. Parceque autrement les cotez de l'un ne seroient pas égaux aux cotés de l'autre , chacun à chacun , ce qui est contre la supposition.

COROLLAIRE III.

Reciproquement de deux triangles qui ont deux cotez égaux l'un à l'autre , celui qui aura la plus grande base, aura l'angle compris par ces deux cotez plus grand que celui qui aura la plus petite base. Soient par exemple les triangles FGH & LMN tels que le coté $FG=LM$, & le coté $FH=LN$, & que la base GH soit plus grande que la base MN : je dis que l'angle



$GFH > MLN$. Car cet angle GFH ne peut être que plus grand que l'angle MLN , ou égal à cet angle MLN , ou plus petit que ce même angle MLN . Or l'angle GFH ne peut être égal à MLN ; car il faudroit * que la base GH fût égale à la base MN , ce qui est contre la supposition. Pareillement l'angle GFH ne peut être plus petit que l'angle MLN ; car [1] la base GH seroit plus petite que la base MN , ce qui

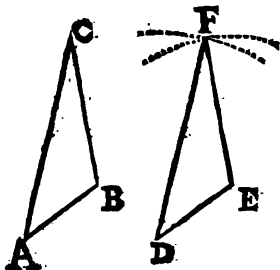
* Part. 1. Prop. prof.

[1] Part. 2. Prop. prof.

est encore contre la supposition. Donc, l'angle $G F H$ qui est opposé à la plus grande base, sera plus grand que l'angle $M L N$, qui est opposé à la plus petite base.

COROLLAIRE IV.

Pour décrire un triangle qui soit équilatéral, équiangle & égal à un autre triangle donné $A B C$. Avec un compas on prendra la ligne $D E$ égale à $A B$. Du point D comme centre, & de l'intervalle $D F$ égale à $A C$, on décrira un arc de cercle. Du point E , & de l'intervalle $E F$ égale à $B C$ on décrira encore un arc de cercle, qui coupe-



ra le premier au point F . Ensuite du point D au point F on mènera $D F$, & du point E au même point F on mènera $E F$: je dis que le triangle $D E F$ sera équilatéral au triangle $A B C$, comme il est évident ^[1]; ce triangle $D E F$ sera ^[2] aussi équiangle au triangle $A B C$; enfin ^[3] ces deux triangles seront égaux entre eux.

On se serviroit de cette methode si on vouloit décrire un triangle qui eût ses cotés égaux à trois lignes données, chacun à chacune; pourvû que

[1] Par construction.

[2] Cor. 2. Prop. pres.

[3] Ax. 1. Geo.

deux de ces lignes prises ensemble à volonté fussent * plus grandes que la troisième. Car autrement les arcs décrits des deux extrémités d'une de ces lignes, & d'ouvertures de compas égales à chacune des deux autres, ne pourroient pas se couper, par exemple, au point F.

C'est ainsi qu'on peut décrire un triangle équilatéral sur une ligne, en décrivant des deux extrémités de la ligne proposée deux arcs d'une ouverture de compas égale à cette ligne; ces deux extrémités seroient les sommets de deux angles, & le point d'intersection de ces deux arcs seroit le sommet du troisième.

On se peut servir de ce Corollaire, pour décrire une figure égale, équilatérale, & équiangle à une autre figure proposée, en divisant en triangles cette figure proposée, & en faisant d'autres triangles dont les côtés seroient égaux aux côtés des triangles de la figure proposée.

* Prop. 1; Geo.



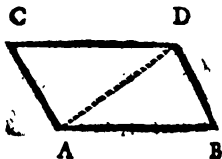
PROPOSITION XXXVI

Les lignes parallèles & égales comprennent par leurs extrémités de même côté, des lignes parallèles & égales.

DEMONSTRATION.

Soient les lignes AB & CD parallèles, & égales entr'elles : Je dis que les lignes AC & BD seront aussi parallèles & égales : pour le démontrer, soit menée la diagonale AD . Les angles alternes internes BAD & ADC sont * égaux entr'eux.

Puisque ^[1] $AB = CD$ & que le côté AD est commun aux deux triangles BAD & ADC , le triangle BAD aura les deux côtés BA & AD égaux aux côtés



CD & DA du triangle ADC , chacun à chacun, & les angles BAD & ADC seront aussi égaux entr'eux. Et partant ^[2] 1° les bases AC & BD seront égales entr'elles. 2° Les angles BDA & DAC opposés aux côtés égaux AB & CD , seront ^[3] aussi égaux entr'eux. Ces lignes AC & BD seront donc ^[4] paral-

* *Part. 1. Prop. 23. Geo.*

^[1] *Supposit.*

^[2] *Part. 1. Prop. 35. Geo.*

^[3] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.*

^[4] *Part. 2. Prop. 23. Geo.*

soles entr'elles. Done les lignes paralleles & égales AB & CD comprennent, par leurs extremités, des lignes AC & BD égales & paralleles, ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

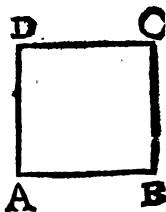
LA démonstration qu'on vient de faire est seulement pour les lignes menées aux extremités A & C , B & D du même côté. Car les lignes menées par les extremités A & D , C & B de ces paralleles, de differens côtés, ne seroient jamais paralleles, parcequ'elles se couperoitent toujours, & ne seroient égales que fort rarement.

COROLLAIRE.

Si on veut construire un quarré sur la ligne AB ; par les deux extremités A & B , il faut mener deux lignes AD & BC perpendiculaires & égales à cette ligne AB , & par leurs extremités D & C . Il faut mener la ligne DC . Alors la figure AC sera le quarré qu'on souhaittois.

Car 1° la ligne AD sera [1] parallele à BC .

2°. La ligne DC sera [2] parallele & égale à AB .



[1] Part. 2. Prop. 15. Geo.

[2] Prop. prof.

La figure AC sera donc [1] un parallélogramme.
 3°. Les angles DAB & ADC étant [2]
 égaux à deux droits, & l'angle A étant [3]
 droit; l'angle D sera droit. On trouvera par
 le même raisonnement que l'angle C est droit;
 enfin l'angle B est aussi [4] droit. Donc AC est
 [4] un carré.

[1] *Def. 49. Geo.*

[2] *Part. 3. Prop. 24. Geo.*

[3] *Def. 14. Geo.*

[4] *Def. 50. Geo.*



PROPOSITION XXXVII.

1. Les cotez oppozes d'un parallelogramme sont egaux entr'eux.
2. Reciproquement un quadrilatre, ou surface quadrilaterale, dont les cotez oppozes sont egaux entr'eux, est un parallelogramme.

DEMONSTRATION

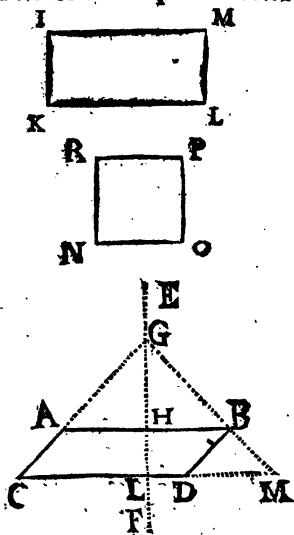
DE LA PREMIERE PARTIE.

SI un parallelogramme est rectangle, par exemple KM , il est constant que les cotez oppozes IK &

LM sont egaux entr'eux. Parce que ce sont perpendiculaires entre paralleles, qui * sont egaux entr'elles. Par le meme raisonnement $KL=IM$.

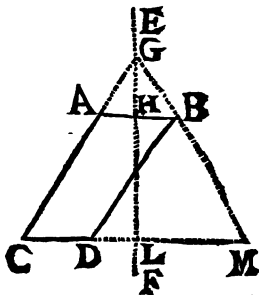
On dira la meme chose du quarré NP .

Si le parallelogramme est obliquangle, par exemple CB : je dis que $CA=CB$, & que $AB=CD$. Pour



* Cor. 4. Prop. 6. Geo.

le démontrer : par le milieu d'un des cotés, par exemple, par le milieu H de AB soit menée FE perpendiculairement à ce côté AB . Ensuite soit prolongé le côté CA , jusqu'à la rencontre G de la perpendiculaire EF , & de ce point G soit menée



par le point B la ligne GM qui rencontrera en M le côté CD prolongé.

Puisque * EF est perpendiculaire au milieu de AB , on aura ^[1] $GA=GB$. Et partant le triangle AGB est ^[2] Isoscele. Donc ^[3] l'angle $GAB=GBA$. Mais puisque * les lignes AB & CM sont paralleles entr'elles, l'angle ^[4] $GAB=GCM$, & $GBA=GMG$. Donc ^[5] le triangle CGM est aussi Isoscele : & partant $CG=MG$. Donc retranchant d'une part GA , & de l'autre BG , il restera ^[6] $AC=BM$. Or ^[4] l'angle $BDM=GCM$, on vient aussi de dire que l'angle $GMG=GCM$. Donc ^[7] l'angle $BDM=BMD$, & partant ^[5] $DB=BM$. Mais on vient aussi de faire voir que $AC=BM$. Donc ^[7] le côté $AC=BD$; donc les lignes AC & BD étant paralleles & égales, compren-

* *Supposé.*

^[1] *Prop. 3. Geo.*

^[2] *Déf. 40. Geo.*

^[3] *Cor. 2. Prop. 34. Geo.*

^[4] *Part. 1. Prop. 24. Geo.* ^[5] *Cor. 4. Prop. 34. Geo.*

^[6] *Ax. 9. gen.*

^[7] *Ax. 18. gen.*

dront

Soient par leurs extrémités les lignes égales AB & CD , &c. partant en general les côtes oppozés d'un parallelogramme, par exemple de CB , sont égaux entr'eux, ce qu'il falloit demonstret.

D E M O N S T R A T I O N

DE LA SECONDE PARTIE.

Soit le quadrilatre DG dont les cotés DH & FG , DF & HG sont égaux entr'eux : je dis que ce quadrilatre est un parallelogramme. Pour le demonstret soit mené la diagonale FH . Les triangles DFH &

GFH sont équilatéraux l'un à l'autre.

Car le côté FH est commun à tous les deux, & *

$DH = FG$, DF

$= HG$. Donc [1]

les angles oppozés à cotés égaux sont égaux entr'eux, c'est à dite que $DFH = FHG$; &

$DHF = HFG$. Donc [2] DF & HG sont

paralleles entr'elles; pareillement DH & FG

sont aussi paralleles entr'elles. Donc enfin la

surface $DFGH$ est [3] un parallelogramme, ce

qu'il falloit demonstret.



C O R O L L A I R E I.

Un carré est un parallelogramme dont les

* Supposé.

[1] Cor. 2. Prop. 35. Geo.

[2] Part. 2. Prop. 23. Geo.

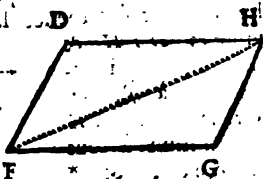
[3] Déf. 49. Geo.

quatre cotés sont égaux en-
t'eux. Soit le carré $N.P.$; je
dis que $NO = OP = PR =$
 $R.N.$ Car * $NO = OP$; &
[¹ $NR = OP$, enfin PR
 $= NO.$



COROLLAIRE II.

Il suit de la Proposition présente qu'une dia-
gonale d'un paral-
lelogramme, par
exemple la diago-
nale FH du paral-
lelogramme $D.G.$,
divise ce parallelo-
gramme en deux
parties égales, c'est



à dire que le trian-
gle DHF est égal au triangle FHG . Car [¹] le
coté $DH = FG$; $DF = HG$, & FH est un
coté commun aux deux triangles DHF &
 FHG . Donc ces deux triangles seront équilate-
raux l'un à l'autre. Donc [²] ils seront égaux en-
t'eux.

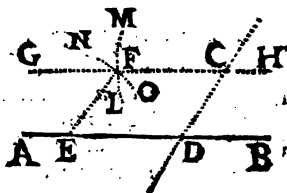
COROLLAIRE III.

La seconde partie de la Proposition présente
est le fondement d'une méthode dont on se
sert pour mener par un point donné une ligne
parallèle à une ligne donnée. Soit par exem-
ple la ligne donnée AB , & le point C par

* *Déf. 50. Geo.*[²] *Ax. 1. Geo.*[¹] *Part. I. Prop. 16.*

lequel il faille mener une ligne parallèle à cette ligne AB . Il faut mener à volonté par ce point C une ligne CD .

qui coupe la ligne donnée AB au point D . Ensuite on ouvre un compas du point D , de part ou d'autre, par exemple en E , & de cette



ouverture DE on décrit du point C l'arc LFM . De l'ouverture DC on décrit du point E l'arc NFO qui coupe le précédent au point F ; par ce point F & par le point C on mene la ligne GH : je dis que cette ligne GH est la ligne parallèle cherchée. Car dans le quadrilatere EC les cotez opposés sont * égaux entr'eux. Donc [1] ce quadrilatere est un parallelogramme; & partant [2] les cotez opposés sont paralleles. Donc FC ou GH est parallèle à AB .

* Par construction.

[1] Part. 2. Prop. pref.

[2] Déf. Geo.

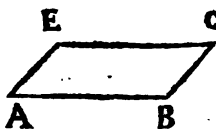


PROPOSITION XXXVIII.

1. Les angles opposés d'un parallélogramme sont égaux entr'eux.
2. Les 4 angles d'un quadrilatere, pris ensemble, sont égaux à 4 droits.
3. Enfin la somme des angles opposés d'un quadrilatere inscrit dans un cercle valent deux angles droits.

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le parallélogramme BE : je dis que l'angle $A = C$, que $B = E$. Car les angles B & C pris ensemble sont ^[1] égaux à deux droits ; pareillement les angles E & C pris ensemble sont égaux à la même grandeur, qui est deux angles droits. Donc ^[2] la somme des angles $B + C = E + C$. Donc en otant de part & d'autre l'angle C , il restera ^[3] l'angle $B = E$. Par un raisonnement semblable on trouvera que $A + B = C + E$; & partant que $A = C$. Or A & C ; B & E sont des angles opposés de parallélogramme. Donc les angles opposés d'un parallélogramme sont égaux entr'eux, ce qu'il falloit démontrer.



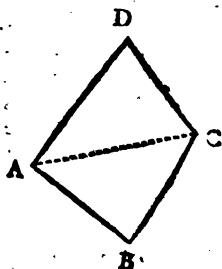
^[1] Part. 3. Prop. 24. Geo.

^[2] Ax. 18. gener.

^[3] Ax. 9. general.

D E M O N S T R A T I O N
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit par exemple le quadrilatere $ABCD$; il faut mener aux sommets de deux angles opposez A & C la ligne AC . Il est constant [1] que la somme des 3 angles du triangle ADC est égale à deux droits ; pareillement que la somme des angles du triangle ABC est aussi égale à deux angles



droits. Or la somme des angles du quadrilatere $ABCD$ est la même que la somme de ceux des deux triangles ADC & ABC . Donc la somme des angles du quadrilatere $ABCD$ est égale à 4 angles droits, ce qu'il falloit démontrer.

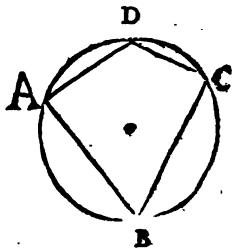
D E M O N S T R A T I O N
DE LA TROISIEME PARTIE.

La somme de deux angles opposez , par exemple A & C ; B & D d'un quadrilatere $ABCD$ inscrit dans un cercle est égale à deux angles droits. Car ces deux angles A & C , pris ensemble , ont [2] pour mesure la moitié d'une circonference de cercle, c'est à dire [3] , la moitié de ses deux parties BCD & BAD . Les deux

[1] Prop. 31. Geo. [2] Prop. 27. Geo.

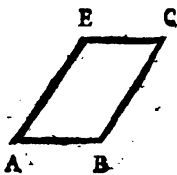
[3] Ax. 3. gener.

angles B & D ont * pareillement pour mesure la moitié des arcs ADC & ABC sur lesquels ils sont appuyez, ce qui est [¹] la même chose que la moitié de toute la circonférence $ABCD$, laquelle moitié est [²] la mesure de deux angles droits. Donc la somme des angles oppozés du quadrilatere $ABCD$ inscrit dans le cercle est égale à deux droits, ce qu'il falloit démontrer.



COROLLAIRE F.

La converse de la première partie de la Proposition présente est telle : un quadrilatere dont les angles oppozés sont égaux entr'eux, est un parallelogramme. Soit le quadrilatere AC dont les angles oppozés A & C sont égaux entr'eux, & dont les angles E & B sont aussi égaux entr'eux : je dis que les cotez EC & AB sont paralleles entr'eux ; de même des cotez AE & BC . Car si à l'angle A on ajoute l'angle E , & si à l'angle C d'une autre part on ajoute l'angle B , on aura [³] $A + E = C + B$. Or ces angles



* Prop. 27. Geo. [¹] Ax. 3. Geo.

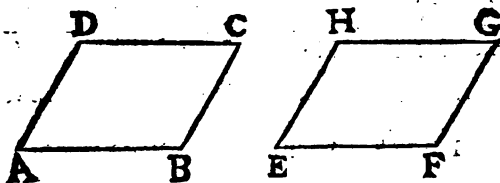
[²] Cor. 1. Prop. 20. Geo.

[³] Ax. 4. gen.

$A + E + C + B$ sont ^[1] égaux à quatre droits. Donc les angles $A + E$ seront égaux à deux droits. Donc ^[2] les lignes EC & AB sont paralleles entr'elles. De même si on ajoute l'angle B à l'angle A , & l'angle E à l'angle C , on aura $A + B = C + E$. Et enfin on trouvera que les angles $A + B$ seront égaux à deux droits. Donc les lignes AE & BC seront aussi paralleles.

C O R O L L A I R E II.

Si un parallelogramme, par exemple AC , à deux de ses côtez AD & AB qui comprennent un angle, égaux aux deux côtez HE & EF d'un autre parallelogramme EG ; & si l'angle DAB compris par les deux côtez de l'un



est égal à l'angle HEF compris par les deux côtez de l'autre: un de ces parallelogrammes AC sera égal à l'autre EG , en toutes manieres. Car 1^o les côtez DC & CB étant ^[3] égaux aux côtez AB & AD , ces mêmes côtez DC & CB seront aussi égaux aux côtez EF & EH , & enfin ^[3] aux côtez GH & GF , chacun à chacun. 2^o Les angles A & B sont égaux ^[4] à deux droits: Pareillement E & F sont ^[4] égaux à la même

^[1] 2^e Part. de la Prop. pres. ^[2] Part. 3. Prop. 25. Geo.
^[3] Part. 1. Prop. 37. Geo. ^[4] Part. 3. Prop. 24. Geo.

grandeur qui est deux droits. Donc * $A + B = E + F$. Mais [1] $A = E$. Donc retranchant d'une part A , & de l'autre E , il restera [2] l'angle $B = F$. Or [3] l'angle $C = A$, & $G = E$. Donc * l'angle $C = G$. Pareillement [3] $D = B$, & $H = F$. Donc * l'angle $D = H$. 3° Enfin les côtes d'une de ces surfaces étant égaux aux côtes de l'autre, chacun à chacun, de même des angles, une de ces surfaces sera [4] égale à l'autre.

COROLLAIRE III.

Lorsque la somme des angles oppoſez d'un quadrilatere n'est point égale à deux angles droits, ce quadrilatere ne peut être inscrit dans un cercle. Car si ce quadrilatere pouvoit être inscrit dans un cercle, ces angles oppoſez ſeroient [5] égaux à deux angles droits, ce qui est contre la ſuppoſition.

PROPOSITION XXXIX.

Les parallelogrammes poſez ſur la même baſe & entre les mêmes lignes paralleles ſont égaux entr'eux.

DEMONSTRATION.

Soient les parallelogrammes AD & ED poſez ſur la même baſe CD , & entre les

* Ax. 18. gen.

[1] Suppoſit.

[2] Ax. 9. gen.

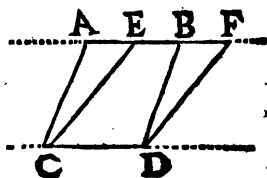
[3] Part. I. Prop. pref.

[4] Ax. 1. Geo.

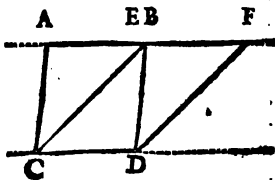
[5] Part. 3. Prop. pref.

mêmes parallèles AF & CD : je dis que la surface du parallélogramme $ACDB$ est égale à la surface du parallélogramme $ECDF$.

Car les triangles ACE & BDF ont * les angles CAE & DBF égaux entr'eux, & ont pareillement les angles AEC & BFD aussi égaux entr'eux. Donc l'angle ACE sera



[¹] égal à l'angle BDF . Or [²] le côté $AC = BD$, parceque ce sont côtez oppozés de parallélogrammes, de même le côté $CE = DF$. Dans le triangle AEC on a donc les côtez AC & CE égaux aux côtez DB & DF , & l'angle ACE égal à l'angle BDF . Donc les bases AE & BF seront [³] égales entr'elles, & les triangles ACE & BDF seront [⁴] aussi égaux entr'eux.



Mais les parallélogrammes AD & CF peuvent être posez sur la même base CD en 3 manieres.

1^o Le point E ou F se peut rencontrer entre les points A & B : alors on ajoutera au trian-

* Part. 1. Prop. 24. Geo. [¹] Cor. 4. Prop. 31. Geo.

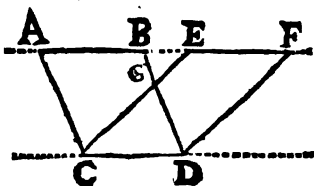
[²] Part. 1. Prop. 37. Geo. [³] Part. 1. Prop. 35. Geo.

[⁴] Ax. 1. Geo.

gle ACE la surface $CDBE$; & au triangle BDF on ajoutera la même surface $CDBE$; on * aura $CAE + CDBE = BDF + CDBE$, c'est à dire, le parallelogramme AD sera égal à ED .

2° Le point E se peut rencontrer sur le point B , ou F sur A : alors au triangle ACE on ajoutera le triangle CBD ; & au triangle BDF on ajoutera le même triangle CBD , & * on aura $ACB + CBD = BDF + CBD$, c'est à dire, le parallelogramme $AD = CF$.

3° Enfin les points E & F se peuvent rencontrer entièrement hors la ligne



AB , de sorte que CE coupera BD en G . Alors du triangle ACE & du triangle BDF on retranchera le triangle BGE qui leur est commun, & il restera [1] la surface $ACGB = EGDF$. Et en ajoutant de part & d'autre le triangle CGD , on aura * $ACGB + CGD = EGDF + CGD$, c'est à dire, le parallelogramme $AD = CF$, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Les parallelogrammes posez sur des bases égales & entre les mêmes lignes paralleles ou

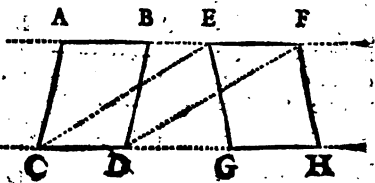
* *Ax. 4. general.*

[1] *Ax. 9. general.*

de même hauteur font aussi égaux entr'eux.

Soient les bases CD & GH des parallelogrammes

CB & GF de même hauteur, égales entr'elles :



je dis que le parallelogramme $CB = GE$. Pour le démontrer soient menées les lignes CE & DF , la surface CF sera un parallelogramme. Car, puisque ^[1] $EF = GH$, & que ^[2] $CD = GH$, on aura $CD = EF$; ces deux lignes CD & EF , étant égales & parallèles, comprendront ^[3] par leurs extrémités les lignes CE & DF parallèles & égales. Or ^[4] le parallelogramme $CB = CF$, & $GF = CF$. Donc ^[5] $CB = GF$.

COROLLAIRE II.

Les surfaces des parallelogrammes de même circuit, dont les angles sont droits, ou approchent le plus des angles droits, sont plus grandes que les surfaces des autres parallelogrammes dont les angles approchent moins des angles droits. Soit le parallelogramme AH .

* Cor. 4. Prop. 6. Geo.

[1] Part. 1. Prop. 37. Geo.

[2] Supposit.

[3] Prop. 36. Geo.

[4] Prop. pref.

[5] Ax. 18. general.

rectangle, & DH obliquangle, & soient ces deux parallelogrammes équi-

lateraux entre eux, c'est à dire;

* que $GA = GD$; $HB = HF$,

on a [1] $AB = GH$, &

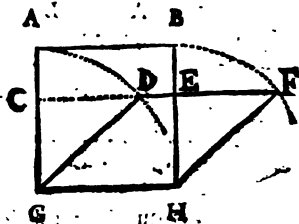
$DF = GH$, & [2] enfin AB

$= DF$; le côté GH est commun: je dis que

le parallelogramme $AH > GF$. Car [3] le parallelogramme $DH = CH$; mais $CH < AH$,

& AH est rectangle, & DH obliquangle; l'un & l'autre d'égal circuit. Donc les parallelogrammes rectangles sont plus grands que les obliquangles quoique équilatéraux entr'eux. On dira la même chose des triangles.

C'est pour cela que j'ay déjà remarqué ailleurs [4] que pour avoir en pieds quarrés, ou en toises quarrées, &c. la surface d'un parallelogramme dont les angles sont obliques, il ne falloit pas multiplier l'un par l'autre les côtés qui comprennent un de ces angles. Parcequ'en faisant cette multiplication on trouve seulement pour produit le nombre des parallelogrammes obliques qui composent le parallelogramme total & qui lui sont équiangles; mais on ne trouve pas le nombre des parallelogrammes d'une toise quarrée ou d'un pied quarré, &c. que le parallelogramme contient. Et quand on veut connoi-



* *Supposit.*

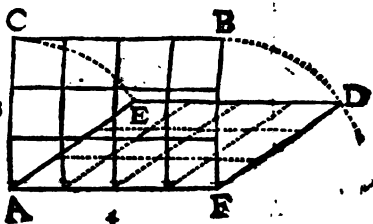
[1] *Part. I. Prop. 37. Geo.*

[2] *Ax. 18. gener.* [3] *Prop. pres.*

[4] *fin du Cor. 2. déf. 53. page 212. Geo.*

tre une surface sur le terrain ou ailleurs, l'usage est de chercher des toises quarrées, perches quarrées, &c. Par exemple si on multiplie l'un par l'autre les côtez AC & AF du parallelogramme rectangle

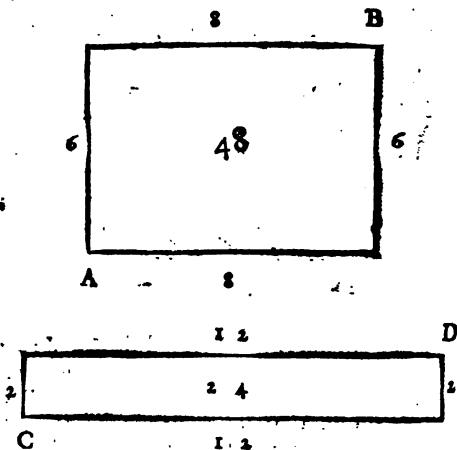
AB , & si le côté AC est de 3 toises, & le côté AF de 4 toises, on aura 12 toises quarrées pour la surface du



parallelogramme AB . Si le côté AE du parallelogramme obliquangle AD est aussi de 3 toises, en multipliant ce côté AE par AF de 4 toises, on aura 12 toises obliquangles, c'est à dire 12 petits parallelogrammes obliques qui sont la valeur du parallelogramme tout AD , mais qui n'expriment point la valeur des toises quarrées qu'on cherche. Car on vient de faire voir qu'un rhombe dont chaque côté est d'une toise de longueur, est plus petit qu'une toise quarrée.

Au lieu qu'on vient d'examiner les surfaces de deux parallelogrammes de même circuit, lorsque les côtez de l'un sont égaux aux côtez de l'autre, & que chaque angle de l'un differe de chaque angle de l'autre, si on examine presentement les surfaces de deux de ces parallelogrammes, lorsque les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun, & que chaque côté de l'un differe de chaque côté de l'autre; On trouvera encore que les parallelogrammes de même circuit qui ap-

Prochent le plus du carré, seront plus grands que les autres qui en approchent moins.



Soit par exemple le parallélogramme rectangle AB , dont un côté est de 8 toises, & l'autre de 6 ; soit un autre parallélogramme rectangle CD dont un côté soit de 2 toises & l'autre de 12 : on trouve * que la surface du parallélogramme AB est de 48 toises quarrées, & que la surface du parallélogramme CD est seulement de 24 toises, quoique chacun soit de 28 toises linéaires de circuit.

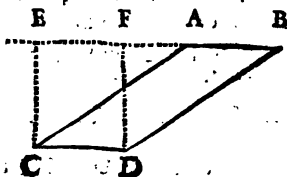
Enfin de ce Corollaire on conclura que les quarrés sont les surfaces planes les plus grandes de toutes celles qui ont le même circuit.

COROLLAIRE III.

La surface d'un parallélogramme obliquangle

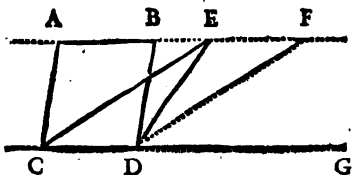
* Cor. 2. déf. 53. Geo.

est égale au produit de la base multipliée par la hauteur. Soit par exemple le parallélogramme oblique CB , lorsqu'on multiplie la base CD par la hauteur CE ou DF , on a* pour produit le parallélogramme CF . Or [1] le parallélogramme CF est égal au parallélogramme CB . Donc en multipliant la base CD par la hauteur du parallélogramme CB , on aura pour produit la valeur de ce même parallélogramme CB .



COROLLAIRE IV.

Les parallélogrammes sont doubles des triangles de même base & de même hauteur. Soient le parallélogramme CB , par exemple, & le triangle



CDE , posez sur la même base CD & entre les mêmes lignes parallèles AF & CG : je dis que ce parallélogramme CB est double du triangle CDE . Pour le démontrer, soit menée par le point D la ligne DF parallèle à la ligne CE , on aura [1] le parallélogramme $CF=CB$.

* Cor. 2. déf. 53. Geo.

[1] Prop. pres.

Or * le triangle CDE est la moitié du parallélogramme CF , ou de son égal CB . Donc ce parallélogramme CB sera double de GDE , puisqu'un tout est double d'une de ses moitiés.

PROPOSITION XL.

1°. Les triangles posés sur la même base ou sur des bases égales, & entre les mêmes lignes parallèles, sont égaux entr'eux.

2°. Réciproquement les triangles qui sont sur la même base, ou sur des bases égales, en ligne droite, du même côté, & qui sont égaux entre eux, sont entre les mêmes lignes parallèles.

3°. Réciproquement enfin les triangles qui sont entre les mêmes parallèles & égaux entr'eux, sont sur la même base, ou sur des bases égales.

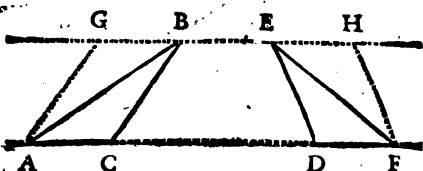
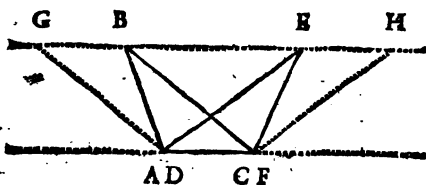
D E M O N S T R A T I O N

DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Soient les triangles ABC & DEF sur la même base AC , ou sur les bases égales AC & DF , & entre les mêmes parallèles AF & GH : je dis que le triangle ABC est égal au triangle DFE . Pour le démontrer, soit menée par le point A du triangle ABC une ligne parallèle à CB ; puisque GB est [1] parallèle à AC , on aura le parallélogramme CG : la même chose seroit arrivée, si par le point C on avoit mené une

* Cor. 2. Prop. 37. Geo.

[1] Supposé.



ligne parallele à AB . Soit encore menée par le point F la ligne FH parallelement au côté DE . Le parallelogramme DH fera * égal au parallelogramme GC , puisque la base $AC = DF$, & que ces deux parallelogrammes sont entre les mêmes lignes paralleles. Or puisque $CG = DH$, on aura ^[1] le triangle $ABC = DEF$, ce qu'il falloit demontrer.

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

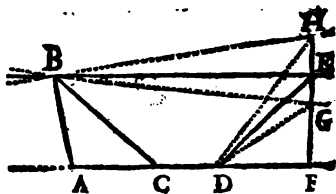
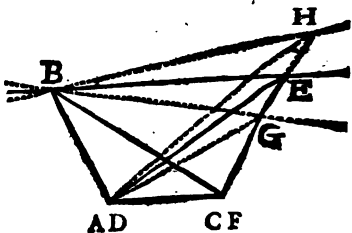
Soient les deux triangles ABC & DEF égaux ent'eux, posez sur la même base AC , ou sur des bases égales AC & DF , en ligne droite & du même côté : je dis que ces deux triangles

* Prop. 39. & Cor. I. Prop. 39. Geo.

[1] Ax. 12. general.

sont entre les mêmes lignes parallèles, c'est à dire, que la ligne BE menée par les sommets B & E sera parallèle à la ligne AF . Car dans la supposition présente, il est impossible qu'on mène par

le sommet B une autre ligne que BE qui soit parallèle à AF . Si BE n'étoit pas parallèle à AF , on en pourroit mener* une par ce point B , qui passeroit de part ou d'autre du point E , savoir BH



ou BG . Si c'étoit par exemple BH qui fût parallèle à AF , on auroit [1] le triangle $DHF = ABC$; mais [2] $DEF = ABC$. Donc le triangle DHF seroit [3] égal à DEF , c'est à dire, la partie seroit égale au tout, ce qui est [4] impossible. Par la même raison BG ne peut être parallèle à AF . C'est donc la seule ligne BE qui est parallèle à AF , ce qu'il falloit démontrer.

* Cor. Prop. 23. Gen.

[1] Part. 1. Prop. 17.

[2] Suppos.

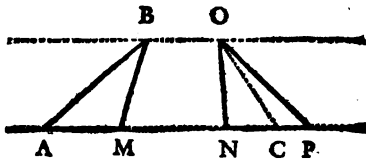
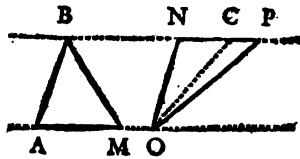
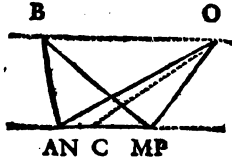
[3] Ax. 18. gen.

[4] Ax. 2. gen.

DEMONSTRATION
DE LA TROISIEME PARTIE.

Soit le triangle $ABM = NOP$, & que l'un

& l'autre soit entre les mêmes lignes parallèles; je dis que les bases AM & NP sont la même, ou sont égales entre elles. Car si l'une de ces deux bases n'étoit pas égale à l'autre, & que NP , par exemple, fût



plus grande que AM , retranchant son excès CP , on auroit la base NC du triangle NOC égale à AM base du triangle ABM . Le * triangle NOC seroit donc égal à ABM ; mais $[^1] NOP = ABM$. Donc le tout $[^2] NOP$ seroit $[^3]$ égal à sa partie NOC , ce qui est $[^3]$ impossible. Donc

* Part. I. Prop. pres.
[²] Ax. 18. gen.

[¹] Supposit.
[³] Ax. 2. gen.
K k iiij

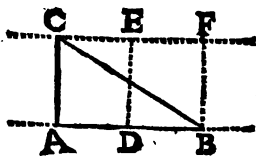
la base AM sera égale à NP , ce qu'il falloit démontrer.

Ce qui a été démontré dans la 2^e & 3^e partie de la Proposition présente à l'égard des triangles, peut être démontré de la même manière à l'égard des parallelogrammes. J'ai crû qu'il suffiroit de faire ces différentes démonstrations seulement à l'égard des triangles. Car, lorsque des parallelogrammes posés sur la même base, du même côté, sont égaux entr'eux; après avoir mené des diagonales, on y trouve aussi des triangles qui en sont les moitiés, qui sont égaux entr'eux, posés sur la même base; & partant entre les mêmes lignes paralleles. Il est évident* que les moitiés des parallelogrammes ne peuvent être entre les mêmes lignes paralleles sans que ces parallelogrammes soient aussi entre ces mêmes lignes paralleles.

C O R O L L A I R E I.

La surface d'un triangle est égale à la moitié du produit de sa base multipliée par sa hauteur, ou (ce qui est la même chose) au produit de la moitié de la base multipliée par sa hauteur; ou enfin au produit de la base multipliée par la moitié de la hauteur.

Soit le triangle rectangle ABC . Si on multiplie l'un par l'autre les côtés qui comprennent l'angle droit, c'est à dire, si on multiplie



la base AB par la hauteur AC , on a pour pro-

* Cor. I. Prop. 15. Geo.

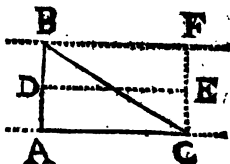
duit le parallelogramme rectangle AF ; & en prenant la moitié de ce produit, on aura la surface du triangle ACB , qui est * la moitié de AF .

Si on multiplie le côté AC par AD moitié du côté AB , on a le parallelogramme rectangle AE

qui est la moitié du parallelogramme AF ; puisque [1] $AE = DF$.

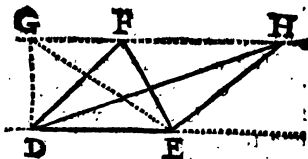
Mais le triangle ABC est [2] égal à la moitié du parallelogramme AE .

Donc le triangle ABC est égal au produit de sa hauteur multipliée par la moitié de sa base, ou au produit de sa base multipliée par la moitié de sa hauteur.



On dira la même chose des triangles obliquangles, c'est à dire, oxigones ou obtusangles.

Par exemple le triangle DEF ou DEH est égal à un triangle rectangle DEG de même base



& de même hauteur; & partant ce qu'on vient de dire du triangle rectangle DEG convient aussi aux triangles obliquangles DEF , DEH , &c.

COROLLAIRE I I.

Il est donc facile de connoître combien de

* Cor. 2. Prop. 37. Geo. (1) Cor. 1. Prop. 39. Geo.

[2] Cor. 4. Prop. 39. Geo.

toises quarrées, ou combien de perches, &c. contiendra une surface plane rectiligné proposée, pourvû qu'on la puisse parcourir à volonté. Car il suffira de reduire cette surface en triangles rectangles, ou en parallelogrammes rectangles, & de connoître la surface de chaque triangle, ou de chaque parallelogramme rectangle. La somme de toutes ces surfaces particulieres sera * la valeur de la surface totale proposée. Mais auparavant que de voir un exemple de cette pratique, il est necessaire de faire attention 1^o aux espèces de mesures les plus en usage; 2^o aux manieres de mesurer une longueur ou distance sur le terrain; 3^o par un point donné dans une ligne droite, ou hors de cette ligne comment on lui même une autre ligne perpendiculaire dans une plaine ou campagne.

1^o Il faut remarquer qu'il y a des toises lineaires, toises quarrées, & toises cubes; de même des pieds, des pouces, & des autres mesures.

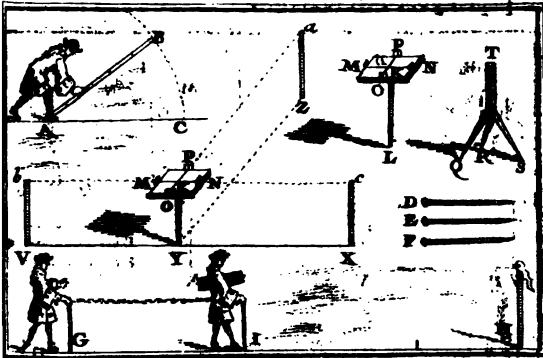
Une perche lineaire contient 18 pieds, 10 pieds, ou 22, même 24 pieds de longueur, selon le país où on veut mesurer ou arpenter; une toise lineaire contient 6 pieds; un pied lineaire contient 12 pouces; un pouce contient 12 lignes.

Une toise quarrée contient 36 pieds; un pied quarré contient 144 pouces. On connoitra de la même maniere les autres mesures, en quarant leur longueur. La toise cube contient 216 pieds cubes, &c. Il est encore facile de connoître le cube des autres mesures.

2^o On mesure la longueur d'une ligne droite sur la terre avec une perche, ou une toise de bois. Et alors un homme seul peut appliquer cette per-

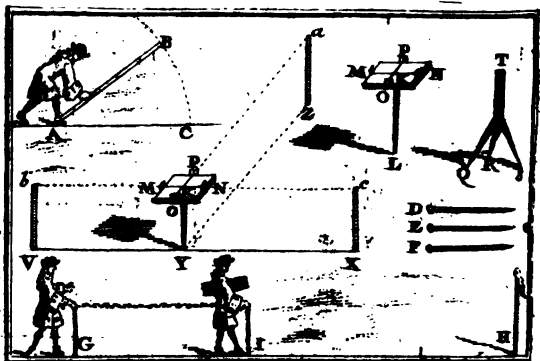
* Ax. 3. gen.

che en partie, ou entierement ; une ou plusieurs fois successivement sur la ligne qu'il veut mesurer. Cet homme commence à appliquer un bout *A* de sa perche au bout de la ligne, en mettant un de ses pieds au point *A* pour empêcher cette perche de glisser ; enfin il l'a couchée successivement en abaissant le point *B* en *C*, & élevant ensuite le point *A*, il compte combien il l'a couchée de fois.



On mesure aussi une distance sur la terre avec une perche, une chaîne, ou une corde qui ne s'allonge ou ne raccourcit aucunement ; on se sert de picquets *D*, *E*, *F*, &c. Alors il faut deux personnes, qui s'aideront l'un l'autre. Soit la distance du point *G* au point *H* ; si on se propose de la mesurer ; le premier mesureur se mettra à l'extrémité *G*, & l'autre mesureur en *I*, qui sera averti par la personne qui est en *G* de se détourner de part ou d'autre jusqu'à ce qu'il fiche son picquet en ligne droite de *G* en *H*. Après que le mesureur *I* a fiché son picquet en *I*, il marche vers *H* jusqu'à ce que le mesureur *G*

soit parvenu en *I* ; & alors le mesureur *G* prend le picquet qui étoit en *I* , & ils continuent ainsi jusqu'en *H* . Etant parvenus en *H* , le mesureur *G* compte combien il y a de picquets . Enfin si la dernière perche ne se termine pas en *H* exactement , le mesureur *G* compte encore combien il y a de pieds & de pouces depuis le dernier picquet jusqu'au point *H* , & écrit le tout sur un papier pour s'en souvenir .



3° Par un point donné dans une ligne droite ou hors d'une ligne droite donnée dans la campagne pour mener une ligne perpendiculaire à cette ligne donnée , on se sert d'un bâton *KL* , ou d'un support à 3 pieds *QRST* , & à l'extrémité *K* ou *T* il y a 4 pinnules , ou points *M* , *N* , *O* , *P* immobiles , placés chacune à chaque extrémité des lignes *MN* & *OP* menées perpendiculairement l'une à l'autre sur une planche . Lorsqu'on ne peut ficher en terre l'extrémité du bâton *KL* , on se sert du support à 3 pieds *QRST* .
2° Soit le point *F* donné dans la ligne *VX* , ayant placé le bâton *KL* sur la ligne donnée *VX* au point

point Y , & ayant dirigé les pinnules MN vers les picquets cX & bV ; en regardant ensuite par les deux autres pinnules O, P ; si on ordonne de ficher un picquet en aZ , de sorte qu'il se trouve exactement en ligne droite avec ces pinnules O, P , on aura la perpendiculaire YZ cherchée. 2^o Si le point Z est pris hors la ligne VX , on transportera le bâton KL , ou le support $QRST$ sur la ligne VX , de V vers X , ou de X vers V , de sorte que les pinnules M & N soient l'une & l'autre dirigées vers c & vers b , & on continuera de transporter ce bâton jusqu'à ce qu'en regardant par les pinnules traversantes O & P , on apperçoive le signe ou picquet fiché au point donné Z . Le bâton se trouvant alors placé dans le point Y , ce sera par où passera la perpendiculaire menée du point donné Z à la ligne donnée VX . Parceque le parallélogramme YA est perpendiculaire au plan Vc ; car l'angle droit cKa est * le même que celui de ces plans. Donc la ligne YZ qui est [1] parallèle à OA , est aussi perpendiculaire au plan Vc . Donc [2] la ligne YZ est perpendiculaire à VX .

