Vestigia hominum video.

Aristip. apud Diog. Laert. *Iac. Mercerus Sculp.*

ELEMENTA
GEOMETRIÆ
THEORICÆ, ET PRACTICÆ,

AUCTORE
ANTONIO LECCHIO
E SOCIETATE JESU
MATHESEOS PROFESSORE,

AD USUM
UNIVERSITATIS BRAYDENSIS.

MEDIOLANI MDCCLIII.
EX TYPOGRAPHIA BIBLIOTHECÆ AMBROSIANÆ
APUD JOSEPH MARELLUM
SUPERIORUM FACULTATE AC PRIVILEGIO.

COMITI LAURENTIO TABERNÆ

JOANNES ANTONIUS LECCHIUS
E SOCIETATE JESU
S. P. D.

MUlta *Tua, longeque maxima erga me Promerita,* Laurenti Comes Taberna, *admonebant jam pridem, ut aliquo officio reſponderem; omneſque intelligerent, quid debeam Tibi cum multis aliis de rebus, tum quod meis de Mathematica ſtudiis nunquam non ſtudioſiſſime faveris, adjutorque extiteris, cui Te olim Auditorem præbueras. Cum enim in hanc Te diſciplinam adoleſcens me Præceptore tranſdidiſſes, ingenio quidem tantum effeciſti, quantum probatum eſt libro illo, qui de*

lucis

lucis Theoria est, quam frequens Nobilitas cum gratulatione explicatam accepit: Voluntate autem, atque animo declarasti humanitatem erga me Tuam non eosdem, quos adolescentia, fines habituram: cum & amantissime me tum observares, & deinceps semper benevolentia sic comprehenderis, ut ab nemine plus aut optare, aut sperare possem. Videlicet hæc Tuæ affabilis, singularisque naturæ laus est; quam cum Patre Tuo spectatissimo Viro communicasti, de cujus mirifica erga se Humanitate Thomam Cevam sæpe ego prædicantem audivi; cui non tam in Mathematicis tradendis, quam in adeunda præclara benevolentiæ, amicitiæque vestræ hæreditate successisse videor: Quo meo merito, alii judicent; beneficio Tuo certe maximo, sive Te Te unum spectem, sive Tuæ splendorem Familiæ, cujus tanta omni ætate dignitas fuit, atque amplitudo, ut quanticunque honores

exop-

exoptari possint, eos omnes contulerint Romani Pontifices, contulerint Romani Cæsares; atque ille præsertim facile omnium maximus Carolus V. qui Franciscum Tritavum Tuum incredibilis prudentiæ Virum, Magnum, quem vocant, Cancellarium Mediolani esse voluit, ut ejus maxime consilio Res Insubriæ, Dominatioque recens sustineretur. Neque jam alios benemultos commemoraverim, qui Sago, & Toga, avitam dignitatem retinuerunt, amplificarunt, Patriæ Patres non ita semel appellati, cui in maximis rebus, ac periculis præsidio, & tutelæ extiterunt. Sed profecto hoc magis est admirandum, his Te ortum Majoribus tam longe ab fastu illo abesse, quem splendida per sese fortuna afferre solet, ut non solum humanitatem, sed amicitiam, sed suavitatem quamdam jucundissimæ familiaritatis mihi semper præstiteris; imo nostræ Societatis hominibus singulis: Quibus,

etiamsi

etiamsi Tua, Tuorumque præsens benevolentia abesset, deberet tamen erga Tuam Familiam animus esse studiosissimus; tum quod ex Majoribus tuis tres summi Viri Societatis nostræ, cui se adjunxere, nomen, doctrina ipsi, atque eloquentia clari, celebrarunt; tum, majoremque in modum quod Tui omnes amorem in nos mirificum illum, atque perpetuum præsetulerunt. Quibus de rebus Tuo Nomini jure, quam qui optimo, inscriptos hosce de Elementis Geometriæ libros, volens, ac lubens, accipe. Hi se Tibi Patrono sistunt; namque ut confici possent, magna excellentium librorum facta copia mihi præsto fuisti: atque ita se sistunt, ut nunquam magis in tempore. Cum enim per hos ipsos dies ad Decurionum nobilissimum, amplissimumque Civitatis ordinem accesseris, opportune accidit, ut, qua maxime optare possem ratione, Tibi publice, & meo, & communi nostrûm omnium nomine gratularer.

LECTORI.

NON eram nescius quam difficili in loco verſetur eorum induſtria, qui ſtudioſis adoleſcentibus Geometriam elementarem hoc tempore tradere aggrediuntur; ac verebar interdum ne propter diſparem, quæ jamdiu invaluit, hujus diſciplinæ methodum, noſter hic labor in varias reprehenſiones incurreret. Erunt aliqui, & hi quidem antiquitatis retinentiſſimi, qui ſolum Euclidem prælegi pueris oportere putent, alium præterea neminem: magnum nomen, & antiquæ gloriæ ſama verendum, ac pæne ſacrum, Euclidem eſſe: quotquot retroactis ſæculis floruerunt Geometræ, ab hujus elementis, velut a communi quodam Geometriæ ludo, prodiiſſe: nefas proinde eſſe ab ejus formula, præſcriptoque deſciſcere. Quod ſi paullo durior Tironi videatur Euclides, hoc ipſo tamen experimento probari ajunt adoleſcentum ingenia, & tamquam lydio lapide eos explorari ſane paucos, qui ad Geometriam nati factive ſint.

Alios etiam futuros ſuſpicor magis æquos reprehenſores, qui alienæ quidem modum non ponant induſtriæ, ſed a ſcriptoribus *hujus* ævi Italis, & Tranſalpinis ita elaboratum esse dicant in hoc toto elementari genere, ut frustra omnis videri possit a me susceptus labor.

Utrisque putavi posse me ita satisfacere, ut & illos mihi placatos sperem, & hos etiam consentientes, si modo consilii mei caussam, rationemque cognoverint. Nam quod dicunt asperitate aliqua, quæ in Euclidæis elementis occurrit, excitari, non infringi adolescentum studia, tum id audirem, si, quicumque ad Geometriam accedunt, non modo ingenio bene instructi, sed optima, & obfirmata etiam voluntate accederent, nec inconstantia laborarent, quæ in illam ætatem cadit. Horum autem imbecillitati prospicere etiam velle, ecquis prohibeat? Sane per hosce annos, quibus hoc munere fungor, expertus sensi pleraque in primo limine theoremata intempestiva esse Tironum ingeniis nondum subactis. Memini quantus illis terror inerat, cum sensim eos deducebam ad primas propositiones, quartam, quintam, sextam, septimam, & octavam in ordine Euclidæo, quasi vero offendissent immanes scopulos Acroceraunia. Audierant etiam hisce locis naufragia multorum; pontem esse male ominosum pluribus; hunc transmeare paucis concessum. Sane, nisi ardentius institissem, jam pedem retulissent plerique.

Hæc

Hæc ego offendicula, merasque præstigias præpostero elementorum ordini semper tribuendas duxi, quem non alium observari ab Euclide prospexi, quam qui rigidum Geometram deceret, quique idoneus esset, ut alia ex aliis inter se apta, & connexa deducerentur theoremata, ad demonstrandum satis, ad docendum parum. Quod nisi etiam a sapientissimis hujus ævi Geometris sæpius observatum legissem, vix dicere auderem. Nam illa ipsa, quæ adeo exanimant adolescentes, theoremata nihil quidquam difficultatis haberent, si a simplicioribus theorematis sensim progressi, mentem, ac phantasiam paullo ante exercuissent tot angulis concipiendis, atque *inter se comparandis*. Quid? Totus quantus est Euclidis liber secundus quam molestus accidat Tironibus nemo non videt. Sin autem illa rectangulorum, & quadratorum ex variis linearum segmentis objecta species in alium locum opportunius rejecta fuisset, eorum phantasiæ non adeo vel impedita, vel obscura videretur. Nihil opus est reliquos libros commemorare.

Quod si qua ratio est terroris hujus vel tollendi prorsus, vel minuendi, quid est cur nolumus eorum, qui Geometriæ posthac daturi sunt operam, vel laborem levare, vel fastidio occurrere? Qua in re habeo non adſtipulatores ſolum, ſed auctores etiam hujus meæ ſententiæ ſcriptores ferme omnes, Italos, & Tranſalpinos, qui mihi multo ante præiverunt. Neque vero putandi ſunt temere id feciſſe, ac de gradu ſuo, quem Euclidi tot ſæculorum conſenſus firmaverat, illum dimoviſſe. Nihil profecto minus. Perfectum Geometram, & cui nihil admodum deſit, Euclidem facile prædicant. Sed valeat primo illa Marci Tullii libera vox. Nihilne tot ſæculis, ſummis ingeniis, maximis ſtudiis explicatum putamus? Nihil eſt ergo actum poſt Euclidem?

Adde etiam pro diverſo Scriptorum ſcopo inflecti etiam oportere, & circumagi omnem tractandæ Geometriæ rationem. Lucilius ajebat, ut eſt apud Tullium lib. 1. de Fin., ſe non Romanis, ſed Tarentinis ſuis, Conſentinis, & Siculis ſcribere. Facete is quidem, ſed etiam vere. Eſt enim Scriptoris non deſipientis ſequi naturam, & ea ſingulis ætatibus, vel perſonis addiſcenda proponere, quæ ſingulis aptiſſima ſunt. Geometriam ego non Geometris, ſed adoleſcentibus, ſed auditoribus meis ſcribo. In hoc genere ſcribendi, ajebat Tullius lib. 5. Tuſc. diſp., neſcio quo pacto magis quam in aliis, ſuus cuique finis, ſuum cuique pulchrum.

Quamobrem ea, quæ in primos quatuor

tuor libros anguſte congeſſit Euclides, in ſeptem elementa lib. I., ſed pedetentim, partiteque digeſſimus. Ac primo in ipſis prolegomenis definitiones ad univerſam Geometriam pertinentes, numero paucas, uſu neceſſarias moroſius tractavimus. Nam in omni, quæ recte, & ordine tradatur, inſtitutione, hæc eſt prima patefactio quaſi rerum opertarum, cum quid quidque ſit aperitur. Curavimus tamen ne quibuſdam tantum formulis, iiſque breviſſimis tota ea res ageretur, ſed univerſa minutius etiam concidimus. Vidi enim, & ſæpius expertus ſum quanti interſit linguam Geometrarum vernaculam apprime noſſe, ne ambiguitate vocum in theorematis plerique nutent, revocent ſe interdum, iiſque imbecillius aſſentiantur. Neque huc tamen omnem definitionum ſtruem congeſſimus, ſed quantum ſatis erat ad progrediendum expedite, & ſine ſarcina. Reliquas elementis ſingulis tamquam levis armaturæ milites præmiſimus.

In primis autem ſeptem elementis, quæ libro primo complectimur, hunc ordinem ſecuti ſumus naturæ maxime conſentaneum. Elemento primo ſimplicem conſideramus linearum occurſum, anguloſque ſubnaſcentes. Proxime ſequitur rectarum numquam concurrentium, quas parallelas vocant, theoria. Inde ex vario linearum circularium & inter ſe, & cum lineis rectis occurſu primæ ſe ſe explicant circuli admirandæ proprietates, tangentium, ſecantium, atque chordarum. Tum quam varius, & multiplex circuli ſit uſus in dimetiendis, cognoſcendiſque angulis exponitur elemento quarto: quæ res in tota geometria latiſſime patet. Hæc prima ſunt Geometriæ naſcentis exordia. Ex hoc autem linearum occurſu ſimpliciſſima omnium inter figuras planas exoritur triangularis figura, tum quadrilatera, dein polygona, quarum ſymptomata tribus reliquis elementis accurate explicamus. Videtis quam mire conſentiat huic methodo naturæ ordo, quam leniter ex ſimplici linearum occurſu fluant theoremata magis compoſita. Eamdem plane partitionem, progreſſionemque in reliquis etiam libris obſervavimus, atque Euclidæis theorematis adjuximus ea, quæ inter elementares propoſitiones referri merito optabant plerique. Sic neque alii a me penitus ſublatum Euclidem dolebunt, & alii potius aliter ſtudioſis eumdem reſtitutum gratulabuntur.

Nam quod dicunt a rigida demonſtrandi ratione eos deſciſcere, qui Euclidæo ordini mancipati non ſunt, probarem utique, ſi hunc ſcopulum caute jam præter-

greſſi

gressi non fuissent doctissimi Geometræ: quasi vero iisdem principiis in dispari scribendi methodo & primi, & postremi insistere non potuissent. Fuerit ista sane quorumdam scriptorum labes, qui, dum perspicuitati plus nimio indulgent, Geometriam vel sustulerunt, vel enervarunt; nec vero alii defuerunt, qui studio rigoris, quem vocant, in demonstrando aliò prolapsi, Geometriam studiosis velut onus Aetna gravius effecerint. Si quis vero in hoc Euripo constitutus tamquam medius inter duas Syrtes naviget, utriusque facultatis particeps, neutrius periculi expers, næ ego illum & optimi Doctoris, & egregii Geometræ partes omnes exsequi judicabo: quod ætate hac nostra cum ex transalpinis hominibus multi, tum etiam ex nostris non pauci magna cum laude perfecerunt. Et quamvis is ego non sim, ut tantum possim, nec, si maxime possim, prædicare de me audeam; malo tamen cum iisdem scriptoribus parum timidus videri in hac eadem Geometriæ semita ineunda, quam nimium prudens Euclidæis quasi vestigiis persequendis.

Quid? quod, ut satietati Tironum occurrerem, quos adhuc minime percellit speculatricis Geometriæ pulchritudo, elementis *prope* singulis adjecimus ea, quæ ab illis derivari poterant, Geometriæ practicæ problemata; atque hac ratione, quæ divulsa quondam erat ab elementari Geometria, & separatim tractabatur, in unum corpus copulavimus *Geometriam Theorico-Practicam*. Nimirum nuda illa, & arida elementorum ratio nimium quantum fatigat, & abjicit plerosque, quibus ab omni usu semotæ contemplationi tamdiu vacare videtur esse hominis intemperanter abutentis & otio, & litteris.

Quamobrem, ut hoc præjudicium amoverent Scriptores Geometriæ, in dispares abierunt methodos. Alii, quæ in usus Opticæ, Cathoptricæ, Astronomiæ, Physicæ traduci ex theorematis fere singulis possent, studiose collegerunt, Wilhelmus Wiston, P. de Chales, ac nuperrime P. Leonardus Ximenes, qui omnium conatus solertissime superavit. Sed hæc etiam industria non vacat affini periculo. Nam singularum facultatum principia cujusque propria afferenda in medium sunt, quæ vix, ac ne vix quidem intelligunt Tirones; quippe quæ prætereundo potius a scriptore attingi necesse est. Accedit eodem novitas rerum, & vocum, & multiplex experimentorum cognitio, in quibus plane hospites sunt, & peregrini Tirones: quæ omnia præpediunt potius, quam juvent eorum cursum. Vidit

Vidit hoc perſpicaciſſimus vir P. Ximenes, narratque in præfatione quas ſibi leges obſervandas duxerit, ne eò, quò minime vellet, imprudens relaberetur. Quod quamvis diligentiſſime præſtiterit, fatetur tamen de ſe ingenue quam anceps, & plenum aleæ opus hoc ſit. Sic enim ſapienter monet. *In ſomma io dico, che ho ſoſtenuto fin' ora una noja, ed un faſtidio, che non è piccolo; che la ſcelta, ed eſpoſizione di tali uſi è una coſa aſſai ambigua, ed ingannevole; che chi ſi trovaſſe poco contento di queſta piccola impreſa, faccia così: vi ſi provi egli, e per amore del pubblico bene ſoſtenga anch' egli qualche poco di queſta nojoſa fatica.*

Ego vero neque me huic oneri ſuſtinendo parem ſentio, ſemperque timui ne ab exteris facultatibus in Geometriam elementarem accerſitæ exercitationes alium ab eo, quem optarem, exitum eſſent habituræ. Quare aliò me verti, & Geometriæ elementaris inſtitutiones ad uſus Geometriæ practicæ accommodavi. Habet enim facultas utraque communes voces, nedum principia. Nihil ex longinquo accerſendum, quod peregrinitatem redoleat Tironi. Lineas, figuraſque ſive in charta, ſive in aere, campiſque concipias, eadem tibi theoria prælucet.

cet. Instrumentorum, quorum in Geometria practica usus vel maximus est metiendis angulis, capiendisque intervallis, descriptio & omnibus exposita est, & theoriam ipsam juvat, altiusque animo defigit.

Hæ me rationes perpulere ut hanc utriusque Geometriæ tradendæ methodum arriperem, quam non primus invexi, sed inchoatam accepi ab aliis scriptoribus, Ozanam, Deidier, Camus, (sed quo plures nomino, eo plures occurrunt digni qui nominentur) qui eamdem, quam primo illis aperuerat Arnaldus, semitam tractandæ Geometriæ introgressi solidiore artificio firmarunt, & mihi etiam per eadem vestigia gradienti principes, & duces exstiterunt. At si res ita se habet, inquiet aliquis, occupatam jam pridem provinciam frustra invadis. Quæ ratio si valeret, inquit Tullius, jamdudum homines de rebus præclarissimis siluissent. Prostat refellendis id genus reprehensoribus, excitandæque scriptorum industriæ luculentum ejusdem Marci Tullii testimonium lib. 1. de Fin. *Nam si dicerent, inquit, ab illis has res esse tractatas, ne ipsos quidem Græcos est cur tam multos legant, quam legendi sunt. Quid enim est a Crysippo prætermissum in Stoicis? Legimus tamen Diogenem, Antipatrum, Mnesarchum, Panætium, multos alios, in primisque*

que familiarem nostrum Possidonium. Quid Theophrastus? mediocriterne delectat, cum tractat locos ab Aristotele ante tractatos? Quid Epicurei? Num desistunt de iisdem, de quibus & ab Epicuro scriptum est, & ab antiquis, ad arbitrium suum scribere? Quod si Græci leguntur a Græcis iisdem de rebus alia ratione compositis, quid est cur nostri a nostris non legantur?

Hæc ille sapientissime more suo. Intelligebat nimirum vir juvandis, augendisque scientiis natus, nihil esse aut a natura, aut ab arte, simplici in genere omnino perfectum; sapientiores esse solere non raro posteriores cogitationes; multa iterum, & sæpius tentantibus, & experientibus occurrere, quæ aciem quamlibet acutam ante fugiebant. Non quod eos, qui nostra, Patrumque memoria floruerunt Geometræ, plus multo vidisse negem, quam quantum nostrorum acies intueri potest. Sed in tradendis disciplinis multa sunt, quæ dies retegit, & longa observatio naturæ. Hoc jamdiu a bonis scriptoribus sancitum fœdus, ut alter alterius opes accessione aliqua amplificet; nec deerunt postmodum alii, qui hæc ipsa, quæ scribimus, elementa, (si quid humanitus offensum fuerit) comiter emendent, ac faciant *meliora*, libentissimis nobis, & pro communi

scien-

ſcientiarum incremento enixe cupientibus. Nam hominum nedum naturis, ſed etiam lucubrationibus quadrat Horatianum illud: *Optimus ille eſt, qui minimis urgetur.*

Reliquum eſt ut iis reſpondeam, qui hæc a me tractari elementa multo brevius voluiſſent. Ac illi quidem difficilem quamdam temperantiam poſtulant in eo, quod ſemel admiſſum coerceri, reprimique non poteſt, in reque eo meliore, quo uberior ſit, mediocritatem deſiderant. Nam nihil eſt iis, qui alios docere volunt, tam adverſarium, quam quæſita brevitas in tanta vocum novitate, & rerum. Intelligenti pauca, ut veteri proverbio tritum eſt; at diſcenti non ita. Iſthæc, quæ vocant, Geometriæ compendia, fateor, avidiſſime exquirunt Tirones, at citiſſime etiam deſerunt. Quid cauſæ ſit, explicat Platonis elegantiſſima comparatio lib. 2. de Rep. Si quis, inquit, nobis propoſuiſſet aliquid longo intervallo legendum, quod minutis litteris ſcriptum foret, neque nos valde acutis, & perſpicacibus eſſemus oculis, poſteaque alicui noſtrum veniret in mentem, idem alibi exſtare in latiore tabula grandioribus litteris ſcriptum, nemo eſſet quin lucro apponeret illam prius inſpicere, ut poſtea, quæ in minore ſcripta eſſent, iiſdem veſtigiis facilius perſequi poſſet.

ſet. Sic noſtra hæc paulo explicatiora elementa legent Tirones, quamdiu volent: tamdiu autem velle debebunt, quoad Geometria ab eorum cognitione, uſuque longius diſtabit, quoad hebetiores oculos ſe habere intelligent.

Verum cui hæc tam prolixa admonitio? Non illis certe, qui librorum procœmia cum legerint, ſatis habent, ac de re tota diſceptant, ſed unis illis, qui ſerio animum ad Geometriam adjicere volent, quique experiundo incorruptius de me judicabunt. Obſcuritas autem ſi qua forte occurrat, nolim tam facile Scriptoris vertatur vitio, quippe quæ non raro oritur ex rebus ipſis ſuapte natura *latentibus*, ac ſæpe ex ingeniorum noſtrorum imbecillitate; qua fit, ut, quemadmodum vetula illa, cum oculorum aciem ætate amiſiſſet, de ædium luminibus querebatur, *ita* artium ſtudioſi interdum humanæ *infirmitatis* culpam in Magiſtros conferant,

GASPAR JOSEPH GAGNA
E SOCIETATE JESU
PRÆPOSITUS PROVINCIALIS
IN PROVINCIA MEDIOLANENSI.

CUm Librum, cui titulus eſt: *Elementa Geometriæ Theorico-Practicæ* a P. Antonio Lecchi Societatis noſtræ Sacerdote compoſitum aliquot ejuſdem Societatis Theologi, quibus commiſſum fuit, recognoverint, & in lucem edi poſſe probaverint; facultate nobis a R. P. N. Ignatio Vicecomite Præpoſito Generali communicata, concedimus ut typis mandetur, ſi ita iis, ad quos pertinet, videbitur. In quorum fidem has Litteras manu noſtra ſubſcriptas, & ſigillo Societatis noſtræ munitas dedimus.

Mediolani die 17. Novembris 1752.

Gaſpar Joſeph Gagna.

Loco ✠ Sigilli.

Die 11. Novembris 1753.

I M P R I M A T U R.

Fr. Joſeph Maria Lugani Vic. Gen. S. Officii Mediolani.

J. A. Viſmara Pœnit. Major pro Eminentiſſ. & Reverendiſſ. D. D. Card. Archiepiſcopo.

Vidit Julius Cæſar Berſanus pro Excellentiſſ. Senatu.

GEOMETRIÆ ELEMENTARIS THEORICO-PRACTICÆ

LIBER PRIMUS.

GEOMETRIÆ PROLEGOMENA.

1. GEOMETRIA est ſcientia extenſorum, quæ non modo magnitudinem, ſeu quantitatem in ſeipſa conſiderat, ſed illius etiam rationem cum alia quavis ejuſdem generis magnitudine. Geometria.

2. Duplex Geometria eſt, Theorica, & Practica. Illa quantitatis continuæ, quam uno nomine Geometræ magnitudinem appellant, affectiones abſtractè, & generatim conſiderat, ac demonſtrat, & cum Arithmetica, ſive numerica, ſive ſpecioſa, Matheſeos univerſæ baſis eſt, ac fundamentum. Ab hac, ejuſque elementis, veluti fonte uberrimo, illa, quam practicam vocant, Geometria profluxit: nimirum omnis latitudinum, longitudinum, profunditatum, omnis agrorum, montium, inſularum dimenſio, atque diviſio, omnis in cœlo per inſtru- Theorica, & Practica.

menta ſyderum obſervatio, omnis machinarum vis, & ponderum ratio; ac denique quidquid uſpiam terrarum vaſto licet ambitu continetur, mentis noſtræ oculis, munere, ac beneficio Geometriæ ſubjectum conſpicimus.

3. Nobilitas verò, atque præſtantia hujus ſcientiæ ex certitudine demonſtrationum, quibus utitur, facilè apparet; id quod aliis ſcientiis vix tribuere poſſumus. Omnis autem a Geometris adhibita demonſtrandi ratio dividitur in Problema, ac Theorema.

4. Problema vocant eam demonſtrationem, quæ jubet, ac docet aliquid conſtruere: puta, ſi quis conetur demonſtrare qua ratione data recta linea finita bifariam ſecetur.

Problema.

5. Theorema autem appellant eam demonſtrationem, quæ ſolùm affectionem aliquam, proprietatemque unius, vel plurium ſimul quantitatum perſcrutatur; uti, ſi quis demonſtret duarum rectarum ſe mutuò ſecantium angulos ad verticem oppoſitos æquales eſſe, vocabitur hæc demonſtratio theorema, quia non jubet, aut docet angulum, ſive quidpiam aliud conſtruere, ſed contemplatur tantummodo hanc angulorum ad verticem affectionem.

Theorema.

6. In omni itaque problemate duo potiſſimùm ſunt conſideranda, Conſtructio illius, quod proponitur, & Demonſtratio, qua oſtenditur conſtructionem rectè eſſe inſtitutam. Quamvis autem theoremata conſtructionem non jubeant, nec ſibi proponant, tamen, ut demonſtretur ea, quæ affirmatur, quantitatis proprietas, ſæpenumero conſtruendum eſt, atque efficiendum prius aliquid, ut via demonſtrationi aperiatur, ſicuti manifeſtum erit in ſequen-

Conſtructio, & Demonſtratio.

ſequentibus. Enim verò pauca admodum ſunt theoremata, quæ nullam requirant conſtructionem.

7. Cæterùm tam problema, quam theorema dici conſuevit apud Geometras Propoſitio, propterea quòd utrumque nobis aliquid proponat. Id ergo omne, quod in quæſtionem cadit, dicitur propoſitio. Geometræ autem propoſitionum alias dixere theoremata, alias problemata. Problematum demonſtrationes concluduntur his ferè verbis: *Quod faciendum erat*; theorematum verò hiſce: *Quod erat demonſtrandum*; habita nimirum ratione finis utriuſque. Propoſitio.

8. Quoniam verò ad demonſtrationes problematum, ac theorematum requiruntur interdum alia quædam theoremata, vel problemata minùs principalia, ut faciliùs demonſtrari poſſint ea, de quibus præcipuè agitur: idcirco a Geometris illa vocantur Lemmata, propterea quòd ſolùm aſſumuntur ad alias demonſtrationes, non autem de illis præcipua diſputatio inſtituatur, quemadmodum de aliis. Itaque Lemma dici poteſt demonſtratio, ſeu conſtructio illius, quod ad demonſtrationem alicujus theorematis, vel problematis principalis aſſumitur, ut demonſtratio expeditior fiat, & brevior. Lemma.

9. Cum autem omnis, quæ ratione quadam, ac methodo traditur demonſtrandi forma ex aſſumptis, & conceſſis quibuſdam principiis ad alias ignotas, abſtruſaſque veritates progrediatur, quod proprium eſt munus, atque officium diſciplinarum omnium: habebit utique & Geometria principia ſua, quibus poſitis problemata, ac theoremata confirmet. Horum autem tria ſunt genera: Definitiones, Poſtulata, & Axiomata. Geometriæ principia.

10. Definitiones vocabula artis explicant, ne in ipsa tractatione fiat, ut ambiguitate nominum, aut obscuritate circumventi, in paralogismos incidamus.

Definitio.

11. Postulatum est quod facilè fieri posse manifestum est.

Postulatum.

12. Axiomata, seu communes animi notiones, quas præclarè Tullius Pronunciata, seu Effata vocat, dicuntur veritates illæ, quæ non solùm in scientia proposita, sed etiam in omnibus aliis ita manifestæ sunt, ut ab eis nulla ratione dissentire queat is, qui ipsa vocabula rectè perceperit.

Axioma.

Scholion.

Porro in hujuscemodi principiis tradendis hic ordo servabitur, ut in hoc primo Geometriæ aditu proponantur principia toti scientiæ communia; in aliis autem elementorum libris ea exponantur principia, quæ propriè, & peculiari quadam ratione ad materiam illorum subjectam videntur spectare.

DEFINITIONES.

13. Tria sunt, quæ mensurandis corporibus adhibentur dimensionum genera: Longitudo, Latitudo, & Profunditas.

Linea.

14. *Longitudo, quæ mente concipiatur veluti præcisa a latitudine, & profunditate, dicitur linea.*

Scholion.

Cum lineas audis, non eas solùm intelligas oportet, quæ atramento in charta, aut alia ratione descri-

describuntur in tabula, sed eas præsertim, quæ rebus insunt: hoc est, omnium hujus universi superficierum, ac corporum aspectabilium in longum, latum, ac profundum dimensiones.

15. *Longitudo, & latitudo, quæ absque profunditate cogitentur, vocari solent Superficies.* Superficies.

16. *Longitudo, latitudo, & profunditas simul considerata vocantur Corpus, seu Solidum.* Corpus.

Scholion.

Quamvis corpus omne tribus dimensionibus constet, nec una a reliquis sejungi possit: tamen partim necessitate, partim utilitate ducimur, ut unam absque reliquis consideremus. Nam & limitatio intellectus facit, ut, quas unica cogitatione complecti non potest corporum dimensiones, saltem singulas quasi per gradus cognoscat; atque hinc per abstractionem mens humana divellat, quæ nexu indivulso natura conjunxit: & utilitatem hujus abstractionis casus innumeri persuadent, in quibus unam dimensionem, neglectis cæteris, cognoscere jubemur, puta, altitudinem turris sine latitudine, & profunditate ipsius, latitudinem fluminis absque longitudine, & profunditate ejusdem.

17. *Punctum est signum in magnitudine individuum.* Hoc est, quod dividi ne cogitatione quidem potest. Punctum.

18. Cave autem putes punctum partem lineæ saltem esse, cujus præcisè terminus existit. Quid sit terminus lineæ, mente assequeris, etiamsi hujus exemplum in rebus materialibus reperire nul- Euclidæa notio puncti.

lum possis; nisi fortè velis, inquit Clavius, extremitatem alicujus acus acutissimæ similitudinem puncti exprimere; quod quidem verum non est, quoniam ea extremitas dividi potest, & secari infinitè, punctum verò individuum debet existimari.

19. Hæc est Euclidis, & Geometrarum veterum notio. Cum autem ad geometricas demonstrationes vel minimè necessaria sit idea puncti planè individui, vel interdum alia aliis majora puncta admittere oporteat, aut saltem plura diversorum ordinum fateri, uti deinceps demonstrabimus, ac præsertim in calculo infinitesimali: hinc factum est, ut recentiores Geometræ duplicem invexerint puncti mathematici notionem, alteram puncti relativi, alteram absoluti.

Recentiorum notio.

Punctum Relativum dicitur ea portio materiæ, quæ, quamvis certam, & determinatam habeat magnitudinem, tamen, si cum alia magnitudine comparetur, perinde accipi potest, ac si omni prorsus extensione careret. Sic Astronomi terram instar puncti considerant, respectu immensæ cœlorum, ac fixarum distantiæ; pariterque in Gnomonica, distantia, quam habet superficies terræ a suo centro, pro nihilo reputatur, si cum ea, quam sol a centro terræ obtinet, distantià comparetur.

Punctum Relativum,

Punctum Absolutum vocant quantitatem quavis data minorem, seu, ut aliis placet, *infinitè parvam, vel*, ut Newtono, *evanescentem*. Quantitates autem infinitè parvas, aut evanescentes, & quidem diversorum ordinum pro nihilo habendas esse in multis demonstrationibus tanquam axioma posuerunt Euclides, & Archimedes, ut progressu ipso constabit; atque hinc Bonaventura Cavalerius indivisibilium methodum Geometriæ accommodavit.

Punctum Absolutum.

Hæc

Hæc autem quantitatum indivisibilium hypothesis cum durior, minùsque geometrica Newtono videretur, loco indivisibilium evanescentia divisibilia substituit, ut alibi fusiùs exponemus.

Scholion.

IN iis verò, quæ mox tradentur, demonstrationibus geometricis, nisi præmoneam, non aliam, quàm Euclidæam notionem pùncti usurpabo, vel cum Recentioribus quantitatem evanescentem.

Corollarium.

TRes igitur dimensiones habet corpus, superficies duas, linea unam, punctum vel nullam absolutè, vel nullam respectivè.

Scholion.

20. *MAgni refert, ut quam antiqui, & recentiores Geometræ excogitarunt harum trium dimensionum genesim, Tirones multo ante concipiant; quippe quæ usum habet insignem in ea Geometriæ parte, quam tantopere Recentiores excoluerunt. Itaque Euclidis interpretes, aliique, ut nobis inculcent verum lineæ notionem, imaginantur punctum jam descriptum n. 17. & 18. e loco in locum moveri. Cum enim punctum sit prorsus individuum, relinquetur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum omnis latitudinis expers. Hinc factum est, ut alii dixerint lineam nihil esse aliud, quàm puncti fluxum, & punctum omnis magnitudinis quasi principium esse, sicut unitas est numeri. Similiter monent iidem,* Linea ex fluxu puncti.

Superficies ex fluxu lineæ.

ut intelligamus lineam aliquam in transversum moveri; vestigium enim relictum ex isto motu erit quidem longum propter longitudinem lineæ, latum quoque propter motum, qui in transversum est factus; nulla verò ratione profundum esse poterit, cum linea ipsum describens omni careat profunditate. Quare superficies dicetur, quam ex fluxu lineæ generari imaginabimur, ejusque extremitates esse lineas, quemadmodum lineæ termini sunt puncta. Simillima prorsus est solidi genesis ex fluxu superficiei.

Solidum ex fluxu superficiei.

21. *Omnis quantitas iisdem elementis constat, quibus generari concipitur. Cavalerius quidem hoc primum posuerat suæ methodi indivisibilium veluti decretum, lineas nempe ex infinitis punctis constare, superficies ex infinitis lineis, & solida ex infinitis superficiebus; deinde indivisibilia illa elementa, totamque eorum summam comparabat in una magnitudine cum singulis elementis, eorumque summà in alia magnitudine, ut sic duarum magnitudinum rationem determinaret. Newtonus verò, ut methodi indivisibilium brevitatem assequeretur, tutiùs tamen, & accuratiùs procederet, quantitates mathematicas considerat, non ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas; nimirum lineas cogitat describi, ac describendo generari, non per appositionem partium, sed per motum continuum punctorum, superficies per motum linearum, solida per motum superficierum, angulos per rotationem laterum, & sic in cæteris. Quare has fluxiones infinitè parvas, seu evanescentes, vocat ille totidem quantitatum elementa respectivè; atque hinc methodo indivisibilium substituit Newtonus fluxionum methodum, de qua suo loco dicendum multò accuratiùs.*

22.

22. *Recta linea est omnium brevissima, quæ inter duo puncta duci possit.* Si namque punctum rectà fluere concipiatur per brevissimum spatium, ita ut neque in hanc partem, neque in illam deflectat, dicetur linea illa descripta recta, quæ dici etiam solet Distantia ab uno puncto ad aliud. Recta linea. Distantia.

Corollarium I.

23. AB uno puncto ad aliud, sicuti unica via est, quæ sit omnium brevissima, ita & unica linea recta duci potest.

Corollarium II.

24. DAtis duobus punctis determinatur positio lineæ rectæ; hoc est, si directionem rectæ lineæ determinare oporteat, satis erit duo ejusdem rectæ puncta invenire. Positio rectæ lineæ.

Corollarium III.

25. DUæ rectæ in unico puncto se mutuò intersecant. Nam si in duobus punctis se se intersecarent, haberent ambæ eamdem positionem per Corol. II., atque in unicam lineam commiscerentur: quod esset contra hypothesim.

Corollarium IV.

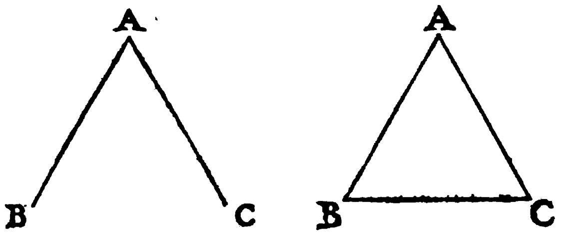
26. DUæ rectæ lineæ non habent unum, & idem segmentum commune; quod etiam ex notione lineæ rectæ per se consequitur. Cum enim linea recta directo semper itinere, nullam in partem

tem

tem deflectendo producatur, fieri nulla ratione potest, ut duæ lineæ rectæ habeant unam partem, quamvis minimam, communem, præter unicum punctum, in quo se mutuò intersecant.

Corollarium V.

27. DUæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt. Ut enim duæ rectæ AB, AC spatium comprehendant, ambæ discedant oportet ab eodem puncto A, & coeant in idem punctum B, sive C, quin uspiam commisceantur; quod fieri non potest ex Corol. II. Quare, ut superficies, spatiumque quodvis rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis AB, AC tertia quædam linea BC adjungenda est; ita enim conficietur spatium triangulare ABC, seu figurarum rectilinearum prima.



Corollarium VI.

28. SI tres rectæ lineæ AB, BC, AC claudant spatium, earum duæ quælibet AB, BC simul sumptæ, tertià AC longiores, seu majores erunt. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 20.

Cum enim linea AC recta sit, erit omnium brevissima a puncto A ad punctum C. Hujus Corollarii usus erit frequens deinceps.

29. *Linea curva dicitur ea, quæ non est omnium brevissima, quæ inter duo puncta duci possint.* Linea curva.

Difformium harum linearum numerus est prope infinitus, quarum genesim ex fluxu puncti non est opus hìc recensere.

30. *Linea mixta est partim curva, partim recta.* Linea mixta.

31. *Plana superficies est minima, seu brevissima omnium, quæ eadem habent extrema, vel, cujus omnibus partibus recta linea accommodari potest.* Plana superficies.

Solent Geometræ superficiem planam frequenter appellare Planum. Cæteræ omnes superficies, quibus non ex omni parte accommodari potest recta linea, appellantur curvæ, & non planæ.

Scholion.

NE definitionum copia plus æquo oneret Tironum memoriam, reliquas tractationibus singulis, atque elementis multò commodiùs præponam.

POSTULATUM I.

32. *A Quovis puncto ad quodvis punctum duci posse rectam lineam.*

Scholion.

CUm nobis propositum sit in hac elementari scientia theoriam praxi conjungere, hinc ordiri placet. Praxis duplex est, alia, quæ exercetur in charta, alia, quæ in campo. Ad primam exercendam ad manus esse debet circinus, regula, norma, parallelismus &c.; ad eamdem verò in campo exercendam requiruntur bacilli cum catenula, vel fune can-

cannabino in pedes, & decempedas, illorumque digitos legitimè diviso, una cum reliquis instrumentis, quorum artificium, & usus, uti se dabit occasio, explicabitur. Utrovis modo instituenda est operatio, sive in charta, sive in campo, ut intelligas, num ea facere possis, quæ jubentur.

Praxis. *In charta linea recta ducitur graphio, aut penna juxta regulam ad duo puncta data applicatam. In campo rectam lineam designabis, si funem extendas inter duos limites datos. Absque funis adminiculo idem efficies, si per quadrantis, aut alterius instrumenti binas dioptras collimans in terminum datum, jubeas plures bacillos certis intervallis infigi ope libellæ perpendiculariter terræ, sic ut omnes simul bacillos per dioptras conspicias; ita enim, quot placuerit, puncta ad rectam lineam quæsitam notabuntur.*

POSTULATUM II.

33. R*Ectam lineam terminatam utrinque produci posse, ita ut recta maneat.*

Praxis *eadem, quæ prius. Vel, duobus baculis in data recta defixis, tertius in eadem recta producta infigetur, si oculo in unum directo, cæteri non appareant. Ratio a luminis rectilinea propagatione petenda est.*

Scholion.

D*Uo sunt, quæ in metiendis intervallis irrepere solent vitia ex funibus cannabe compositis.*

I. Humor eosdem contrahit; & vires diversæ inæqualiter tendunt. Schwenterus Geom. pract. lib.

1. nar-

1. *narrat, cum aliquando metiendæ longitudini in campo vacaret, funis longitudinem, quæ erat 16 pedum, cadente pruina, horæ unius intervallo ad pedes 15 rediisse. Huic vitio occurri posse docet Wolfius Geom. pract. parte 1., si funiculi, ex quibus conficiuntur funes, in gyros contrarios contorqueantur; ac præterea funis oleo ad ignem ferventi immittatur; & postquam exsiccatus fuerit, per ceram liquefactam trahatur, eàque obliniatur. Nullum longitudinis decrementum, inquit Wolfius, notabis, etiamsi funem istiusmodi per diem integrum sub aquis demersum detineas.*

II. Pondus funis horizontaliter extensi impedimento est, quo minùs in rectam lineam conformari possit. Notat Camus lib. 1. cap. 1. Geom. filum 24 pedes longum, ponderans 161 grana $\frac{1}{6}$, & cujus 33 diametri efficiant duos pollices, si horizontaliter tendatur decem virium libris, curvari in medio lineà unà cum semisse. Hæc itaque deviatio a linea recta impediendo erit appositis per intervalla sustentaculis.

POSTULATUM III.

34. *QUovis centro, & intervallo circulum posse describere.*

Praxis. *In charta ope circini res absolvitur. In planitie, & ubicumque circini apertura tanta fieri nequit, quanta requiritur, ejus vicem obire potest filum, aut virga, sive lignea, sive ferrea. Sed de circulo, cujus usus latissimè patet, plura mox erunt dicenda.*

POSTULATUM IV.

35. *EX recta majori partem auferre minori æqualem.*

Scholion.

PRæter hæc quatuor postulata, quibus Euclides, ejusque Interpretes contenti fuere, sunt alia multa æquè facilia, quæ prudens Lector per se ipse assequi poterit, uti translatio intervalli ex uno loco in alium, & alia ejusdemmodi. Quidquid autem geometricè fit, per hæc postulata perficietur; aliter non dicetur geometricè factum.

AXIOMATA.

36. *I. QUæ eidem sunt æqualia, inter se sunt æqualia. Et quod uno æqualium majus, aut minus est, majus quoque, aut minus erit altero æqualium.*

II. Si æqualibus æqualia demas, vel addas, residua in primo, aggregata in secundo casu sunt æqualia. Et si æqualibus inæqualia, aut inæqualibus æqualia demas, vel addas, ea, quæ remanent, sunt inæqualia.

III. Quantitates, quæ certam aliquam quantitatem tantundem continent, vel ab ea tantundem continentur, sunt æquales.

Unde quantitates æquales in eamdem quantitatem ductæ, vel per eamdem divisæ, sunt æquales.

IV. Quæ sibi mutuò superimposita perfectè congruunt, sunt æqualia.

V. Totum qualibet sui parte majus est.

AP-

APPENDIX I.

De mensuris.

GEometriæ praxis, quam theoriæ conjungimus, id jure postulat, ut mensurarum omnium, quarum usus præcipuus est apud Geometras, notionem diligenter hoc loco exponamus.

DEFINITIO.

37. *MEtiri idem est, ac quantitatem aliquam pro unitate assumere, & aliarum homogenearum rationem ad eamdem exprimere.*

Strictiùs ab Euclide mensura definitur: *Quantitas, quæ aliquoties repetita alteri fit æqualis*, quæque ab Arithmeticis pars aliquota nuncupatur. Notio mensuræ.

Mensuræ longitudo, & divisio non eadem est ubivis gentium, uti luculenter demonstrat Ricciolius in Geogr. reform. lib. 2. cap. 7. Exponam itaque prius varias mensuras, quæ a Scriptoribus in rebus geometricis, & physicis passim adhibentur. Mensuræ multiplices.

Exapeda valet	6	pedes.
Pes regius parisiensis	12	pollices.
Pollex	12	lineas.
Linea	10	puncta.

Ubi major accuratio non requiritur, negliguntur in praxi puncta propter parvitatem.

Milliare italicum valet	8	stadia.
Stadium	125	passus geom.
Passus geometricus	5	pedes.
Passus communis	$2\frac{1}{2}$	pedes.

Cu-

Cubitus geometricus	9	pedes.
Cubitus communis	$1\frac{1}{2}$	ped.
Major cubitus	9	cubitos comm.
Minor leuca gallica	2000	paſ. geom.
Leuca communis gallica	2400	paſ. geom.
Major leuca gallica	3000	paſ. geom.

38. Porro hæ menſuræ incertæ ſunt, niſi pedis quantitas, ad quam illæ referuntur, fuerit determinata. Pes verò tot prope magnitudines ſortitur diverſas, quot ſunt civitates; quare, ut hæc tanta, quæ in legendis Scriptoribus occurrebat, obſcuritas tolleretur, Recentiores optimum factu cenſuerunt menſuras reliquas ad notam quantitatem pedis regii pariſini referre, cujus longitudinem aut ejuſdem ſemiſſem metallo inciſam exhibent ea, quæ omnium tractantur manibus, inſtrumenta pleraque, & earum menſurarum, ſaltem celebriorum varietates repræſentare in particulis iſtiuſmodi, qualium pes regius pariſinus eſt 1440. Nam, uti jam expoſuimus, continet is 12 pollices, pollex 12 lineolas, lineola 10 particulas, adeoque pes integer particulas 1440.

Menſurarum ratio.

Itaque pes regius pariſinus	1440.
Rhenanus	$1391\frac{2}{10}$.
Romanus	1320.
Londinenſis	1350.
Venetus	1540.
Bononienſis	$1682\frac{2}{5}$.

Scholion.

Commodiùs a Recentioribus ad vitandam fractorum moleſtiam menſura dividitur in 10 partes æquales, quæ vocantur pedes: unde ipſa Decempeda *da appellatur; pes subdividitur in* 10 *digitos, digitus in* 10 *lineas; & ita porro. Divisionem decimalem primus introduxit Stevinus, qui indicem decempedarum constituit* o, *hoc pacto:* $\overset{0}{3}\ \overset{I}{5}\ \overset{II}{7}\ \overset{III}{8}$, *nimirum, tres decempedæ, quinque pedes, septem digiti, & octo lineæ. Vide lib.* I. *cap.* I. *n.* 3. *comment. in Arith. univers. Newtoni. P. Franciscus Noel in observationibus mathematicis in India, & China factis scribit divisionem decimalem non modo in mensuris, sed & ponderibus sinicis adhiberi.* Divisio decimalis.