Soit une surface plane sur le terrain qu'on souhaite mesurer ou arpenter; on examinera si cette surface, lorsqu'il n'y a que quatre angles est un parallélogramme rectangle, ce qui est facile à connoître, en appliquant à chacun des angles de cette surface le bâton KL avec ses pinnules M, N, O, P . Si cette surface est un parallélogramme rectangle, il est facile [3] de connoître le nombre des perches, ou toises, &c.

* Déf. 18. Geo.

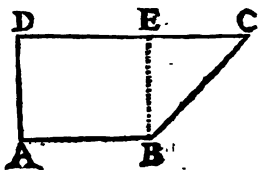
[1] Prop. 36. Geo.

[2] Déf. 20. Geo.

[3] Cor. 2. Déf. 53. Geo.

qu'on cherche. S'il n'y a que deux angles droits, comme il arrive dans la surface $ABCD$, dont

les angles A & D sont droits, on mènera du point B la perpendiculaire BE , & on aura le parallélogramme rectangle AE , & le triangle rectangle BEC . Après avoir



mesuré les côtes du rectangle AE , on mesurera ensuite les côtes BE & EC du triangle rectangle BEC . On connoitra * ensuite la surface du rectangle, [1] celle du triangle rectangle BEC , & [2] enfin on connoitra la surface entière $ABCD$.

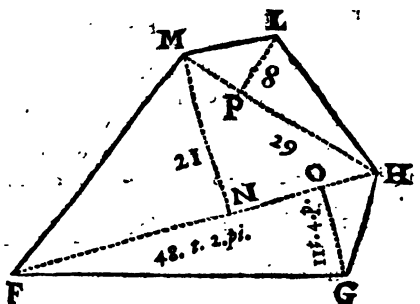
Soit une autre surface, par exemple $FGHLM$, dont aucun des angles n'est droit. On divisera cette surface en triangles, en menant du sommet d'un de ses angles, par exemple du point H , des lignes aux sommets de chacun des autres angles. Ensuite du point G on mènera la ligne GO perpendiculaire à FH . Du point M on mènera la ligne MN perpendiculaire à la même ligne FH . Enfin du point L on mènera la ligne LP perpendiculaire à MH ; si quelqu'un de ces angles, par exemple MLH , avoit été droit, on n'auroit pas eu besoin d'autre perpendiculaire que LH .

On mesurera chacune de ces perpendiculaires, sçavoir LP que je suppose par exemple de 8 toises, & la base MH que je suppose de 29 toises,

* Cor. 2. déf. 13. Geo, [1] Cor. 1. Prop. 40. Geo,

[2] Ax. 3. gen.

On mesurera la base FH que je suppose être de 48 toises 2 pieds, & la perpendiculaire MN de 21 toises; enfin la perpendiculaire GO , que je suppose de 11 toises 4 pieds.



Pour connoître combien le triangle MLH contient de toises, il faut multiplier la base $MH = 29$ toises par 4 toises qui sont la moitié de la perpendiculaire LP , le produit qui est 116 toises est * la surface du triangle MLH .

Pour connoître la surface du triangle FMH , on multipliera la base $FH = 48$ toises 2 pieds par la perpendiculaire MN qui est de 21 toises; le produit de 21 fois 2 pieds sera 42 pieds = 7 toises, & le produit de 21 multiplié par 48 sera 1008 toises: de sorte que le produit total de 21 toises multipliées par 48 toises 2 pieds, sera 1015 toises quarrées, dont la moitié 507 toises & demie est la surface du triangle FMH .

Enfin pour connoître la surface du triangle FGH , on prendra la moitié du produit de la base $FH = 48$ toises 2 pieds multipliées par la

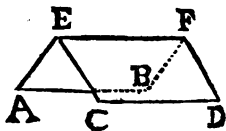
* Cor. 1. Prop. 40. Geo.

perpendiculaire $GO = 11$ toises 4 pieds. Pour faire cette multiplication, on réduira les 48 toises en pieds, & on ajoutera les 2 pieds, cela fera 290 pieds (s'il y avoit eu des pouces, on auroit réduit le tout en pouces.) On réduira pareillement les 11 toises en pieds, on y ajoutera les 4 pieds, & on aura 70 pieds qui étant multipliés par les 290, cela fera 20300 pieds quarrés, dont la moitié est 10150 pour la surface du triangle FGH ; mais puisqu'il y a 36 pieds quarrés dans une toise quarrée, en divisant 10150 pieds quarrés par 36, on aura 281 toises quarrées avec $\frac{3}{4}$ de toise quarrée, & 7 pieds quarrés

pour la surface du triangle FGH .

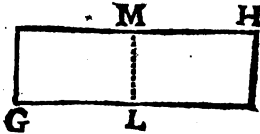
On fera une addition de 116 toises, surface du triangle MLH avec 507 toises & demie, surface du triangle FMH , & avec 281 toises $\frac{3}{4}$ & 7 pieds, surface du triangle FGH . On aura pour total 905 toises $\frac{1}{4}$ & 7 pieds quarrés pour * la surface entière $FGHLM$.

Pour toiser une couverture de maison, telle que seroit, par exemple $ABCD$, dont le fût est EF , il faudroit mesurer le côté CD & la somme des côtés CE & EA . On considèrerait le tout comme si c'étoit un parallélogram-



* *Ax. 3. gener.*

me rectangle GH , les surfaces GM & LH qu'on suppose être les mêmes que AF & CF , étant considérées comme une seule. Alors * il sera facile de connoître cette surface.



On peut par cette methode mesurer la surface d'une chambre, d'un jardin, d'un enclos, &c.

PROPOSITION XLI.

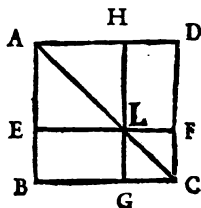
Dans un parallelogramme si on mene une diagonale, & si on mene ensuite dans ce parallelogramme une ligne parallele à un de ses côtez; & par le point où cette derniere ligne coupe la diagonale si on mene encore une autre ligne parallele à un autre côté: 1° les parallelogrammes par où la diagonale ne passera point, seront égaux entre eux. 2° Si le parallelogramme proposé est un quarré, les parallelogrammes par où passera la diagonale seront aussi des quarrés.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

SOit le parallelogramme BD dont une diagonale est AC ; soit menée la ligne EF parallele au côté BC ; & par le point L où cette

* Cor-2. déf. 53. Geo.

ligne EF coupe la diagonale AC soit menée la ligne GH parallèle au côté CD : je dis que $BL=LD$. Car 1° BL est * un parallélogramme, puisque EL est * parallèle à BG : & BA étant parallèle à CD , de même que GH , on aura BE parallèle à GL , LD est aussi un parallélogramme, puisque LH est * parallèle à FD , EF étant * parallèle à BC , & AD étant [1] parallèle à BC , on aura [2] AD parallèle à EF .



Donc HD sera parallèle à LF . Par le même raisonnement EH & GF sont des parallélogrammes. 2° [3] Le triangle $ABC=ADC$. Mais à cause des parallélogrammes EH & GF , le triangle $AEL= AHL$, & $LGC=LFC$. Donc [4] $AEL+LGC=AHL+LFC$. Donc si du triangle ABC on retranche $AEL+LGC$ d'une part, & si du triangle ADC on retranche $AHL+LFC$ d'une autre part ; les parallélogrammes BL & LD par où la diagonale ne passe point, resteront [5] égaux entr'eux, ce qu'il falloit démontrer.

* Par construction.

[1] Déf. 49. Geo.

[2] Prop. 26. Geo.

[3] Cor. 2. Prop. 37. Geo.

[4] Ax. 4. gen.

[5] Ax. 9. gener.

D E M O N S T R A T I O N

D E L A S E C O N D E P A R T I E .

Si le parallelogramme BD est un quarré, les côtez BA & BC seront ^[1] égaux entr'eux, & le triangle ABC sera ^[2] Ifofcele. Donc ^[3] l'angle $BAC = BCA$; mais auffi ^[4] l'angle $EAL = BCA$. Donc ^[5] l'angle $EAL = ELA$. Donc ^[6] le triangle AEL est Ifofcele. L'angle AEL est ^[4] égal à l'angle droit ABC . Donc le parallelogramme EH est ^[7] un quarré. On démontrera par le même raisonnement que GF est un quarré. Donc si le parallelogramme total BD est un quarré, les parallelogrammes par où passera la diagonale, seront des quarrés, ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E .

Entre les usages de la premiere partie de la Proposition presente, elle contribue à la demonstration de la maniere dont on peut se servir pour faire un parallelogramme égal à un triangle, par exemple, au triangle CDE ; & même, si on veut, ce parallelogramme aura un de ses côtez égal à la ligne A , & un de ses angles égal à un angle donné B .

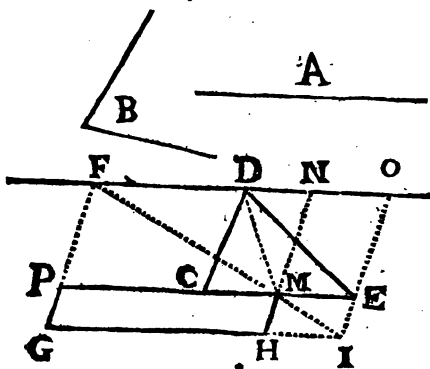
1° Ayant mené par le sommet D du triangle CDE la ligne FO parallele à la base CE , & ayant pris la moitié de cette base pour celle d'un

[1] Déf. 50. Geo. [2] Déf. 40. Geo.

[3] Cor. 2. Prop. 34. Geo.

[4] Part. 1. Prop. 24. Geo. [5] Ax. 18. gen.

[6] Cor. 4. Prop. 34. Geo. [7] Déf. 50. Geo.



parallélogramme. Du milieu M de cette même base CE on mènera la ligne MN , laquelle fera avec ME l'angle $NME = B$. Ensuite on achèvera le parallélogramme MO qui est * double du triangle MDE , dont le triangle CDE est [1] aussi double. Donc [2] le parallélogramme MO est égal au triangle CDE .

2° Sur la ligne FO on prendra $FN = A$. Ensuite du point F on mènera par le point M la ligne indéfinie FI , & on prolongera le côté OE jusques en I , rencontre de FI . On achèvera le parallélogramme GO , & on prolongera EC en P , & NM en H , pour avoir le parallélogramme qu'on cherchoit qui est GM égal [3] à MO , & enfin égal au triangle donné CDE . Ce parallélogramme GM a [4] le côté $GH = FN = A$ [5]. L'angle $PMH = NME = B$.

* Cor. 4. Prop. 39. Geo.

[1] Part. 1. Prop. 40. Geo & Ax. 3. gen.

[2] Ax. 6. général. [3] Part. 1. Prop. pref.

[4] Part. 1. Prop. 37. Geo. [5] Par construction.

PROPOSITION XLII.

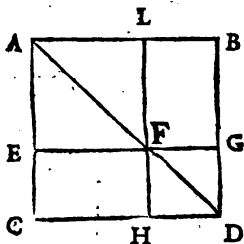
Le carré d'une ligne divisée en deux parties à volonté, est égal aux carrés de chacune de ses deux parties & à deux rectangles compris sous ces mêmes parties.

DEMONSTRATION.

Soit la ligne CD coupée en deux parties au point H : je dis que le carré de cette ligne est égal aux carrés de chacune des parties

CH & HD , & à deux rectangles compris sous ces mêmes parties CH & HD .

Pour le démontrer, soit CB carré de la ligne CD . Par le point de division H soit menée HL parallèle au côté DB . Soit menée la ligne diagonale AD .



Enfin par le point F où la diagonale coupe la ligne LH soit menée EG parallèle au côté CD .

1° Le parallélogramme EL est * le carré de CH , puisqu'il est le carré de $EF = CH$. Le parallélogramme HG est le carré de la ligne HD . 2° Le parallélogramme CF est compris sous CH & HD , puisque [*] $FH = HD$; & le parallélogramme FB est aussi compris sous CH & HD ; car $LF = EF = CH$, de même FG

* Part. 2. Prop. 41. Geo. & Part. 1. Prop. 37. Geo.

[*] Déf. 50. Geo.

$=HD$. Donc le carré CB est égal aux deux carrés EL & $H.G$ des deux parties CH & HD ; & encore à deux rectangles CF & FB compris sous ces mêmes parties CH & HD , ce qu'il falloit démontrer.

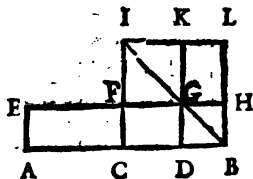
PROPOSITION XLIII.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, & ensuite en deux parties inégales; le rectangle compris sous les parties inégales avec le carré de la partie interceptée entre les deux points de section, est égal au carré de la moitié de toute la ligne.

DEMONSTRATION.

Soit la ligne droite AB divisée en deux parties égales au point C , & en deux inégales au point D :

je dis que le rectangle compris sous les parties inégales AD & DB avec le carré de la partie CD est égal au carré de CB moi-



tié de AB . Pour le démontrer, il faut faire le carré de CB , & mener la diagonale IB , &

* Ax. 3. gen.

par le point D mener DK parallele au côté BL . Enfin par le point de section G on menera EH parallele au côté AB ; & on fera AE parallele à BH .

Puisque * DG est parallele à BH , & que AE est aussi parallele à BH , on aura ^[1] AE parallele à DG ; mais ^[2] $DG = DB$. Donc le parallelogramme AG est compris sous les parties inégales AD & DB . Le parallelogramme $AF = CH$ ^[3]; mais ^[4] $CG = GL$. Donc en ajoutant de part & d'autre DH , on aura $CG + DH = GL + DH$, c'est à dire, $DL = CH$. Donc ^[5] $AF = DL$. Donc en ajoutant de part & d'autre $CG + FK$, on aura $AF + CG + FK = DL + CG + FK$, ce qui est ^[6] la même chose que $AG + FK = CL$, c'est à dire que la somme du rectangle AG compris sous les parties inégales AD & DB , & du quarré FK de la partie CD , est égale au quarré CL de la moitié CB de la ligne AB , ce qu'il falloit demonstret.

* Par construction.

[1] Prop. 26. Geo.

[2] Part. 2. Prop. 41. Geo. & déf. 50. Geo.

[3] Prop. 39. Geo.

[4] Part. 1. Prop. 41. Geo.

[5] Ax. 18. general.

[6] Ax. 3. general.



$\square HD$. Donc le carré CB est \square égal aux deux quarrés EL & HG des deux parties CH & HD ; & encore à deux rectangles CF & FB compris sous ces mêmes parties CH & HD , ce qu'il falloit démontrer.

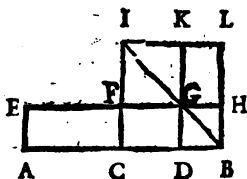
PROPOSITION XLIII.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, & ensuite en deux parties inégales; le rectangle compris sous les parties inégales avec le quarré de la partie interceptée entre les deux points de section, est égal au quarré de la moitié de toute la ligne.

DEMONSTRATION.

Soit la ligne droite AB divisée en deux parties égales au point C , & en deux inégales au point D :

je dis que le rectangle compris sous les parties inégales AD & DB avec le quarré de la partie CD est égal au quarré de CB moitié de AB .



Pour le démontrer, il faut faire le quarré de CB , & mener la diagonale IB , &

* *Ax. 3. gen.*

FK est * le carré de $FG=CB$. Donc FK est le carré de CB moitié de AB . Le parallelogramme $AF=CG$ [1], & [2] $LG=CG$. Donc [3] $AF=GL$. Donc en ajoutant CH de part & d'autre, on aura [4] $AF+CH=GL+CH$ $\rightarrow CH$, c'est à dire $AH=GL+CH$. Donc ajoutant encore de part & d'autre le carré FK , on aura $AH+FK=GL+CH+FK$, ce qui est la même chose [5] que $AH+FK=CL$; c'est à dire que le rectangle compris sous la ligne AD composée de la divisée AB & de l'ajoutée BD & sous l'ajoutée BD , avec le carré FK de la ligne CB moitié de la divisée, sont, pris ensemble, égaux au carré CL de la ligne CD composée de la moitié CB de la divisée, & de l'ajoutée BD , ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XLV.

Un rayon de cercle est égal à la corde d'un arc de 60 degrez de la circonférence du même cercle.

DEMONSTRATION.

Soit le cercle AB ; du centre C soit mené le rayon CD : je dis que ce rayon CD est égal à une corde de 60 degrez pris dans la circon-

* Part. 1. Prop. 37. Geo.

[1] Cor. 1. Prop. 39. Geo.

[2] Part. 1. Prop. 41. Geo.

[3] Ax. 18. general.

[4] Ax. 4. general.

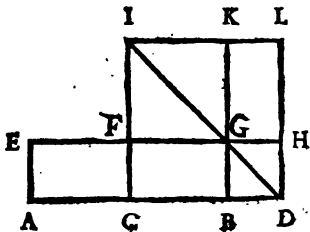
[5] Ax. 3. general.

PROPOSITION XLIV.

Si on ajoute une ligne droite à une autre divisée en deux également le rectangle compris sous toute la ligne composée de la divisée, & de l'ajoutée & sous l'ajoutée, avec le carré de la moitié de la divisée, est égal au carré de la ligne composée de la moitié de la divisée & de l'ajoutée.

DEMONSTRATION.

Soit la ligne droite AB divisée en deux également au point C ; à laquelle soit ajoutée la ligne BD : je dis que le rectangle compris sous la ligne entière AD , & sous la ligne BD avec le carré de la partie CB moitié de la ligne AB ,



est égal au carré de la ligne CD composée de la moitié BC & de l'ajoutée BD . Pour le démontrer, il faut faire le carré de CD , & mener la diagonale ID ; par le point B , mener BK parallèle au côté DL ; par le point de section G , il faut mener EH parallèle au côté AD , & AE parallèle à DH .

Le parallélogramme AH est compris sous AD & DH ; mais * $DH = DB$. Donc le parallélogramme AH est compris sous AD & BD ,

* Part. 2. Prop. 41. Geo. & déf. 50, Geo.

FK est

FK est * le carré de $FG=CB$. Donc FK est le quart de CB moitié de AB . Le parallelogramme $AF=CG$ [1], & [2] $LG=CG$. Donc [3] $AF=GL$. Donc en ajoutant CH de part & d'autre, on aura [4] $AF+CH=GL+CH$ ou $AH=GL+CH$. Donc ajoutant encore de part & d'autre le carré FK , on aura $AH+FK=GL+CH+FK$, ce qui est la même chose [5] que $AH+FK=CL$; c'est à dire que le rectangle compris sous la ligne AD composée de la divisée AB & de l'ajoutée BD & sous l'ajoutée BD , avec le carré FK de la ligne CB moitié de la divisée, sont, pris ensemble, égaux au carré CL de la ligne CD composée de la moitié CB de la divisée, & de l'ajoutée BD , ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XLV.

Un rayon de cercle est égal à la corde d'un arc de 60 degrés de la circonférence du même cercle.

DEMONSTRATION.

Soit le cercle AB ; du centre C soit mené le rayon CD : je dis que ce rayon CD est égal à une corde de 60 degrés pris dans la circon-

* Part. I. Prop. 37. Geo.

[1] Cor. I. Prop. 39. Geo.

[2] Part. I. Prop. 41. Geo.

[3] Ax. 18. general.

[4] Ax. 4. general.

[5] Ax. 3. general.

les ouvriers, par exemple quelques Horlogers, sont dans l'erreur, lorsqu'ils croient que la circonférence des roues d'une horloge est précisément triple du diamètre de ces mêmes roues.

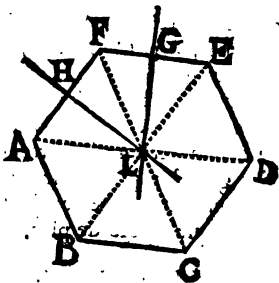
PROPOSITION XLVI.

Si par le milieu d'un côté d'un polygone régulier on mène une ligne perpendiculaire à ce côté ; & si par le milieu d'un autre côté qui forme un angle avec le précédent, on lui mène encore une autre ligne perpendiculaire : le concours de ces deux perpendiculaires sera le centre d'une circonférence de cercle qui passera par tous les sommets des autres angles de ce polygone.

DEMONSTRATION.

Soit le polygone régulier $ABCDEF$; par le milieu H du côté AF soit menée la ligne perpendiculaire

HL ; par le milieu G du côté prochain FE soit encore menée la ligne perpendiculaire GL : je dis que le point L qui est le concours de ces deux perpendiculaires, est le centre de la



circonférence qu'on cherche ; c'est à dire, que si du point L & d'une ouverture de compas égale à LA on décrit une circonférence de cercle, elle passera par les points B, C, D , &c. Pour le

Démontrer, il suffit de démontrer que les lignes
 LA, LB, LC, LD , &c. sont égales entr'elles.
 Puisque le point L appartient à la ligne HL &
 à la ligne GL , il est * également distant des
 points E, F & A . Donc [1] la ligne $LE =$
 $LF = LA$. Donc les triangles ELF & FLA
 sont équilatéraux l'un à l'autre; les côtes EF &
 FA étant [2] égaux entr'eux, Ils sont donc
 équiangles. L'angle LFE sera donc [3] égal
 à LAF ; mais puisque [2] l'angle $EFA = FAB$,
 on aura [4] l'angle $LFA = LAB$. Donc [5] la
 ligne $LA = LB$. Les deux triangles LFA
 & LAB étant équilatéraux, on aura [6]
 l'angle $FAL = ABL$. Donc [6] l'angle LAB
 restera égal à LBC , & outre cela on aura en-
 core [7] LA & AB égaux aux côtes LB & BC .
 Donc [8] la base $LB = LC$. On démontrera de
 la même maniere que $LC = LD$, &c. Donc
 toutes les lignes droites menées du point L aux
 sommets des angles A, B, C , &c. sont égales
 entr'elles, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Quand on dit [8] qu'un polygone est inscrit
 dans un cercle, en même-temps ce cercle est
 appelé circonscrit à ce polygone; & lorsque
 [9] le polygone est circonscrit, en même-temps
 le cercle est appelé inscrit au même polygone.
 Il est donc évident que la Proposition présente
 enseigne la maniere de circonscrire un cercle à

* Prop. 3. Geo.

[1] Cor. 4. Ax. 2. Geo.

[2] Déf. 55. Geo.

[3] Cor. 2. Prop. 35. Geo.

[4] Ax. 9. gen.

[5] Part. 1. Prop. 35. Geo.

[6] Déf. 55. Geo. & Ax. 9. gen.

[7] Part. 1. Prop. 35. & déf. 55. Geo.

[8] Déf. 58. Geo.

[9] Déf. 57. Geo.

un polygone regulier donné, en faisant passer une circonference par les sommets de tous les angles. On a encore une maniere facile pour inscrire un cercle à un polygone donné. Car après avoir trouvé * le point L centre de la circonference qui passe par tous les sommets des angles $A, B, C, \&c.$ Si de ce point L & d'une ouverture de compas égale à la perpendiculaire LG , on décrit une circonference de cercle, elle touchera les autres côtes $FA, AB, BC, \&c.$ pour cela il suffit [1] que toutes les perpendiculaires menées de ce point L à ces côtes $FA, AB, \&c.$ soient égales entr'elles. Or cela est évident, parceque les côtes de ce polygone étant [2] égaux entr'eux, seront cordes égales de la circonference circonscrite. Donc elles seront [3] également distantes du centre L ; mais ces distances sont [4] mesurées par des perpendiculaires menées du point L à ces côtes $FA, AB, BC, \&c.$ Donc toutes ces perpendiculaires seront égales entr'elles.

PROPOSITION XLVII.

Les quarez, & generalement tous les polygones reguliers d'un pareil nombre de côtes, sont des figures semblables.

DEMONSTRATION.

SOient les deux quarez AC & EG . 1° chaque angle de l'un est [5] égal à chaque angle de l'autre.

* Par la Prop. pres.

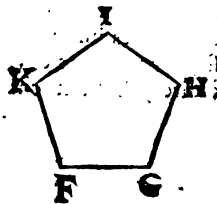
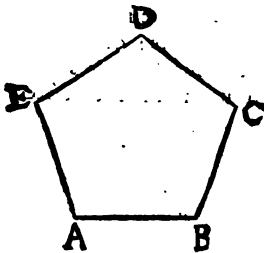
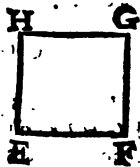
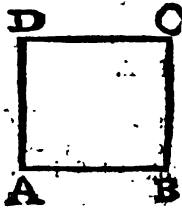
[1] Déf. 34. Geo. & Cor. 3. Prop. 12. Geo.

[2] Déf. 55. Geo. [3] Part. 2. Prop. 16. Geo.

[4] Cor. 3. Prop. 6. Geo.

[5] Cor. 3. Prop. 10. Geo.

etc. 2^o * $AB . BC :: EF . FG . \& BC . CD :: FG . GH \&c.$ Donc [1] les quarez $AC \& EG$ sont des figures semblables.



Soient, par exemple, deux pentagones réguliers $ABCDE \& FGHIK$. 1^o [1] $AB . BC :: FG . GH . \& BC . CD :: GH . HI . \&c.$ 2^o La somme des angles intérieurs du pentagone $ABCDE$ est [2] égale à la somme des angles intérieurs du pentagone $FGHIK$. Donc [3] un angle de l'un sera égal à un angle de l'autre. Donc [4] chaque angle de l'un sera égal à chaque angle de l'autre. Donc deux pentagones réguliers

* Déf. 50. Geo. & Cor. 1. Prop. 37. Geo.

[1] Déf. 60. Geo.

[2] Déf. 55. Geo.

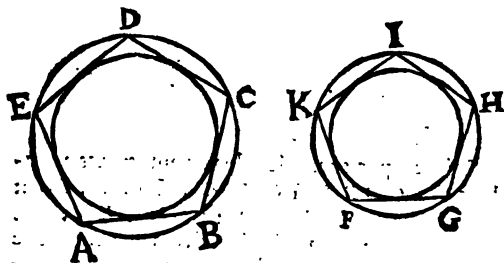
[3] Cor. 1. Prop. 32. Geo. [4] Ax. 12. gen.

sont deux figures semblables, & qu'il falloit démontrer.

On fera le même raisonnement pour les autres polygones réguliers qui seront d'un égal nombre de côtez.

C O R O L L A I R E.

Soient les polygones réguliers $ABCDE$ & $FGHIK$ d'un pareil nombre de côtez ; & à chacun de ces deux polygones soient inscrits & circonscrits des cercles. Plus chacun de ces deux polygones aura de côtez, il rencontrera en un plus grand nombre de points les circonferences des cercles inscrits & circonscrits : de sorte que si ces polygones deviennent infinitilateres, c'est à dire, s'ils ont chacun une infinité de côtez ;



le cercle circonscrit & l'inscrit au même polygone se confondront en un seul cercle. Parce que le polygone qui se trouve comme comprimé entre ces deux cercles est toujours plus grand que le cercle inscrit, & plus petit que le cercle circonscrit, jusqu'à ce qu'enfin ces polygones ayant une infinité de côtez, & le cercle inscrit & le circonscrit au même polygone se confondent en un

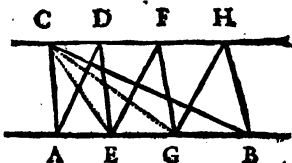
leul cercle; le même circuit & la même surface deviennent communes à ces cercles inscrits & circonscrits, Donc ces cercles étant devenus la même chose que des polygones reguliers d'une infinité de côtez, il faut conclure * que les cercles sont des figures semblables.

PROPOSITION XLVIII.

Si un triangle est de même hauteur que plusieurs autres triangles, & si la base de ce triangle est égale à la somme des bases de ces triangles, la surface de ce même triangle sera égale à la somme des surfaces de tous ces triangles.

DEMONSTRATION.

Soit par exemple le triangle ABC de même hauteur, c'est à dire, entre les mêmes parallèles, que les triangles ADE , EFG , GHB ; & soit la base AB du triangle ABC égale à la somme des bases AE , EG & GB des triangles



$ADE, EFG, &c.$ je dis que le triangle $ABC = AED + EGF + GHB$. Car [1] le triangle $ABC = ACE + ECG + GCB$. Or [2] le triangle $ACE = ADE$; $ECG = EFG$; $GCB = GHB$. Donc au lieu des triangles $ACE + ECG + GCB$, si [3] on prend ce qui leur est égal, sçavoir $ADE + EFG + GHB$; on trouve

* Prop. prof.

[1] Ax. 3. gen.

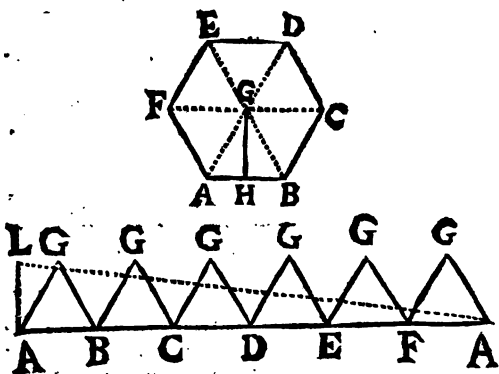
[2] Prop. 40. Geo.

[3] Deman. 1. gen.

vera que le triangle ABC est égal à la somme des triangles ADE , EFG , GHB , dont les bases prises ensemble sont égales à AB , & dont les hauteurs sont égales à celle du triangle ABC ; étant tous entre les mêmes lignes parallèles, ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E I.

Si on multiplie le circuit d'un polygone régulier par la moitié de la perpendiculaire menée du centre du cercle qui lui est inscrit ou circonscrit, à un des côtés de ce polygone; le produit de cette multiplication sera la surface de ce polygone régulier. Soit par exemple le polygone

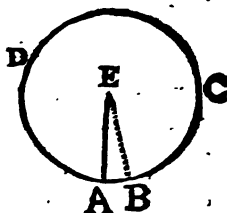


régulier $ABCDEF$: je dis que le produit du contour ou circuit $ABCDEF$ multiplié par la moitié de la perpendiculaire GH est la surface même de ce polygone. Car après avoir me-

né du point G qui est * également distant des points $A, B, C, \&c.$ les lignes $GA, GB, GC, GD, GE, \&c.$ on divilera ce polygone en triangles qui sont tous de même hauteur, puisque ^[1] toutes les perpendiculaires menées du point G à ces côtez AB, BC, CD , sont égales entr'elles. Supposons que la somme des bases de tous ces triangles, qui est le circuit du polygone, soit la ligne AA , & que la ligne AL perpendiculaire à AA soit égale à la hauteur commune de tous ces mêmes triangles. Il est évident ^[2] que le produit de la base AA multipliée par la moitié de la hauteur AL du triangle ALA est égal au triangle $ALA =$ ^[3] $AGB + BGC + CGD + DGE + EFG + FGA =$ ^[4] $ABCDEF,$

COROLLAIRE II.

La surface d'un cercle est donc égale au produit de la circonference de ce cercle multipliée par la moitié de son rayon. Soit le cercle $ABCD$: je dis que sa surface est égale au produit de la circonference $ABCD$ multipliée par la moitié du rayon AE .



Car ce cercle est ^[5] un polygone regulier d'une infinité de côtez infiniment petits. Supposons qu'un de ces côtez infiniment petits soit AB , les lignes $EA, \& EB$

* *Supposit. ou Prop. 46. Geo.* ^[1] *Cor. Prop. 46. Geo.*

^[2] *Cor. I. Prop. 40. Geo.*

^[3] *Prop. pref.*

Ax. 3. gen.

^[5] *Cor. déf. 56. Geo.*

qui sont côtez du triangle AEB seront infiniment proches l'une de l'autre; & partant la hauteur de ce triangle EAB sera considérée comme un rayon de ce cercle $ABCD$. Si on multiplie la somme de toutes les bases infiniment petites de ces petits triangles dont le sommet est dans le centre E , par la moitié de leur hauteur commune, c'est à dire, si on multiplie la circonférence du cercle par la moitié du rayon, on aura [1] donc pour produit la surface de ce cercle.

Dans la pratique il est facile de connoître la longueur de la circonférence d'un cercle, il suffit pour cela d'appliquer le bout d'un cordeau dans le point A , par exemple, & de coucher ensuite le reste de ce cordeau sur la circonférence $ABCD$. Après cela on étendra ce cordeau en ligne droite, & on mesurera combien il contient de pieds, de pouces, &c. ce qui fera connoître la grandeur de la circonférence dont il s'agit.

COROLLAIRE III.

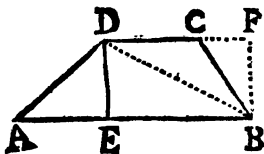
Pour connoître la surface d'un secteur de cercle, il faut multiplier son arc par la moitié de son rayon, & le produit de cette multiplication exprimera la surface de ce secteur. Car le secteur d'un cercle est la somme d'une infinité de triangles infiniment petits, dont la somme des bases est l'arc de ce secteur, & dont la hauteur commune est un des rayons qui terminent ce même secteur.

[1] Prof. prof.

COROLLAIRE

COROLLAIRE IV.

Si on se propose de mesurer la surface du trapèze $ABCD$, il faut multiplier la moitié de la somme des côtes AB & DC par la hauteur de cette figure qui est la perpendiculaire DE , & le produit exprimera la valeur de la surface qu'on cherche. Car, si on mène la diagonale DB , il est évident que les triangles ABD & DBC



* sont de même hauteur étant entre les mêmes parallèles AB & DC . Or [1] la moitié de la somme des bases AB & DC multipliée par la hauteur commune DE exprime la valeur des deux triangles ABD & DBC . Donc le produit de la moitié de la somme des côtes AB & DC multipliée par la perpendiculaire est la surface de la figure $ABCD$.

Si on ne pouvoit parcourir cette surface pour mesurer la perpendiculaire DE ; il suffiroit de prolonger le côté DC , ensuite du point B , par exemple, on meneroit la perpendiculaire BF qui feroit connoître son * égale ED .

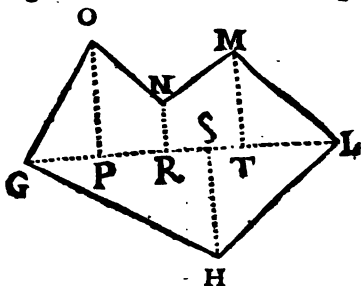
S'il se rencontre un polygone irrégulier, par exemple, $GHLMNO$ dont on se propose de mesurer la surface; il faut mener une ligne du sommet G de l'angle OGH au sommet L de l'angle MLH qui paroît le plus éloi-

* Cor. 4. Prop. 6. Geo.

[1] Prop. pref. & Cor. 1. Prop. 40. Geo.

gné. Ensuite du sommet de chacun des autres angles de la figure on mènera sur cette ligne

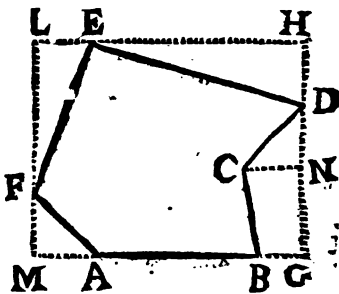
GL les perpendiculaires OP , NR , HS , MT . On [1] mesurera le triangle GPO , le trapèzoïde $OPRN$, & les autres trapèzoïdes



& triangles, pour [2] connoître enfin la surface entière $GHLMNO$.

Si on veut mesurer une surface irrégulière qu'on ne peut parcourir librement en ligne droite, par exemple celle

d'un étang $ABCDEF$, du terrain où est construite une maison, d'un bois taillis, &c. lorsqu'il n'y a aucun obstacle, on prolongera le côté AB , ou AF , &c. Sur le côté AB



prolongé on mènera la perpendiculaire DG que l'on prolongera vers H . A cette ligne GH on mènera perpendiculairement la ligne HL par le point E , qui sera * parallèle à MG . Par le point F

[1] Cor. 1. Prop. 40. Geo. & Cor. pres.

[2] Ax. 3. gen.

* Part. 2. Prop. 15. Geo.

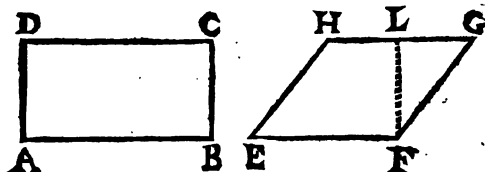
on mènera la ligne LM perpendiculaire à HE , cette ligne ML fera * aussi parallele à HG . On mesurera le parallelogramme MH . Ensuite on mesurera les surfaces des triangles CND , DHE , ELF , FMA , & du trapeze $BGNC$. Enfin de la valeur du parallelogramme MH on retranchera la somme de ces triangles & trapeze, le reste fera connoître combien de toises ou de perches contient la surface $ABCDEF$.

PROPOSITION XLIX.

Les parallelogrammes dont les hauteurs sont égales, sont entre eux comme leurs bases ; & si les bases sont égales, ils sont entr'eux comme leurs hauteurs.

DEMONSTRATION.

SOient les parallelogrammes AC & EG dont les hauteurs BC & FL soient égales entr'elles :



je dis que $AC . EG :: AB . EF$. Car ^[1] le parallelogramme $AC = AB \times BC$, & ^[2] le parallelogramme $EG = EF \times FL$. Or en divisant ces deux produits par les hauteurs égales BC & FL , on aura ^[3] $AB \times BC . EF \times FL :: AB . EF$. c'est à dire ^[4] que le parallelogramme $AC . EG :: AB . EF$, ce qu'il falloit démontrer.

* Part. 2. Prop. 15. Geo. ^[1] Cor. 2. déf. 53. Geo.

^[2] Cor. 3. Prop. 39. Geo.

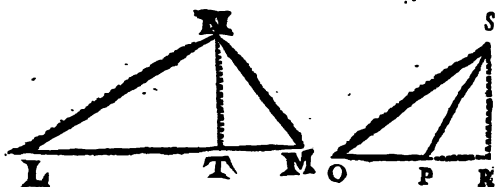
^[3] Prop. 6. Algèr.

^[4] Dem. I. gen.

Si les bases avoient été supposées égales, on auroit divisé ces deux produits par AB & par EF , & on auroit eu $AB \times BC . EF \times FL :: BC . FL$,

COROLLAIRE.

Les triangles dont les hauteurs sont égales sont aussi entr'eux comme leurs bases. Soient



les triangles LMN & OPS , dont les hauteurs TN & RS sont égales : je dis que le triangle LMN est au triangle OPS , comme la base LM est à la base OP . Car * le triangle $LMN =$

$$\frac{1}{2} TN \times LM, \text{ \& le triangle } OPS = \frac{1}{2} RS \times$$

OP . Donc [1] en divisant ces deux produits par les

grandeurs [2] égales $\frac{1}{2} TN$, & $\frac{1}{2} RS$, on aura

$$\frac{1}{2} TN \times LM . \frac{1}{2} RS \times OP :: LM . OP ,$$

c'est à dire le triangle $LMN . OPS :: LM . OP$.

* Cor. 1. Prop. 40. Geo.

[1] Prop. 6. Algeb.

[2] Supposit. & Ax. 12. gen.

Si les bases LM & OP avoient été supposées égales, on auroit divisé les deux premiers termes de l'analogie par LM & par OP , & on auroit *

$$\text{trouvé } \frac{1}{2} TN \times LM . \frac{1}{2} RS \times OP :: \frac{1}{2} TN . \frac{1}{2} RS :: TN . RS [1].$$

PROPOSITION L.

- 1^o Si un parallelogramme a un de ses angles égal à un angle d'un autre parallelogramme; ces parallelogrammes seront entre eux comme les produits des côtes qui comprennent ces angles égaux.
- 2^o Si un triangle a un de ses angles égal à un angle d'un autre; ces triangles sont aussi entr'eux comme les produits des côtes qui comprennent ces angles égaux.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

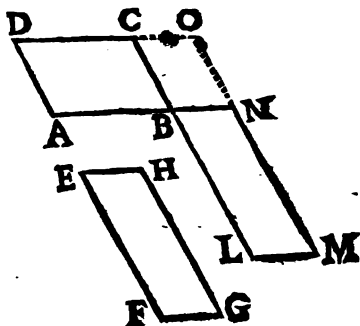
Soit le parallelogramme AC dont l'angle ABC soit égal à l'angle HEF du parallelogramme EG : je dis que $AC . EG :: AB \times BC . EF \times EH$ Pour le demontrer, il

* Prop. 6. Algeb.

[1] Prop. 5. Algeb.

Faut prolonger les côtez AB & CB jusques aux points N & L , de sorte que $BN = EH$, & que $BL = EF$. En-

suite par le point N on menera NM parallele à BL , & par le point L on menera LM parallele à BN : & on aura [1] le parallelogram-



me $LN = EG$. Enfin on prolongera le côté DC , & on prolongera le côté MN pour avoir le parallelogramme BO .

[1] Le parallelogramme $AC, BO :: AB, BN$.

[2] Le parallelogramme $BO, LN :: CB, BL$.

Donc [3] $AC \times BO, BO \times LN :: AB \times CB, BN \times BL$. Or si on divise les deux premiers termes de cette derniere analogie par BO , on aura [4] $AC \cdot LN = EG :: AB \times CB \cdot BN \times BL = EH \times EF$ [5], ce qu'il falloit demontrer.

D E M O N S T R A T I O N

DE LA SECONDE PARTIE.

Soit le triangle OPR dont l'angle RPO soit égal à l'angle VST du triangle STV : je dis que le triangle $OPR, STV :: OP \times PR, SV \times ST$. Pour le demontrer, il faut prolonger le côté OP

[1] Cor. 2. Prop. 38. Geo.

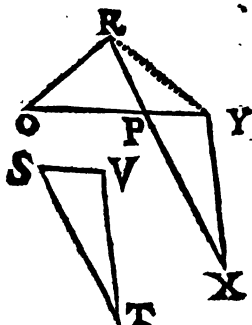
[2] Prop. 12. Algeb.

[3] Par const. assion.

[4] Prop. 49. Geo.

[5] Prop. 6. Alg.

Jusques en Y, de sorte que $PY = SV$, & prolonger RP jusques en X, de sorte que $PX = ST$, & mener la ligne XY. Alors * le triangle PXY sera égal au triangle SVT, ** ayant l'angle XPT égal à l'angle VST du triangle STV. Ensuite on menera la ligne RT.



[¹] Le triangle OPR, RPY :: OP . PY.

[²] Le triangle RPY, PXY :: RP . PX.

Donc [³] $OPR \times RPY . RPY \times PXY$:? $OP \times RP . PY \times PX$, & en divisant les deux premiers termes de cette dernière analogie par la grandeur RPY qui se trouve multipliée dans l'un & dans l'autre, on aura [³] le triangle OPR, PXY = STV :: $OP \times PR . PY \times PX$ = $SV \times ST$, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Les parallelogrammes rectangles sont [⁴] entr'eux comme les produits de leurs côtes qui comprennent un angle droit, puisque [⁵] tous les angles droits sont égaux : ce qui est la même chose que de conclure en general que les paralle-

* Part. 1. Prop. 35. Geo.

** Supposit. & Part. 1. Prop. 22. Geo.

[¹] Cor. Prop. 49. Geo.

[²] Prop. 12. Alg.

[³] Prop. 6. Alg.

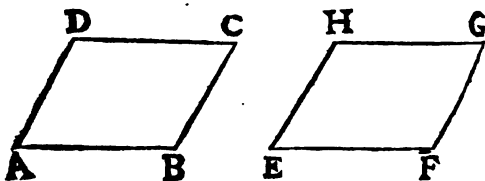
[⁴] Part. 1. Prop. pref.

[⁵] Cor. 3. Prop. 20. Geo.

logrammes, soit rectangles, soit obliquangles; sont entr'eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs. Car les parallelogrammes obliques sont ^[1] égaux aux parallelogrammes rectangles de même base & de même hauteur. On dira la même chose des triangles rectangles.

COROLLAIRE II.

Si deux parallelogrammes sont égaux, & si un de ces parallelogrammes a un de ses angles égal à un angle de l'autre; les côtez de ces parallelogrammes qui comprendront ces angles égaux, seront entre eux reciproquement proportionels. Soit le parallelogramme $AC = EG$, & l'angle $DAB = HEF$:



je dis que $AB \cdot EF :: EH \cdot AD$. Car ^[2] $AC \cdot EG :: AD \times AB \cdot EH \times EF$. Or ^[3] $AC = EG$. Donc $AD \times AB = EH \times EF$. Donc ^[4] $AB \cdot EF :: EH \cdot AD$.

COROLLAIRE III.

Si un parallelogramme, par exemple, AC a l'angle DAB égal à l'angle HEF d'un autre

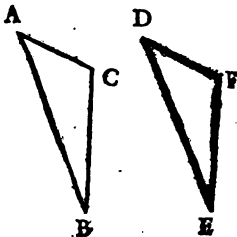
[1] Prop. 39. Geo.
[3] Supposé.