39. Diximus in definitione mensuram homogeneam esse oportere quantitati mensurandæ; cum autem tres sint quantitatis species, linea, superficies, corpus, triplex quoque mensura est, linearis, superficialis, & corporea, seu solida; lineæ siquidem per lineam, superficies per superficiem, corpora, seu solida per solidum mensurantur. Non tamen superficies per quamlibet superficiem, neque solida per quodlibet solidum; sed hæc per cubum, illa per quadratum metimur; quia quadratum, & cubus figuræ sunt maximè simplices, adeoque notiores; quadratum enim fit ex uno ductu lineæ in seipsam; cubus verò ex ductu lineæ in seipsam duplicato generatur; nam linea in se ducta facit quadratum, quo ducto rursum in eamdem lineam gignitur cubus. Omnia constant ex genesi harum quantitatum explicata n. 20. Cum tamen mensura simpliciter nominatur, semper linearis intelligitur. Mensura triplex.

APPENDIX II.

Explicatio signorum, quorum frequens est usus in Geometria.

40. Signum additionis est $+$, & dicitur *plus*. Sic $5 + 3$ denotat summam quantitatum 5 & 3.

$-$ Signum subtractionis, & dicitur *minus*. Sic $5 - 3$ denotat excessum quantitatis 5 supra 3.

$=$ Signum æqualitatis. Sic $5 + 3 = 8$ denotat quantitates 5 plus 3 æquari 8.

$\times$ Signum multiplicationis. Sic 5×3 denotat productum ex quantitatibus 5 & 3 in se invicem multiplicatis.

$>$, $<$ duo signa inæqualitatis. Primum $>$ vocatur signum excessus, secundum $<$ defectus. Sic $5 + 4 > 8$ denotat summam $5 + 4$ majorem esse, quàm 8. Contra verò $8 < 5 + 4$ designat 8 minorem esse summà $5 + 4$.

$\frac{a}{b}$ Signum quotientis quantitatis *a* per *b* divisæ. Et similiter $\frac{7}{4}$ est quotiens numeri 7 per 4 divisi, sive $1\frac{3}{4}$. Et cujuslibet fractionis, uti $\frac{1}{3}$, numerator pro dividendo, denominator pro divisore habendus est, & ipsa fractio $\frac{1}{3}$ pro quoto.

Reliqua autem signa opportuniùs suis quæque locis adjiciam.

ELE-

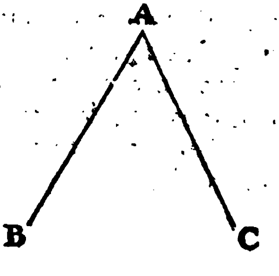
ELEMENTUM I.

De variis Linearum Rectarum sibi mutuò occurrentium affectionibus.

Ex vario linearum occursu prima hæc Geometriæ quasi lineamenta ducimus: rectarum nimirum vel perpendiculariter, vel obliquè in alias incidentium indolem contemplamur, affectionesque multiplices. Quoniam verò, occurrentibus inter se lineis, primam genesim nanciscuntur anguli, hinc ordiendum nobis est.

DEFINITIONES.

41. *Angulus est duarum linearum in plana aliqua superficie se mutuò tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.* Hoc est, quia duæ lineæ AB, AC concurrunt in A, & non jacent in directum, ideo efficiunt angulum A in eadem existentem superficie, in qua duæ illæ lineæ constituuntur. Dicentur autem duæ lineæ non in directum jacere, quando altera earum versus concursum protensa non coincidit cum altera. Anguli notio.

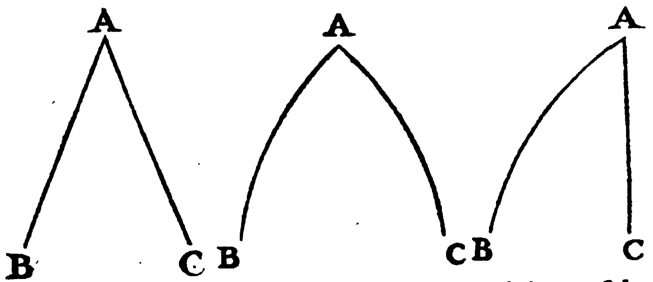


Corollarium.

42. Consistit itaque anguli cujusvis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum; lineæ enim longiùs excurrentes, sicuti non augent anguli inclinationem, ita neque ejusdem magnitudinem.

Angulorum species.

43. *Angulus rectilineus est, quem rectæ lineæ efficiunt: curvilineus, quem curvæ: mixtus, quem recta, & curva.*



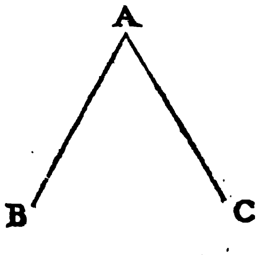
Rectilineum angulum hoc loco unicè consideramus.

44. *Latera, seu crura anguli sunt lineæ* AB, AC, *quæ angulum efficiunt.*

Vertex anguli est punctum A, *in quo latera sibi mutuò occurrunt.*

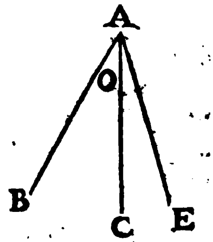
Angulorum notatio.

45. Cum angulus est unicus BAC, unicà etiam litterà A ad verticem positià designari solet. Cum plures anguli ad unum punctum existunt, solent Geometræ, ut tollatur confusio, angulum quemlibet exprimere tribus litteris

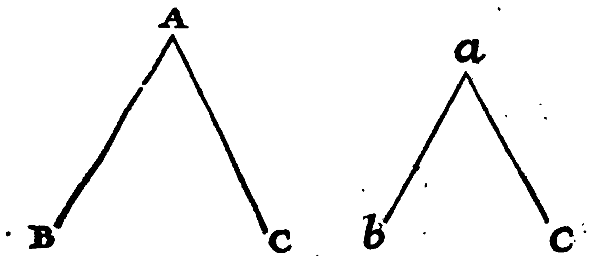


BAC,

BAC, quarum media A ostendit punctum A, in quo lineæ conficiunt angulum; extremæ verò litteræ B & C significant initia linearum, quæ angulum continent; interdum etiam unicà litterà O interiùs positâ designatur.



46. *Anguli æquales, vel potius similes dicuntur, si, cum sibi invicem vertices* A *&* a *imponuntur, latera unius* AB, AC *congruant lateribus alterius* a b, a c. Angulorum æqualitas.

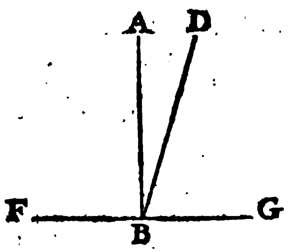


Ad hoc non requiritur, ut latera sint æquè longa.

47. *Cùm recta* A B *super rectam* F G *consistens in neutram inclinat partem, ac proinde angulos facit utrinque æquales* A B F, A B G, *recta* A B *alteri insistens dicitur perpendicularis.* Perpendicularis.

Uterque æqualium angulorum A B F, *vel* A B G *dicitur rectus.* Angulus rectus.

48. *Sin verò recta* D B *super rectam* F G *consistens in alteram partem magis inclinet, ac proinde angulos faciat utrinque inæquales* D B F, D B G, *recta* D B *vocatur obliqua; angulus* D B G



Acutus. *recto minor, acutus nominatur; & angulus* DBF *re-*
Obtusus. *cto major, obtusus.*

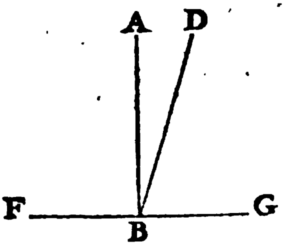
Corollarium I.

Anguli recti proprietas.

49. OMnes anguli recti sunt inter se æquales. Nam, ut ex dictis colligitur, angulus rectus nullam patitur varietatem, nec unus altero major, minorve dici potest; cum linea perpendicularis eum efficiens non debeat magis in unam partem, quàm in alteram inclinare. Obtusus verò, & acutus augeri possunt, & minui infinitis modis; cum ab illa inflexibilitate, inquit Clavius, lineæ perpendicularis infinitis etiam modis recta linea possit recedere.

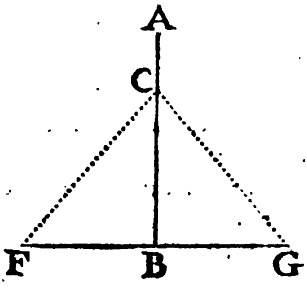
Corollarium II.

50. AD idem punctum B datæ rectæ FG, & in eadem superficie perpendicularis unica duci potest. Nam quævis alia DB in unam magis, quàm in alteram partem inclinaret.



Corollarium III.

51. SI recta AB perpendicularis sit rectæ FG in puncto medio B, quodvis punctum, puta, C ejusdem perpendicularis AB æqualiter distabit ab extremitatibus F & G datæ rectæ. Perspicuum est enim rectas CF, CG, quæ metiuntur distantiam ejus-



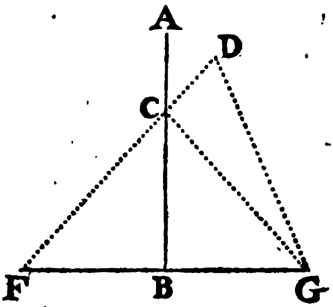
dem

dem puncti C ab iiſdem extremitatibus, fore æquales; aliter perpendicularis AB in unam magis partem, quàm in alteram vergeret contra hypotheſim.

Corollarium IV.

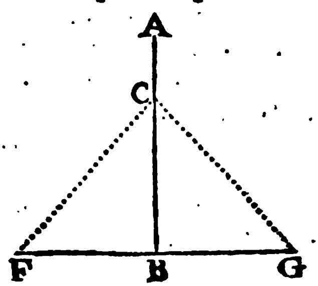
52. SI recta AB perpendicularis ſit rectæ FG in puncto medio B, quodvis aliud punctum D, quod extra perpendicularem in eadem plana ſuperficie ſumatur, non erit æqualiter diſtans ab extremitatibus F & G. Poſitio punctorum omnium in perpendiculari.

Nam FG = CG ex Corol. I. Si æqualibus addas utrinque CD, erit per Ax. II. FC + CD = CG + CD. Atqui (n. 28.) CD + CG > DG. Ergo per Ax. I. FC + CD, hoc eſt, DF > DG.



Corollarium V.

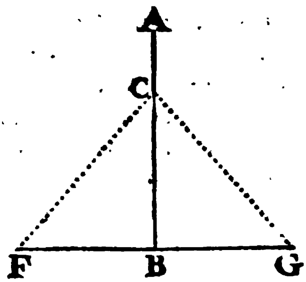
53. ITaque quodvis punctum, quod æqualiter diſtet ab extremitatibus rectæ FG, erit in perpendiculari AB, quæ bifariam ſecat rectam FG; eademque perpendicularis AB tranſit per omnia puncta æqualiter diſtantia ab iiſdem extremitatibus.



Corollarium VI.

54. DEnique, quod maximè notandum, si duo puncta A & C, vel A & B sint æqualiter dissita ab extremitatibus rectæ FG, recta linea AB, quæ per hæc duo puncta transit, erit perpendicularis in medio rectæ FG. Nam duo puncta determinant positionem lineæ (n. 24.).

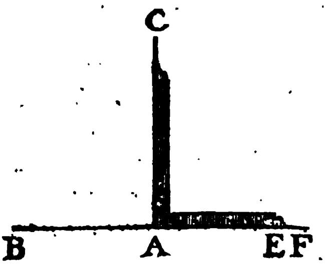
Duo puncta determinant positionem perpendicularis.



Scholion I.

55. *DUæ regulæ sic compactæ, ut angulum rectum contineant, instrumentum efficiunt, quod Norma appellatur. Normæ examen sic instituitur. In quavis recta* BF, *sumpto puncto* A, *normæ latus* AE *applica super* AF*; & juxta latus alterum describatur recta* CA*; conversà deinde normà versus* B, *si utroque latere congruat rectis* BA, CA, *scito esse legitimam, & exactam. Ratio pendet ex def. perpendicularis (n. 47.).*

Normæ examen.

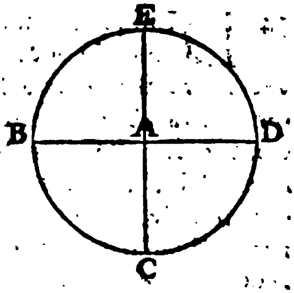


Scholion II.

QUia arcus circuli metitur quantitatem angulorum, idcirco definitionem circuli hoc loco antevertimus.

56.

56. *Circulus est plana superficies unius lineæ circuitu comprehensa, quæ circumferentia dicitur, a qua ad aliquod punctum* A *intra contentum, quod centrum dicitur, omnes, quæ duci possunt, rectæ lineæ, sive radii circuli,* AB, AC, AD, AE *sunt æquales*. Omnia itaque circumferentiæ puncta B, C, D &c. æquidistant a centro. Circulus. Centrum. Radius.



Scholion.

57. *SI intelligatur recta* AD *circa punctum* A *quiescens moveri, donec ad eumdem redeat locum, a quo dimoveri cœpit, describet ipsa recta totum spatium circulare: punctum verò alterum extremum* D *delineabit circumferentiam, seu, ut vocant, peripheriam* BCDE. Circuli genesis.

58. *Diameter circuli est recta quædam linea* BAD *per centrum ducta, & ex utraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam secat, in duos, ut vocant, semicirculos, quorum semissem* BAC *appellant quadrantem circuli.* Diameter. Quadrans.

Arcus circuli est pars circumferentiæ major, minorve semicirculo. Arcus.

Corollarium.

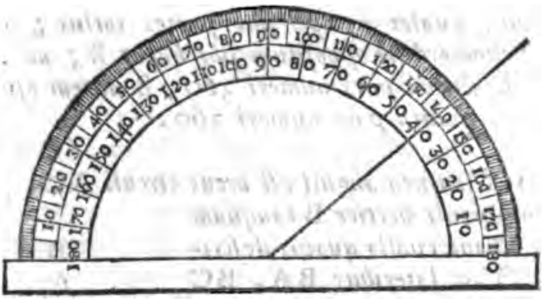
CIrculi æquales sunt, quorum radii sunt æquales.

Scho-

Scholion.

Circumferentiæ divisio.

59. *Circumferentiam Mathematici partiri solent in 360 partes æquales, quas gradus vocant, ob multas illius numeri commoditates, semicircumferentiam in 180, quadrantem in 90; gradum verò quemlibet dividunt in 60 alias partes æquales, quas vocant minuta prima, quorum unumquodque dividitur rursum in 60 alias partes æquales, quas appellant minuta secunda; atque ita porrò, si modò instrumenti magnitudo id patiatur. Ejusmodi divisio in minuta prima, & secunda adhibetur, cùm exactissima angulorum inventio ad usus potissimùm Astronomicos requiritur. Qua verò methodo, quove artificio hæc divisio peragenda sit, alibi trademus.*



60. Cur autem ad circumferentiæ divisionem ex omnibus numeris Mathematici elegerint numeros 360, 90, & 60, causa est, quòd hi numeri plurimas habeant aliquotas, quod in calculo solet esse percommodum. Numerus quippe 360 aliquotas habet 22, ut in adjecto schemmate.

Par-

Partes aliquotæ numeri 360.

2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18,
180, 120, 90, 72, 60, 45, 40, 36, 30, 24, 20.

Partes aliquotæ numeri 90.

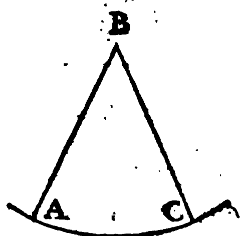
2, 3, 5, 6, 9,
45, 30, 18, 15, 10.

Partes aliquotæ numeri 60.

2, 3, 4, 5, 6,
30, 20, 15, 12, 10.

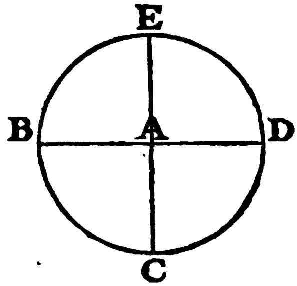
In his seriebus numeri oppositi sese invicem denominant, quales nempe sint partes totius; puta, 45 *in primo ordine oppositum sibi habet* 8; *ac proinde* 45 *est octava pars numeri* 360; 8 *autem est quadragesima quinta pars numeri* 360.

61. *Mensura anguli est arcus circuli* AC, *qui ab ejusdem anguli vertice* B *tanquam centro, & intervallo quovis describitur, & a lateribus* BA, BC *terminatur*. Quare angulus ABC totidem graduum, & minutorum esse dicetur, quot gradus, & minuta continet arcus interceptus AC. Angulorum mensura.



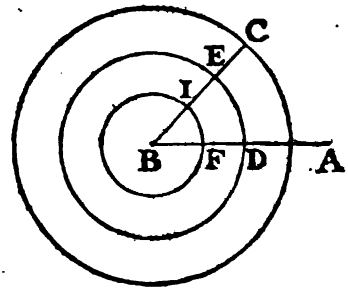
62. *Mensura anguli recti est semper quadrans circuli, nempe graduum* 90. Nam si duæ diametri

tri BD, CE sese ad angulos rectos secent, circumferentiam circuli divident in quatuor partes æquales, quarum quælibet est mensura anguli recti, qui illi respondet. Hinc dici etiam potest semicirculum esse mensuram duorum rectorum.



Corollarium.

63. INtelliges jam multò etiam planiùs, quare angulus non minuatur, neque augeatur, licet crura minuas, vel augeas. Nam, si a vertice B dati anguli CBA tanquam centro describantur intervallo quovis plures circuli; & arcus IF, puta, sit sexta pars suæ circumferentiæ: etiam reliqui ED, CA &c. erunt similiter sexta pars suæ circumferentiæ; adeoque arcus quilibet interceptus erit ejusdem anguli mensura.



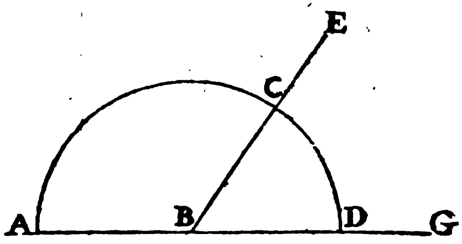
Scholion.

64. A*Tque hinc praxis consequitur examinandi gradus, seu quantitatem dati anguli* EBG *per semicirculum corneum transparentem in* 180 *gradus divisum. Centrum semicirculi pone supra verticem* B *anguli dati, & semicirculi radium* BD *supra anguli*

Angulum metiri.

gul i

guli latus BG. *Arcus* CD *inter anguli crura interceptus ostendet, quot graduum sit datus angulus* EBG.

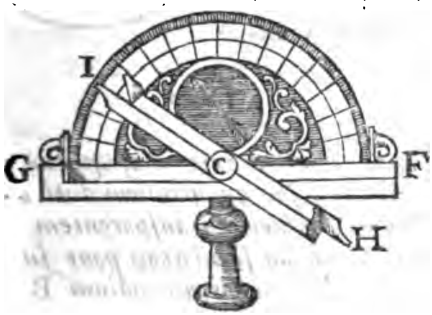


65. *In planitie I. Instrumentum goniometricum ita collocatur, ut radius ejus* CG *uni lateri dati anguli immineat; quod facilè obtinetur, collineando per dioptras* F *&* G, *seu pinnulas immobiles ad diametrum perpendiculariter erectas, versùs bastam in extremitate lateris defixam.*

II. Centrum C *vertici ejusdem anguli immineat, ope perpendiculi ad centrum instrumenti.*

III. Regula HI *circa centrum mobilis, versùs latus anguli alterum promoveatur, donec per dioptras ipsi affixas, basta in extremitate lateris defixa collineanti occurrat.*

IV. Gradus in arcu GI *inter crura anguli* GC, IC *intercepti notantur.*



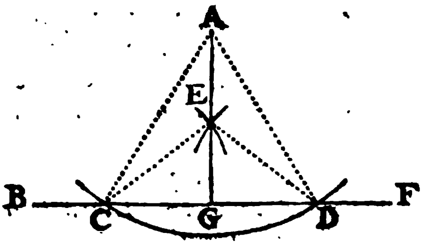
PRO-

PROPOSITIO I.

PROBLEMA.

66. *Ex dato extra rectam indefinitam* BF *puncto* A *perpendicularem ducere*. Euclid. lib. 1. prop. 12.

Constructio. Centro A describe circulum, qui secet datam BF in D & C: centris D & C describe duos alios æquales circulos, sed primo minores, qui se invicem secent in E; ducaturque recta AEG. Hæc erit perpendicularis quæsita.



Demonstratio. Ducantur AC, AD, & rursum EC, ED. Per constructionem rectæ AC, AD sunt æquales; quippe quæ sunt radii ejusdem circuli (n. 56). Similiter EC, ED sunt æquales, nimirum æqualium circulorum radii. Ergo recta AG habet duo puncta A & E æqualiter distantia a punctis C & D. Itaque (n. 54.) recta AG, quæ per hæc duo puncta transit, erit perpendicularis quæsita. Quod erat faciendum.

Scholion I.

67. *Animadvertis, opinor, in omni problemate duo potissimùm esse consideranda: constructionem illius, quod proponitur, & demonstrationem, qua ritè factum ostenditur, quod fieri jubebatur.*

Scho-

Scholion II.

PRobè apponunt Geometræ in problemate hanc particulam, indefinitam; *si enim linea esset finita, non posset semper a puncto extra ipsam dato perpendicularis ad eam deduci. Volunt itaque Geometræ rectam datam esse indefinitam: hoc est, non habere magnitudinem determinatam, ut saltem ad ipsam productam perpendicularis duci possit.*

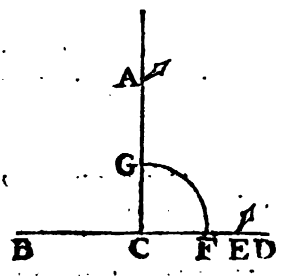
Corollarium.

68. HInc sequitur lineæ perpendicularis terminum, nimirum punctum G æqualiter distare a punctis C & D, & rectam CD bifariam sectam in puncto G perpendicularis incidentis.

69. Praxis. *Applica latus normæ puncto dato* A, *basim verò datæ rectæ. Linea secundùm normæ latus ducta, est perpendicularis quæsita.*

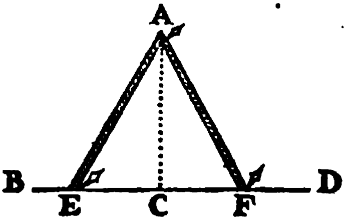
Verùm, quia longitudo normæ, qua in mechanicis utimur, ad summum est pedum trium, quatuorve, idcirco in campo, & planitie aliter quæsitum obtinebitur

Quadrante mensorio. *Fige palos in dato puncto* A, *& puncto aliquo* E *datæ rectæ* BD*: deinde in data recta quære punctum* C, *supra quod constituto quadrantis centro possis per dioptras laterum* CF, CG *intueri palos fixos in* E *&* A. *Recta per* C *ad* A *extensa, est perpendicularis quæsita.*



Aliter

Aliter solo fune. *Funem in dato puncto* A *fixum obliquè ad datam rectam* B D *extende, donec eam tangat extremitate sua in* E: *extende similiter ad partem alteram in* F: *intervallum* E F *seca bifariam in* C: *quod fiet funem ipsi* E F *æqualem complicando conjunctis extremitatibus. Recta per* A *&* C *ducta, est perpendicularis quæsita. Ratio pendet ex Corol. præc.*



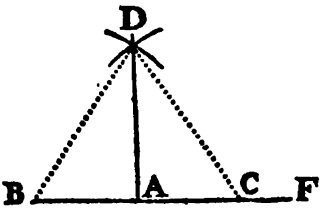
PROPOSITIO II.

PROBLEMA.

70. EX *puncto dato* A *in data recta* B F *perpendicularem excitare.* Euclid. lib. 1. prop. 11.

Constructio. Circino cape æquales A B, A C: centris B & C describe duos æquales circulos se secantes in D. Ex D ad A ducta recta erit perpendicularis quæsita.

Demonstratio. Puncta B & C æquidistant a puncto A; & radius B D æqualis est radio D C per construct. Quare recta D A in neutram partem inclinat; atque hinc perpendicularis est ex def., & n. 54.



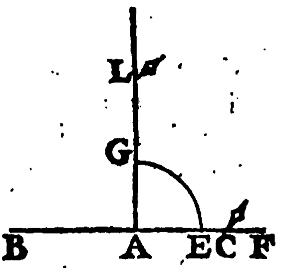
71. Praxis. *Applica normæ basim rectæ datæ,*

sic

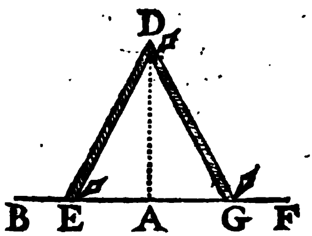
sic ut latus normæ respondeat dato puncto. Funis secundùm latus normæ extensus dabit perpendicularem quæsitam.

In magna distantia non satis tuta est praxis tradita; nam funis a latere tam brevis normæ deviatio, quamvis oculo percipi vix possit, si valde longa perpendicularis quæritur, in fine erit sensibilis, & magna. Quare

Aliter, & certiùs quadrante. *Instrumentum constitue horizonti parallelum, sic ut ejus centrum sit directè supra rectæ datæ* BF *punctum datum* A: *quo ita permanente, unum latus instrumenti* AE *sic verte, ut per ejus dioptras conspicias baculum perpendiculariter humi defixum in datæ rectæ puncto quopiam* C: *quo facto instrumenti latus* AE *respondebit rectæ datæ* BF. *Deinde baculum alterum jube perpendiculariter defigi ex adverso, quanto placuerit intervallo in* L, *sic ut in eum collimans per dioptras lateris* AG *intueri possis. Recta per* A *&* L *extensa, est perpendicularis quæsita.*



Aliter solo fune. *Ad puncti dati* A *partem utramque sume duo æqualia intervalla* AE, AG: *in* E *&* G *fige duos funes æquales justæ longitudinis; eosque supra terram extende, dum se mutuò tangant in* D. *Recta per* D *ad* A *ducta, est perpendicularis quæsita. Ratio patet ex Probl.*



Corollarium.

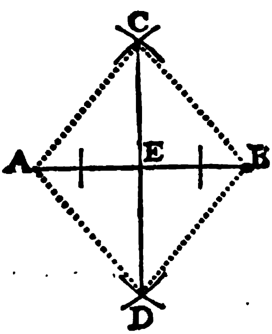
72. SI recta perpendiculariter rectæ insistens infra illam directè producatur, etiam inferius segmentum erit eidem rectæ perpendiculare.

PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

73. D*Atam rectam finitam* AB *bifariam, & perpendiculariter secare.* Euclid. lib. 1. prop. 10.

Constructio. Centris A & B eàdem aperturà circini, sed intervallo majore, quàm sit semissis datæ rectæ AB, describe hinc atque inde duos arcus se se invicem secantes in punctis C & D, per quæ ducatur recta CD. Hæc secabit bifariam, & perpendiculariter rectam AB.



Demonstratio. Quia arcus eodem intervallo descripti sunt per constructionem, puncta C & D æquidistant ab extremitatibus A & B rectæ AB. Ergo omnia puncta rectæ CD ab iisdem æquidistant; & consequenter punctum E bifariam, & perpendiculariter secat rectam AB (n. 54.). Quod erat &c.

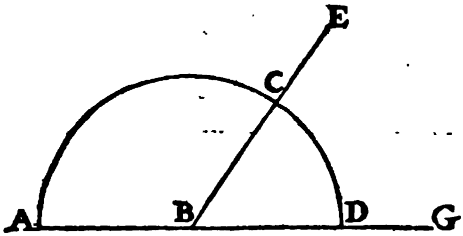
Praxis. *In planitie extremitatibus* A *&* B *datæ longitudinis defige duos clavos, quibus connecte duos funiculos inter se æquales, sed majores semisse datæ*

datæ rectæ AB: *extende hos funiculos, donec hinc atque inde se contingant in punctis* C & D, *ubi clavo aliquo retineantur distenti. Funis a puncto* C *ad* D *ductus secabit bifariam longitudinem datam* AB.

PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

74. *Cum recta linea* EB *super rectam* AG *consistens angulos facit, aut duos rectos efficiet, aut duobus rectis æquales.* Euclid. lib. 1. prop. 13.



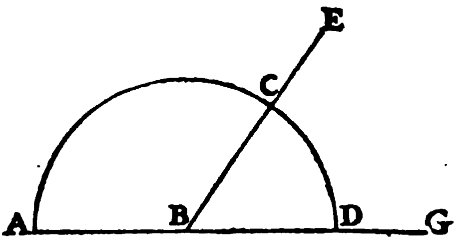
Demonstratio. Si EB fuerit perpendicularis ad rectam AG, perspicuum est (n. 47.) effici duos rectos. Rectarum incidentium occursus.

Si EB non fuerit perpendicularis, faciet unum quidem angulum obtusum, alterum vero acutum. Dico igitur eosdem simul sumptos duobus esse rectis æquales.

Centro B intervallo quovis describatur semicirculus ACD. Arcus AC metitur angulum ABE; & arcus CD metitur angulum EBG. Atqui duo istiusmodi arcus complent semicirculum, qui est mensura duorum rectorum (n. 61). Duo igitur anguli ABE & EBG duobus rectis sunt æquales. Quod erat &c.

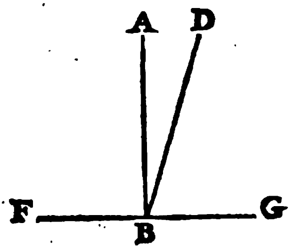
Scholion.

75. *VIdetur hæc propositio, inquit Clavius, pendere ex communi quadam animi notione. Quò enim angulus obtusus superat rectum angulum, eò reliquus angulus acutus superatur ab eodem recto angulo. Quocirca duo anguli* ABC, CBD *duobus rectis æquales esse demonstrantur, siquidem tantum unus eorum supra rectum acquirit, quantum alter deperdit.*



DEFINITIO.

76. *DUo anguli, quos efficit perpendicularis* AB, *vel obliqua* DB, *vocantur anguli deinceps positi, vel consequentes.*



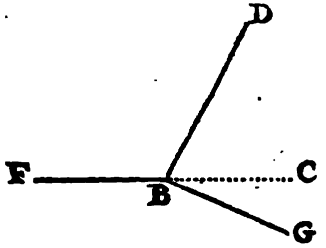
Corollarium I.

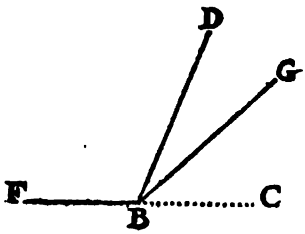
77. DUo quicunque anguli deinceps positi, seu consequentes æquantur duobus aliis quibuslibet deinceps positis. Omnes siquidem valent duos rectos.

Co-

Corollarium II.

78. SI duo anguli DBF, DBG, quorum latus commune DB, & vertex idem punctum B, simul sumpti vel duos rectos excedant, vel ab iisdem deficiant, duæ lineæ FB, BG non efficient unam rectam, sed angulum FBG comprehendent in puncto B. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 14.





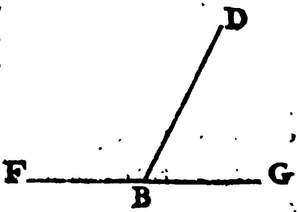
Nam, si linea FBG unam rectam efficeret, duo anguli DBF, DBG simul sumpti duos rectos æquarent, contra hypothesim.

Corollarium III.

79. ITaque, si linea FBG detorqueatur in B, hoc est, angulum efficiat in B, duo anguli DBF, DBG simul sumpti vel a duobus rectis deficient, vel eosdem excedent. Ut patet, productâ lineâ FB in C.

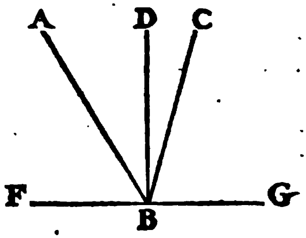
Corollarium IV.

80. SI duo anguli DBF, DBG simul sumpti duobus rectis æquantur, linea FG unam rectam efficiet.



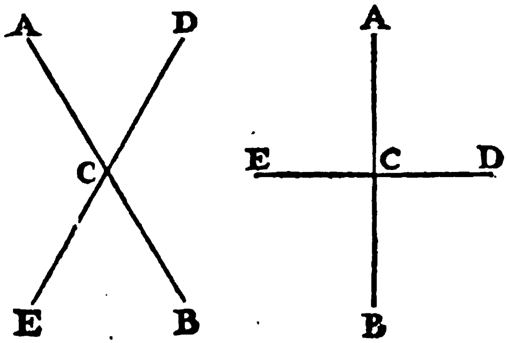
Corollarium V.

81. EOdem modo demonſtrabitur, ſi plures rectæ, quàm una, eidem rectæ ad idem punctum inſiſtant, angulos effici duobus rectis æquales.



Corollarium VI.

82. DUæ rectæ ſe invicem ſecantes efficiunt angulos quatuor rectis æquales.



Corollarium VII.

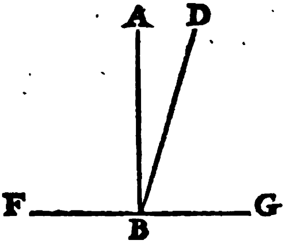
83. OMnes anguli circa unum punctum conſtituti conficiunt quatuor rectos. Sunt enim quatuor recti in plures partes ſecti.

DE-

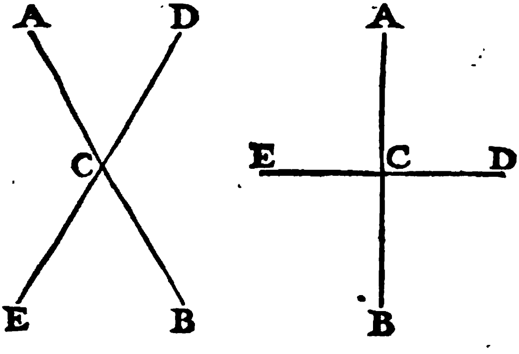
DEFINITIO.

84. *SI duo anguli deinceps positi* DBF, DBG *duos rectos efficiant, eorum quilibet respectu alterius vocatur angulus complementi ad duos rectos.*

Similiter, si duo anguli ABD, DBG *simul sumpti unum rectum efficiant, eorum quilibet respectu alterius vocatur angulus complementi ad unum rectum.*



Si duæ rectæ AB, DE *se invicem secent in puncto* C, *duo anguli* ACD, BCE, *vel alii duo* ACE, BCD *vocantur anguli oppositi ad verticem.*



Corollarium I.

85. ERgo anguli æquales habent complementa æqualia. Et duo anguli erunt æquales, quando uterque vel eſt complementum ejuſdem anguli, vel angulorum æqualium.

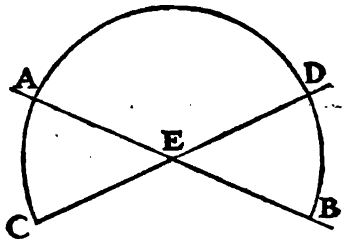
PROPOSITIO V.

THEOREMA.

86. *SI duæ rectæ* AEB, CED *se mutuò secuerint, angulos ad verticem oppositos* AEC, DEB *æquales inter se efficient*. Euclid. lib. 1. prop. 15.

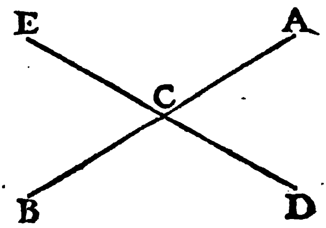
Rectarum se mutuò secantium occursus.

Demonstratio. Centro E describatur arcus circuli CADB. Si a duobus semicirculis CAD & ADB subtrahatur communis arcus AD, erit residuus arcus AC æqualis residuo arcui DB. Itaque anguli ad verticem oppositi AEC, DEB æquales sunt, quos metiuntur arcus æquales.



Simili ratione demonstrabis angulos AED, CEB esse pariter æquales. Quod erat &c.

Aliter. Angulus ACD est complementum anguli ACE ad duos rectos (n. 84.). Atqui angulus BCE est pariter complementum ad duos rectos ejusdem anguli ACE. Ergo anguli ACD, BCE oppositi ad verticem sunt æquales (n. 85.). Eodem modo demonstrabis angulos ACE, BCD esse æquales. Quod erat &c.



Co-

Corollarium.

ERgo, si recta AB est perpendicularis rectæ ED, erit pariter recta ED reciprocè perpendicularis rectæ AB.

PROPOSITIO VI.

THEOREMA.

87. *SI quatuor anguli rectilinei* ACD, ACE, BCD, BCE *ad communem verticem* C *constituti, & in eodem plano descripti, sint ejusmodi, ut anguli ad verticem oppositi æquales fuerint, nimirum,* ACD = BCE, *&* ACE = BCD, *erunt quælibet duæ lineæ adversæ* CD, CE, & CA, CB *in directum sibi, & continuum adjunctæ.*

Demonstratio. Quoniam per hypothesim ACD = BCE, & ACE = BCD, erit

I. ACD + ACE = BCE + BCD. Sed isti quatuor anguli simul sumpti quatuor rectos conficiunt (n. 82. & 83.). Ergo duo ACD + ACE duos rectos conficiunt; & consequenter DE est linea recta (n. 80.).

II. ACD + BCD = BCE + ACE. Sed isti quatuor anguli simul sumpti quatuor rectos efficiunt (n. 82.). Ergo duo ACD + BCD duos rectos; & consequenter AB est pariter linea recta (n. 80.). Quod erat &c.

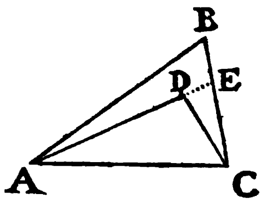
LEMMA.

88. *SI a terminis unius lateris* A *&* C *figuræ rectilineæ* ABC *tribus lateribus comprehensæ, jungantur intra figuram duæ rectæ* AD, CD, *hæ simul sumptæ minores erunt summâ* AB+CB *duorum reliquorum laterum figuræ*. Euclid. lib. I. prop. 21. pars I.

Demonstratio. Producatur AD in E: erit

I. AB+BE>AE (n. 28.); & utrinque adjectâ EC, erit AB+BC>AE+EC (n. 36.).

II. Similiter DE+EC >DC (n. 28.); & utrinque additâ AD, erit AE+EC >AD+DC (n. 36.).



Ergo multò magis AB+BC>AD+DC: hoc est, AD+DC<AB+BC. Quod erat &c.

PROPOSITIO VII.

THEOREMA.

89. *I. SI a quovis puncto* A *ad rectam* FG *perpendicularis ducatur, hæc erit omnium rectarum* AD, AF *&c. brevissima, quæ ab eodem puncto* A *ad eamdem rectam* FG *duci possint*.

Rectarum plurium ab eodem puncto in eamdem rectam occursus.

II. Ex duabus obliquis AD, AF, *longior est* AF, *quæ a perpendiculari* AB *magis recedit*.

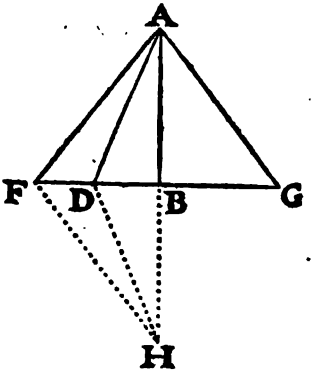
Et vicissim,

I. Si recta AB *sit omnium linearum brevissima, quæ ab eodem puncto* A *ad rectam* FG *duci possint, erit eadem perpendicularis huic rectæ* FG.

II. Ex duabus obliquis AD, AF, *quæ longior est, a perpendiculari* AB *magis recedit*.

De-

Demonstratio. Producatur AB in H hac lege, ut $AB = BH$; ducanturque rectæ DH, FH. Quia AB est perpendicularis super FG, erit eadem FG reciprocè perpendicularis super AB (n. 87.). Rursum, quia per constructionem $AB = BH$, erit FG perpendicularis in medio rectæ AH. Quare punctum quodvis rectæ FG æquidistabit ab extremitatibus rectæ AH (n. 51.).



Erit ergo $AB = BH$ (per constr.)
$AD = DH$ (n. 51.)
$AF = FH$ (n. 51.)

Et consequenter $AB = \frac{AH}{2}$

$$AD = \frac{AD + DH}{2}$$

$$AF = \frac{AF + FH}{2}$$

Atqui $AH < AD + DH$ (n. 28.), & $AD + DH < AF + FH$ (n. 88.). Ergo, si harum quantitatum inæqualiũ sumantur semisses, habebitur $\frac{AH}{2} < \frac{AD + DH}{2}$, & $\frac{AD + DH}{2} < \frac{AF + FH}{2}$: sive $AB < AD$, & $AD < AF$.

Habes ergo, quod I. quærebatur, rectam AB a quovis puncto A perpendiculariter ductam super FG, esse omnium rectarum AD, AF brevissimam.

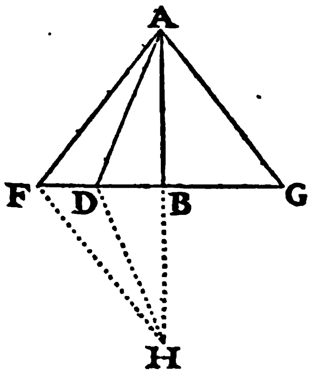
II. Ex duabus obliquis AD, AF inæqualiter a perpendiculari AB recedentibus, longiorem fore illam, quæ magis recedit.

Et

Et reciprocè ab hisce duabus propositionibus consequitur.

I. Rectam AB, si brevissima sit omnium rectarum, quæ a puncto A super FG duci possunt, fore perpendicularem ipsi FG. Nam, uti nuper demonstravimus, si eadem AB non esset perpendicularis, neque esset contra hypothesim omnium linearum, quæ a puncto A super FG duci possunt, brevissima.

II. Consequitur pariter ex duabus obliquis, quæ ab eodem puncto A ad eamdem rectam FG ducuntur, longiorem fore illam, quæ magis recedet a perpendiculari. Nam, si minùs a perpendiculari recederet, non esset contra hypothesim reliquis obliquis longior, uti demonstratum jam est.

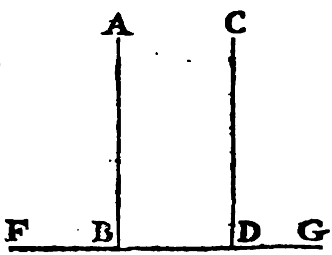


Corollarium I.

90. AB eodem puncto A ad eamdem rectam FG sicuti unica linea omnium brevissima, ita & perpendicularis unica duci potest.

Corollarium II.

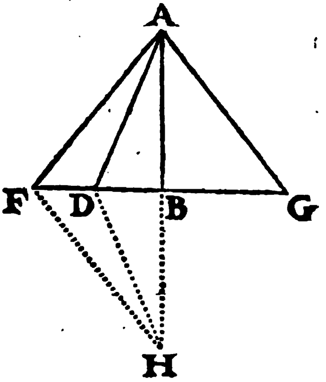
91. DUæ perpendiculares AB, CD ad eamdem rectam FG, quamvis in infinitum producantur, nusquam concurrent. Nam, si in aliquo puncto concurrerent, ab hoc puncto ad eamdem rectam duæ perpendiculares duci possent: quod est absurdum ex Corol. I.



Co-

Corollarium III.

92. ITaque, si duæ obliquæ æquales AF, AG ab eodem puncto A ad eamdem rectam FG ducuntur, erunt illæ æqualiter distantes a perpendiculari AB. Et reciprocè, si illæ sint æqualiter distantes a perpendiculari, erunt æquales.



Corollarium IV.

93. EX prima parte Corol. præced. consequitur, quòd, si duæ rectæ æquales AF, AG ab eodem puncto A ad eamdem rectam FG ducantur, ambæ erunt obliquæ eidem rectæ FG. Perpendicularis autem AB cadet inter easdem in medio rectæ FG, quæ bifariam a perpendiculari secabitur.

Corollarium V.

94. QUamobrem ab eodem puncto A ad eamdem rectam FG tres lineæ rectæ æquales duci minimè possunt. Nam ad eamdem partem ejusdem perpendicularis AB duas rectas æquales ducere oporteret: quod est absurdum.

Similiter tria puncta ejusdem lineæ rectæ FG non

non poſſunt æqualiter diſtare ab eodem puncto A. Et quemadmodum ex def. n. 56. omnia puncta ejuſdem circumferentiæ æquidiſtant ab eodem puncto, quod dicitur centrum; ita perſpicuum eſt tria puncta ejuſdem rectæ lineæ ad eamdem circumferentiam minimè poſſe pertinere. Itaque recta linea, & circuli circumferentia in tribus punctis non poſſunt concurrere.

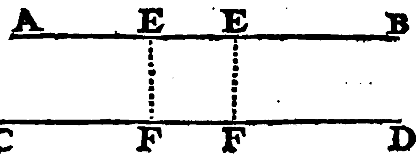
ELEMENTUM II.

De variis Rectarum Linearum nunquam concurrentium affectionibus.

PARALLELARUM theoria independenter a triangulis planiore methodo demonstrata, quanti momenti futura sit in universa Geometria, usu ipso intelligent Tirones.

DEFINITIONES.

95. *Rectæ lineæ* AB, CD, *parallelæ, seu æquidistantes sunt, quæ utrinque in infinitum* Parallelæ.
protractæ æqualibus semper intervallis inter se distant.



Æqualia autem intervalla desumuntur penes perpendiculares EF, EF.

Generantur parallelæ, si recta EF ad rectam CD perpendicularis, per CD semper perpendiculariter moveatur. Tunc enim ejus extremum E describit parallelam AB.

Scholion I.

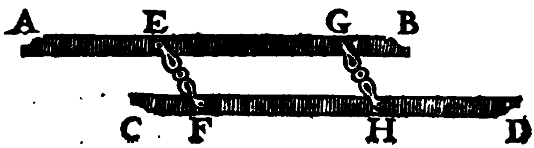
96. *Ratio verò cur Geometræ intervalla, altitudines, omnia denique metiantur linea perpendiculari, ea est, quia mensura alicujus rei debet esse*

esse stata, & determinata, & non indefinita; inter cunctas autem lineas rectas, penes quas sumitur omnis mensura, sola linea perpendicularis est certæ, determinatæque longitudinis, aliæ verò omnes indeterminatæ, modò breviores, modò longiores, quæque sexcentis modis variari possunt.