[2] Part. 1. Prop. pref.
[4] Prop. 3. Alg.

parallelogramme EG , & si les côtez qui comprennent ces angles égaux, sont reciproquement proportionels; ces parallelogrammes AC & EG seront égaux entr'eux, Car puisque $* AB . EF :: EH . AD$; on aura $** AB \times AD = EF \times EH$. Or $[^1] AC . EG :: AB \times AD . EF \times EH$. Donc $AC = EG$.

COROLLAIRE IV.

Si deux triangles sont égaux entr'eux, & si un angle d'un de ces triangles est égal à un angle d'un autre; les côtez qui comprennent ces angles seront reciproquement proportionels. Soit le triangle $ABC = DEF$; soit l'angle CAB égal à l'angle FDE : je dis que



$AB . DE :: DF . AC$. Car $[^1]$ le triangle $ABC . DEF :: AB \times AC . DE \times DF$. Or $*$ le triangle $ABC = DEF$. Donc $AB \times AC = DE \times DF$. Donc $[^2] AB . DE :: DF . AC$.

COROLLAIRE V.

Si un triangle, par exemple ABC , a l'angle CAB égal à l'angle FDE d'un autre triangle DEF , & si les côtez qui comprennent ces angles égaux sont reciproquement proportionels; ces triangles ABC & DEF seront égaux entr'eux. Car si $AB . DE :: DF . AC$, On aura $** AB \times AC = DE \times DF$; mais $[^1]$ le triangle ABC ,

* Supposit.

** Prop. 2. Algeb.

[¹] Part. 1. Prop. pref.

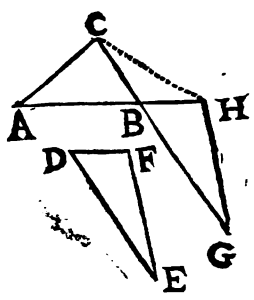
[²] Part. 2. Prop. pref.

[³] Prop. 3. Algeb.

$DEF :: AB \times AC . DE \times DF$. Donc $ABC = DEF$.

R E M A R Q U E.

Les Corollaires 4 & 5 de la Proposition présente pouvoient encore être démontrés d'une autre manière fort simple.



1° Soit le triangle $ACB = DEF$, & l'angle $ABC = EDF$; je prolonge les lignes AB & CB , & je fais * le triangle BGH égal & équilatéral à EDF ;

enfin je mene la ligne CH . Le triangle ABC ; $CBH :: BGH . CBH$ **. Or [1] $ABC . CBH :: AB . BH .$ & $BGH . CBH . GB . BC$. Au lieu des rapports égaux qui sont entre ABC & CBH , & entre BGH & CBH , substituant leurs égaux, on aura $AB . BH :: GB . BC$.

2° Si $AB . BH :: GB . BC$, on aura le triangle $ABC = BGH$. Car $ABC . CBH :: AB . BH$, & $BGH . CBH :: GB . BC$. Donc $ABC . CBH :: BGH . CBH$. Donc [2] $ABC = BGH = DEF$ [3]. Les Corollaires 2° & 3° de la Proposition présente peuvent encore être démontrés par le même raisonnement.

* Part. I. Prop. 35. Geo. ** Part. I. Prop. 8. Alg.
 [1] Prop. 49. Geo. [2] Part. 2. Prop. 8. Geo.
 [3] Par construction.

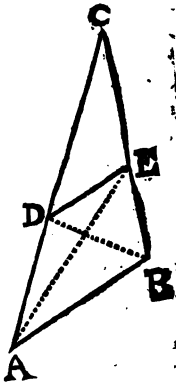
PROPOSITION LI.

- 1^o Si une ligne droite menée parallelement à la base d'un triangle, coupe les deux autres côtez de ce triangle; elle les coupera en quatre parties proportionnelles entr'elles.
- 2^o Reciproquement si une ligne droite coupe deux côtez d'un triangle en quatre parties proportionnelles entr'elles; elle sera parallele à la base de ce triangle.

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le triangle ABC dont les côtez AC & BC soient coupez par la ligne DE parallele à la base AB : je dis que $AD, DC :: BE, EC$. Pour le demontrer, par les points D & E soient menées aux angles B & A les lignes DB & EA .

Puisque DE est parallele à AB , le triangle ADE sera ^[1] égal au triangle BDE . Done ^[2] le triangle $AED, DEC :: BDE, DEC$. Or le triangle AED est ^[3] au triangle DEC , comme la base AD à la base DC du triangle DEC , puisqu'ils ont même hauteur,

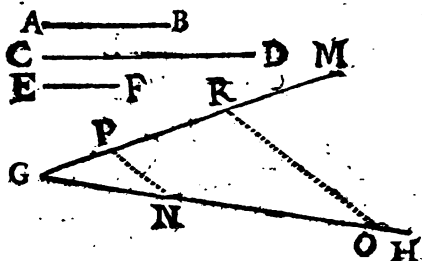


* *Supposit.* [1] *Part. I. Prop. 40. Geo.*
 [2] *Part. I. Prop. 8. Alg.* [3] *Prop. 49. Geo.*

me proportionnelle cherchée. Car dans le triangle ELN la ligne HM est * parallèle à la base LN . Donc $EH, HL :: EM, MN$. Mais * $AB = EH$, & $CD = HL = EM$, donc [*] $AB, CD :: CD, MN$.

COROLLAIRE II.

On trouvera facilement à trois lignes données une quatrième proportionnelle. Soient les lignes AB, CD, EF auxquelles il faille trou-



ver une quatrième proportionnelle. Par le point G pris à volonté, on mènera les lignes indéfinies GH & GM . Sur la ligne GH , on prendra $GN = AB$; & $NO = CD$; sur la ligne GM on prendra $GP = EF$. Enfin par les points N & P , on mènera NP ; & par le point O on mènera OR parallèle à NP : je dis que la ligne PR est la quatrième proportionnelle cherchée. Car dans le triangle GOR la ligne NP

* Par construction.

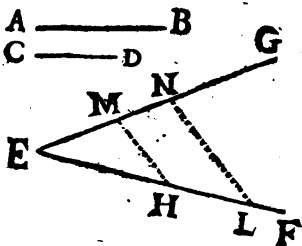
[*] Part. 2. Prop. pref. & Demandez. Gen.

Dans la premiere analogie, au lieu du rapport de la base AD à DC si on substitue le rapport qui lui est égal, sçavoir celui du triangle AED au triangle DEC ; & au lieu du rapport de la base BE à EC , si on substitue son égal qui est le rapport du triangle BDE au triangle EDC : on aura $AED, DEC :: BDE, EDC$. donc * le triangle $ADE = BDE$. [*] Donc la ligne DE est parallele à la ligne AB , ce qu'il falloit demonstrez.

COROLLAIRE I.

La premiere partie de la proposition presents est le principe d'une méthode dont on se peut servir pour

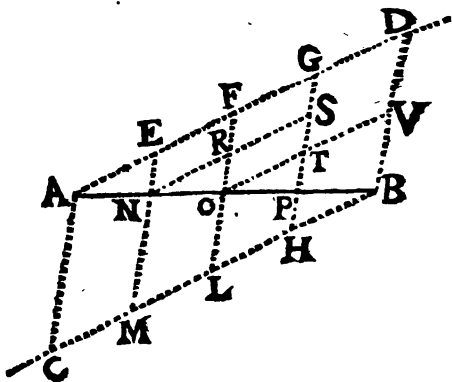
trouver une 3^e ligne proportionnelle à deux lignes données. Soient les lignes AB & CD auxquelles on se propose de trouver une



troisième ligne proportionnelle, c'est à dire, de trouver une ligne qui soit telle que le rapport de AB & CD soit égal au rapport de CD à cette ligne cherchée. Il faut mener les lignes indéfinies EF & EG qui forment l'angle GEF à volonté. Sur la ligne EF il faut prendre $EH = AB$, & $HL = CD$; & sur la ligne EG il faut prendre EM encore égale à CD . Enfin par les points H & M , il faut mener la ligne HM , & mener par le point L la ligne LN parallele à HM : je dis que MN est la troisié-

* Part. 2. Prop. 8. Algeb. [*] Part. 2. Prop. 40. Geo.

Par le point *A*, on menera la ligne indéfinie *AD*, qui fera avec la ligne donnée *AB* un angle *DAB* à volonté. Par l'autre extré-



mité *B*, on menera * la ligne *BC*, parallèle à la ligne *AD*. Sur cette ligne *AD* on prendra, d'une ouverture de compas à volonté, les parties *AE*, *EF*, *FG*, *GD* &c. égales entre elles, ou telles qu'elles soient entre elles dans un rapport donné. Ensuite sur la ligne *BC* on prendra *BH*, égale à la quatrième partie *GD*, on prendra *HL* = *GF*, *LM* = *FE*, & *MC* = *AE*. Enfin par les points correspondants *D* & *B*, *G* & *H*, *F* & *L*, *E* & *M*, &c, on menera les lignes *DB*, *GH*, *FL* &c : je dis que la ligne *AB* est divisée dans les quatre parties égales proposées, c'est à dire, que *AN* = *NO* = *OP* = *PB*. Car [1] les lignes *AC*, *EM*,

* *Cor. 4. Prop. 15. ou Cor. Prop. 23. Geo.*

[1] *Suppositis.*

FL, GH, DB , étant menées par des extrémités de lignes parallèles & égales qui sont parties des lignes droites AD & BC ; ces mêmes lignes AC, EM , &c. seront * parallèles entre elles. Donc $AN \cdot NO :: AE \cdot EF$. Or $AE = EF$. Donc aussi $AN = NO$. Pareillement ayant mené NS parallèle à EG ; on aura $NR = EF, RS = FG$: & partant $NR = RS$. Mais $NO \cdot OP :: NR \cdot RS$. Donc aussi $NO = OP$. Ayant encore fait OV parallèle à FD ; on aura par le même raisonnement $OT = TV$: & partant $OP = PB$. Donc la ligne droite AB est divisée dans le nombre des parties égales cherchées.

PROPOSITION LII.

- 1°. Les triangles qui sont équiangles l'un à l'autre, ont leurs côtés homologues proportionnels.
 2°. Reciproquement les triangles dont les côtés sont proportionnels, sont équiangles l'un à l'autre.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le triangle ABC dont l'angle CAB est égal à l'angle FDE d'un autre triangle DEF , & l'angle $ABC = DEF$, enfin l'angle BCA

* Prop. 36. Geo.

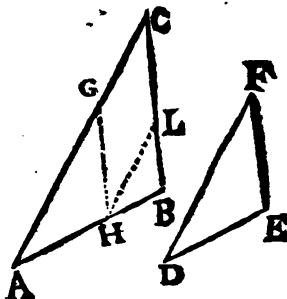
[¹] Part. I. Prop. pres. [²] Par Construction.

[³] Part. I. Prop. 37. Geo.

[⁴] Demande I. Geo.

$\equiv EFD$: je dis que ces deux triangles sont semblables; c'est à dire * qu'outre que ces deux triangles sont équiangles l'un à l'autre, leurs côtes homologues sont proportionnels, que CA .

$AB :: FD$, DE ,
que AB , $BC ::$
 DE , EF , enfin
que BC , $CA ::$
 EF , FD . Pour
le démontrer, sur
le plus grand des
deux côtes ho-
mologues, par
exemple sur AC ,
soit prise la par-
tie AG égale au
côté DF qui lui



correspond, & sur AB soit prise AH égale à DE , & soit menée la ligne GH . Le triangle AGH ayant les côtes AG & AH , égaux ** aux côtes FD & DE , & l'angle GAH étant [¹] égal à l'angle FDE ; la base GH sera [²] égale à la base FE . Ces deux triangles GAH & FDE étant équilatéraux, & par conséquent égaux entre eux, ce qu'on dira des côtes de l'un, sera la même chose que si on le disoit des côtes de l'autre.

Puisque [¹] l'angle $ACB \equiv DFE$, & [³] que l'angle $AGH \equiv DFE$; l'angle AGH sera [⁴] égal

* Déf. 60. Geo.

** Par construction.

[¹] Par Supposé.

[²] Part. I. Prop. 35. Geo.

[³] Cor. 2. Prop. 35. Geo.

[⁴] Ax. 18. gen.

à ACB . La ligne GH sera donc * parallele à CB . Donc ** $CG, GA :: BH, HA$, & [°] $CG + GA, GA :: BH + HA, HA$; c'est à dire, $CA, GA = FD :: BA, HA = DE$ [1] & [2] enfin $CA, AB :: FD, DE$.

Pour demontrer que $AB, BC :: DE, EF$; par le point H , il faut mener la ligne HL parallele au côté AC . Alors il est évident [3] que $AH, HB :: CL, LB$, [4] que $BH, HA :: BL, CL$, & [5] que $BH + HA, HA :: BL + LC, LC$; enfin [2] que $BH + HA, BL + LC :: HA = DE, LC =$ [6] $GH = EF$. C'est à dire [7] que $BA, BC :: DE, EF$.

Si par le point G on mene une ligne parallele au côté AB , on trouvera que $BC, CA :: EF, FD$, ce qui sera facilement démontré, de la même maniere qu'on a démontré que $AB, BC :: DE, EF$.

Les triangles équiangles ABC & DEF ont donc leurs côtés homologues proportionnels, ce qu'il falloit demontrer.

D E M O N S T R A T I O N

DE LA SECONDE PARTIE.

Si les triangles ABC & DEF , par exem-

* Part. 1. Prop. 25. Geo. ** Prop. 51. Geo.

[°] Part. 3. Cor. Prop. 3. Algeb.

[1] Supposit. [2] Part. 2. Cor. Prop. 3. Algeb.

[3] Part. 1. Prop. 51. Geo.

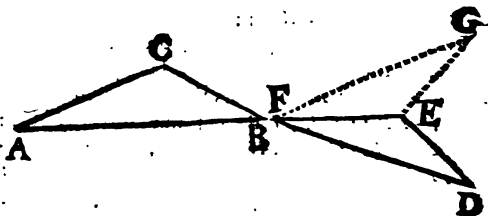
[4] Part. 1. Cor. Prop. 3. Algeb.

[5] Part. 3. Cor. Prop. 3. Algeb.

[6] Part. 1. Prop. 37. Geo.

[7] Demande 1. gen.

ple, sont tels que $BC . CA :: DE . EF$, &
 $AB . AC :: FD . FE$; on aura [1] encore BC ,



$DE :: CA . EF$, & $AB . FD :: AC . FE$. Donc
 [1] $BC . DE :: AB . FD$; & enfin [2] $BC . AB :: DE . FD$. Cela étant: je dis que ces deux triangles sont équiangles; c'est à dire que les angles BAC & EFD qui sont oppozés aux antécédens BC & ED de la première analogie, sont égaux entr'eux; que les angles ABC & FDE qui sont oppozés aux conséquens CA & EF , sont aussi égaux entr'eux; enfin que l'angle $BAC = EFD$. Pour le démontrer, il faut sur un des côtés du triangle FED , par exemple sur le côté FE , construire un triangle équiangle au triangle ABC , & pour cela on fera [3] l'angle $GFE = BAC$, on fera encore l'angle $GEF = ACB$; le troisième angle FGE se trouvera [4] égal au troisième ABC .

[1] Part. 2. Cor. Prop. 3. Algeb.

[2] Cor. 3. def. 12. Algeb.

[3] Cor. 4. Prop. 20. Geo.

[4] Cor. 4. Prop. 31. Geo.

Il est [2] constant que $GE \cdot EF :: CB \cdot CA$.
 Or [2] $DE \cdot EF :: CB \cdot CA$. Donc [1] $GE \cdot EF :: DE \cdot EF$. Donc [4] $GE = DE$. Pareillement [1] $GF \cdot FE :: BA \cdot CA$. Mais [2] aussi $DF \cdot FE :: BA \cdot AC$. Donc [1] $GF \cdot FE :: DF \cdot FE$. Donc [4] $GF = DF$. Le côté FE est commun ; ces deux triangles FEG & EFD sont donc équilatéraux entr'eux. Donc [5] l'angle $FED = FEG$. Mais aussi [6] l'angle $ACB = FEG$. Donc [7] l'angle $ACB = FED$. De même $EFD = EFG$ [6] ; & $BAC = EFG$ [6]. Donc [7] l'angle $BAC = EFD$. Donc [8] l'angle $FDE = ABC$. Les triangles ACB & FDE sont donc équiangles l'un à l'autre, ce qu'il falloit démontrer.

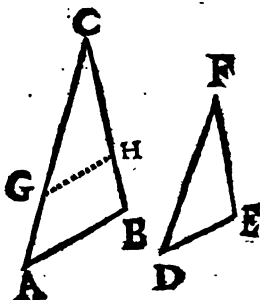
COROLLAIRE I.

Si un triangle, par exemple ABC , a un de ses angles ACB égal à un angle DFE d'un autre triangle DEF ; & si les côtes CA & CB qui comprennent cet angle ACB , sont proportionnels aux deux côtes FD & FE qui compren-

- [1] Part. 1. Prop. pref.
- [2] Supposit.
- [3] Cor. 3. déf. 12. Algeb.
- [4] Part. 2. Prop. 8. Algeb.
- [5] Cor. 2. Prop. 35. Geo.
- [6] Par construction.
- [7] Ax. 18. gener.
- [8] Cor. 4. Prop. 32. Geo.

ment un pareil angle dans l'autre triangle ; c'est à

dire, si $AC . CB :: DF . FE$: je dis que ces deux triangles seront équiangles entre eux, de telle manière que les angles opposés aux antécédens de cette analogie seront égaux entre eux, de même que ceux qui seront opposés aux conséquens. Pour le



démontrer, sur le plus grand des antécédens de cette analogie, par exemple sur le côté CA , on prendra $CG = FD$, & sur CB on prendra $CH = FE$. Ce qui est possible ; car si l'antécédent $AC > FD$, on aura aussi le conséquent $CB > FE$; puisque $* AC . DF :: CB . FE$. Enfin on mènera la ligne GH , & on aura [2] le triangle CGH , équilateral, & équiangle au triangle FDE .

Puisque $* AC . CB :: DF = GC . FE = CH$; on aura [2] $AC . GC :: CB . HC$; & [3] $AC - GC . GC :: CB - HC . HC$, c'est à dire ; $AG . GC :: BH . HC$. La ligne CH sera [4] donc parallèle à AB . L'angle CAB sera [5] donc égal à CGH . Mais aussi [6] l'angle $FDE = CGH$. Donc [7] l'angle $CAB = FDE$. Pareillement [5] l'angle $CBA = CHG$, & [6] $FED = CHG$. Donc [7] $CBA = FED$. Ces

* *Supposit. & Part. 2. Cor. Prop. 3. Algeb.*

[1] *Part. 1. Prop. 35. Geo.* [2] *Part. 2. Cor. Prop. 3. Alg.*

[3] *Part. 4. Cor. Prop. 3. Algeb.*

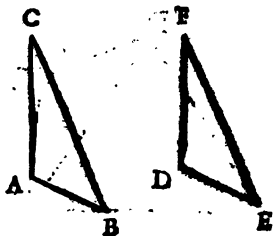
[4] *Part. 2. Prop. 51. Geo.* [5] *Part. 1. Prop. 24. Geo.*

[6] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.* [7] *Ax. 18. gen.*

deux triangles ABC & DEF seront donc [°] semblables.

COROLLAIRE III.

Si un triangle a un de ses côtés égal au côté d'un autre triangle ; & si deux des angles qui ont leurs sommets dans les extrémités de ce côté du premier triangle, sont égaux à deux angles qui ont aussi leurs sommets dans les extrémités de ce côté de l'autre triangle, chacun à chacun : ces deux triangles seront égaux entre eux en toutes manières. Soit



le triangle ABC dont le côté AC soit égal au côté DF du triangle DEF ; dont l'angle ACB soit égal à l'angle DFE , & dont l'angle CAB soit égal à l'angle FDE : il est * évident que le troisième angle $ABC = DEF$. Donc [°] $AC . DF :: AB . DE$. Mais [°] $AC = DF$. Donc aussi $AB = DE$. Enfin [°] comme AB est à DE , ainsi BC est à EF . Or on vient de voir que $AB = DE$. Donc aussi $BC = EF$. Ces deux triangles ABC & DEF sont donc équilatéraux, ils sont donc égaux l'un à l'autre, en toutes manières.

[°] Déf. 60. Geo.

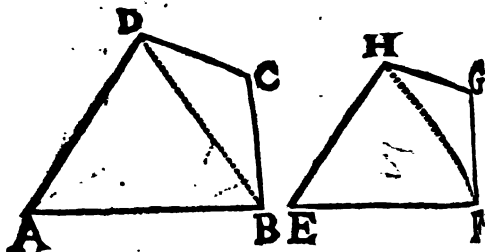
* Cor. 4. Prop. 31. Geo.

[°] Prop. présente, & Part. 2. Cor. Prop. 3. Algeb.

[°] Supposition, [°] Cor. 1. Prop. 35. Geo.

COROLLAIRE III.

On peut tirer de la Proposition présente une manière de décrire une figure rectiligne qui ait pour côté une ligne donnée, & qui soit semblable à une autre terminée par plus de trois côtés. Soit une figure donnée $ABCD$, à laquelle on se propose de décrire une figure semblable qui



ait pour un de ses côtés la ligne donnée EF . Du sommet d'un des angles de cette figure on mènera des lignes aux autres angles qui la diviseront en triangles. On mènera donc du point D , par exemple, la ligne DB , qui partagera cette figure en deux triangles. Ensuite ayant fait * l'angle $E=A$, il faut encore faire l'angle $EFH = ABD$, & mener les lignes FH & EH jusques au point de leur concours H . On fera enfin $FHG = BDC$ & $HFG = DBC$: je dis que la figure $EFGH$ sera semblable à $ABCD$. Car 1^o. il est constant [1] que les angles d'une de ces figures sont égaux aux angles de l'autre, chacun

* Cor. 4. Prop. 20. Geo. [2] Par construction.

à chacun. 2^o. Chaque triangle d'une de ces deux figures étant [1] équiangle à chaque triangle de l'autre, on aura [2] $EH . EF :: AD . AB$. On aura [2] ensuite $EF . FH :: AB . BD$. & $HF . FG :: DB . BC$. Donc [3] $EF . FG :: AB . BC$. On aura [2] encore $FG . GH :: BC . CD$. Enfin [2] $GH . HF :: CD . DB$. & $HF . HE :: DB . DA$. Donc [3] $GH . HE :: CD . DA$. Chaque côté d'une de ces Figures est donc proportionnel à chaque côté de l'autre. Ces deux Figures seront donc [4] semblables.

Il y a encore d'autres manieres de décrire une figure semblable à une autre. Je prendrai pour exemple la figure triangulaire dont on peut se servir pour décrire sur le papier un angle égal à un autre angle proposé sur le terrain.

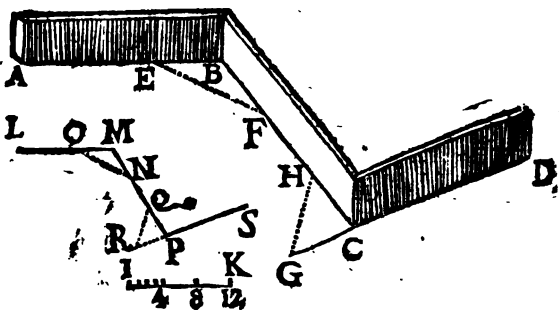
Pour décrire sur le papier un angle égal à l'angle r'entrant ABC , & un égal à l'angle saillant BCD ; sur les lignes BA & BC il faut prendre les parties BE & BF , chacune de quatre toises, par exemple, & mesurer la distance du point E au point F , que je suppose de huit toises. Ensuite sur la ligne droite DC prolongée on prendra aussi CG de quatre toises, & CH de quatre toises, on mesurera la distance du picquet G au picquet H ; & on écrira ces mesures sur un papier pour s'en souvenir. Sur un autre papier il faut mener à volonté, une ligne IK qu'on divisera, par exemple, en douze parties égales, qui servira d'une

[1] Par construction.

[2] Prop. pres.

[3] Part. I. Cor. Prop. 12. Algeb.

[4] Def. 60. Geom.



échelle de douze toises. On mènera la ligne LM & sur l'échelle IK , on prendra quatre parties égales qui représentent quatre toises, & on les transportera du point M en O . On prendra huit toises sur la même échelle IK & encore quatre toises dont avec la ligne MO on fera ^[1] le triangle ONM . Je dis que l'angle $LMO = ABC$. Car le triangle ONM a ^[2] ses côtés proportionnels aux côtés du triangle EFB ; puisque le côté ON contient autant des parties égales du côté NM , que le côté EF contient de celles du côté FB ; & que le côté NM contient autant de celles du côté MO , que le côté FB en contient du côté BE : on dira la même chose à l'égard des côtés MO , ON ; & BE , EF . Le triangle ONM est donc ^[3] équiangulaire au triangle EFB . L'angle EBF est donc égal à OMN , l'un & l'autre étant opposés aux côtés correspondants EF & ON . On trouvera par le même raisonnement que le triangle PQR est équian-

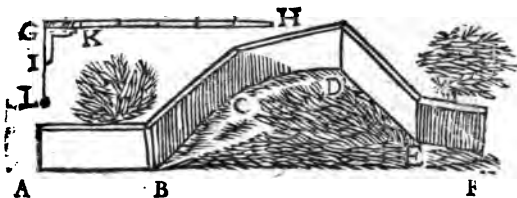
^[1] Cor. 4. Prop. 15.

^[2] Def. 13. Algebr.

^[3] Prop. 2. Prop. 11.

gle au triangle CGH , & ^[1] l'angle RPQ estant égal à GCH , on aura ^[2] $MPS = BCD$. On peut donc décrire, ou dessiner exactement le plan d'une maison, d'un jardin, d'un enclos, &c. en se servant d'une échelle, comme on vient de voir, afin de transferer leurs angles sur le papier; de mener ensuite des lignes qui serviront à représenter les côtés de cette Maison, Jardin, &c. dans la même proportion qu'on les a trouvés sur le terrain,

S'il est nécessaire de représenter un mur $ABCDEF$ construit en partie sur un plan horizontal, & le reste sur une petite montagne $BCDE$, tel qu'est quelquefois l'enceinte d'un



Parc; outre la longueur du mur considérée suivant la pente de la Montagne, il faut encore avoir égard à la longueur de la base de cette Montagne, & pour la connoître en toise, le mur toujours à niveau, c'est à dire parallèlement à la ligne horizontale AF . Dans cette circonstance il faut se servir d'une toise GH à laquelle on a ajusté une equerre ou triangle rectangle GIK , de sorte qu'au point G il y ait un filet attaché, & à son autre extremité un plomb L , & que ce filet touche librement le côté GI de ce triangle. Supposons pour exemple, qu'il faille

^[1] Part. 2. Prop. Pres.

^[2] Prop. 21. Geo. & ax. 9. gen.



connoître la longueur de la base MN de la Montagne MZN ; il faut poser à Niveau la toise OP , & alors on connoît ^[1] la longueur MS , les lignes OM & PS étant perpendiculaires à la ligne horizontale MN . On dira la même chose de QR , ST , &c. d'où on connoitra la ligne entiere ou base MN .

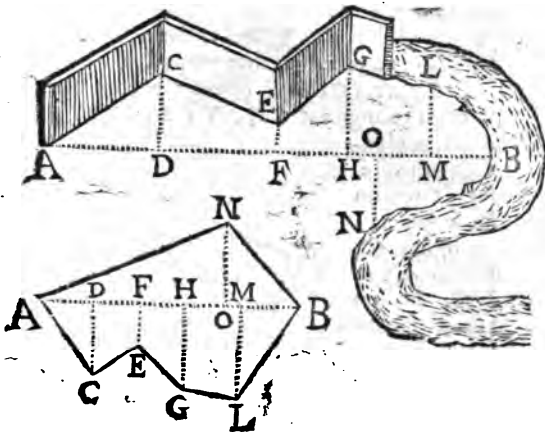
Si QR étoit la largeur supérieure d'une muraille, & si MT en étoit la base ; on connoitroit l'excès dont la base MT surpasse la largeur supérieure QR , en appliquant horizontalement la toise OP , & en ajustant à quelque point de cette toise le filet OM , de sorte que le plomb attaché à son extrémité inférieure touche légèrement le point M , alors la distance OP feroit ^[1] connoître l'excès MS .

On peut encore connoître la hauteur VZ de la Montagne, en mesurant toutes les hauteurs partiales $MO = VX$ ^[2], $PQ = XY$, &c. dont la somme est ^[2] égale à VZ .

Pour représenter proportionnellement la situation d'une muraille $ACEG$ qui forme plusieurs angles, ou le cours d'une Riviere $GLBN$, ou enfin une prairie, ou autre terrain semblable $ACGBN$: on peut ^[3] mener sur le terrain

^[1] *Part. 1. Prop. 37. Geo.* ^[2] *Ax. 3. gener.*

^[3] *Part. 1. Cor. 5. Prop. 34. Geo.*



une ligne droite AB du sommet A d'un angle, à un autre B , & mener ^[1] de chaque angle à cette ligne AB des perpendiculaires CD , EF , GH , &c. Après avoir mesuré les parties AD , DF , &c. de la ligne AB , & chacune des autres perpendiculaires, DC , FE , &c. il est facile de les décrire sur le papier, proportionnellement à celles qui sont sur le terrain, en se servant d'une ligne divisée en parties égales, que les Dessinateurs appellent *échelle*. Ensuite on mènera dans le dessein les lignes AC , CE , EG , &c. Les triangles ADC , LMB , BNO du dessein seront ^[2] semblables à ceux qui leur correspondront sur le terrain. Et si on mène des Diagonales dans les Trapefoïdes, on trouvera encore ^[3]

[1] *Part. 3. Cor. 2. Prop. 40. Geo.*

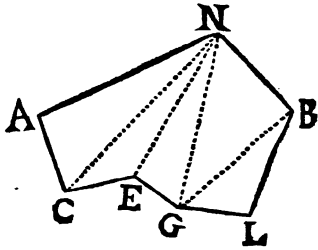
[2] *Cor. 3. Prop. 20. Geo. & Cor. 1. Prop. Pres.*

[3] *Cor. 3. Prop. 20. Geo. ax. 9. gen. & Cor. 1. Prop. pres.*

d'autres triangles semblables. On décrira donc par ce moyen des figures entières, qui seront semblables à celles qui sont proposées.

La Figure $ACGBN$ pouvoit encore estre divisée en triangles ACN , NCE , NEG , &c.

Alors, après avoir mesuré sur le terrain la longueur des lignes AC , CN , NA ; CE , EN ; &c. on auroit facilement * décrit sur le papier une figure



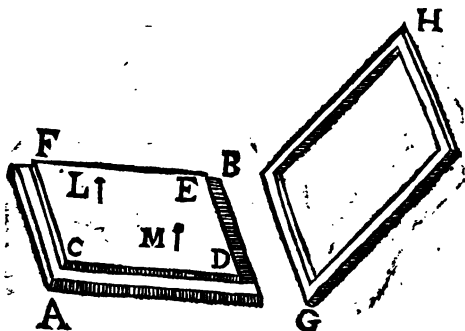
semblable à celle qui est sur le terrain, en se servant d'une échelle comme on a vû dans les operations precedentes. Cette maniere est fort exacte.

La description des figures semblables est tres-utile pour bien réussir dans le dessein, & pour faire ensuite des ouvrages considerables. Les Architectes, Massons, Charpentiers, Menuisiers, Serruriers, Sculpteurs, Fondeurs, &c. ne peuvent éviter de s'en servir, pour perfectionner des bâtimens, ou pour en construire de nouveaux sur le terrain dont on fait la representation; & généralement pour executer des ouvrages conformement aux desseins qu'on leur propose. Enfin cette pratique est fort necessaire aux Geographes, aux Ingenieurs mêmes, qui sont souvent obligés de représenter une Ville avec ses avenues, les Mareils, Rivieres, ou au-

* Cor. 4. Prop. 35. Geo. Def. 13. Algeb. & Part. 2. Prop. pref.

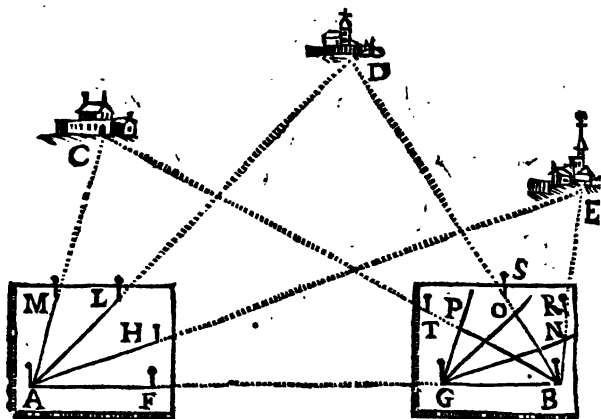
tres lieux qui en sont voisins. Il est donc encore avantageux de voir les methodes suivantes, pour décrire des Cartes Geographiques, pour représenter sur le papier un lieu particulier, une contrée, un païs, &c.

On se servira d'une planche de bois AB , dont chaque côté sera environ de 18 pouces. On appli-



quera un papier blanc sur cette planche en AB , qui y sera retenu par un cadre ou chassis GH , qu'on emboëttera au tour de l'espace $CDEF$. Ensuite on ajustera cette planche horizontalement ou à niveau, sur un support à trois pieds, semblable à celui qui est représenté dans la page 396. Les épingles L, M &c. serviront de pinnules & de petits piquets; il faut que ces épingles soient fort menues, afin qu'elles ne fassent que de petits trous. Cet instrument est connu sous le nom de Planchette.

Pour représenter sur le papier plusieurs Villages, par exemple C, D, E , il faut prendre une distance AB connue, de 400 toises, d'une demie lieue, &c. en sorte que de ses extremités A & B on découvre ces Villages C, D, E . Il faut ap-



plier la planchette vers l'extrémité *A*, & ficher une épingle en *A* perpendiculairement à la surface de cette planchette. Il faut en ficher encore une en *F*, de sorte qu'en la regardant par le bas elle soit en même ligne droite [1] que les extrémités *A* & *B*. Cette ligne *AF* servira d'échelle, qu'on divisera en autant de parties qu'on sçait que la ligne *AB* contient de toises ou de lieux, &c. Il faut ensuite ficher les épingles *H*, *L*, *M*, de sorte qu'en regardant l'épingle du point *A*, ces autres épingles *H*, *L*, &c. & les Clochers, ou autres lieux remarquables de ces Villages *E*, *D*, *C*, soient aussi en ligne droite : & on menera les lignes droites *AH*, *AL*, *AM*, sur lesquelles il faut écrire le nom des Villages où elles sont dirigées, afin de s'en souvenir.

Enfin il faut transporter la planchette vers l'autre extrémité *B* de la distance *AB*; de sorte que

[1] *Part. 1. Cor. 5. Prop. 34. Geo.*

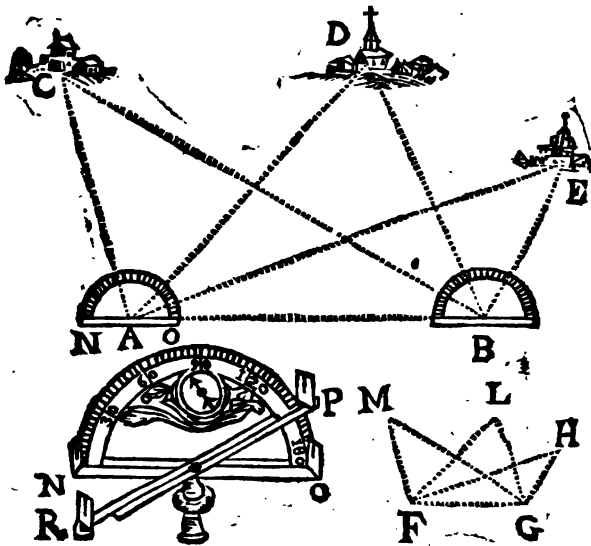
le point F se trouve en B , & que les épingles fichées en B & en G , & le point A se trouvent en ligne droite. Alors par le point B , on menera vers ces mêmes Villages E, D, C les lignes droites $BE, BD, \& BC$, en fichant les épingles R, S, T . Les points N, O, P , où ces dernières lignes couperont les premières, seront ceux où il faut représenter ces Villages E, D, C . Il est évident ^[1] que ces triangles GBP , & ABC sont semblables; puisque l'opération même les rend équiangles. Donc $AB \cdot BC :: GB \cdot BP$, & en connoissant le nombre des toises, des lieues, &c. de l'échelle GB , on connoîtra le nombre de celles du côté BP , en cherchant avec un compas combien BP contient des parties égales de GB . Ces parties feront aussi connoître celles de BC . On dira la même chose à l'égard des autres triangles GBO, GBN , &c.

Il peut arriver que la planchette est quelquefois trop petite, & que les points de concours N, O, P , &c. ne peuvent se rencontrer sur la surface; alors on se servira de la méthode suivante.

Après avoir pris une distance connue AB ; comme dans la pratique précédente; au lieu de la planchette, il faut poser horizontalement au point A un demi cercle NOP divisé en degrés, de sorte que par les pinnules $N, \& O$ ajustées aux extrémités de son diamètre, on puisse appercevoir quelque marque au point B . Ce demi cercle demeurant fixe en cette situation, il faut diriger les pinnules $R \& P$ de la règle mobile RP attachée au centre du demi cercle, vers chacun de ces Villages dont est question; observer de

[1] *Part. I. Prop. pres.*

combien de degrés est l'angle CAB , par exemple, de combien est l'angle DAB , &c. & écrire le nombre des degrés, qui sont [1] la mesure de chacun de ces angles, pour s'en souvenir. On transportera cet instrument à l'autre station B ,



& on observera aussi le nombre des degrés qui conviennent aux angles CBA , DBA , &c. Enfin on menera sur le papier la ligne FG sur laquelle on fera [2] les triangles MGF , FLG & FGH équiangles aux triangles ABC , ABD , ABE qui sont sur le terrain, & qui leur seront

[1] Prop. 10. Geo.

[2] Cor. 4. Prop. 10. & Cor. 4. Prop. 31. Geo.

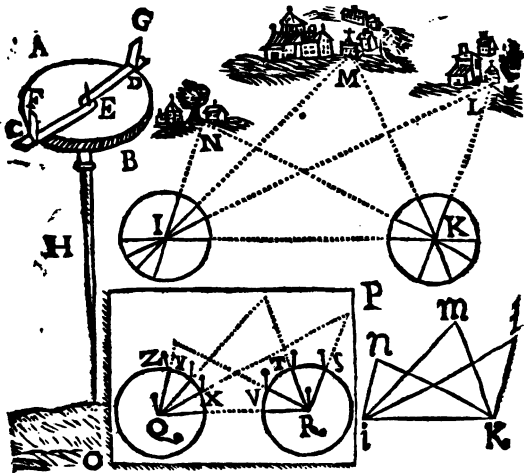
[¹] semblables. Les Villages *C*, *D*, & *E* seront représentés dans les points *H*, *L* & *M*. On divisera la ligne *FG* dans un nombre de parties égal à celui qui est connu dans la ligne *AB* pour servir d'Echelle. On trouvera [¹] enfin que *FG*, *GH* : : *AB*. *BE*. &c.

Au lieu des Villages *E*, *D*, *C*, si on avoit fait attention aux sommets des angles d'un parc ou enclos, d'une prairie, &c. on auroit aussi pu se servir de ces deux dernières méthodes, pour décrire une figure semblable à celle de ce terrain ; & pour en avoir les côtés, on auroit mené des lignes du point *E* au point *D*, & du point *D* au point *C*.

La Boussole qu'on a ajustée dans le plan du demi cercle, est utile à faire connoître le Nord & le Midi du terrain dont est question, par le moyen d'une aiguille aimantée posée en équilibre sur un pivot, & dont une des extrémités se tourne vers le Nord, & l'autre vers le Midi.

On peut encore se servir de l'instrument *AB*, qui n'est qu'une planche de bois, taillée en forme de cercle, de douze ou quinze pouces de diamètre, & de trois quarts de pouce d'épaisseur, ou environ. Il faut placer dans le centre *E* un pivot ou aiguille fine & déliée, & ajuster à ce pivot une regle mobile fabriquée de sorte que la ligne droite *CD* passe par le centre *E*. Il faut encore ajuster à cette regle deux pinnules de telle maniere que leurs côtés *CF* & *DG* aient leurs extrémités dans la ligne droite *CD*, & soient

[¹] *Part. I. Prop. pres,*



perpendiculaires au plan de la règle Le trou du pivot doit être petit, afin que son centre se trouve exactement dans la ligne *CD*. On applique cet instrument à l'extrémité d'un bâton ou support *H*. Il faut mettre sous cette règle *CD* un papier blanc, auquel on aura collé par le dessous au milieu un autre petit papier, pour empêcher que le trou du pivot ne soit augmenté, & que rien n'y soit déchiré pendant l'opération. Il faut ensuite avoir la précaution de coller ce papier blanc à la planche de bois en trois ou quatre petits endroits, par l'extrémité seulement.

Pour se servir de cet instrument, il faut le poser, par exemple, en *I*, dirigeant les côtés *CF* & *DG* des pinnules en ligne droite vers un autre point *K*, d'une distance connue & un peu grande à proportion que les lieux qu'on veut représenter

représenter sur le papier, sont éloignés. La règle mobile demeurant située de manière que la ligne droite CD soit sur la ligne IK , il faut sur le papier blanc de dessous décrire une ligne avec du crayon ou de l'encre, sur laquelle on écrit, *Ligne de stations*. On fait la même chose à l'égard des Villages N, M, L , Moulins, Hameaux, &c. en écrivant les noms sur les lignes qui leur appartiennent. Après cela il faut ôter le papier sur lequel on vient de mener ces lignes, & transporter l'instrument en K . Après y avoir appliqué un nouveau papier blanc, on dirigera la règle mobile vers le premier point de station I , & ensuite vers les Villages N, M & L , comme dans l'opération précédente, & on mènera des lignes sur le nouveau papier, qui exprimeront les angles IKN, IKM , &c.; & sur ces lignes on écrira encore le nom des lieux où elles seront dirigées. Il faut ensuite prendre ces deux papiers, & poser leurs centres sur un autre papier OP en Q , & en R , observant que deux de leurs lignes qui avoient été dirigées vers I & K fassent la ligne droite QR , ce qui sera facilité par une ligne droite menée sur le papier OP . Ensuite avec la pointe d'une épingle il faut marquer sur le papier OP les points Q, R, S, T, V, X, Y, Z , pour y mener des lignes jusqu'à leurs autres points de rencontre, & décrire la figure $iklmn$, dont chaque triangle est [1] semblable à chacun de ceux de la figure $IKLMN$. Enfin on décrira les Villages aux points l, m , & n , avec leurs noms à côté.

[1] Cor. 4. Prop. 31. & Part. 1. Prop. 32. Geo.

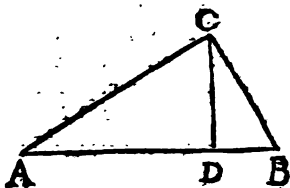
PROPOSITION LIII.

Dans un triangle rectangle, la ligne menée du sommet de l'angle droit perpendiculairement au côté qui lui est opposé, divise ce triangle en deux autres qui lui sont semblables.

DEMONSTRATION

Soit le triangle ABC dont l'angle ACB est droit; du sommet C de cet angle soit menée la ligne CD perpendiculairement au côté AB ; Je dis que les triangles ADC & CDB sont semblables au triangle ABC .

Car l'angle droit ADC du triangle ADC est [1] égal à l'angle droit BCA ; & l'angle DAC est commun aux



deux triangles ABC & ADC ; le troisième angle ACD est [2] donc égal au troisième ABC du triangle ACB . Le triangle CAD est [1] donc semblable au triangle ABC .

Pareillement l'angle $CDB = ACB$, & l'angle CBA est commun aux deux triangles CDB , & ACB ; le troisième angle BCD est donc [2] égal au troisième CAB du triangle ABC , [3]

[1] Cor. 1. Prop. 20. Geo.

[2] Cor. 4. Prop. 31. Geo.

[3] Part. 1. Prop. 52. Geo.

triangle BCD est donc semblable aussi au triangle ABC ; ce qu'il falloit demonst^rer.

COROLLAIRE I.

On vient de voir dans la demonstration de la proposition presente, que l'angle $ACD = DBC$, que l'angle $CAD = DCB$, on sçait aussi [1] que l'angle droit $ADC = CDB$. Les triangles ADC & CDB sont donc [2] semblables l'un à l'autre, & découvrent évidemment les verités suivantes.

1°. La ligne perpendiculaire CD est une moyenne proportionnelle entre les parties AD & DB du côté opposé à l'angle droit ACB . Car [1] le côté AD du triangle ADC est au côté DC du triangle DBC , comme le côté DC du triangle ADC est au côté DB du triangle DBC ; c'est à dire [2] que $AD \cdot DB = DC^2$.

2°. Le côté AC est une ligne moyenne proportionnelle entre le côté entier AB & la partie AD . Car [1] le côté entier AB du triangle ABC est au côté AC du triangle ADC ; comme le côté AC du triangle ABC est au côté AD du triangle ADC ; c'est à dire que $AB \cdot AD = AC^2$.

3°. Le côté BC est une ligne moyenne proportionnelle entre le côté AB & la partie DB . Car [1] le côté AB du triangle ABC est au côté CB du triangle CDB , comme le côté CB du triangle CAB est au côté DB du triangle CDB ,

[1] Cor. 3. Prop. 20. Geo.

[2] Part. 1. Prop. 52. & Part. 2. def. 69. Geo.

[3] Def. 15. Algeb.

COROLLAIRE II.

Le Corollaire precedent est le fondement d'une méthode dont on peut se servir , pour trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données. Soient

les lignes

AB & CD ;

si on se propose d'en

chercher

encore une,

qui soit telle

que AB soit

à cette li-

gne cher-

chée, comme cette ligne cherchée est à CD ; il

faut mener une ligne indéfinie EF , & sur cette

ligne prendre les parties EG & GH égales aux

lignes données AB & CD . Ensuite , prenant la

ligne totale EH pour un diamètre , ou sa moi-

tié EL pour un rayon , il faut décrire la demie

circonférence EMH , & par l'extrémité G de

la ligne $EG = AB$ il faut [¹] mener une per-

pendiculaire à EH , & la prolonger jusqu'à ce

qu'elle se termine dans la demie circonférence

au point M : Je dis que cette perpendiculaire

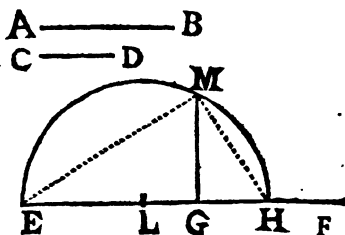
GM est une moyenne proportionnelle entre EG

& GH . Car l'angle EMH est [²] droit ; GM

est [³] perpendiculaire à EH . Donc [⁴] GM est

une moyenne proportionnelle entre AB & CD ,

c'est à dire que $\therefore EG = AB . GM . GH = CD$.



[¹] Part. 2. Cor. 2. Prop. 5. Geo.

[²] Cor. 7. Prop. 27. Geo.

[³] par construction.

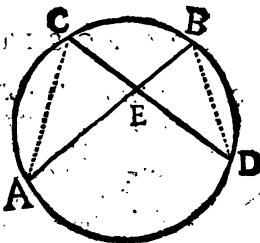
[⁴] Part. 1. Cor. 1. Prop. prop.

PROPOSITION LIV.

Si deux cordes se coupent dans un cercle, les parties de l'une sont reciproquement proportionnelles aux parties de l'autre.

DEMONSTRATION

Soient les cordes AB & CD qui se coupent mutuellement au point E pris dans le cercle $ADBC$: Je dis que les parties de ces cordes sont entr'elles en rapport reciproque; c'est à dire, par exemple, que $CE \cdot EB :: AE \cdot ED$. Pour le démontrer; d'une extrémité C d'une de ces cordes, je mene une ligne à l'extrémité A d'une autre corde; & par les autres extrémités B & D , je mene encore une autre ligne BD .



Les triangles ACE & EBD sont équiangles. Car ^[1] l'angle $CEA = BED$, & ^[2] l'angle $ACE = EBD$; enfin ^[3] l'angle $CAE = EDB$. Ces triangles ont ^[4] donc leurs côtés homologues

[1] Part. I. Prop. 22. Geo.

[2] Prop. 27. Geo. premiere circonstance.

[3] Prop. 27. ou Cor. 4. Prop. 31. Geo.

[4] Part. I. Prop. 52. Geo.

gnes proportionnels. Donc $CE . EB :: AE . ED$, ou $AE . EC :: ED . EB$, ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E I.

Le rectangle compris sous les parties CE & ED d'une de ces cordes est donc égal au rectangle compris sous les parties AE & EB de l'autre. Car, puisque $CE . EB :: AE . ED$, on [1] aura $CE \times ED = EB \times AE$, c'est à dire, [2] le rectangle compris sous CE & ED , égal au rectangle compris sous EB & AE .

P R O P O S I T I O N I V.

Si d'un point pris hors d'un cercle on mène deux lignes droites, qui, étant terminées à sa circonférence, la coupent; ces lignes entières & leurs parties qui seront hors du cercle, seront entr'elles reciproquement proportionnelles.

Si une de ces lignes coupe la circonférence, & si l'autre la touche; la touchante menée de ce point pris hors le cercle au point d'attouchement, sera une moyenne proportionnelle entre l'autre ligne entière, & sa partie qui se trouvera hors le cercle.

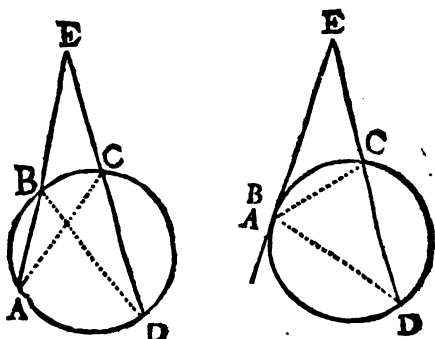
D E M O N S T R A T I O N

Soit le point E pris hors le cercle $ADCB$; de ce point E soient menées les lignes EA

[1] Prop. Prop.

[2] Prop. 2. Algeb.

[3] Cor. 2. Def. 53. Geo.



& ED qui sont terminées à la circonférence, & qui la coupent, ou dont une touche cette circonférence, & l'autre la coupe : Je dis que $ED : EA :: EB . EC$, car [1] l'angle $BDE = EAC$, l'un & l'autre ayant pour mesure la moitié du même arc BC . L'angle AED est commun aux deux triangles AEC & BED . Le troisième angle EBD est [2] donc égal au troisième ACE . Les côtés homologues des triangles EBD & EAC sont [3] donc proportionnels entr'eux. Donc le côté ED du triangle EBD est au côté EA du triangle ECA , comme le côté EB du triangle EDB est au côté EC du triangle EAC , ce qu'il falloit démontrer.

Il est évident que, si la ligne EA , par exemple, est touchante, cette ligne EA devient égale à EB . donc $ED : EA = EC$.

[1] Prop. 27. Geo.

[2] Cor. 4. Prop. 31. Geo.

[3] Part. 1. Prop. 52. Geo.

COROLLAIRE

Le rectangle compris sous la ligne entiere ED & sa partie EC qui est hors le cercle est égal au rectangle compris sous l'autre ligne entiere EA , & sous sa partie EB aussi exterieure au cercle, Car $ED \cdot EA :: EB \cdot EC$. Donc $ED \times EC = EA \times EB$. Il est encore évident que le rectangle compris sous la ligne entiere ED , terminée à la circonférence en coupant le cercle, & sous la partie EC , est égal au quarré de la touchante EA menée du même point E . Car, puisque $ED \cdot EA = EC \cdot EA$, on aura $ED \times EC = EA \times EA$. Enfin si du même point E on mene plusieurs lignes qui se terminent à la circonférence en coupant le cercle; les rectangles compris sous ces lignes entieres & sous leurs parties exterieures au cercle seront égaux entr'eux: puisque chacun est égal au quarré de la touchante.

PROPOSITION LVI.

Les parallelogrammes semblables sont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues.

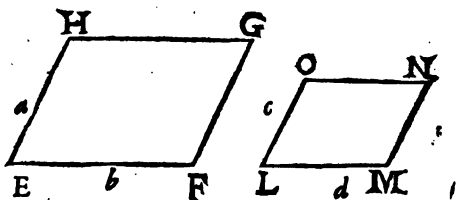
Les triangles semblables sont aussi entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues.

DEMONSTRATION

Soient les parallelogrammes semblables EG & LN , & soit nommé a le côté EH , & b le côté EF du parallelogramme EG . Soit enfin

[¹] Prop. Pref.

[²] Prop. 2. Algeb.



nommé c le côté LO , & d le côté LM du parallélogramme LN : Je dis que $EG . LN :: aa . cc$; que $EG . LN :: bb . dd . \&c.$ Car les parallélogrammes EG & LN étant ^[1] semblables, on a ^[2] $a . c :: b . d$. Donc ^[3] $ad = cb$. Mais ^[4] le parallélogramme EG est à $LN :: ab . cd$. En multipliant les deux derniers termes de cette dernière analogie par ad & cb , on aura ^[5] $ab . cd :: aabd . ccba$. & en divisant ces deux derniers termes par ce qu'ils ont de commun qui est bd , on aura ^[6] $aabd . ccba :: aa . cc$. ces quatre rapports seront donc égaux entr'eux, $EG . LN :: ab . cd :: aabd . ccba :: aa . cc$, Donc $EG . LN :: aa . cc$.

Au lieu de multiplier ab par ad , & cd par cb , si on avoit multiplié ab par cb , & cd par ad , & continué le reste comme on vient de voir; on auroit aussi trouvé que $EG . LN :: bb . dd :: FG \times FG . MN \times MN^* :: GH \times GH . NO \times NO$.

Pour démontrer que le triangle EFH est au

[1] *Supposit.*

[5] *Prop. 5. Algeb.*

[2] *Part. 2. Def. 60. Geo.*

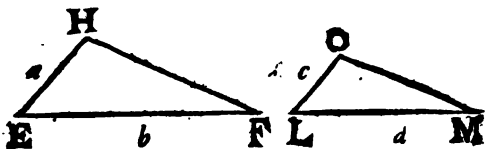
[6] *Prop. 6. Algeb.*

[3] *Prop. 2. Algeb.*

* *Part. I. Prop. 37. Geo.*

[4] *Part. I. Prop. 50. Geo.*

triangle $LMO :: aa. cc :: bb. dd :: FH \times FH. MO \times MO$; dans le raisonnement qu'on vient de faire pour les parallelogrammes, au lieu de EG on substituera [1] le triangle EFH ,



& au lieu de LN on substituera LMO . Alors la verité de la proposition presente sera évidente dans toutes ses circonstances.

Les parallelogrammes semblables EG & LN , ou les triangles semblables EFH & LMO , sont donc entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues, ce qu'il falloit démontrer.

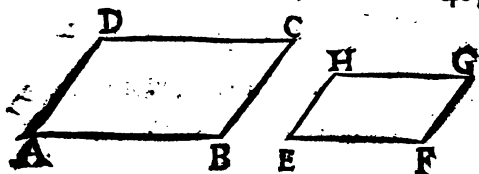
COROLLAIRE.

Si un parallelogramme, par exemple AC , à l'angle DAB égal à l'angle HEF d'un autre parallelogramme EG : Je dis que le raport de ce parallelogramme AC au parallelogramme EG sera composé des raports des côtés qui comprennent ces angles égaux. Car [2] le parallelogramme $AC. EG :: AB \times AD. EF \times EH$. Or [3] le raport de $AB \times AD$ au produit $EF \times EH$ est composé du raport de AB à EF , & de AD à EH ; ou de AB à EH & de AD à EF . Et

[1] Part. 2. Prop. 50. Geo.

[2] Part. 1. Prop. 50. Geo.

[3] Prop. 18. Algeb.



si ces deux parallelogrammes sont semblables, ils seront ^[1] entr'eux en raison doublée de celle d'un côté du premier, au côté homologue du second, Car ils sont ^[2] entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues; & ces quarrés sont ^[3] entr'eux en raison doublée d'un de ces côtés à un autre côté homologue.

On démontrera de la même maniere que si un angle d'un triangle est égal à un angle d'un autre, le rapport d'un de ces triangles à l'autre, est ^[4] composé des rapports des côtés qui comprennent ces angles égaux. Et si ces triangles sont semblables, le rapport de l'un à l'autre ^[5] est doublé de celui du côté d'un de ces triangles au côté homologue de l'autre.

PROPOSITION LVII.

1°. Le quarré du côté opposé à l'angle droit d'un triangle rectiligne est égal à la somme des quarrés des côtés qui comprennent cet angle droit.

2°. Reciproquement si le quarré d'un des côtés d'un triangle est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés; l'angle opposé à ce côté est droit.

^[1] Def. 18. Algeb. & Cor. Prop. 18. Algeb.

^[2] Prop. Pres.

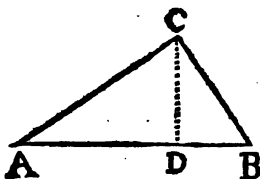
^[3] Cor. Prop. 18. Algeb.

^[4] Part. 2. Prop. 50. Geo. & Prop. 15. Algeb.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le triangle ABC rectangle en C : Je dis que le carré de l'hypoténuse AB est égal au carré de AC & au carré de BC , pris ensemble.



Car du sommet C de l'angle droit ACB , ayant [1] mené la ligne CD perpendiculairement sur la base AB , le triangle ABC sera divisé en

deux autres triangles ADC & DBC , qui lui seront [2] semblables. Or [3] le triangle ABC est au triangle ADC comme le carré de AB au carré de AC ; & le même triangle ABC est au triangle CDB :: $ABq. BCq.$ Donc [4] $ABC. ADC + CDB$:: $ABq. ACq + CBq.$ Mais [5] le triangle ABC est égal à la somme des triangles $ADC + CDB$; le carré de AB est donc pareillement égal à la somme des carrés des côtés AC & BC , ce qu'il falloit démontrer.

$$\left(\begin{array}{l} ABC \cdot ADC :: AB^2 \cdot AC^2. \\ ABC \cdot CDB :: AB^2 \cdot CB^2. \end{array} \right)$$

$$\text{Donc } ABC \cdot ADC + CDB :: AB^2 \cdot AC^2 + CB^2.$$

$$\text{Mais } ABC = ADC + CDB.$$

$$\text{Donc } AB^2 = AC^2 + CB^2.$$

[1] Part. I. Cor. 2. Prop. 5. Geo.

[2] Prop. 53. Geo. [3] Prop. 56. Geo.

[4] Prop. 14. Algeb. [5] Ax 3. gen.

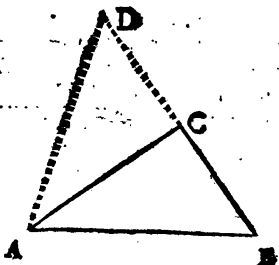
DEMONSTRATION

D E M O N S T R A T I O N

DE LA SECONDE PARTIE.

Soit le triangle ABC dont le côté AB est tel que son quarré est égal à la somme des deux quarrés du côté AC & du côté BC : je dis que l'angle ACB

opposé à ce côté AB est droit. Pour le démontrer ; par le point C sommet de l'angle ACB soit menée la ligne CD perpendiculairement à la ligne AC , & soit faite $CD = CB$. On



aura [1] $ADq = ACq + CDq$. Mais [2] $CDq = BCq$; puisque [3] $CD = BC$. Dans cette égalité $ADq = ACq + CDq$, au lieu de CDq , substituant CBq [4] ; on aura $ADq = ACq + CBq$. Mais [5] $ABq = ACq + CBq$. Donc [6] $ABq = ADq$. Donc [7] $AB = AD$. Ces deux triangles ACD & ABC seront donc équilatéraux l'un à l'autre, & [8] les angles opposés à côtés égaux dans l'un & dans l'autre triangle, seront égaux. Donc l'angle $ACB = ACD$. Donc l'angle ACB sera droit, ce qu'il falloit démontrer.

[1] Part. 1. Prop. Pref.

[2] Cor. 3. Prop. 5. Algeb.

[3] Par construction.

[4] Supposé.

[5] Cor. 4. Prop. 5. Algeb.

[6] Cor. 2. Prop. 35. Geo.

[7] Dem. 1. Geo.

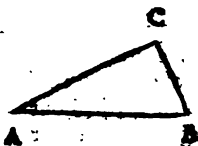
[8] Ax. 12. Geo.

COROLLAIRE I.

1°. Si on connoît la longueur des côtés AC & BC qui comprennent l'angle droit ACB , on connoitra [1] celle de la base AB . Car la base

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}.$$

2°. Si on connoît la longueur de l'hypoténuse AB , & un des autres côtés, par exemple AC , on connoitra aussi l'autre côté BC .



Car [1] $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$.

3°. Si un triangle rectangle a son hypoténuse égale à l'hypoténuse d'un autre triangle rectangle ; & si un des côtés qui comprennent l'angle droit d'un de ces triangles, est égal à un des côtés qui comprennent l'angle droit dans l'autre triangle, le troisième côté d'un de ces triangles sera égal au troisième côté de l'autre. Parceque le carré d'une de ces hypoténuses est [2] égal au carré de l'autre. Or retranchant de part & d'autre les carrés des autres côtés égaux, les restes seront [3] égaux. Les restes sont le carré du troisième côté d'un de ces triangles, & le carré du troisième côté de l'autre, dont les racines sont [4] égales.

COROLLAIRE II.

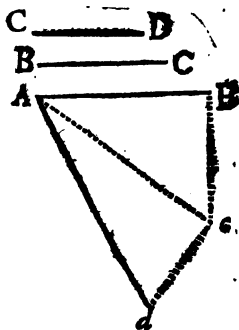
Pour décrire un carré égal à un nombre d'autres carrés proposés, à volonté, par exemple, à trois carrés dont les côtés soient AB , BC , & CD ; il faut mener par l'extrémité B de

[1] *Part. I. Prop. Prop.*

[2] *Cor. 3. Prop. 5. Algeb.* [3] *Art. 9. Géom.*

[4] *Cor. 4. Prop. 5. Algeb.*

la ligne AB la ligne Bc perpendiculairement à cette ligne AB , & égale au costé BC du second quarré proposé. Menez la ligne Ac . Alors [1] le quarré de $Ac = AB^2 + Bc^2$. Ensuite par le point A , ou par le point c extrémité de la ligne Ac , menez la ligne cd perpendiculairement à cette ligne Ac , & égale



au costé CD du troisiéme quarré proposé, enfin menez la ligne Ad . Le quarré de cette ligne $Ad = Ac^2 + CD^2$. [2] Mais le quarré de Ac est déjà égal aux quarrés de AB & de Bc . Donc [3] le quarré de Ad est égal à la somme des trois quarrés dont les costez sont AB , Bc , CD .

Si on avoit cherché un quarré triple du quarré dont le costé est AB ; il auroit fallu faire les perpendiculaires Bc & cd , égales chacune à la ligne AB . Alors le quarré de Ac valant deux fois le quarré de AB , & le quarré de cd valant [1] une fois le quarré de AB ; on auroit trouvé que le quarré de Ad qui vaut [2] les quarrés de Ac & de cd , auroit esté triple du quarré de AB . On continueroit de même, pour trouver un quarré quadruple.

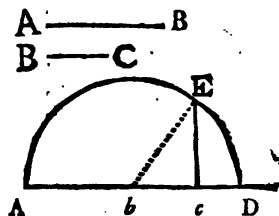
C'est ainsi qu'on peut faire l'addition & la multiplication des quarrés. A l'égard de la sou-

[1] Part. I. Prop. Pref. [2] Cor. 3. Prop. 5. Algeb.

[3] Demande 1. Gen. [4] Part. I. Prop. pref.

straction des quarez, on la peut faire par la methodé suivante.

Soient les lignes inégales AB & BC . Si on se propose de connoître le quarré dont le quarré de la plus grande AB surpasse le quarré de la plus petite BC ; après avoir mené la ligne AD d'une longueur suffisante,



on prendra sur cette ligne AD les parties $Ab = AB$, & $bc = BC$. Du point b comme centre, & d'une ouverture égale à Ab on décrira la demie circonference AED , & par le point c on menera une perpendiculaire cE qui se terminera à cette demie circonference en E . Enfin on menera le rayon bE . Alors ^[1] $bEq = bc^2 + cE^2$. Or ^[2] $bEq = ABq$. Donc $ABq = BCq + cEq$, c'est à dire que le quarré de AB surpasse le quarré de BC de la valeur du quarré de cE .

PROPOSITION LVIII.

1°. Le quarré du côté opposé à l'angle obtus d'un triangle rectiligne surpasse la somme faite des quarez des deux autres côtés, d'un excés égal à deux rectangles dont chacun est compris sous un des côtés, & sous la partie de ce côté prolongé, terminée par le sommet de l'angle obtus, & par une

^[1] Part. 1. Prop. Pres.

^[2] Cor. 1. Def. 29. Geo. Cor. 3. Prop. 5. Algeb. & demande 1. Gen.

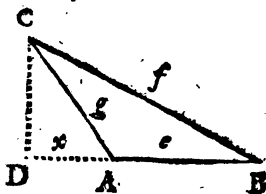
perpendiculaire menée du sommet de l'angle opposé, à ce côté prolongé.

2°. Le carré du côté opposé à l'angle aigu est moindre que la somme faite des quarrés des deux autres côtés, de la valeur de deux rectangles dont l'abacur est compris sous un de ces côtés & sous la partie de ce côté, terminée par le sommet de l'angle aigu, & par une perpendiculaire menée de l'angle opposé, à ce même côté.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le triangle obtusangle ABC ; soit prolongé un des côtés qui comprennent l'angle obtus CAB , par exemple BA ; & du point C sommet de l'angle ACB soit menée la perpendiculaire CD à ce côté BA prolongé: je dis que le carré du côté CB opposé



à l'angle obtus, excède la somme des quarrés des côtés AC & AB , de la valeur de deux rectangles compris sous AB & AD . Pour le démontrer, soit nommé e le côté AB ; f , le côté BC ; g , le côté AC ; & x , la ligne AD .

Si du carré du côté CA qui est gg , on retranche le carré du côté DA qui est xx , on aura [1] $gg - xx = CD^2$. Et si du carré de

[1] Part. 2. Cor. 1. Prop. 57. Geo.

CB qui est ff on retranche le carré de $DB = e + x$, qui est $ee + 2ex + xx$; on aura ^[1]
 $ff - ee - 2ex - xx = CD^2$,

$$\left. \begin{array}{l} gg - xx = CD^2 \\ ff - ee - 2ex - xx = CD^2 \\ \text{Donc } gg - xx = ff - ee - 2ex - xx. \\ gg = ff - ee - 2ex. \\ gg + ee = ff - 2ex \\ gg + ee + 2ex = ff. \end{array} \right\}$$

Donc ^[2] $gg - xx = ff - ee - 2ex - xx$.

Si on ajoute xx de part & d'autre du signe d'égalité de cette dernière équation, ^[3] on aura
 $gg = ff - ee - 2ex$.

Si on ajoute ensuite ee de part & d'autre du signe d'égalité de la dernière équation, on aura
 $gg + ee = ff - 2ex$.

Enfin si on ajoute $2ex$ encore de part & d'autre de la dernière équation $gg + ee = ff - 2ex$; on aura $gg + ee + 2ex = ff$. C'est à dire que le carré du côté CB, qui est ff , est égal à la somme des quarrés $gg + ee$ des deux autres côtes, & à deux rectangles ex , compris sous $AB = e$ & sous $AD = v$. Donc le carré ff du côté CB surpasse la somme des quarrés $gg + ee$ des deux autres côtes AC & AB de la valeur de deux rectangles compris sous AB & AD , ce qu'il falloit démontrer.

^[1] Part. 2. Cor. 1. Prop. 57. Geo.

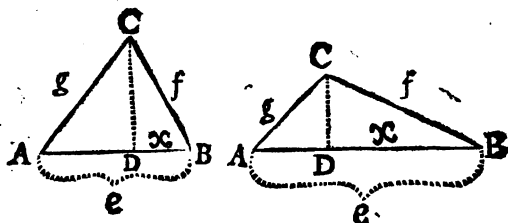
^[2] Ax. 18. Gen.

^[3] Ax. 4. Gen.

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soit le triangle ACB dont le côté AC est opposé à l'angle aigu ABC ; & du sommet C



D'un autre angle ACB soit menée la ligne CD perpendiculairement au côté opposé AB ; je dis que le carré du côté AC est moindre que la somme des carrés des deux autres costez AB & CB , de la valeur de deux rectangles dont chacun est compris sous le côté AB & sous la ligne DB terminée par le sommet B de l'angle aigu & par la perpendiculaire CD .

Si du carré de BC , qui est ff , on retranche le carré de DB qui est xx , on aura $[^1] ff - xx = CD^2$. & si du carré de AC , qui est gg , on retranche $ee - 2ex + xx$ qui est le carré de $e - x = AD$ partie du côté AB ; on aura $[^1]$ encore $gg - ee + 2ex - xx = CD^2$.

[¹] Part. 2. Cor. 1. Prop. 57. Geom.

$$\left. \begin{array}{l} ff - xx = CD^2 \\ gg - ee + 2ex - xx = CD^2 \\ \text{Donc } ff - xx = gg - ee + 2ex - xx. \\ ff = gg - ee + 2ex \\ ff + ee = gg + 2ex \end{array} \right\}$$

Donc [1] $ff - xx = gg - ee + 2ex - xx$.

Si on ajoute xx de part & d'autre du signe d'égalité de cette dernière équation; [2] on aura $ff = gg - ee + 2ex$.

Si on ajoute encore ee de part & d'autre du signe d'égalité de cette équation $ff = gg - ee + 2ex$; on aura $ff + ee = gg + 2ex$, c'est à dire que le carré du côté AC , qui est gg , est moindre que la somme des carrés $ff + ee$ des deux autres côtés AB & CB , de la valeur des deux rectangles ex , dont chacun est compris sous le côté $AB = e$ & sous la ligne $DB = x$, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Si de la dernière équation $gg + ee + 2ex = ff$ de la démonstration de la première Partie de la proposition présente on retranche $gg + ee$ de part & d'autre du signe d'égalité, il restera $2ex = ff - gg - ee$. Enfin si on divise chacune des deux parties de cette dernière équation par $2e$, on aura pour quotiens [3] égaux $x = \frac{ff - gg - ee}{2e}$. Ce qui donne une méthode

pour connoître la longueur de la ligne, ou par

[1] Ax. 18. *gen.*

[2] Ax. 4. *Gen.*

[3] Prop. 6. *Algeb.*

tie AD , lorsqu'on connoît la longueur de chacun des côtez d'un triangle obtusangle; & connoissant la ligne AD & le côté AC , on connoitra [1] la perpendiculaire CD , & enfin [2] on connoitra la surface du triangle obtusangle ABC ; ce qui est fort commode lorsque cette surface triangulaire est, par exemple, un Marest, un Etang, un Bois, un Village, &c. qu'on ne peut parcourir en ligne droite pour le diviser en triangles rectangles comme on a enseigné [3].

COROLLAIRE II.

Dans la demonstration de la seconde Partie de la proposition presente, si à chacune des deux parties de la penultième équation $ff = gg - e.e + 2ex$ on ajoute ee , & si de chacune de ces deux mêmes parties on retranche gg ; on aura $ff + ee - gg = 2ex$. Enfin si on divise l'une & l'autre des deux parties de cette dernière équation par $2e$, on aura [4] les quotients égaux $x = \frac{ff + ee - gg}{2e}$.

Lorsqu'on connoît la longueur de chacun des trois costez d'un triangle rectiligne ABC , cette dernière équation enseigne la maniere de connoître la longueur de la partie $DB = x$; & ensuite il est [1] facile de connoître la hauteur de ce triangle qui est la perpendi-

[1] Part. 2. Cor. 1. Prop. 57. Geo.

[2] Cor. 1. Prop. 40. Geo.

[3] Cor. 2. Prop. 40. Geo.

[4] Prop. 6. Algeb.

culaire $C D$. Et enfin [1] on connoitra la valeur de la surface.

La metode qu'on vient d'enseigner dans les Corollaires precedens pour trouver la mesure de la surface, ou de l'aire d'un triangle rectiligne dont on connoît seulement chacun des trois costez, satisfait à un problème fort utile dans la Geometrie pratique. Car quand on peut mesurer les costez d'un triangle, on peut toujours connoître la surface plus facilement, plus exactement & avec plus de briéveté par cette metode tres-simple, que par toute autre; puisque pour cela il n'est pas necessaire de se servir d'instrument divisé en degrez, ni de connoître aucune mesure d'angle, ni de l'usage des tables de Sinus; une seule toise ou chaine étant suffisante pour toute l'opération.

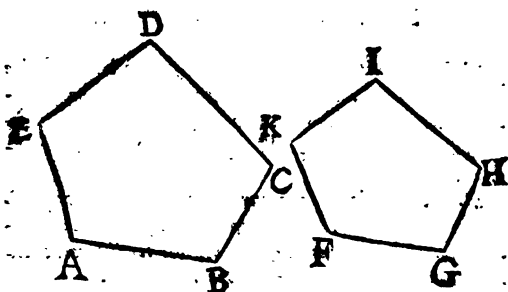
PROPOSITION LIX.

Les circuits de deux figures semblables sont entre eux comme un côté de l'une est à un côté homologus de l'autre.

DEMONSTRATION.

SOient les figures semblables $A B C D E$, & $F G H I K$: je dis que le circuit de la premiere est au circuit de la seconde, comme un côté de cette premiere, par exemple $A B$, est à un côté homologue $F G$ de la seconde. Car,

[1] Cor. 2. Prop. 40. Geo.



puisque [1] ces figures sont semblables, [2] on aura $AB.FG :: BC.GH.$ & $BC.GH :: CD.HI.$ & $CD.HI :: DE.IK$, enfin $DE.IK :: EA.KF$, la somme de tous les antec

$$\left. \begin{array}{l} AB.FG :: BC.GH :: CD.HI :: \\ DE.IK :: EA.KF. \\ \text{Donc } AB+BC+CD+DE+EA.FG+ \\ GH+HI+IK+KF :: AB.FG. \\ \text{ou } ABCDE.FGHKI :: AB.FG. \end{array} \right\}$$

cedens $AB+BC+CD+DE+EA$ est donc [3] à la somme de tous les conséquents $FG+GH+HI+IK+KF$, comme un antecédent AB est à un conséquent FG . C'est à dire, le contours ou circuit $ABCDEA$ est au circuit $FGHIK$ comme le côté AB est au côté FG . qui lui est homologue, ce qu'il falloit démontrer.

[1] Supposit. [2] Part. 2. Def. 60. Geom.

[3] Prop. 25. Algeb.

PROPOSITION LX.

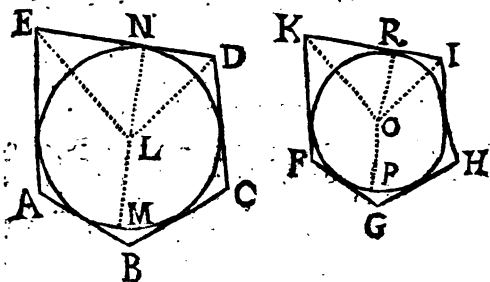
1^o Le circuit ou contour d'une figure circonscrite à un cercle, est au circuit d'une autre figure semblable circonscrite à un autre cercle, comme le diamètre de ce premier cercle est au diamètre du second.

2^o. Le circuit ou contour d'une figure inscrite à un cercle, est au circuit d'une autre figure semblable inscrite à un autre cercle, comme le diamètre de ce premier cercle est au diamètre du second.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les figures semblables $ABCDE$ & $FGHIK$ circonscrites à des cercles : je dis



que les circuits $ABCDE$ & $FGHIK$ sont entr'eux comme les diamètres MN & PR des cercles auxquels ces figures sont circonscrites. Pour le démontrer, aux points d'attouchemens N & R de deux côtés homologues soient menés les diamètres

metres MN & PR , & des centres L & O par les points E & D , K & I extremités de ces côtés homologues, soient menées les lignes LE & LD , OK & OI .

Les angles EDL & KIO sont ^[1] les moitez des angles EDC & KIH égaux ^[2] entr'eux; Donc ^[3] l'angle $EDL = KIO$. On démontrera de la même maniere que l'angle $DEL = KO$. Les triangles DEL & KIO sont donc ^[4] equiangles entr'eux. Donc ^[5] $ED . EL :: KI . KO$. Mais les touchantes ED & KI avec les rayons LN & OR forment ^[6] des angles droits ENL & KRO , qui sont ^[7] égaux entr'eux; & puisqu'on vient de voir que les angles NEL & RKO sont égaux entr'eux, les triangles ELN & KOR seront ^[8] equiangles entr'eux. On aura donc encore $EL . LN :: KO . OR$. de ces deux analogies on conclura ^[9] que $ED . LN :: KI . OR$. Donc ^[9] $ED . KI :: LN . OR$. Or ^[10] le contours $ABCDE . FGHIK :: ED . KI$. Dans l'analogie precedente au lieu du raport qui est entre ED & KI , substituant son égal, on aura $ABCDE . FGHIK :: LN . OR :: 2 LN = MN$ ^[11], & $OR = PR$. Donc enfin $ABCDE . FGHIK :: MN . PR$ ^[12], ce qu'il falloit demonst.

[1] Cor. 3. Prop. 29. Geo. [2] Def. 60. Geo.

[3] Ax. 12. Gen. [4] Cor. 4. Prop. 31. Geo.

[5] Part. 1. Prop. 52. Geo. [6] Prop. 12. Geo.

[7] Cor. 3. Prop. 20. Geo.

[8] Part. 1. Cor. Prop. 12. Algeb.

[9] Part. 2. Cor. Prop. 3. Algeb.

[10] Prop. 59. Geo.

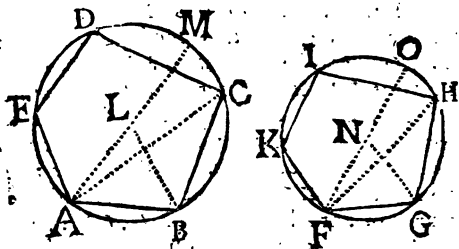
[11] Cor. Def. 31. Geo.

[12] Prop. 5. Algeb.

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les figures semblables $ABCDE$ & $FGHIK$ inscrites à des cercles : je dis que les circuits $ABCDE$ & $FGHIK$ sont en-



tr'eux comme les diamètres AM & FO des cercles auxquels ces figures sont inscrites. Pour le démontrer, par les extrémités A & F de deux côtés homologues soient menés les diamètres AM & FO , & par les autres extrémités de ces mêmes côtés soient menés les rayons BL & GN . Enfin par une des extrémités B ou A d'un de ces côtés homologues soit menée une ligne AC terminée au sommet d'un des autres angles prochains ; & par le point F extrémité d'un autre côté homologue on menera une pareille ligne FH .

Les triangles ABC & FGH sont [*] semblables, de sorte que les angles ACB & FGH qui ont leurs sommets dans les circonferences de cercles, sont égaux entr'eux. Les angles ALB & $FN G$ dont les sommets sont dans les centres des

[*] Cor. 2. Prop. 52. Geom.

mêmes cercles, sont donc ^[1] aussi égaux entr'eux, chacun étant ^[2] double des autres angles égaux ACB & FHG . Or à cause de l'égalité des rayons AL & BL d'un même cercle, & des rayons FN & NG ; on aura $AL, LB :: FN, NG$; & ^[3] les triangles ABL & FGN seront semblables. Donc ^[4] $AB, FG :: AL, FN$. Mais ^[5] $ABCDE, FGHIK :: AB, FG$. Donc ^[6] $ABCDE, FGHIK :: AL, FN :: AE, FN :: AM, FO$ [7]. Enfin $ABCDE, FGHIK :: AM, FO$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Puisque ^[8] les cercles sont des figures semblables, infinitateres, circonscrites ou inscrites à eux-mêmes, il est ^[9] évident que les circonférences des cercles sont entr'elles comme leurs diamètres.

PROPOSITION LXL

Si des sommets de deux angles égaux & correspondans dans les polygones semblables, on mene des lignes droites aux sommets des autres angles opposés; chacun de ces polygones sera divisé dans un nombre égal de triangles semblables.

[1] Ax. 6. Gen.

[2] Cor. 6. Prop. 27. Geo.

[3] Cor. 1. Prop. 52. Geo. ou Cor. 5. Prop. 36. Cor. 2. Prop. 34. & Ax. 12. Gen.

[4] Part. 2. def. 60. Algeb.

[5] Prop. 59. Geo.

[6] Cor. 3. def. 12. Algeb.

[7] Prop. 5. Algeb.

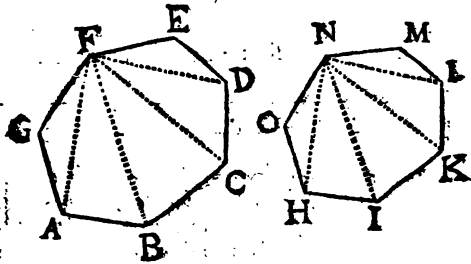
[8] Cor. Prop. 47. Geo.

[9] Prop. pref.

DEMONSTRATION.

Soient les polygones semblables $ACEG$ & $SHKMO$; si des sommets F & N des angles égaux EFG & MNO on mène des lignes droites FA , FB &c. NH , NI &c. aux sommets des autres angles opposés; Je dis 1°. qu'un de ces polygones contiendra autant de triangles, que l'autre; 2°. que les triangles d'un de ces polygones seront semblables aux triangles de l'autre, chacun à chacun.

Lorsque du sommet F on mène des lignes droites aux sommets des angles opposés, les



deux prochains E & G en étant exceptés, on partage le polygone en autant de triangles qu'il y a de côtés moins deux de ces côtés, quelque nombre qu'il y en ait. C'est à dire que s'il y a cinq côtés on le partage en trois triangles; s'il y en a huit, on le partage en six, &c. Le nombre des côtés surpasse de deux celui des triangles qui en font partie: parcequ'il est nécessaire que les deux côtés FG & FE qui comprennent cet angle F , soient joints avec les côtés suivans DE & AG pour former des triangles avec les lignes

FA & FD qu'on a menées : parceque FD & DE , ou FA & AG , ne peuvent seules terminer un espace. Et ces deux côtés FG & FE étant retranchés du nombre des côtés du polygone, le reste est égal au nombre des triangles. Car alors chacun de ces triangles a pour baie un côté du polygone. Dans les polygones semblables il y a un pareil nombre de côtés ; puisque [1] chaque côté de l'un est proportionnel à chaque côté de l'autre. Retranchant 2 du nombre de ces côtés, de part & d'autre, les restes égaux [2], exprimeront le nombre des triangles, égal dans chaque polygone.

Puisque les figures sont [3] semblables, [4] on a $FG . GA :: NO . OH$; & outre cela l'angle $FGA = NOH$. Les triangles GFA & OHN sont donc [5] semblables entr'eux ; partant $FA . GA :: NH . OH$, & l'angle $GAF = OHN$. Mais [1] $GA . AB :: OH . HI$, & l'angle $GAB = OHI$. On concluera donc de ces deux

$$\left. \begin{array}{l} FA . GA . AB \\ NH . OH . HI \end{array} \right\} \text{Donc } FA . AB :: NH . HI . \&c.$$

dernières analogies [6] que $FA . AB :: NH . HI$, or [6] l'angle $FAB = NHI$. Les triangles AFB & HNI sont [4] donc semblables. On démontrera de la même manière que les triangles BCF & IKN , FCD & NKL , &c. sont semblables. Les polygones semblables $ACDE$

[1] Def. 60. Geo.

[2] Ax. 9. Geo.

[3] Supposit.

[4] Cor. 1. Prop. 52. Geo.

[5] Part. 1. Cor. Prop. 12. Algeb.

[6] Ax. 9. Geo.

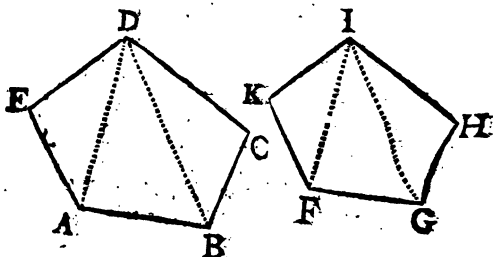
& $H K M O$ seront donc divisés chacun en un pareil nombre de triangles, & chaque triangle d'un de ces polygones, sera semblable à chaque triangle correspondant de l'autre polygone, ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION LXII.

Les polygones semblables sont entr'eux, comme les quarrés de leurs côtés homologues.

DEMONSTRATION

Soient les polygones semblables $A B C D E$ & $F G H I K$: je dis que $A B C D E$ est à $F G H I K$, comme le quarré de $D C$, par exemple, est au



quarré de $I H$. Pour le démontrer, des sommets D & I des angles égaux $E D C$ & $K I H$ soient menées aux sommets des autres angles les lignes $D A, D B, I F, I G$.

Les triangles $D E A$ & $I K F, A B D$ & $F G I, D B C$ & $I G H$, seront [1] semblables.

[1] Prop. 62. Géom.

Or ^[1] $DEA . IKF :: DAq . IFq$; pareille-
ment $ABD . FGI :: DAq . IFq$. Donc $DEA .$
 $IKF :: ABD . FGI$.

Enfin $ABD . FGI :: DBq . IGq$. & $DBC .$
 $IGH :: DBq . IGq$. Donc ^[2] $ABD . FGI ::$
 $DBC . IGH$.

On trouve donc cette suite de rapports égaux
 $DEA . IKF :: ABD . FGI :: DBC . IGH$.
La somme des triangles antecedens , dont est
composée la surface $ABCDE$, est ^[3] donc à
la somme des consequens , dont est composée la
surface $FGHIK$, comme le triangle DBC
est au triangle IGH . Mais ^[1] le triangle DBC
est à son semblable IGH , comme le carré de
 DC est au carré de IH . Les surfaces des po-
lygones semblables $ABCDE$ & $FGHIK$
sont donc aussi entr'elles comme les carrés des
côtés homologues DC & IH , ce qu'il falloit dé-
montrer .

}	$DEA . IKF :: DAq . IFq$
	$ABD . FGI :: DAq . IFq$
	Donc $DEA . IKF :: ABD . FGI$
	$ABD . FGI :: DBq . IGq$
	$DBC . IGH :: DBq . IGq$
	Donc $ABD . FGI :: DBC . IGH$
	Donc $DEA . IKF :: ABD . FGI :: DBC .$
	IGH
	Donc $DEA + ABD + DBC . IKF +$
	$FGI + IGH :: DBC IGH :: DCq . IHq$
Donc $ABCDE . FGHIK :: DCq . IHq$	

On trouvera aussi par un raisonnement pa-

^[1] Part. 2. Prop. 56. Geo;
^[2] Cor. 3. Def. 12. Algeb.
^[3] Prop. 15, Algeb.

reil au précédent, que les trapésoïdes & trapèzes semblables, sont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues; & ce qui est dit dans les Corollaires suivans leur convient comme aux polygones.

C O R O L L A I R E I.

Le rapport d'un polygone à un autre polygone semblable, est doublé du rapport d'un côté de ce premier à un côté homologue du second. Car [1] les polygones semblables sont entr'eux, comme les quarrés de leurs côtés homologues; & [2] les quarrés de ces côtés homologues sont entr'eux, en raison doublée de celle qui est entre ces mêmes côtés.

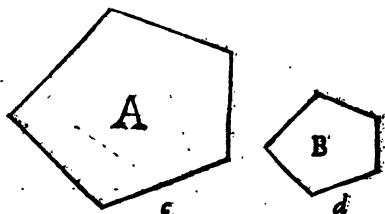
C O R O L L A I R E II.

Si de deux figures semblables, la première a chacun de ses côtés double de chacun de ceux de la seconde, la surface de cette première figure sera quadruple de la surface de la seconde. Parceque la première sera [1] à la seconde, comme le quarré d'un des côtés de cette première est au quarré d'un côté homologue de la seconde; & le quarré du côté de cette première sera quadruple du quarré homologue de la seconde. Soient pour exemple deux figures semblables *A* & *B*; j'appellerai *c* un côté de la première figure *A*, & *d* un côté homologue de la seconde figure *B*. Donc [1] $A . B :: c c . d d$. Or

[1] Prop. Pref.

[2] Cor. Prop. 18. *Algeb.*

[1] le carré de c est au carré de d , comme la première de trois lignes continuellement proportionnelles $c . d . f$. est à une troisième f ; le



côté c étant la première, & la seconde étant le côté d . C'est à dire que $cc . dd :: c . f$. Mais puisque [2] c est double de d , on aura pareillement d double de f . Donc c sera double du double de f , c'est à dire quadruple de f . Donc c fera quadruple de dd . Donc enfin la figure A sera [3] aussi quadruple de B .