Scholion II.

Parallelismus.

97. *Est & aliud instrumenti genus, quo in ducendis juxta varias positiones in charta parallelis interdum utimur, & Parallelismum vocamus, ex duabus regulis* AB, CD *compositum, quæ ejusdem ubique latitudinis, retinaculis uniformibus ita conjunguntur, ut retinacula intervallis æqualibus* EG, FH *a se invicem distent; ipsæ autem regulæ variis intervallis diduci queant.*



Corollarium I.

98. Perpendiculares omnes inter rectas parallelas comprehensæ, sunt inter se æquales.

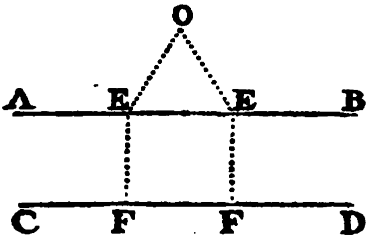
Corollarium II.

99. Recta, quæ uni parallelarum perpendicularis est, erit pariter perpendicularis alteri parallelæ.

Co-

Corollarium III.

100. PErpendiculares omnes inter duas parallelas comprehensæ, sunt pariter inter se parallelæ. Nam, si duæ rectæ EF, EF perpendiculares eidem rectæ CD non sunt inter se parallelæ, productæ concurrent in aliquo puncto O; itaque ab eodem puncto O duæ perpendiculares duci poterunt ad eamdem rectam CD; quod est absurdum (n. 90.).



Corollarium IV.

101. PArallelarum partes EE, FF a perpendicularibus EF, EF interceptæ, sunt inter se æquales. Nam rectæ EE, FF perpendiculares sunt super lineas EF, EF, quæ per Corol. præced. sunt parallelæ; & consequenter EE, FF sunt æquales inter se (n. 98.).

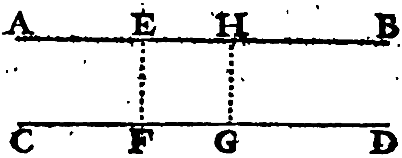
Corollarium V.

102. A Puncto extra rectam lineam dato unica eidem parallela duci potest. Nam alia quæcunque vel ad eamdem converget, vel ab eadem diverget.

PROPOSITIO I.

PROBLEMA.

103. **D***ato extra rectam* CD *puncto* E *parallelam ducere*. Euclid. lib. 1. prop. 31.



Constructio, A puncto E demittatur EF perpendicularis rectæ CD: in qua sumatur quodvis aliud punctum G, a quo excitetur perpendicularis GH (n. 70.): fiat GH æqualis EF; & a puncto dato E per H ducatur recta EH. Dico factum.

Parallelam ducere.

Demonstratio. Constat ex constructione, & n. 95.

Aliter. Ex dato puncto E duc EF perpendicularem ad CD: ad EF deinde ex dato puncto E excita perpendicularem EB (n. 70.). Hæc est parallela quæsita (n. 91.). Quod erat &c.

Scholion.

IN planitie funibus, & bastis obtinebitur, quod in charta circino, & regula.

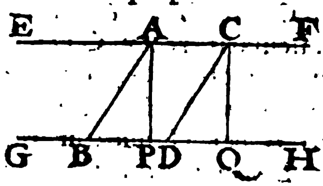
PRO-

PROPOSITIO II.

PROBLEMA.

104. *DAtà rectâ AB obliquè incidente inter duas parallelas EF, GH, ducere ab alio quovis puncto C sumpto in linea EF obliquam alteram æqualiter inter duas parallelas inclinatam.*

Constructio. Ab extremitate A, ubi recta AB obliquè incidens secat parallelam EF, demittatur perpendicularis AP super parallelam GH; & similiter a puncto dato C demittatur perpendicularis altera CQ; tum circino intervallum BP transferatur a Q in D: a quo ducta recta DC erit æqualiter inclinata. Æqualiter inclinatæ.



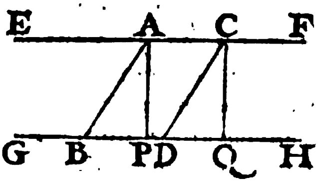
Demonstratio. Perpendiculares AP, CQ inter duas parallelas sunt æquales (n. 98.): distantiæ pariter BP, DQ sunt per constructionem æquales. Quare, si intelligamus figuram CDQ figuræ ABP superponi, rectæ CQ, QD perfectè congruent sibi æqualibus rectis AP, PB, sic ut duo puncta C & D cadant supra duo puncta A & B, adeoque (n. 22.) recta CD supra rectam AB; atque hinc CD, AB erunt æqualiter inclinatæ. Quod erat &c.

Corollarium I.

105. REctæ AB, CD æqualiter inclinatæ inter duas parallelas, sunt æquales.

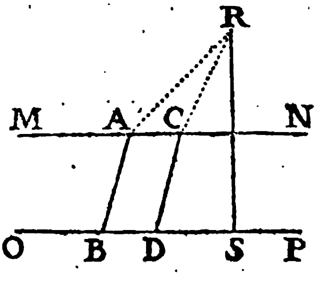
Corollarium II.

106. PArtes AC, BD ex iisdem parallelis comprehensæ inter duas æqualiter inclinatas AB, CD, sunt pariter inter se æquales. Nam partes AC, PQ a perpendicularibus interceptæ, sunt æquales (n. 101.): distantiæ BP, DQ sunt pariter æquales per constructionem. Ergo, si a PQ auferatur DQ, & eidem PQ adjiciatur BP æqualis ipsi DQ, recta BD fiet æqualis rectæ PQ, & consequenter rectæ AC.



Corollarium III.

107. REctæ AB, CD æqualiter inclinatæ inter duas parallelas MN, OP, sunt inter se parallelæ. Si enim non essent parallelæ, necessariò concurrerent in aliquo puncto, puta, R: a quo demissa perpendiculari RS super parallelam OP, obliqua RB remotior esset ab eadem perpendiculari, quàm obliqua RD; ergo illa magis esset inclinata, contra suppositionem.



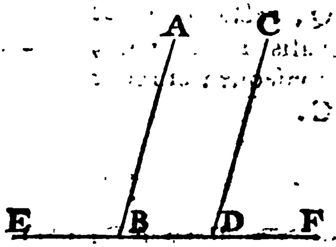
PRO-

PROPOSITIO III.

THEOREMA.

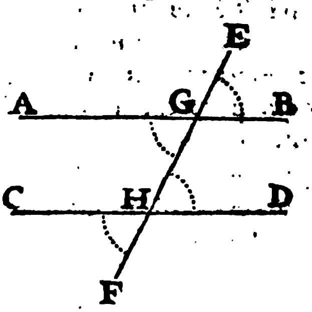
108. *SI duæ rectæ parallelæ* AB, CD *in tertiam* EF *incidant, efficient angulos* ABF, CDF *ad eamdem partem constitutos æquales.*

Demonstratio. Cum enim anguli quantitas nihil sit aliud, quàm linearum inclinatio, unius in alteram (n. 41.), æqualitas harum inclinationum erit æqualitas angulorum. Duæ autem rectæ AB, CD non poterunt esse invicem parallelæ, quin sint æquè pariter inclinatæ super lineam EF. Perspicuum itaque est angulum ABF æquari angulo CDF. Quod erat &c.



DEFINITIO.

109. *INcidente recta* EF *in duas parallelas* AB, CD, *duo anguli* BGH, DHG *dicuntur interni ad easdem partes, sicuti etiam duo* AGH, CHG. *Duo anguli* AGH, DHG *vocantur alterni. Angulus* EGB *dicitur externus; at verò internus ad easdem partes angulus* GHD.



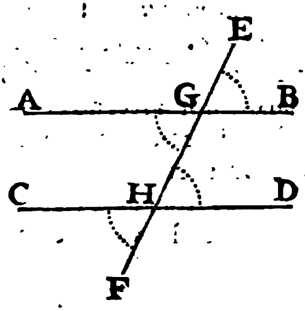
PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

Alterni anguli æquales.

110. *Si duas rectas* AB, CD *parallelas secuerit recta* EF, *erunt æquales alterni anguli* AGH *&* GHD. Euclid. lib. 1. prop. 27. pars 1.

Demonstratio. Per præced. anguli AGH & CHF ad eamdem partem constituti, sunt æquales. Atqui (n. 86.) angulus CHF æquatur angulo GHD opposito ad verticem. Itaque anguli alterni AGH & GHD æquales sunt. Quod erat &c.



Corollarium.

Parallelam ducere.

Praxis. *Ex hoc theoremate consequitur resolutio problematis, quo jubemur per datum punctum* G *parallelam ducere ad datam rectam* CD. *Ex* G *ducatur utcunque* GF *secans datam* CD *in puncto* H: *ad punctum* G *fiat angulus* AGH *par angulo alterno* DHG: *erit* AB *parallela ad datam rectam* CD.

PRO-

PROPOSITIO VI

THEOREMA.

111. *SI recta* EF *in duas rectas parallelas* AB, CD *inciderit, angulus externus* EGB *interno* EHD *ad eandem partem æqualis erit*. Euclid. lib. 1. prop. 27. pars 2. Externus interno æqualis.

Demonstratio. Patet ex Prop. 3.

Aliter. Angulus EGB æquatur opposito ad verticem AGH (n. 86.). Atqui angulus AGH æquatur sibi alterno EHD. Ergo angulus externus EGB æquatur interno ad easdem partes EHD. Quod erat &c.

PROPOSITIO VI.

THEOREMA.

112. *RECta* EF *incidens in duas rectas parallelas* AB, CD, *angulos ad easdem partes internos, nimirum*, AGH, CHG *duobus rectis æquales efficit*. Euclid. lib. 1. prop. 27. pars 3.

Demonstratio. Angulus AGH plus angulo BGH æquatur duobus rectis (n. 74.). Atqui per præced. angulus BGH æquatur sibi alterno CHG. Ergo angulus AGH plus angulo CHG æquatur duobus rectis. Eodem modo duos angulos BGH, DHG ad easdem partes internos, duobus rectis æquales esse demonstrabis. Quod erat &c. Anguli ad easdem partes interni.

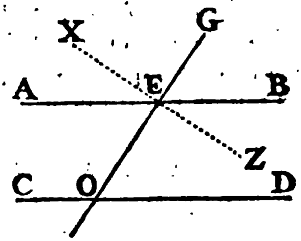
PROPOSITIO VII.

THEOREMA.

113. *Si duas rectas* AB, CD *secans recta* GO *alternos angulos* AEO, EOD *æquales fecerit, erunt* AB, CD *parallelæ*. Euclid. lib. 1. prop. 28.

Parallelarum indicium.

Demonstratio. Si negas, sit ergo alia XEZ per punctum E ad CD parallela. Ergo (110) angulus XEO par est alterno EOD; quod fieri non potest, cum per hypothesim AEO par sit eidem EOD. Quod erat &c.



PROPOSITIO VIII.

THEOREMA.

114. *Si duas rectas* AB, CD *secans recta* GO *fecerit externum angulum* GEB *æqualem opposito interno* GOD, *erunt* AB, CD *parallelæ*. Euclid. lib. 1. prop. 29. pars 1.

Demonstratio. Angulus GEB æquatur (n. 86.) angulo AEO opposito ad verticem. Atqui per hypothesim GEB æquatur GOD. Ergo etiam AEO æquatur sibi alterno EOD. Ergo per præced. AB, CD sunt parallelæ. Quod erat &c.

PRO-

PROPOSITIO IX.

THEOREMA.

115. SI duas rectas AB, CD secans recta GO fecerit duos ad easdem partes internos angulos AEO, EOC pares duobus rectis, erunt AB, CD parallelæ. Euclid. lib. 1. prop. 29. pars 2.

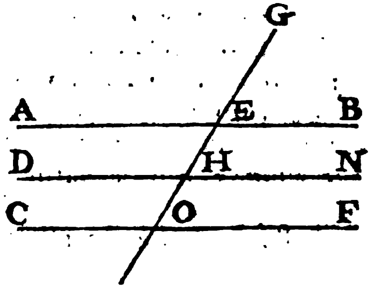
Demonstratio. Angulus COE cum DOE facit duos rectos. Sed per hypothesim idem COE cum AEO facit duos rectos. Ergo AEO, DOE alterni sunt æquales. Ergo (n. 113.) rursum AB, CD sunt parallelæ. Quod erat &c.

PROPOSITIO X.

THEOREMA.

116. SI duæ rectæ AB, CF sint parallelæ ad eandem rectam DN, erunt inter se parallelæ. Euclid. lib. 1. prop. 30.

Demonstratio. Patet per se, & ex præcedentibus. Nam, si omnes secentur rectà GO, erit (n. 111.) angulus externus GEB par interno EHN. Est verò EHN externus respectu HOF, ac proinde æqualis. Ergo etiam GEB par est EOF; ac proinde (n. 114.) AB, CF sunt inter se parallelæ. Quod erat &c.



PRA-

PRAXIS GEOMETRICA

LIBELLATIONIS.

Libellatio. PARALLELARUM, seu æquidistantium linearum theoria artificium aperit, quo ars librandi instituitur, seu ars libellandi, ut alii vocant: cujus scopus est inquirere an duo, vel plura puncta lineæ in terræ superficie existentis sint æque alta, & quantus sit excessus unius altitudinis supra alteram. Hoc artificio inæquales altitudines ad æqualitatem reducimus; & potissimùm ex altiore loco aquas in depressiorem deducimus tanta velocitate, quanta opus est. Quare, ut in hisce nostris Elementis Tirones discant theoriam praxi conjungere, pauca quædam de libellatione hoc loco attingam.

DEFINITIONES.

Libellæ puncta. 117. *DUo puncta, quæ a centro terræ æquidistent, vocantur libellæ puncta.*

Linea veræ libellæ. *Linea, cujus omnia puncta æquidistent a centro terræ, appellatur linea veræ libellæ, quæ idcirco curva esse debet.*

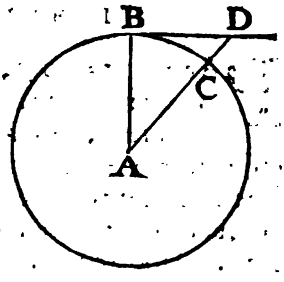
Scholion.

CUm partes omnes fluvidorum quiescentium eamdem a centro telluris distantiam habeant, alioqui remotiores vi gravitatis ruerent versus locum depressiorem: hinc stagnantes superficies lacuum sunt ad veram libellam constitutæ.

Linea libellæ apparentis. 118. *Linea libellæ apparentis est recta* BD *tangens terræ circulum, & consequenter perpendicularis semidiametro* AB.

Hæc

Hæc linea dicitur libellæ apparentis, quia puncta extrema B & D non æquidistant a centro terræ. Omnis itaque linea horizonti parallela, quæ producta a superficie terræ divergit, quemadmodum tangens producta recedit a circumferentia circuli, vocatur linea libellæ apparentis.



Recta C D *intercepta a tangente, & circulo, est differentia libellæ apparentis a vera.* Differentia libellæ apparentis a vera.

Scholion.

Quando linea libellæ apparentis protenditur ad 100, *vel* 150 *exapedas, hæc differentia contemni potest. Quod si hanc longitudinem excedat, habenda erit hujus differentiæ ratio, ut alibi in Trigonometria demonstrabitur.*

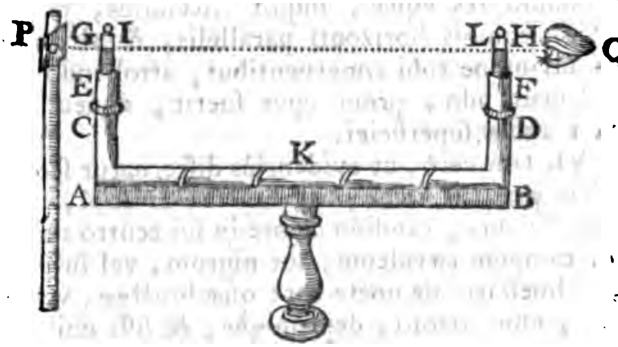
Corollarium.

129. Hinc pavimenta plano horizontali exæquari solita a cæmentariis libellatione composita, componuntur quoque ex pluribus superficiebus planis polygonam superficiem constituentibus. Nam hoc ipso quòd libellatio composita sit ex pluribus applicationibus regulæ, cui superponitur libella cum perpendiculo tendente ad centrum terræ, necesse est pavimenti superficiem constare ex tot planis superficiebus, quot sunt regulæ collocationes diversæ. Nam perpendicula extra eamdem rectam lineam posita non sunt in rigore geometrico parallela, sed convergunt in centrum terræ; & consequenter planæ illæ superficies rectos angulos cum suis quæque perpendiculis efficientes, inclinantur ad invi-

invicem, neque constituunt unicam planam superficiem, sed compositam ex pluribus.

Instrumentum libellandi.

120. Libella est instrumentum, quo invenitur linea horizontalis, & ad datum quodcunque intervallum continuatur. Quamvis autem plura libellarum genera a Viris celeberrimis Philippo de la Hire, Roemero, Hugenio, Picardo, aliisque excogitata sint: tamen omnium commodissimum in praxi videtur illud, quod proprià experientià fretus commendat P. Ricciolius Geograph. reform. lib. *6*. cap. *16*., & passim nostra hac ætate a Recentioribus usurpatur.



I. Super regula AB pedum 12, aut ad summum 20 canaliculo excavato inseratur tubus metallicus CD ex bracteis ferreis, stanno contra rubiginem oblitis, conflatus, cruribus CA, BD ad angulos rectos reclinatis.

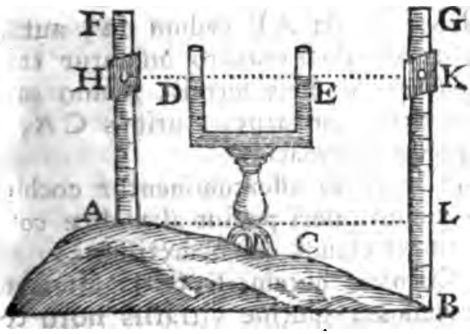
II. In C & D afferruminentur cochleæ orichalceæ, quibus inseri possint aliæ duæ cochleæ E & F, & tubus claudi quàm arctissimè.

III. Cochleis autem E & F inserantur, & peculiari quodam glutine vitrariis noto conferruminenminentur crystallini duo tubi G & H pellucidi, & ad AB normales; orificia verò tuborum E & F obturentur, ne aqua effluere possit.

IV. Medium autem regulæ K superpositum sit suo fulcro sic, ut liberè huc illucque libella moveri possit, & in situ eodem, si necesse sit, immota servari.

V. His peractis, si tubus aqua impleatur, & oculus O per utriusque aquæ superficiem in scopum P collimet, erit OLIP linea parallela horizonti; quia aquarum summitates I & L consistentes distant æqualiter a centro terræ. Si aqua fuerit colorata, distinctiùs internoscentur ejus summitates. At, qui nondum fuerit assuetus collineationi per summitates aquæ, inquit Ricciolius, poterit uti setis equinis horizonti parallelis, & altitudini aquæ utriusque tubi congruentibus, attollendo eas, aut deprimendo, prout opus fuerit, donec congruant aquæ superficiei.

VI. Jam verò, ut evidentiùs discernatur scopus, perticis præaltis inseruntur bracteæ H & K, ut in sequenti figura, candido colore in sui centro notatæ intra campum cæruleum, aut nigrum, vel lucernulæ, si libellatio de nocte fiat: quæ bracteæ, vel lucernæ possint attolli, deprimique, & sisti ubilibet.

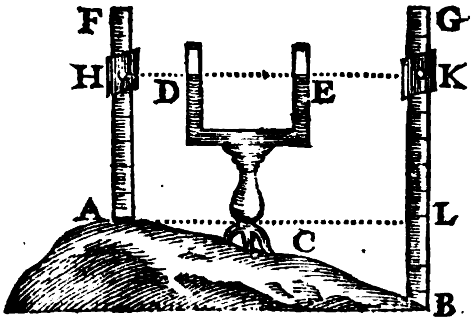


Exem-

Exemplum I.

121. ESto ſolum ACB. Oporteat metiri an A ſit altius quàm B, & quantò.

Libellatio ſimplex.



I. Præparentur duo haſtilia AF, BG, plurium pedum, puta, 8, aut 10, & amplius: pedes dividantur in uncias duodenas, & unciæ in duodena puncta, juxta uſitatam in noſtris regionibus diviſionem: haſtilibus inſerantur bracteæ H & K jam deſcriptæ.

II. His paratis, & libellà inter duos terminos A & B collocatà, librator admoveat oculum ad E ſuperficiem aquæ, jubeatque geſtatorem haſtilis AF perpendiculariter defixi in A, attollere, aut deprimere bracteam H, donec radius viſivus per ſummitates, ſeu extrema aquæ E & D tranſmiſſus incidat opticè in meditullium ſcopi candidi H: quo facto numerentur pedes, unciæ, & puncta intercepta inter terminum A, & centrum ſcopi H.

III. Transferat deinde librator oculum in D, & eodem modo collineet in ſcopum K.

IV. Subtrahatur altitudo AH ab altitudine BK: differentia BL dabit declivitatem termini A ſuprà terminum B.

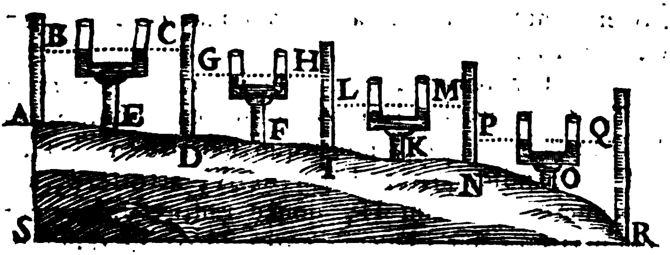
Scho-

Scholion.

INtervalla inter libellam, & scopos, quantò breviora sumuntur, minoris erroris periculum erit. P. Ricciolius putat justum intervallum inter libellam, & hastile esse passuum inter 50, & 100.

Exemplum II.

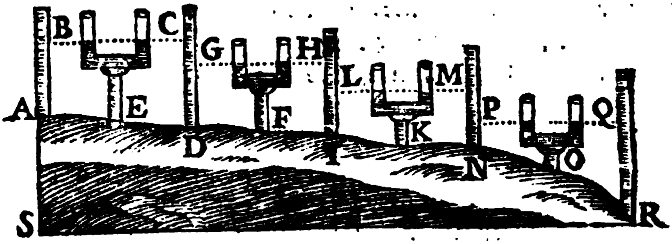
122. SIt invenienda altitudo puncti A supra punctum R. Facta autem prima libellæ collocatione in E, observatisque scopis B & C, notentur in Scheda, cui titulus sit Sinistra Columna, partes intervalli AB, quæ sint, puta, pedes 2, unciæ 3, puncta 5; & sub altera Dextra Columna notentur partes intervalli CD, quæ sint pedes 4, unciæ 2, puncta 3. Libellatio composita, in qua semper ascenditur.



Fiat deinde statio secunda in F, manente interim hasta in D; & ita ferente situ observentur puncta G & H; noteriturque in sinistra partes intervalli GD, quæ sint pedes 2, unciæ 10, puncta 6, & in dextra partes HI, quæ sint pedes 9, unciæ 2, puncta 7.

Ma-

Manente verò hasta supra I, fiat tertia statio libellæ in K; observatisque punctis L & M, notentur sub sinistra partes I L, nimirum, pedes 4, unciæ 3, puncta 8; & sub dextra partes MN, nempe, pedes 10, unciæ 3, puncta 2.



Tandem manente hasta supra N, fiat quarta statio in O; & observatis punctis P & Q, notentur sub sinistra partes P N, & sub dextra partes Q R, ut in apposita tabella. Quare summa partium sinistrarum subtracta a summa dextrarum exhibebit totam altitudinem A S pedum 24, unciarum 3, punctorum 1, qua punctum A altius est puncto R, ut vides.

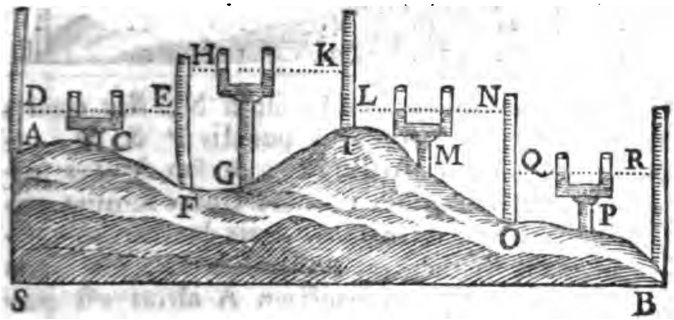
	Sinistra.			Dextra.		
Stationes	Pedes	Unciæ	Puncta	Pedes	Unciæ	Puncta
1.	2.	3.	5.	4.	2.	3.
2.	2.	10.	6.	9.	2.	7.
3.	4.	3.	8.	10.	3.	2.
4.	4.	5.	9.	14.	6.	5.
Summa	13.	11.	4.	38.	2.	5.
			Subtrahe	13.	11.	4.
			Altitudo	24.	3.	1.

Exem-

Exemplum III.

123. Sit punctum A; quæraturque an sit altius puncto B. Prima statio sit in C: in qua observatis scopi utriusque centris D & E, notentur sub sinistra partes AD, quas fingamus esse pedum 4, unciarum 3, punctorum 2, & sub dextra partes EF, quæ sint pedes 7, unciæ 1, puncta 4.

Libellatio composita, in qua quandoque ascenditur, quandoque descenditur.



Secunda statio sit in G; notenturque partes sinistræ HF, & dextræ KI.

Similiter tertia statio sit in M, & quarta in P; & eadem methodo notentur partes sinistræ, & dextræ, ut in adjuncta tabella.

His peractis, redigantur in unam summam numeri partis sinistræ seorsim, & seorsim numeri partis dextræ. Nam, si summæ fuerint utrinque æquales, puncta A & B erunt æquè alta; sin autem fuerint inæquales, summa minor punctum altius, & major punctum depressius ostendet; & subtrahendo minorem, differentia erit quantitas pedum, unciarum, &c., quibus unum altero altius est. Nam quotcunque fuerint diversitates ascendendi, & descendendi, computatio altitudinis quæsitæ obtinetur, si summa numerorum sinistræ comparetur cum summa numerorum dextræ, & minor a majore subtrahatur.

	Sinistra.			Dextra.		
Stationes	Pedes	Unciæ	Puncta	Pedes	Unciæ	Puncta
1.	4.	3.	2.	7.	1.	4.
2.	10.	3.	5.	3.	3.	7.
3.	2.	9.	4.	12.	1.	6.
4.	3.	10.	9.	11.	9.	10.
Summa	21.	2.	8.	34.	4.	3.
			Subtrahe	21.	2.	8.
			Altitudo	13.	1.	7.

Scholion.

IN libellationibus præsertim longioribus alii dioptras adhibent, ut certiùs colliment, alii dioptrarum loco telescopia.

ELE-

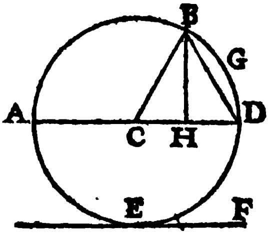
ELEMENTUM III.

De Lineis Circularibus, earumque mutuò inter se, & cum Lineis Rectis occursu.

SUPERIORIBUS Elementis, postquam rectarum linearum invicem concurrentium, & earum etiam, quæ nunquam concurrunt, symptomata persecuti fuimus, ordo rerum postulat, ut hæc eadem consideratio ad lineas circulares traducatur.

DEFINITIONES.

124. PLanam superficiem comprehensam circuitu unius lineæ ABGDE, cujus omnia puncta æqualiter distent ab eodem puncto C ejusdem plani, diximus n. 56. vocari circulum, punctum C centrum, lineam ABGDE circumferentiam, quamlibet portionem circumferentiæ arcum, & lineam quamvis rectam a centro ad circumferentiam ductam radium nominari. Hisce definitionibus sequentes addendæ sunt.

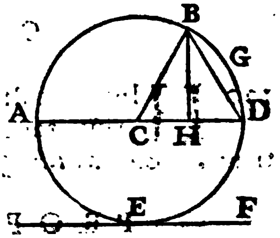


125. *Omnis recta linea, puta, BD, cujus duæ extremitates B & D in circumferentiam desinunt, dici solet Chorda, quæ, si per centrum transit, uti AD, vocatur etiam Diameter, & duobus radiis æquatur.* Atque hinc omnes diametri ejusdem circuli sunt æquales. Chorda. Diameter.

126. *Si recta* EF *ita circulum tangat in* E, *ut producta ad* F, *nulla ratione circulum secet, sed tota jaceat extra ipsum, dicetur recta* EF *Tangens circuli.* Tangens.

Segmentum. 127. *Segmentum circuli est figura, quæ sub arcu* BGD, *ejusque chorda* BD *comprehenditur.*

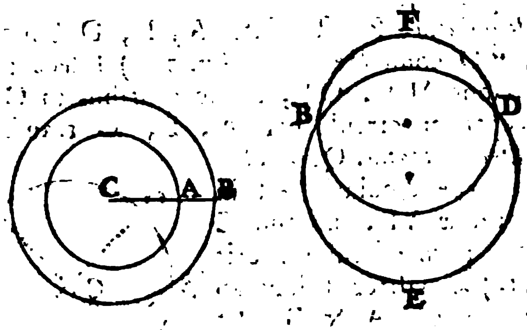
Spatium, seu figura comprehensa ab arcu AB, *& duobus radiis* CA, CB, *nominatur Sector circuli.* Sector.



128. *Si a quovis circumferentiæ puncto* B *ad diametrum* AD *ducatur perpendicularis* BH, *hæc dicitur Ordinata circuli respectu diametri* AD; *& partes* AH, HD *diametri, vocantur Abscissæ ordinatæ* BH. Ordinata. Abscissæ.

Omnis recta, quæ circulum secat, generatim dicitur Secans. Secans.

Circuli Concentrici, Excentrici. *Circuli Concentrici sunt, qui idem centrum habent: Excentrici, qui centra habent diversa.*



Ci-

Corollarium I.

129. DUæ circumferentiæ concentricæ, quarum radii sint æquales, in unicam commiscentur; quarum autem radii sunt inæquales, nusquam concurrunt.

Corollarium II.

130. HInc circuli se mutuò secantes, aut interius tangentes non habent idem centrum. *Euclid. lib. 3. prop. 5. & 6.*

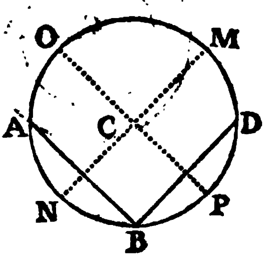
PROPOSITIO I.

PROBLEMA.

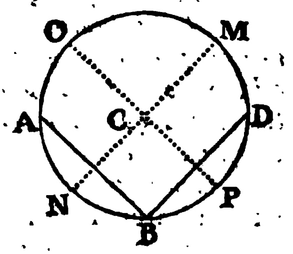
131. P*Er data tria puncta non in directum jacentia* A, B, D *circulum describere*. Euclid. lib. 4. prop. 5.

Resolutio. Puncta data A, B, D binis rectis AB, BD connecte, quas (n. 73.) biseca perpendicularibus MN, OP, concurrentibus in C. Hoc erit centrum circuli per A, B, D transeuntis. Circuli descriptio per tria puncta.

Demonstratio. Quia recta MN perpendicularis est in medio rectæ AB, punctum C ejusdem perpendicularis erit (n. 51.) æqualiter distans ab extremitatibus A & B. Et rursum, quia OP perpendicularis est in medio rectæ BD, punctum pariter C erit



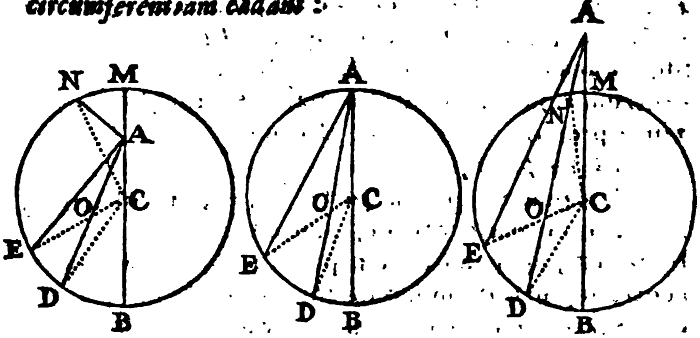
æqualiter distans a punctis B & D (n. 51.). Itaque punctum C æquidistat a tribus punctis A, B, D, & consequenter (n. 56.) erit centrum circumferentiæ transeuntis per tria data puncta A, B, D. Quod erat &c.



PROPOSITIO II.

THEOREMA.

132. *SI extra circulum, vel in ipsa circumferentia circuli, vel in circulo quodvis aliud a centro* C *accipiatur punctum* A, *ex quo rectæ plures in circumferentiam cadant:*



Linearum ab eodē puncto, quod non sit centrum, in cavam peripheriam cadentium proprietas.

I. Maxima erit AB, *quæ per centrum transit.*

II. Aliarum AE, AD *major est illa* AD, *cujus extremitas* D *est propior extremitati* B *maximæ* AB.

Et reciproce,

I. Si recta AB *a quovis puncto* A, *quod non sit centrum, ducta ad circumferentiam, sit omnium recta-*

rum

nes maxima, quæ ab eodem puncto A ad circumferentiam duci possint, recta AB transibit per centrum.

II. Si duarum rectarum inæqualium AD, AE neutra per centrum transeat, rectæ AD, quæ major est, extremitas D propior erit extremitati B ejus rectæ AB, quæ per centrum transit. Euclid. lib. 3. prop. 7. & 8.

Demonstratio. Ducantur radii CD, CE ad extremitates rectarum AD, AE, quæ per centrum non transeunt: erit

I. CB = CD; additàque utrinque communi AC, fiet AB = AC + CD. Atqui (n. 28.) AC + CD > AD. Ergo AB > AD. Eodem modo demonstrabitur AB > AE. Quare maxima erit AB, quæ per centrum transit. Quod erat primum.

II. CD = CE. Atqui (n. 28.) CO + OD > CE. Ergo CO + OD > CE. Aufer OC ex utroque membro: residuum OD > OE. Adde AO utrinque: fiet AO + OD, seu AD, > AO + OE. Sed AO + OE > AE (n. 28.). Ergo multò magis AD > AE. Quare rectarum per centrum non transeuntium major est illa, quæ maximæ propior. Quod erat alterum.

Et reciprocè,

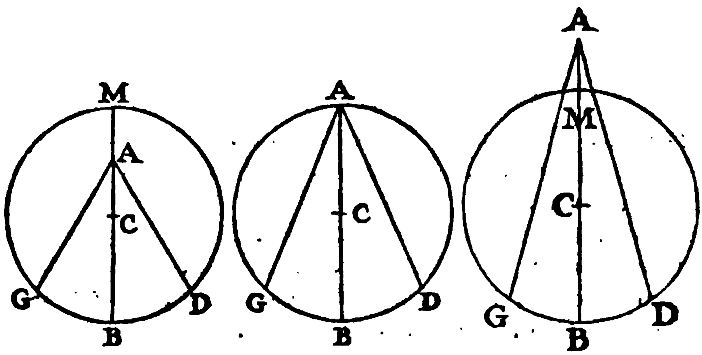
I. Quia ex prima parte hujus, recta, quæ non transit per centrum, non est omnium maxima linearum, quæ ab eodem puncto A, quod non est centrum, in circumferentiam cadunt: perspicuum est rectam AB per centrum transire, si omnium maxima sit. Quod erat tertium.

II. Si duarum rectarum inæqualium AD, AE, quæ major est AD, non esset maximæ propior, per primam partem hujus minor esset, contra hypothesim. Quæ omnia erant demonstranda.

Corollarium I.

133. SI duæ rectæ AD, AG ab eodem puncto A, quod non sit centrum, ad circumferentiam ductæ, sint æquales, earum extremitates D, G erunt æqualiter dissitæ ab extremitate B rectæ AB transeuntis per centrum: hoc est, arcus BD, BG erunt æquales.

Et reciprocè, si sint æquidistantes, erunt æquales.



Corollarium II.

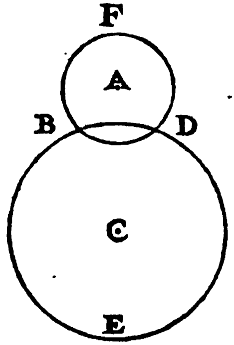
Centri proprietas.

134. FIeri ergo non potest, ut ab eodem puncto A, quod non sit centrum, ad circumferentiam tres rectæ æquales duci possint: hoc est, ut tria puncta ejusdem circumferentiæ æquidistent ab eodem puncto A, quod non est centrum. *Euclid. lib.* 3. *prop.* 8. & 9.

Si-

Similiter tria puncta ejusdem circumferentiæ, cujus centrum C, pertinere non possunt ad aliam circumferentiam, cujus centrum A.

Ergo duæ circumferentiæ FBDF, EBDE in tribus punctis se mutuò secare non possunt. *Euclid. lib.* 3. *prop.* 10.



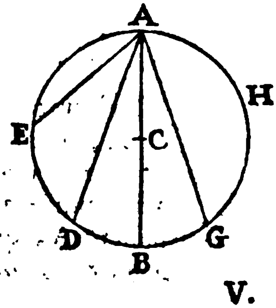
Corollarium III.

135. I. Diameter AB est omnium chordarum maxima (n. 132.). Et reciprocè. *Euclid. lib.* 3. *prop.* 15. Diametri, & chordarum proprietas sive in eodem circulo, sive in circulis æqualibus.

II. Duorum arcuum inæqualium AED, AE, quorum uterque sit semicirculo minor, sive in eodem circulo, sive in circulis æqualibus, major arcus AED majorem chordam AD subtendit (n. 132.).

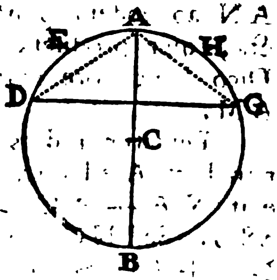
III. Duarum chordarum inæqualium AD, AE, sive in eodem circulo, sive in circulis æqualibus, major AD majorem etiam arcum subtendit.

IV. Si chordæ AD, AG sint æquales, eorum arcus AED, AHG erunt æquales. Et reciprocè. (n. 133.). *Euclid. lib.* 3. *prop.* 26. & 27.



V.

V. Si punctum A bifariam dividat arcum DAG, punctum A æqualiter distabit a punctis D & G. Nam chordæ AD, AG erunt æquales.



PROPOSITIO III.

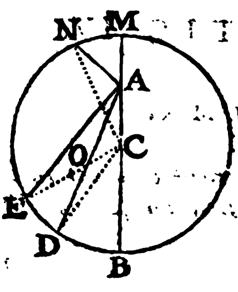
THEOREMA.

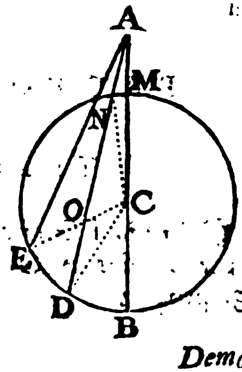
Linearum ab eodē puncto, quod non sit centrum, sive in cavā, sive in convexam peripheriam cadentium proprietas.

136. *I.* O*Mnium rectarum, quæ a puncto* A, *quod non sit centrum, in circumferentiam cadunt, minima est* AM, *quæ producta transit per centrum* C.

Et reciprocè,

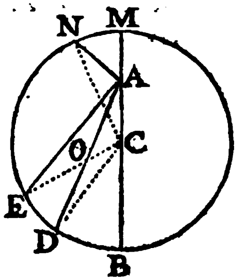
II. Si recta AM *sit omnium minima linearum, quæ a puncto* A, *quod non sit centrum, in circumferentiam incidunt, eadem* AM *producta semper transit per circuli centrum* C. Euclid. lib. 3. prop. 7. & 8.





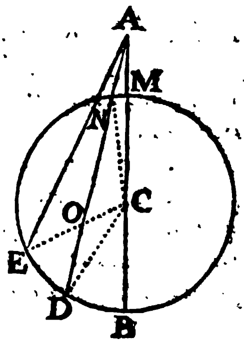
Demon-

Demonstratur I. pars. Esto quævis alia recta AN ab eodem puncto A ad circumferentiam ducta, quæ producta non transeat per centrum C. Dico hanc fore majorem ipsâ AM.



Ducatur radius CN. Si punctum A est intra circulum, erit $NA + AC > NC$ (n. 28.). Sed $NC = MC$. Ergo $NA + AC > MC$; sublatoque utrinque AC, erit (n. 36.) $AN > AM$.

Si verò punctum A sit extra circulum, erit $AN + NC > AC$; sublatisque utrinque æqualibus, ideft, radio NC ex una parte, & radio MC ex altera, erit (n. 36.) $AN > AM$. Quod erat primum.



Demonstratur II. pars. Nam, si AM producta non transiret per centrum C, non esset ex prima parte hujus Theor. omnium linearum minima, contra hypothesim. Quod erat alterum.

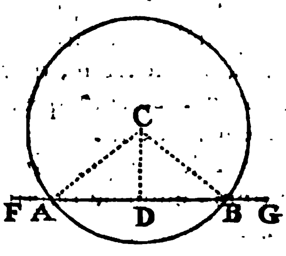
PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

137. *SI recta* FG *circumferentiæ occurrat in duobus punctis* A & B, *circulum secat*. Euclid. lib. 3. prop. 2. Secans.

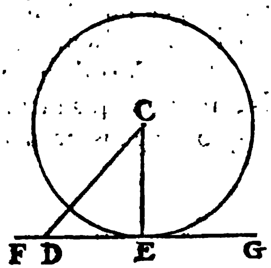
De-

Demonstratio. Ducantur radii CA, CB ad duo puncta A & B, ubi circumferentiæ occurrit recta FG. Hi duo radii, cum sint æquales, perpendiculares esse non possunt rectæ FG, sed æquidistantes erunt a perpendiculari ducta a centro C. (n. 92.). Itaque perpendicularis CD a centro ducta cadet in medio rectæ AB. Atqui hæc perpendicularis CD minor est radio CA, aut CB; quin imo omnes rectæ ductæ a centro C inter A & B minores sunt eisdem radiis CA, CB (n. 89.). Ergo omnia puncta rectæ AB inter A & B contenta, intra circulum cadunt. Omnes pariter rectæ a centro C ductæ ad FG, inter A & F, vel inter B & G erunt longiores radiis CA, CB (n. 89.). Ergo partes AF, BG ejusdem rectæ FG extra circulum cadunt. Itaque recta FG, quæ circumferentiæ occurrit in duobus punctis A & B; circulum secat. Quod erat &c.



Corollarium I.

Tangens. 138. Ergo tangens FG circumferentiæ occurrit in unico puncto E; aliter secaret circulum.



Co-

Corollarium II.

139. RECta CE, a centro C ad punctum contactus E ducta, tota intra circulum cadit; & quævis alia recta, puta, CD a centro ad tangentis punctum quodvis aliud a puncto contactus ducta, egreditur a circulo. Hinc sequitur

I. Rectam CE, a centro ductam ad punctum contactus, minimam fore omnium linearum, quæ duci possint a centro ad tangentem, & consequenter huic tangenti perpendicularem esse (n. 89.). *Euclid. lib.* 3. *prop.* 18. Recta a centro ad punctum contactus perpendicularis tangenti.

II. Aliam quamvis lineam CD, quæ a centro ad punctum contactus ducta non sit, non esse minimam linearum, quæ duci possint a centro ad tangentem, & consequenter huic tangenti perpendicularem non esse.

III. Tangens itaque EG tota cadit extra circulum, eumque tangit in E. *Euclid. lib.* 3. *prop.* 16. *pars* 1.

Corollarium III.

140. REcta igitur CE, quæ a centro C perpendiculariter ducatur ad tangentem FG, transit per punctum contactus; aliter non esset tangenti perpendicularis. Determinare punctum contactus.

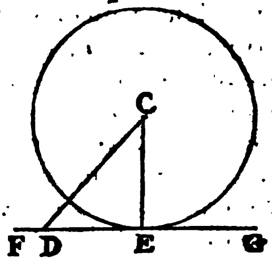
Hoc Corollarium usui est resolutioni problematis, in quo quæratur, ut determinetur punctum, in quo tangens occurrit circumferentiæ circuli.

Co-

Corollarium IV.

Tangens reciprocè perpendicularis radio in puncto cõtactus.

141. QUia radius CE, a centro ad punctum contactus ductus, tangenti FG perpendicularis est, erit reciprocè tangens FG perpendicularis radio CE in puncto contactus, seu in extremitate ejusdem radii.



Corollarium V.

Tangentem ducere.

142. ET reciprocè recta FG, quæ perpendiculariter ducatur ad extremitatem radii CE, tanget circulum in puncto E.

Nam, si hæc perpendicularis FG circulum non tangeret in puncto E, recta, quæ circulum tangeret in eodem puncto E non esset perpendicularis radio CE in ejusdem extremitate: quod repugnat præced. Corol.

Habes hinc methodum facillimam, qua ad datum circumferentiæ punctum tangentem ducas.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Perpendicularium chordas bifariam secantiũ proprietas.

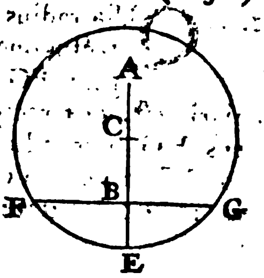
143. *SI recta* AE *perpendiculariter, & bifariam secet chordam* FG,

I. Recta AE *transibit per centrum* C.

II. Eadem bifariam secabit arcum FEG.

Demon-

Demonstratur I. pars. Puncta omnia, quæ æqualiter distabunt a duabus extremitatibus rectæ FG, erunt necessariò in perpendiculari AB (n. 51.). Atqui centrum C est æqualiter distans a duabus extremitatibus F & G, quæ sunt in circumferentia (n. 56.). Ergo centrum C est in perpendiculari AB; & consequenter hæc perpendicularis per centrum transit. Quod erat primum.