Si chaque côté d'une de ces deux figures semblables est triple de chacun de la seconde; la première sera noncuple de la seconde, &c. De ce qu'on vient de démontrer on peut encore conclure que les figures semblables ne sont pas entr'elles comme leurs côtés; puisque chaque côté de l'une est double de chaque côté de l'autre; l'une est quadruple de l'autre, &c.

C O R O L L A I R E III.

Une figure qui aura pour côté l'hypoténuse d'un triangle rectangle, est égale aux deux figures qui lui seront semblables, & qui auront les

[1] *Cor. Prop. 19. Algeb.*

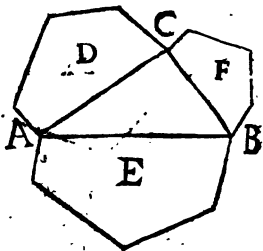
[2] *Supposit.*

[3] *Prop. Pref.*

deux autres côtés de ce triangle pour côtés homologues à ce côté de la première.

Soit le triangle rectangle ABC , & les figures semblables E, F, D , décrites sur les côtés de ce triangle, de manière que E soit sur l'hypoténuse : Je dis que la

figure E est égale à la somme des figures F & D . Car [1] $E : F :: AB \times AB, BC \times BC, \& E, D :: AB \times AB, AC \times AC$. Donc [2] $E : F + D :: AB \times AB, CB \times CB + AC \times AC$. Or [3] $AB \times AB = CB \times CB + AC \times AC$. Donc $E = F + D$.



$$\left. \begin{array}{l} E : F :: ABq. BCq. \\ E : D :: ABq. ACq. \\ \text{Donc } E : D + F :: ABq. BCq + ACq. \\ \text{Mais } ABq = BCq + ACq. \\ \text{Donc } E = D + F. \end{array} \right\}$$

COROLLAIRE IV.

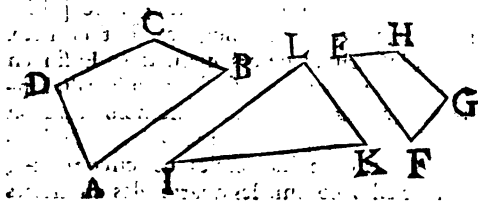
Pour décrire une figure égale & semblable aux deux figures $ABCD$, & $EFGH$ qui sont semblables aussi entr'elles : il faut [4] faire un angle droit ILK , & en faire les côtés IL & LK égaux

[1] Prop. Préf.

[2] Prop. 14. Algeb.

[3] Part. 1. Prop. 57. Geo.

[4] Cor. 7. Prop. 27. Geo.



aux côtés homologues AB & EF ; ensuite mener la ligne IK . Si ^[1] On décrit une figure semblable aux deux figures précédentes, qui ait pour côté IK homologue aux autres côtés AB & EF des autres figures, cette dernière figure sera ^[2] égale aux deux précédentes. On peut faire par ce moyen l'addition des figures semblables.

PROPOSITION LXIII.

Les figures ou surfaces semblables circonscrites, ou inscrites à des cercles, sont entr'elles comme les carrés des diamètres de ces mêmes cercles.

DÉMONSTRATION

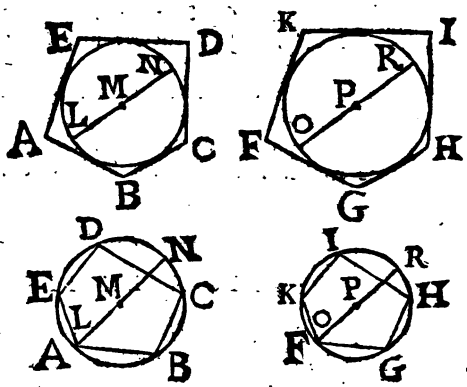
Les figures semblables sont ^[3] entr'elles comme les carrés de leurs côtés homologues. Et les carrés des côtés homologues des figurés circonscrites ou inscrites à des cercles, sont entr'elles comme les carrés des diamètres. Car les

[1] Cor. 3. Prop. 52. Geo.

[2] Cor. 3. Prop. Pres.

[3] Prop. 62. Geo.

côtés homologues sont [1] entr'eux comme les diametres de ces mêmes cercles, donc [2] les quarrés de ces côtés homologues, sont entr'eux comme les quarrés de ces diametres. Enfin en substituant le rapport des surfaces au lieu du rapport des quarrés de leurs côtés homologues, on trouvera que les surfaces ou polygones semblables, inscrits dans les cercles ou circonscrits, sont entr'elles comme les quarrés des diametres



de ces mêmes cercles. Soient les figures semblables $ABCDE$ & $FGHIK$ circonscrites, ou inscrites à des cercles dont les diametres sont LN & OR : Je dis que $ABCDE$. $FGHIK$:: LN^2 . OR^2 . Car $ABCDE$. $FGHIK$:: ED^2 . KI^2 . Mais puisque ED . KI :: LN . OR ; je trouye que ED^2 . KI^2 :: LN^2 . OR^2 . Dans la

[1] Demonst. de la prop. 60. Geo. & Prop. 5. Algeb.
 [2] Part. 1. Cor. 2. Prop. 12. Algeb.

premiere

premiere analogie, au lieu du rapport qui est entre ED^2 & KI^2 , en substituant le rapport de LN^2 à OR^2 , qui lui est égal; il est évident que $ABCDE, FGHIK :: LN^2, OR^2$. ce qu'il falloit démontrer.

On peut faire un raisonnement pareil au précédent, pour démontrer que les figures semblables inscrites, ou circonscrites à des cercles, sont entr'elles en même rapport que les quarrés des rayons de ces mêmes cercles; puisque leurs côtés homologues sont entr'eux comme les rayons des cercles auxquels elles sont inscrites ou circonscrites.

COROLLAIRE I.

Les figures semblables inscrites ou circonscrites à des cercles, sont entr'elles en raison doublée de celle de leurs diametres. Car ces figures semblables sont [1] entr'elles comme les quarrés des diametres des cercles auxquels elles sont inscrites ou circonscrites, & ces quarrés sont [2] entr'eux en raison doublée de celle de ces mêmes diametres qui en sont racines.

COROLLAIRE II.

Les surfaces des cercles sont entr'elles comme les quarrés des diametres de ces mêmes cercles. Car les cercles sont [3] des figures semblables d'une infinité de côtés, inscrites & circonscrites à eux-mêmes; & ces figures semblables sont [1] entr'elles comme les quarrés de leurs diametres.

[1] Prop. Pref.

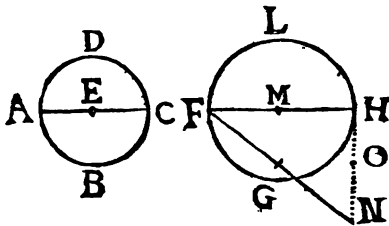
[2] Cor. Prop. 18. Algeb.

[3] Cor. Prop. 47. Geo.

On concluera donc aussi [2] que les cercles sont entr'eux en raison doublée de celle de leurs diamètres.

COROLLAIRE III.

Pour décrire un cercle égal à deux autres cercles ; par exemple, à $ABCD$ & $FGHL$; par



l'extrémité H d'un des diamètres de ces cercles il faut mener la perpendiculaire HN égale au diamètre AC de l'autre cercle, & ensuite mener la ligne FN : Je dis que le cercle qui aura pour diamètre la ligne FN , sera égal aux cercles $ABCD$ & $FGHL$, pris ensemble. Car [2] le cercle dont le diamètre est FN , sera aux cercles $ABCD$ & $FGHL$ comme le carré de ce diamètre FN aux carrés des diamètres FH & HN ; & [3] le carré du diamètre $FN = FH^2 + HN^2$.

Au lieu de faire $HN = AC$, on pouvoit faire $HO = EC$, & alors la ligne menée du point M au point O auroit été le rayon du cercle égal [4] aux deux cercles $ABCD$ & $FGHL$.

[2] Cor. 1. Prop. Pref.

[3] Cor. 2. Prop. Pref.

[4] Part. 1. Prop. 57. Geo.

[5] Prop. Pref. & Part. 1. Prop. 57. Geo.

PROPOSITION LXIV.

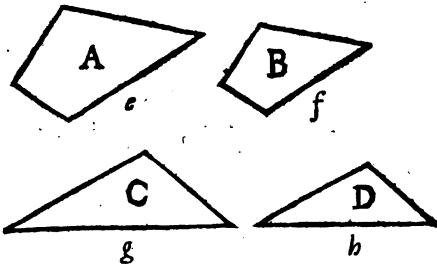
1°. Si quatre figures semblables ont pour côtés homologues chacune de quatre lignes proportionnelles ; ces quatre figures seront aussi proportionnelles entr'elles.

2°. Reciproquement si quatre figures sont semblables & proportionnelles entr'elles ; les quatre lignes qui en sont côtés homologues , sont aussi proportionnelles entr'elles.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les quatre lignes proportionnelles $e . f :: g . h$, dont la première e est côté de la figure A , & la deuxième f est côté homolo-



gue de la figure B semblable à la première ; la troisième g est côté de la figure C, & enfin la quatrième h est côté homologue de la figure D qui est semblable à la figure C : Je dis que $A . B :: C . D$. Car les carrés de ces li-

gnes seront ^[1] proportionnels entr'eux ; puisque le carré d'une ligne est ^[2] cette ligne multipliée par elle-même. Mais les figures semblables qui auront ces lignes pour côtés homologues, seront ^[3] entr'elles comme les carrés de ces mêmes lignes *e, f, g, h*. Ces figures semblables seront donc aussi proportionnelles, ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les quatre figures semblables & proportionnelles *A, B, C & D*, c'est à dire que $A . B :: C . D$. Je dis que leurs côtés homologues sont proportionnels, par exemple, que $e . f :: g . h$. Car, puisque ^[4] $A . B :: C . D$, & que ^[5] les carrés des côtés homologues de ces figures sont entr'eux, comme ces mêmes figures ; les carrés de ces côtés homologues, seront aussi proportionnels, c'est à dire que $e e . f f :: g g . h h$. Or, puisque les carrés sont proportionnels, leurs racines seront ^[6] aussi proportionnelles. Donc $e . f :: g . h$. Ce qu'il falloit démontrer.

^[1] Part. 1. Cor. 2. Prop. 12. Algeb.

^[2] Cor. 2. Def. 33. Geo.

^[3] Prop. 62. Geo.

^[4] Supposit.

^[5] Part. 2. Cor. 2. Prop. 12. Algeb.



*DE LA SITUATION
des lignes droites comparée à celle
des plans ; & de la situation des
plans comparée à celle d'autres
plans.*

LES propositions suivantes sont d'un grand usage pour bien entendre la Trigonometrie Spherique , qui est un des principaux fondemens de l'Astronomie ; pour la theorie & la pratique de la Gnomonique ou de la science des Cadranz solaires ; pour la Perspective , c'est à dire l'art de représenter les objets tels que nos yeux les apperçoivent , & qui satisfait à l'explication physique de plusieurs beaux Phenomenes de la vision ; generalement pour l'intelligence de tout ce qui se trouve dans les Mathematiques , où il est necessaire de considerer les propriétés des lignes droites qui rencontrent des surfaces planes , & les propriétés des plans qui en rencontrent d'autres , où qui leur sont paralleles.

Ceux qui ne sont pas encore accoutumés à la representation des plans qui se rencontrent ou qui se coupent , ont quelquefois de la peine à découvrir les verités qu'on y propose. Mais lorsqu'ils y font un peu d'attention , & qu'ils perseverent , la difficulté se dissipe peu à peu , & ils ne trouvent plus qu'évidence. De sorte que pour achever heureusement l'étude de ces

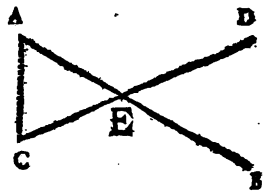
Elemens , & en tirer un fruit avantageux , il ne s'agit que d'avoir un peu de fermeté ; de faire une lecture fréquente de ce qui d'abord peut paroître obscur ; de former la résolution de vaincre courageusement tout obstacle. Et alors on connoitra par sa propre expérience le bon succès de son travail. On peut assurer qu'il n'y a rien dans toute la suite capable d'arrêter un esprit un peu laborieux ; de sorte qu'après avoir fini ces Elemens , en continuant avec la même vigueur à s'appliquer à d'autres traités de Mathematiques, il aura le plaisir, non seulement d'apprendre ce que les autres sçavent ; mais même il se trouvera en état d'inventer.

PROPOSITION LXV.

Deux lignes qui se coupent , sont dans le même plan.

DEMONSTRATION.

Soient les deux lignes AB & CD qui se coupent au point E : je dis que ces deux lignes sont dans le même plan. Car on peut considérer une ligne droite , menée du point A au point C , qui soit ensuite mûe vers E transversalement sur les lignes AE & CE . Alors



[^e] on aura décrit le plan triangulaire

AEC dans lequel sont les lignes partiales AE

[^e] Cor. 1. Def. 9. Geo.

& CE. Donc [1] les lignes entieres AB & CD seront toujours dans le même plan, c'est à dire que si on prolonge le plan ACE il passera par le plan EBD dans lequel se trouvent les autres parties EB & ED des lignes AB & CD , ce qu'il falloit démontrer.

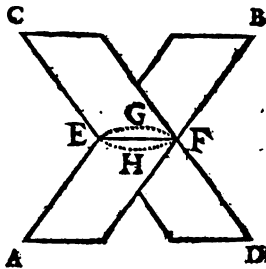
PROPOSITION LXVI.

Si deux plans se coupent, leur commune section sera 1^o une ligne; 2^o, une ligne droite.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les deux plans AB & CD qui se coupent en EF : Je dis que leur commune section EF est une ligne. Car si cette commune section EF n'étoit pas une ligne seulement, & que ce fût, par exemple, une surface, il faudroit que quelqu'un des deux plans AB & CD eût de l'épaisseur ou profondeur, ce qui est [2] contre la définition de la surface. Donc la commune section EF des deux plans AB & CD est une ligne, ce qu'il falloit démontrer.



[1] Cor. def. 18. Geom.

[2] Def. 9. Geom.

D E M O N S T R A T I O N

DE LA SECONDE PARTIE.

SOit la ligne EF commune section des deux plans AB & CD : je dis que cette ligne EF est une ligne droite. Car des deux mêmes points E & F de cette ligne EF si on mène dans le plan CD une ligne droite EGF , & dans le plan AB encore une ligne droite EHF , il est constant [1] que ces deux lignes droites se confondront en une seule, laquelle se trouvera en même temps dans les deux plans. Or il n'y a que la ligne qui est la commune section de deux plans, qui se trouve en même temps dans les deux plans. Donc cette commune section est une ligne droite, ce qu'il falloit démontrer.

P R O P O S I T I O N L X V I I .

Si une ligne droite est perpendiculaire à deux lignes qui se coupent, elle le sera aussi au plan de ces mêmes lignes.

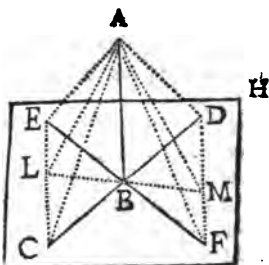
D E M O N S T R A T I O N

SOit la ligne AB perpendiculaire à chacune des deux lignes droites CD & EF : Je dis que cette ligne AB sera aussi perpendiculaire au plan GH , c'est à dire [2], à toutes les lignes menées dans ce plan par le point B , par exem-

[1] Cor. 3. Ax. 2. Geom.

[2] Def. 20. Geom.

ple à la ligne LBM . Pour le démontrer soient prises à volonté les lignes égales BC, BF, BD, BE ; & par leurs extrémités soient menées les lignes droites EC & FD . Du point A aux points $E, L, C, F, M, & D$, il faut mener autant de lignes droites.



Puisque les lignes BE & BC sont ^[1] égales aux

lignes BF & BD , & les angles EBC & DBF étant ^[2] égaux entr'eux; les bases EC & DF seront ^[3] égales. Les angles ECB & DBF seront ^[4] égaux entr'eux.

Les angles LBC & DBM sont ^[1] égaux entr'eux. Les deux angles LCB & LBC seront donc égaux aux angles DBM & DBM . Outre cela les côtés CB & BD sont ^[1] égaux. Les lignes CL & MD , BL & BM seront ^[5] donc égales.

Mais les quatre triangles rectangles ABE , ABC , ABF , ABD , ayant le côté BA commun, & les autres côtés $BE, BC, BF, & BD$ égaux ^[1], & encore ^[6] les angles droits ABE , ABC , ABF , & ABD égaux, les bases AE, AC, AF, AD seront ^[6] aussi égales entr'elles,

^[1] Par construction.

^[2] Part. 1. Prop. 22. Geo.

^[3] Part. 1. Prop. 35. Geo.

^[4] Cor. 2. Prop. 35. Geo.

^[5] Cor. 4. Prop. 31. & Cor. 2. Prop. 32. Geo.

^[6] Cor. 3. Prop. 20. Geo.

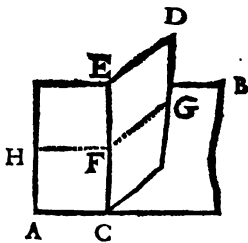
& puisqu'on vient de voir que $CE = FD$, les angles ADF & ACE , c'est à dire, les angles ADM & ACL seront ^[1] égaux entr'eux.

Les côtés AC & CL étant donc égaux aux côtés AD & DM , & l'angle $ACL = ADM$; on aura ^[2] les bases AL & AM égales entr'elles.

Enfin puisque les côtés AB & BL sont égaux aux côtés AB & BM , & que les bases AL & AM sont aussi égales entr'elles, les angles ABL & ABM seront ^[1] égaux entr'eux. Chacun sera donc ^[3] droit. AB sera donc perpendiculaire à LM &, par le même raisonnement, à toute autre ligne menée dans le plan GH , ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Dans un des plans AB & CD perpendiculaires l'un à l'autre, si on mene la perpendiculaire GF à leur commune section CE ; cette ligne GF sera perpendiculaire à l'autre plan AB . Car si dans ce plan AB par le point F on mene la ligne FH perpendiculaire à CE , on aura l'angle HFG qui sera ^[2] l'angle des plans AB & CD . Et puisque ces plans sont ^[3] perpendiculaires



[1] Cor. 2. Prop. 35. Geo.

[2] Part. 1. Prop. 3. Geo.

[3] Part. 1. Prop. 21. Geo.

[4] Def. 18. Geo.

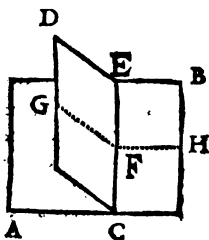
[5] Supposit.

Pun à l'autre, & que des plans perpendiculaires l'un à l'autre, sont ceux qui forment des angles droits ; cet angle HFG est donc droit. La ligne GF sera donc perpendiculaire aux deux lignes FH [1] & FC [2], qui sont dans le même plan AB . La ligne GF sera donc [3] perpendiculaire au plan AB ; c'est à dire [4] à toutes les lignes droites menées dans ce plan par le point F .

COROLLAIRE II.

Si une ligne est perpendiculaire à un plan, tous les plans dans lesquels elle se trouvera seront perpendiculaires au même plan. Soit, par exemple, la ligne FG perpendiculaire au plan AB : je dis que le plan CD dans lequel se trouve cette perpendiculaire FG , est aussi perpendiculaire au plan AB .

Car si on mène par le point F la ligne FH perpendiculaire à la commune section CE , l'angle HFG sera [3] droit. Donc le plan CD sera perpendiculaire au plan AB , puisqu'ils formeront [1] l'angle droit HFG .



COROLLAIRE III.

La proposition présente donne une manière de mener une ligne perpendiculaire à un plan par un point donné dans ce plan. Soit, par

[1] Def. 14. Geo.

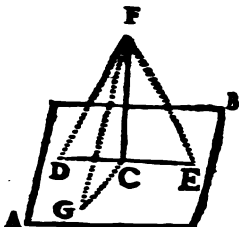
[2] Supposit.

[3] Prop. pres.

[4] Def. 20. & Def. 14. Geo.

[4] Def. 20. Geo.

exemple, le plan AB auquel il faille mener une perpendiculaire par le point C . Il faut mener dans ce plan AB & par le point C une ligne droite DE , & prendre de part & d'autre du point C les parties CD & CE égales entr'elles, & faire les lignes droites DF & EF d'une longueur prise à volonté



& ces lignes entr'elles pour ^[1] construire le triangle isocèle DFE . Ensuite par le point C il faut mener à volonté dans le plan AB la ligne CG égale à CD , ou à CE . Enfin on inclinera le plan DEF au plan AB jusqu'à ce que le point F se trouve exactement du point G pour que la ligne GF devienne égale à DF , ou à EF . Alors on joint F au point C on mènera la ligne FC : je dis que cette ligne FC est la perpendiculaire cherchée. Car les triangles DFC , FEC , & FGC ont le côté CF commun, & à l'égard des autres sont ^[2] équilatéraux l'un à l'autre. Ils sont donc égaux ^[3] aussi l'un à l'autre. L'angle FCD est donc égal à FCE . Ces angles FCD & FCE sont donc ^[4] des angles droits. Donc FCG qui leur est ^[5] égal est aussi droit. Donc la ligne CF est ^[6] perpendiculaire aux lignes DE & GC . Donc ^[6] elle est perpendiculaire au plan AB .

[1] Cor. 4. Prop. 35. Geo.

[2] Cor. 2. Prop. 35. Geo.

[3] Part. 1. Prop. 21. Geo.

[4] Def. 14. Geo.

[5] Par construction.

[6] Prop. pref.

PROPOSITION LXVIII.

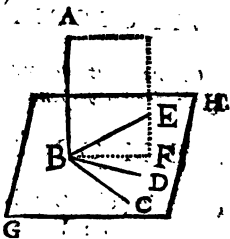
Si une ligne droite est perpendiculaire à trois autres qui se coupent en un même point, ces trois autres lignes sont dans un même plan.

DEMONSTRATION

Soit la ligne droite AB perpendiculaire aux trois lignes droites BC , BD & BE : je dis que ces trois dernières lignes sont dans un même plan.

Les lignes BC & BD sont [1] dans le même plan. Soient les lignes BC & BD dans le plan

GH ; alors puisque la ligne AB est [2] perpendiculaire aux lignes BC & BD , elle sera [3] perpendiculaire à ce plan GH . S'il étoit possible que la troisième ligne BE ne fût pas dans le plan GH ; puisque



cette ligne BE rencontre la ligne AB au point B , considérons [1] un autre plan AE qui passe par la perpendiculaire AB & par cette ligne BE ; il est évident que ce plan AE & le plan GH se rencontrent déjà au point B , si on prolonge le plan AE , il coupera nécessairement le plan

[1] Prop. 65. Geo.

[2] Supposé.

[3] Prop. 67. Geo.

GH. Soit *BF* leur commune section. La ligne *AB* sera ^[1] perpendiculaire à la commune section *BF*, parcequ'elle est perpendiculaire au plan *GH*; & la ligne *BF* sera ^[2] perpendiculaire à *AB*. Mais ^[3] la ligne *BE* est aussi perpendiculaire à la ligne *AB*. Il y auroit donc deux lignes *BE* & *BF* perpendiculaires à une même ligne *AB* dans un même plan *AF*, & par un même point *B*; ce qui est ^[4] impossible. Donc la ligne *BE* ne peut être dans un autre plan que *GH*. Donc la ligne *BE* est dans le même plan que les lignes *BC* & *BD*, ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION LKIX.

On ne peut mener par un même point deux lignes droites perpendiculaires à un même plan.

DEMONSTRATION

Soit le point *C* pris dans le plan ou hors le plan *AB*: Je dis qu'il est impossible qu'on puisse mener plusieurs perpendiculaires, par exemple, *CD*, *CE*, à ce plan. Car ^[5] si on suppose qu'il passe un autre plan *DF* par ces deux lignes *CD* & *CE*, & que la commune section de ce dernier plan *DF* avec le plan *AB* soit *DE* dans la première figure, & *CF* dans

[1] Def. 20. Geo.

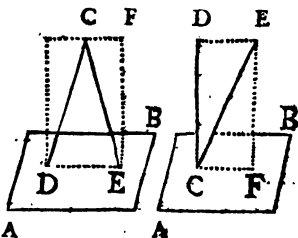
[2] Cor. 1. Prop. 5. Geo.

[3] Supposit. & Cor. 1. Prop. 5. Geo.

[4] Cor. Prop. 4. Geo.

[5] Prop. 55. Geo.

la seconde ; les lignes $C D$ & $C E$ seroient ^[1] perpendiculaires à cette commune section $D E$ dans la premiere figure ; & dans la seconde $C D$ & $C E$ seroient aussi perpendiculaires à la commune section $C F$, le tout dans le même plan $D F$ puisque



les communes sections $D E$ & $C F$ sont en même temps dans le plan $D F$ & dans le plan $A B$. Ce qui est ^[2] impossible. Car il faudroit que dans un même plan on pût mener deux lignes par un même point perpendiculairement à une autre ligne. Donc aussi il est impossible qu'on puisse mener d'un même point plusieurs lignes perpendiculaires à un même plan, ce qu'il falloit démontrer.

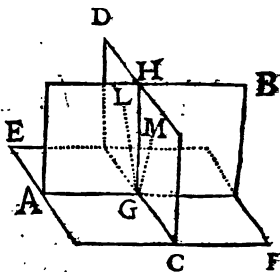
C O R O L L A I R E I.

Si deux plans qui se coupent sont perpendiculaires à un autre plan, leur commune section lui sera aussi perpendiculaire. Soient les plans $A B$ & $C D$ dont chacun est perpendiculaire au plan $E F$; & soit $G H$ la commune section de ces deux plans $A B$ & $C D$: Je dis que cette commune section $G H$ sera aussi perpendiculaire

[1] Def. 20. Geo.

[2] Cor. Prop. 4. Geo.

au plan EF . Pour le démontrer il suffit de faire voir que par le point G on ne peut mener une ligne différente de GH , qui soit perpendiculaire à la commune section AG du plan AB avec le plan EF ; & que par le même point G on ne peut mener une autre ligne que GH qui soit perpendiculaire à la commune section CG du plan DC avec le plan EF . Car



s'il estoit possible que GL menée dans le plan AB fût perpendiculaire à la commune section AG des plans AB & EF ; & que GM menée dans le plan CD fût aussi perpendiculaire à la commune section CG des plans CD & EF : chacune de ces deux lignes seroit ^[1] perpendiculaire au plan EF par le même point G . Ce qui est ^[2] impossible. Donc la ligne GH qui est la commune section des plans AB & CD perpendiculaires au plan EF , est aussi perpendiculaire à ce plan EF .

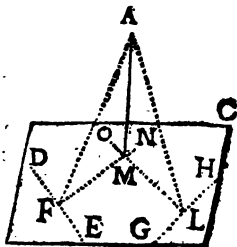
COROLLAIRE III.

Du point A pris hors le plan BC si on se propose de mener une ligne perpendiculaire à ce plan BC ; il faut mener à volonté les lignes DE & GH sur ce plan BC , de sorte qu'elles fassent un angle étant prolongées. Ensuite du

[1] Cor. 1. Prop. 67. Geom.

[2] Prop. Prop.

point A il faut mener ^[1] les lignes AF & AL perpendiculairement à ces lignes DE & GH , qui les rencontreront aux points F & L . Enfin par le point F il faut mener la ligne FN perpendiculairement à la ligne DE , & par le point L il faut encore mener la ligne LO aussi perpendiculaire à GH : Je dis que la ligne AM menée du point donné A au



point d'intersection M des perpendiculaires FN & LO , est la perpendiculaire cherchée. Car les lignes AL & OL étant ^[1] perpendiculaires à la ligne GH , réciproquement ^[2] GH est perpendiculaire à ces lignes AL & OL . Donc ^[3] GH est perpendiculaire au plan OLA . Donc ^[4] le plan BC est perpendiculaire au plan OLA , & réciproquement le plan OLA est perpendiculaire au plan BC . De même à cause que les lignes AF & FN sont perpendiculaires à la ligne DE , le plan AFN sera ^[5] perpendiculaire au plan BC . Donc la commune section AM de ces plans AFN & ALO , qui sont perpendiculaires à BC , sera ^[6] aussi perpendiculaire au plan BC .

[1] Part. I. Cor. 2. Prop. 5. Geo.

[2] Par construction. [3] Cor. I. Prop. 5. Geo.

[4] Prop. 67. Geo.

[5] Cor. 2. Prop. 67. Geo.

[6] Cor. 3. Prop. pres.

D E M O N S T R A T I O N

DE LA SECONDE PARTIE.

SOit la ligne EF commune section des deux plans AB & CD : je dis que cette ligne EF est une ligne droite. Car des deux mêmes points E & F de cette ligne EF si on mène dans le plan CD une ligne droite EGF , & dans le plan AB encore une ligne droite EHF , il est constant [¹] que ces deux lignes droites se confondront en une seule, laquelle se trouvera en même temps dans les deux plans. Or il n'y a que la ligne qui est la commune section de deux plans, qui se trouve en même temps dans les deux plans. Donc cette commune section est une ligne droite, ce qu'il falloit démontrer.

P R O P O S I T I O N L X V I I .

Si une ligne droite est perpendiculaire à deux lignes qui se coupent, elle le sera aussi au plan de ces mêmes lignes.

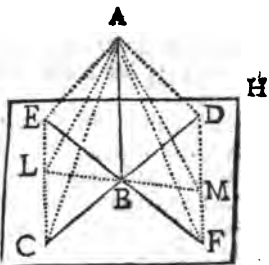
D E M O N S T R A T I O N

SOit la ligne AB perpendiculaire à chacune des deux lignes droites CD & EF : Je dis que cette ligne AB sera aussi perpendiculaire au plan GH , c'est à dire [²], à toutes les lignes menées dans ce plan par le point B , par exem-

[¹] Cor. 3. Ax. 2. Geo.

[²] Def. 20. Geo.

Soit à la ligne IBM . Pour le démontrer soient prises à volonté les lignes égales BC , BF , BD , BE ; & par leurs extrémités soient menées les lignes droites EC & FD . Du point A aux points E , L , C , F , M , & D , il faut mener autant de lignes droites.



Puisque les lignes BE & BC sont ^[1] égales aux

lignes BF & BD , & les angles EBC & DBF étant ^[2] égaux entr'eux; les bases EC & DF seront ^[3] égales. Les angles ECB & BDF seront ^[4] égaux entr'eux.

Les angles LBC & DBM sont ^[1] égaux entr'eux. Les deux angles LCB & LBC seront donc égaux aux angles BDM & DBM . Or, ce qui les côtés CB & BD sont ^[1] égaux. Les lignes CE & MD , BL & BM seront ^[2] donc égales.

Mais les quatre triangles rectangles ABE , ABC , ABF , ABD , ayant le côté BA commun, & les autres côtés BE , BC , BF , & BD égaux ^[1], & encore ^[6] les angles droits ABE , ABC , ABF , & ABD égaux, les bases AE , AC , AF , AD seront ^[6] aussi égales entr'elles,

^[1] Par construction.

^[2] Part. 1. Prop. 22. Geo.

^[3] Part. 1. Prop. 35. Geo.

^[4] Cor. 2. Prop. 35. Geo.

^[5] Cor. 4. Prop. 31. & Cor. 2. Prop. 32. Geo.

^[6] Cor. 3. Prop. 20. Geo.

COROLLAIRE.

La distance d'un point a un plan, est mesurée par la longueur de la perpendiculaire menée de ce point à ce plan; puisque [1] il n'y en a pas de plus courte que cette perpendiculaire. Il est donc évident [2] que toutes les perpendiculaires menées d'un plan à un autre qui lui est parallèle, sont égales entr'elles. Et enfin on conclura [3] que lorsque toutes les perpendiculaires menées d'un plan à un autre sont égales, ces deux plans sont [1] parallèles entr'eux.

PROPOSITION LXXI.

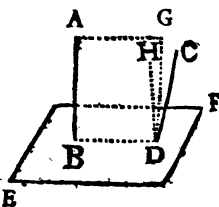
Deux lignes droites qui sont perpendiculaires à un même plan, sont dans un même plan.

DEMONSTRATION.

Soient les deux lignes droites AB & CD dont chacune est perpendiculaire au plan EF . Je dis que ces deux lignes AB & CD sont dans un même plan.

Pour le démontrer, du point B au point D soit menée la ligne BD .

Les lignes AB & BD sont [1] dans le même plan: que j'appellerai BG , qui est [4] perpendiculaire au plan EF . La ligne CD doit aussi



[1] Prop. Prop. & Cor. 1. Ax. 2. Geo.

[2] Def. 11. Geo.

[3] Cor. 2. Prop. 65. Geo.

[4] Prop. 6. Geo.

se trouver dans le même plan BG . Car si elle n'y étoit pas; par le point D soit [1] menée dans ce plan BG la ligne DH perpendiculairement à la commune section BD du plan BG avec le plan EF . Alors [2] cette ligne HD sera perpendiculaire au plan EF . Mais [3] la ligne CD étoit aussi perpendiculaire au même plan EF par le même point D . Il y auroit donc par le même point D deux lignes HD & CD perpendiculaires au même plan EF , ce qui est [4] impossible. La ligne perpendiculaire CD est donc dans le même plan que l'autre perpendiculaire AB , ce qu'il falloit démontrer.

[1] Part. 2. Cor. 2. Prop. 5. Geo. p. 242.

[2] Cor. 1. Prop. 67. Geo. p. 502.

[3] Supposit.

[4] Prop. 69. Geo. p. 506.

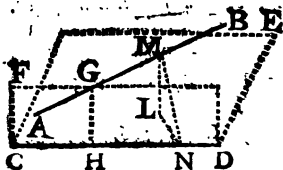


PROPOSITION LXXII.

Deux lignes parallèles sont dans le même plan

DEMONSTRATION.

POUR démontrer que deux lignes parallèles entre elles sont toujours dans le même plan il suffit de faire voir que, si deux lignes ne sont



pas dans le même plan, elles ne seront point parallèles. Soient les lignes AB & CD dans des plans différens : je dis que AB n'est point parallèle à CD . Pour le démontrer, considérons le plan CE mené par la ligne CD parallèlement à la ligne AB , c'est à dire, de telle sorte que la ligne ABE soit également distante dans toute sa longueur. Par cette même ligne CD considérons encore un autre plan FD qui soit mené perpendiculairement au précédent CE ; ce dernier plan FD ne passera point par la ligne AB , car AB & CD seroient dans le même plan, ce qui est contre la supposition présente, FD coupera donc AB par exemple au point G . Alors du point G soit [']

['] Cor. 2. Prop. 5. Geo. p. 243.

menée GH perpendiculaire à la commune section CD , Cette ligne GH sera [1] perpendiculaire au plan CE . Ensuite du point M pris à volonté dans la ligne AB soit [2] menée ML perpendiculairement au plan CE . Puisque la ligne AB dans toute sa longueur est [3] également distante du plan CE , les perpendiculaires GH & ML seront [4] égales entre elles. Enfin du point M soit [5] menée MN perpendiculairement à la ligne CD , & du point L au point N soit menée LN .

Puisque ML est [1] perpendiculaire au plan CE , l'angle MNL sera [6] droit, la perpendiculaire MN est donc plus grande que ML [7], ou que son [8] égale GH . Les lignes MN & GH menées de la ligne AB perpendiculairement à CD n'étant donc point égales, AB n'aura pas [9] tous ses points également distans de CD . Les deux lignes AB & CD ne seront donc point [9] parallèles, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Les lignes droites qui sont perpendiculaires à

[1] Cor. 1. Prop. 67. Geo. p. 502.

[2] Cor. 2. Prop. 59. Geo. p. 508.

[3] Par construction.

[4] Cor. Prop. 70. Geo. p. 512.

[5] Cor. 2. Prop. 5. Geo. p. 243.

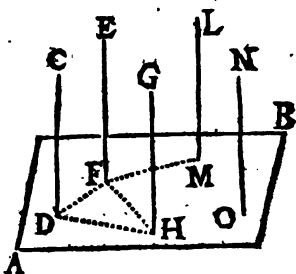
[6] Def. 10. Geo. pag. 202.

[7] Part. 1. Prop. 6. Geo. p. 246.

[8] Cor. 3. Prop. 6. Geo. p. 249.

[9] Def. 8. Geo. p. 196.

un même plan sont parallèles entr'elles. Soient les lignes CD , EF , GH , LM , NO , &c.



perpendiculaires au plan AB : Je dis qu'elles sont parallèles entr'elles. Pour le démontrer, soient menées les lignes droites DF , DH , &c. dans le plan AB par leurs extrémités. Alors les lignes CD & GH , par exemple, sont ^[1] dans le même plan, ce qui est ^[2] une condition requise pour le parallélisme. Outre cela ces deux lignes perpendiculaires sont ^[3] perpendiculaires à la ligne DH . Ces lignes CD & GH sont ^[4] donc parallèles l'une à l'autre. On fera le même raisonnement pour les lignes CD , LM , EF , &c.

COROLLAIRE II.

Si les lignes AB & CD sont parallèles, la ligne droite EF menée du point E d'une de

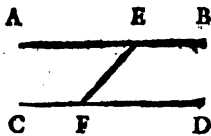
[1] Prop. 71. *Geo.* p. 512.

[2] Prop. *Prof.*

[3] Def. 20. *Geo.* p. 202.

[4] Part. 2. Prop. 15. *Geo.* p. 283.

ces paralleles au point F de l'autre, sera dans le plan de ces deux paralleles. Car, puisque [1] la ligne EF est droite & qu'elle a déjà deux de ses points E & F dans la surface plane qui [2] passe par les paralleles AB & CD . Il faut necessairement [3] que cette ligne droite soit entierement dans le plan de ces paralleles,

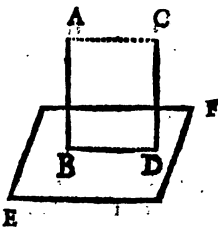


PROPOSITION LXXIII.

Si de deux lignes droites paralleles entr'elles, l'une est perpendiculaire à un plan, l'autre sera aussi perpendiculaire au même plan.

DEMONSTRATION

Soient les lignes AB & CD paralleles entr'elles, & soit la ligne AB perpendiculaire au plan EF : Je dis que l'autre ligne CD est aussi perpendiculaire au même plan EF . Pour le démontrer, soit menée dans le plan EF la ligne BD par les extremités de ces lignes AB & CD . Et par leurs autres extremités soit menée la ligne AC .



Puisque [1] la ligne AB est perpendiculaire au plan EF , cette ligne AB sera [2] perpendiculaire à BD ; & reciproquement BD sera [3]

[1] *Supposit.* [2] *Prop. Pres.* [3] *Def. 10. Geo.*
 [4] *Def. 20. Geo.* [5] *Cor. 1. Prop. 5. Geo.*

perpendiculaire à AB . Le plan AD sera donc [1] perpendiculaire au plan EF . Mais CD étant [2] parallèle à AB , est [3] dans son même plan AD . Et la ligne BD étant perpendiculaire à AB , est [4] aussi perpendiculaire à CD . Donc réciproquement CD sera [5] perpendiculaire à BD . Et enfin [6] CD sera perpendiculaire au plan EF , ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION LXXIV.

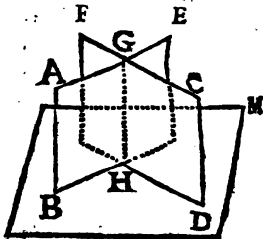
1°. La commune section de deux plans qui passent par deux lignes parallèles, est parallèle à ces mêmes lignes.

2°. Les lignes droites parallèles à une même ligne sont parallèles entr'elles, quoique elles & cette même ligne droite soient dans des plans différents.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Soient les lignes AB & CD parallèles entr'elles : Je dis que la commune section GH des plans BE & DF qui passent par ces parallèles AB & CD , est parallèle à ces mêmes lignes AB & CD . Pour le démontrer, considérons un plan LM qui coupe la ligne AB de sorte



[1] Cor. 2. Prop. 67. Geo.

[2] Supposé.

[3] Prop. 72. Geo.

[4] Part. I. Prop. 15. Geo.

[5] Cor. 1. Prop. 67. Geo.

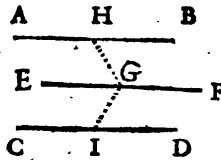
qu'elle lui soit perpendiculaire. Alors l'autre parallele CD sera [¹] aussi perpendiculaire au même plan LM ; & les plans BE & DF qui passent par ces lignes AB & CD , seront [²] perpendiculaires au plan LM . Leur commune section GH sera donc [³] perpendiculaire au plan LM ; elle sera donc [⁴] parallele aux lignes AB & CD , ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soit la ligne AB parallele à EF , & la ligne CD aussi parallele à EF . Soit le plan des lignes paralleles AB & EF différent du plan des lignes CD & EF , c'est à dire que EF soit la commune section de deux plans dont un passe par la ligne AB & l'autre par CD ; car si ces trois lignes AB , EF & CD étoient dans le même plan, la proposition presente seroit la même que la vingt-sixième: Je dis que la ligne AB est parallele à CD .

Pour le démontrer, par un point de la ligne EF , par exemple G , & dans le plan des deux paralleles AB & EF soit menée GH perpendiculaire à EF . Par



le même point G & dans le plan des deux paralleles CD & EF soit menée GI perpendiculaire à la même ligne EF .

[¹] Prop. 73. Geo.

[²] Cor. 2. Prop. 67. Geo.

[³] Cor. 1. Prop. 69. Geo.

[⁴] Cor. 1. Prop. 72. Geo.

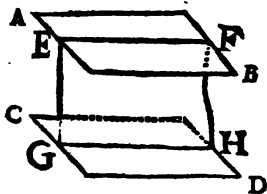
Puisque EF est ^[1] perpendiculaire aux lignes GI & GH , cette ligne EF sera ^[2] perpendiculaire au plan qui passe par ces deux lignes GH & GI . Les lignes AB & CD qui sont ^[3] parallèles à la ligne EF , seront ^[4] aussi perpendiculaires au même plan des deux lignes GH & GI . Donc ^[5] les lignes AB & CD seront parallèles entr'elles, ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION LXXV.

Si deux plans parallèles sont coupés par un troisième plan, leurs communes sections seront aussi parallèles.

DEMONSTRATION.

Soient les plans parallèles AB & CD coupés par un troisième plan EH : Je dis que leurs communes sections EF & GH seront parallèles entr'elles. Car ces lignes EF & GH sont dans un même plan EH , ce qui est ^[6] une condition requise pour le parallélisme. Outre cela, ces lignes EF & GH étant dans les plans AB & CD qui sont ^[7] parallèles, c'est à dire ^[7] également distans l'un de l'autre dans toute leur



^[1] Par construction & Cor. I. Prop. 5. Geo.

^[2] Prop. 67. Geo.

^[3] Supposé.

^[4] Prop. 73. Geo.

^[5] Cor. I. Prop. 72. Geo.

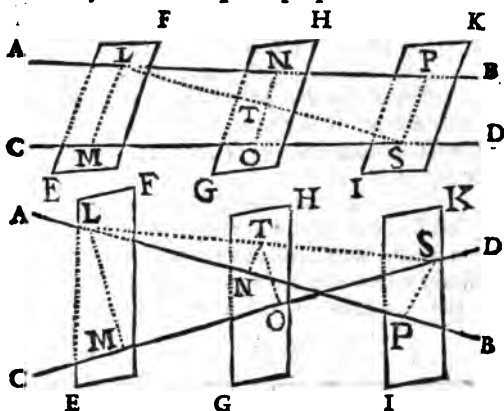
^[6] Prop. 72. Geo.

^[7] Def. 21. Geo.

étendue; ces lignes seront aussi également distantes l'une de l'autre dans toute leur longueur. Donc [1] elles seront paralleles entr'elles, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Les lignes droites coupées par des plans paralleles, seront coupées proportionnellement.



Soient les lignes droites AB & CD , paralleles, ou non; dans le même plan, ou dans différens plans. Soient encore les plans paralleles EF , GH , IK qui coupent ces lignes aux points L , M ; N , O ; P , S : Je dis que ces lignes AB & CD seront coupées proportionnellement, c'est à dire que $LN \cdot NP :: MO \cdot OS$. Pour le démontrer, du premier point de section L d'une de ces lignes droites AB au deuxième point de section S de la seconde ligne CD soit menée la ligne LS . Et du point L au point M ; de N à T , & de T à O ;

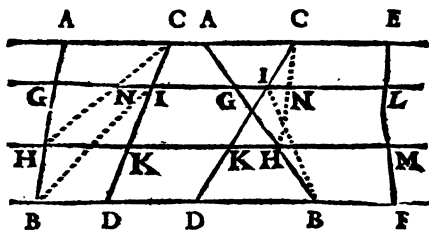
[1] Def. 8. Geo.

enfin de P à S , où ces trois lignes AB , CD & LS sont coupées, soient menées des lignes droites.

Les lignes LP & LS seront [1] dans le même plan; les lignes LS & SM seront aussi dans le même plan. Or les communes sections TN & SP du plan triangulaire LSP & des plans parallèles GH & IK , sont [2] parallèles entr'elles. Donc [3] $LN \cdot NP :: LT \cdot TS$. Mais les communes sections LM & TO du plan triangulaire LSM & des deux plans parallèles EF & GH , sont parallèles entr'elles. On aura donc encore $MO \cdot OS :: LT \cdot TS$. Donc [4] $LN \cdot NP :: MO \cdot OS$.

REMARQUE.

Il est facile de faire un raisonnement semblable à celui du Corollaire précédent pour démontrer que des lignes droites AB , CD , EF , &c. menées dans un même plan sont coupées



proportionnellement par les lignes parallèles AE , GL , HM , BF , &c. Car du point C au point H ayant mené CH ; on trouve [4] que $AG, GH :: CN, NH :: CI, IK$. Donc

[1] Prop. 65. Geo.

[1] Part. 1. Prop. 51. Geo.

[2] Prop. Pref.

[4] Cor. 3. Def. 12. Algèb

[¹] $AG.GH :: CI.IK$. On prouvera de même que $CI.IK :: EL.LM$, &c. Ensuite si on mène la ligne IB , on trouvera encore de la même manière que $GH.HB :: IK.KD$. &c.

PROPOSITION LXXVI.

1°. Si plusieurs plans sont parallèles ; une même ligne droite étant perpendiculaire à un , sera perpendiculaire aux autres.

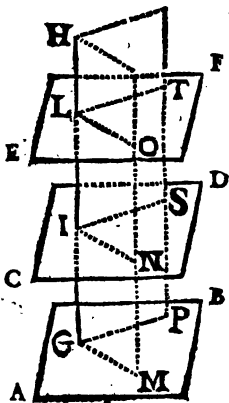
2°. Si une même ligne droite est perpendiculaire à plusieurs plans , ils seront parallèles.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les plans AB & CD parallèles entr'eux ; soit la ligne GH perpendiculaire au plan AB : Je dis que cette ligne GH est aussi perpendiculaire au plan CD . Pour le démontrer, considérons un plan GN qui passe par la perpendiculaire GH , dont les communes sections avec les plans AB & CD soient GM & IN . Faisons encore passer un autre plan GS par cette perpendiculaire GH , dont les communes sections avec les plans AB & CD soient GP & IS .

Puisque les plans AB & CD sont parallèles,



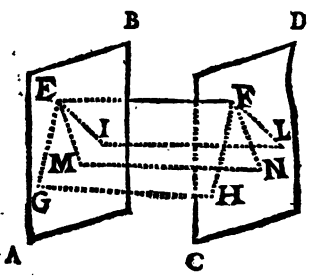
[¹] Cor. 3, Def. 12, Algeb.

les communes sections GM & IN seront ^[1] paralleles ; par la même raison GP & IS seront aussi paralleles entr'elles. Mais ^[2] la ligne GH étant perpendiculaire à AB , l'angle IGM sera ^[3] droit ; & l'angle GIN sera aussi ^[4] droit. GI sera donc perpendiculaire à IN . Par la même raison IGP étant ^[5] droit, GIS sera aussi droit. GI sera donc perpendiculaire à IS . Donc ^[6] la ligne GI sera perpendiculaire au plan CD , ce qu'il falloit démontrer.

Et si le plan CD est encore parallele à EF , on démontrera que la ligne GH est encore perpendiculaire à ce plan EF par un raisonnement semblable à celui qu'on vient de faire.

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

SOient les plans AB & CD , auxquels la ligne EF soit perpendiculaire : Je dis que ces plans sont paralleles entr'eux. Pour en connoître l'évidence il suffit de démontrer que toutes les perpendiculaires menées d'un de ces plans à l'autre seront égales entr'elles. Et pour cela, soit menée GH parallele à cette ligne EF ; & dans



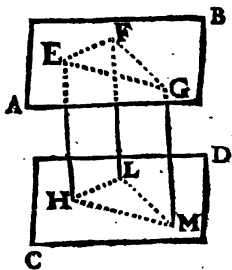
[1] Prop. 75. Geo. [4] Part. 3. Prop. 24. Geo.
 [2] Supposé.
 [5] Prop. 67. Geo.
 [6] Def. 20. & Def. 14. Geo.

Le plan AB d'un point de rencontre E de la ligne EF à un autre G de la ligne GH soit menée EG ; de même soit menée FH dans le plan CD .

Puisque [1] GH est perpendiculaire à EF , cette ligne GH sera aussi [2] perpendiculaire aux plans AB & CD . Or [3] les angles FEG , GHF , EGH & HFE sont droits. La figure EH sera donc [4] un parallélogramme. Donc [5] la perpendiculaire GH sera égale à EF . On démontrera de la même manière que les autres perpendiculaires IL , MN , &c. menées d'un de ces plans à l'autre, sont égales entr'elles, chacune étant égale à EF . Ces plans seront donc [6] également distans l'un de l'autre dans toute leur étendue. Donc [7] ils seront parallèles entr'eux, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Si chacun des trois points E , F & G sont également distans du plan CD , le plan AB sera perpendiculaire au plan CD . Car puisque les distances de ces points sont [8] mesurées par des perpendiculaires, les lignes EH , FL , & GM menées de ces points perpendiculairement au plan CD seront égales entr'elles. Or [9] elles sont



[1] Par construction.

[2] Prop. 73. Geo.

[3] Def. 20. & Def. 14. Geo.

[4] Cor. 3. Prop. 20. Geo. & Cor. 1. Prop. 38. Geo.

[5] Part. 1. Prop. 37. Geo. [6] Cor. Prop. 70. Geo.

[7] Def. 21. Geo. [8] Cor. 1. Prop. 72. Geo.

parallèles entr'elles, & prises deux à deux elles sont^[1] dans le même plan. Les lignes LM & FG ; HL & EF ; HM & EG seront^[2] égales entr'elles. Les figures EM , EL & FM seront donc^[3] des parallélogrammes. Or l'angle EHL étant^[4] droit, l'angle EFL sera^[5] droit. On trouvera encore par un raisonnement semblable que l'angle LFG est droit. Donc la ligne LF sera^[6] perpendiculaire au plan des lignes EF & FG , c'est à dire^[7] à AB . Donc LF sera perpendiculaire aux plans AB & CD . Ces plans seront donc^[8] parallèles entr'eux.

PROPOSITION LXXVII.

1°. Si dans un plan les côtés d'un angle re-
 tangle sont parallèles aux côtés d'un autre qui
 est dans un autre plan; & si les plans de ces
 parallèles se terminent mutuellement d'une part à
 leur commune section; ce dernier angle sera égal
 au premier.

2°. Si deux lignes d'un angle sont parallèles
 aux deux lignes d'un autre dont le plan est dif-
 férent, les plans de ces angles seront parallèles
 entr'eux.

[1] Prop. 72. Geo.

[2] Prop. 36. Geo.

[3] Def. 49. Geo.

[4] Def. 20. & Def. 14. Geo.

[5] Part. 1. Prop. 38. Geo.

[6] Prop. 67. Geo.

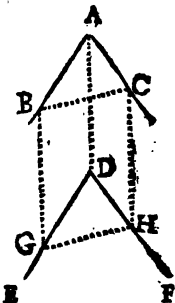
[7] Def. 10. Geo.

[8] Part. 2. Prop. Prop.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit l'angle BAC dont les côtés AB & AC sont parallèles aux côtés DE & DF d'un autre angle EDF dont le plan n'est pas le même que celui du premier angle BAC ; ces lignes parallèles AB & DE , AC & DF étant disposées de manière que leurs plans se terminent à leur commune section AD ; Je dis que cet angle $BAC = EDF$. Pour le démontrer, sur la ligne DE il faut prendre $DG = AB$, & sur DF il faut prendre $DH = AC$; ensuite menez BG , AD , CH ; BC & GH .



Puisque les deux lignes AB & DG sont [1] parallèles & [2] égales, les deux lignes BG & AD seront [3] égales & parallèles; & par la même raison les deux lignes CH & AD seront aussi égales & parallèles. Les deux lignes BG & CH seront donc égales [4] & [5] parallèles entr'elles; & enfin [6] les lignes BC & GH seront égales l'une à l'autre. Les deux triangles BAC & GDH étant donc équilatéraux, ils seront [6] équiangles. Donc [6] l'angle $BAC = EDF$, ce qu'il falloit démontrer.

[1] *Supposé.*

[2] *Par construction.*

[3] *Prop. 36. Geo.*

[4] *Ax. 12. Geom.*

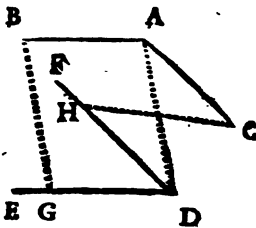
[5] *Part. 2. Prop. 74. Geom.*

[6] *Cor. 2. Prop. 35. Geom.*

REMARQUE.

Les plans des parallèles AB & DE , AC & DF se terminent l'un & l'autre à leur commune section AD ; car autrement la première partie de la proposition présente se trouveroit fautive, parcequ'elle seroit trop générale. Puisque les côtés de l'angle BAC peuvent être disposés de manière que le plan des parallèles AC & FD ne se termine pas à la commune section

AD où il est rencontré par le plan BD qui est celui des parallèles BA & ED . Et alors l'angle BAC étant obtus, EDF sera aigu; & plus BAC sera obtus, plus EDF sera aigu pour con-



server le parallélisme des lignes AC & FD . Au contraire, si BAC est aigu EDF sera obtus. Cela vient encore de ce que les lignes AD & HC se coupant, on ne peut pas ^[1] conclure certainement que $AD = HC$.

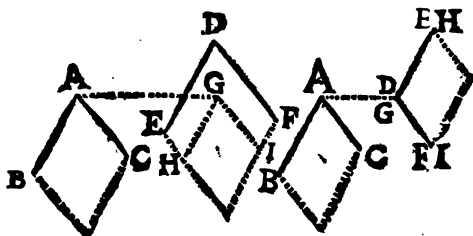
DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les deux lignes droites AB & AC qui se rencontrent au point A , parallèles aux

[1] Remarque de la Prop. 36. Geo.

Deux lignes DE & DF qui se rencontrent au point D dans un autre plan que celui des



lignes AB & AC : Je dis que leurs plans BC & EF qui passent par ces lignes, sont paralleles entr'eux. Pour le démontrer, du point A soit menée la ligne AG perpendiculairement au plan EF . Par le point G où elle rencontre ce plan EF , soient menées dans le plan EF les lignes GH & GI paralleles aux lignes proposées DE & DF .

Puisque les lignes GH & GI sont ^[1] paralleles aux lignes DE & DF , & que ^[2] AB & AC sont paralleles aussi aux lignes DE & DF ; la ligne AB sera ^[3] parallele à GH , & AC sera parallele à GI . Or les paralleles AB & GH étant ^[4] dans le même plan, on trouvera dans la premiere figure que les angles $AGH \rightarrow GAB$ seront ^[5] égaux à deux droits. Mais l'angle AGH est

[1] Par construction.

[2] Supposé.

[3] Prop. 74. Geo.

[4] Prop. 72. Geo.

[5] Part. 3. Prop. 24. Geo.

[¹] droit ; l'angle GAB sera donc droit. On trouvera encore par un raisonnement semblable, que l'angle GAC est droit dans l'une & dans l'autre figure. Enfin [²] dans la seconde figure $AGH = GAB$. La ligne AG étant donc perpendiculaire aux lignes AB & AC , elle sera [³] perpendiculaire à leur plan BC . Cette ligne AG est [⁴] aussi perpendiculaire au plan EF . Les plans BC & EF sont donc [⁵] parallèles entr'eux, ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION LXXVIII.

1°. Si un plan rencontre un autre plan, les angles formés de part & d'autre d'un de ces plans seront droits ou égaux à deux droits.

2°. Si deux plans se coupent, leurs angles opposés par le sommet seront égaux entr'eux.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le plan DF qui rencontre le plan AB :
Je dis que les angles qui sont formés de part & d'autre de ce plan DF , pris ensemble,

[¹] Def. 20. & Def. 14. Geo.

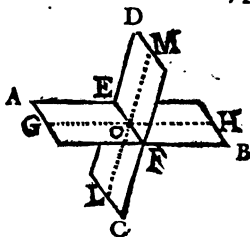
[²] Part. 1. Prop. 23. Geo.

[³] Prop. 67. Geo.

[⁴] Par construction.

[⁵] Part. 2. Prop. 76. Geo.

sont égaux à deux droits. Pour le démontrer, par un point de la commune section EF , par exemple O , soit menée dans le plan AB la ligne GH perpendiculairement à cette commune section EF , & par le même point O soit encore menée dans



le plan DF la ligne LM perpendiculaire à cette commune section EF . Alors les angles GOM & MOH sont ^[1] les angles des plans DF & AB . Et parceque la ligne GH est droite, ces angles GOM & MOH sont ^[2] dans le même plan. Enfin ces angles GOM & MOH sont ^[3] droits ou égaux à deux droits, ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les plans AB & CD qui se coupent ; je dis que les angles de ces plans qui sont opposés par le sommet, sont égaux entr'eux. Car les angles GOL & MOH

[1] Def. 18. Geo.

[2] Prop. 65. & Cor. Def. 10. Geo.

[3] Part. I. Prop. 21. Geo.

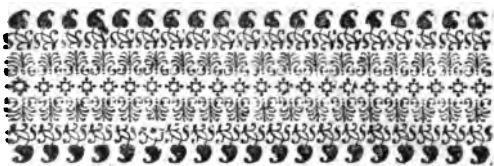
font ^[1] les angles de ces plans, & ces angles sont opposés par le sommet, & ^[2] dans le même plan ; ils sont donc ^[3] égaux entr'eux, ce qu'il falloit démontrer.

[1] *Def. 18. Geo.*

[2] *Prop. 65. & Cor. Def. 10. Geo.*

[3] *Part. 1. Prop. 22. Geo.*





CHAPITRE III.

DES CORPS

O U

SOLIDES.

IL est impossible de faire un grand progrès dans la Physique nouvelle , sans sçavoir la maniere de connoître combien de masse ont certains corps , & combien de surface. Parceque leur repos , leurs differens degrés de mouvement , leur situation , figure & volume, sont ordinairement l'origine des Phenomenes les plus considerables.

La connoissance des solides est fort avantageuse dans les Mechaniques pour la construction des Machines , pour déterminer les Centres de gravité , pour trouver les Equilibres , &c. Dans la Navigation pour la construction des Vaisseaux , pour comparer la pesanteur de leur volume à un pareil volume d'eau , pour connoître leur plus grande charge , &c.

On se trouve souvent dans la necessité de

mesurer des murailles selon leur trois dimensions , pour sçavoir combien de toises cubes elles contiennent , combien de pieds , &c. Il y a tant d'ouvrages qui se rencontrent continuellement dans l'Architecture , dont la perfection dépend de la coupe des pierres , & d'une Theorie exacte des corps ! s'il est necessaire d'estimer des ouvrages de Fortifications, par exemple , des excavations de fossés , la solidité des remparts , &c , on n'y peut reussir sans la connoissance des solides. Enfin les usages de cette partie de la Geometrie sont tres-frequens & d'une grande utilité dans le reste des Mathematiques ; & quand même cette utilité ne paroîtroit que dans les exemples qu'on vient d'apporter ; cela seroit suffisant pour en rendre l'étude recommandable , & pour animer le zèle de ceux qui commencent à s'appliquer à ces sciences.

PROPOSITION LXXIX.

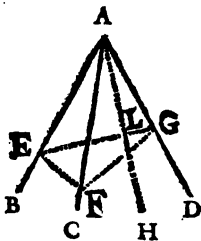
Si trois angles plans font un angle solide : deux , pris ensemble , seront plus grands que le troisième.

DEMONSTRATION.

SOient les angles plans BAC , CAD & DAB qui forment un angle solide dont le sommet est A : Je dis que deux de ces angles plans pris à volomé , par exemple BAC & CAD sont plus grands que le troisième DAB .

Si un de ces deux angles BAC , CAD , est

plus grand que l'angle DAB , ou s'il est égal à l'angle DAB ; il est évident que ces deux angles BAC & CAD , pris ensemble, sont plus grands que l'angle DAB . Car c'est ajouter quelque chose à une de deux grandeurs égales, ou à la plus grande, & rien à l'autre égale ou plus petite.



Mais si chacun des angles BAC & CAD est plus petit que le troisième angle DAB , par les points E & G éloignés du point A , & pris à volonté dans les lignes AB & AD , soit menée EG . De cet angle DAB retranchons une partie HAB qui soit égale à l'angle CAB . Sur la ligne AC prenons la partie AF égale à AL . Enfin du point E au point F , & du point F au point G soient menées les lignes EF & FG .

Les triangles LAE & FAE ont le côté AE commun, & ^[1] $AL = AF$. Outre cela ^[1] l'angle $LAE = FAE$. Les bases EL & EF seront ^[2] donc égales. Mais ^[1] $EF + FG > EG$. Donc ^[4] $FG > LG$. Le côté AG est commun aux deux triangles FAG & LAG , & ^[3] $AF = AL$. L'angle FAG est donc ^[5] plus grand que l'angle LAG . En ajoutant d'une part l'angle FAE , & de l'autre

^[1] Par construction.

^[2] Part. I. Prop. 35. Geo.

^[3] Prop. I. Geo.

^[5] Cor. 3. Prop. 35. Geo.

^[4] Ax. 17. Geo.

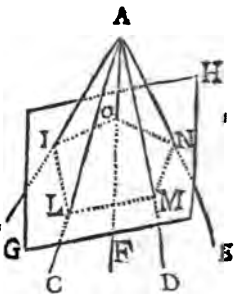
part l'angle LAE égal [¹] au précédent ; on trouvera [²] que la somme des angles $BAC + CAD > BAD$, ce qu'il falloit démontrer.

On suivra cette même méthode , pour démontrer que $BAC < BAD + CAD$, & que $CAB + BAD > CAD$.

COROLLAIRE.

Tous les angles plans qui font un angle solide sont , ensemble , moindres que quatre droits. Soit un angle solide dont le sommet est A : Je dis que la somme des angles plans BAC , CAD , DAE , EAF , FAB , qui le forment,

quelque nombre qu'il y en ait , est plus petite que quatre angles droits. Pour le démontrer, considérons un plan , par exemple GH , qui coupe transversalement les plans de ces angles qui composent l'angle solide dont le sommet est A . Alors les communes sections



de ces plans & du plan GH formeront la figure rectiligne $ILMNO$; & il y aura des angles solides dont les sommets seront les points I , L , M , N , &c.

La somme des angles de tous les triangles IAL , LMA , MNA , ANO , AIO , qui ont chacun pour base un côté du polygone

[¹] Par Construction.

[²] Ax. 7. gen.

$I L M N O$, est [1] égale à autant de fois deux angles droits ; qu'il y a de côtés à ce polygone $I L M N O$.

La somme des angles interieurs du polygone $I L M N O$ & de quatre angles droits, est aussi égale [2] à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés à ce même polygone $I L M N O$.

La somme des angles des triangles $I A L$, $L A M$, $M N A$, &c. est donc [3] égale à la somme faite des angles interieurs du polygone $I L M N O$ & de quatre droits.

Mais [4] la somme des angles $A I O$ & $A I L$ est plus grande que l'angle $O I L$ du même polygone. De même $A L I + A L M > I L M$. & $A M L + A M N > L M N$. De plus $A N M + A N O > M N O$. Enfin $A O N + A O I > N O I$. C'est à dire que la somme des angles qui sont à la base des triangles $I A L$, $L M A$, $A M N$, &c. est plus grande que la somme des angles interieurs du polygone $I L M N O$.

Si de la somme des angles des triangles $I A L$, $A L M$, $A M N$, &c. on retranche la somme des angles plans qui sont à leur base, dont les sommets sont I , L , M , & O ; & si de la somme faite des angles interieurs du polygone $I L M N O$ & de quatre droits, on retranche la somme de ces angles interieurs : on trouvera [5] que le reste des angles des triangles $A I L$, $A M L$, &c. c'est à dire, que la somme des angles plans qui forment l'angle solide dont le sommet est A , sera plus petite que quatre angles droits, ce qu'il falloit démontrer.

[1] Prop. 31. Geo.

[2] Part. 1. Prop. 32. Geo. [4] Prop. Prof.

[3] Ax. 18. gen.

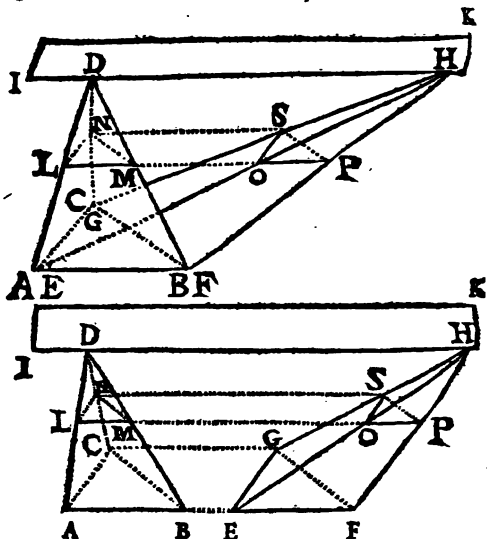
[5] Ax. 15. gen.

PROPOSITION LXXX.

Les pyramides triangulaires posées sur la même base, ou sur des bases équilatérales l'une à l'autre, sont égales entr'elles.

DEMONSTRATION.

Soient les deux pyramides $ABCD$ & $EFGH$ sur la même base ABC , ou sur des bases



équilatérales ABC & EFG , & de même hauteur, c'est à dire [1] entre les mêmes plans parallèles IK & $AFGC$: Je dis que ces deux py-

[1] Def. 21. & Cor. Prop. 70. Geom.

pyramides sont égales entr'elles. Pour le démontrer, considérons ces deux pyramides comme divisées en feuilletts, lames, ou plans triangulaires parallèles aux bases ABC & EFG , & d'une épaisseur indéfiniment petite. Il est constant que dans l'une de ces pyramides il y aura autant de ces plans, lames, ou feuilletts, que dans l'autre; puisqu'on suppose ces mêmes pyramides être de même hauteur. Il reste donc à démontrer que chaque coupe, lame, feuille, ou plan d'une de ces pyramides, sera égale à chaque coupe, feuille, ou lame, qui sera à même hauteur dans l'autre pyramide.

Soit le plan $LPSN$ qui coupe ces deux pyramides parallèlement au plan $AFGC$. Les communes sections LM & AB du plan DAB & des plans $LPSN$ & $AFGC$ seront ^[1] parallèles entr'elles. Les triangles ABD & DLM seront ^[2] donc semblables; on dira la même chose des triangles HEF & HOP ; DAC & LND ; EGH & HOS ; DCB & DNM ; HGF & HSP .

Donc ^[3] $AB, LM :: AD, LD, \& EF, OP :: EH, OH$.

Mais ^[4] $AL, LD :: EO, OH, \& \supseteq [5] AL, \rightarrow LD, LD :: EO \rightarrow OH, OH$, c'est à dire, $AD, LD :: EH, OH$.

Donc ^[6] $AB, LM :: EF, OP$. Or ^[7] $AB = EF$. Donc ^[8] $LM = OP$.

[1] Prop. 75. Geo.

[2] Part. 1. Prop. 24. & part. 1. prop. 32. Geo.

[3] Part. 1. Prop. 32. Geo.

[4] Cor. Prop. 74. Geo.

[5] Part. 3. Cor. Prop. 3. Algeb.

[6] Cor. 3. Def. 12. Algeb.

[7] Part. 2. Prop. 9. Algeb.

[8] Supposit.

On trouvera par un raisonnement semblable à celui qu'on vient de faire, que $CB \cdot NM :: BD \cdot MD :: FH \cdot PH :: FG \cdot PS$, & de ces rapports égaux, on conclura que $CB \cdot NM :: FG \cdot PS$, & ^[1] $CB \cdot FG :: NM \cdot PS$. Mais ^[2] $CB = FG$. Donc $NM = PS$.

On démontrera de la même manière que $LN = OS$.

Une de ces lames triangulaires LMN d'une de ces pyramides est donc équilatérale à une autre lame triangulaire OPS correspondante à même hauteur dans l'autre pyramide, Ces deux triangles LMN & OPS sont donc égaux entr'eux.

Ce qu'on a démontré à l'égard des feuilles ou lames LMN & OPS peut être démontré de la même manière & par les mêmes raisons de toutes les autres lames ou feuilles comparées entr'elles à même hauteur, c'est à dire dans les mêmes plans parallèles aux bases.

Les pyramides triangulaires $ABCD$ & $EFGH$ de même hauteur & posées sur des bases équilatérales ABC & EFG sont donc égales entr'elles, ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION LXXXI.

Une pyramide triangulaire est la troisième partie d'un prisme de même base & de même hauteur.

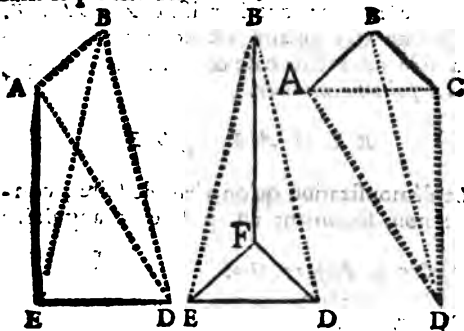
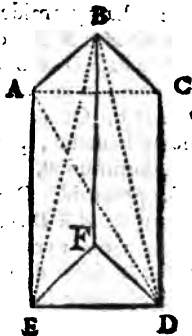
DEMONSTRATION.

Soit le prisme triangulaire $ABCDEF$; Je dis qu'une pyramide qui aura par base un des

^[1] *Part. 2. Cor. Prop. 3. Algeb.*

^[2] *Supposit.*

triangles ABC , DEF , qui sont les deux bases parallèles, semblables, & égales du prisme triangulaire $ABCDEF$, & qui sera de même hauteur que ce prisme; par exemple, la pyramide $EDFB$; sera la troisième partie de ce même prisme. Pour le démontrer; par un même point, par exemple B , soient menées les diagonales BD & BE sur les deux faces CF & AF , & sur la troisième face CE soit encore menée la diagonale AD , qui feront six triangles & [1] représenteront ce prisme divisé par les deux plans EDB & ABD , en trois pyramides $EDFB$, $EABD$, & $ABCD$. Il faut démontrer qu'elles sont égales, & pour y réussir considérons-les [2] dans le prisme $ABCDEF$.



[1] Prop. 65. Geo.

[2] Part. 3. de l'averfiff. pag. 230.

1°. La pyramide $BDFB$, ou $BEFB$ qui est la même, est égale à la pyramide $AEBD$. Car la base BEF de la pyramide $BEFD$ est [1] égale à la base AEB de la pyramide $AEBD$. Or ces deux pyramides ont une même hauteur, puisqu'elles ont le même sommet commun D . Donc, [2] la pyramide $BEFD = AEBD$.

2°. La pyramide $DACB$, est égale à la pyramide $AEBD$, ou $AEDB$ qui est la même. Car la base DAC de la pyramide $DACB$ est [3] égale à la base AED de la pyramide $AEDB$. Or ces deux pyramides ont [4] une même hauteur, puisqu'elles ont le même sommet commun B .

La pyramide $DACB$ est [5] donc égale à la pyramide $AEDB$, ou $AEBD$.

Les trois pyramides $EDFB$, $AEBD$ & $ACBD$ sont donc [6] égales entr'elles. Chacune est donc la troisième partie du prisme proposé.

Or la pyramide $EDFB$ a la même base & la même hauteur que le prisme $ABCDEF$. Un prisme triangulaire est donc triple d'une pyramide de même base & de même hauteur, ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUES.

La démonstration qu'on vient de faire convient non seulement au prisme triangulaire

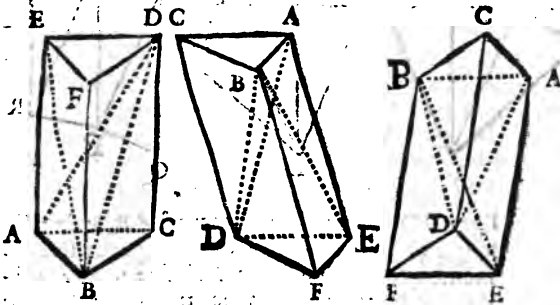
[1] Cor. 2. Prop. 37. Geo.

[2] Prop. 30. Geo.

[3] Cor. Prop. 70. Geo.

[4] Ax. 18. Geo.

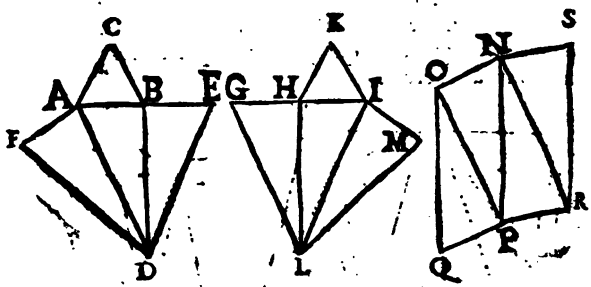
droit, mais aussi aux obliques triangulaires. C'est pourquoi on la peut appliquer aux figures suivantes, & on n'y trouvera aucune difficulté particuliere. Les différentes positions & coupes des prismes qui y sont representées, serviront à exercer.



Pour faciliter encore davantage l'intelligence de la proposition presente, on peut tailler un prisme triangulaire de bois ou de cire, & ensuite le couper suivant les plans EBD & ABD .

J'enseignerai même une maniere pour découper du carton dont on fera trois pyramides triangulaires égales entr'elles, qui étant appliquées l'une contre l'autre formeront le prisme triangulaire $ABCDEF$. Et pour y réussir plus facilement, je proposerai la construction d'un prisme rectangle; ce qui suffira, parcequ'il ne s'agit que de faire bien entendre le relief des trois pyramides qui sont representées dans la figure du prisme $ABCDEF$, car lorsqu'on les fait reconnoître dans le prisme rectangle, on les distingue avec la même facilité dans le prisme oblique. Après avoir mené à volonté la ligne

AB, il faut [1] construire sur cette ligne un triangle équilatéral ABC. Il faut [2] mener la



ligne BD perpendiculairement à AB & de telle longueur qu'on voudra, cette longueur sera la même que celle du prisme. Il faut mener la ligne AD pour former le triangle rectangle ABD. Et sur le côté BD on formera encore [3] le triangle rectangle DBE = ABD. Ensuite sur l'hypoténuse AD, il faut [4] construire un triangle isoscele, & faire le côté AF = AB. Il faut encore [5] construire une seconde figure GLMK équilatérale à la précédente; observant seulement de faire le triangle isoscele ILM sur l'hypoténuse IL vers la main droite. Ensuite sur la ligne OP = BD il faut décrire deux triangles rectangles égaux chacun au triangle ABD, pour former le parallélogramme NQ, sur une des hypoténuses NP ou OQ, il faut former le triangle isoscele NPR, faisant le

[1] Part. 3. Cor. 4. Prop. 35. Geo.
 [2] Cor. 7. Prop. 27. Geo.
 [3] Cor. 4. Prop. 35. Geo.
 [4] Part. 4. Cor. 4. Prop. 35. Geo.

troisième côté $RP = PQ$, & sur le côté RN en fera encore un autre triangle isoscele $SN = NO$. Il faut se servir de ciseaux pour couper le carton sur lequel on a décrit ces trois figures, & le couper en suivant les lignes $DFACBED$, &c. & avec un couteau on le coupera à moitié, suivant toutes les lignes transversales PO , PN , NR , AD , HL , &c. Enfin il faut plier la première figure de sorte que les points F & E se rencontrent sur le point C , & que les points G & M se trouvent sur le point K . Il faut appliquer le point S sur le point O , & le point Q sur le point R . Alors on aura trois pyramides, dont on en appliquera une, de maniere que son triangle isoscele se trouve sur l'isoscele RSN , & que l'isoscele de l'autre se trouve appliqué contre l'isoscele NRP ; ce qui formera un véritable prisme triangulaire, tel qu'on l'a représenté dans la démonstration de la prop. pref. Car les bases qui seront opposées ABC & HIK seront [1] égales & semblables, & les trois autres surfaces qui le termineront seront [2] des parallelogrammes.

On peut encore [3] faire les trois parallelogrammes rectangles RS , NT , & TX , dont les trois bases RN , Z , S , Y , X , NT , TV soient égales entr'elles & chacune un peu plus grande que le côté AB d'une des figures precedentes, & la hauteur RZ soit égale à BD . Après



R Z N T X Y V

[1] Par construction.

[2] Part. 2. Prop. 37. Geom.

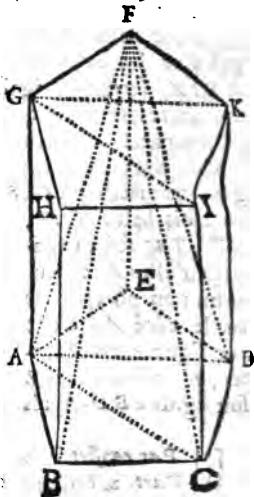
[3] Cor. 9. Prop. 27. & Cor. 3. Prop. 37. Geo.

cela il faut couper le carton, suivant le circuit du parallélogramme total $R X$, & ensuite le couper à moitié suivant les deux lignes $N S$ & $T Y$; & enfin appliquer la ligne $R Z$ sur la ligne $R X$ pour former les contours d'un prisme dans lequel seront ajustées les trois pyramides qu'on vient de construire.

COROLLAIRE I.

Non seulement la pyramide triangulaire; mais aussi toute autre pyramide est la troisième partie du prisme qui a même base & même hauteur que cette pyramide. Tout prisme, c'est à dire triangulaire ou autre, est donc triple d'une pyramide qui a même base & même hauteur que ce prisme.

Soit le prisme $ABCDEF GHIK$, & la pyramide pentagone $ABCDEF$, de même base & de même hauteur que ce prisme: Je dis que la pyramide $ABCDEF$ est la troisième partie du prisme $ABCDEF GHIK$. Pour le démontrer, du sommet, par exemple A , d'un des angles de la base $ABCDE$, qui est l'extrémité de la ligne GA , soient tirées les lignes AD & AE aux sommets de autres angles pour diviser cette base en trian-



gles; & de l'autre extremité G de la même ligne AG soient encore menées les lignes GK & GI aux sommets des autres angles,

Le prisme $ABCDEF GHIK$ sera divisé par les plans GC & GD en trois prismes triangulaires $ABCGHI$, $ACDGIK$, & $ADEGKF$. Pareillement la pyramide $ABCDEF$ sera divisée en trois pyramides $ABCF$, $ACDF$, & $ADEF$. Mais chaque pyramide $ABCF$, $ACDF$, &c. qui fait partie de la pyramide totale $ABCDEF$, est [1] la troisième partie de chaque prisme triangulaire $ABCGHI$, $ACDGIK$, &c. qui fait partie du prisme total $ABCDEF GHIK$. Puisque toutes ces pyramides qui sont parties de la pyramide $ABCDEF$, & tous ces prismes qui sont parties du prisme $ABCDEF GHIK$, sont entre les mêmes plans parallèles $ABCDE$ & $GHIK$; les pyramides $ABCF$, $ACDF$, & $ADEF$, prises ensemble, c'est à dire la pyramide entière $ABCDEF$ est donc la troisième partie des prismes $ABCGHI$, $ACDGIK$, & $ADEGKF$, pris ensemble, c'est à dire du prisme entier $ABCDEF GHIK$. Enfin le prisme $ABCDEF GHIK$ est donc triple de la pyramide polygone $ABCDEF$ de même base & de même hauteur.

COROLLAIRE II.

Puisque [2] les cones peuvent être considerez comme des pyramides d'une infinité de côtes, & que [1] les cylindres peuvent être regardez

[1] Prop. 13.

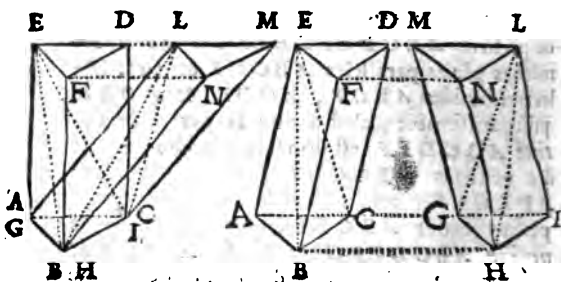
[2] Def. 67, Geo.

[1] Def. 76, Geo.

comme des prismes aussi d'une infinité de côtes; il suit de la prop. pres. qu'un cône est la troisième partie d'un cylindre qui a même base & même hauteur; ou que les cylindres sont triples des cônes de même base & de même hauteur.

COROLLAIRE III.

Les prismes triangulaires de même base & de même hauteur, ou qui sont sur des bases équilaterales, & entre les mêmes plans parallèles,



sont égaux entr'eux. Soient les prismes $ABCDEF$ & $GHILMN$ sur la même base ABC , ou sur les bases égales ABC & GHI , & entre les mêmes plans parallèles $ABHI$ & $EFNL$. Je dis que ces deux prismes sont égaux entr'eux. Car du point E , par exemple, aux points B & C après avoir mené les lignes EB & EC ; & du point L aux points G & H

après avoir mené les lignes LG & LH ; il est [1] évident que les pyramides $ABCE$ & $GHIL$ sont égales entr'elles. Or trois fois cette pyramide $ABCE$, & trois fois la pyramide $GHIL$ sont [2] choses égales; c'est à dire, [3] le prisme entier triangulaire $ABCDEF$ est égal au prisme entier aussi triangulaire $GHILMN$.

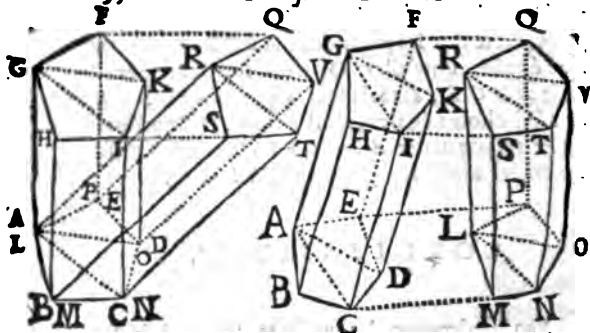
COROLLAIRE IV.

Non seulement les prismes triangulaires, mais aussi tous les prismes polygones qui seront posés sur la même base, ou sur des bases équilaterales & équiangles l'une à l'autre, & qui seront de même hauteur, ou entre les mêmes plans paralleles, sont égaux entr'eux. Soient les prismes $ABCDEFGHIK$ & $LMNOPQRSTV$, sur la même base $ABCDE$, ou sur les bases $ABCDE$ & $LMNOP$ équilaterales & équiangles l'une à l'autre, & posés entre les mêmes plans paralleles $ABCMNOPE$ & $GHISTVQF$: Je dis que ces deux prismes sont égaux entr'eux. Pour le démontrer, des sommets G & A , R & L d'angles égaux de ces bases, soient menés des lignes droites aux sommets des autres angles, pour diviser ces bases en triangles. Alors les triangles d'une de ces bases seront égaux aux triangles de l'autre, chacun à chacun.

[1] Prop. 20. Geo.

[2] Ax. 4. ou Ax. 6. gen.

[3] Prop. Pres.



Car, puisque [1] l'angle $AED = LPO$, & [2] que $EA = PL$, & $ED = PO$; on [3] aura $AD = LO$. Ainsi [4] le triangle $AED = LPO$. L'angle $EDC = PON$ [5]; & [6] l'angle $EDA = POL$. Donc [7] l'angle $ADC = LON$. On vient de voir que le côté $AD = LO$; & [8] le côté $DC = ON$. Donc [9] le côté $AC = LN$. Donc le triangle $ACD = LNO$. Par le même raisonnement on trouvera que le triangle $ABC = LMN$.

Le prisme triangulaire $ADEFGK$ est [10] égal au prisme $LOPQRV$, & le prisme $ACDKGI = LNOVRT$, & le prisme $ABCIGH = LMNTRS$, c'est à dire [11] que le prisme total $ABCDEFGHIK$ est égal au prisme entier $LMNOPQRSTV$.

[1] *Supposé.*

[2] *Part. 1. Prop. 35. Geo.*

[3] *Ax. 1. Geo.*

[4] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.*

[5] *Ax. 9. Gen.*

[6] *Cor. 3. Prop. Prop.*

[7] *Ax. 3. Gen.*

COROLLAIRE V.

Il suit du Corollaire 4. de la prop. pres. que les cylindres qui ont même base & même hauteur sont égaux entr'eux.

Outre cela il suit encore que les cylindres qui sont sur des bases égales & entre les mêmes plans parallèles ou de même hauteur, sont aussi égaux entr'eux. Car les cylindres sont [1] considerez comme des prismes équiangles [2] & d'une infinité de côtez. Or les bases de ces cylindres de même hauteur, étant égales, seront aussi équilatérales. Parceque ces bases qui seront [3] des cercles égaux, auront des circonférences égales. Et il y aura autant de côtez dans une de ces circonférences que dans l'autre, puisque de part & d'autre il y en a une infinité. Enfin chaque côté d'une de ces bases sera égal à chaque côté de l'autre, puisque [4] chaque infinitième partie de la circonférence d'une de ces bases égales, est égale à chaque infinitième partie de la circonférence de l'autre base. Non seulement les cylindres de même base & de même hauteur; mais aussi ceux qui auront des bases égales, & qui seront aussi de même hauteur, seront donc égaux entr'eux.

COROLLAIRE VI.

Un prisme oblique est égal au produit de sa base multipliée par sa hauteur. Soit, par exemple, le prisme oblique $ABCDEFGHIK$: Je dis que si on multiplie la base $ABCDE$ par la hauteur KL , ou AM , qui est une ligne

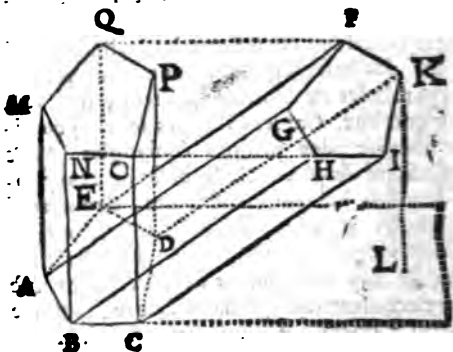
[1] Def. 76. Geo.

[2] Cor. Prop. 47. & Def. 60. Geo.

[3] Supposit.

[4] Ax. 12. Geo.

menée perpendiculairement d'un point d'une des bases, par exemple $AB CDE$, à l'autre base



parallèle, & semblable $GHIK F$ prolongée ; le produit de cette multiplication exprime la grandeur de la masse, du volume, ou de la solidité de ce prisme. Car ce produit est ^[1] le prisme rectangle $AB CDE Q M N O P$, qui est ^[2] égal au prisme oblique proposé $AB CDE F G H I K$. Pour connoître combien de pieds cubiques, de toises cubiques, &c. contient un prisme oblique, il suffit donc de multiplier sa base par sa hauteur.

COROLLAIRE VII.

Un cylindre oblique est égal au produit de la base multipliée par sa hauteur. Car lorsqu'on multiplie la base de ce cylindre oblique par sa hauteur, on a pour produit un cylindre rectangle égal au cylindre oblique dont il s'agit.

[1] Cor. 2. Def. 75. Geo.

[2] Cor. 4. Prop. Prop.

COROLLAIRE VIII.

Une pyramide est donc égale au tiers du produit de sa base multipliée par sa hauteur. Car si on multiplie la base d'une pyramide droite, ou oblique, par la hauteur de cette pyramide, le produit est un prisme de même hauteur, dont cette pyramide est ^[1] la troisième partie. Si on multiplie la base d'une pyramide par la troisième partie de sa hauteur, ou sa hauteur par la troisième partie de sa base; le produit exprimera aussi la solidité de cette pyramide. Parceque la moitié du produit de deux grandeurs multipliées l'une par l'autre, est égal au produit d'une de ces grandeurs multipliée par la moitié de l'autre.

COROLLAIRE IX.

Un cône est égal au tiers du produit de sa base multipliée par sa hauteur; ou au produit de sa base multipliée par la troisième partie de sa hauteur; ou enfin au produit de sa hauteur multipliée par le tiers de sa base. Car lorsqu'on multiplie la base d'un cône par sa hauteur, le produit est un cylindre dont ce cône est ^[2] la troisième partie.