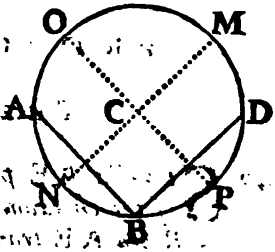


Demonstratur II. pars. Punctum medium E arcus FEG est æqualiter distans a suis extremitatibus F & G (n. 135.). Ergo perpendicularis AB transibit etiam per hoc punctum medium E (n. 51.), & consequenter arcum FEG secabit bifariam. Quod erat alterum.

Scholion.

144. H*Oc Theorema viam aperit resolvendi duo problemata.*

Nam ex prima parte hujus invenies centrum dati circuli, aut arcus ABD; *si nempe in hoc arcu ducantur duæ chordæ* AB, BD, *&* *in earum medio excitentur perpendiculares* MN, OP, *quarum utraque transibit per centrum; & consequenter in puncto* C *concursus determinabitur centrum. Eodem artificio datum arcum perficies*. Euclid. lib. 3. prop. 25. Inventio centri dati arcus, aut circuli.

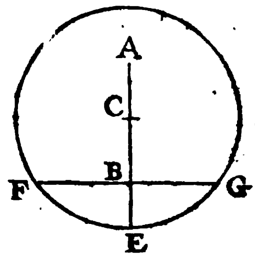


Secunda pars Theorematis docet methodum secandi arcum bifariam.

Co-

Corollarium I.

145. Quoniam ex præced. Theor. recta AE perpendicularis in medio chordæ FG transit per centrum, & secat arcum FEG bifariam: perspicuum est, quòd punctum medium B chordæ FG, punctum medium E sui arcus FEG, & centrum C circuli in eadem recta linea consistunt. Quare, si linea recta per duo ejusmodi trium punctorum B, E, C ducatur, necessariò per tertium transibit, eritque simul perpendicularis in medio chordæ FG: hoc est,



Arcum bifariam secare.

I. Si recta AE transit per centrum C, & per punctum medium B chordæ FG, eadem dividet arcum FEG bifariam, & erit perpendicularis in medio chordæ FG. *Euclid. lib.* 3. *prop.* 3. & 30.

Chordā perpendiculariter, & bifariam secare.

II. Si recta AE transit per centrum C, & per punctum medium E arcus FEG, eadem erit perpendicularis in medio B chordæ FG.

Per centrum, & per punctū medium chordę perpendicularem ducere.

III. Si recta AE bifariam secat & chordam FG, & arcum FEG, eadem transibit per centrum, & erit perpendicularis in medio chordæ FG.

Itaque duobus datis dantur reliqua.

Corollarium II.

146. Quoniam ad idem punctum medium B chordæ FG, perpendicularis unica duci potest (n. 50.); & præterea ex præced. Theor. hæc perpendicularis transit per centrum C, & per punctum

ctum medium E arcus F E G: illud evidenter conſequitur, quòd, ſi linea recta ſit perpendicularis chordæ F G, & tranſeat per unum ex tribus punctis B, E, C, tranſibit quoque neceſſariò per duo reliqua: hoc eſt,

I. Si recta A E ſit perpendicularis chordæ F G, ac biſariam ſecet arcum F E G, eadem tranſibit per centrum C, & per punctum B medium chordæ F G.

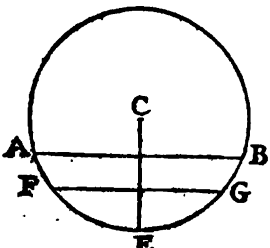
II. Si recta A E ſit perpendicularis chordæ F G, & tranſeat per centrum C, eadem ſecabit biſariam & chordam, & arcum. *Euclid. lib.* 3. *prop.* 3.

Corollarium III.

147. DUo arcus A F, B G a duabus chordis parallelis A B, F G intercepti, ſunt æquales. Nam, ſi a centro C ducatur recta C E perpendicularis ſuper A B, erit eadem perpendicularis alteri parallelarum F G. Itaque per Corol. præced. recta C E tranſibit per punctum medium E duorum arcuum A E B, F E G. Erit ergo arcus A F E = arcui B G E; & arcus F E = arcui G E. Quare, ſi ſecunda æqualitas ſubducatur a prima, reſiduum erit arcus A F = arcui B G.

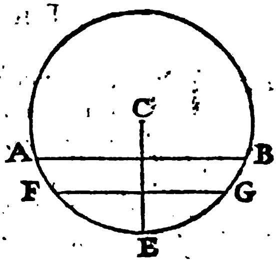
A chordarum parallelismo æqualitas arcuum.

Et reciprocè, ſi in eodem circulo duo arcus A F, B G ab iiſdem chordis A B, F G intercepti, ſint æquales, chordæ erunt parallelæ. Nam, ſi ad punctum medium E arcus F E G ducatur radius



Ab æqualitate arcuum chordarũ parallelismus.

CE, hic erit perpendicularis cordæ FG (n. 145.). Atqui punctum E est quoque per constructionem medium arcus AFEGB. Ergo radius CE erit etiam perpendicularis chordæ AB (n. 145.): hinc idem radius CE erit perpendicularis duabus chordis AB, FG. Ex quo sequitur (n. 87.) duas chordas AB, FG perpendiculares esse eidem rectæ CE, & consequenter parallelas (n. 91.).



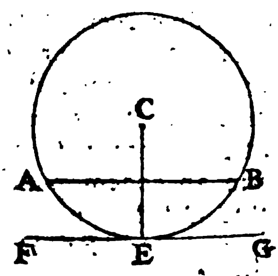
Parallelam ducere.

148. Hinc disces per datum punctum F parallelam ducere datæ rectæ AB. Sumpto enim quovis puncto C pro centro, describatur per punctum F arcus AFEGB, qui rectam AB secabit in duobus punctis A & B; dein accipiatur arcus BG æqualis arcui AF: recta a puncto G ad punctum datum F ducta, erit parallela quæsita.

Corollarium IV.

A chordæ, & tangentis parallelismo æqualitas arcuum.

149. Ergo duo arcus AE, BE sunt æquales, si intercipiantur a chorda AB, & tangente FG, quæ sint invicem parallelæ. Nam radius CE ad punctum contactus E ductus, tangenti perpendicularis est (n. 139.), & pariter perpendicularis chordæ parallelæ AB (n. 99.); & consequenter dividet arcum AEB bifariam. Ergo punctum contactus E tangentis, quæ chordæ AB sit parallela, secat arcum AEB in duos arcus æquales.



PRO-

PROPOSITIO VI.

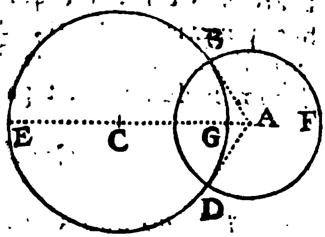
THEOREMA.

150. *Duæ circumferentiæ excentricæ, quæ se invicem secant, in duobus tantum punctis sibi mutuò possunt occurrere:* Circulorum sibi mutuò occurrentiū affectiones.

Et vicissim,

Duæ circumferentiæ, quæ in duobus punctis B *& D sibi mutuò occurrunt, se invicem secant.* Euclid. lib. 3., prop. 10.

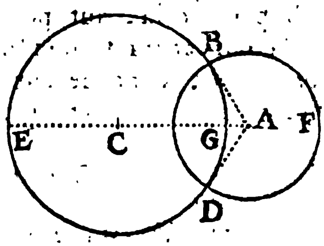
Demonstratur I. pars. Nam duæ circumferentiæ in tribus punctis non possunt occurrere, quin mutuò congruant, & in unicam confundantur (n. 134.). Ergo duæ circumferentiæ, quæ se invicem secant, in duobus tantum punctis sibi mutuò occurrunt, hoc est, in puncto ingressus unius in alteram; & in puncto egressus. Quod erat primum.



Demonstratur II. pars. Ex A centro unius circuli ducantur radii AB, AD ad puncta, in quibus circumferentiæ sibi mutuò occurrunt. Itaque, cum duæ rectæ AB, AD sint æquales, neutra earum transibit per centrum C alterius circuli BGDE, sed ambo desinent in puncta B & D æquè distantia ab extremitate E rectæ AE, quæ transit per centrum C hujus circuli (n. 133.). Concipe jam ab eodem puncto A ad omnia circumferentiæ BGDEB puncta infinitas rectas duci: rectæ, quæ ab arcu BGD terminantur, minores erunt radiis AB, AD (n. 136.); rectæ, quæ ab arcu BED Circuli secantes.

 ter-

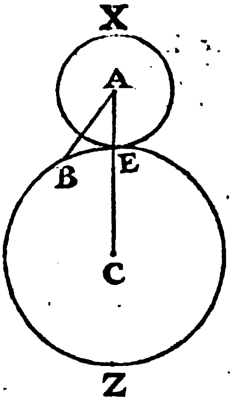
terminentur, majores erunt iisdem radiis A B, A D (n. 132.). Ergo arcus B G D cadit intra circulum F B D F; & arcus B E D erit extra eumdem; & consequenter duo circuli, qui in duobus circumferentiæ punctis sibi mutuò occurrunt, se invicem secant. Quod erat alterum.

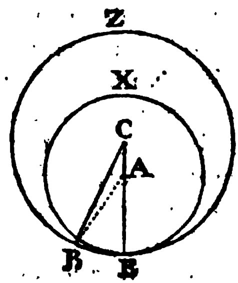


Corollarium I.

151. DUæ ergo circumferentiæ, quæ se tangunt vel exteriùs, vel interiùs, in unico puncto E sibi mutuò occurrunt; alioqui contra hypothesim se invicem secarent. *Euclid. lib.* 3. *prop.* 13.

Circuli tangentes.





Quinimo omnes, quotquot ducere libuerit, circuli, qui habent centra in una recta, eamque secant in eodem puncto E, se mutuò in puncto illo contingunt. Quod perspicuum est, inquit P. Tacquet,

quet, ex notione ipsa linearum, quæ comparantur. Neque enim aut recta linea, & curva circuli peripheria, aut peripheriarum inæqualium diversæ curvaturæ secundùm ullam sui partem possunt congruere; congruerent autem, si se in tota invicem parte aliqua tangerent.

Corollarium II.

152. ERgo recta AE, quæ a centro A circuli X ad punctum contactus E utrique circulo X & Z commune ducitur, est omnium rectarum minima, quæ duci possint ab eodem puncto A ad circumferentiam circuli Z. Nam, ut patet, AB > AE.

Corollarium III.

153. SI duo circuli X & Z se intus, vel exteriùs tangant, recta AE, quæ a centro A unius X ducitur ad punctum contactus E, ulteriùs producta transibit per centrum C alterius circuli Z. Nam AE in utroque casu est omnium rectarum minima, quæ duci possint a puncto A ad circulum Z (n. 136.). Circulorum tangentium centra, & punctū contactus in eadem recta.

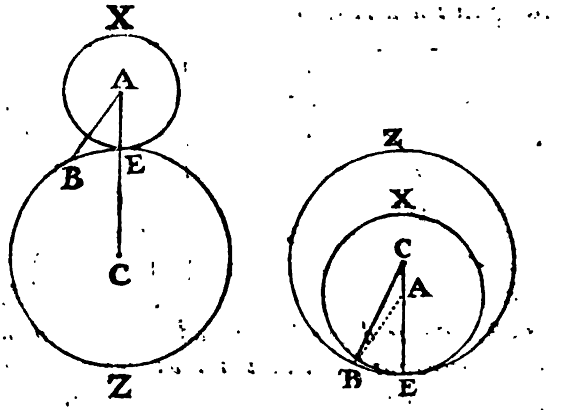
Duorum ergo circulorum se intus, vel exteriùs contingentium duo centra, & punctum contactus sunt in unà eademque linea recta.

Itaque, si duo circuli se intus, vel exteriùs tangant, recta conjungens eorum centra C & A transibit per contactum E. *Euclid. lib.* 3. *prop.* 11. & 12.

Corollarium IV.

Determinare punctum contactus.

154. Hinc duorum circulorum se se tangentium facilè determinatur punctum contactus E; si nimirum per eorum centra ducatur recta AC.



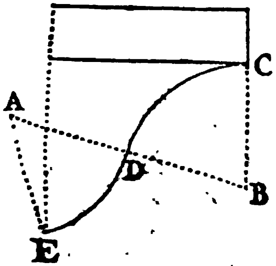
Corollarium V.

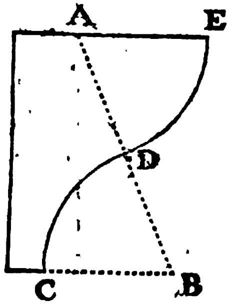
155. Ex Corol. 4. consequitur etiam methodus describendi quemvis circulum, aut arcum, qui datum circulum tangat in dato puncto. Nam per dati circuli centrum, & per datum punctum contactus ducta recta transibit per centrum alterius circuli intervallo quovis describendi.

Scholion.

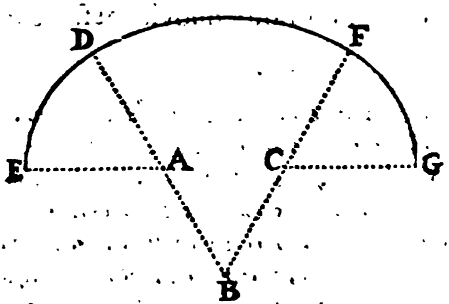
156. *Postrema hæc operatio Architectis maximi usus esse solet; quippe qui, adhibitis portionibus ejusdem circuli, vel diversorum circulorum se se contingentium, diversas curvas eo artificio describunt, ut curva ex his segmentis composita, una eademque, suæque originis esse videatur. Exponam itaque hoc loco in gratiam Tironum praxes ab Architectis adhibitas.*

157. Praxes. *Cymatium* EDC *est curva sinuosa, quæ punctum inflexionis habet in* D, *quæque componitur ex duobus segmentis circulorum se se tangentium in hoc puncto inflexionis* D: *Quare centra* A *&* B, *& punctum contactus* D *duorum arcuum sunt in eadem recta linea* ADB. Cymatium.

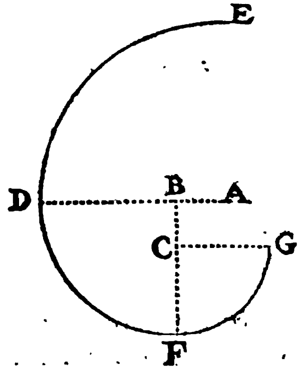




158. *Arcus depressi, qui ad similitudinem semi-ellipsium accedant, constant tribus segmentis circulorum, quorum medium* DF *tangit extremitatibus suis* D *&* F *duos alios arcus* ED, FG. *Itaque centrum* A *arcus* ED, *centrum* B *arcus* DF, *& punctum commune contactus* D, *quo hi duo arcus junguntur, sunt in unica recta linea* BAD. *Similiter centrum* B *arcus* DF, *centrum* C *arcus* FG, *& punctum contactus* F, *quo duo ejusmodi arcus connectuntur, sunt in eadem recta* BCF. Arcus depressus.



Elix. 159. *Elices, quæ spiralium formam imitantur, constant pluribus arcubus* ED, DF, FG, *sibi invicem succedentibus, qui se contingunt in punctis, ubi uniuntur. Itaque centrum* A *primi arcus* ED, *& centrum* B *secundi* DF, *& punctum contactus* D, *ubi connectuntur hi duo arcus, sunt in eadem recta linea* DB. *Pariter centrum* B *arcus* DF, *centrum* C *arcus sequentis* FG, *& punctum contactus* F *commune duobus arcubus, sunt in eadem recta* BF. *Atque ita porro de reliquis arcubus, qui connecti possent, & curvam non interruptam componere videntur.*

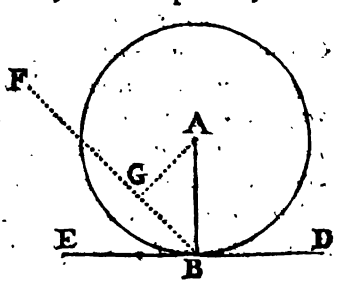


PROPOSITIO VII.

THEOREMA.

160. I*Nter tangentem* ED, *& arcum circuli nulla duci potest recta linea, quin circulum secet.* Euclid. lib. 3. prop. 16.

Demonstratio. Infra ED, si fieri potest, cadat FB tota extra circulum. Quoniam tangens ED per B extremitatem diametri perpendicularis est radio AB (n. 139.), erit eadem FB obliqua radio AB, & reciprocè radius AB obliquus rectæ FB; duci ergo potest a centro A

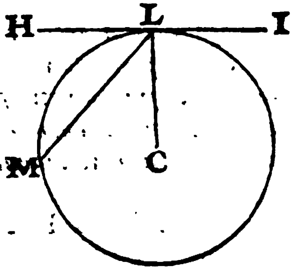


ad

ad rectam FB perpendicularis AB, quæ minor erit radio AB (n. 89.). Itaque punctum C intra circulum cadet; adeoque recta FB circulum secat. Quod erat &c.

Corollarium I.

161. QUæ ab hoc Theoremate consequantur Corollaria, vel potius paradoxa, brevissimè in gratiam Tironum juvat attingere, eisque infiniti mysteria hoc loco primùm aperire, variosque infinitorum ordines, hoc est, calculi infinitesimalis principia. Angulus igitur contactus tangente HL, & arcu ML interceptus, est quovis rectilineo minor. Angulus verò semicirculi inter radium CL, & arcum ML interceptus, est quovis rectilineo acuto major.



Angulus contactus.

Scholion.

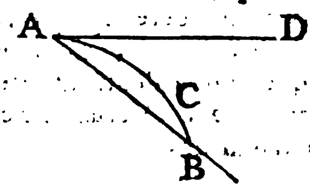
162. *HOc paradoxum Euclidis exercuit Mathematicorum ingenia. Agitata est hæc de angulo contactus controversia inter Jacobum Peletarium Cenomani in Gallia Matheseos Professorem, & Cristophorum Clavium. Hic in schol. ad 16. elem. 3. angulum contactus rectilineo heterogeneum agnovit, quemadmodum linea est superficiei heterogenea; ille verò angulum contactus e numero angulorum sustulit, & pro non quanto declaravit. Egregium etiam de angulo contactus, & semicirculi tractatum conscripsit Wal-*

Wallisius vol. 2., ubi cum Peletario angulum contactus omni assignabili minorem, adeoque nullius magnitudinis esse defendit. Verùm nemo melius mysterium hoc enucleavit, quam Newtonus lib. 1. princip. philosoph. natural. lem. 6., ubi prima jacit calculi infinitesimalis principia, demonstratque quomodo angulus rectilineus sub tangente, & chorda, quæ versus tangentem continuò accedat, comprehensus, minuatur in infinitum, & ultimò evanescat: nimirum

LEMMA.

163. SI arcus quilibet positione datus ACB subtendatur chordà AB, & in puncto aliquo A, in medio curvaturæ continuæ, tangatur a recta utrinque producta AD, dein puncta A & B ad invicem accedant, & coeant: Dico, quòd angulus BAD sub chorda, & tangente contentus minuetur in infinitum, & ultimò evanescet. Nam, si angulus ille non evanescit, continebit arcus ACB cum tangente AD angulum rectilineo æqualem; & propterea curvatura ad punctum A non erit continua, contra hypothesim.

Itaque inter tangentem AD, & chordam infinitesimam AB nulla duci potest recta linea, quæ angulum finitum cum chorda, vel tangente efficiat; ideoque inter arcum AB, & tangentem AD nulla duci potest recta linea, quæ arcum non secet.



Co-

Corollarium II.

164. CUm recta linea omni carens latitudine inter tangentem, & circulum ad contactum duci non possit, quin circulum secet; perspicuum est spatium inter tangentem, & circulum fore infinitè parvum.

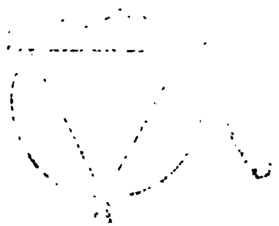
Corollarium III.

165. HOc tamen spatium in seipso infinitè parvum dividi adhuc potest in alia infinita minora spatiola infinitè parva. Nam per idem punctum contactus infiniti circuli majores duci possunt. Qua in re latet totum mysterium asymptoticum, hoc est, lineæ rectæ ad hyperbolam unà secum in infinitum productam accedentis ad intervallum quocunque dato minus, nunquam tamen concurrentis.

Corollarium IV.

166. EX his sequitur diversos esse, & pariter infinitos infinitè parvorum ordines. Quod P. Guido Grandus luculenter exposuit, & demonstravit in opere egregio, quod inscribit: *De infinitis infinitorum, & infinitè parvorum ordinibus*. Atque hinc calculi infinitesimalis principia sanè fœcundissima. Verùm hæc alibi multò accuratiùs tractabuntur.

ELE-



ELEMENTUM IV.

De Angulorum mensura.

HACTENUS cujusvis anguli verticem consideravimus tanquam in centro circuli intervallo quovis descripti constitutum; & arcum a lateribus anguli interceptum mensuram esse ejusdem quantitatis definivimus n. 60. Quoniam verò angulus quilibet tres reliquas positiones diversas, etiam respectu circuli, obtinere potest, ita ut ejus vertex vel sit in circumferentia circuli, vel inter centrum, & circumferentiam, aut denique extra circulum: sancienda erit in hoc Elemento generalis lex, qua elicienda sit angulorum mensura ex eodem circulo, datis tribus hisce positionibus.

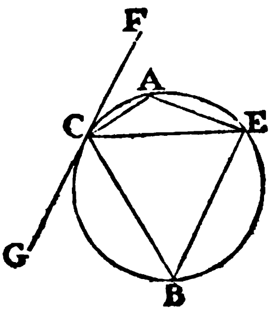
DEFINITIONES.

167. *Segmentum circuli est figura, quæ sub chorda, & circumferentia comprehenditur;* quemadmodum chorda CE circulum dividit in duo inæqualia segmenta, nimirum, majus CBE, & minus CAE. Segmentum circuli.

168. *Angulus* FCE *comprehensus a tangente* FG, *& chordà, seu secante* CE *a puncto contactus ductà, dicitur angulus minoris segmenti.*

Angulus GCE *comprehensus ab eadem chorda* CE, *eademque tangente* FG, *dicitur majoris segmenti.*

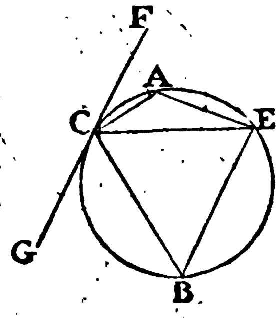
Uterque autem simpliciter vocari solet angulus segmenti. Angulus segmenti.



169.

169. *Angulus* CAE, *cujus vertex est in circumferentia minoris segmenti, & cujus latera a chorda terminantur, vocatur angulus in segmento minore; & similiter angulus* CBE *vocatur angulus in segmento majore.*

Angulus in segmento.



Omnis autem angulus sive in majore, sive in minore segmento dicitur angulus in segmento, sive angulus inscriptus, & angulus ad circumferentiam.

170. *Angulus* CBE *insistere dicitur arcui* CAE, *qui illi opponitur.*

PROPOSITIO L.

THEOREMA.

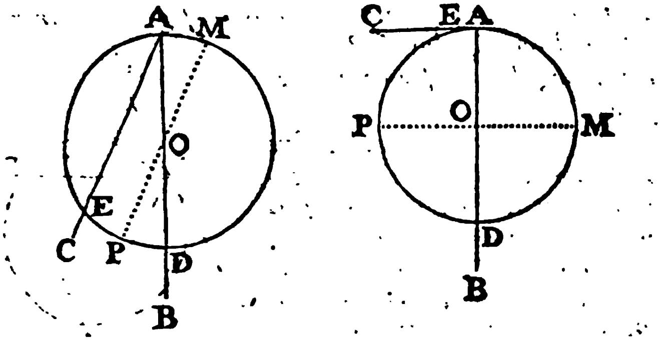
171. *Angulus quilibet* CAB, *cujus vertex* A *est in circumferentia circuli, comprehensus vel a duabus chordis* AC, AB, *vel a tangente* CA, *& chorda, seu secante* AB, *hoc est, a duobus lateribus, quæ ultra verticem producta nusquam circumferentiæ possint occurrere, habet pro mensura medietatem arcus a suis lateribus intercepti.*

Mensura angulorum segmenti, & in segmento.

Quoniam Propositio tres casus complectitur, idcirco tripartita demonstratione opus erit.

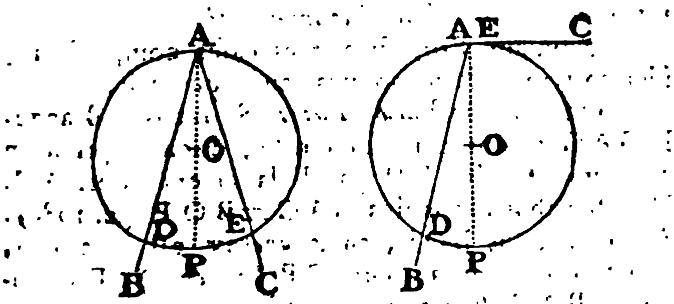
172. *Demonstratio casus I.* Si latus AB anguli BAC transit per centrum O, ducatur per idem centrum O recta PM parallela alteri lateri AC. His stantibus, angulus BAC$=$BOP (n. 108.). Atqui angulus BOP, cujus vertex est in centro, habet pro mensura arcum DP (n. 60.). Ergo angulus BAC habet pro mensura eumdem arcum DP.

DP. Reliquum jam est, ut demonstretur arcum DP semissem esse arcus DPE.



Anguli ad verticem oppositi BOP, AOM; quorum vertex est in centro O, sunt æquales (n. 86.). Ergo arcus DP = AM. Atqui arcus AM = PE (n. 147.). Ergo arcus DP = PE; & consequenter DP est semissis arcus DPE. Angulus itaque BAC habet pro mensura medietatem arcus DPE a suis lateribus intercepti. Quod erat &c.

173. *Demonstratio casus II.* Si centrum O inter duo latera anguli BAC sit positum, ducatur recta AP a vertice A per centrum O. Hæc an-



gulum

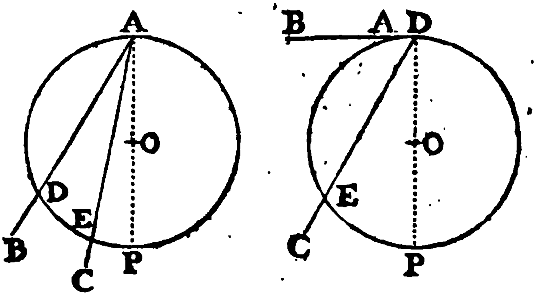
gulum BAC in duos angulos secabit BAP, PAC, ad normam Casus I.; hoc est, utriusque anguli latus unum AP transibit per centrum O. Quare.

I. Angulus BAP habebit pro mensura semissem arcus DP.

II. Angulus PAC habebit pro mensura semissem arcus PE.

Ergo totius anguli BAC mensura erit semissis totius arcus DPE a suis lateribus intercepti. Quod erat &c.

174. *Demonstratio casus III.* Si centrum O neque in uno latere reperiatur, neque inter latera anguli BAC, a vertice A per centrum O ducatur recta AP. Itaque



I. Summa duorum angulorum BAC, CAP, sive angulus totalis BAP, cujus unum latus transit per centrum, habet per Casum I. pro mensura medietatem arcus DEP, hoc est, $\frac{DE}{2}+\frac{EP}{2}$.

II. Atqui angulus CAP per Casum I. habet similiter pro mensura semissem arcus EP, sive $\frac{EP}{2}$.

Ergo alter angulus BAC habet pro mensura $\frac{DE}{2}$, idest, semissem arcus a suis lateribus intercepti. Quod erat &c.

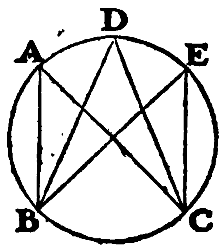
Scho-

Scholion.

175. *HAbes hinc universalem regulam metiendi quemcunque angulum ad circumferentiam, sive in segmento circuli, hoc est, ut vocant, circulo inscriptum, sive angulum segmenti a tangente, & secante a puncto contactus comprehensum. Ex hoc autem Propositione sponte fluunt pleraque, quæ ab Euclide lib. 3. multò operosius demonstrantur, Theoremata.*

Corollarium I.

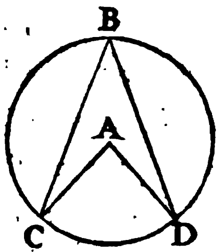
176. ANguli ABD, DCE, quorum vertices B & C sunt in eadem circumferentia, & æqualibus arcubus AD, DE insistunt, inter se omnes sunt æquales. Angulorum in eodem, vel æquali segmento æqualitas.



Vel: anguli BAC, BDC, BEC, quorum vertices A, D, E sunt in eadem circumferentia, & eidem arcui BC insistunt, inter se omnes sunt æquales. *Euclid. lib.* 3. *prop.* 21.

Corollarium II.

177. ANgulus ad centrum CAD duplus est anguli CBD ad circumferentiam, cum idem arcus CD est basis angulorum. *Euclid. lib.* 3. *prop.* 20. Angulus ad centrum.

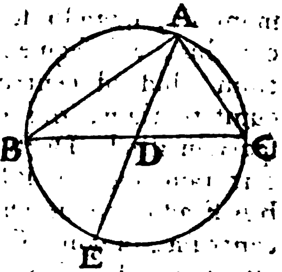


Nam angulum ad centrum CAD, metitur integer arcus CD, ejusque semissis (171.) metitur angulum CBD ad circumferentiam.

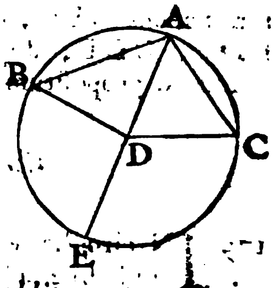
Scholion.

178. DOminus Deidier in egregio Opere, quod inscripsit: Science des Geom. p. 1. n. 159. Geometras coarguit, quasi verò hoc Theorema non satis circumscriptè pronunciaverint. Ait enim eosdem contentos fuisse hac expressione: Angulus ad centrum duplus est anguli ad peripheriam, cum uterque eidem arcui insistit, *vel, ut exponit Clavius,* cum fuerit eadem peripheria basis angulorum. *Monet itaque Deidier addi oportere:* cum uterque angulus summitatem habet ad easdem partes arcus conversam.

Ratio est, inquit ipse, I. quia angulus BAC *ad circumferentiam est angulus in semicirculo; neque tamen ad centrum angulus ullus fieri potest, qui eidem arcui insistat.*



II. Angulus BAC *ad circumferentiam est angulus in segmento minore; angulus autem ad centrum* BDC, *cujus vertex ad oppositam partem convertitur, non semper duplus erit anguli ad peripheriam. Nam angulum ad centrum* BDC *metitur arcus* BAC; *& angulum ad peripheriam* BAC *metitur* (171.) *semissis arcus* BEC: *quæ semissis non æquat arcum* BAC, *nisi quando arcus* BAC *est tertia pars totius circumferentiæ.*



At, pace tanti Viri, hoc additamentum & inutile mihi videtur, & alienum censeo a trita Geometrarum *terarum loquendi consuetudinem.* *Quid enim aliud sibi volunt Geometræ, cum dicunt* utrumque angulum eidem arcui debere insistere, *vel* eumdem arcum basim esse utriusque anguli, *nisi idipsum, quod Deidier adjiciendum putat,* verticem utriusque anguli ad easdem partes arcus debere converti?

Duo autem, quos Deidier recenset casus de angulo in semicirculo, & de angulo in segmento minore, neque a Theoremate comprehenduntur, uti palam est, eosque multò ante prospexerat Clavius lib. 3. elem., qui, quam relationem habere adhuc possent ad angulum centri, luculenter explicat, & demonstrat hisce verbis.

Quod si rectæ BD, CD in centro angulum non constituant ad partes basis BC: quod tum demum fit, quando segmentum BAC est vel semicirculus, vel segmentum minus: nihilominus spatium illud ad centrum duplum erit anguli ad circumferentiam, qui eamdem habeat basim, quam spatium illud. Ducta enim recta AE per centrum, erit tam angulus BDE ad centrum duplus anguli BAE ad circumferentiam, quam angulus CDE ad centrum, anguli CAE ad circumferentiam: ut ostensum est. Spatium igitur ad centrum D, basim habens BEC, constansque ex duobus angulis BDE, CDE, duplum est totius anguli BAC. Quod est propositum.

Corollarium III.

179. In circulis æqualibus, vel in eodem, si anguli sive ad centra, sive ad circumferentiam sint æquales, etiam arcus, quibus insistunt, sunt æquales.

Et reciprocè, si arcus sunt æquales, etiam anguli æquales erunt. *Euclid. lib. 3. prop. 26. & 27.*

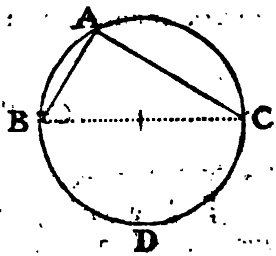
Constat pariter duos angulos inæquales, quorum vertices sunt in circumferentia ejusdem circuli, insistere arcubus inæqualibus, majoremque angulum insistere majori arcui.

Et reciprocè.

Corollarium IV.

Angulus in semicirculo,

180. Angulus BAC in semicirculo rectus est. *Euclid. lib. 3. prop. 31. pars 1.*

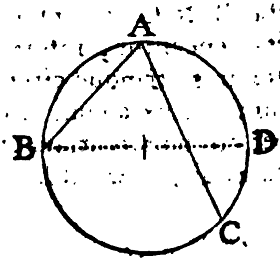


Nam semissis semicirculi, cui insistit idem angulus ad circumferentiam, est quadrans, mensura anguli recti (n. 61.).

Corollarium V.

In segmento majore,

181. Angulus BAC in segmento majore est minor recto, idest, acutus. *Euclid. lib. 3. prop. 31. pars 2.*

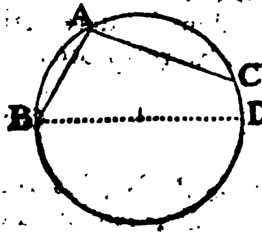


Nam insistit arcui, qui semicirculo minor est, ejusque semissis quadrante minor, mensura anguli acuti.

Co-

Corollarium VI.

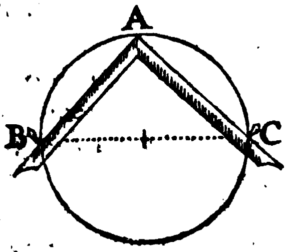
182. ANgulus BAC in segmento minore est major recto, idest, obtusus. *Euclid. lib.* 3. *prop.* 31. *pars* 3. In segmento minore.



Nam insistit arcui, qui semicirculo major est, ejusque semissis quadrante major, mensura anguli obtusi.

Corollarium VII.

183. HInc examen normæ, num exactè rectangula sit, instituitur. In circulo enim quocunque, posito ad circumferentiæ punctum quodvis A normæ vertice, si latera per diametri extrema B, C transeunt, angulus est rectus; sin minùs, aut acutus, aut obtusus erit. Normæ examen.



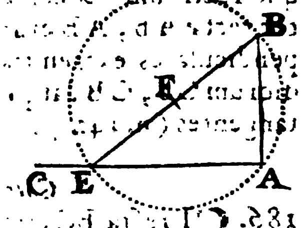
Si normæ latera ad puncta B & C continuò adjuncta teneantur, interea dum angulus utrinque circumagatur; vertex anguli A describet circumferentiam circuli, cujus diameter est linea BC.

Corollarium VIII.

Perpendicularem excitare.

184. **A**B extremitate A rectæ AC, quæ ultra punctum A produci non potest, perpendicularem excitare.

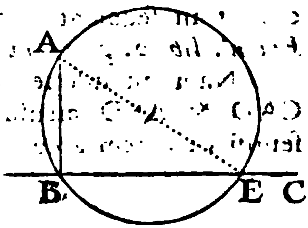
Sumpto quovis extra datam lineam puncto F, ex quo, tanquam centro, intervallo FA describatur circulus, qui datæ rectæ AC occurrat in E, ductaque diametro EFB, recta BA erit perpendicularis quæsita (n. 180.).



Perpendicularem ducere.

Similiter ex dato extra rectam BC puncto quovis A, ad eamdem ducenda sit perpendicularis.

Ex puncto dato A ducatur obliqua AE, quæ occurrat rectæ BC in aliquo puncto E; tum super AE, tanquam diametro, describatur semicirculus ABE, qui rectæ BC occurrat in alio puncto B: recta AB erit perpendicularis quæsita.

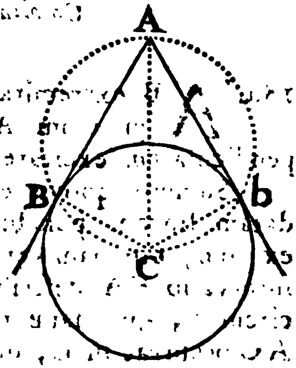


Corollarium IX.

Tangentem ducere.

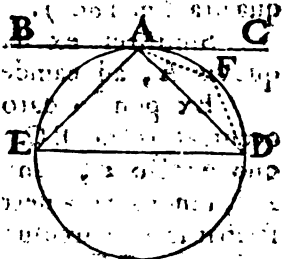
185. **E**X puncto dato A rectam ducere, quæ datum circulum Bb tangat. *Euclid. lib. 3. prop. 17.*

Centrum C, & datum punctum A jungantur recta rectà CA: super qua, tanquam diametro, describatur circulus ABCb occurrens dato in punctis B & b. Utraque recta Ab, AB erit tangens quæsita. Nam ductis radiis Cb, CB, anguli CbA, CBA in semicirculo utrinque recti sunt; & consequenter rectæ Ab, AB erunt perpendiculares extremitati radiorum Cb, CB, atque adeo tangentes (n. 142.).



Corollarium X.

186. SI recta BC circulum tangat, & alia ex contactu A ducta AD eundem secet, erit angulus CAD à tangente, & secante factus, par angulo AED, qui fit in segmento alterno. *Euclid. lib.* 3. *prop.* 32. Mensura anguli in segmento alterno.



Nam utriusque anguli CAD & AED mensura est semissis ejusdem arcus AFD.

Corollarium XI.

187. ANgulus CAD minoris segmenti, & angulus AFD inscriptus in eodem segmento, simul sumpti æquantur duobus rectis. Mensura utriusque anguli simul sumpti, nimirum, segmenti, & in eodem segmento.

Nam ex dictis angulum CAD metitur semissis arcus AFD; & angulum AFD metitur semissis arcus reliqui AED. Ergo utrumque angulum simul sumptum metitur semissis totius circumferentiæ, idest, mensura duorum rectorum. Simili ratiocinio demonstrabis angulum BAD majoris seg-

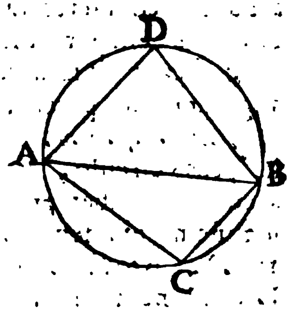
 men-

menti, & angulum AED, inscriptum in eodem segmento, simul sumptos æquari duobus rectis.

Corollarium XII.

Mensura utriusque anguli oppositi, circulo inscripti ab iisdem punctis.

188. DUo anguli circulo inscripti ADB & ACB, oppositi, & insistentes iisdem punctis A & B, æquantur duobus rectis. *Euclid. lib.* 3. *prop.* 22.

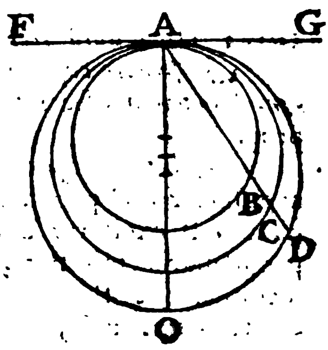


Nam alterutrum metitur semissis arcuum, quibus insistunt. Ergo utrumque metitur totius circumferentiæ semissis, quæ est mensura duorum rectorum.

Corollarium XIII.

Mensura arcuum.

189. SI centris in eadem recta linea AO in infinitum protracta acceptis describantur per A plures circuli in amplitudinem quamcunque excrescentes, & a puncto contactus A ducatur secans ABCD: arcus singuli, intercepti a tangente AG, & chordis AB, AC, AD, erunt totidem graduum.



Nam eumdem angulum GAD metitur semissis arcus AB, semissis arcus AC, & semissis arcus AD &c.

PRO-

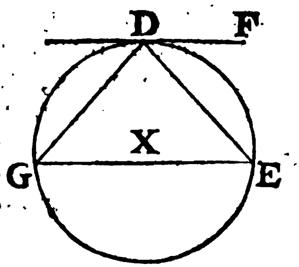
PROPOSITIO II.

PROBLEMA.

190. A *Dato circulo X segmentum* DGE *auferre capiens angulum* DGE *parem dato.* Euclid. lib. 3. prop. 34.

Resolutio. Ducatur tangens DF (n. 142.); & a puncto contactus D age secantem DE, quæ cum tangente efficiat angulum FDE parem dato. Hæc secans DE auferet segmentum DGE capiens angulum dato parem.

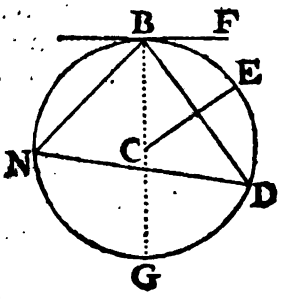
Demonstratio. Nam angulus quivis DGE inscriptus circulo, & insistens arcui DE habet pro mensura semissem ejusdem arcus (n. 173.). Atqui semissis arcus DE est mensura anguli FDE = dato angulo (n. 174.). Ergo factum est, quod jubebatur faciendum.



PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

191. S*Uper datà rectà* BD *segmentum circuli construere capiens angulum dato parem.* Euclid. lib. 3. prop. 33.

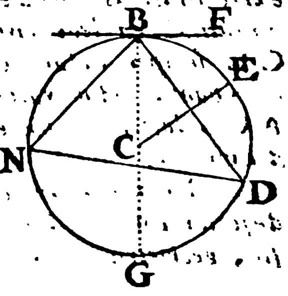


Resolutio. Super BD fac angulum FBD parem dato: a puncto B excitetur BG perpendicularis ipsi BF; & in medio rectæ BD perpendicularis altera EC, quæ secabit rectam BG in puncto C, a

quo

quo circulus intervallo BC describatur. Dico factum.

Demonstratio. Ex puncto quovis N segmenti BND jungantur rectæ NB, ND. BF perpendicularis radio BC tanget circulum (n. 142.). Quare angulum FBD, æqualem per hypothesim angulo dato, metitur semissis arcus BED. Sed idem angulus FBD æquatur angulo BND segmenti alterni (n. 186.). Ergo segmentum circuli BND capit angulum dato parem. Quod erat &c.

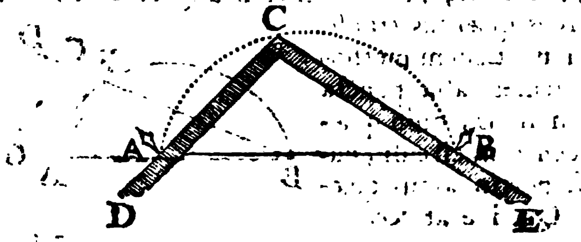


Scholion.

192. *EX eadem Prop. I. Corol. I., nimirum, quòd omnes anguli ad circumferentiam inscripti, eidem arcui insistentes, sint æquales, consequitur methodus omnium expeditissima, qua portio cujusvis circuli describi possit, tot graduum, quot libuerit, sine circino, aut centro ejusdem circuli; quæ praxis est maximæ utilitatis.*

Descriptio cujusvis arcus sine circino, aut centro circuli.

Esto AB *chorda arcus quæsiti. Oporteat autem arcum describere graduum* 10. *Angulus itaque in hac arcu inscriptus habebit pro mensura semissem graduum* 350, *hoc est, gradus* 175.



His

His positis, duas regulas CD, CE *ita firmiter conjungo in* C, *ut angulus* DCE *sit graduum* 175, *quique nunquam variari possit: dein duos clavos extremitatibus chordæ* AB *defigo, & verticem anguli* C *ea lege circumago, ut duæ regulæ* CD, CE *semper radant clavos* A *&* B, *iisque in motu adrepant. Hac ratione vertex* C *lineam circularem* ACB *describet, hoc est, arcum circuli quæsitum graduum* 10.

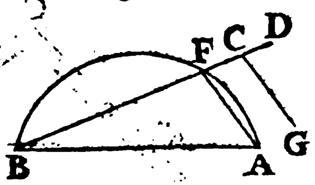
¶ *Hac praxi portio circuli cujuslibet magnitudinis describi potest. Verum, cum hæc operatio mechanica sit, geometricam alteram exhibeo ex iisdem principiis.*

PROPOSITIO IV.

PROBLEMA.

199. D*atâ cujusvis segmenti circuli chordâ* AB, *datoque angulo in eodem segmento, invenire puncta omnia, per quæ transibit arcus ejusdem chordæ* AB, *quin cognoscatur, aut quæratur centrum circuli, cujus est portio arcus quæsitus.* Eadem descriptio geometrica.

Resol., & Demonstratio. A puncto B ducatur utcunque recta BD; fiat angulus BCG par dato; tum ab extremitate altera A ejusdem chordæ BA ducatur AF parallela ipsi CG, quæ rectæ BD occurrat in puncto F. Angulus BFA = BCG (n. 111.), hoc est, per hypothesim angulo dato. Itaque arcus quæsitus transibit per F. Eadem methodo invenies alia puncta ejusdem arcus, quin quæratur centrum circuli, cujus est portio arcus quæsitus. Quod erat &c.



Scho-

Scholion.

194. *In Propositione I. hujus Elementi angulum, cujus vertex sit in circumferentia circuli, ita circumscripsimus, ut ejus latera ultra verticem producta nusquam circumferentiæ occurrere possint; atque adeo Theorema I. unicè locum habet, vel quando angulus inscribitur in segmento, vel quando angulus segmenti a tangente, & secante a puncto contactus comprehenditur. Fieri autem interdum potest, ut anguli, cujus vertex est in circumferentia, latus unum ultra verticem productum secet eamdem circumferentiam: in quo casu, qua lege definienda sit hujus anguli mensura, sic statuimus.*

PROPOSITIO V.

THEOREMA.