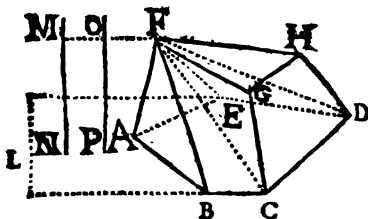
COROLLAIRE X.

Pour connoître la solidité des autres corps germezz par des surfaces planes, il faut les

[1] Prop. pres. ou Cor. I. Prop. pres.

[2] Cor. 2. Prop. pres.

considérer comme divisées en pyramides ; de même que les surfaces planes irrégulières ont été [1] considérées comme divisées en triangles. Ensuite il faut [2] chercher la solidité de chaque pyramide , & la somme des solidités de ces pyramides sera la masse ou solidité du corps proposé.



Soit le corps $ABCD FGH$ que je suppose estre une grosse piece de marbre terminée par sept surfaces , sçavoir $ABCDE$, FGH , ABF , $BCGF$, $CDHG$, $EDHF$, & AEF ; si on mene les lignes FC & FD , ce corps sera divisé en ces deux pyramides $ABCDEF$ & $GCDHF$. Si on peut mener [3] du point F une ligne perpendiculaire à la base $ABCDE$ prolongée , cette perpendiculaire sera la hauteur de la pyramide $ABCDEF$. Si on ne peut mener cette perpendiculaire du point F , après avoir prolongé cette base $ABCDE$ vers L , par exemple ; il faut lui ajuster perpendiculairement deux bâtons MN & OP , de maniere que ces deux bâtons & le point F se trouvent dans le même plan , ce qui se fera

[1] Cor. 2. Prop. 40. Geo. page 398.

[2] Cor. 8. Prop. pref.

[3] Cor. 2. Prop. 69.

[¹] en regardant le bâton MN & le point F , & en posant le bâton OP de sorte que le bâton MN le couvre à la vûe. Ensuite en borneiant, il faut chercher le point M jusqu'à ce qu'en regardant par le point M & par le point F , on rencontre le point O de sorte que la longueur OP soit égale à MN . Alors MN sera égale à la hauteur de la pyramide $ABCDE F$. Parceque la ligne MF ayant [²] ses deux points M & O également [³] distans du plan $LBCDEL$, elle sera [⁴] parallele au plan $LBCDEL$. On pourra de même trouver la hauteur de la pyramide $GCDHF$, en prolongeant la base $GCDH$ par le moyen de quelque planche ou ais aplani qu'on apliquera à cette base. Enfin la solidité de ces deux pyramides fera [⁵] connoître la solidité totale du corps proposé.

REMARQUE.

Il y a des corps irreguliers, par exemple une Statue, un Vaisseau dont la surface est en partie plane & en partie courbe, selon l'ornement qui s'y rencontre, &c. Alors on ne peut pas facilement diviser ces corps en des pyramides, ou en d'autres corps reguliers, pour en connoître la solidité. Mais on pourra se servir de cette methode qui est assez exacte, quoiqu'elle ne soit pas entierement geometrique.

Il faut construire une caisse ou coffre de bois, dont la figure soit un parallelepède rectangle,

[¹] Part. 1. Cor. 5. Prop. 34. Geo.

[²] Par construction.

[³] Cor. Prop. 70. Geo.

[⁴] Cor. Prop. 8. & Def. 8. Geo.

[⁵] Ax. 3. Gen.

& d'une grandeur suffisante pour que le corps dont on veut connoître la solidité puisse y être contenu & y être couvert d'eau. Il faut exactement enduire le dedans de cette caisse avec de la poix, afin que l'eau qu'on y mettra y soit retenue sans qu'elle s'écoule aucunement.

Ayant posé le fond de cette caisse parallèlement à l'horizon, par le moyen d'un niveau; il faut mettre dans cette caisse le corps irrégulier, & y verser ensuite de l'eau pour la remplir, de sorte que le corps irrégulier soit couvert entièrement de cette eau. Après cela il faut marquer sur les côtes de la caisse, l'endroit où se termine la surface supérieure de l'eau dans laquelle est plongé le corps irrégulier.

Enfin il faut retirer ce corps hors de l'eau, & après qu'elle sera tranquille, il faudra encore marquer sur les côtes de la caisse l'endroit où se termine la surface supérieure de l'eau, & mesurer [1] la solidité des deux parallépipèdes, dont la base commune est le fond de cette caisse, & les hauteurs particulières de chacun sont les lignes droites menées depuis chacune de ces deux marques perpendiculairement à cette base commune. Ensuite il faut soustraire le plus petit parallépipède du plus grand, ce qu'on trouvera pour reste exprimera la solidité du corps irrégulier proposé.

[1] Cor. 2, Def. 75. Geo.



PROPOSITION LXXXII.

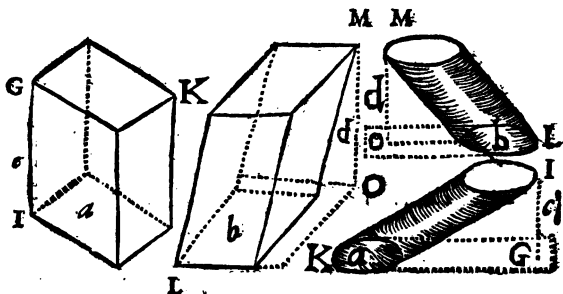
1°. Les prismes & les cylindres dont les hauteurs sont égales, sont entr'eux comme leurs bases ; & si les bases sont égales, ils sont entr'eux comme leurs hauteurs.

2°. Les pyramides & les cones dont les hauteurs sont égales, sont aussi entr'eux comme leurs bases ; & si leurs bases sont égales, ils sont entr'eux comme leurs hauteurs.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les prismes, ou les cylindres, IK & LM dont les hauteurs IG & MO sont éga-



les : Je dis qu'ils sont entr'eux comme leurs bases. Pour le démontrer, soit nommée a la base du prisme IK , & sa hauteur GI soit nommée c . Soit ensuite nommée b la base du prisme LM , & d sa hauteur MO .

Aaa iij

[¹] Le prisme ou le cylindre $IK = ac$, & le prisme $LM = bd$. Donc [²] $IK . ac :: LM . bd$. & [³] $IK . LM :: ac . bd$. Mais puisque [⁴] la hauteur $c = d$; on [⁵] aura $ac . bd :: a . b$. on aura donc cette suite de rapports égaux $IK . LM :: ac . bd :: a . b$. Donc [⁷] $IK . LM :: a . b$. Ce qu'il falloit démontrer.

Si les bases a & b étoient égales, puisque $IK . LM :: ac . bd$, en divisant les deux derniers termes de cette analogie par a & b ; on trouveroit que $ac . bd :: c . d$. Donc $IK . LM :: ac . bd :: c . d$. Donc IK seroit à LM comme la hauteur c à la hauteur d .

D E M O N S T R A T I O N

DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les pyramides ou les cones $ABCDE$ & $GHIKL$ dont les hauteurs EF & LM



soient égales : Je dis que ces pyramides sont entre elles comme leurs bases. Pour le démontrer,

[¹] Cor. 2. Def. 75. Cor. 6. & 7. Prop. 81. Geo.

[²] Cor. 1. Def. 12. & Def. 13. Algeb.

[³] Part. 2. Cor. Prop. 3. Algeb.

[⁴] Supposit.

[⁵] Prop. 6. Algeb.

[⁶] Cor. 3. Def. 12. Algeb.

J'appellerai n la base AC de la pyramide $ABCDE$, & j'appellerai o sa hauteur EF ; je nommerai p la base de la pyramide $GHIKL$ & q sa hauteur LM .

[¹] La pyramide ou le cône $ABCDE = \frac{n \cdot o}{3}$ & la pyramide ou le cône $GHIKL = \frac{p \cdot q}{3}$

Donc [²] $ABCDE . \frac{n \cdot o}{3} :: GHIKL . \frac{p \cdot q}{3}$.

& [³] $ABCDE . GHIKL :: \frac{n \cdot o}{3} . \frac{p \cdot q}{3}$.

Or [⁴] $\frac{n \cdot o}{3} . \frac{p \cdot q}{3} :: n \cdot o . p \cdot q$. & [⁵] en divi-

sant $n \cdot o$ & $p \cdot q$ par les hauteurs [⁶] égales o & q , on aura $n \cdot o . p \cdot q :: n . p$. On trouvera donc cette suite de rapports égaux $ABCDE$.

$GHIKL :: \frac{n \cdot o}{3} . \frac{p \cdot q}{3} :: n \cdot o . p \cdot q :: n . p$. Donc

les pyramides $ABCDE$ & $GHIKL$ sont entr'elles comme leurs bases n & p , ce qu'il falloit démontrer.

Si les bases n & p étoient égales, il seroit facile de démontrer que ces pyramides seroient entr'elles comme leurs hauteurs, en divisant $n \cdot o$ & $p \cdot q$ par ces bases égales n & p .

COROLLAIRE I.

Les prismes ou les pyramides de même base

[¹] Cor. 8. & 9. Prop. 31. Geo.

[²] Def. 13. Algeb.

[³] Part. 2. Cor. Prop. 3. Algeb.

[⁴] Prop. 5. Algeb.

[⁵] Prop. 6. Algeb.

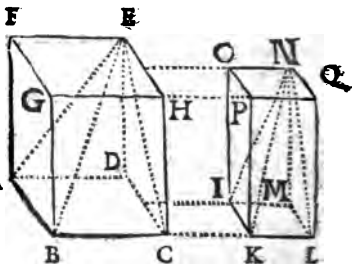
[⁶] Supposit.

seur & de même base, ou dont les bases sont égales, quand même ces bases ne seroient ni équilatérales, ni équiangles, sont ^[1] égaux, ou égales entr'elles.

COROLLAIRE II.

Si deux prismes de même hauteur, par exemple $ACFH$ & $ILOQ$, ont des bases semblables $ABCD$ & $IKLM$, de sorte que

chaque côté de cette base $ABCD$ soit double de chaque côté de la base $IKLM$, le prisme $ACFH$ sera égal à quatre fois le prisme ILO .



Q. Car a-

lors la base AC sera ^[2] quadruple de la base IL . Le prisme $ACFH$ sera ^[3] donc quadruple du prisme ILO .

De même, si le diamètre de la base AC du cylindre $ACFH$ est double du diamètre de la base IL du cylindre $ILOQ$, de même hauteur, le carré de ce diamètre de la base AC sera ^[4] quadruple du carré du diamètre de la base IL . Et puisque les cercles sont ^[4] entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres, le cercle AC sera

^[1] Prop. Prop.

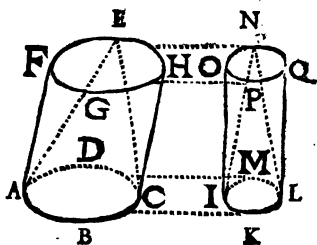
^[2] Cor. 2. Prop. 62. Geom.

^[3] Part. 1. Prop. Prop.

^[4] Cor. 2. Prop. 63. Geom.

aussi quadruple du cercle IL . Enfin ^[1] le cylindre $ACFH$ sera donc quadruple du cylindre $ILOQ$.

On peut ^[2] dire la même chose des pyramides, ou des cones, $ABCDE$ & $IKLMN$ de même hauteur.



COROLLAIRE III.

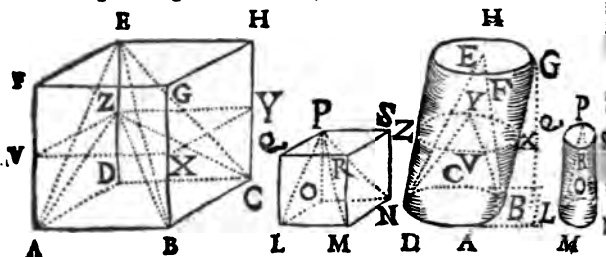
Si deux prismes, ou pyramides, ont des bases semblables, & si chaque côté de la base du premier de ces corps, est double de chaque côté de la base du second, & si la hauteur du premier est double de celle du second de même genre; le premier vaudra huit fois autant que le second. Soit le prisme $ACFH$ dont la base AC est semblable à la base LN du prisme $LNQS$, & chaque côté de cette base AC soit double de chaque côté de la base LN ; soit le diamètre de la base AC du cylindre $ACFH$ double du diamètre de la base LN du cylindre $LNQS$. Enfin la hauteur GB de ce premier prisme ou cylindre soit double de la hauteur NS du second: ce premier prisme sera octuple du second.

Car dans le prisme, ou cylindre AH si nous considérons un autre prisme ou cylindre $ACVF$ de même hauteur que le prisme ou cylindre

[1] Part. I. Prop. Prop.

[2] Part. 2. Prop. Prop.

$LNQS$, ce prisme $ACVY$ sera ^[1] quadruple du prisme $LNQS$. Mais le prisme entier



AH dont la hauteur est ^[2] double de celle du prisme LS , ou du prisme AY , sera ^[3] double du prisme AY ; puisqu'ils sont eurr'eux comme leurs hauteurs, étant l'un & l'autre sur la même base AC . Le prisme AH sera donc double du quadruple du prisme LS . Or ce double du quadruple est octuple; parceque le prisme VH sera aussi quadruple du prisme LS . Le prisme ou le cylindre AH sera donc octuple du prisme ou du cylindre LS .

La même chose est évidente par le même raisonnement à l'égard des pyramides $ABCDE$ & $LMNOP$, ou des cônes $ABCDE$ & $LMNOP$.

On trouvera aussi par un raisonnement semblable que, si deux de ces corps de même genre ont leurs bases semblables, & si chaque côté d'une de ces bases est triple de chaque côté de la base de l'autre, la hauteur de l'un étant double de la hauteur de l'autre; un de ces corps sera dix-

[1] *Cor. 2. Prop. Prop.*

[2] *Supposé*

[3] *Part. 1. Prop. Prop.*

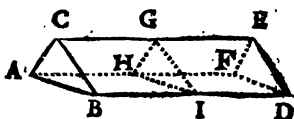
huit fois aussi grand que l'autre. Enfin, si la hauteur de l'un est triple de la hauteur de l'autre, l'un sera vingt-sept fois aussi grand que l'autre, &c.

REMARQUE.

Si on divise un corps en plusieurs parties ; la somme des surfaces de toutes ces parties sera plus grande que la surface de ce même corps avant qu'il fût divisé.

Soit le corps $ABCDEF$; il est évident que si on le coupe suivant le plan GHI , les parties $ABCIGH$ &

$IGHFDE$ seront terminées par les mêmes surfaces qui terminent le corps



entier, & seront encore en outre terminées par deux nouvelles surfaces IGH & IGH .

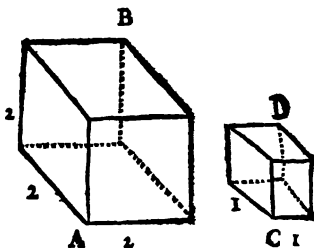
Si on continue à diviser à volonté ces parties, on trouvera encore que, y ayant de nouvelles parties plus petites, la somme de leurs surfaces deviendra encore plus grande que la surface qui appartenoit au tout avant la division. Enfin la multitude des coupes multiplie les surfaces sans augmenter la masse totale, qui est toujours la même.

Il est donc évident que le rapport de la masse d'un grand corps à celle d'un petit de figure semblable, est plus grand que celui de la surface de ce grand corps à celle du petit. Car ce grand corps contient plus de fois le petit, que la surface de ce grand corps ne contient celle du petit.

Soit le corps A qui contienne le corps B , par

exemple six fois. Le corps *A* sera donc égal à 6 *B*. Mais la surface du corps *A* ne contiendra pas six fois la surface du corps *B* ; puisque, comme on vient de voir, six fois la surface du corps *B*, ou de 6 *B*, est plus grande que la surface du corps *A*.

Soit le cube *AB* dont chacune des trois dimensions est de deux pieds ; & le cube *CD* dont chacune des trois dimensions est d'un pied. Le premier cube [1] contient huit fois le second : & la surface de ce premier contient seulement quatre fois celle du second ; c'est à dire



que le corps *AB*, *CD* :: 8, 1. & la surface de *AB* est à la surface de *CD*, comme 24 à 6. ce qui fait voir que les petits corps ont plus de surface par rapport à leurs masses, que les grands dont la figure est semblable à celle des petits.

On pourroit encore dire que plus la figure des corps approche de la cubique, ou de la sphérique, moins ils ont de surface par rapport à leur masse.

Enfin, comme les quarrés ou les cercles ont plus de surface par rapport à leur circuit, que toute autre figure plane ; de même les cubes, ou les Sphères, sont les corps qui ont le plus de masse par rapport à leurs surfaces. La brièveté que je me suis proposée dans ces é'émens m'empêche de le démontrer plus amp'ement,

[1] Cor. 3. Prop. Prof.

PROPOSITION LXXXIII.

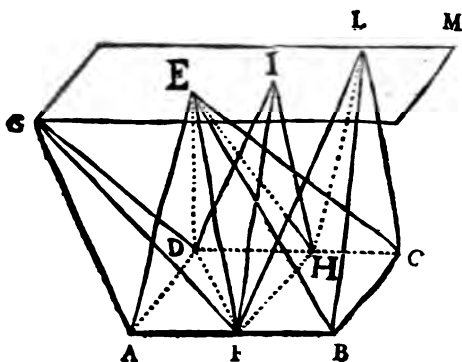
Si une pyramide est de même hauteur que plusieurs autres pyramides ; & si la base de cette pyramide est égale à la somme des bases de ces pyramides , cette premiere pyramide sera égale à ces autres pyramides prises ensemble.

DEMONSTRATION.

Soit la pyramide $ABCDE$ de même hauteur que les pyramides $AFDG$, $DFHI$, $FBCHL$; & soit la base $ABCD$ de la pyramide $ABCDE$ égale à la somme des bases AFD , DFH , & $HFB C$ de ces autres pyramides : je dis que la pyramide $ABCDE$ sera égale à la somme des pyramides $AFDG$, $DFHI$, & $FBCHL$. Pour le démontrer, soient menées les lignes EF & EH .

La pyramide $ABCDE$ est [1] égale aux pyramides $AFDE$, $FHDE$, & $FBCHE$, prises ensemble. Or [2] la pyramide $AFDE$ est égale à

[1] *Ax. 3. Gen.*[2] *Prop. 80. Geo.*



'*AFDG* ; la pyramide *FHDE* = *FHDI* ; & la pyramide *FBCHL* est égale à la pyramide *FBCHE*. Au lieu des pyramides *AFDE* + *FHD* + *FBCHL*, si ^[1] on prend ce qui leur est égal (çavoir *AFDG* + *FHDI* + *FBCHL* ; on trouvera donc que la pyramide *ABCDE* sera égale à la somme des pyramides *AFDG*, *FHDI*, *FBCHL*, dont les bases prises ensemble sont égales à la base *ABCD*, & dont les hauteurs sont égales à celle de la pyramide *ABCDE* ; ces pyramides étant entre les mêmes plans parallèles *ABCD* & *GM*, Ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

On vient de voir ^[2] que la pyramide *ABCDE* est égale à la somme des pyramides *AFDG*, *FHDI*, *FBCHL*, qui sont ^[3] de même hauteur que cette pyramide *ABCDE*. Or la pyramide

[¹] Demande 1. gen.

[²] Prop. Prof.

[³] Supposit.

$ABCDE$ est [¹] égale au produit de la base $ABCD$ multipliée par le tiers de la hauteur, & cette base $ABCDE$ est [²] la somme des bases de ces pyramides $AFDG$, $FHDE$, & $FBCHL$, Il est donc évident [³] que la somme des pyramides $AFDG$, $FHDI$, $FBCHL$ qui sont de même hauteur, est égale au produit de la somme de leurs bases, multipliée par le tiers de leur hauteur commune.

PROPOSITION LXXXIV.

Le rapport qui est entre les pyramides triangulaires semblables ; entre les prismes triangulaires semblables ; entre les parallelepipèdes semblables ; est triplé de celui qui est entre deux des côtes homologues des surfaces semblables qui les terminent.

DEMONSTRATION.

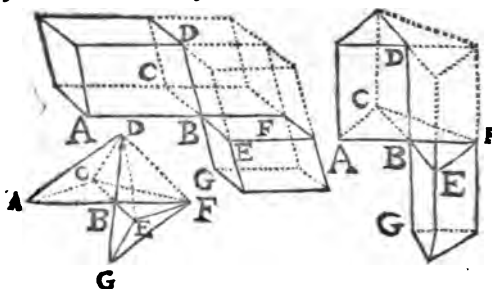
Soient deux de ces solides semblables $ABCD$ & $B EFG$. Soient AB & BF ; CB & BE ; DB & BG , côtes homologues des surfaces semblables ABC , BEF ; CBD & BGE : c'est à dire que AB soit à BF :: CB , BE :: DB . BG . Je dis que le rapport du solide $ABCD$ au solide $B EFG$, est doublé du rapport de AB à BF . Pour le démontrer je considererai le solide $B EFG$ appliqué près le solide $ABCD$, de sorte que les trois lignes BE , BF , & BG qui comprennent les angles plans d'un angle solide

[¹] Cor. 8. Prop. 81. Geo.

[²] Supposition.

[³] Dem. 1. gener.

B b b ij



du corps $LEFG$, & les trois lignes AB , BC , & BD , qui comprennent des angles plans égaux [1] aux précédens dans le solide $ABCD$, soient trois lignes droites ABF , CBE , & DBG . Ce qui est [2] possible, en faisant l'angle $ABE = CBF$, & en faisant l'angle $DBE = CBG$. Ensuite soient prolongées les surfaces de ces deux solides $ABCD$ & $BEFG$, pour décrire les deux nouveaux solides $CBFD$, & $BEFD$.

[3] Le solide $ABCD$ est au solide $CBFD$:: $ABC \cdot CBF :: AB \cdot BF$. [4]

[3] Le solide $CBFD$ est au solide $BEFD$:: $CBF \cdot BEF :: CB \cdot BE$. [4]

Enfin [3] le solide $BEFD$, ou $DBEF$, est au solide $BEFG$, ou $BGEF$, comme la base DBE est à la base BGE :: $DB \cdot BG$.

Puisque les surfaces ABC , BEF ; CBD & BGE sont [5] semblables, nous avons $AB \cdot BF :: CB \cdot BE :: DB \cdot BG$. C'est à dire que nous avons ces trois rapports égaux entr'eux.

[1] *Suppos. & Def. 60. Geo.*

[2] *Part. 2. Prop. 22. Geo.*

[3] *Prop. 82. Geo.*

[4] *Prop. 49. Geo.*

[5] *Supposit.*

$$\left. \begin{aligned} ABCD . Cbfd &:: ABC . CBF :: AB . BF . \\ Cbfd . BEFD &:: CBF . BEF :: CB . BE . \\ BEFD . BEFG &:: DBE . BGE :: DB . BG . \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} AB . BF &:: CB . BE :: DB . BG . \\ ABCD . Cbfd &:: Cbfd . BEFD :: BEFD . BEFG . \end{aligned}$$

Donc \therefore $ABCD . Cbfd . BEFD . BEFG .$

On vient de démontrer que le rapport du solide $ABCD$ au solide $Cbfd$ est égal à celui de AB à BF ; que le rapport du solide $Cbfd$ au solide $BEFD$ est égal à celui de CB à BE ; enfin que le rapport du solide $BEFD$ au solide $BEFG$ est égal à celui de DB à BG .

On trouvera donc cette progression geometrique $\therefore ABCD . Cbfd . BEFD . BEFG .$

Le rapport du solide $ABCD$ à $BEFG$ sera donc ^[1] triplé du rapport de $ABCD$ à $Cbfd$.

Au lieu du rapport de $ABCD$ à $Cbfd$, prenons ^[2] le rapport des deux côtez homologues AB & BF des surfaces semblables, qui lui est égal. Nous trouverons le rapport du solide $ABCD$ au solide semblable $BEFG$, triplé de celui des côtez homologues AB & BF des surfaces qui les terminent, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Les pyramides triangulaires semblables ; les prismes triangulaires semblables ; & les parallelepipedes semblables étant ^[3] entr'eux. En rapport ou en raison triplée des côtez homologues

^[1] Prop. 19. *Algeb.* & def. 18. d' *Algeb.*

^[2] Demande 1. *Gen.*

^[3] Prop. pref.

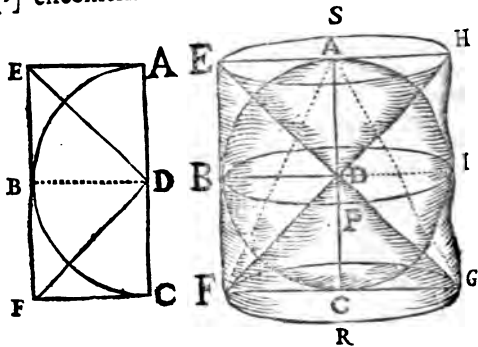
des surfaces semblables qui terminent ces solides : & les cubes de ces côtes homologues étant [1] aussi entr'eux en raison triplée de ces mêmes côtes homologues ; il est évident [2] que ces solides semblables sont entr'eux comme les cubes des côtes homologues des surfaces semblables qui les terminent.

PROPOSITION LXXXV.

Une boule, ou Sphere, est égale aux deux tiers d'un cylindre qui lui est circonscrit.

DEMONSTRATION.

Le parallélogramme rectangle $FCAE$ étant [3] circonscrit au demi cercle $ABCD$; le



rayon DB étant mené du centre D au point d'attouchement B ; enfin les lignes DE & DF qui seront les diagonales des [4] quarrés BA

[1] Cor. 1. prop. 18. *Algeb.*

[2] Cor. 3. def. 12. *Algeb.*

[3] Cor. 4. prop. 12. *Geo.*

[4] Prop. 12 ; prop. 15 ; & def. 50. *Geo.*

& BC , étant menées du même centre D aux points E & F ; si on considère que ce parallélogramme EC tourne, ou fasse une révolution au tour du diamètre AC ; il est évident [1] qu'il y aura des corps de trois sortes qui seront décrits par ce mouvement,

1°. Le cylindre droit FH , par le mouvement du parallélogramme rectangle EC ,

2°. Une Sphere $ABCI$, par le mouvement du demi cercle $ABCD$,

3°. Deux cones droits $ESH D$ & $FRGD$, par le mouvement des triangles rectangles EDA & FDC .

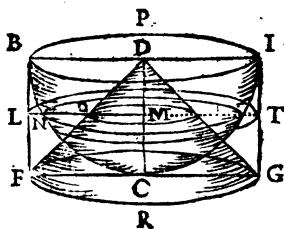
Alors la [2] perpendiculaire DB ayant décrit le grand cercle BPI de la Sphere parallèlement à la base FRG , le cylindre FI sera [3] la moitié du cylindre FH .

Je démontrerai premièrement que l'excès dont le cylindre FI circonscrit à l'hémisphere ou demie boule BCI , surpasse cette demie sphere BCI , est égal au cone $FRGD$.

Considérons ces trois corps coupez par des plans dont le nombre est indéfini, & qui soient

tous parallèles à la base BPI , ou FRG ; & faisons ensuite attention à un de ces plans, par exemple LM ou LT .

Le cercle qui aura pour rayon ND sera



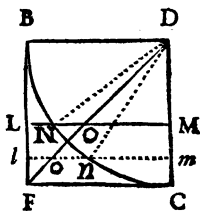
[1] Cor. 1. def. 61. Geo.

[2] Prop. 12. Geo.

[3] Part. 1. prop. 32. Geo.

pour rayon NM , & à l'anneau qui aura LN pour largeur.

Retranchons de part & d'autre le cercle qui aura pour rayon NM , l'anneau qui aura pour largeur LN restera [1] égal au cercle qui aura pour rayon OM . On peut démontrer cette vérité de la même manière à l'égard de chaque anneau & de chaque cercle correspondant à même hauteur dans le cône $FRGD$ pour chaque coupe ou section possible de ce cylindre, faite parallèlement à sa base dans toutes les hauteurs possibles.



Or la somme de tous ces anneaux décrits dans la révolution de la figure BC au tour de CD , par LN & par toutes les autres lignes qui composent le triangle mixte BFC , sera égale à la somme des cercles décrits pendant cette même révolution par le rayon OM , & par toutes les autres lignes qui composent le triangle rectiligne FCD .

Puisque l'excès dont le cylindre décrit par la révolution du quarté BFC au tour de CD , surpasse l'hémisphère aussi décrit par la révolution faite en même temps du quart de cercle $BNCD$, est composé de la somme de tous ces anneaux ; & puisque le cône décrit par la révolution du triangle FCD faite aussi au tour de CD , est composé de la somme des cercles décrits par le rayon OM , & par toutes les autres lignes qui composent ce même triangle rectangle FCD : Il suit que cet excès dont le cylindre surpasse l'hémisphère, sera égal à ce cône.

[1] *Ax. 9. gen.*

Or ce cône $FRGD$ étant de même base & même hauteur que le cylindre FI , il sera ^[1] troisième partie de ce même cylindre. L'excès dont ce cylindre FI surpasse l'hémisphère $DBCIP$, sera donc égal à la troisième partie de ce même cylindre FI . L'hémisphère restera donc égal aux deux tiers du cylindre FI qui lui est circonscrit.

On démontrera de la même manière que l'excès dont le cylindre BH surpasse l'hémisphère $DBAIP$ est égal au cône $ESHD$ qui est aussi égal au tiers de ce même cylindre BH .

Le cylindre entier FH surpasse donc la Sphere entiere $ABCI$ de la valeur des deux cônes ^[2] égaux $FRGD$ & $ESHD$.

Mais le cône $FRGA$ étant ^[3] double du cône $FRGD$ est égal à ces deux cônes égaux $FRGD$ & $ESHD$; & ce même cône $FRGA$ est ^[1] le tiers du cylindre entier FH .

L'excès dont ce cylindre FH surpasse la Sphere $ABCI$ qui lui est inscrite, est donc égal au tiers de ce même cylindre. La Sphere $ABCI$ reste donc égale aux deux tiers du cylindre FI qui lui est circonscrit, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Une Sphere, ou hémisphère, est double du cône qui a même base & même hauteur. Parceque ce cône est ^[1] le tiers du cylindre circonscrit à la Sphere, ou à l'hémisphère, & cette

^[1] Cor. 2. prop. 81. Geo.

^[2] Cor. 1. prop. 82.

^[3] Part. 2. prop. 82.

Sphere , ou hemisphere est [1] les deux tiers de ce même cylindre.

COROLLAIRE II.

Il est donc évident que , puisqu'un cylindre est [2] égal au produit de sa base multipliée par sa hauteur , la Sphere , ou l'hemisphere , sera égale aux deux tiers du produit d'un de ses grands cercles multiplié par son diametre ; ou au produit d'un de ses grands cercles multiplié par les deux tiers du diametre. Car un des grands cercles de cette Sphere , ou la base de l'hemisphere , est [3] égal à la base du cylindre auquel elle est circonscrite ; & la hauteur de ce cylindre est égale à un des diametres de la Sphere , ou au rayon de l'hemisphere. Ce qui est un moyen tres-facile pour connoître la solidité d'une Sphere .

COROLLAIRE III.

Puisque l'hemisphere est [4] égal au produit de la base multipliée par les deux tiers de sa hauteur , ou de son rayon ; le double de l'hemisphere , ou la Sphere entiere , sera égale au produit d'un de ses grands cercles par les quatre tiers du rayon , c'est à dire [5] , par les deux tiers du diametre.

Or le produit des quatre tiers d'un rayon mul-

[1] Prop. pres.

[2] Cor. 2. def. 79. Geo.

[3] Def. 76. Geo.

[4] Cor. 2. prop. pres.

[5] Pag. 56. des fract. de fract.

multipliez par un grand cercle, est égal au produit de quatre grands cercles multipliez par un tiers de rayon. Car appellons ce rayon a ; & appellons b ce grand cercle; les quatre tiers du rayon [1] feront donc $\frac{4a}{3}$. Or $\frac{4a}{3} \times b = \frac{4ab}{3}$,

& il est évident que $\frac{4ab}{3} = 4b \times \frac{a}{3}$.

Une Sphere est donc égale au produit de la somme de quatre grands cercles multipliez par la 3^e partie de leur rayon. Ce qui peut encore faire connoître la solidité d'une Sphere, & ce qui servira pour en connoître la surface.

PROPOSITION LXXXVI.

Les Cylindres dont les hauteurs sont égales aux diametres de leurs bases, ou qui sont circonscrits à des Spheres, sont entr'eux comme les Cubes de ces mêmes diametres.

DEMONSTRATION.

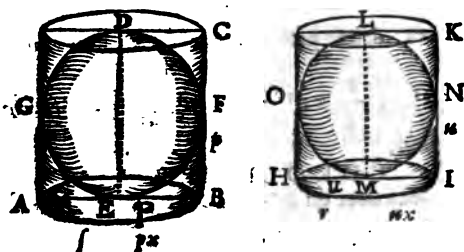
Soit le cylindre AC dont la hauteur DE soit égale au diametre AB de sa base; soit encore le cylindre HK dont la hauteur LM soit égale au diametre HI de sa base: je dis que ces deux cylindres sont entr'eux comme les cubes des diametres AB & HI de ces bases.

Pour le démontrer, soit nommée f la circonférence de la base du cylindre AC , & p son

[1] Page 44. def. 1. des fract.

diametre

diametre AB ; soit nommée r la circonference de la base du cylindre HK & n son diametre HI ;



soit enfin appellé x l'exposant du rapport de la circonference f à son diametre p , c'est à dire que $\frac{f}{p} = x$, alors [1] $px = f$. L'exposant du rapport de la circonference r à son diametre n , sera aussi x , c'est à dire $\frac{r}{n} = x$,

[2] Car $f . r :: p . n$. Donc [3] $f . p :: r . n$. On aura donc encore [4] $nx = r$.

[5] La surface de la base du cylindre AC sera $\frac{3}{4} p p x$, ou $\frac{3}{4} x p p$. Et si on multiplie cette surface par la hauteur p , on aura $\frac{3}{4} x p^3$ pour la solidité du cylindre AC , [6] . De même [6]

[1] Cor. 3. de la divis. pag. 42.

[2] Cor. prop. 60. Geo. pag. 483.

[3] Part. 2. du cor. prop. 3. Algeb.

[4] Cor. 2. prop. 48. Geo.

[5] Cor. 2. def. 79. ou cor. 7. prop. 81. Geo.

[6] Cor. 2. prop. 48, & cor. 2. def. 79. Geo.

le cylindre HK sera $\frac{1}{4} x u^3$. Or [1] si on di-
 vise ces deux produits par $\frac{1}{4} x$, on aura
 $\frac{1}{4} x p^3 \cdot \frac{1}{4} x u^3 :: p^3 \cdot u^3$. Ce qu'il falloit
 démontrer.

COROLLAIRE I.

Les deux tiers du cylindre AC , ou de sa val-
 leur $\frac{1}{6} x p^3$, qui [2] sont $\frac{1}{6} x p^3$, sont [3]
 égaux à la Sphere $GEFD$ inscrite au cylindre AC
 dont [4] la hauteur DE est un des diametres de
 cette même Sphere. De même les $\frac{2}{3}$ du cylin-
 dre HK , qui sont $\frac{1}{6} x u^3$, sont [5] égaux à la
 Sphere $OMNL$ qui lui est inscrite, & dont un
 des diametres est la hauteur LM de ce cylindre.
 Or [1] $\frac{1}{6} x p^3 \cdot \frac{1}{6} x u^3 :: p^3 \cdot u^3$. Au lieu de
 $\frac{1}{6} x p^3$ & de $\frac{1}{6} x u^3$ substituant [5] ce qui y
 est égal, sçavoir les Spheres $GEFD$, & $OMNL$,
 on aura la Sphere $GEFD \cdot OMNL :: p^3 \cdot u^3$.
 Les Spheres sont donc entr'elles comme les cu-
 bes de leurs diametres.

[1] Prop. 6. d'Algeb.

[2] Page 56. des fract. de fract.

[3] Prop. 85. Geo.

[4] Supposit.

[5] Demande 1. Gen.

COROLLAIRE II.

Les Spheres sont donc entr'elles en raison triplée du rapport qui est entre leurs diametres; puisqu'elles sont ^[1] entr'elles comme les cubes de leurs diametres, & que les cubes de ces diametres sont ^[2] entr'eux en raison triplée de celle de ces mêmes diametres.

COROLLAIRE III.

Si un globe a son diametre 20 fois aussi grand que celui d'un autre; la masse de ce premier globe sera 8000 fois aussi grande que la masse de cet autre. Car ^[3] ce premier globe sera au second, comme son diametre sera à une 4^e de quatre grandeurs continuellement proportionnelles dont la premiere & la seconde seront entre-elles comme les diametres de ces deux globes; & ainsi de suite. Soit appellée *a* la derniere de ces quatre grandeurs continuellement proportionnelles, la 3^e grandeur ^[4] sera 20*a*; la 2^e sera 400*a*; & la premiere 8000*a*. Ce qui fera cette progression $\frac{8000a}{1} \cdot 400a \cdot 20a \cdot a$. dans laquelle il paroît évidemment que la premiere de ces quatre grandeurs est 8000 fois aussi grande que la derniere.

R E M A R Q U E.

De la même maniere que dans la démonstr. de la prop. pres. j'ai employé les exposants des rapports qui sont entre les circonferences des cercles & leurs diametres, j'aurois peu les em-

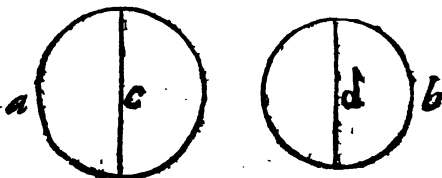
[1] Cor. 1. prop. pres.

[2] Cor. prop. 18. Algeb.

[3] Cor. 1. prop. 19. d'Algeb.

[4] Def. 16. Algeb.

ployer pour démontrer que les cercles, ou les secteurs de cercles, sont entr'eux comme les quarrés de leurs diametres. Soit un cercle dont



la circonférence soit appelée a , & son diamètre soit c . Soit encore un autre cercle dont la circonférence est b , & son diamètre est d .

Soit enfin $\frac{a}{c} = f$, on appellera donc^[1] aussi

le quotient de la circonférence b divisée par d . Et on aura $cf = a$, & $df = b$. Le premier

cercle fera^[2] donc $\frac{1}{4}fcc$. & le 2^o sera

$$\frac{1}{4}fdd. \text{ Donc } \frac{1}{4}fcc, \frac{1}{4}fdd :: cc. dd. [1].$$

PROPOSITION LXXXVII.

La surface d'une Sphere est égale à quatre des grands cercles de cette même Sphere.

DEMONSTRATION.

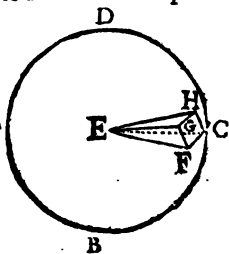
Soit la Sphere $ABCD$ dont le centre soit E . Je la considererai comme un solide composé

[1] *Cor. prop. 60. Geo.*

[2] *Cor. 2. prop. 48.*

[3] *Prop. 6. Algeb.*

[¹] d'une infinité de pyramides dont le sommet commun sera le centre E , & dont les bases prises ensemble forment la surface de ce même solide. Alors chacune de ces pyramides aura pour hauteur un des rayons de la Sphere.



Car, soit $GFCH$ une de ces pyramides dont la base $GFCH$ est infiniment petite; la perpendiculaire menée du centre E à cette surface $GFCH$ infiniment petite, sera un des rayons de la Sphere, par exemple EG . Parceque les lignes GF & GH infiniment petites terminées par les rayons EF & EH , étant prolongées deviennent [²] touchantes des circonferences des cercles qui ont pour rayon EG , & dont les plans passent par EF & EH .

Or les hauteurs de toutes ces pyramides sont [³] égales. La somme de ces pyramides sera donc [⁴] égale au produit de la somme de leurs bases, multipliée par la 3^e partie de leur hauteur commune. La somme de ces pyramides est la Sphere même $ABCD$; la somme de leurs bases est la surface de la Sphere $ABCD$, & leur hauteur commune est un rayon de cette Sphere.

Le produit de la surface de la Sphere $ABCD$, multipliée par un tiers d'un de ses rayons, est donc égal à cette Sphere.

[¹] Cor. 2. def. 88. Geo.

[²] Fin du cor. 1. def. 88. & prop. 12. Geo.

[³] Cor. 1. def. 82. Geo.

[⁴] Cor. prop. 83. Geo.

Or le produit de quatre des grands cercles de la Sphere $ABCD$, multipliez aussi par un tiers d'un de ses rayons, est [1] encore égal à cette même Sphere.

Le produit de la surface de la Sphere $ABCD$, multipliée par un tiers d'un de ses rayons, est donc [2] égal au produit de quatre des grands cercles de cette Sphere multipliez aussi par le même tiers d'un de ses rayons.

En divisant ces deux produits égaux, par un tiers de ce rayon de la Sphere; un des quotiens sera, d'une part, la surface de la Sphere $ABCD$, laquelle surface sera [3] égale à l'autre quotient qui sera quatre grands cercles de cette Sphere, ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION LXXXVIII.

La surface d'un cylindre droit, ses bases exceptées, est égale au produit du contours ou circonférence de la base multipliée par la hauteur.

DEMONSTRATION.

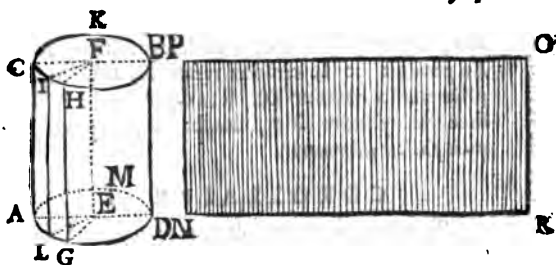
Soit le cylindre droit AB ; son axe FE sera [4] perpendiculaire à la base AD . Si des centres F & E , on considère un nombre indéfini de rayons FC ; EA ; FI , EL ; FH , EG ; FB , ED ; &c. qui soient menés parallèles entr'eux: on trouvera que toutes les lignes CA , IL , HG , BD , &c. menées par les extrémités de ces rayons, seront [4] parallèles à l'axe EF , &

[1] *Cor. 3. prop. 85. Geom.*

[2] *Ax. 18. gener.*

[3] *Prop. 6. Algeb.*

[4] *Prop. 36. Geom.*



[¹] paralleles entr'elles. Ces lignes CA , LI , HG , &c. seront donc [²] perpendiculaires aux bases paralleles $AGDM$ & $CHBK$. Elles seront donc [³] toutes égales entr'elles. Or toutes ces lignes possibles CA , LI , HG , &c. considérées indéfiniment proches l'une de l'autre, sont les côtes des faces infinitièmes du cylindre droit AB , qui seront [⁴] des parallelogrammes rectangles de même hauteur & dont les bases seront les lignes droites infiniment petites qui [⁵] forment les circonferences $AGDM$ & $CHBK$.

Si on considere que cette surface courbe soit déroulée, de sorte que la circonferance $AGDM$ devienne la ligne droite NR , & que la circonferance $CHBK$ devienne la ligne droite PO ; alors le parallelogramme total NO fera égal à tous les parallelogrammes de même hauteur qui forment le contours du cylindre AB . Le

[¹] *Part. 2. prop. 74. Geo.*

[²] *Prop. 73. Geo.*

[³] *Prop. 70. Geo.*

[⁴] *Prop. 36. & def. 49. Geo.*

[⁵] *Cor. def. 56. Geo.*

produit de la base NR multipliée par la hauteur RO , sera [¹] égal à ce parallélogramme NO . Le produit de la circonférence $AGDM$ multipliée par la hauteur DB sera donc égal à la surface du cylindre AB , les bases exceptées, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Si on considère un diamètre d'une Sphere qui soit perpendiculaire à la base d'un cylindre qui lui est circonscrit ; ce diamètre sera la hauteur du cylindre. Et si on considère un grand cercle de cette même Sphere qui soit parallèle à la base du cylindre droit circonscrit ; la circonférence sera [²] égale à celle de la base de ce cylindre, & son diamètre sera égal à celui de cette base : puisque la circonférence de ce grand cercle de la Sphere se trouve dans la surface du cylindre circonscrit. Un diamètre de la Sphere est [³] le même qu'un diamètre d'un de ses grands cercles. Le diamètre de la base de ce cylindre sera donc égal à la hauteur de ce même cylindre.

En multipliant la circonférence de la base du cylindre circonscrit à une Sphere, par son diamètre, on aura [⁴] la surface de ce cylindre, les bases exceptées.

Le produit d'une circonférence de cercle multipliée par son diamètre est [⁵] égale à quatre fois ce même cercle.

[¹] *Cor. 2. def. 53. Geo.*

[²] *Cor. 1. def. 78. geo.*

[³] *Cor. 1. def. 82. geo.*

[⁴] *Prop. pref.*

[⁵] *Cor. 2. prop. 48. Geo.*

La surface du cylindre circonscrit à une Sphere, est donc égale à quatre des grands cercles de cette même Sphere.

La surface d'une Sphere inscrite à un cylindre est donc ^[1] égale à la surface de ce cylindre, les bases exceptées.

R E M A R Q U E S.

1. La surface d'un cône rectangle est ^[2] égale au produit de la circonférence de sa base multipliée par la moitié de la ligne droite, menée du sommet de ce cône à la circonférence de sa base. Car le sommet de ce cône étant un point de l'axe qui est ^[3] perpendiculaire au milieu de tous les diamètres de cette base, ce même sommet sera également éloigné de tous les points de la circonférence de la base; toutes les lignes menées du sommet à cette circonférence, seront ^[4] égales entr'elles. Outre cela, la somme de tous les angles qui ont pour sommet celui de ce cône, & qui sont appuyez sur chaque côté infiniment petit de cette circonférence, est ^[5] moindre que la somme de quatre angles droits. La surface du cône droit étant déroulée sera donc un secteur de cercle.

2. Il y a des corps qu'on appelle *Regulars*, parcequ'ils sont terminez par des surfaces regulieres. Entre ceux dont les surfaces de chacun sont égalés entr'elles, on en compte cinq.

[1] Ax. 18. *gen.*

[2] Cor. 3. *prop.* 48. *Geo.*

[3] Def. 68. & def. 20. *Geo.*

[4] Cor. 4. *ax.* 2. *Geo.*

[5] Cor. *prop.* 79. *Geo.*

586 *Troisième Partie.*

Le premier est terminé par quatre triangles égaux & équilatéraux , ce qui fait qu'on l'appelle , *Tetraèdre*.

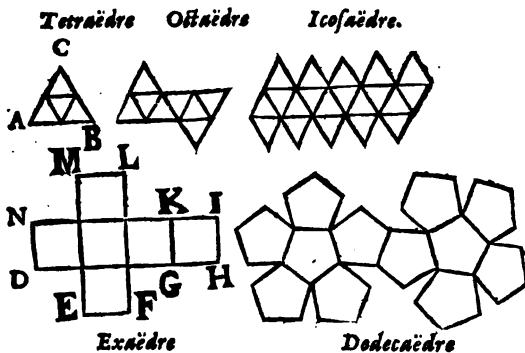
Le second est terminé par six quarrés égaux , ce qui fait qu'on l'appelle , *Exaèdre*. On l'appelle aussi *Cube* [1] .

Le troisième est terminé par huit triangles égaux & équilatéraux. On l'appelle , *Octaèdre*.

Le quatrième est terminé par douze pentagones réguliers & égaux. On l'appelle , *Dodecaèdre*.

Le cinquième enfin est terminé par vingt triangles égaux & équilatéraux. On l'appelle , *Icosaèdre*.

Si on veut représenter facilement ces cinq corps réguliers , il faut se servir de carton , & y tracer des triangles équilatéraux , des quarrés , & des pentagones réguliers , en les disposant comme dans chacune de ces cinq figures.



Ensuite il faut , avec des ciseaux , couper le [1] *Def. 75. Geo.*

carton suivant les lignes droites qui terminent ces figures composées de triangles, de quarez, &c. & avec un couteau bien aiguisé, il faut couper à moitié ce même carton suivant les lignes transversales de ces mêmes figures.

Enfin il faut plier le carton de maniere que les plans qui représenteront les surfaces de chacun de ces corps reguliers se joignent l'un l'autre. Les points *A* & *B*, par exemple, seront appliquez sur le point *C*, & on retiendra le tout en cette situation avec de la colle, ou du fil, pour former le Tetraëdre. La ligne *HI* sera appliquée sur *DN*, *EF* sur *GH*, & *ML* sur *KI*, pour former l'Hexaëdre. L'ajustement des trois autres figures est aussi facile que celui de ces deux premieres.

J'ai crû qu'il suffisoit de faire ces deux dernieres remarques pour ceux qui commencent à s'appliquer à l'étude des Mathematiques; parcequ'une plus longue Theorie sur ce sujet & sur les autres solides pourroit rebuter les moins studieux, & ne seroit peut-être pas d'une utilité assez considerable, pour meriter une plus longue attention de ceux qui seroient plus zelez & plus laborieux.

Je finirai donc ici ces Elemens, où j'ai tâché de renfermer ce que j'ai crû être d'abord le plus necessaire à ceux qui veulent apprendre les Mathematiques. Outre les premiers fondemens de l'Arithmetique & de l'Algebre, j'ai exposé le plus clairement qu'il m'a été possible la Theorie & la Pratique de la Geometrie ordinaire. L'utilité particuliere de chacune de ces trois parties elementaires est fort étendue. On y trouve beaucoup de lumieres pour entendre les ouvrages qui supposent

qu'on sçache ces premiers Elémens. L'ex-
perience fait connoître tous les jours , qu'il
faut absolument avoir puisé dans ces premiers
Sources des veritez qui sont si importantes,
que sans elles on se trouve privé d'une infi-
nité d'avantages tres-considerables , qu'on per-
drait des Mathématiques.

F I N.



TABLE



T A B L E

DES PRINCIPALES CHOSES contenues dans ces Elemens.

A

A DDITION des Nombres,	page ix
Addition des Fractions,	50
Addition des Grandeurs litterales,	71
Addition des Racines sourdes,	128
Algebre, ce que c'est,	59
Analogie, définition 13.	65
Antecedent d'un raport, déf. 10.	63
Angle, déf. 12.	199
Angles, rectiligne, curviligne, mixte, def. 12.	199
Angle droit, obtus, aigu, déf. 14. 15. 16.	200
Angle oblique, déf. 16.	200
Angles posez de suite,	308
Angles opposez au sommet,	311
Angles opposez au sommet égaux,	311
Angle plan. Déf. 17.	201
Angle de plans. Déf. 18.	201
Angles alternes. Déf. 19.	201
Angles alternes égaux,	314
Angle dont le sommet est dans le centre du cercle, sa mesure,	302
Angle dont le sommet est sur la circonference, sa mesure,	325

Angle dont le sommet est entre le centre & la circonference, sa mesure,	335
Angle dont le sommet est hors le cercle, sa mesure,	337 & 338
Angle appuyé sur une demie circonference, droit; sur un arc plus grand, obtus; sur un arc plus petit, aigu,	331 & 332
Angle solide. Déf. 63.	219
Angle solide, ses proprietéz,	534 & 535
Approximation des Racines;	114
Arithmetique, ce qu'on entend par ce mot, page 9	
Arc de cercle. Déf. 27.	204
Attouchement d'une ligne droite & d'une circonference, n'est qu'un point,	266
Attouchement de deux circonférences, n'est qu'un point,	307
Axe d'un cône. Déf. 70.	222
Axe d'un cylindre. Déf. 77.	224
Axe d'une Sphere. Déf. 83.	227
Axiome, ce qu'on entend par ce mot,	1
Axiomes generaux,	3
Axiomes d'Arithmetique,	11
Axiomes d'Algebre,	50
Axiomes de Geometrie,	272

B

B ASE d'un triangle. Déf. 46.	209
Base d'un corps. Déf. 46.	209
Base d'un cône. Déf. 67.	220
Base d'un cylindre. Déf. 76.	224
Borneier,	555

C

C OROLLAIRE, ce que c'est,	2
Connoître laquelle de deux fractions est la plus grande,	52

des Élemens.

Conséquent d'une raison ou rapport, Déf. 10.	591
Composition de raison,	63
Conversion de raison,	135
Combinaisons,	136
Changemens d'ordre,	138
	139
Chapitre premier de Geometrie. Des Lignes,	235
Chapitre II. Des Surfaces,	347
Chapitre III. Des Solides,	533
Cercle. Déf. 25.	204
Circonférence de cercle. Déf. 26.	204
Centre d'un cercle. Déf. 28.	204
Centre d'une Sphere. Déf. 81.	226
Cercle circonscrit à une figure rectiligne. Cor.	413
Cercle inscrit. Cor.	413.
Cone. Déf. 67.	220
Cone rectangle. Déf. 68.	220
Cone oblique. Déf. 69.	220
Contour,	478 & 480
Circuits de Polygones semblables, leur rapport.	479
Corde de cercle. Déf. 30.	205
Corps. Déf. 61.	217
Cube. Déf. 75.	222
Cubes sont entr'eux en raison triplée.	166
Cylindre droit. Déf. 78.	224
Cylindre oblique. Déf. 79.	224
Cylindres circonscrits à des Spheres, sont entr'eux comme les cubes des diametres de leurs bases.	576

D

D ÉFINITION, ce que c'est.	I
Demande, ce que c'est.	I
Définitions generales.	I
Démonstration, ce que c'est.	2
Demandes ou suppositions generales.	3
Demandes d'Arithmetique.	10
Demandes d'Algebre.	69

Demandes de Geometric.	232
Démonstr. des oper. des fract. 166, 167, 168, &	169
Division des nombres.	32
Diviseur.	32
Division des fractions.	54
Division des grandeurs litterales.	21
Division des Racines sourdes.	136
Division de raison.	135
Dénominateur d'une fraction.	45
Degré. Déf. 35.	207
Diametre d'un Cercle, Déf. 31.	106
Diagonale. Déf. 54.	113
Diametre d'une Sphere. Déf. 32.	116
Dodecaëdre,	186
<i>De ces trois choses, une ligne droite être touchante d'un cercle, une autre ligne droite être perpendiculaire à cette touchante par le point d'attouchement & dans le plan du Cercle, une ligne droite passer par le centre & par le point d'attouchement; deux étant prises à volonté, la troisieme suivra necessairement. Cor. Prop. 12. 266, 267, 268</i>	
<i>De ces quatre choses, une ligne droite menée dans le plan d'un cercle, passer par le milieu d'une corde de ce cercle; cette ligne être perpendiculaire à cette corde; l'arc soutenu par cette corde être coupé en deux parties égales; cette ligne passer par le centre; deux étant prises à volonté, les deux autres suivront necessairement. Prop. 14. 275</i>	
<i>De ces trois choses, triangles être égaux, être sur la même base ou sur bases égales, être de même hauteur ou entre mêmes parallèles, deux étant prises ou supposés à volonté; les deux autres suivront necessairement. Prop. 40. 358</i>	
Des Angles,	302
E	
E XPOSANT d'un rapport,	64
Equation, Déf. 22.	69

des Elemens.

Extrêmes proportionnelles ,	593
Extraction de la racine quarrée ,	61. 66
Extraction de la racine Cubique ,	95
Exaèdre ,	108
Exagone ,	586
Extremitez d'une ligne font des points ,	214
Extremitez d'une surface font des lignes ,	194
Extremitez d'un corps font des surfaces ,	197
	218

F

FRACTION ,	44
Fractions de Fractions ,	56
Figure. Déf. 90.	230
Figure rectiligne , curviligne , & mixte ,	203
Figure reguliere. Déf. 55.	215
Figure inscrite , ou circonscrite à un cercle ,	214
Figures semblables. Déf. 60.	215

G

GRANDEUR , ce qu'on entend par ce mot ,	E
Geometrie , ce que c'est ,	193.
Geometriquement , ce que c'est ,	245.
Grand cercle d'une Sphere. Déf. 85.	227

H

HYPOTHENUSE , ce que c'est. Déf. 45.	208.
Hypothénuse , ses propriétés ,	467
Homologue. Déf. 59.	215

I

INVERSION de raison ,	135
Instrumens pour lever des plans ,	451. 6
Icosaèdre ,	454
	586

L

L IGNI. Déf. 3.	194
Ligne, droite, courbe ;	195
Ligne perpendiculaire,	195
Ligne parallèle,	196
Ligne circulaire. Déf. 26.	204
Ligne touchante. Déf. 34.	206
Lignes également ou inégalement éloignées du centre d'un cercle, leurs propriétés, 291. & 295	
Ligne perpendiculaire à un plan. Déf. 10.	202
Ligne perpendiculaire à une même ligne, ou à un même plan par un même point, unique, 240. 248. & 506	
Ligne touchante unique par un même point de circonférence,	269

M

M ATHÉMATIQUES, ce que c'est,	1
Multiplication des nombres,	21
Multiplication des fractions,	53
Multiplication des grandeurs littérales,	76
Multiplication des racines sourdes,	129
Méthode générale pour toutes les extractions de racines,	98. & 113
Moyenne proport. Arithmétique. Déf. 6.	61
Moyenne propor. Géométr. Déf. 15.	66
Mesure d'un angle,	301
Minute. Déf. 36.	207

N

N OMBRE,	9
Nombre pair, ou impair, Déf. 21.	62
Nominateur d'une fraction,	45

O

O CTOGONE,	114
Octaèdre,	186

P ROBLEME, ce que c'est. Déf. 7.	2
Parties 1. 2. 3. de ces Elements ,	9. 59. 193
Preuves d'Add.& de Soustract.des nomb. 18	620
Preuves de Multip. & de la Divis. des nomb.	42
Preuve de la regle de trois ,	185
Preuve de la regle de société ,	188
Produit d'une Multiplication ,	22
Proportion Arithmetique , Déf. 5.	61
Proportion Géometrique , Déf. 13.	65
Proportion continue. Déf. 7.	62
Proportion ordonnée ,	154
Proportion troublée ,	155
Progression Arithmetique. Déf. 8.	62
Progression Géometrique. Déf. 16.	66
Proposition converse. Déf. 20.	68
Puissance , ce que c'est. Déf. 2.	95
Parallelogramme. Déf. 49.	209
Parallelogr. rectangle, ou oblong. Déf. 52.	210
Parallelogr. entre mêmes parall. leurs propri.	380
Pentagone ,	214
Pied linéaire, quarré , cube ,	394
Plan. Déf. 10.	197
Plan perpendiculaire à un autre ,	503
Plans paralleles. Déf. 21.	202
Plan d'un Edifice , &c.	449
Point mathématique. Déf. 2.	194
Point d'atouchement ,	266
Pointe ou sommet d'un angle ,	199
Polygone. Déf. 56.	213
Polygone regulier. Déf. 55.	213
Prisme droit, ou oblique ,	221
Pyramide, droite, oblique ,	219
Pyramides égales , si elles sont de même base & de même hauteur ,	538

Pyramide qui est la troisiéme partie d'un prisme de même base & de même hauteur ,	545
Pyramide d'une infinité de côtez. Déf. 67.	210
Poles d'un cercle. Déf. 87.	227
Poles d'une Sphere. Déf. 84.	227
Parallelepipedes semblables, leurs proprietéz,	567
Polyédre. Déf. 88.	228

Q

Q UOTIENT ,	32
Quotient multiplié par le diviseur , fait un produit égal à la grandeur à diviser. Cor. 3.	42
Quadrilatere ; combien de sortes ,	109
Quadrilatere inscrit dans un cercle ; proprietéz de ses angles ,	378
Quadri. dont les côtez opposéz sont égaux.	371
Quadrilatere, dont les angles opposéz sont égaux, est un Parallelogramme ,	378
Quarré. Déf. 50.	210
Quart de circonference ,	303

R

R EDUCTION des sols en livres ,	15
Reduct. de fract. à de moindres termes,	45
Reduct. de fract. à même dénom. 47 & 48	47 & 48
Réduction d'entiers en fractions ,	49
Reduction des grandeurs irrationnelles à un même nom ,	121
Reduction des grandeurs irrationnelles aux expressions les plus simples ;	123
Raison ou rapport , Déf. 3.	60
Raison Arithmetique, Déf. 4.	60
Raison Geometrique. Déf. 9.	63
Raisons ou rapports égaux. Cor. 1.	64
Raison composée, Déf. 17.	66
Raison doublée, triplée, &c. Déf. 18.	67

des Elemens.

	597
Raison inverse,	135
Raison alterne,	135
Racine quarrée,	97
Racine cubique,	97
Racine sourde, ou irrationnelle. Déf. 3.	120
Racine imaginaire. Déf. 4.	129
Regle de trois,	168
Regle de trois directe,	171
Regle de trois indirecte, ou inverse;	174
Regle de trois composée,	178
Regle de Societé, ou de Compagnie;	186
Rayon d'un cercle. Déf. 29.	205
Rayon d'une Sphere. Déf. 32.	226
Rectangle. Déf. 52.	210
Rhombe. Déf. 51.	210
Rhomboide. Déf. 53.	211

S

S O M M E ou total,	11
Soustraction des nombres;	14
Soustraction des fractions;	31
Soustraction des grandeurs litterales;	75
Soustraction des racines sourdes,	129
Surface. Déf. 9.	196
Surface plane, courbe, concave, convexe,	
197, 198	
Surface curviligne, rectiligne, mixte,	203
Secteur de cercle. Déf. 33.	206
Segment de cercle. Déf. 32.	206
Secondes, tierces, &c.	207
Sommet d'un angle, Déf. 13.	199 & 219
Sommet d'une pyramide,	219
Solide. Déf. 61.	217
Sphere, ce que c'est. Déf. 80.	225
Sphere inscrite à un Cylindre en est les deux tiers,	570

Surface de Sphere égale à quatre grands Cercles, 580
 Les Spheres sont entr'elles comme les eubes de leurs diametres, 571

F

T H E O R E M E, ce que c'est. Déf. 6.	2
Termes d'une raison, ou d'un rapport. Déf. II.	63
Termes extrêmes d'une proportion. Déf. 14.	66
Termes moyens d'une proportion. Déf. 14.	66
Trouver à trois grandeurs données une quatrième proportionnelle Arithmetique, &c.	118
Trouver une moyenne proportionnelle géomet. à deux grandeurs données. Cor. 4. prop. 2.	132
Trouver une 3 ^e continuellement proportionnelle à deux grandeurs données. Cor. 4.	131
A Trois grandeurs données, trouver une quatrième proportionnelle géométrique; fondement de la regle de Trois,	170
Tierces, quartes, &c.	107
Toise linéaire, quarrée, cubique,	394
Touchante d'un cercle. Déf. 34.	206
Trapeze. Déf. 47.	209
Tropesoïde. Déf. 48.	209
Triangle. Déf. 38.	207
Triangle Equilateral, Ifofcele, Scalene,	208
Triangle Rectangle, Ambligone, Acutangle,	208
Triangles entre les mêmes paralleles, leurs proprietes.	388
Triangle équilatéral inscrit dans un cercle, Cor. 2.	411
Tetraëdre,	586
V	
U N I T É,	9
Valeur des Chifres,	10



T A B L E

DE LA GEOMETRIE PRATIQUE, P R O B L E M E S.

1. **P**AR un point donné hors d'une ligne droite, mener une perpendiculaire à cette ligne, page 243
2. Par un point donné dans une ligne droite, mener une perpendiculaire à cette ligne, 244
3. Par un point donné, même à l'extrémité d'une ligne, mener une ligne perpend. à cette ligne, 333
4. Par un point donné hors d'une ligne droite, mener une ligne parallèle à cette ligne, 289
5. Autre Methode, 318
6. Autre Methode, 375
7. Par un point donné dans une circonférence, mener une touchante à cette circonférence, 267
8. Par un point donné hors d'une circonférence, lui mener une touchante, 334
9. Par trois points donnez, faire passer une circonférence de cercle, pourvu que ces trois points ne soient pas en ligne droite, 271
10. Trouver le centre d'un cercle, 272
11. Diviser une circonf. de cercle en degr. 307
12. Diviser un arc & un angle qui est mesuré par cet arc, en deux parties égales, 305
13. Diviser une ligne donnée selon une raison donnée, 436

24. Diviser une ligne donnée en autant de parties égales qu'on voudra. Cor. 3. 435
25. Diviser une ligne donnée en deux parties égales géométriquement, 445
26. A deux lignes données, trouver une troisième ligne proportionnelle, 455
27. A trois lignes données, trouver une quatrième proportionnelle, 454
28. Entre deux lignes données, trouver une moyenne proportionnelle, 460
29. Mener sur le terrain une ligne droite, 360
20. Mener sur la terre une ligne perpendiculaire à une autre, par un point donné hors cette ligne, 397
21. Mener sur la terre une ligne perpendiculaire à une autre, par un point pris dans cette ligne, 396
22. Par un point pris dans un plan, mener une perpendiculaire à ce plan, 504
23. Par un point pris hors d'un plan, mener une perpendiculaire à ce plan, 509
24. Connoître l'égalité ou inégalité de deux angles, 303
25. Faire un angle égal à un autre angle proposé, 304
26. Décrire sur une ligne donnée un triangle équilatéral, 369
27. Faire un triangle égal à un autre proposé; ou, ce qui est la même chose, faire un triangle dont les côtés soient égaux à trois lignes données: pourvu que deux de ces lignes prises ensemble soient plus grandes que la troisième, 368
28. Décrire une figure rectiligne égale à une autre proposée, 369
29. Décrire un cercle égal à plusieurs cercles, 494
30. Décrire une figure rectiligne semblable à une autre figure rectiligne donnée, 444
31. Décrire sur une ligne donnée un carré. Cor. de la prop. 36. 371

de la Geometrie Pratique. 601

32. Décrire un Parallelogramme égal à un triangle
proposé, qui ait un angle égal à un angle proposé,
& un côté égal à une ligne proposée, 404
33. Inscrive un exagone dans un cercle. Cor. 1. prop.
45. 410
34. Inscrive un triangle équilatéral dans un Cercle.
Cor. 2. prop. 45. 411
35. Circonscrie un Cercle à un Polygone regulier.
Cor. de la prop. 46. 413
36. Inscrive un cercle à un Polygone regulier. Cor.
de la prop. 46. 414
37. Décrire un quarré égal à un nombre d'autres
quarrez pris à volonté, 470. & 471
38. Connoître le quarré qui est l'excès de celui d'u-
ne ligne par dessus celui d'une autre, 472
39. Décrire une figure semblable & égale à deux
autres figures semblables & égales proposées.
490 & 491
40. Lever le plan d'une place accessible, 445
41. Autre Methode pour lever le plan d'une Plai-
ne, d'un Parc, &c. 449
42. Faire des Cartes Topographiques, 452
43. Autre Methode, 454
44. Autre Methode encore plus commode que les
precedentes, 456
45. Connoître la hauteur ou profondeur d'une Mon-
tagne, 448
46. Connoître la base d'une Montagne, 448
47. Les deux côtés d'un triangle rectangle étant
connus, connoître le troisième, 470
48. Les trois côtés d'un triangle obliquangle étant
donnez, connoître la hauteur de ce triangle, ou
connoître la perpendiculaire menée du sommet
d'un de ses angles sur le côté opposé prolongé s'il
est necessaire, 477
49. Les trois côtés d'un triangle rectiligne étant
donnez, connoître la surface, sans aucuns in-

strumens divisez en degrez, 476. 477 & 478	
50. Construire trois pyramides avec du carton, lesquelles jointes ensemble formeront un prisme triangulaire,	540
51. Construire ou représenter les cinq corps reguliers avec du carton,	586
52. Mesurer une distance accessible par une de ses extremitex seulement,	360
53. Mesurer en ligne droite une longueur proposée dans la Campagne,	395
54. Mesurer la surface d'un triangle,	393
55. Mesurer la surface d'un Parallelogramme,	212. & 387
56. Mesurer la surface d'un Trapezoide,	421
57. Mesurer la surface d'un terrain irregulier,	399
58. Autre Methode,	421. & 422
59. Mesurer la surface d'un terrain irregulier sans entrer dedans, ou lorsqu'on ne peut le parcourir,	422. & 423
60. Mesurer un Polygone regulier,	418
61. Mesurer la surface d'un cercle,	419
62. Mesurer un secteur de cercle. Cor. 3.	420
63. Mesurer la surface d'un cône droit,	585
64. Mesurer la surface d'un cylindre droit, Prop. 38.	583
65. Mesurer la surface d'une Sphere. Prop. 37.	582
66. Mesurer la hauteur d'une pyramide dont on voit seulement le sommet & la base; cette pyramide étant même enclavée dans la masse d'un corps irregulier,	554 & 555
67. Mesurer une pyramide,	553
68. Mesurer plusieurs pyrami. de même hauteur,	567
69. Mesurer un Cône,	553
70. Mesurer un Prisme,	223. 551. & 552
71. Mesurer un Cylindre,	552
72. Mesurer les Corps irreguliers,	554. & 555
73. Autre Methode,	555. & 556
74. Mesurer une Sphere,	575



T A B L E

DES PROPOSITIONS des Elemens de Geometrie d'Euclide, qui sont démontrées dans ces nouveaux Elemens.

J'ajoute la Table suivante pour rendre l'étude de ces Elemens encore plus utile dans la lecture des Traitez des Mathematiques, où on cite Euclide. Les propositions qui sont dans les six premiers Livres, dans l'onzième & dans le douzième des Elemens de Geometrie de cet ancien Autheur sont celles qui sont ordinairement citées. On ne cite presque jamais les propositions de ses autres Livres. Et entre celles de ces huit livres, il y en a encore plusieurs qui sont inutiles, ou qui ne servent que pour en démontrer d'autres que j'ai démontrées sans leurs secours. Pour montrer que mes Elemens sont pour le moins équivalens à ces huit Livres d'Euclide qu'on a courume d'apprendre, dans la place de ces propositions que j'ai crû inutiles, j'ai fait mention de celles que j'y pouvois substituer tres-utilement.

Euclide Livre 1. Elemens des Math.

Prop. 1. Penultième art. du Cor. 4. prop. 35.
page 369
Prop. 2. & 3. Je leur substitue les prop. 3. 4. 5. 6.
7. & 8. avec leurs Coroll. p. 237.

Euclide
Livre 1.Elemens des
Mathematiques.

Prop. 4.	Prop. 35. page 362.
Prop. 5.	Cor. 2. prop. 34. page 358.
Prop. 6.	Cor. 4. prop. 34. page 359.
Prop. 7.	Je lui substitue la prop. 9.
Prop. 8.	Cor. 1. prop. 35. page 365.
Prop. 9.	Cor. 5. prop. 20. page 305.
Prop. 10.	Cor. 3. prop. 5. page 245.
Prop. 11.	Part. 2. du cor. 2 prop. 5. page 246.
Prop. 12.	Part. 1. cor. prop. 5. page 245.
Prop. 13.	Part. 1. prop. 21. page 308.
Prop. 14.	Part. 2. prop. 21. page 309.
Prop. 15.	Part. 1. prop. 22. page 311.
Prop. 16.	Prop. 30. page 348.
Prop. 17.	Elle suit de la prop. 31. page 348.
Prop. 18.	Part. 1. prop. 33. page 355.
Prop. 19.	Part. 2. prop. 33. page 355.
Prop. 20.	Prop. 1. page 235.
Prop. 21.	Prop. 2. & cor. 5. pr. 29. p. 236. 346.
Prop. 22.	Cor. 4. prop. 35. page 368.
Prop. 23.	Cor. 4. Prop. 20. page 304.
Prop. 24.	Part. 2. prop. 35. page 364.
Prop. 25.	Cor. 3. prop. 35. page 367.
Prop. 26.	Cor. 2. prop. 52. page 443.
Prop. 27.	Part. 2. prop. 23. page 314.
Prop. 28.	Part. 1. & 3. prop. 25. page 322.
Prop. 29.	Part. 1. pr. 23. & part. 2. r. 3. prop. 24. pages 314. & 319.
Prop. 30.	Prop. 26. page 324.
Prop. 31.	Cor. prop. 23. & cor. 3. prop. 37 pages 318. & 375.
Prop. 32.	Prop. 30. & 31. pages 348. & 349.

des Propositions des Elemens, &c. 605

Prop. 33.	Prop. 36. page 370.
Prop. 34.	Part. 1. prop. 37. & cor. 2. de la même prop. & part. 1. prop. 38. pages 371. 374. & 376.
Prop. 35.	Prop. 39. page 380.
Prop. 36.	Cor. 1. prop. 39. page 382.
Prop. 37.	Part. 1. prop. 40. page 388.
Prop. 38.	Part. 1. prop. 40. page 388.
Prop. 39.	Part. 2. prop. 40. page 388.
Prop. 40.	Part. 2. prop. 40. page 388.
Prop. 41.	Cor. 4. prop. 39. page 387.
Prop. 42.	Cor. prop. 41. page 403.
Prop. 43.	Part. 1. prop. 41. page 401.
Prop. 44.	Cor. prop. 41. page 404.
Prop. 45.	Même cor. de la prop. preced.
Prop. 46.	Cor. prop. 36. page 371.
Prop. 47.	Part. 1. prop. 57. page 467.
Prop. 48.	Part. 2. prop. 57. page 467.

*Euclide
Livre 2.*

*Elemens des
Mathematiques.*

Prop. 1. 2. & 3.	Je leur substitue la prop. 15. avec ses quatre Corollaires.
Prop. 4.	Prop. 42. page 405.
Prop. 5.	Prop. 43. page 406.
Prop. 6.	Prop. 44. page 408.
Pr. 7. 8. 9. 10. & 11.	Je leur substitue les prop. 20. 27. 28. & 29. avec leurs corollaires.
Prop. 12.	Part. 1. prop. 58. page 473.
Prop. 13.	Part. 2. prop. 58. page 473.
Prop. 14.	Je lui substitue la prop. 32.

<i>Euclide</i> <i>Livre 3.</i>	<i>Elemens des</i> <i>Mathematiques.</i>
Prop. 1. & corol.	Cor. 1. & part. 2. prop. 13. pages 272 & 270.
Prop. 2.	Je lui substitue la pr. 38. & les cor.
Prop. 3.	Part. 3. & part. 1. prop. 13. page 270.
Prop. 4.	Cor. 3. prop. 13. page 274.
Prop. 5.6.	Prop. 18. page 298.
Prop. 7. & 8.	Prop. 9. & 10. & cor. 1. prop. 14. pages 256. 259. & 279.
Prop. 9.	Cor. def. 28. Geo. & cor. 3. prop. 14. page 204. & 280.
Prop. 10.	Cor. 6. prop. 14. page 282.
Pr. 11. 12.	Prop. 19. page 299.
Prop. 13.	Cor. prop. 19. page 300.
Prop. 14.	Part. 1. & 2. prop. 16. page 291.
Prop. 15.	Part. 3. prop. 16. page 291.
Prop. 16. & cor.	Prop. 12. & son cor. 7. pages 264. & 269.
Prop. 17.	Cor. 8. prop. 27. page 334.
Prop. 18.	Cor. 2. prop. 12. page 266.
Prop. 19.	Cor. 5. prop. 12. page 268.
Prop. 20.	Cor. 6. prop. 27. page 332.
Prop. 21.	Cor. 1. prop. 27. page 329.
Prop. 22.	Part. 3. prop. 38. page 376.
Prop. 23. & 24.	Je leur substitue les cor. 2. & 3. de la prop. 39.
Prop. 25.	Cor. 1. prop. 13. page 272.
Pr. 26. 27.	Cor. 2. prop. 20. page 303.
Prop. 28.	Prop. 11. page 262.
Prop. 29.	Cor. 2. prop. 11. page 264.
Prop. 30.	Cor. 5. prop. 20. page 305.
Prop. 31.	Cor. 3. prop. 27. page 333.

des Propositions des Elemens, &c. 607.

- Prop: 32. Art. 2. 3^e circonft. & Cor. 1. prop.
27. pages 328. & 329.
Pr. 33. 34. Je leur fubftitue les cor. 1. & 2. pr. 40.
Prop. 35. Prop. 54. & 55. page 461. & 462.
Prop. 36. Cor. prop. 55. page 464.
Prop. 37. Je lui fubftitue la prop. 45. & fes
corollaires.
-

Euclide
Livre 4.

Elemens des
Mathematiques.

- Pr. 1. 2. 3.
4. 5. 6. 7. Je leur fubftitue la prop. 46. fon
coroll. & la prop. 49. & fes 4. cor.
Pr. 8. 9. 14. Cor. prop. 46. page 413.
Prop. 10. Je leur fubftitue la prop. 50. fes
11. 12. 13. trois premiers coroll. & fon 5^e.
Prop. 15. Cor. 1. prop. 45. page 410.
-

Euclide
Livre 5.

Elemens des
Mathematiques.

- Prop. 1. 2.
3. 4. 5. 6. Je leur fubftitue les prop. 1. 2. 3. 4.
5. & 6. d'Algeb. & leurs coroll.
Prop. 7. Part. 1. prop. 8. & part. 1. prop. 9.
d'Algeb. pages 146. & 147.
Prop. 8. Part. 1. prop. 10. & part. 1. prop. 11.
d'Algeb. page 148. & page 149.
Prop. 9. Part. 2. prop. 8. & part. 2. prop. 9.
d'Algeb. pages 146. & 147.
Prop. 10. Part. 1. prop. 10. & part. 2. prop.
11. d'Algeb. pages 148. & 149.
Prop. 11. Cor. 3. Def. 12. d'Algeb. page 65.
Prop. 12. Prop. 15. d'Algeb. page 160.

Pr. 13-14.	Je leur substitue les prop. 7. d'Alg.
Prop. 15.	Prop. 5. d'Algeb. page 139.
Pr. 16. 17.	Part. 2. 3. 4. & 5. cor. prop. 3. d'Al-
18. 19.	geb. page 135.
Prop. 20.	Je lui substitue la prop. 15. d'Algeb.
Pr. 21. 22.	part. 1. cor. prop. 12. d'Algeb. p. 153.
Prop. 23.	Part. 2. cor. prop. 12. Algeb. p. 154.
	& 155.
Prop. 24.	Prop. 14. Algeb. page 158.
Prop. 25.	Je leur substitue les pr. 15. 16. 17. 18.
&c.	19. & 20. d'Algeb. avec leurs cor.

Euclide
Livre 6.

Elemens des
Mathematiques.

Prop. 1.	Cor. prop. 49. page 424.
Prop. 2.	Prop. 51. page 431.
Prop. 3.	Je lui substitue la 2 ^e part. du cor. 3. de la prop. 52.
Prop. 4.	Part. 1. prop. 52. page 437.
Prop. 5.	Part. 2. prop. 52. page 437.
Prop. 6.	Cor. 1. prop. 52. page 441.
Prop. 8.	Prop. 53. page 458.
Prop. 9.	Je lui substitue le cor. 2. de la prop. 55.
Prop. 10.	Cor. 3. prop. 51. page 435.
Prop. 11.	Cor. 1. prop. 51. page 435.
Prop. 12.	Cor. 2. prop. 51. page 434.
Prop. 13.	Cor. 2. prop. 53. page 460.
Prop. 14.	Cor. 2. & 3. prop. 50. page 428.
Prop. 15.	Cor. 4. & 5. prop. 50. page 429.
Prop. 16.	Prop. 2. & 3. Algeb.
Prop. 17.	Cor. 1. prop. 2. Algeb.
Prop. 18.	Cor. 3. prop. 52. page 444.
Prop. 19.	Part. 2. cor. prop. 56. page 467.

des Propositions des Elements, &c. 609

Prop. 20.	Prop. 51. & cor. 1. prop. 62. pages 483. & 488.
Prop. 21.	Je lui substitue le cor. 3. de la pr. 63.
Prop. 22.	Prop. 64. page 495.
Prop. 23.	Cor. prop. 56. page 466.
Prop. 24. 25. &c.	Je leur substitue les coroll. 1. & 2. de la prop. 58. les prop. 59. 60. 62. & leurs coroll.
Prop. 31.	Cor. 3. prop. 62. page 489.

*Euclide
Livre II.*

*Elements des
Mathematiques.*

Prop. 1.	Cor. Déf. 10. Geo. page 197.
Prop. 2.	prop. 65. page 498.
Prop. 3.	prop. 66. page 499.
Prop. 4.	prop. 67. page 500.
Prop. 5.	prop. 68. page 505.
Prop. 6.	Cor. 1. prop. 72. page 516.
Prop. 7.	Cor. 2. prop. 72. pages 516. & 517.
Prop. 8.	prop. 73. page 517.
Prop. 9.	part. 2. prop. 74. page 518.
Prop. 10.	part. 1. prop. 77. page 526.
Prop. 11.	Cor. 2. prop. 69. page 508.
Prop. 12.	Cor. 3. prop. 67. page 504.
Prop. 13.	prop. 69. page 506.
Prop. 14.	part. 2. prop. 76. page 523.
Prop. 15.	part. 2. prop. 77. page 526.
Prop. 16.	prop. 75. page 520.
Prop. 17.	Cor. prop. 75. page 521.
Prop. 18.	Cor. 2. prop. 67. page 503.
Prop. 19.	Cor. 1. prop. 69. page 507.
Prop. 20.	prop. 79. page 534.
Prop. 21.	Cor. prop. 79. page 536.

Prop. 22.	Je substitue les cor. 1. & 2. de la
23. 24.	prop. 67. la prop. 70. son coroll.
26. &c.	le cor. 1. de la prop. 72. & la
	part. 1. de la prop. 74.
Prop. 25.	part. 1. prop. 82. page 557.
Prop. 29.	Cor. 3. & 4. prop. 81. p. 548. & 549.
30. & 31.	
Prop. 32.	part. 1. prop. 82. page 557.
Prop. 33.	prop. 84. page 567.
Prop. 34.	Je leur substitue la part. 1. pr. 76. &
35. &c.	son coroll. la prop. 78. les cor. 6.
	7. 8. 9. 10. 11. de la prop. 81. les
	trois coroll. de la prop. 82.

Euclide
Livre 12.

Elimens des
Mathematiques.

Prop. 1.	prop. 63. page 491.
Prop. 2.	Cor. 2. prop. 63. page 493.
Prop. 3.	Je lui substitue le cor. 2. prop. 82.
	page 547.
Prop. 4.	Je lui substitue la prop. 83.
Pr. 5. 6.	part. 2. prop. 82. page 557.
Prop. 7.	prop. 81. page 540.
Prop. 8.	prop. 84. page 567.
Prop. 9.	pr. 3. & 2. d'Algeb. & cor. 8. pr. 81.
Prop. 10.	Cor. 2. prop. 81. page 547.
Prop. 11.	part. 1. prop. 82. page 557.
Prop. 12.	Je leur substitue la prop. 85. & les
& 13.	trois corollaires.
Prop. 14.	part. 1. prop. 82. page 557.
Prop. 15.	pr. 3. & 2. d'Algeb. cor. 7. & 9. pr. 81.
Prop. 16.	Je leur substitue les prop. 86. 87. &
& 17.	88. avec leurs Corollaires.
Prop. 18.	Cor. 2. prop. 86. page 579.


DEMONSTRATIONS NOUVELLES,
 particulieres à ces Elemens.

DANS L'ALGEBRE.

Prop. 3. avec son Coroll. prop. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.
 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. & 20. avec leurs
 Corollaires.

DANS LA GEOMETRIE:

Cor. 1. & 3. de la prop. 5. Cor. 1. 2. 3. 4. 5. & 6.
 de la prop. 6. Cor. 2. 3. & 4. de la prop. 7. Prop. 8.
 & son cor. Part. 2. de la prop. 9. Part. 2. de la
 prop. 10. Prop. 11. & ses cor. Prop. 12. & ses cor. 1.
 & 4. le cor. 2. de la prop. 13. & la Combinaiſon des
 4 choses de la prop. 14. les cor. 1. 2. 3. 4. 5. & 6.
 de la prop. 14. Prop. 15. Part. 1. & 2. de la prop.
 16. Prop. 17. prop. 19. & son cor. Cor. 1. 3. & 5. de
 la prop. 20. Prop. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29.
 Les cor. 1. 2. 3. 4. & 5. de la prop. 29. Prop. 35. &
 ses cor. 1. 2. 3. & 4. Prop. 37. Part. 1. de la prop. 38.
 & ses cor. 1. 2. & 3. les cor. 2. & 3. de la prop. 39.
 Cor. 1. de la prop. 40. Prop. 46. & son cor. Prop. 47.
 & son cor. Prop. 50. & ses cor. Prop. 56. & son cor.
 Les prop. 58. & 61. ſont en partie nouv. Cor. 1. 2. &
 4. de la prop. 62. Cor. 1. & 3. de la prop. 63. Prop.
 64. Cor. 1. 2. 3. de la prop. 67. Cor. 2. de la prop.
 69. Prop. 70 ; & son cor. Prop. 71. Prop. 72 ; &
 ses cor. 1. & 2. prop. 73. Part. 1. prop. 74. prop.
 76. & son cor. le cor. de la prop. 79. & la demon-

erat. de la prop. 20. sont presque entièrement nouveaux cor. 2. 3. 4. 5. 6. &c. de la prop. 21. Les cor. 2. & 3. de la prop. 22. prop. 23. Presque toute la prop. 24. son Coroll. &c.

Il y a encore plusieurs autres propositions, & Corollaires, même dans tout l'ouvrage une manière de proposer, d'expliquer & de démontrer, dont ceux qui ont lu plusieurs Livres élémentaires, remarqueront facilement la nouveauté.

A P P R O B A T I O N.

J'Ay lu par ordre de Monseigneur le Chancelier ces *Elemens des Mathematiques*, & n'y ay rien trouvé qui en doive empêcher l'impression, Fait à Paris ce 24 Novembre 1702.

F O N T E N E L L E,

P R I V I L E G E G E N E R A L.

L O U I S par la grace de Dieu Roy de France & de Navarre, à nos Amez & Feaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de nôtre Grand Conseil, Prevost de Paris, Baillifs, Senechaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra; SALUT. *Le Sieur POLYNIER, Docteur en Médecine*, nous ayant fait remontrer, qu'il desireroit faire part au public d'un ouvrage de sa composition intitulé, *ELEMENS DES MATHEMATIQUES*, s'il nous plaisoit lui en permettre l'impression, & lui accorder nos Lettres de Privilege sur ce

nécessaires ; Nous lui avons permis & accordé, permettons & accordons par ces presentes, de faire imprimer par tel Imprimeur ou Libraire qu'il voudra choisir ledit Livre, en telle forme, marge, caractère, & autant de fois que bon lui semblera, pendant le temps de huit années consecutives, à compter du jour de la date des presentes, & de le faire vendre & distribuer par tout nôtre Royaume ; Faisant défense à tous Libraires, Imprimeurs & autres d'imprimer, faire imprimer, vendre & distribuer ledit Livre sous quelque pretexte que ce soit, même d'impression étrangere & autrement, sans le consentement de l'Exposant, ou de ses ayans cause, sur peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de quinze cens livres d'amande contre chacun des Contrevenans, applicable un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant, & de tous dépens, dommages & interests ; à la charge d'en mettre avant de l'exposer en vente deux Exemplaires en nôtre Bibliotheque publique, un autre dans le Cabinet des Livres de nôtre Château du Louvre, & un en celle de nôtre tres-cher & Feal Chevalier, Chancelier de France le Sieur Philippeaux de Pontchartrain Commandeur de nos Ordres, de faire imprimer ledit Livre dans nôtre Royaume & non ailleurs, & en beau caractère & papier, suivant ce qui est porté par les Reglemens des années 1618. & 1686. & de faire enregistrer les presentes es Registres de la Communauté des Libraires de nôtre dite bonne Ville de Paris, le tout à peine de nullité d'icelles, du contenu desquelles Nous vous mandons & enjoignons de faire jouir l'Exposant ou ses ayans cause, pleinement & paisiblement ; cessant, &

faisant cesser tous troubles & empêchemens con-
traires. V O U L O N S que la copië desdites pre-
sentes qui sera imprimée au commencement ou
à la fin dudit Livre , soit tenue pour dûement si-
gnifiée , & qu'aux Copies collationnées par l'un
de nos Amez & Feaux Conseillers & Secretai-
res , foy soit ajoutée comme à l'Original. Com-
mandons au premier nôtre Huissier ou Sergeant,
de faire pour l'exécution des presentes toutes
significations , défenses , saisies , & autres actes
requis & necessaires , sans demander autre per-
mission , & nonobstant clameur de Haro , Char-
tre Normande & Lettres à ce contraires; Car
tel est nôtre plaisir. Donnë à Versailles le si-
xième jour de Décembre l'an de grace mille
sept cens deux , & de nôtre Regne le soixan-
tième ; par le Roy en son Conseil.

LE COMTE,

*Registré sur le Livre de la Communauté des
Libraires & Imprimeurs , conformément aux Re-
glemens. A Paris ce 12 de Décembre 1702, Signé
P. TRABOUILLET, Syndic.*

A PARIS ,
De l'Imprimerie de JACQUE QUILLAS,
Imprimeur Juré Libraire de l'Université ,
rue Galande, proche la rue du Fouarre.