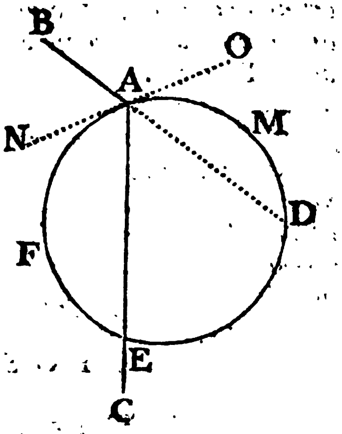
Mensura anguli ad circumferentiã, cujus latus unũ ultra verticẽ productũ secet circulum.

195. *Angulus* BAC, *cujus vertex* A *est in circumferentia circuli, comprehensus a chorda* AC, *& extra circulum a recta* BA, *quæ tamen, si ultra verticem* A *producatur, circulum secet, & aliam chordam* AD *subtendat; habet pro mensura medietatem duorum arcuum, hinc* AFE, *inde* AMD, *quos duæ chordæ* AC, AD *subtendunt.*

Demonstratio. Anguli BAC, CAD æquantur duobus rectis (n. 74.); & consequenter horum mensura est semissis totius circumferentiæ (n. 61.), nimirum, $\frac{AFE}{2} + \frac{AMD}{2} + \frac{ED}{2}$. Atqui per Theorema I. anguli CAD mensura est $\frac{ED}{2}$. Ergo anguli

guli B A C mensura erit semissis reliquorum duorum arcuum, idest, $\frac{AFE}{2}+\frac{AMD}{2}$. Quod erat &c.

196. *Aliter*. Per punctum A ducatur tangens N A O. Angulus B A C æquatur duobus angulis B A N, N A C. Atqui B A N = O A D oppofito ad verticem. Ergo totus angulus B A C æquatur duobus simul sumptis angulis segmenti, nimirum, N A C & O A D, quorum mensura est semissis arcuum A F E, A M D. Itaque angulum totalem B A C metiuntur semisses eorumdem arcuum, quos duæ chordæ A E, A D subtendunt. Quod erat &c.

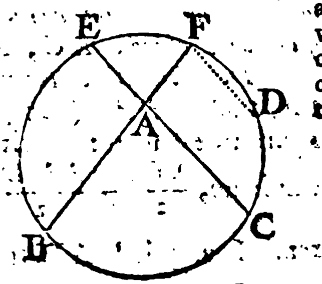


PROPOSITIO VI.

THEOREMA.

Mensura anguli, cujus vertex inter centrum, & circumferentiam.

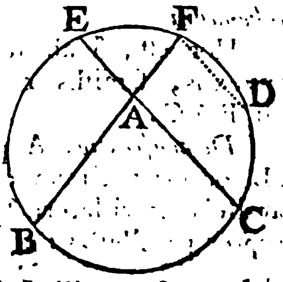
197. A*ngulus quivis* B A C, *cujus vertex* A *est inter centrum, & circumferentiam, habet pro mensura semissem arcus* B C *a suis lateribus intercepti, cui insistit, ac præterea semissem arcus* E F *comprehensi a lateribus ad circumferentiam productis anguli* E A F *oppositi ad verticem*.



Hoc

Hoc est, summa semissium eorumdem arcuum BC & EF, sive $\frac{BC}{2}+\frac{EF}{2}$, erit mensura solius anguli BAC.

Demonstratio. A puncto F, ubi latus unum BA occurrit circumferentiæ, ducatur recta FD parallela alteri lateri AC. Erit angulus BAC $=$BFD (n. 108.). Atqui (n. 171.) angulum BFD metitur semissis arcus BD, nimirum, $\frac{BC}{2}+\frac{CD}{2}$.



Ergo pariter angulum BAC metitur $\frac{BC}{2}+\frac{CD}{2}$. Sed $\frac{CD}{2}=\frac{EF}{2}$, quia $CD=EF$ (n. 147.). Ergo angulus BAC habet pro mensura $\frac{BC}{2}+\frac{EF}{2}$. Quod erat &c.

Hinc etiam demonstrari facilè potest angulum BAE, cujus vertex est inter centrum, & circumferentiam, habere pro mensura semissem arcus BE a suis lateribus intercepti, ac præterea semissem arcus FC comprehensi a lateribus oppositi anguli ad verticem.

Nam anguli BAE, BAC simul æquantur duobus rectis, & consequenter habent pro mensura semicirculum, nimirum, $\frac{BE}{2}+\frac{BC}{2}+\frac{FC}{2}+\frac{EF}{2}$. Atqui ex nuper dictis angulus BAC habet pro mensura $\frac{BC}{2}+\frac{EF}{2}$. Ergo angulus BAE habet pro mensura $\frac{BE}{2}+\frac{FC}{2}$. Quod erat &c.

PRO-

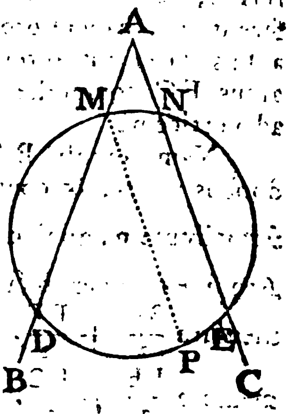
PROPOSITIO VII.

THEOREMA.

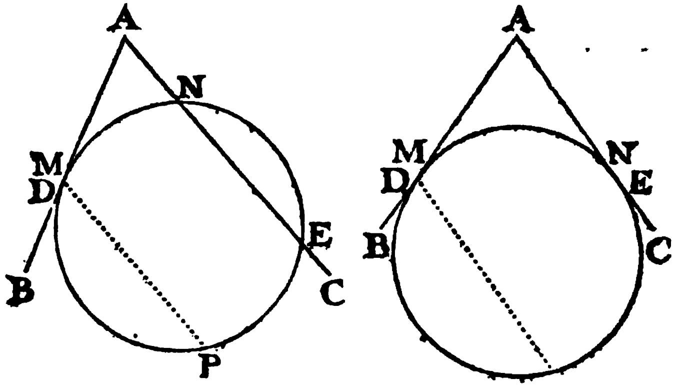
198. *Angulus* BAC, *cujus vertex* A *est extra circulum, ejusque latera* AB, AC *arcum concavum* DPE *intercipiunt, & arcum convexum* MN, *habet pro mensura semissem differentiæ duorum arcuum* DPE, MN, *quos eadem latera comprehendunt.* Mensura anguli, cujus vertex extra circulum.

Hoc est, si ab arcu concavo subducatur arcus convexus, semissis residui arcus erit mensura anguli BAC.

Demonstratio. A puncto M, ubi latus unum AB occurrit circumferentiæ, ducatur recta MP parallela alteri lateri AC. Angulus BAC = BMP propter parallelas (n. 108.). Atqui angulus BMP habet pro mensura $\frac{DP}{2}$ (n. 171.). Ergo angulus BAC habet pariter pro mensura $\frac{DP}{2}$. Sed PE = MN (n. 147.). Ergo DP est duorum arcuum DPE, MN differentia. Itaque angulus BAC habet pro mensura semissem differentiæ duorum arcuum, concavi DPE, & convexi MN, quos eadem latera intercipiunt. Quod erat &c.



199. Demonstratio universalis est, sive anguli BAC duo latera circulum secent, sive latus unum BA circulum tangat, & alterum CA secet, sive utrumque latus circulum tangat.



Corollarium.

AB hisce tribus Theorematis nuper demonstratis hæc consequuntur.

I. Angulus, cujus mensura est semissis arcus concavi a suis lateribus intercepti, habet verticem ad circumferentiam circuli, cujus est pars datus arcus.

II. Angulus, cujus mensura est major semissi arcus concavi a suis lateribus intercepti, habet verticem intra circulum, cujus est portio datus arcus.

III. Angulus, cujus mensura est minor semissi arcus concavi, cui insistit, habet verticem extra circulum, cujus est pars datus arcus.

ELEMENTUM V.

De Triangulis Rectilineis.

AXIOMA Euclideum est, duas rectas lineas spatium non comprehendere. Si enim duæ rectæ lineæ ex una parte coeant ad efficiendum angulum, necessariò ex altera parte semper magis ac magis disjungentur, si producantur. Perspicuum est ergo, ut superficies plana, spatiumve quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertiam adjungi oportere; ita enim conficietur spatium triangulare, seu figurarum rectilinearum prima, ex qua Quintum hocce Elementum ordimur. Figurarum rectilinearum prima.

DEFINITIONES.

200. *Figura Rectilinea est plana superficies rectis lineis, quæ latera vocantur, terminata. Hæc figura Triangulum nominatur, si tribus dumtaxat rectis circumscribatur: Quadrilaterum, si quatuor: Polygonum, si plus, quàm quatuor rectis lineis terminetur.* Triangulum

201. Habita ratione laterum, dividitur triangulum planum rectilineum, de quo dumtaxat agimus in hoc Elemento, in æquilaterum, isosceles, & scalenum; habita verò ratione angulorum, dividitur in rectangulum, amblygonium, seu obtusangulum, & oxygonium, seu acutangulum.

202. *Triangulum Æquilaterum est illud, cujus tria latera sunt inter se æqualia: Isosceles, cujus duo tantùm latera sunt æqualia: Scalenum, cujus omnia latera sunt inæqualia.* Æquilaterum, Isosceles, Scalenum,

Rectangulū, 203. *Triangulum Rectangulum dicitur illud, quod unum trium angulorum habet rectum: Amblygonium, seu Obtusangulum, cujus unus angulorum est obtusus: Oxygonium verò, seu Acutangulum, cujus tres anguli sunt acuti.*

Obtusangulū,

Acutangulū.

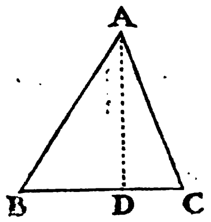
204. *Latus, super quo construi triangulum intelligitur, vocari solet Basis trianguli. Huic oppositus angulus appellatur ejusdem summitas, seu Vertex; & perpendicularis a summitate in basim demissa, dicitur Altitudo trianguli;* quippe quæ est omnium linearum minima, quæ distantiam summitatis a basi metiatur.

Basis.

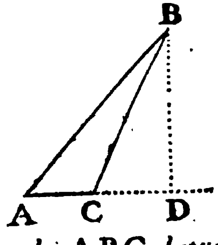
Vertex.

Altitudo.

Quamobrem, si in triangulo ABC sumatur latus BC pro basi ejusdem, angulus A erit summitas, & perpendicularis AD erit altitudo.

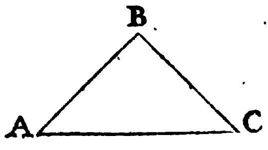


Quòd si triangulum sit inclinatum, perpendicularis BD in basim AC productam cadit; & similiter trianguli altitudinem metitur.



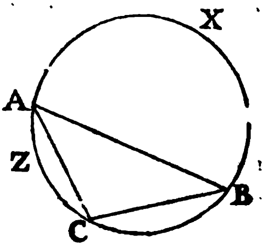
205. *In omni triangulo rectangulo* ABC *latus* AC *oppositum angulo recto* B, *vocatur Hypotenusa.*

Hypotenusa.



206.

206. *Si trium angulorum vertices* A, B, C *existant in circumferentia circuli, triangulum inscriptum circulo dicitur, & circulus circumscriptus triangulo.* Triangulum inscriptũ circulo.



PROPOSITIO I.

THEOREMA.

207. T*Riangulo circulum circumscribere.* Euclid. lib. 4. prop. 5.

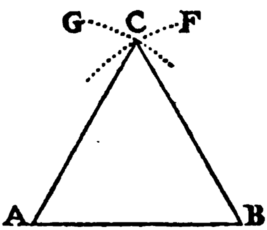
Constr., & Demonstratio. Patet ex n. 131. Perinde enim est per tria data puncta A, B, C non ad unam rectam posita circulum describere.

PROPOSITIO II.

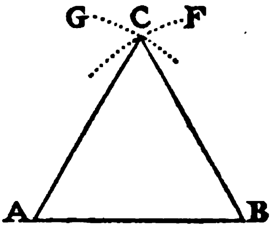
PROBLEMA.

208. S*Uper datà rectà* AB *triangulum æquilaterum construere.* Euclid. lib. 1. prop. 1.

Constructio. Centro A intervallo AB describatur arcus GC; & rursum centro B eodem intervallo alius, qui priori occurret in C; ducanturque rectæ CA, CB. Dico factum.



Demonſtratio. Latera ſingula CA & CB ſunt æqualia eidem tertio lateri AB per Definit. circuli. Ergo (n. 36.) ſunt æqualia inter ſe. Quare triangulum ACB eſt æquilaterum. Quod erat &c.



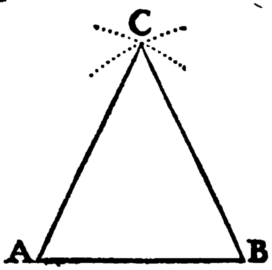
PROPOSITIO III.

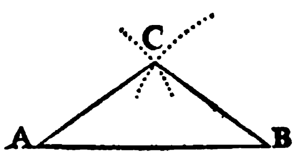
PROBLEMA.

209. *Super datà rectà* AB *triangulum iſoſceles conſtruere*.

Conſtructio. Centris A & B, intervallo verò majore, quàm AB, ſi datam rectam eſſe velimus minus latus, vel minore, ſi eamdem in latus majus eligamus, deſcribantur duo arcus, qui ſeſe invicem ſecent in C; ducanturque rectæ CA, CB. Dico factum.

Demonſtratio. Patet ex conſtructione. Quoniam AC, BC æquales erunt propter æquale intervallum aſſumptum, majus ſcilicet, aut minus, quàm recta AB. Quod erat &c.





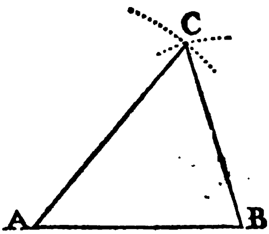
PRO-

PROPOSITIO IV.

PROBLEMA.

210. *SUper datà rectà* AB *triangulum scalenum construere.*

Constructio. Centris A & B, intervallis utrinque inequalibus inter se, & cum data recta AB, describantur arcus sibi mutuò occurrentes in C; junganturque rectæ CA, CB. Dico factum.



Demonstratio consequitur ex inæqualitate intervallorum, quæ assumpta fuerunt in constructione.

PROPOSITIO V.

THEOREMA.

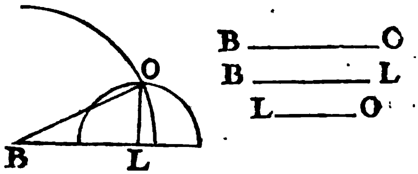
211. *OMnis trianguli duo quælibet latera reliquo sunt majora.* Euclid. lib. 1. prop. 20.

Demonstratio immediatè consequitur ex definitione lineæ rectæ (n. 22.), & ex n. 28.

PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

212. *EX tribus datis rectis* BO, BL, LO, *quarum duæ quælibet reliqua sint majores, triangulum constituere.* Euclid. lib. 1. prop. 22.



Constructionem, & demonstrationem habes in Prop. 1., & sequentibus.

Scholion.

QUæ consequuntur Theoremata, in Euclidæa demonstrandi methodo videri solent, saltem pleraque, subobscuriuscula Tironibus, ut notat etiam Clavius lib. 1. *prop.* 5. *in scholio, propter multitudinem linearum, & angulorum, quibus nundum assueti sunt. Horum itaque demonstrationem ex Prop.* 1. 5. 6. *Elem.* 4. *multò planiorem dabo, minùsque intricatam linearum occursu, & angulorum copiâ.*

PROPOSITIO VII.

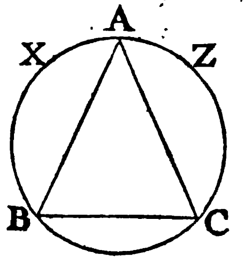
THEOREMA.

213. *OMnis trianguli* ABC *tres simul anguli duobus rectis sunt æquales.*

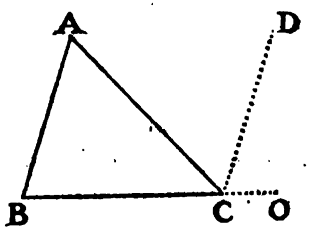
Ac

Ac proinde conficiunt gradus 180. *Euclid. lib. 1. prop. 32. pars 2.*

Demonstratio. Triangulo ABC circumscribe circulum (n. 131.). Angulus quivis, cujus vertex est in circumferentia, habet pro mensura semissem arcus a suis lateribus intercepti (*n.* 171.). Sed trianguli tres simul anguli A, B, C totam circumferentiam suis lateribus intercipiunt. Ergo tres simul anguli habent pro mensura semissem circumferentiæ, atque adeo duobus rectis æquales sunt. Quod erat &c.



Aliter ex theoria parallelarum. Producatur latus BC in O; ducaturque CD parallela lateri AB. Alterni anguli A & ACD sunt æquales; & internus B par est externo DCO ad eamdem partem (n. 108. & 110.). Tres itaque anguli trianguli ABC æquales sunt tribus angulis ACB, ACD, DCO ad unum punctum C constitutis, qui duos rectos conficiunt (n. 81.). Quod erat &c.



Corollarium I.

214. TRes simul anguli cujusvis trianguli æquales sunt tribus simul cujuscumque alterius. Trium angulorum analysis.

Corollarium II.

215. SI in uno triangulo duo anguli aut singuli, aut simul, æquales sint duobus angulis aut singulis, aut simul in altero triangulo, etiam tertius tertio æqualis erit.

Corollarium III.

216. SI in triangulo unus est rectus, reliqui duo simul etiam unum rectum conficiunt; & horum quilibet erit acutus.

Corollarium IV.

217. SI in triangulo unus est obtusus, reliqui duo simul recto minorem conficient; & horum quilibet erit acutus.

Corollarium V.

218. ITaque omne triangulum habere potest unicum angulum rectum, unicum obtusum, tres acutos; rectum verò cum obtuso habere non potest.

Corollarium VI.

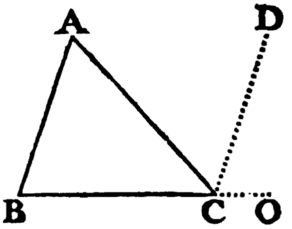
219. OMnis trianguli duo quicunque anguli duobus rectis minores sunt. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 17.

De-

Definitio.

220. R*Ectilineæ figuræ externus angulus est, qui producto latere extra figuram oritur.*

Talis est angulus ACO.



Externus angulus.

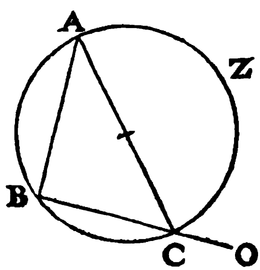
PROPOSITIO VIII.

THEOREMA.

221. O*Mnis trianguli* ABC *externus quivis angulus* ACO *duobus internis oppositis* A *&* B *æqualis est*. Euclid. lib. 1. prop. 32. pars 1.

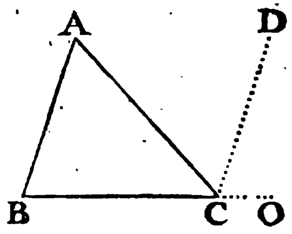
Demonstratio. Triangulo ABC circumscribatur circulus. Angulus externus ACO habet pro mensura $\frac{BC}{2} + \frac{AZC}{2}$ (n. 195.). Atqui angulus A habet pro mensura $\frac{BC}{2}$, & angulus B habet pro mensura $\frac{AZC}{2}$ (n. 171.).

Ergo summa mensurarum utriusque anguli interni oppositi A & B metitur angulum externum ACO; & consequenter externus angulus duobus internis oppositis æqualis est. Quod erat &c.



Aliter

Aliter ex theoria paralellarum. Producatur latus BC in O; ducaturque CD parallela lateri AB. Alterni anguli A & ACD sunt æquales; & internus B par est externo DCO. Ergo angulus externus ACO, hoc est, ACD+DCO, æquatur summæ duorum internorum oppositorum A & B. Quod erat &c.



Corollarium.

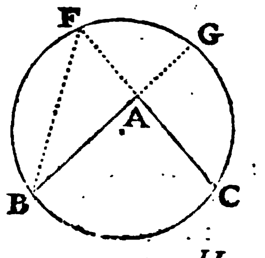
222. ERgo angulus externus ACO major est alterutro internorum oppositorum.

Scholion.

223. *AB hoc Theoremate immediatè, tanquam totidem corollaria, deduci possent omnia ea, quæ Elem. 4. demonstravimus, Theoremata de mensura angulorum, quorum vertex est vel inter centrum, & circumferentiam, vel etiam extra circulum. Itaque*

I. Angulus BAC, *cujus vertex est inter centrum, & circumferentiam, habet pro mensura semissem arcus* BC *a suis lateribus intercepti, & semissem arcus* FG *intercepti a lateribus sibi oppositi anguli.*

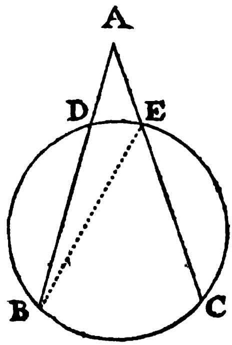
Nam, ductà chordà BF, *angulus* BAC *externus respectu trianguli* ABF, *æquatur duobus internis oppositis* F *&* B; *& consequenter habebit pro mensura summam mensurarum horum duorum angulorum, hoc est,* $\frac{BC}{2}+\frac{FG}{2}$ (*n.* 171.).



II.

II. Angulus BAC, *cujus vertex est extra circulum, habet pro mensura semissem arcus concavi* BC *a suis lateribus intercepti, minùs semissi arcus convexi* DE *ab iisdem pariter lateribus comprehensi.*

Nam, ductà chordà BE, *angulus* BEC *erit externus triangulo* ABE. *Quare angulus* $A + B = BEC$; *& consequenter angulus* $A = BEC - B$. *Atqui* (*n.* 171.) *angulus* BEC *habet pro mensura* $\frac{BC}{2}$, *& angulus* B *pariter pro mensura habet arcum* $\frac{DE}{2}$. *Ergo angulus* A, *sive* $BEC - B$, *habet pro mensura* $\frac{BC}{2} - \frac{DE}{2}$.



PROPOSITIO IX.

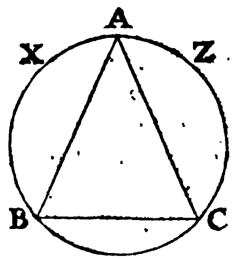
THEOREMA.

224. *In eodem triangulo* ABC *latera* AB, AC *opposita æqualibus angulis* C *&* B *sunt æqualia.* Trium laterum analysis.

Et reciprocè, anguli æqualibus lateribus oppositi sunt æquales. Euclid. lib. 1. prop. *6.*

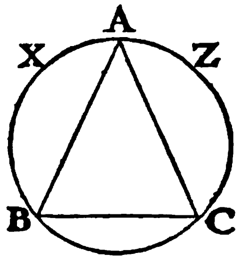
Constructio. Triangulo ABC circumscribatur circulus.

Demonstratur I. pars. Quoniam angulus $B = C$, erit arcus $AZC = AXB$ (n. 179.); & consequenter chorda, seu latus $AC = AB$ (n. 135.). Quod erat primum.



Demon-

Demonstratur II. pars. Nam, quia latus AB $=$ AC, erit arcus AXB $=$ AZC (n. 135.); & consequenter angulus C $=$ B (n. 179.). Quod erat alterum.



Corollarium I.

225. ÆQuiangulum ergo triangulum etiam æquilaterum est. Et vicissim.

Corollarium II.

226. TRianguli isoscelis, seu æquicruris ad basim anguli sunt æquales. Et vicissim, si anguli ad basim sint æquales, triangulum est isosceles. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 5.

PROPOSITIO X.

THEOREMA.

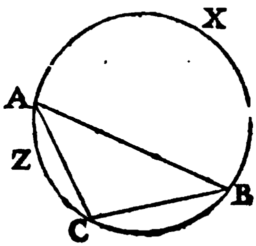
227. I*N eodem triangulo* ABC *latus majus* AB *opponitur angulo majori* C.

Et reciprocè, angulus major C *opponitur majori lateri*. Euclid. lib. 1. prop. 18. & 19.

Constructio. Triangulo ABC circumscribatur circulus.

Demon-

Demonstratur I. pars. Quoniam angulus C > B, erit arcus AXB > AZC (n. 179.); & consequenter chorda, seu latus AB > AC (n. 135.). Quod erat primum.



Demonstratur II. pars. Nam, quia latus, seu chorda AB > AC, erit arcus AXB > AZC (n. 135.); & consequenter angulus C > B (n. 179.). Quod erat alterum.

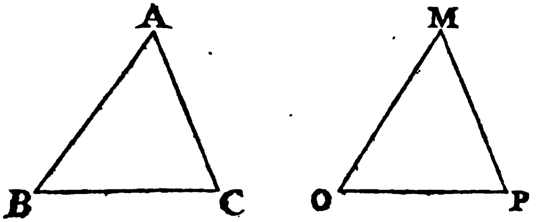
Corollarium.

228. TRiangulum itaque, cujus tres anguli sunt inæquales, habet tria latera inæqualia, adeoque scalenum est. Et reciprocè.

PROPOSITIO XI.

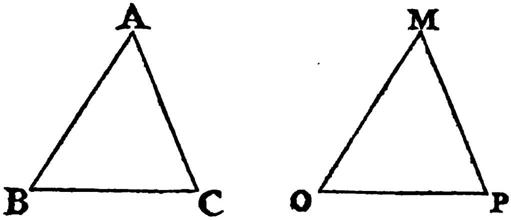
THEOREMA.

229. *SI duorum triangulorum* ABC, MOP *latus unum* AB *uni* MO, *&* *alterum* AC *alteri* MP *sit æquale, angulique* A *&* M *ab illis lateribus facti etiam sint æquales, æquabuntur & bases, & tota triangula, & reliqui ad basim anguli.* Euclid. lib. 1. prop. 4.



De-

Demonstratio. Vertex A anguli BAC superimponatur vertici M anguli æqualis OMP, ita ut latus AB cadat super latus ipsi æquale MO. Perspicuum est (n. 46.), quòd latus AC cadet supra latus MP, & punctum C in P; nam AC=MP. Ergo tria puncta A, B, C cadent supra tria puncta M, O, P; atque adeo basis BC tota cadet supra totam basim OP. Sed & anguli B & O itemque C & P, totaque triangula sibi mutuò congruent. Omnia igitur per Axioma 4. n. 36. sunt æqualia. Quod erat &c.



PROPOSITIO XII.

THEOREMA.

230. *Si duorum triangulorum* ABC, MOP *latus* BC=OP, *anguli que illis lateribus adjacentes, nimirum*, B *&* C, *ipsis* O *&* P *fuerint æquales, omnia reliqua, & triangula ipsa æqualia erunt.*

Demonstratio. Latus OP superimponatur lateri sibi æquali BC. Puncta O & P cadent supra puncta B & C; quoniam OP=BC. Sed quia angulus O=B, latus MO cadet supra latus AB; & quia angulus P=C, latus PM cadet supra AC (n. 46.). Ergo tria latera trianguli MOP cadent supra tria latera trianguli ABC. Ergo omnia sunt per Axioma 4. n. 36. æqualia. Quod erat &c.

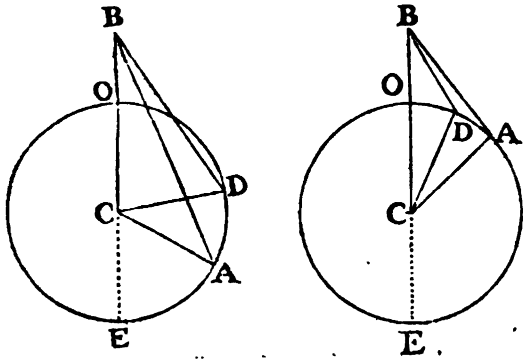
PRO-

PROPOSITIO XIII.

THEOREMA.

231. *Si duo triangula* BCA, BCD *duo latera* BC, CA *duobus* BC, CD, *alterum alteri æqualia habuerint; unum verò triangulum angulum illis lateribus contentum* BCA *majorem habeat altero* BCD, *habebit quoque basim* BA *majorem basi* BD.

Et reciprocè, si basim majorem habuerit, habebit angulum majorem. Euclid. lib. 1. prop. 24. & 25.

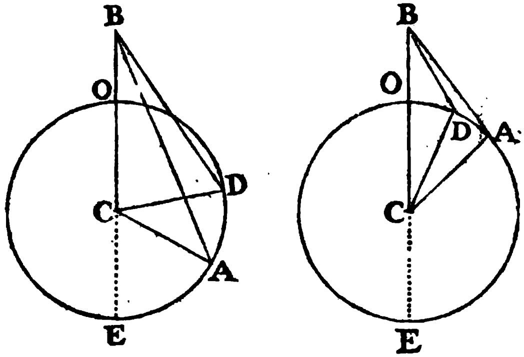


Constructio. Vertex C anguli BCA superimponatur vertici C anguli BCD, hac lege, ut latus BC primi cadat supra latus ipsi æquale BC secundi; tum facto centro in C, intervallo CA describatur circumferentia, quæ transibit per D; nam CA=CD; denique producatur latus BC, donec circumferentiæ occurrat in E. His positis

Demonstratur I. pars. Quoniam angulus BCA major est angulo BCD, etiam arcus OA, mensura anguli BCA major erit arcu OD mensura anguli BCD.

BCD. Ergo punctum A proximius, punctum D remotius erit ab extremitate E rectæ BE transeuntis per centrum; atque hinc sequitur (n. 132.) BA > BD. Quod erat primum.

Demonstratur II. pars. Nam, quia basis BA major est basi BD, punctum A proximius, punctum D remotius erit a termino E rectæ BE transeuntis per centrum (n. 132.): hoc est, arcus EA < arcu ED. Ergo arcus OA, mensura anguli BCA major est arcu OD mensura anguli BCD; & consequenter angulus BCA > angulo BCD. Quod erat alterum.



PROPOSITIO XIV.

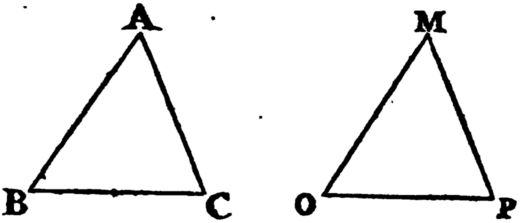
THEOREMA.

232. S*I duo triangula* ABC, MOP *habuerint omnia latera sibi mutuò æqualia, etiam angulos omnes æqualibus lateribus oppositos habebunt æquales.* Euclid. lib. I. prop. 8.

Demonstratio. Ut duo proposita triangula ABC, MOP demonstrentur perfectè æqualia, satis est

(n. 229.),

(n. 229.), si ostendatur duos angulos, puta, ABC, MOP, fore æquales; quod ex præcedenti Prop. consequitur. Nam, si anguli ABC, MOP essent inæquales, latera AC, MP hisce duobus angulis opposita, non essent æqualia, contra hypothesim. Quod erat &c.



Scholion.

233. *Habes jam tres præcipuos characteres, ac signa certissima, quibus evidenter constare tibi possit an duo triangula sint perfectè æqualia. Quia verò hæc æqualitatis perfectæ signa magni sunt usus in Geometria, non erit abs re horum synopsim hoc loco instituere ad juvandam Tironum memoriam.* Triplex criterium æqualitatis.

Duo triangula ABC, MOP *erunt perfectè æqualia,*

I. Quando habuerint omnia latera sibi mutuò æqualia (*n.* 232.)*:*

II. Quando duo latera unius duobus alterius æqualia habuerint, utrumque utrique, & angulum angulo æqualem sub æqualibus lateribus contentum (*n.* 229.)*:*

III. Quando latus unum uni æquale habuerint, angulosque illis lateribus adjacentes æquales, utrumque utrique (*n.* 230.).

Ex hoc triplici criterio, quo duorum triangulorum perfecta æqualitas decernitur, triplex aperitur via resolvendi sequens Problema.

PROPOSITIO XV.

PROBLEMA.

234. **T***Riangulum* MOP *construere æquale dato triangulo* ABC.

Primus resolvendi modus. Fiat MP par lateri BC trianguli ABC; tum centro M intervallo BA describatur arcus EOF; & centro P intervallo AC describatur arcus GOH, qui priorem secet in O; ducanturque rectæ OM, OP. Dico factum.

Triplex constructio.

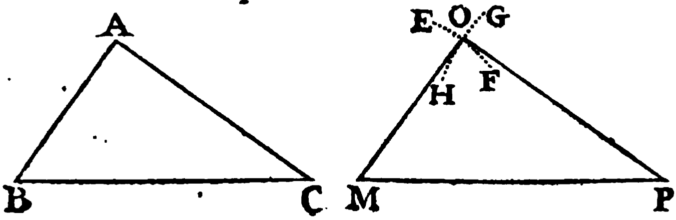
Demonstratio. Nam omnia latera per constructionem sunt mutuò æqualia. Quod erat &c.

Secundus resolvendi modus. Fiat angulus MOP (n. 64.) æqualis angulo BAC dati trianguli; tum cape OM = AB, & OP = AC; ducaturque recta MP. Dico factum.

Demonstratio. Nam duo triangula habent duo latera duobus lateribus æqualia, utrumque utrique, & angulum angulo æqualem sub æqualibus lateribus contentum. Quod erat &c.

Tertius resolvendi modus. Fiat MP = BC; ducanturque rectæ MO, PO, quæ cum recta MP angulos M & P efficiant pares duobus angulis B & C (n. 64.) dati trianguli ABC, & concurrant in O. Dico factum.

Demonstratio. Nam anguli æqualibus lateribus adjacentes sunt æquales. Quod erat &c.



PRO-

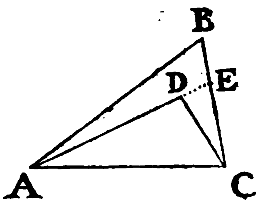
PROPOSITIO XVI.

THEOREMA.

235. *SI a terminis unius lateris* AC *intra triangulum* ABC *duæ rectæ jungantur* AD, CD, *hæ lateribus trianguli* AB, CB *minores sunt, majorem verò angulum* ADC *comprehendunt*. Euclid. lib. I. prop. 21.

Prima pars demonstrata est n. 88.

Demonstratur II. pars. Produc AD in E. Angulus externus CDA (n. 221.) major est angulo interno DEC, qui, cum sit externus respectu anguli B, eodem pariter major est. Ergo ADC multò major est, quàm B. Quod erat &c.



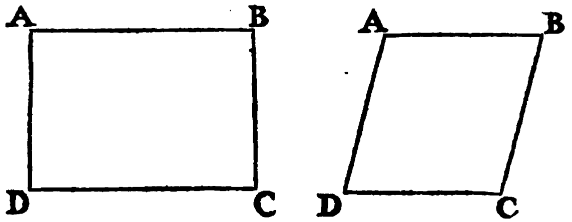
ELEMENTUM VI.

De Quadrilateris.

DEFINITIONES.

236. TRILATERAM *superficiem excipit Quadrilatera, quatuor rectis lineis, quæ latera vocantur, undique terminata, totidemque angulos continens.* Hæc pro varia laterum, & angulorum ratione sortitur diversa nomina.

237. *Quadrilaterum* ABCD, *cujus bina opposita latera sunt parallela, nimirum,* AD *ipsi* BC, *&* AB *ipsi* DC, *vocatur Parallelogrammum.* Parallelogrammum.

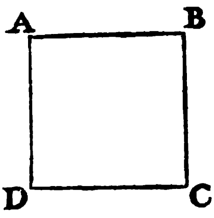


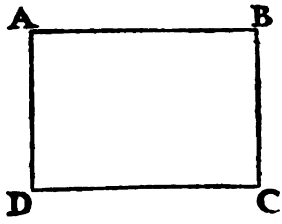
At quadrilaterum, cujus non omnia opposita latera sunt parallella, dici solet Trapezium. Trapezium.

238. *Parallelogrammum, cujus omnes anguli sint æquales, & consequenter recti (n. 49.), vocatur Rectangulum; illud verò, cujus omnes anguli non sunt æquales, Rhomboides dicitur.* Rectangulũ. Rhomboides.

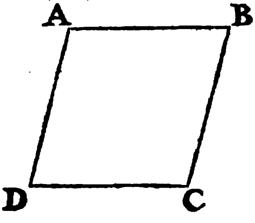
239. *Rectangulum, cujus omnia latera sint inter se æqualia, Quadratum nuncupatur; cujus autem* Quadratum.

opposita tantùm latera æqualia sunt, Rectangulum simpliciter dicitur.





Rhombus. 240. *Rhomboides, cujus omnia latera sunt inter se æqualia, Rhombus nominatur.*



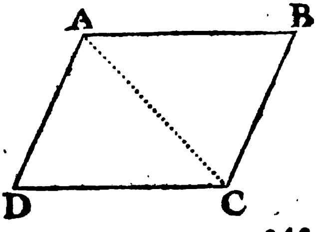
Corollarium.

241. QUadratum & æquilaterum, & rectangulum est.

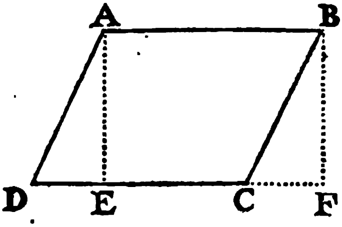
Rhombus figura est æquilatera, sed non rectangula.

Rhomboides neque æquilatera est, neque rectangula.

Diameter. 242. *Parallelogrammi Diameter, sive diagonalis est recta* A C *per angulos oppositos ducta.*



243. *Recta* A E, *seu* B F *ducta ab uno latere* A B *perpendiculariter in latus oppositum* DC, *productum, si opus sit, dicitur Altitudo parallelogrammi.* Altitudo.



Scholion.

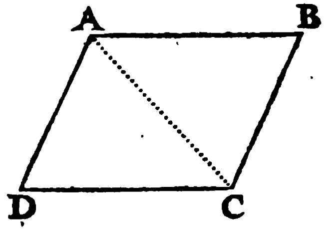
Parallelogrammum designari solet non modò quatuor litteris, sed interdum duabus ad oppositos angulos constitutis.

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

244. *Omne quadrilaterum* A B C D *habens duo opposita latera* A B, D C *æqualia, & parallela, habet etiam duo reliqua* A D, B C *pariter æqualia, & parallela.* Euclid. lib. 1. prop. 33.

Demonstratio. Ducta ad oppositos angulos diagonali A C, cum rectæ A B, C D sint parallelæ, anguli alterni B A C, D C A erunt æquales (n. 110.). Duo autem latera A B, C D per hypothesim sunt æqualia; & latus A C est commune utrique triangulo B A C, D C A. Ergo (n. 229.) duo triangula B A C, D C A erunt perfectè æqualia, hoc est, & mutuò æquilatera, & mutuò æquiangula. Itaque erit B C = A D; & angulus A C B = C A D alterno; & consequenter (n. 113.) rectæ B C, A D sunt parallelæ. Quod erat &c.

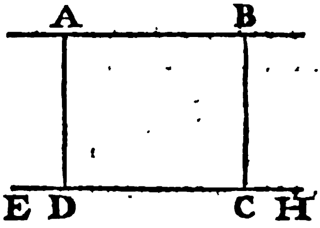


Corollarium I.

245. QUadrilaterum, cujus duo opposita latera sunt æqualia, & parallela, est parallelogrammum.

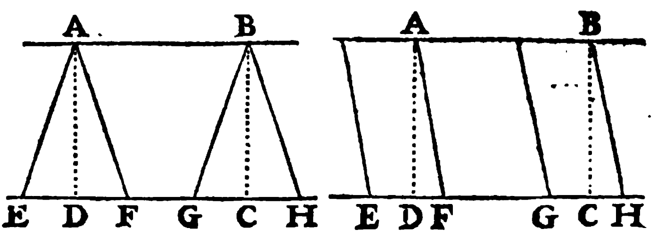
Corollarium II.

246. QUoniam duæ perpendiculares AD, BC eidem rectæ EH, sunt parallelæ inter se (n. 91.), si præterea eædem perpendiculares AD, BC sint pariter inter se æquales, erunt rectæ AB, EH, quæ illas intercipiunt, parallelæ.



Corollarium III.

247. ERgo, si plura triangula, aut parallelogramma EAF, GBH super eàdem rectà EH, & ad eamdem partem constituta habeant altitudines AD, BC æquales, rectæ AB, EH, quæ illas intercipiunt, erunt parallelæ (n. 246.).



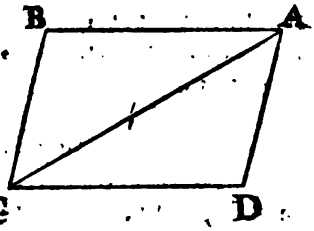
PRO-

PROPOSITIO II.

THEOREMA.

248. *Omne quadrilaterum, cujus bina opposita latera sunt parallela, & idcirco parallelogrammum dicitur, habet etiam bina opposita latera æqualia.* Euclid. lib. 1. prop. 34. pars 1.

Demonstratio. Ducatur diameter AC. Quoniam AB, DC sunt parallelæ, erunt anguli alterni BAC, DCA æquales (n. 110.). Rursus, quia AD, BC sunt parallelæ, erunt pariter & anguli alterni BCA, DAC æquales. Itaque, cum duo anguli BAC, BCA trianguli ABC æquales sint duobus angulis DCA, DAC alterius trianguli ADC, uterque utrique, & latus AC dictis angulis adjacens commune utrique triangulo, erunt (n. 230.) duo triangula perfectè æqualia; & consequenter AB=CD, & BC=DA. Quod erat &c.



Corollarium I.

249. Ergo diameter AC dividit parallelogrammum ABCD in duo æqualia triangula BAC, DCA. *Euclid. lib. 1. prop. 34. pars 2.*

Corol-

Corollarium II.

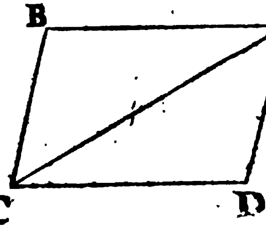
250. ET parallelogrammum ABCD est duplum trianguli DCA habentis eamdem basim, & altitudinem. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 41.

PROPOSITIO III.

THEOREMA.

251. *OMne quadrilaterum* ABCD, *cujus bina opposita latera sunt æqualia, habet etiam eadem parallela, & consequenter parallelogrammum est.*

Demonstratio. Ductâ ad oppositos angulos rectâ AC, duo triangula ABC, ADC sunt per hypothesim inter se mutuò æquilatera; ergo & æquiangula (n. 232.): æquales nimirum erunt anguli BAC, DCA, & anguli BCA, DAC; ergo, cum sint alterni, tam rectæ AB, CD, quàm rectæ BC, AD sunt parallelæ (n. 113.). Quod erat &c.



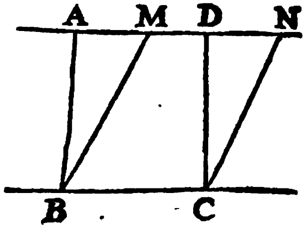
PRO-

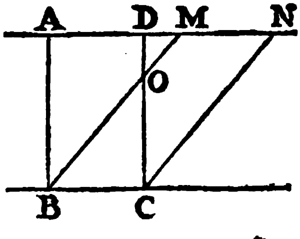
PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

252. *Parallelogramma* ABCD, MBCN *super eadem basi* BC, *& inter easdem parallelas constituta, sunt æqualia*. Euclid. lib. 1. prop. 35. & 36. Parallelogrammorum æqualitas,

Demonstratio. In utroque casu, quem figura exhibet, triangula ABM, DCN sunt sibi mutuò æquilatera. Nam AB = DC, latera nimirum opposita ejusdem parallelogrammi ABCD (n. 248.). Rursus BM = CN eadem de causa; & pariter AD = BC, & BC = MN; ergo AD = MN; sublatoque utrinque MD, ut in casu primo, vel utrinque addito MD, ut in casu secundo, erit AM = DN. Duo itaque triangula ABM, DCN sunt sibi mutuò æquilatera, & perfectè æqualia. Quare in casu primo, si duobus hisce triangulis addatur commune trapezium MBCD, fiet parallelogrammum ABCD æquale parallelogrammo MBCN. Vel in casu secundo, ab iisdem æqualibus triangulis dempto communi triangulo DOM, erunt duo residua quadrilatera ABOD, MOCN inter se æqualia; & rursus addito communi triangulo BOC erit parallelogrammum ABCD æquale parallelogrammo MBCN. Quod erat &c.





Co-

Corollarium I.

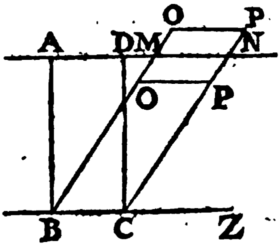
253. DUo parallelogramma sunt æqualia, si habeant bases æquales, & altitudines æquales.

Nam & constitui poterunt super eamdem basim, & erunt inter easdem parallelas (n. 247.).

Corollarium II.

254. DUo parallelogramma ABCD, OBCP non sunt æqualia,

Inæqualitas. si basim quidem habeant eamdem BC, sed intra easdem parallelas AN, BZ non sint constituta.



Nam ABCD = MBCN (n. 252.). Atqui MBCN > vel < OBCP. Ergo ABCD > vel < OBCP.

Corollarium III.

255. PArallelogramma æqualia super bases æquales, vel eamdem, sunt inter easdem parallelas.

Corollarium IV.

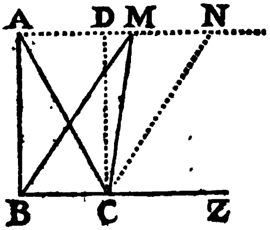
256. ET, si duo parallelogramma inter easdem parallelas habeant bases inæquales, illud, cujus basis major est, majus erit. Et contra, si duo parallelogramma sint inæqualia inter easdem parallelas, basis majoris major erit.

Co-

Corollarium V.

257. DUo triangula BAC, BMC super eàdem basi BC constituta, & in eisdem parallelis AN, BZ, inter se sunt æqualia. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 37. Triangulorum æqualitas,

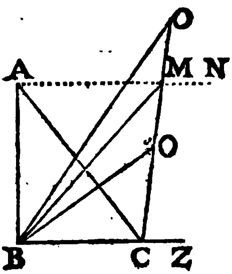
Ducatur CD parallela lateri BA, & CN parallela lateri BM: erit parallelogrammum ABCD = MBCN (n. 252). Sed horum dimidia sunt triangula BAC, BMC (n. 249. & 250.); ergo sunt æqualia. Triangula igitur super eadem basi &c.



Corollarium VI.

258. TRiangula igitur BAC, BOC non sunt æqualia, si habeant quidem basim eamdem BC, sed inter easdem parallelas AN, BZ non sint constituta. Inæqualitas.

Nam triangulum BAC = BMC per Corol. 5. Sed BMC > aut < BOC. Ergo pariter BAC > aut < BOC.



Corollarium VII.

259. HInc, si duo triangula BAC, BMC super eàdem basi BC constituta, sint æqualia,

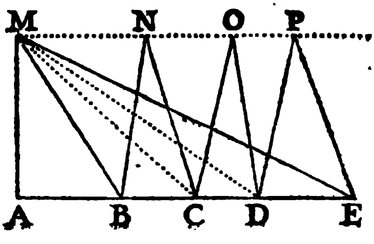
lia, erunt inter easdem parallelas. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 39. & 40.

Duo triangula sunt pariter æqualia, si æquales habeant bases, & altitudines æquales.

Corollarium VIII.

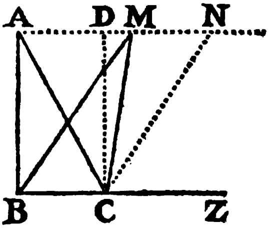
260. ERgo, si plura sint triangula AMB, BNC, COD, DPE &c., quorum bases singulæ AB, BC, CD, DE eamdem rectam AE constituant, & omnium altitudo sit eadem, omnia simul sumpta æqualia erunt soli triangulo AME, cujus altitudo sit eadem, & basis AE summa sit basium triangulorum omnium.

Nam, si omnia hæc triangula sunt ejusdem altitudinis, poterunt inter easdem parallelas MP, AE constitui. Ducantur MC, MD, ME. Triangula AMB, BNC, COD, DPE æqualia erunt triangulis AMB, BMC, CMD, DME, singula singulis. Atqui AMB+BMC+CMD+DME=AME. Ergo AMB+BNC+COD+DPE=AME.



Corollarium IX.

261. EX eodem Theoremate opportunè P. Boschovich in suis elementis ostendit nullam esse quantitatem ita tenuem, qua minor dari non possit. Cum enim AN in infinitum produci possit, puncto N magis ac magis recedente a puncto A, dummodo sumatur $MN = BC = AD$, semper parallelogrammum BMNC utcunque productum æquale erit parallelogrammo ABCD; unde apparet nullum in eo producendo, vel attenuando limitem inveniri. Quantitates infinitè parvæ.



Dimensio cujusvis Figuræ Trilateræ, & Quadrilateræ.

262. OBservavimus Lib. 1. n. 9. Comment. Arith. univ. morem invaluisse apud Geometras, ut genesis, seu descriptio superficiei per lineam super alià lineà ad rectos angulos se moventem, dicatur multiplicatio istarum linearum. Nam, quamvis linea utcunque multiplicata non possit evadere superficies, adeoque hæc superficiei e lineis generatio longè alia sit a multiplicatione: in hoc tamen conveniunt, inquit Newtonus, quòd numerus unitatum in alterutra linea, multiplicatus per numerum unitatum in altera, producat abstractum numerum unitatum in superficie lineis istis comprehensa, si modò unitas superficialis definiatur, ut solet, Quadratum, cujus latera sunt unitates lineares. Est autem similis analogía solidi, quod continua trium quantitatum multiplicatione producitur.

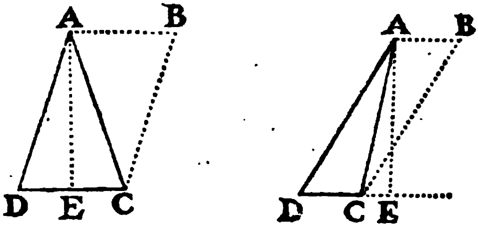
citur. Verùm, quia hinc pendet dimensio superficierum, & solidorum, horum genesim accurratiùs hoc loco evolvam.

PROPOSITIO V.

THEOREMA.

Dimensio parallelogrammi,

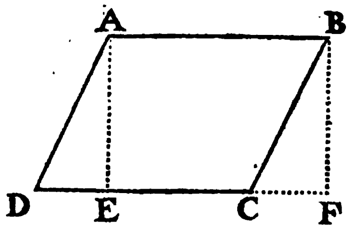
263. *Parallelogrammi cujusvis area, seu superficies* ABCD *æqualis est producto, quod ex ductu basis* DC *in suam altitudinem perpendicularem* AE *emergit.*



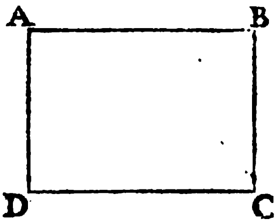
Demonstratio. Si basis DC motu sibi parallelo moveatur super latus DA, superficiem parallelogrammi generat; basis autem DC hoc motu traducta in AB, tantùm a sua pristina positione recedit, quanta est portio perpendicularis AE a duabus parallelis AB, DC intercepta. Itaque linea generatrix DC, recedendo a sua pristina positione, transit successivè per omnia puncta perpendicularis AE, & ad quodvis ejusdem perpendicularis punctum fluxu suo lineam gignit sibi æqualem. Ergo quot sunt puncta in altitudine AE, totidem lineis ipsi DC æqualibus componitur superficies inde genita. Quare area, seu superficies parallelogrammi ABCD habebitur, sumendo toties suam basim DC, quot sunt puncta in sua altitutitudine AE: hoc est, multiplicando basim DC in numerum punctorum, quibus componitur altitudo AE; qui numerus melius exprimi non potest, quàm per ipsammet altitudinem AE. Ergo parallelogrammi cujusvis area &c. Quod erat &c.

Corollarium I.

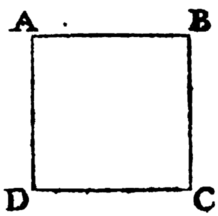
264. SI parallelogrammum ABCD sit rhomboides, a quovis puncto lateris AB in basim CD, productam, si opus sit, perpendicularis AE demissa dabit ejusdem altitudinē; adeoque DC×AE erit superficies quæsita. Rhomboidis,



265. Si parallelogrammum ABCD sit rectangulum, ex ductu contiguorum laterum AD ×DC exprimetur superficies. Rectanguli,

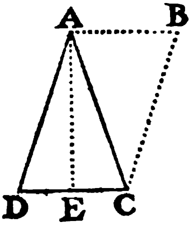


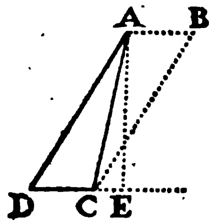
266. Si parallelogrammum ABCD sit quadratum, ex ductu unius lateris in se ipsum, nimirum, AD×AD, vel DC×DC, vel BC×BC, exprimetur ejusdem superficies, vel breviùs, $\overline{AD}^2$, $\overline{DC}^2$, $\overline{BC}^2$. Quadrati,



Corollarium II.

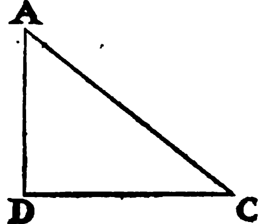
Trianguli, 267. CUm triangulum DAC sit (n. 250.) semissis parallelogrammi ABCD habentis eamdem basim DC, & eamdem altitudinem AE: hinc hujus producti $DC \times AE$ semissis erit area trianguli $DAC = \frac{DC \times AE}{2}$, vel $= DC \times \frac{AE}{2}$, vel $= AE \times \frac{DC}{2}$; hoc est, cujusvis trianguli area producitur ex semisse altitudinis ductâ in basim, sive ex altitudine tota ductâ in semissem basis.





Sit trianguli altitudo pedum 14, & basis pedum 20. Duc 14 in 20: fiunt pedes quadrati 280, cujus producti semissis 140 exhibet pedes quadratos, quibus triangulum datum æquale est. Vel, ex altitudine pedum 14 sume dimidium 7, & duc in basim 20. Vel, ex basi pedum 20 accipe semissem 10, & duc in altitudinem totam 14. In utroque casu provenient rursus 140 quadrati pedes pro area quæsita.

268. Si triangulum ADC sit rectangulum, latera DC, AD angulo recto D adjacentia, sunt invicem perpendicularia; atque adeo alterutrum duorum laterum obire potest vicem basis, & altitudinis.



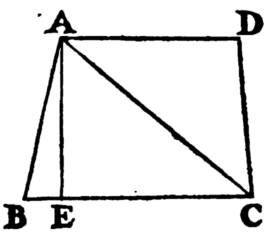
PRO-

PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

269. *Trapezii* ABCD, *quod duo latera* AD, CB *habeat parallela, area producitur ex dimidia summa laterum parallelorum in altitudinem, seu perpendicularem* AE. Trapezii.

Demonstratio. Area trapezii ABCD componitur ex duabus areis triangulorum ABC, ADC habentium eamdem altitudinem AE, propter parallelas AD, BC. Sed area utriusque trianguli producitur ex ductu ejusdem altitudinis AE in semissem basis AD, & semissem basis BC. Ergo trapezii ABCD area producitur &c. Quod erat &c.



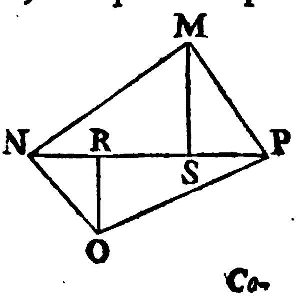
PROPOSITIO VII.

PROBLEMA.

270. *Trapezii cujuscunque* MNOP *aream investigare.*

Resolutio. Ducatur NP, ad quam ex punctis M & O age perpendiculares MS, OR: multiplica dimidiam NP per utramque perpendicularem; & habebis aream trapezii.

Demonstratio pendet ex n. 267.



Corollarium I.

271. HAbes jam praxim metiendarum superficierum passim occurrentium, nempe cubiculorum, aularum, parietum &c. Cum enim hæ superficies soleant esse rectangulæ, multiplicatio longitudinis per latitudinem, earum aream exhibet (n. 265.). Pariter, si scias quot lateres in longum, & in latum ad sternendum pavimentum requirantur, aut quot tegulæ tam in longum, quàm in latum a tecto capiantur, mulplicatio numerum earum notum faciet.

Praxis. *Sit area rectangula longa pedes* 160, *lata* 70: *quæratur, quot ea homines capiet,* 4 *pedibus quadratis in singulos assignatis.*

Duc areæ latera 160 *&* 70 *in se mutuò: proveniunt pedes quadrati* 11200 *pro area proposita: quibus divisis per* 4, *proveniunt* 2800 *pro numero hominum quæsito.*

Corollarium II.

272. VErùm, uti multiplicationis ope superficiem metimur, ita divisione incognitam longitudinem, vel latitudinem obtinemus. Nam divisio retexit, quod multiplicatio componit. Itaque area quævis per longitudinem divisa dat latitudinem, & vice versa. Hinc resolves sequentes Quæstiunculas ex Wallisio cap. 22. Arithm.

Quæstio I.

C*Um Jugerum Anglicanum contineat perticas quadratas* $160 = 4 \times 40$: *in agro parallelogrammo,* *mo, cujus latitudo est perticarum 8, quæritur, quanta sit oporteat longitudo, ut habeatur jugerum terræ?*

Dividendo 160 per 8, habetur longitudo quæsita 20. Vel, data longitudine 20, dividendo habetur latitudo 8.

Quæstio II.

SI planities cubiculi pedes 12 lata, longa verò 20, tegenda sit asserculis ligneis latis pedes 2: quanta sumenda est asserculorum conjunctorum longitudo, ut operi sufficiant?

Ducta latitudine 12 in longitudinem 20, habetur area pedum quadratorum 240: quam dividendo per asserculorum latitudinem 2, habetur longitudo quæsita 120.

Quæstio III.

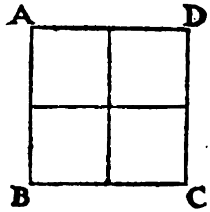
SI tapeti serico longo pedes 24, lato 8, inducendus sit a tergo pannus vilior latitudinem habens pedum 6: quæritur, quanta sit oporteat longitudo, ut operi sufficiat?

Duc 24 in 8: habebis aream totam 192: quam dividendo per 6 latitudinem panni, habetur longitudo quæsita 32.

Monitum.

273. *IN comparatione mensurarum, quas dimetiendis quantitatibus adhibemus, P. Dechales* Vulgaris error. *lib. 2. Geom. pract. prop. 29. errorem vulgarem detegit, quo nonnulli mensurarum superficialium partes eo modo inter se comparant, quo mensurarum linearium; quamvis longè aliter comparari debeant; aliamque habeant rationem ad totum suum, quàm eorum appellationes præseferre videantur.*

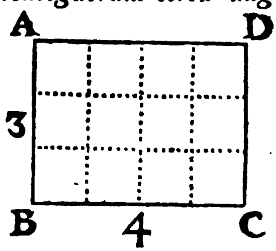
Agebatur, *inquit ipse*, aliquando de aulæ pavimento lateribus sternendo, cujus longitudo erat pedum 30, latitudo 20, atque adeo superficies pedum quadratorum 600; lateres autem quadrati erant, eorumque latus erat semipedis; atque adeo communi appellatione dicebantur continere semipedem quadratum. Quare, qui huic operi præerat, cum sciret aream aulæ esse 600 pedum quadratorum, mille ducentos lateres paravit, existimans in pede quadrato duos tantùm esse semipedes quadratos, cum tamen sint quatuor. Sit enim pes quadratus ABCD, seu quadratum, cujus latus sit unius pedis: perspicuum est in eo esse quatuor quadrata, quorum latera sunt æqualia semipedi. Exapeda linearis sex pedes habet, at quadrata, 36; atque ita de reliquis.



Qua verò proportione superficies crescant, exponetur infra.

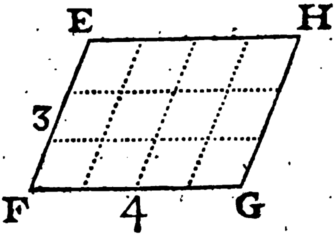
Scholion.

274. D*Iximus* (*n.* 265.) *parallelogrammi rectanguli cujusvis aream æqualem esse quantitati, quæ ex duorum laterum contiguorum circa angulum rectum invicem ductu emergit. Ut, si latitudo* AB $=3$ *ducatur in longitudinem* BC $=4$, *emerget area* ABCD$=12$; *adeoque rectangulum latum* 3 *pedes*, *&* *longum* 4, *continet pedes quadratos* 12.



At

At quæret fortaſſe Tiro, cur hæc contiguorum laterum multiplicatio ad parallelogrammum rectangulum reſtringitur? Namque idem videtur dicendum de obliquangulo; puta, ſi latera contigua EF, GF *circa angulum acutum* F, *vel etiam* HE, FE *circa angulum obtuſum* E, *invicem multiplicentur, quorum alterum ſit* 3, *alterum* 4 *pedes longum: emerget numerus* 12; *ipſumque parallelogrammum obliquangulum in totidem ſpatia dividitur æqualia, quorum latera ſingula contineant pariter pedem unum, non minùs, quàm ſi eſſet parallelogrammum rectangulum.* Hallucinatio Tironum.



Ut huic Tironum dubitationi, quæ familiaris eſſe ſolet, occurram, dico poſſe quidem parallelogrammum, etiam obliquangulum, in totidem ſpatia æqualia, & ſimilia dividi, quot deſignat mutua multiplicatio laterum duorum circa ipſius angulum quemvis conſtitutorum; eorumque ſpatiorum latera eſſe æqualia: puta, unius pedis linearis ſingula, non minùs, quàm ſi parallelogrammum fuiſſet rectangulum. Sed cavendum, ne per errorem quiſpiam putet ſpatia illa eſſe pedes quadratos, aut quidem totidem quadratis pedibus æqualia, quamvis quatuor lineis pedalibus terminentur ſingula. Rhombi enim ſunt ſpatiola illa, non quadrata, propter obliquitatem angulorum, & idcirco quadratis minora.

Cum autem animadverterim Tirones interdum labi in æſtimanda ſuperficierum magnitudine ex eorum ambitu, præjudicata eorum opinio ante convellenda eſt, quàm ad alia progrediar Geometriæ Elementa.

De Figuris Isoperimetris.

DEFINITIO.

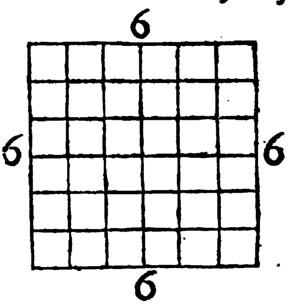
F*iguræ Isoperimetræ appellantur illæ, quæ linearum ambitus habent æquales inter se.*

PROPOSITIO VIII.

THEOREMA.

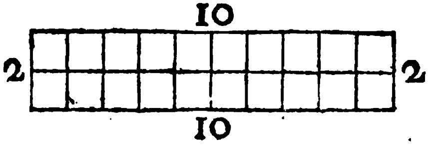
275. I*Nter figuras isoperimetras rectilineas major est illa, quæ & æquilatera est, & æquiangula.*

Esto quadratum, cujus latus quodlibet sit *6* pedum; ita ut totus ambitus contineat 24 pedes lineares: erit area (n. *266.*) 36 pedum quadratorum.



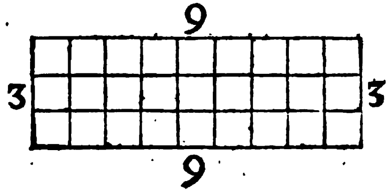
Figuræ Isoperimetrę invicem comparatæ.

Esto quoque aliquod parallelogrammum rectangulum, latum pedes lineares 10, altum pedes 2: erit hujus perimeter 24 æqualis perimetro quadrati; at area hujus parallelogrammi comprehendet tantummodo 20 quadrata parvula, ex illis 36, quæ quadratum in se continet.



Sit

Sit præterea aliud parallelogrammum rectangulum, cujus unumquodque duorum laterum oppositorum sit 9; aliorum verò duorum sit 3, ut & primi quadrati, & hujus parallelogrammi ambitus quoque sint æquales. Comprehendet igitur area hujus solùm 27 quadrata, ex illis 36, quæ in quadrato continentur.



Pari ratione, si parallelogrammi alicujus unumquodque duorum laterum oppositorum sit 8, & reliquorum sit 4, erit quidem ipsum quadrato isoperimetrum; sed ejus area continebit dumtaxat 32 quadrata.

Denique, si duo latera alicujus parallelogrammi opposita, singula haberent 7, reliqua verò haberent 5, esset etiam quadrato isoperimetrum; area autem illius includeret tantùm 35 quadrata.

Corollarium I.

276. HInc clarè vides, quò magis figuræ isoperimetræ accedunt ad æquilateram, cui sunt isoperimetræ, eò etiam majorem comprehendunt aream, & minùs differunt in capacitate a figura æquilatera. Quare ex parallelogrammis rectangulis isoperimetris quadratum est omnium maximum: ex parallelogrammis oblongis illud majus est, quod propiùs ad quadratum accedit: hoc est, cujus

Quadratum omnium maximum inter figuras ipsi isoperimetras.

cujus laterum differentia minor est. Quod sic etiam calculo litterali probari potest.

Sit quadrati cujusvis latus A: erit ipsius quadrati area $A \times A = A^2$; deinde fiat rectangulum oblongum, quadrato illi isoperimetrum: quod, ut fiat, tantundem addendum est longitudini, quantùm latitudini aufertur; illud autem, quantumcunque sit, dicatur C; fietque longitudo $A + C$, latitudo $A - C$; adeoque rectangulum quadrato isoperimetrum, quippe utriusque ambitus $4A$, ut laterum utrobique additione speciosa patet.

$$\begin{array}{rl} & A \\ + & A \\ + & A \\ + & A \\ \hline 4 & A \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & A + C \\ + & A - C \\ + & A + C \\ + & A - C \\ \hline 4 & A \end{array}$$

Erit ergo oblungi hujus rectanguli area, ductû longitudinis in latitudinem inventa, $AA - CC$, ut multiplicando patet; adeoque minor, quàm area quadrati AA. Quod erat primo probandum.

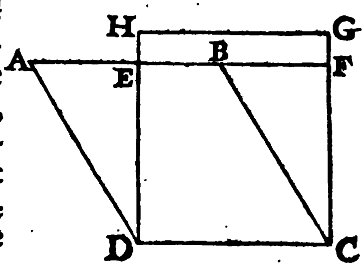
Sed & tànto minor, quantùm est quadratum quantitatis C, hoc est, quadratum semidifferentiæ laterum. Nam, si ex $A + C$ auferatur $A - C$, residuum, sive differentia est $2C$, ut subducendo patet; & propterea, quò majus est CC quadratum semidifferentiæ, eò plus ab AA deficit rectangulum oblongum, & proinde minus est. Quod erat alterum.

Co-

Corollarium II.

277. PArallelogrammum inæqualium angulorum ABCD, iſoperimetrum non eſt parallelogrammo rectangulo EDCF, inter eaſdem parallelas CD, AF, & ſuper eamdem baſim CD conſtituto.

Nam, ſi producantur rectæ DE, CF, ut ſint æquales ipſi DA, jungaturque HG, patet parallelogrammum CDHG majus fore parallelogrammo CDEF, hoc eſt, iſoperimetro ABCD, majus, inquam, exceſſu EFGH. Conſtat igitur inter figuras iſoperimetras, eam, quæ æquiangula eſt, eſſe omnium maximam.



Corollarium III.

278. INtelliges jam, quid impediat, quo minùs menſuras exprimere liceat per rhombos, æquè ac quadrata; magnitudines nimirum definiendæ ſunt per menſuras certas, ideoque per quadrata potius, quàm per rhombos; cum enim quadratorum omnium anguli recti ſint, adeoque inter ſe æquales: dato latere quadrati, de ejuſdem magnitudine conſtabit. Rhomborum autem anguli cum poſſint plus minuſve eſſe obliqui, latus datum nundum determinat magnitudinem rhombi, quæ quidem major minorve erit, prout obliquitas minor

Menſuræ ſuperficierum certæ, & determinatæ.

ma-

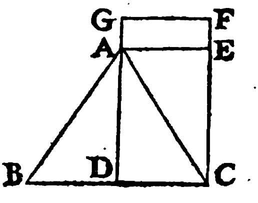
majorque fuerit. Itaque non rhombis, sed quadratis determinandæ sunt figurarum magnitudines.

PROPOSITIO IX.

THEOREMA.

279. *Inter figuras isoperimetras major est illa, quæ plures continet angulos, plurave latera.*

Demonstratio. Triangulo æquilatero, vel isosceli ABC fiat æquale rectangulum ADCE (n.250.). Perspicuum est ambitum parallelogrammi ADCE minorem esse ambitu trianguli ABC. Nam duo latera AE, DC parallelogrammi simul sumpta, æqualia sunt lateri BC trianguli ABC; reliqua verò duo latera AD, CE parallelogrammi ADCE minora sunt reliquis duobus lateribus AB, AC trianguli ABC (n. 227.). Sit igitur recta DAG = AB; perficiaturque parallelogrammum CFGD, quod triangulo ABC erit isoperimetrum, & quantitate AEFG triangulum ABC superabit. Constat igitur figuram quadrilateram capaciorem esse figura triangulari sibi isoperimetra; eademque ratio est in aliis figuris plurium laterum, isoperimetris tamen; quò enim plures habet angulos figura, eò pluribus in locis latera ejus recedunt a centro, & medio, ac propterea capacior existit. Quod erat &c.



Co-

Corollarium.

280. HInc circulus omnium figurarum isoperimetrarum capacissimus est, quippe qui infinitos quodammodo includat angulos, & latera, omnibusque punctis æqualiter recedat a centro. Idem quoque dicendum de sphæra, si cum aliis corporibus sibi isoperimetris comparetur. Hinc abunde patet, quàm lubricum sit figurarum magnitudinem ex solo ambitu æstimare.

Circulus omnium maximus inter figuras ipsi isoperimetras.

Monitum.

281. P. *Tacquet lib. 2. Geom. pract. probl. 2. opportunè hoc loco occurrit dubitationi Tironum satis familiari. Parallelogrammum obliquum (idem dic de aliis figuris) nequit resolvi in quadrata, sic ut ea sibi mutuò opposita obliquum parallelogrammum præcisè expleant, eique commensurentur, & congruant (n. 275.); qua ergo ratione istud parallelogrammum potest mensurari per quadrata, puta, pedalia, & certo talium quadratorum numero esse æquale? Est quidem illa hallucinatio valde crassa, inquit ipse, sed tamen Tironibus familiaris. Sciant igitur illi tam superficies, quàm corpora æquari inter se posse, licet sint dissimilia, ac proinde unum alteri nequeat congruere, ut ex tota passim Geometria patet. Sic triangulo exhibetur æquale parallelogrammum. Congruentia igitur ad æqualitatem non requiritur, præterquam in rectis lineis, & angulis rectilineis, in quibus hæc ab illa inseparabilis est.*

Hallucinatio Tironibus familiaris.

ELE-

ELEMENTUM VII.

De Polygonis.

DEFINITIONES.

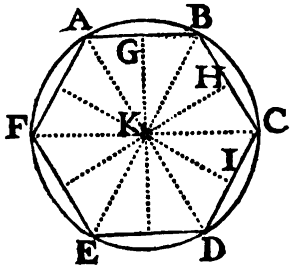
282. POLYGONUM *est plana superficies pluribus, quàm quatuor rectis lineis terminata.* Polygonum.

Hinc habita ratione laterum, quæ in infinitum multiplicari possunt, innumeræ oriuntur polygoni species; nam, quod quinque constat lateribus, pentagonum, quod sex, hexagonum, quod septem, heptagonum nominatur; atque ita de ceteris.

283. *Polygonum* ABCDEF *dicitur regulare, quod omnes angulos ad circumferentiam ejusdem circuli habet æquales, & omnia pariter latera æqualia.*

284. *Polygonum irregulare dicitur, quando non habet omnia latera æqualia, vel, quando ad circumferentiam ejusdem circuli suos omnes angulos habere non potest.*

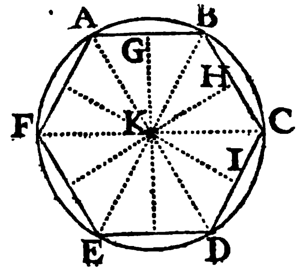
285. *Perpendicularis* KG *ducta a centro* K *circuli ad latus* AB *polygoni regularis vocatur Apotheme hujus polygoni.*



Co-

Corollarium I.

286. QUare, si a centro K ad omnes angulos polygoni regularis ducantur rectæ, polygonum dividitur in triangula AKB, BKC, CKD &c. perfectè æqualia. Nam singulorum duo latera sunt radii ejusdem circuli; & tertium est latus ipsum polygoni; adeoque triangula sunt sibi mutuò æquilatera.



Corollarium II.

287. SI præterea a centro K ducantur apothemes KG, KH, KI &c. erunt triangula BKG, BKH, CKH, CKI &c. inter se æqualia, & apothemes KG, KH, KI &c. inter se æquales.

Nam triangula AKB, BKC, CKD &c. cum sint & mutuò æquilatera, & æquiangula, & præterea apothemes KG, KH, KI &c., cum sint perpendiculares a centro K ductæ ad chordas æquales, hoc est, latera polygoni AB, BC, CD, cadent in medio harum chordarum (n. 146.), ita ut omnes semichordæ BG, BH, CH &c. sint æquales. Ergo (n. 229.) triangula rectangula GBK, HBK, HCK &c. sunt perfectè æqualia; & consequenter apothemes KG, KH, KI &c. erunt æquales.

PRO-

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

288. *SI chorda* AB *sit æqualis radio circuli, arcus, qui eam subtendit, æquatur sextæ parti circumferentiæ.*

Demonstratio. Ducantur radii KA; KB ad extremitates chordæ AB, quæ ponitur æqualis radio circuli. Triangulum AKB erit æquilaterum, & consequenter æquiangulum (n. 225.). Horum autem trium angulorum inter se æqualium summa habet pro mensura semissem circumferentiæ. Ergo arcus AB, qui eorum unum metitur, ideſt, angulum AKB, erit tertia pars semiperipheriæ, hoc eſt, sexta pars totius circumferentiæ. Quod erat &c.

Corollarium I.

ERgo eàdem, qua circulus describitur, aperturà circini, dividitur circumferentia in *6* partes æquales, & hexagonum regulare circulo inscribi poteſt.

Corollarium II.

LAtus hexagoni circulo inscripti eſt æquale radio. *Euclid. lib. 4. prop. 15. Corol.*

PROPOSITIO II.

PROBLEMA.

289. *Circulum datum in partes, seu gradus 360 dividere.*

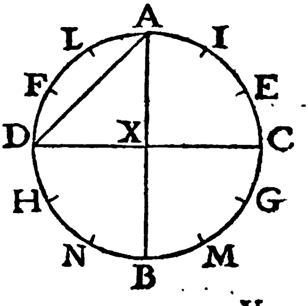
Resolutio. Sit datus circulus ADBC, cujus centrum X: sic eum in gradus 360 divides.

I. Per centrum X ducantur duæ diametri AB & DC, quæ se mutuò ad angulos rectos secent, & circumferentiam in quatuor partes dividant.

II. Servatà eàdem circini aperturà, qua circulus descriptus est, pone unius cruris apicem super A puncto extremo diametri AB; & alterius cruris apice notentur duo puncta E & F, quæ arcus abscindent AE, AF graduum 60 (n. 288.); & complementa horum arcuum, nimirum, EC, FD, erunt singula graduum 30.

III. Defixo rursum apice circini eodem intervallo in B, notentur crure altero duo puncta G & H, quæ similiter dabunt arcus BG, BH graduum 60, & horum arcuum complementa GC, HD graduum 30.

IV. Simili prorsus ratione, facto centro in C & D punctis extremis alterius diametri, eodemque intervallo abscindentur quatuor arcus CI, CM, DL, DN, singuli graduum 60, quorum complementa AI, BM, AL, BN, erunt singula graduum 30.



V.

V. Habes ergo totam circumferentiam in 12 æquas partes divisam, quarum singulæ 30 gradus continebunt.

VI. Rursum unamquamque earum divide bifariam, seu in duas partes æquas; sicque tota peripheria erit secta in 24 partes, quarum singulæ gradus 15 comprehendent.

VII. Jam verò, cum nullam planè habeamus methodum geometricam, qua horum 24 arcuum ulterior divisio perfici possit in alias 15 partes æquales, quærenda erit attentando apertura circini, quæ eorum quemlibet in tres partes æquales subdividat; deinde quærenda nova circini apertura, quæ harum partium quamlibet rursum dividat in alias quinque partes æquales; eritque circumferentia circuli divisa in 360 partes æquales, quas vocant gradus.

Peracta prima divisione circuli in quatuor æquales partes, divisiones reliquæ hoc versiculo comprehenduntur:

In tres, in binas, in tres, in quinque secato.

Corollarium I.

290. EX iis, quæ de divisione circumferentiæ diximus, perspicuum est artificium construendi geometricè polygona laterum 3, 4, 6, 12, 24, & laterum numero continuè duplo. Ratio est, quia cum per binas diametros se se perpendiculariter intersecantes circumferentia circuli dividatur in quatuor æquales partes, rursumque notum sit artificium (n. 143.) geometricè dividendi, & subdividendi bifariam arcum quemvis, planè constat, qua methodo construi geometricè possint polygona regularia laterum 4, 8, 16, 32, & numero laterum continuè duplo.

Corollarium II.

291. IN processu horum Elementorum demonstrabimus, qua ratione geometricè dividi possit circumferentia circuli in 5 & 10 partes æquales. Cùm verò harum partium quælibet bifariam dividi facilè possit, hinc construi poterunt polygona, 5, aut 10, aut cujusvis numeri laterum compositi ex continuo ductu 5 in 2.

Geometrica divisio circumferentiæ in 5 partes æquales, quarum singulæ valent 72 gradus, & geometrica pariter divisio ejusdem circumferentiæ in 6 partes æquales, quarum singulæ sunt graduum 60, obtinetur, inveniendo arcum graduum 12, qui trigesima pars est totius circumferentiæ, seu graduum 360. Quare geometricè dividi potest tota circumferentia in 30 partes æquales, & consequenter in 15, ac præterea in numerum partium æqualium continuè duplum numeri 30, hoc est, in 60, 120 &c. partes æquales.

Scholion.

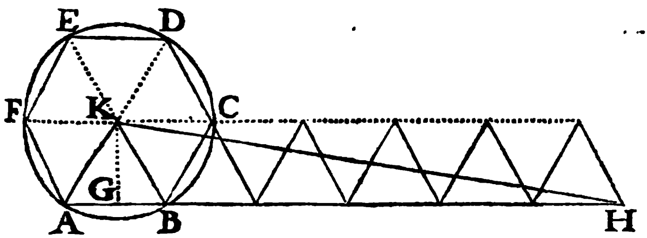
292. *QUia nondum reperta est ars, qua solo circino, & regulà circumferentia circuli dividatur in partes* 7, 9, 11, 13, 14, 17 *&c., idcirco, quoties polygonum regulare hoc laterum numero compositum construere oporteat, quærenda erit attentando modò hæc, modò illa circini apertura, qua fieri possit, ut circumferentia circuli in totidem partes æquales dividatur, quot latera polygonum quæsitum habere debet.*

PRO-

PROPOSITIO III.

THEOREMA.

293. *Superficies polygoni regularis cujusvis* ABCDEF *æquatur triangulo* AKH, *cujus basis* AH *æqualis sit perimetro hujus polygoni, & altitudo æqualis perpendiculari, seu apotheme* KG *ejusdem polygoni.* Dimensio superficiei cujuscunque polygonæ.



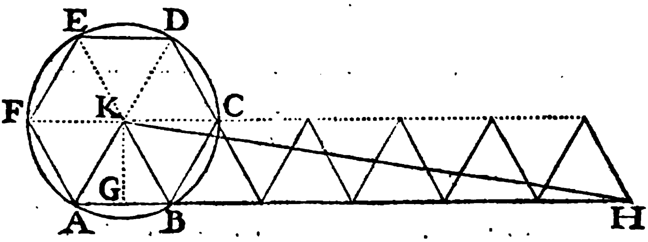
Demonstratio. Ducantur a centro K ad omnes polygoni angulos radii: resolvetur in totidem triangula æqualia, quot habet latera polygonum (n. 286.). Cum autem hæc triangula habeant pro altitudine apothemen polygoni, erunt omnia ejusdem altitudinis. Jam verò, si super eàdem rectà AH constituantur successivè bases AB, BC, CD &c. horum triangulorum: hoc est, si polygoni perimeter evolvatur in unicam rectam lineam AH, super qua, tanquam basi, construatur triangulum AKH, cujus altitudo sit apothemes ipsa polygoni, erit (n. 260.) triangulum AKH æquale summæ triangulorum omnium componentium polygonum ABCDEF. Ergo superficies polygoni regularis &c. Quod erat &c.

PROPOSITIO IV.

PROBLEMA.

294. *Invenire aream polygoni regularis.*

Resolutio sequitur ex præcedente. Nam superficies trianguli AKH æquatur facto ex ductu semisseos basis AH in altitudinem KG. Ergo superficies polygoni regularis cujuscunque ABCDEF prodibit ex ductu semisseos perimetri in apothemen KG. Quod erat &c.



LEMMA.

295. *Circulus considerari potest instar polygoni regularis infinitorum laterum.*

Nam, cum polygonum regulare eò magis ad circulum accedat, quò magis ipsius latera numero augentur, & latitudine minuuntur: si hæc ponantur infinitè parva, ac propterea numero infinita, manifestum est differentiam polygoni a circulo, & apothemen a radio, esse quavis data magnitudine minorem, & consequenter polygonum desinere in circulum.

PRO-

PROPOSITIO V.

PROBLEMA.

296. *Invenire aream circuli.*

Resolutio. Cum enim circulus considerari possit instar polygoni regularis infinitorum laterum, obtinebitur eàdem methodo dimensio circuli, si peripheriæ semissis, quam mechanicè metiri oportebit, ducatur in radium.

Scholion.

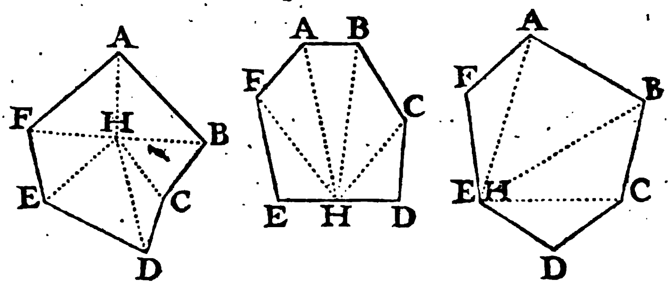
297. *Si geometricè inveniri, ac demonstrari posset recta linea æqualis circumferentiæ circuli, cujus datur radius, figuram rectilineam haberemus æqualem superficiei circuli, eamque, quam vocant, circuli quadraturam. Ab omni ævo, quo Geometria exculta fuit, in quadrando circulo desudarunt præstantissima ingenia, sed irrito conatu; nihilotamen minùs varias excogitarunt diametri ad circumferentiam rationes, quibus saltem quamproximè, & sine errore sensibili in praxi definiri posset valor circumferentiæ. Archimedes invenit rationem diametri ad circumferentiam, vel semidiametri ad semicircumferentiam esse, ut 7 ad 22 ferè. Quare circumferentia, vel semicircumferentia circuli proximè habebitur, multiplicando diametrum, vel radium per 3 & $\frac{1}{7}$. Similiter superficies circuli æquabitur triangulo, cujus altitudo sit radius, & basis sit diameter ipsa ter sumpta cum septima ejusdem parte. Superficies autem sectoris cujusvis eàdem regulà invenietur, dummodo cognoscatur ratio sui arcus ad integram circumferentiam. Sed de his alibi plura.*

PROPOSITIO VI.

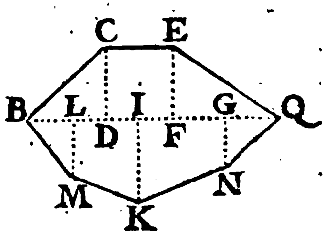
PROBLEMA.

298. *AReam superficiei irregularis multangulæ cujuscunque, quæ pervia sit, invenire.*

Resolutio. Polygonum irregulare ABCDEF dividatur in triangula, ductis rectis a quovis puncto H ad libitum assumpto, vel in vertice unius anguli, vel in uno latere, vel intra aream, ut commodiùs visum fuerit, ad omnes angulos figuræ. Metire singula triangula (n. 267.): horum summa dabit aream quæsitam.



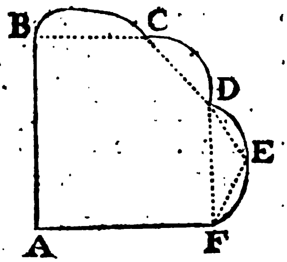
Aliter. Intra aream mensurandam designetur linea, quæ potest longissima BQ, ad quam ex omnibus angulis ducantur perpendiculares, quæ aream polygoni secabunt in quadrangula, quorum duo latera sunt parallela, & in triangula rectangula. Metire singula (n. 267. & 269.): summa ex omnibus collecta dabit aream quæsitam.



Co-

Corollarium.

299. SI areæ incognitæ pars aliqua ſit curvilinea, inſcribe illi triangula, & quadrangula, donec reſiduum curvilineum æſtimari non debeat.



Habes agrorũ omniũ dimenſionem, quorum area pervia ſit. Quid autem facto opus ſit, ſi quando area ſit impervia, infra docebimus.

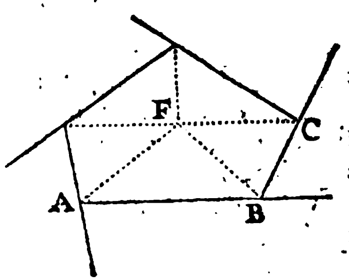
PROPOSITIO VII.

THEOREMA.

300. *Omnes ſimul anguli interni cujuſvis polygoni æquales ſunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quot polygonum habet latera, ſeu angulos.*

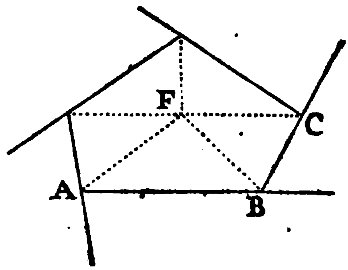
Et omnes ſimul externi anguli cujuſcunque polygoni conficiunt quatuor rectos.

Demonſtratur I. pars. Ex quovis puncto F intra figuram ducantur ad omnes polygoni angulos rectæ, quæ polygonum ſecabunt in tot triangula, quot habet latera. Quare, cum ſingula triangula (n. 213.) conficiant duos rectos, omnia ſimul conficient bis tot rectos, quot ſunt latera. At anguli eorun-



rundem triangulorum circa punctum F intra figuram assumptum, nec pertinent ad angulos polygoni propositi, & conficiunt quatuor rectos (n. 83.). Quare, si hi auferantur, erunt reliqui triangulorum anguli constituentes angulos polygoni, bis quoque tot rectis æquales, demptis illis quatuor circa punctum F, quot latera, vel angulos continet polygonum. Quod erat primum.

Demonstratur II. pars. Nam quilibet externus, & illi deinceps internus, æquantur duobus rectis; atque adeo omnes externi unà cum omnibus internis æquales erunt bis tot rectis, quot latera, angulosve polygonum continet. Sunt autem & soli interni bis tot rectis æquales, minùs quatuor, ut demonstravimus. Si igitur interni auferantur, externi remanebunt quatuor tantùm rectis æquales, qui nimirum desunt internis angulis, ut interni; & externi simul bis tot rectos conficient, quot habet latera polygoni. Quod erat alterum.



Corollarium.

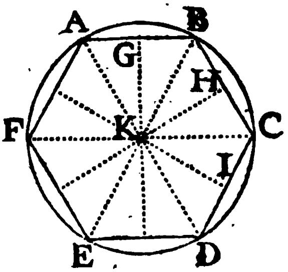
301. ERgo quatuor anguli quadrilateri cujusvis conficiunt quatuor rectos. Quamobrem, si quatuor anguli quadrilateri sint singuli inter se æquales, horum quilibet erit rectus.

Et omnes ejusdem speciei rectilineæ figuræ æquales habent tam internorum, quàm externorum angugulorum summas. Itaque trianguli alicujus tres externi anguli æquales sunt mille externis angulis figuræ millelateræ. Quod admiratione dignum est.

PROPOSITIO VIII.

PROBLEMA.

302. *Regularium figurarum angulos tam centri, quàm circumferentiæ invenire.*



Angulum centri AKB voco illum, quem continent duo radii ab unius lateris extremitatibus ad centrum K ducti. Unde figura ordinata tot habet centri angulos, quot latera, quos omnes inter se constat esse æquales.

Anguli circumferentiæ sunt, qui figuræ lateribus continentur.

Resolutio I. partis. Gradus 360 divide per denominatorem figuræ, puta, si figura data sit sexangula, divide per 6: provenient gradus debiti angulo centri.

Demonstratio. Omnes simul anguli centri conficiunt 4 rectos, seu gradus 360. Quare unus ex illis est graduum 360 pars ab ipsorum multitudine, seu denominatore figuræ denominata. Ergo &c. Quod erat primum.

Resolutio II. partis. A duplo numero laterum deme 4: residuum multiplica per 90: productum divide per denominatorem figuræ: provenient gradus debiti angulo circumferentiæ.

In

In pentagono duplus numerus laterum est 10: ab hoc, si demas 4, remanent 6, quæ ducta in 90 producunt 540; hæc autem divisa per 5 denominatorem figuræ, exhibent 108 gradus, qui debentur angulo circumferentiæ pentagoni.

Demonstratio. Omnes simul anguli cujusvis polygoni, seu figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figuræ, demptis quatuor. Quare, si duplum laterum numerum, demptis 4, ducas in 90 gradus uni recto debitos, provenient gradus debiti omnibus simul figuræ angulis; atque adeo unus ex illis est pars horum graduum ab angulorum multitudine, seu denominatore figuræ denominata. Ergo &c. Quod erat alterum.

Denominatores figurarum	Anguli centri	Anguli circumferentiæ
3.	120.	60.
4.	90.	90.
5.	72.	108.
6.	60.	120.
7.	51. 25^{I}. 43^{II}.	128. 34^{I}. 17^{II}.
8.	45.	135.
9.	40.	140.
10.	36.	144.
11.	32. 43^{I}. 38^{II}.	147. 16^{I}. 22^{II}.
12.	30.	150.

OB-

Observatio.

303. Hactenus superficies dimensi fuimus, quasi verò essent plana perfectissima, contra quàm accidat; nam camporum plerique superficiem habent valde inæqualem, modò in colles assurgunt, modò in valles deprimuntur; quæ res illorum superficiem auget quàm maximè. Sanè hemisphærium multò majorem habet superficiem, quàm basis plana, cui insistit. Quamobrem, si harum inæqualitatum ratio nulla esset habenda in æstimanda camporum superficie, hæc multò minor prodiret, quàm reipsa sit. Hinc quæstio illa non contemnenda, an in venditione agrorum declivium sit habenda ratio inclinationis, an verò superficies inclinata ad horizontalem revocanda sit.

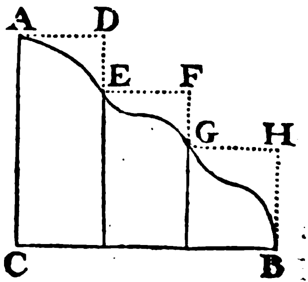
Sed intelligant velim Tirones, qui praxi daturi sunt operam, harum inæqualitatum interdum habendam esse rationem, interdum nullam, pro diverso, quem quis intendat, fine.

Si quæratur, quot lapidibus quadratis consternendum sit pavimentum inclinatum, spectanda erit tota quanta est illius area, major in ea inclinatione, quàm si ad horizontalem revocaretur.

At si hæc eadem superficies inclinata consideranda esset vel ad usum ædium construendarum, vel ad utilitatem frugum, & arborum, quæ eò loci serendæ sint, dimensio ejusdem areæ ex basi horizontali æstimanda esset, quæ aream multò minorem contineret, quàm convexa, vel inclinata

ejusdem

ejuſdem ſuperficies. Ratio eſt, quia in hac conſideratione non quantitas, ſeu area ſpectanda eſt, ſed utilitas. Nam cum fruges, arbores, ædificia perpendiculariter aſſurgant, certum eſt non plura conſiſtere poſſe in ſuperficie inclinata AB, quàm in horizontali CB.



PRA-

PRAXIS GEOMETRICA

ELEMENTI VII. LIB. I.

Figurarum Planarum Reductio, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio.

ELEMENTORUM cognitio nullà re magis alià juvari solet, quàm exercitatione, & praxi: quorum alterum facit, ut Elementa usu trita, & familiaria reddantur, &, si quando opus sit, vocata sponte occurrant, ac Geometræ demonstranti præsto sint; praxis autem non evanidæ speculationis opus esse declarat Elementorum cognitionem; immo verò fructu uberrimo, quasi stimulis, Tirones excitat, ut altiùs eniti velint. Nihil sanè in Geometria practica frequentiùs, quàm hæc planarum superficierum transformatio, additio, subtractio, multiplicatio, ac præsertim divisio, quam Geodesiam vocant, & in camporum divisione versari solet.

In hac itaque Geometriæ practicæ parte tradenda delectum habuimus eorum tantùm Problematum, quæ ex præjactis Elementis pendent; reliqua verò, quæ doctrinam proportionum postulant, in secundam partem rejecimus. Ita fiet, ut subactum Tironum ingenium multò alacriùs ad alteram Geometriæ partem progrediatur.

Fi-

Figurarum Planarum Reductio.

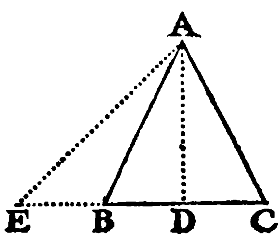
DEFINITIO.

304. *Figuram rectilineam alteri æqualem voco, quando utriusque superficies eumdem numerum partium æqualium continet, quin ulla habeatur ratio & angulorum, & laterum.*

PROBLEMA I.

305. *Triangulum isosceles, seu æquilaterum* ABC *in aliud ipsi æquale rectangulum transformare.*

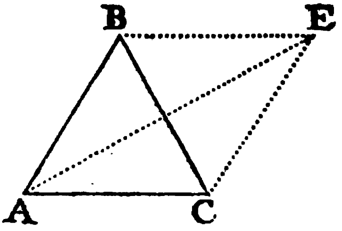
Resolutio. Demittatur perpendicularis AD, quæ basim BC bifariam secabit in puncto D (230): fiat DE = BC; jungaturque AE. Dico factum.



Demonstratio. Pendet ex n. 257. Nam duo triangula ABC, ADE & super æqualibus basibus, & inter easdem parallelas, hoc est, ad eumdem verticē A sunt constituta. Quod erat &c.

PROBLEMA II.

306. *Triangulo æquilatero* ABC *aliud æquale construere obtusangulum scalenum.*



Resolutio. Per verticem B ducatur indefinita BE basi AC parallela, ac præterea recta, prout libuerit, CE,

mo-

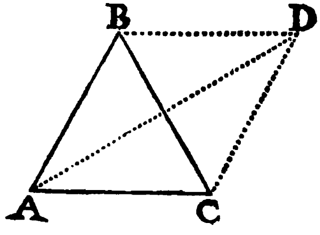
modò angulum obtusum in C efficiat; jungaturque AE. Dico factum.

Demonstratio eadem n. 257.

PROBLEMA III.

307. *Triangulo æquilatero* ABC *aliud æquale construere isosceles, & obtusangulum.*

Resolutio. Per verticem B ducatur BD parallela basi AC; & a puncto C, intervallo CA, describatur arcus, qui parallelam BD secet in D; junganturque CD, DA. Dico factum.

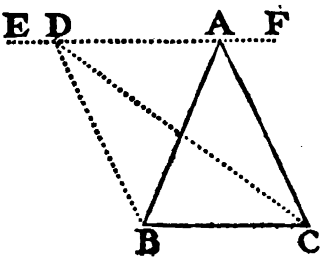


Demonstratio consequitur ex eodem n. 257.

PROBLEMA IV.

308. *Triangulo isosceli* ABC *aliud æquale triangulum scalenum construere.*

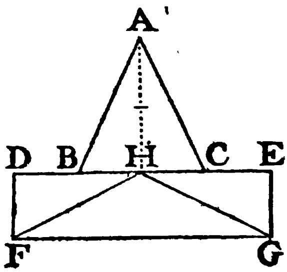
Resolutio. Per verticem A ducatur EF parallela basi BC &c.



PROBLEMA V.

309. *Triangulo dato* ABC *aliud æquale construere hac lege, ut tria hujus latera singula majora sint tribus lateribus trianguli dati.*

Resolutio. Producatur utrinque basis BC in D & E, ita ut recta DE dupla sit ejusdem basis; & a punctis D & E demittantur perpendiculares DF, EG æquales semissi altitudinis AH dati trianguli; ducaturque FG: erit parallelogrammum DFGE duplum trianguli dati ABC (n. 250.); ductisque lineis HF, HG, triangulum FHG Problemati satisfaciet.



PROBLEMA VI.

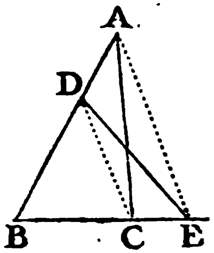
310. *Triangulum datum* BAC *in aliud æquale transformare ad datam altitudinem.*

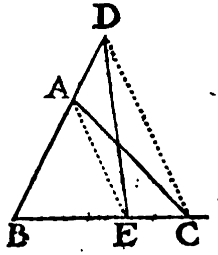
Resolutio. In data altitudine accipiatur punctum D pro vertice trianguli construendi.

Casus I. Si punctum D sumptum fuerit, aut datum vel in latere BA trianguli BAC, vel in eodem latere producto, ducatur a puncto D ad oppositum angulum C recta DC, cui a vertice A ducatur parallela AE, quæ basi BC productæ, si opus sit, occurrat in E; junganturque puncta D & E rectà DE. Dico triangulum BAC æquale esse triangulo constructo BDE, & ad datam altitudinem.

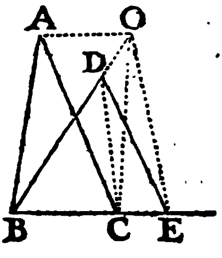
Demon-

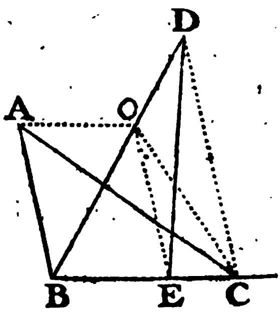
Demonstratio. Nam duo triangula DAC, DEC super eadem basi DC, & inter easdem parallelas sunt æqualia, quæ vel addantur triangulo BDC, ut in fig. 1., vel ab eodem subtrahantur, ut in fig. 2., duo, quæ inde oriuntur, triangula BAC, BDE erunt æqualia. Quod erat &c.



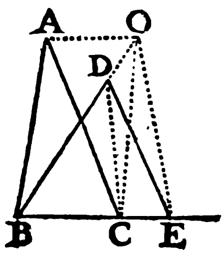


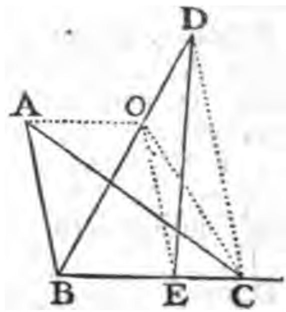
311. *Casus II.* Si punctum D vertex trianguli quæsiti sumptum non fuerit, aut datum in latere BA, etiam producto, trianguli dati BAC: ducatur a puncto extremo B basis BC per D recta indefinita BD, cui a vertice A occurrat in O recta AO parallela basi BC; tum a puncto O ad extremitatem alteram C ejusdem basis agatur recta OC. Dico triangulum BDE æquale esse dato triangulo BAC.





Demonstratio. Triangulum BAC æquatur triangulo BOC. Atqui per Casum I., triangulum BOC æquatur triangulo B D E, cujus vertex D est in latere B O, etiam producto, si opus sit. Ergo triangulum BAC æquatur triangulo BDE. Quod erat &c.





Corollarium.

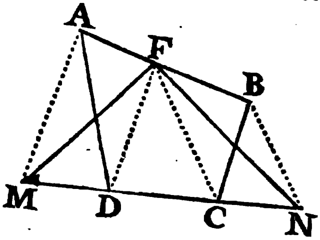
312. SI triangulum BAC transformare oporteat in aliud BDE ejusdem valoris, cujus altitudo data sit, & angulus DBE pariter datus, ducatur recta indefinita BDO, quæ cum BC angulum quæsitum efficiat; tum in recta BDO accipiatur punctum D ad eam a basi BC altitudinem, quæ tribuenda sit triangulo construendo BDE; tum reliqua peragantur, ut in Probl. præced.

PRO-

PROBLEMA VII.

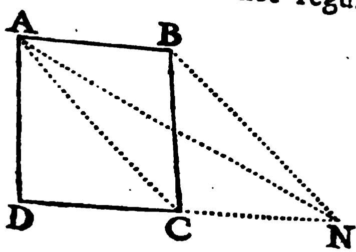
313. *Quadrilatero irregulari* ABCD *æquale triangulum construere, cujus vertex sit quodvis punctum* F *sumptum in latere* AB *dati quadrilateri.*

Resolutio. Ducantur FC, FD, quibus singulis parallelæ AM, BN a punctis A & B ductæ terminentur in punctis M & N lateris DC utrinque producti. Rectæ FM, FN dabunt triangulum MFN æquale quadrilatero ABCD.



Demonstratio eadem, quæ n. 310. & 311.

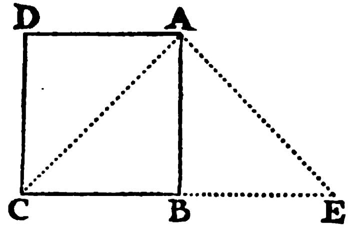
Quòd si quadrilaterum ABCD esset regulare, ducta diagonali AC, eique parallelà BN, junctàque AN, triangulum DAN satisfaciet Problemati.

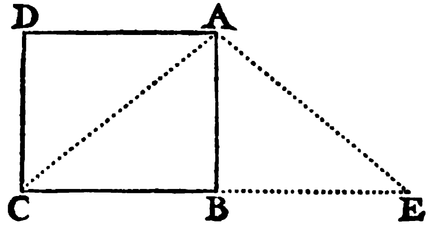


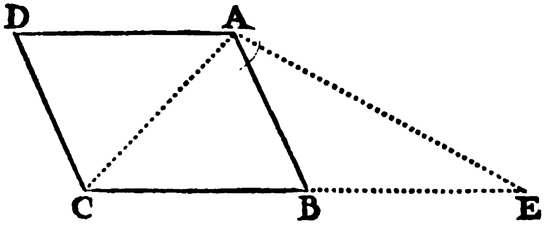
PROBLEMA VIII.

314. *DAtis quadrato, parallelogrammo, rhombo, aut rhomboidi æquale triangulum construere.*

Resolutio. Fiat BE = CB; ducaturque AE &c.





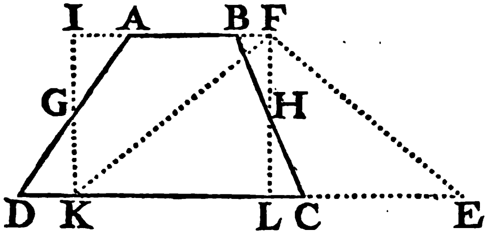


PRO-

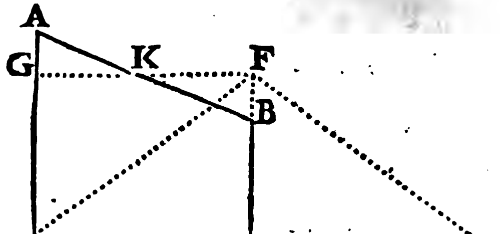
PROBLEMA IX.

315. T*Rapezio dato* ABCD *æquale triangulum construere*.

Resolutio. Si trapezium nullos habeat rectos angulos, secentur bifariam duo latera obliqua AD, BC in punctis G & H; per quæ ducantur perpendiculares occurrentes oppositis lateribus, productis, si opus sit. Facilè demonstrabitur, ut supra, quadrilaterum ABCD = IFLK = triangulo KFE.



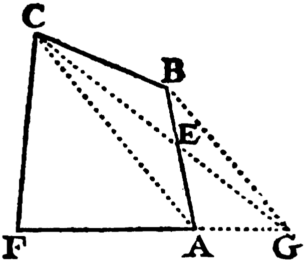
Si verò trapezium datum aliquos habeat angulos rectos, latus obliquum AB secetur bifariam in puncto K; ducaturque GKF parallela lateri DC; & CB producatur in F. Ex notis principiis demonstrabitur trapezium ABCD = quadrilatero GFCD = triangulo DFE.



PROBLEMA X.

316. T*Rapezoidem datum* ABCF *in æquale triangulum transformare*.

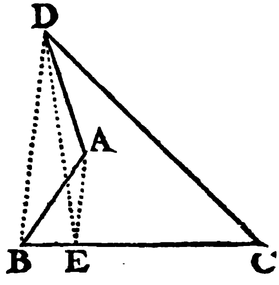
Resolutio. Ducta diagonali CA, eique parallelà BG, junctàque CG, facilè demonstrabis triangulum FCG esse quæsitum.



PROBLEMA XI.

317. Q*Uadrilatero dato* ABCD, *quod unius anguli verticem introrsum obvertit, æquale triangulum construere*.

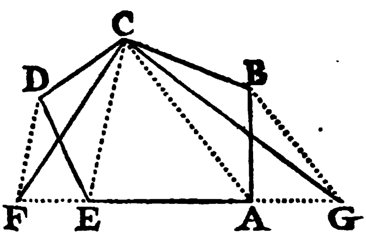
Resolutio. Jungatur DB, eique parallela fiat AE; ductàque DE, habebitur triangulum CED æquale quadrilatero.



PROBLEMA XII.

318. P*Olygono irregulari* AB CDE *æquale triangulum construere*.

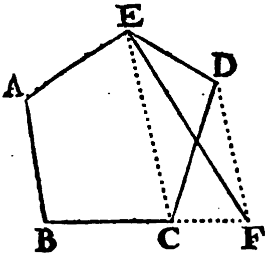
Habes in figura proposita & constructionem, & demonstrationem ex iisdem principiis.

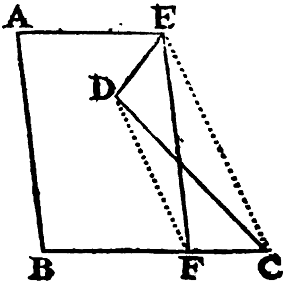


PRO-

Problema XIII.

319. F*Iguram quamvis rectilineam* ABCDE *in aliam ipsi æqualem* ABFE *transformare, uno latere deficientem.*





Resolutio. Extremitates duorum laterum DE, DC anguli D jungantur rectà EC, cui per ejusdem anguli D verticem ducatur parallela DF, quæ terminetur in F a latere BC, producto, si opus sit; ducaturque recta EF. Dico polygonum ABFE & æquale esse proposito polygono ABCDE, & ab eodem deficere uno latere.

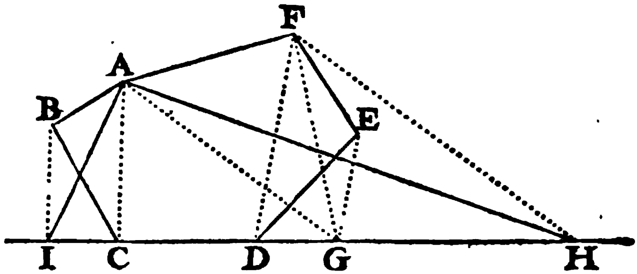
Demonstratio. Nam duo triangula EDC, EFC super eadem basi EC, & inter easdem parallelas sunt æqualia. Quare, si eidem figuræ ABCE addatur quodlibet horum triangulorum, ut in fig. 1., vel ab eadem subtrahatur, ut in fig. 2., invenietur figura proposita ABCDE æqualis novæ figuræ ABFE, quæ uno latere a prima deficit. Quod erat &c.

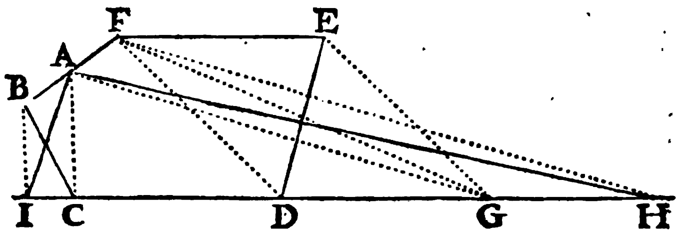
Co-

Corollarium I.

320. HInc omnis figura rectilinea in triangulum transformari potest. Nam per repetitas transformationes ejusdem in novas figuras a præcedente semper deficientes uno latere, tandem revocabitur in triangulum.

Proposita sit reductio polygoni ABCDEF in triangulum IAH, cujus vertex A sit in circumferentia polygoni, & basis sit latus CD utrinque productum.





I. Ab extremitate D lateris CD ducatur diagonalis DF, quæ ab eodem polygono separabit triangulum DEF; rectæ DF agatur parallela EG, EG, quæ occurret in G lateri CD producto; jungaturque FG. Hac prima operatione habebitur polygono proposito æquale polygonum ABCGF, uno latero deficiens (n. 319).

II. Consideretur jam hoc unicè polygonum ABCGF, quod iterum reducendum erit ad aliud ipsi æquale, & uno latere deficiens, hoc pacto. Ducatur recta AG, cui parallela FH occurret in H lateri CD producto; jungaturque AH: habebitur novum polygonum ABCH = ABCGF = ABCDEF.

III. Cum autem hoc ultimum polygonum ABCH habeat latus AH, quod assumi potest pro latere trianguli IAH construendi, nihil superest aliud, quàm reductio suæ partis ABC. Ductà itaque rectà AC, eique parallelà BI, quæ basi productæ DC occurrat in I, junctàque AI, transformabitur polygonum propositum ABCDEF in triangulum quæsitum IAH.

Scholion.

NOtabis eamdem prorsus esse constructionem, sive polygonum datum reducendum sit in triangulum, cujus vertex sit in uno angulorum polygoni, sive reductio instituenda sit in triangulum, cujus vertex sit in uno latere polygoni.

Corollarium II.

321. COnsequitur hinc artificium reducendi polygonum quodvis in triangulum, cujus vertex sit in dato quovis puncto aut intra, aut extra polygonum, vel in triangulum datæ altitudinis,

nis, & unius anguli ad basim pariter dati.

Nam I. reducendum polygonum in triangulum, cujus vertex sit vel in uno angulorum, vel in uno latere ejusdem polygoni.

II. Hoc triangulum in aliud transformabitur vel datæ altitudinis, & cujus vertex sit in dato puncto, vel dati anguli ad basim (n. 310. 311. & 312.).

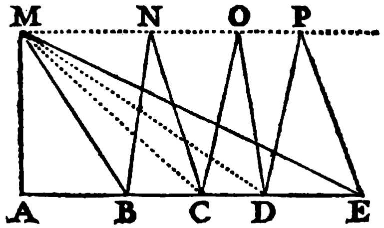
Figurarum Planarum Additio.

PROBLEMA XIV.

322. D*Ata sint triangula simul addenda, ut summa sit triangulum datis æquale.*

Resolutio. Si triangula sint ejusdem altitudinis, ut AMB, BNC, COD, DPE, bases eorum AB, BC, CD, DE componantur in rectam lineam AE: super basi AE ad eamdem altitudinem construatur triangulum AME: quod æquale erit datis simul omnibus.

Si verò triangula data non sint æquè alta, reducantur prius ad eamdem altitudinem, (n. 310.).



PRO-

PROBLEMA XV.

323. *DAta sint polygona quæcunque simul addenda, ut summa sit triangulum datis polygonis æquale.*

Resolutio. Revocentur polygona ad totidem triangula æqualis altitudinis (n. 321.), quorum summa sit triangulum (n. 322.).

PROBLEMA XVI.

324. *FIguras quascunque rectilineas transformare in unicum triangulum dati ad basim anguli, & datæ altitudinis, aut cujus vertex sit in dato puncto.*

Resolutio. Fiat triangulum datis simul omnibus figuris æquale (n. 323.): quod in aliud transformetur, cujus vertex sit in dato puncto (n. 310.), vel quod datam habeat altitudinem, & datum angulum (n. 312.).

PROBLEMA XVII.

325. *DAtæ sint figuræ rectilineæ quæcunque simul addendæ, ut summa sit parallelogrammum.*

Resolutio. Fiat triangulum datis figuris rectilineis æquale (n. 324.): quod transformetur in parallelogrammum &c.

Mul-

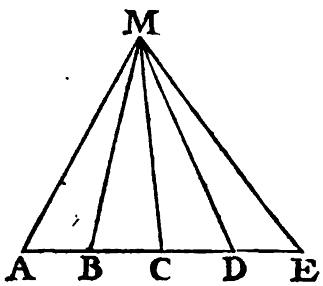
Multiplicatio.

PROBLEMA XVIII.

326. *DAtum triangulum* AMB *per quemlibet numerum* 2, 3, 4, 5 *&c. multiplicare, ita ut duplum, triplum, quadruplum, & sic in infinitum, multiplum constituatur.*

Hoc est, invenire oporteat triangulum, puta, quadruplum dati trianguli AMB.

Resolutio. Producatur basis AB ad E, ita ut AE sit quadrupla ipsius AB; ducaturque ME. Dico factum.



Demonstratio. Nam quatuor triangula, quæ designantur in apposita figura, & æqualibus basibus insistunt, & habent eamdem altitudinem. Ergo &c. Quod erat &c.

PROBLEMA XIX.

327. *TRiangulum datæ altitudinis invenire, quadruplum, aut pro libito multiplum datæ cujusvis figuræ rectilineæ.*

Resolutio. Figura rectilinea transformetur in triangulum datæ altitudinis (n. 321.), cujus quadruplum, aut quavis ratione multiplum inveniatur per præced. Probl.

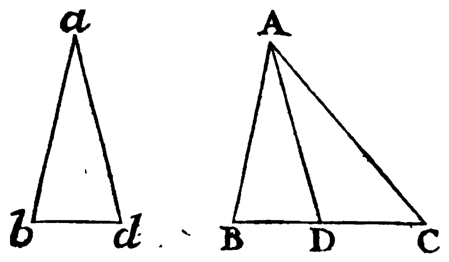
Sub-

Subtractio.

PROBLEMA XX.

328. D*Atum sit triangulum* bad *a triangulo* BAC *subtrahendum, ut maneat triangulum.*

Resolutio. Si duo triangula BAC, *bad* sint æquè alta, transferatur basis *bd* in BC, & ducatur AD. Dico factum. Uti constat ex schemate.



Si verò triangula data non sint æquè alta, revocentur prius ad eamdem altitudinem.

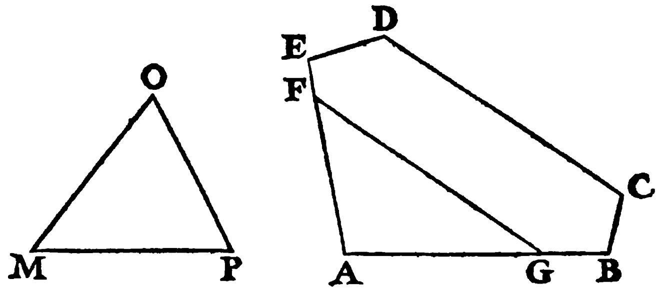
PROBLEMA XXI.

329. D*Atum sit polygonum ab alio polygono subtrahendum, ut differentia, seu excessus sit triangulum.*

Resolutio. Data polygona revocentur ad duo triangula æquè alta; tum operaberis, ut in Probl. præced.

PROBLEMA XXII.

330. *Datum triangulum a quovis polygono subtrahere, ductâ in eodem polygono rectâ lineâ a puncto dato* F *in uno suorum laterum.*



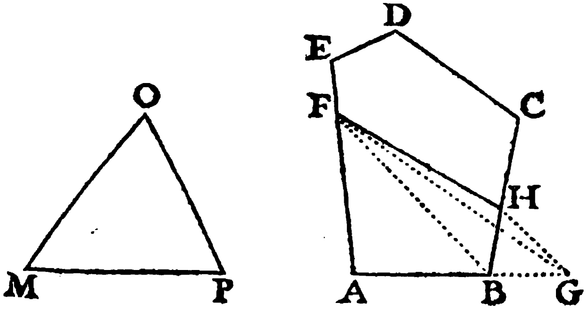
Resolutio. Triangulum, quod a polygono ABCDE subtrahendum est, transformetur in triangulum MOP, cujus altitudo supra basim MP æquetur altitudini puncti F supra latus AB contiguum lateri, in quo punctum F sumptum fuerit. Hoc posito, accipiatur in latere AB, producto, si opus fuerit, portio AG æqualis basi MP trianguli MOP; ducaturque FG a dato puncto F. Erit triangulum AFG æquale triangulo MOP subtrahendo.

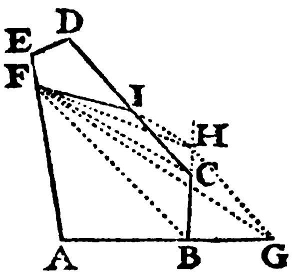
Cum autem in hac subtractione tres præcipui casus possint contingere, hos singillatim exponam.

331. *Casus I.* Si basis MP trianguli MOP non excedat latus AB, & consequenter punctum G cadat super latus AB, Problema jam erit resolutum.

Si

Si verò basis MP trianguli MOP major fuerit latere AB, hoc est, si punctum G sit in latere AB producto, ducatur recta FB, eique parallela GH, quæ vel ipsi lateri BC, vel eidem producto occurret in H. Ex quo duo diversi casus oriuntur.



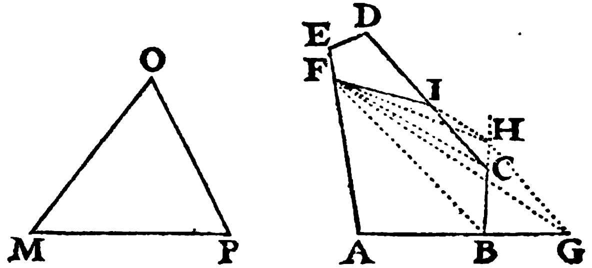


332. *Casus II.* Si punctum H sit in latere BC contiguo lateri AB, jungatur recta FH, quæ a dato polygono auferet quadrilaterum FABH æquale dato triangulo MOP.

Demonstratio. Nam ductà rectà GF, triangula FBG, FBH super eadem basi, & inter easdem parallelas constituta, erunt æqualia; utrique addatur idem triangulum AFB: erit quadrilaterum FABH æquale triangulo FAG, & consequenter æquale triangulo dato MOP. Quod erat &c.

333. *Casus III.* Sin autem recta GH parallela ipsi FB occurrat in H lateri BC producto, ducatur recta FC, eique parallela HI, quæ lateri adjacenti occurrat in I; jungaturque FI, quæ a dato polygono abscindet pentagonum FABCI æquale dato triangulo MOP.

Demonstratio. Nam ductà rectà FH, habebitur, ut in Casu II., quadrilaterum FABH æquale triangulo FAG, hoc est, per Constructionem, triangulo MOP. Atqui triangula FCI, FCH super eadem basi FC, & inter easdem parallelas sunt æqualia. Ergo, si utrique addatur commune quadrilaterum FABC, fiet FABCI$=$FABH$=$MOP. Quod erat &c.



DE GEODESIA.

334. Geodesia dici solet ea Geometriæ Practicæ pars, quæ terrarum divisionem docet. Omnis autem terrarum tractus, quem dividere oporteat, vel in formam trianguli conformatur, vel quadrilateri, vel polygoni. Et quamvis camporum figuræ interdum sint curvilineæ, tamen vel uti rectilineæ in praxi considerari poterunt, si ab illis parum differant, vel ad rectilineas reduci, dividendo latera curva, quibus terminantur, in plures partes minores, quæ pro lineis rectis assumi possint sine errore sensibili.

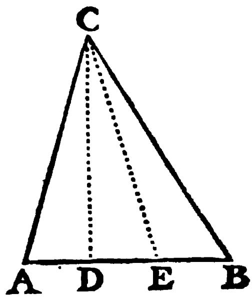
Hæc autem Geodesiæ pars eorum unicè problematum resolutionem tradit, quæ ex præjactis Elementis proficiscuntur. Nam ex tradita proportionum doctrina in secunda horum Elementorum parte, multò uberior problematum, quæ ad Geodesiam spectant, resolutio derivabitur. Cum enim omnis nostra tractatio eò spectet, ut theoriam praxi conjungamus, & quid ex quoque Elemento consequatur, quod ad praxim deduci possit, explicemus, bipartitam etiam Geodesiam invehere coacti fuimus, & Tironum satietati occurrere, quibus illud semper in ore, cui usui, præsertim in theoria non intermissa.

Triangulorum Divisio.

PROBLEMA XXIII.

335. T*Riangulum* ABC *in quotlibet partes æquales dividere per lineas rectas a dato angulo* C *ductas.*

Resolutio. Latus oppositum AB dividatur, puta, in tres partes æquales; ab angulo dato C ad singula divisionum puncta ducantur rectæ CD, CE, quæ datum triangulum divident in tres partes æquales.

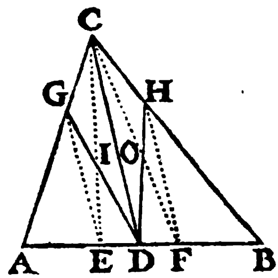


Eodem modo operaberis, si major divisio requireretur.

PROBLEMA XXIV.

336. T*Riangulum* ABC *in quotlibet partes æquales dividere, nimirum, tres, per lineas rectas a dato super uno latere puncto* D *ductas.*

Resolutio. Dividatur latus AB in tres partes æquales in punctis E & F; jungaturque recta CD, cui per divisionum puncta E & F ducantur parallelæ EG, FH, quæ lateribus AC, BC occurrent in punctis G & H. Rectæ GD, HD datum triangulum trifariam divident.



De-

Demonstratio. Jungantur rectæ CE, CF. Duo triangula GEC, GED super eadem basi GE, & inter easdem parallelas sunt æqualia. Subtrahatur commune triangulum GIE: supererit triangulum GIC æquale triangulo DIE. Utrinque addatur trapezium AEIG: habebitur triangulum AGD æquale triangulo ACE, nimirum, tertiæ parti dati trianguli ABC per Probl. præced.

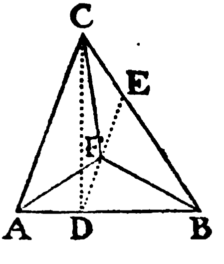
Similiter demonstrabitur triangulum BDH æquale triangulo BCF, hoc est, tertiæ parti ejusdem dati trianguli ABC. Quod erat &c.

Problema XXV.

337. T*Riangulum* ABC *in tres partes æquales dividere per lineas a tribus angulis* A, B, C *ductas*.

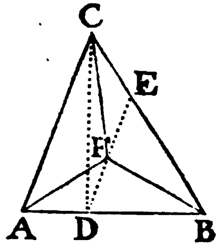
Resolutio. Cujusvis lateris, puta, AB, sumatur tertia pars AD; & a puncto D ducatur DE parallela lateri adjacenti AC; recta DE secetur bifariam in F, a quo ad trium angulorum vertices A, B, C ducantur rectæ FA, FB, FC. Dico factum.

Demonstratio. Jungatur CD. Triangulum AFC æquatur triangulo ADC. Atqui (n. 335.) triangulum ADC est tertia pars trianguli ABC, quippe basis AD per Constructionem est tertia pars basis AB. Ergo triangulum AFC est tertia pars dati trianguli ABC. Quare duo reliqua triangula AFB, BFC simul sumpta conficiunt duas tertias



 par-

partes ejusdem trianguli A B C. Atqui dicta triangula AFB, BFC sunt inter se æqualia; nam duo triangula BFD, BFE, & pariter duo reliqua AFD, CFE sunt inter se æqualia, singula singulis, quippe quæ æqualibus basibus insistunt, & inter easdem parallelas. Ergo duo triangula AFB, BFC æquant singula tertiam partem dati trianguli ABC. Quod erat &c.

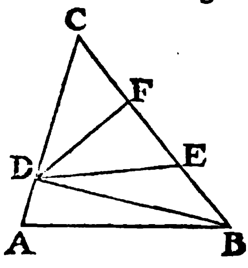


PROBLEMA XXVI.

338. *IN dato latere* AC *trianguli* ABC *invenire punctum* D, *ex quo triangulum dividi possit in totidem, quot libuerit, partes æquales, puta, quatuor.*

Resolutio. Dati lateris AC accipiatur AD quarta pars ex conditione Problematis. Punctum D erit quæsitum.

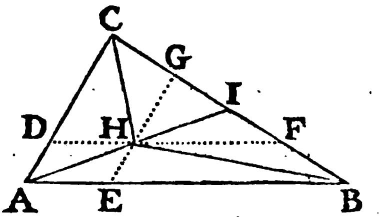
Demonstratio. Jungatur B D. Triangulum ABD erit quarta pars trianguli ABC. Reliquum itaque triangulum BDC (n. 335.) dividatur in tres partes æquales: habebitur propositum triangulum ABC in quatuor partes divisum per lineas DB, DE, DF. Quod erat &c.



PROBLEMA XXVII.

339. *IN area trianguli* ABC *invenire punctum* H, *ex quo triangulum dividi possit in quot libuerit partes æquales; puta, quatuor.*

Resolutio. Lateris AC accipiatur, ut ante, quarta pars AD; & similiter lateris AB quarta pars AE, quandoquidem triangulum ABC quadrifariam dividere oportet; tum a punctis D & E lateribus AB, AC parallelæ ducantur DF, EG. Punctum communis intersectionis H erit quæsitum.

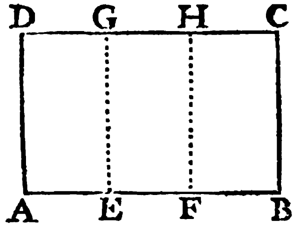


Demonstratio. Nam ductis HA, HB, HC, duorum triangulorum quodlibet AHB, AHC erit ex dictis quarta pars propositi trianguli ABC; & consequenter triangulum BHC erit ejusdem semissis; reliquum ergo est, ut hoc secetur bifariam rectà HI; & sic inventum erit punctum H. Quod erat &c.

Quadrilaterum Divisio.

PROBLEMA XXVIII.

340. P*Arallelogrammum* ABCD *in quotlibet partes æquales dividere per lineas uni lateri parallelas.*

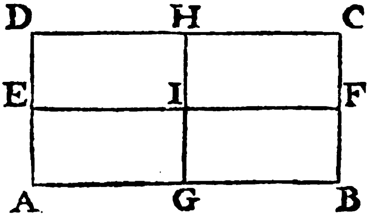


Resolutio. Dividatur latus AB in quotlibet partes æquales; & a punctis divisionum excitentur parallelæ lateri AD; eritque resolutum Problema.

PROBLEMA XXIX.

341. P*Arallelogrammum* ABCD *in quatuor æquales partes dividere per duas rectas duobus lateribus* AB, AD *parallelas.*

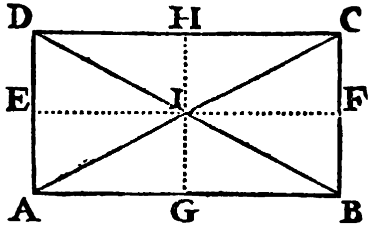
Resolutio. Latera opposita dividantur bifariam in punctis E & F, G & H; junganturque EF, GH. Dico factum.



Co-

Corollarium.

342. DUæ diagonales AC, BD dividunt parallelogrammum in quatuor triangula isoscelia æqualia; ut facilè demonstrari potest, ductis per centrum I rectis GH, EF parallelis duobus lateribus AB, AD.



Constat prætera parallelogrammũ ABCD divisum iri hac ratione in octo partes æquales, sive triangula, quorum vertex communis est in centro I.

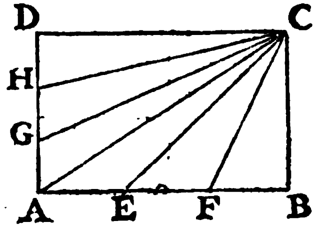
Hinc sequitur parallelogrammum quodvis ab eodem centro I dividi posse in quemlibet numerum pariter parem partium æqualium.

Voco autem numerum pariter parem, qui dividi potest exactè per 4.

PROBLEMA XXX.

343. *DIvidere parallelogrammũ* ABCD *in quemlibet partium æqualium numerum parem per lineas rectas ab angulo dato* C *ductas.*

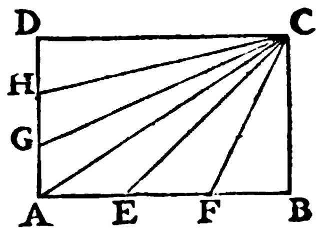
Resolutio. Ducatur diagonalis CA, quæ parallelogrammum in duo æqualia triangula ACD, ACB dividet (n. 249.): Hæc per Probl. I. dividantur singula in tres partes æquales. Dico factum.



Co-

Corollarium.

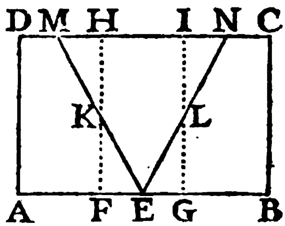
SI demantur & diagonalis AC, & duæ rectæ CF, CH, perſpicuum eſt diviſum iri parallelogrammum in tres partes æquales.



PROBLEMA XXXI.

344. *EX dato ſuper uno latere puncto* E *duas rectas ducere, quæ parallelogrammũ* ABCD *dividant in tres partes æquales.*

Reſolutio. Latus AB trifariam dividatur in punctis F & G, per quæ ducantur alteri lateri AD parallelæ FH, GI, quæ bifariam dividantur in punctis K & L; tum ex dato puncto E per K & L ductæ rectæ EM, EN trifariam divident parallelogrammum ABCD.

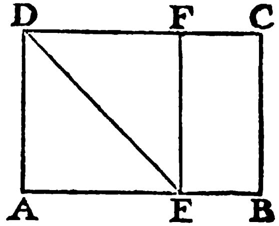


Demonſtratio. Duo triangula EFK, MHK ſunt inter ſe æqualia (n. 230); quæ, ſi ſeparatim addantur eidem pentagono AFKMD, fiet trapezoides AEMD æqualis parallelogrammo AFHD, hoc eſt, tertiæ parti ejuſdem parallelogrammi ABCD. Eodem modo demonſtrabitur trapezoidem BENC æquari parallelogrammo BCIG, ſeu tertiæ

tiæ parti parallelogrammi ABCD. Ex quo jam constat triangulum MEN æquari pariter tertiæ parti parallelogrammi ABCD. Quod erat &c.

Corollarium.

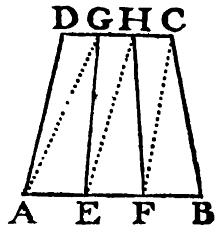
Si recta EB esset tertia pars lateris AB, ducatur EF parallela lateri AD, & diagonalis ED.



Problema XXXII.

345. *Trapezoidem* ABCD *in quotlibet partes æquales, puta, tres, dividere.*

Resolutio. Duo latera parallela AB, CD dividantur singula in tres æquales partes in punctis E, F, G, H; junctæque rectæ EG, FH divident trapezoidem ABCD in tres trapezoides inter se æquales AEGD, EFHG, FBCH.



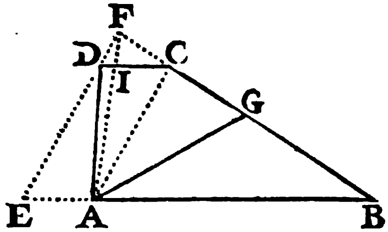
Demonstratio. Nam ductis diagonalibus AG, EH, FC, manifestum est triangula, ex quibus trapezoides componuntur, esse inter se æqualia, singula singulis; quippe quæ super æqualibus basibus, & inter easdem parallelas constituuntur. Quod erat &c.

Pro-

PROBLEMA XXXIII.

346. T*Rapezoidem* ABCD *per rectam ab angulo* A *ductam bifariam dividere.*

Resolutio. Latus angulo dato adjacens AB, parallelum opposito lateri CD producatur in E, donec AE æquetur ipsi CD; jungaturque ED, quæ producta occurrat in F alteri lateri BC pariter producto; dein recta BF secetur bifariam in G; ducaturque AG. Hæc bifariam dividet trapezoidem ABCD.



Demonstratio. Jungantur AF, & diagonalis AC, quæ parallela erit rectæ EF (n. 244.); nam per Constructionem duæ rectæ AC, EF conjungunt duas rectas AE, DC æquales, & parallelas. Duo ergo triangula AFC, ADC sunt inter se æqualia; & ablato communi triangulo AIC, supererit triangulum AID æquale triangulo FIC. Utrique æqualium addatur trapezium ABCI, fiet trapezoides ABCD æqualis triangulo ABF, cujus semissis est triangulum ABG; nam basis BG per Constructionem est semissis basis BF. Itaque triangulum ABG est semissis propositæ trapezoidis. Quod erat &c.

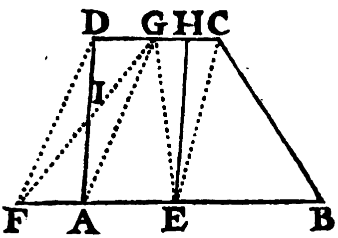
PRO-

PROBLEMA XXXIV.

347. *TRapezoidem* ABCD *bifariam dividere per rectam ductam a dato super ejus basi* AB *puncto* E.

Voco autem basim trapezoidis alterutrum duorum laterum, quæ sunt parallela, uti AB.

Resolutio. Super basi AB, productâ, si opus est, accipiatur EF æqualis rectæ EB; ducaturque a puncto A recta AG parallela rectæ FD; dein recta GC secetur bifariam in puncto H, a quo ducta recta HE Problema resolvit.



Demonstratio. Jungantur rectæ EG, FG, EC. Duo triangula ADG, AFG super eadem basi, & inter easdem parallelas constituta, sunt æqualia. Auferatur commune triangulum AIG: reliquum erit triangulum AIF æquale triangulo DIG. Utrique separatim addatur idem trapezium AIGE: fiet trapezoides ADGE æqualis triangulo EGF, & consequenter triangulo ECB, propter æquales bases EB, EF per Constr. Jam verò, quoniam duo triangula GEH, CEH sunt pariter inter se æqualia, quippe quæ bases habent æquales GH, CH, per Constr.: hinc sequitur trapezoidem AEHD æqualem fore trapezoidi BEHC. Quod erat &c.

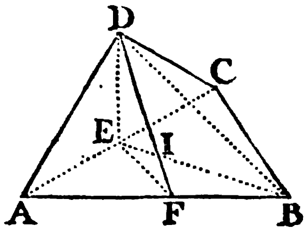
PRO-

PROBLEMA XXXV.

248. *AB angulo dato* D *rectam ducere, quæ trapezium* ABCD *bifariam dividat.*

Resolutio. Diagonalis AC opposita angulo dato D secetur bifariam in E; ducaturque EF parallela alteri diagonali BD. Recta DF Problema resolvet.

Demonstratio. Quoniam per Constr. rectæ EA, EC sunt æquales, duo triangula EDA, EDC sunt æqualia, æquè ac duo EBA, EBC. Ergo duo trapezia ADEB, CDEB sunt pariter inter se æqualia. Jam verò trapezium ADEB est æquale triangulo ADF; & trapezium CDEB est æquale trapezio BCDF. Nam duo triangula DIE, BIF sunt inter se æqualia: uti constabit, si triangulum DIB auferatur a duobus triangulis DEB, DFB pariter æqualibus propter parallelas BD, EF per Constr. Itaque triangulum ADF est æquale trapezio BCDF. Quod erat &c.



Corollarium.

349. EX eadem figura constare etiam facilè potest, qua ratione trapezium bifariam dividi possit per duas rectas lineas a duobus angulis oppositis datis D & B ductas. Nam, si diagonalis AC secetur bifariam in E, junganturque EB, ED, satisfiet Problemati.

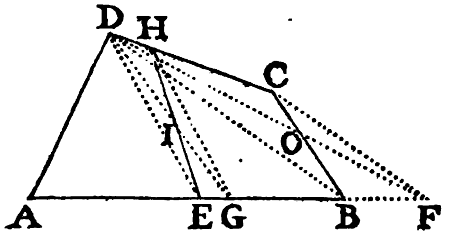
PRO-

Problema XXXVI.

350. **T***Rapezium* ABCD *ex dato ſuper uno latere* AB *puncto* E *biſariam dividere.*

Reſolutio. Jungantur rectæ DE, DB: diagonali DB ducatur a puncto C parallela CF, quæ lateri AB producto occurrat in F. Recta DF efficiet triangulum ADF æquale trapezio propoſito ABCD. Nam propter parallelas DB, CF, duo triangula DCB, DFB ſunt æqualia; ſublatoque communi triangulo BOD, erunt duo reliqua BOF, DOC æqualia; quæ, ſi ſeparatim eidem trapezio DABOD addantur, fiet triangulum ADF æquale trapezio ABCD.

Jam verò ſecetur biſariam baſis AF in puncto G, ducaturque DG: erit triangulum ADG ſemiſſis trianguli ADF, ſeu trapezii ABCD. Denique a puncto G ducatur recta GH parallela rectæ DE; & jungatur EH. Dico hanc dividere biſariam trapeziũ ABCD.



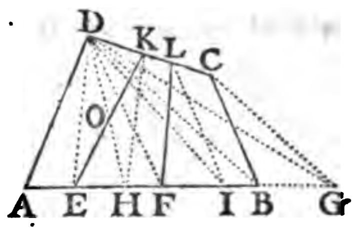
Demonſtratio. Quoniam duæ rectæ DE, GH ſunt parallelæ per Conſtr., duo triangula GHD, GHE ſunt inter ſe æqualia; ſublatoque communi triangulo GHI, erit reliquum triangulum DIH æquale reliquo GIE. Utrumque ſeparatim addatur eidem trapezio AEID: fiet trapezium AEHD æquale triangulo ADG, & conſequenter ſemiſſi trapezii ABCD. Quod erat &c.

PRO-

PROBLEMA XXXVII.

351. TRapezium ABCD *in tres æquales partes dividere per duas rectas a datis super uno latere* AB *duobus punctis* E & F *ductas*.

Resolutio. Ab angulo opposito C ducatur diagonali BD parallela CG, quæ lateri producto AB occurrat in G, a quo ad alterum oppositum angulum D ductà rectà DG, habebitur triangulum ADG æquale trapezio ABCD per Probl. præced. Quamobrem, si trifariam dividatur in punctis H & I basis AG, ducanturque rectæ DH, DI, erit quodvis ex tribus triangulis ADH, HDI, IDG tertia pars trianguli ADG, seu trapezii propositi ABCD. Denique a puncto H ducatur HK parallela rectæ DE, & a puncto I recta IL parallela ipsi DF; junganturque rectæ EK, FL: quæ trapeziū propositum ABCD divident in tres partes æquales.



Demonstratio. Quoniam duæ rectæ DE, HK sunt parallelæ per Constr., erunt duo triangula HDK, HEK inter se æqualia. Quare, si ab unoquoque auferatur commune triangulum HOK, supererit triangulum DOK æquale triangulo EOH. Addatur utrinque trapezium AEOD: fiet trapezium AEKD æquale triangulo ADH, hoc est, tertiæ parti trapezii ABCD. Eodem modo demonstrabitur trapezium AFLD æquari triangulo ADI, hoc est, duabus tertiis partibus trapezii

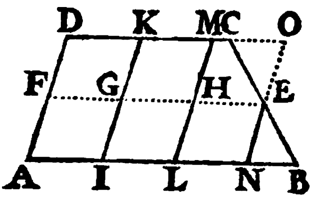
AB

ABCD; hinc facilè infertur trapezium quodlibet EL, FC esse tertiam partem dati trapezii ABCD. Quod erat &c.

Problema XXXVIII.

352. *Trapezoidem* ABCD *in totidem, quot libuerit, partes æquales dividere per lineas parallelas alterutri duorum laterum* AD, *vel* BC, *quæ non sint invicem parallela.*

Resolutio. Partiri oporteat, puta, in tres partes æquales propositam trapezoidem per lineas parallelas lateri AD. Secetur bifariam aliud oppositum latus BC in puncto E, a quo ducta parallela EF trifariam dividatur in punctis G & H: per quæ, & per punctum E ductæ lateri AD tres parallelæ IK, LM, NO divident trapezoidem propositam in tres partes æquales.

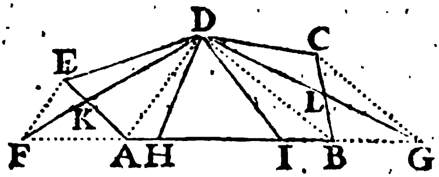


Demonstratio. Quoniam duo triangula BEN, CEO & sunt æquiangula, & latus EB unius æquatur lateri EC alterius, erunt inter se æqualia. Ergo trapezoides BCML æquatur parallelogrammo MLNO; & consequenter trapezoides tota ABCD æquatur toti parallelogrammo ANOD. Quia verò parallelogramma singula AK, IM, LO sunt tertia pars parallelogrammi totalis AO, erunt etiam tertia pars propositæ trapezoidis ABCD. Quod erat &c.

Multilaterum Divisio.

LEMMA.

353. **P***Olygonum* ABCDE *in triangulum convertere, cujus vertex* D *sit in dato angulo.*



Resolutio. Ex dato puncto D ad A ducatur diagonalis DA, eique parallela EF, occurrens lateri AB producto in F; jungaturque DF, quæ quadrilaterum BCDF efficiet æquale pentagono dato ABCDE. Nam duo triangula AKF, DKE sunt inter se æqualia; quod facilè ostenditur, si commune triangulum AKD utrinque auferatur a duobus triangulis AED, AFD inter se æqualibus propter parallelas AD, EF.

Reliquum jam est, ut quadrilaterum BCDF in triangulum transformetur; quod facilè præstabitur, ducta similiter diagonali DB, eique parallelà CG, junctàque DG. Nam propter æqualitatem triangulorum CLD, BLG, erit triangulum FDG æquale quadrilatero BCDF, & consequenter polygono ABCDE. Quod erat &c.

Hac methodo intelligis, opinor, reduci posse in triangulum figuram quamlibet multilateram, si nempe transformetur in figuram uno latere minorem, atque ita deinceps, donec ad triangulum ventum sit, uti in hoc Lemmate, & alibi n. 320. & 321. fieri vidimus.

PRO-

PROBLEMA XXXIX.

354. *Datum polygonum* ABCDE *in tres partes æquales partiri per lineas rectas a dato angulo* D *ductas*.

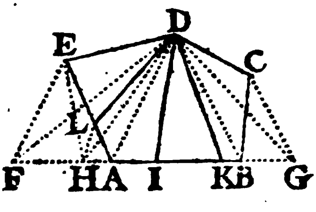
Resolutio. Fiat per Lemma, ut in fig. præced., reductio polygoni in triangulum FDG, cujus vertex D; deinde trianguli basis FG in tres partes æquales dividatur in punctis H & I. Dico a rectis DH, DI divisum iri pentagonum datum in tres partes æquales.

Demonstratio. Triangula singula FDH, HDI, IDG sunt tertia pars trianguli FDG per Constr., & consequenter dati pentagoni ABCDE. Nam triangulum FDH æquatur trapezio AEDH, & triangulum IDG trapezio BCDI, ut ex dictis in Lem. constare potest. Itaque &c.

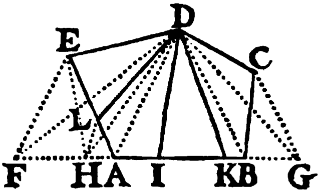
PROBLEMA XL.

355. *Datum polygonum* ABCDE *in quotlibet partes æquales partiri per lineas rectas ab angulo dato* D *ductas*.

Resolutio. Polygonum transformetur in triangulum FDG per Lemma: basis FG dividatur, puta, in quatuor partes æquales in punctis H, I, K; junctisque DH, DI, DK, quatuor triangula FDH, HDI, IDK, KDG erunt singula quarta pars trianguli FDG, & consequenter pentagoni ABCDE. Quia vero punctum H cadit extra latus AB, reducendum erit triangulum



HDI ad trapezium ALDI; quod facilè præſtabitur, ductâ HL parallelâ rectæ AD &c.



Verùm hæc Geodeſiæ pars uberiùs promovebitur poſt traditam proportionum doctrinam.

GEO-

GEOMETRIÆ
THEORICO-PRACTICÆ
LIBER SECUNDUS
DE PROPORTIONE
LINEARUM RECTARUM.

ELEMENTUM I.

De Rationibus, & Proportionibus.

DEFINITIONES.

356. DUARUM *ejusdem generis magnitudinum mutua quædam secundùm quantitatem comparatio dici solet a Geometris Ratio.* Ratio

357. Hæc comparatio duplex est. In prima quæritur duarum quantitatum differentia, quæ dicitur Ratio Arithmetica, & subductione investigatur. Sic ratio septenarii ad ternarium est excessus, seu differentia 4. Arithmetica,

358. In secunda quæritur, quoties una quantitas major minorve sit alterà, seu, quoties una alteram contineat, vel in eadem contineatur: quæ dicitur Ratio Geometrica, & divisione deprehenditur. Nam quotus ostendit rationem dividui ad divisorem, nempe, quoties una quantitas alteram contineat. Sic ratio *6* ad *2* deprehenditur dividendo *6* per *2*. Geometrica.

Scholion.

Ratio, de qua unicè in hoc tractatu sermo habebitur, est ratio geometrica.

Rationis Antecedens, Consequens.

359. *Antecedens rationis dicitur illa quantitas, quæ ad aliam refertur: Consequens verò illa, ad quam refertur.*

Denominator rationis.

360. *Quotus antecedentis per consequentem divisi, dici solet Exponens, seu Denominator rationis. Est enim Quotus quantitas integra, vel fracta, modum definiens, quo antecedens rationis terminus consequentem contineat, vel in illo contineatur.* Hinc quotus dicitur etiam denominator rationis, quia denominat quamlibet proportionum speciem: puta, si quotus antecedentis per consequentem divisi sit 2, dicitur ratio dupla, sit 3, tripla, si $\frac{1}{2}$, subdupla, si $\frac{1}{3}$, subtripla; & universaliter ratio ipsius a ad b est, quæ denominatur ab $\frac{a}{b}$, hoc est, a quotiente quantitatis a per b divisæ.

361. Sicuti duæ magnitudines inter se mutuò comparantur; ita duæ rationes peræquè conferri possunt.

Proportio

Proportio itaque est duarum rationum æqualitas. Unde quatuor quantitates dicuntur proportionales, cum ratio inter primam, & secundam æqualis est rationi inter tertiam, & quartam.

Arithmetica, Geometrica.

362. *Æqualitas duarum rationum arithmeticarum est æqualitas excessuum, vel defectuum, & vocatur Proportio Arithmetica. Æqualitas duarum rationum geometricarum est æqualitas quotorum, & Proportio Geometrica appellatur.*

363. Prima expressio proportionis geometricæ

est

est hujusmodi: 8:2::12:3. Altera usitatior expressio est $\frac{8}{2}=\frac{12}{3}$. Nam ratio geometrica ex quoto æstimanda est (n. 360.), & æqualitas rationum ex æqualitate quotorum (n. 362.); ubi enim quoti invicem æquantur, ibi & quantitates sunt in eadem ratione constitutæ; cum autem divisionum quotientes indicari soleant interjectâ lineolâ dividuum inter, & divisorem: hinc rationes singulæ exprimuntur instar fractionum, quarum numerator, & denominator perinde sunt, atque rationis antecedens, & consequens. Omnis autem proportio sic pronuntiari solet: 8 est ad 2, uti 12 ad 3. Rationum expressio.

Corollarium.

364. Hinc duæ rationes 8 ad 2, & 12 ad 3 dicuntur similes, æquales, eædem, quando antecedentes termini per suos consequentes divisi, dant quotientes æquales. Et vicissim, si quotientes sint æquales, magnitudines erunt proportionales: idest, ratio rationi erit eadem, æqualis, similis. Quare, si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, erunt quantitates illæ proportionales: hoc est, $a:b=c:d$; quo signo æqualitatis $=$ exprimitur æqualitas ipsa exponentium, seu quotorum. Æqualium rationum indicium.

365. *Rationes inæquales, seu dissimiles sunt, quarum antecedentes termini per suos consequentes divisi, dant exponentes inæquales; & illa ratio major est, cujus denominator, seu quotus major.* Rationes inæquales.

Inæqualitas rationũ iisdem planè signis notatur, quibus inæqualitas magnitudinũ. Sic $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$, sive $a:b$

>

$>$ *c:d* significat rationem *a* ad *b* majorem ratione *c* ad *d*: hoc est, exponentem primæ rationis majorem exponente secundæ rationis.

366. *In omni proportione geometrica, quæ exhibeatur per* a:b::c:d, *vel* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *primus terminus* a *primæ rationis appellatur Primum Antecedens, secundus terminus* b *Primum Consequens. Primus terminus* c *secundæ rationis vocatur Secundum Antecedens; & secundus terminus* d *Secundum Consequens.*

367. *Primus terminus* a, *& ultimus* d *ejusdem*

Extrema. *proportionis vocantur Extrema. Secundus terminus* b,

Media. *& tertius* c *appellantur Media.*

368. *Rationes æquales in eadem serie progre-*

Rationes ordinatæ. *dientes, vocantur rationes ordinatæ;* & scribi solent instar fractionum æqualium, $\frac{12}{3} = \frac{8}{2} = \frac{20}{5} = \frac{28}{7}$ &c.; vel, 12:3::8:2::20:5::28:7. Vel etiam, quod interdum commodius erit, scribi poterunt omnia successivè antecedentia, duobus interjectis punctis inter singula, & similiter omnia successivè consequentia, interjectis rursum duobus punctis, seriemque omnium antecedentium a serie consequentium separando quatuor punctorum notatione, hac semper observata lege, ut antecedens, & consequens cujuslibet rationis eumdem locum obtineant in utraque serie. Itaque earumdem rationum æqualium

Expressiones variæ. series ita exprimi poterit: 12:8:20:28::3:2:5:7; quod significat generatim terminos componentes primam seriem proportionales esse terminis respectivis componentibus secundam seriem, singulos singulis.

Hæc scribendi, notandiquè methodus in serie plurium rationum æqualium commodissima videri solet,

solet, præsertim cum partes ejusdem figuræ, antecedentium vicem obeunt, & partes alterius figuræ, consequentium locum sustinent. Nam juxta hanc methodum omnes partes primæ figuræ scribi possunt successivè, respondentes partibus in secunda figura uniformiter successivis; qua facta separatione, facilè secernuntur partes illæ, quæ ad primam figuram pertinent, ab iis, quæ ad alteram figuram; ita ut statim in oculos incurrant partes, quæ invicem comparantur in utraque figura, & ex quibus rationes, & proportiones gignuntur, nimirum,

Si duæ figuræ ABCDE, MNOPQ habeant latera invicem proportionalia, hoc est, si

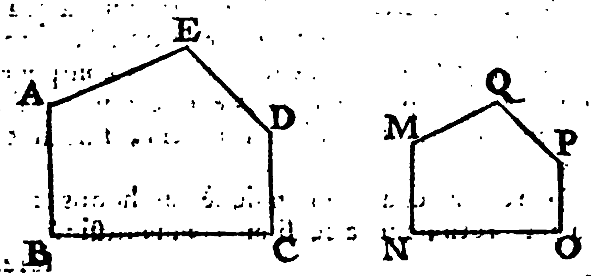
AB : MN :: BC : NO

BC : NO :: CD : OP

CD : OP :: DE : PQ &c.,

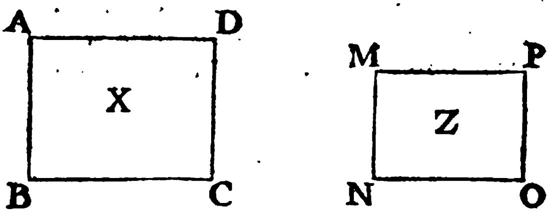
consultiùs erit in una serie scribere successivè latera AB, BC, CD, DE &c. primæ figuræ, quæ sunt antecedentia rationum æqualium; & in altera serie similiter successivè latera MN, NO, OP, PQ &c. secundæ figuræ, quæ earumdem rationum æqualium consequentia sunt: observatà utrobique lege, quòd respectiva latera eumdem locum obtineant in utraque serie; & ita habebitur

AB : BC : CD : DE &c. :: MN : NO : OP : PQ &c.



369.

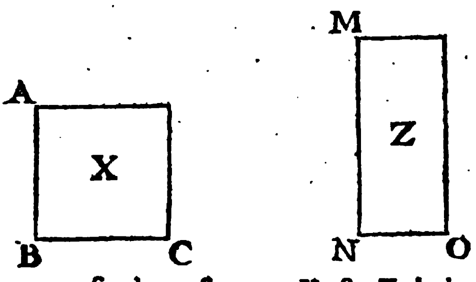
Proportio directa, 369. *Si duæ figuræ X & Z sint ejusmodi, ut latus AB primæ sit ad latus MN secundæ, sicuti latus BC primæ est ad latus NO secundæ, dicentur habere latera directè, seu simpliciter proportionalia.*



Quòd si omnia latera primæ X eamdem habeant rationem cum omnibus lateribus secundæ Z, duæ figuræ X & Z dicentur habere omnia latera mutuò proportionalia.

In utroque casu proportionis directæ latera primæ X sunt antecedentia in serie rationum æqualium ordinatarum, & latera secundæ Z sunt consequentia.

370. *Si duæ figuræ X & Z sint ejusmodi, ut latus AB primæ sit ad latus MN secundæ, uti la-*
Reciproca, *tus NO secundæ ad latus BC primæ, dicentur habere latera reciprocè proportionalia, seu reciproca.*



Quare, si duæ figuræ X & Z habeant duo latera reciproca, hoc est, si AB:MN::NO:BC,

latera

latera AB, BC primæ figuræ vocantur Extrema proportionis, latera MN, NO secundæ vocantur Media ejusdem proportionis.

371. *Si tres magnitudines invicem comparatæ, quemadmodum 2, 10, 50, sint ejusmodi, ut prima sit ad secundam, uti secunda ad tertiam, proportio dicitur continua;* & ita exprimitur: 2 : 10 :: 10 : 50, vel ÷ 2 : 10 : 50. Continua.

Corollarium.

372. Hinc, si eadem quantitas duabus quantitatibus æqualibus comparetur, vel duæ quantitates æquales eidem tertiæ, sive aliis inter se æqualibus comparentur, duæ rationes semper erunt æquales (n. 364.).

Et reciprocè duæ quantitates erunt æquales, si ad eamdem, vel æquales quantitates comparatæ habeant eamdem rationem; puta, duæ quantitates A & B erunt æquales, si A : C :: B : C.

AXIOMA.

373. *Si duas quantitates* A & B *multiplicet, aut dividat eadem quantitas: hinc facta, inde quoti erunt quantitatibus multiplicatis, aut divisis in eadem proportione.*

In primo casu A : B :: 2A : 2B :: 3A : 3B :: 4A : 4B &c.; hoc est, (n. 362.) $\frac{A}{B} = \frac{2A}{2B} = \frac{3A}{3B}$ &c.

In secundo casu A : B :: $\frac{1}{2}$A : $\frac{1}{2}$B :: $\frac{1}{3}$A : $\frac{1}{3}$B &c.

PRO-

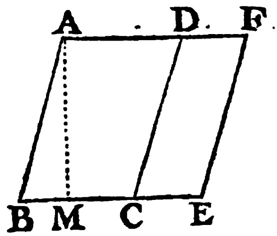
PROPOSITIO I.

THEOREMA.

Parallelogrammorum proportio.

374. *SI duo parallelogramma* AC, DE *inter easdem existant parallelas, eam inter se proportionem habent, quam bases* BC, CE; *sive* AC : DE :: BC : CE. Euclid. lib. 6. prop. 1.

Demonstratio. Quoniam parallelogramma AC, DE inter easdem parallelas existunt, habebunt quoque eamdem altitudinem, quæ per duarum parallelarum distantiam AM exprimitur. Quare (n. 263.) parallelogrammum AC = BC × AM; & parallelogrammum DE = CE × AM. Atqui BC × AM : CE × AM :: BC : CE (n. 373.). Ergo AC : DE :: BC : CE. Quod erat &c.



Scholion.

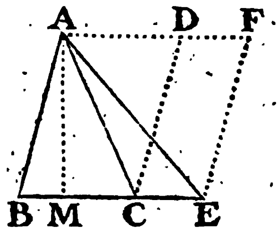
AB hoc Theoremate dependet quidquid uspiam de figuris sive planis, sive solidis per proportiones demonstratur. Euclidea demonstrandi ratio operosior est, quàm ferre possint Tirones in primo aditu scientiæ proportionum. Quam attuli demonstrationem, omnium expeditissima est.

Co-

Corollarium.

375. Ergo triangula BAC, CAE, quorum bases BC, CE in eadem recta linea existunt, & vertex communis A, hoc est, altitudo eadem est, eam inter se proportionem habent, quam bases BC, CE.

Nam parallelogramma ABCD, DCEF, quorum eadem altitudo est, dupla sunt triangulorum BAC, CAE. Ergo, uti illa, ita hæc erunt inter se, ut bases BC, CE.

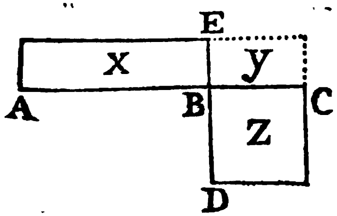


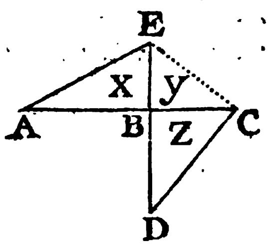
PROPOSITIO II.

THEOREMA.

376. *Parallelogramma, aut triangula æqualia* X, Z, *quæ unum angulum* ABE *uni* DBC *habent æqualem, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca: hoc est*, AB:BC::DB:BE. Latera reciproca.

Et vicissim, si latera sic habent reciproca, parallelogramma, aut triangula sunt æqualia. Euclid. lib. 6. prop. 14. & 15.





Demon-

Demonstratur I. pars. Quoniam anguli ABE, DBC sunt æquales, ita opponi ad verticem possunt, ut latera AB, DB efficiant singula unam rectam lineam cum lateribus singulis BC, BE. Hoc posito, erit (n. 374. & 375.)

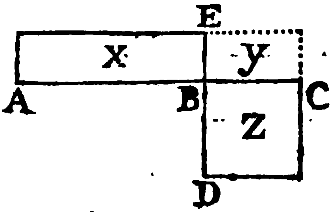
AB:BC::X:Y

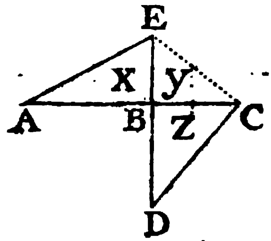
X:Y::Z:Y (n. 372.)

Z:Y::DB:BE (n. 374. & 375.).

Ergo AB:BC::DB:BE. Quod erat primum.

Demonstratur II. pars. Quoniam per hyp. latera circa æquales angulos sunt in proportione reciproca, erit AB:BC::DB:BE. Atqui AB:BC::X:Y (n. 374.); & DB:BE::Z:Y. Ergo X:Y::Z:Y; & consequenter X = Z. Quod erat alterum.





Corollarium I.

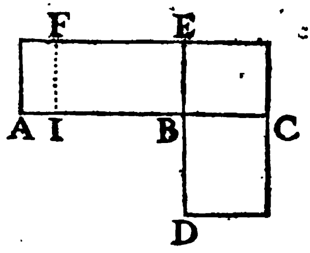
Criterium proportionalitatis.

377. Ex prima parte hujus Theorematis constat criterium proportionalitatis quatuor terminorum AB, BC, DB, BE illud esse, si AB × BE productum, seu rectangulum extremorum æquale sit ipsi BC × DB producto mediorum.

Corollarium II.

378. Si quatuor termini AB, BC, DB, BE sint ejusmodi, ut parallelogrammum AE, cujus duo latera contigua sunt extrema, majus sit pa-

parallelogrammo æquiangulo DC, cujus latera contigua sint media; sive, si ex quatuor terminis AB, BC, DB, BE, productum extremorum AB×BE majus sit producto mediorum BC×DB, erit ratio AB:BC>DB:BE. Sin autem productũ extremorum minus sit producto mediorum, erit ratio AB:BC<DB:BE.



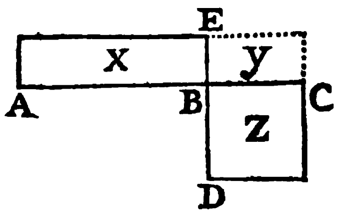
Demonstratio repetenda a n. 376.

PROPOSITIO III.

THEOREMA.

379. IN *omni proportione geometrica* AB:BC:: DB:BE, *rectangulum, seu productum* AB ×BE *extremorum, æquatur rectangulo, seu producto* BC×DB *mediorum*. Euclid. lib. 6. prop. 16. Proportionalium affectio præcipua.

Demonstratio. Fiat rectangulum X, cujus duo latera contigua sint hæc eadem extrema AB, BE dictæ proportionis; & aliud rectangulum Z, cujus similiter duo latera contigua sint ipsa media BC, DB. Duo hæc rectangula habebunt latera circa æquales angulos, nimirum rectos, reciproca; & consequenter erit X=Z (n. 376.). Atqui (n. 263.) rectangulum X=AB×BE producto extremorũ; & rectangulum Z=DB×BC producto mediorum. Ergo in omni proportione geometrica &c. Quod erat &c.



Corollarium.

380. QUoniam proportio AB : BC :: DB : BE dat $AB \times BE = BC \times DB$:

I. Dividendo utrumque membrum æquationis per AB, erit $BE = \frac{BC \times DB}{AB}$; hinc Regula generalis. *Cognitis tribus primis terminis* AB, BC,
Regulæ. DB *proportionis geometricæ, habetur quartus incognitus* BE, *multiplicando inter se duo media* BC, DB, *productumque dividendo per primum extremum* AB.

II. Eamdem æquationē $AB \times BE = BC \times DB$ dividendo utrinque per BE, fiet $AB = \frac{BC \times DB}{BE}$; hinc Regula. *Cognitis tribus ultimis terminis proportionis geometricæ obtinetur primus* AB, *multiplicando inter se duo media* BC, DB, *& productum dividendo per ultimum extremum* BE.

III. Eamdem æquationis formulam dividendo utrinque per BC, fiet $DB = \frac{AB \times BE}{BC}$; hinc Regula. *Cognitis duobus extremis, & primo mediorum proportionis geometricæ, obtinetur secundum medium, multiplicando inter se duo extrema, productumque dividendo per primum medium.*

IV. Vel eamdem dividendo utrinque per DB, erit $BC = \frac{AB \times BE}{DB}$; hinc Regula inveniendi primum medium, datis extremis, & secundo medio.

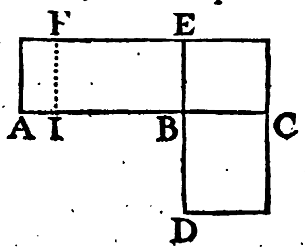
PRO-

PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

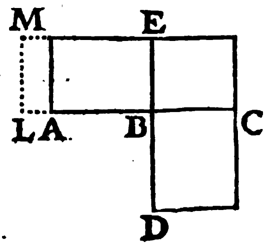
381. *SI ratio* AB : BC > DB : BE *parallelogrammum* AE, *cujus latera contigua sunt ipsa extrema, majus erit parallelogrammo æquiangulo* DC, *cujus contigua latera sunt media; & consequenter rectangulum* AE *æquale producto* AB × BE *extremorum, majus erit rectangulo* DC, *hoc est, producto* BC × DB *mediorum*.

Demonstratio. Nam, si a primo termino AB subducatur portio AI, quantùm satis est, ut residuum IB sit reliquis tribus terminis proportionale, hoc est, IB:BC::DB:BE, ducaturque IF parallela rectæ DBE: habebitur (n. 376.) parallelogrammum IE = DC. Atqui per hypothesim AB > IB. Ergo parallelogrammum AE > IE; & consequenter AE > DC. Quod erat &c.

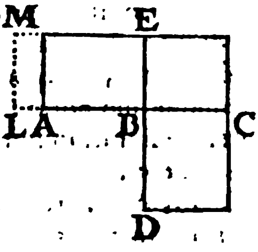


Corollarium.

382. CONtra verò, si AB:BC < DB:BE, demonstrabitur similiter parallelogrammũ AE < DC. Nam, si recta AB minor est, quàm ut sit tribus reliquis proportionalis, producatur BA in L, donec LB: BC :: DB:BE; ducaturque LM pa-



parallela rectæ BE: erit (n. 376.) LE = DC. Sed AE < LE. Ergo AE < DC.



PROPOSITIO V.

THEOREMA.

383. *In omni proportione geometrica* A:B::C:D, *quocunque modo disponantur termini, semper habebitur proportio, dummodo duo media maneant media, aut ambo evadant extrema, vel duo extrema perseverent extrema, aut ambo evadant media.* Euclid. lib. 6. prop. 16.

Demonstratio. Nam factum extremorum semper æquabitur facto mediorum: hinc per n. 376. & 377. magnitudines illæ erunt geometricè proportionales.

Quod, ut evidentiùs constet, animadvertendum est quatuor illos terminos juxta conditionem a Theoremate præscriptam nonnisi octo permutationes ferre posse, & in harum qualibet, productum extremorum semper æquari producto mediorum.

$a:b::c:d$	$ad = bc$
$d:b::c:a$	$da = bc$
$a:c::b:d$	$ad = cb$
$d:c::b:a$	$da = cb$
$b:a::d:c$	$bc = ad$
$b:d::a:c$	$bc = da$
$c:a::d:b$	$cb = ad$
$c:d::a:b$	$cb = da$

Ex

Ex hisce octo terminorum proportionalium permutationibus proficiscantur varii argumentandi modi, ac Regulæ proportionum, quas partim Euclides lib. 5. exponit, & demonstrat, ac nomine quamque suo notat, & definit, partim a Geometris inter demonstrandum adhibitæ sunt, & suis nominibus carent. Regulæ proportionum:

Invabit autem ad exercitationem, ut Tirones rem in numeris explorent, quos litteris in prima analogia substituant, & in reliquis omnibus permutationibus.

Regula I.

384. SI $8:4::6:3$, *erit alternando*, $8:6::4:3$. Euclid. lib. 5. prop. 16. Alternando.

Nam $8 \times 3 = 6 \times 4$.

Corollarium.

385. SI $12:4 > 6:3$, *erit alternando*, $12:6 > 4:3$. Euclid. lib. 5. prop. 27.

Nam $12 \times 3 > 6 \times 4$ (n. 378.).

Idem similiter demonstrabitur de proportione minore.

Regula II.

386. SI $8:4::6:3$, *erit invertendo*, $4:8::3:6$. Euclid. lib. 5. prop. 4. corol. Invertendo,

Nam $4 \times 6 = 8 \times 3$.

Corollarium.

387. SI $12:4 > 6:3$, *erit invertendo*, $4:12 < 3:6$. Euclid. lib. 5. prop. 26.

Nam $4 \times 6 < 12 \times 3$ (n. 378.).

Ac præterea Propositio per se patet; quò enim major est ratio quævis, eò minor est ipsius conversa.

Regula III.

Componendo, 388. SI $8:4::6:3$, *erit componendo*, $8+4:4::6+3:3$. Euclid. lib. 5. prop. 18.

Nam $8+4 \times 3 = 6+3 \times 4$.

Præterea perspicuum est in hac hypothesi utrumque antecedens 8 & 6 suo consequente auctum, proportionaliter augeri.

Corollarium.

389. SI $12:4 > 6:3$, *erit quoque componendo*, $12+4:4 > 6+3:3$. Euclid. lib. 5. prop. 28.

Nam productum extremorum majus est producto mediorum (n. 378).

Regula IV.

Dividendo. 390. SI $8:4::6:3$, *erit etiam dividendo*, $8-4:4::6-3:3$. Euclid. lib. 5. prop. 17.

Nam utrumque antecedens suo consequente proportionaliter mulctatur.

Co-

Corollarium.

391. *SI* $12:4 > 6:3$, *erit dividendo*, $12-4:4 > 6-3:3$. Euclid. lib. 5. prop. 29. Nam $3 \times 12-4 > 4 \times 6-3$.

Regula V.

392. *SI antecedens unum* $a+b$ *fuerit ad consequens* b, *ut antecedens alterum* $c+d$ *ad consequens alterum* d, *etiam antecedens primum* $a+b$ *erit ad* a *excessum suum supra consequens, ut antecedens alterum* $c+d$ *est ad* c *excessum suum supra consequens alterum; nimirum, si* $a+b:b::c+d:d$, *erit per conversionem rationis*, $a+b:a::c+d:c$. Euclid. lib. 5. prop. 18. corol. 1. Conversio rationis.

Nam, si $a+b:b::c+d:d$, erit dividendo per Regulam IV., $a:b::c:d$; & invertendo per Regulam II., $b:a::d:c$; & per Reg. III. componendo, $a+b:a::c+d:d$; quæ est conversio rationis.

Corollarium.

393. *SI prima quatuor magnitudinum ad secundam habeat majorem rationem, quàm tertia ad quartam, per conversionem rationis prima ad excessum primæ supra secundam habebit minorem rationem, quàm tertia ad excessum tertiæ supra quartam.*

Nam, si $a+b:b > c+d:d$, erit (n. 391.) dividendo, $a:b > c:d$; & (n. 387.) invertendo,

$b:a < d:c$; & componendo (n. 389.), $a+b:a < c+d:c$.

Regula VI.

394. *Omnis proportio geometrica* AC : DE :: BC : BE *potest in hanc transformari* AC : DE :: AC — BC : DE — BE: *hoc est, ut antecedens ad suum consequens, ita differentia antecedentium ad differentiam consequentium.*

Differentia.

Nam, quia AC : DE :: BC : BE, erit alternando, AC : BC :: DE : BE; & per conversionem rationis, AC : AC — BC :: DE : DE — BE; & rursum alternando, AC : DE :: AC — BC : DE — BE.

Vel summa antecedentiũ.

Similiter, si fuerint magnitudines quotcunque proportionales, quemadmodum se habuerit una antecedentium ad unam consequentium, ita se habebit summa antecedentium ad summam consequentium; hoc est, si A : a :: B : b :: C : c *&c., erit* C : c :: A + B + C : a + b + c. Euclid. lib. 5. prop. 12.

Nam, quia A : *a* :: B : *b*, erit alternando, & componendo, & rursum alternando, A + B : *a* + *b* :: B : *b* :: C : *c* ex hypothesi. Ergo rursum alternando, A + B : C :: *a* + *b* : *c*; & componendo, & iterum alternando erit A + B + C : *a* + *b* + *c* :: C : *c*.

Regula VII.

Multiplicatio, & divisio proportionalium.

395. *Si quatuor quantitates proportionales per alias quatuor pariter proportionales multiplicentur, vel dividantur: etiam factæ, vel quotæ quantitates proportionales erunt.*

Sint

Sint $A : 3A :: a : 3a,$
$B : 2B :: b : 2b.$

Ergo I. $A \times B : 3A \times 2B :: a \times b : 3a \times 2b,$

II. $\frac{A}{B} : \frac{3A}{2B} :: \frac{a}{b} : \frac{3a}{2b}.$

Nam in utroque casu, si fiat productum extremarum, & mediarum, reperientur producta constare iisdem quantitatibus inter se multiplicatis, ac proinde esse æqualia; quod esse criterium proportionalitatis quatuor terminorum demonstravimus n. 376. & 377.

Scholion.

Reliquas, quæ usui erunt, proportionum regulas, prout occasio tulerit, exponam.

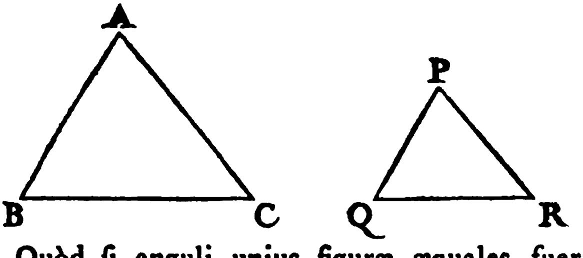
ELEMENTUM II.

De Lineis proportionaliter sectis, de Triangulis Similibus, ac de Lineis ad idem punctum concurrentibus.

DEFINITIONES.

396. *Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos, singulos singulis, æquales habent, atque etiam latera, quæ circùm æquales angulos existunt, proportionalia.* Figuræ similes.

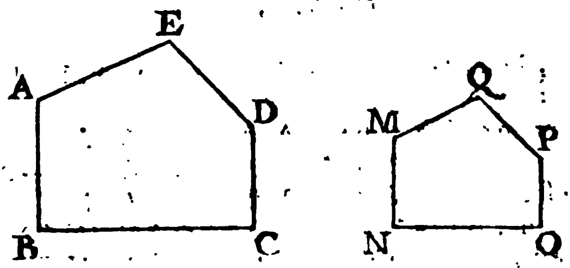
Sic triangula ABC, PQR similia dicuntur, si fuerint æquiangula, ita ut angulus A angulo P, & B ipsi Q, & C ipsi R æqualis sit; & pariter latera circa æquales angulos proportionalia habuerint: nimirum, AB:BC::PQ:QR, & AB:AC::PQ:PR, & AC:CB::PR:RQ.



Quòd si anguli unius figuræ æquales fuerint angulis alterius, singuli singulis, at latera circa æquales angulos proportionalia non fuerint, aut contra: non dicentur tales figuræ similes: cujusmodi sunt quadratum, & rectangulum oblongum. Nam hæ figuræ habent quidem angulos æquales, utpote rectos; at latera unius, lateribus alterius proportionalia non sunt.

Hæc

Hæc eadem definitio convenit quadratis, pentagonis, aliisque id genus figuris similibus A B C D E, M N O P Q invicem comparatis.



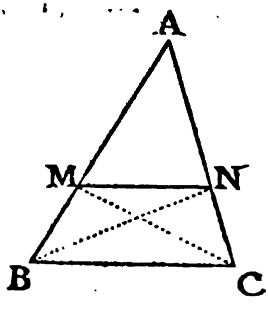
Figurarum similium latera æqualibus angulis adjacentia, vocantur latera homologa, uti AB, MN.

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

397. *SI ad unum trianguli* BAC *latus* BC *ducta fuerit parallela* MN, *hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera* AB, AC, *nimirum, erit* AB : AM :: AC : AN. Euclid. lib. *6.* prop. 2.

Demonstratio. Ductis enim rectis MC, NB, erunt triangula BMN, CMN super eamdem basim MN, & inter easdem parallelas constituta, inter se æqualia; utrique adjiciatur idem triangulum MAN: fiet triangulum BNA = CMA. Atqui hæc duo triangula æqualia habent angulum æqualem, seu communem in A. Ergo (n. 376.) circa æquales angulos habent latera in pro-



por-

portione reciproca, nimirum, AB : AM :: AC : AN. Quod erat &c.

Corollarium I.

398. IN eadem hypothesi erit etiam AM : MB :: AN : NC. Sectiones rectarum proportionales.

Nam ex Th. AB : AM :: AC : AN
& per conv. rat., AB : AB—AM :: AC : AC—AN
hoc est, AB : MB :: AC : NC
& divid., AB—MB : MB :: AC—NC : NC
hoc est, AM : MB :: AN : NC.

Corollarium II.

399. STante eadem Theorematis hypothesi habebitur etiam AB : AM : MB :: AC : AN : NC.

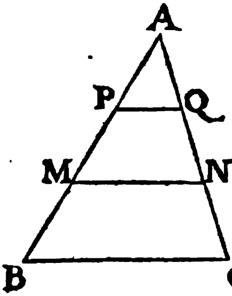
Nam per Theor. AB : AM :: AC : AN;
& per Corol. I. AM : MB :: AN : NC;
tum alternando primam, & secundam analogiam, habebitur AB : AC :: AM : AN,
AM : AN :: MB : NC.

Rationum itaque æqualium (n. 368.) antecedentibus in una serie, & consequentibus in altera rite dispositis, erit AB : AM : MB :: AC : AN : NC.

Co-

Corollarium III.

400. SI ad unum trianguli BAC latus BC ductæ fuerint plures parallelæ MN, PQ, erunt reliquorum laterum segmenta proportionalia, hoc est, AB : AM : MB : AP : PB : PM :: AC : AN : NC : AQ : QC : QN. *Euclid. prop. 2. lib. 6. Corol.*



Quoniam MN ponitur parallela lateri BC, erit per Corol. præced. AB : AM : MB :: AC : AN : NC; hoc est, AB : AC :: AM : AN :: MB : NC.

Rursũ, quia PQ ponitur parallela lateri BC, erit per idem Corol. AB : AP : PB :: AC : AQ : QC; hoc est, AB : AC :: AP : AQ :: PB : QC.

Cum autem rationes omnes hactenus inventæ æquales sint eidem rationi AB : AC, hinc erit

AM : AN :: AP : AQ.

Atqui (n.394.) AM : AN :: AM—AP : AN—AQ; hoc est, AM : AN :: PM : QN.

Quare, cum ratio AM : AN sit jam in serie rationum æqualium ipsi AB : AC, etiam ratio PM : QN poterit in eadem serie collocari. Erit itaque AB : AC :: AM : AN :: MB : NC :: AP : AQ :: PB : QC :: PM : QN, sive AB : AM : MB : AP : PB : PM :: AC : AN : NC : AQ : QC : QN.

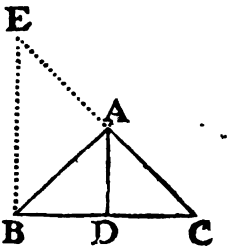
PRO-

PROPOSITIO II.

THEOREMA.

401. *SI recta* AD *angulum* BAC *bifariam secans, etiam secet basim* BC, *habebunt basis segmenta* BD, DC *eamdem proportionem, quam reliqua latera* AB, AC: *sive* BD:DC::AB:AC. Euclid. lib. *6.* prop. 3.

Demonstratio. Latus AC producatur quantitate AE = AB; jungaturque EB. Trianguli æquicruris anguli E & ABE sunt æquales. Quia igitur angulus externus BAC duobus internis E & ABE æqualis est (n. 221.) angulus DAC, qui per hypothesim dimidius est totius anguli BAC, æquabitur angulo E. Ergo (n. 114.) DA, BE sunt parallelæ; atque hinc (n. 397.) BD:DC::AE:AC; & quia AE = AB, erit BD:DC::AB:AC. Quod erat &c.

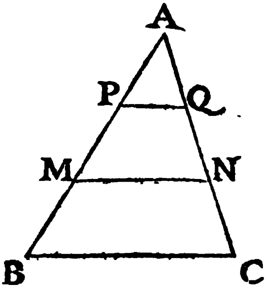


PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

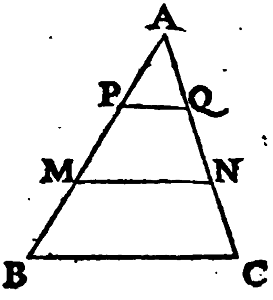
402. *DAtam rectam* AC *similiter secare, ut altera data* AB *fuerit secta in* P *&* M. Euclid. lib. *6.* prop. 10. Sectiones similes.

Resolutio. In vertice communi A efficiant duæ rectæ angulum quemvis; & extremitates sectæ, & insectæ jungat recta BC: huic ex punctis P & M duc parallelas PQ, MN ad rectam secandam AC occurrentes in Q & N. Dico factum.



De-

Demonstratio. Patet ex n. 400. Nam AB: AM: MB: AP: PB: PM:: AC: AN: NC: AQ: QC: QN; & consequenter AP: PM: MB :: AQ: QN: NC. Quod erat &c.



PROPOSITIO IV.

PROBLEMA.

403. D*Atam rectam* AC *in quotvis æquales partes secare.* Euclid. lib. *6.* prop. 10. Schol.

Sectiones æquales. *Resolutio.* Cum recta secanda AC faciat quemvis angulum in vertice A recta altera indefinita AB; ex qua circino cape tot æquales partes AP, PM, MB, in quot secare placuerit datam rectam AC: duc rectam BC, eique parallelas PQ, MN. Dico factum.

Demonstratio. Patet ex n. 400. Nam AP: PM: MB:: AQ: QN: NC. Quod erat &c.

PROPOSITIO V.

PROBLEMA.

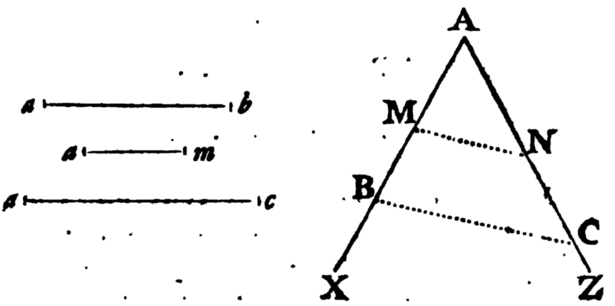
404. D*Atis tribus rectis* ab, am, ac *quartam proportionalem invenire.* Euclid. lib. *6.* prop. 12.

Resolutio. Fiat angulus quivis XAZ; tum super

per

per latus AX a vertice A sumantur duæ partes AB, AM æquales duabus primis proportionalibus *ab*, *am*; & rursum super secundum latus AZ accipiatur pars AC æqualis tertiæ proportionali *ac*; junganturque extremitates B & C primæ, ac tertiæ proportionalis per rectam BC, cui a puncto M ducatur parallela MN. Dico rectam AN esse quartam proportionalem quæsitam. Quarta proportionalis.

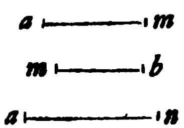
Demonstratio. Nam AB : AM :: AC : AN (n. 397.) Quod erat &c.



Corollarium I.

405. SI tribus datis rectis *am*, *mb*, *an* quærenda sit quarta proportionalis: disponantur tres datæ rectæ super lateribus anguli XAZ, ut in fig. præced., jungaturque MN, cui parallela fiat BC, occurrens in C lateri AZ indefinitè producto. Dico NC esse quartam proportionalem quæsitam.

Nam (n. 398.) AM : MB :: AN : NC.



Corollarium II.

Tertia proportionalis.

406. EAdem constructio adhibenda, si duabus AB, AM datis rectis tertia proportionalis sit invenienda; perinde enim est quartam proportionalem tribus datis AB, AM, AM quærere.

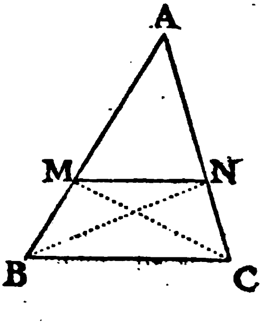
PROPOSITIO VI.

THEOREMA.

Secantes parallelæ.

407. SI *latera* AB, AC *trianguli* BAC *secta fuerint proportionaliter, ita ut* AB : AM :: AC : AN, *secans* MN *erit parallela basi* BC. Euclid. lib. 6. prop. 2.

Demonstratio. Ducantur rectæ NB, MC. Triangula BNA, CMA sunt æqualia (n. 376.); nam & habent angulum communem in A, & latera circa eumdem sunt reciproca, nimirum, AB : AM :: AC : AN. Subducatur utrinque triangulum MAN: fiet triangulum BMN = CMN, & utrumque super eadem basi MN. Ergo (n. 259.) rectæ MN, BC sunt parallelæ. Quod erat &c.



Co-

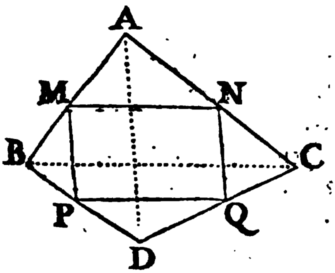
Corollarium I.

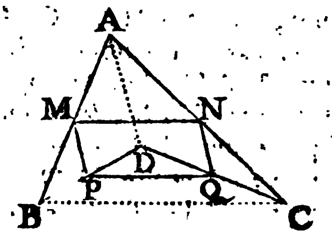
408. QUoniam recta MN est parallela basi BC, si AB : AM :: AC : AN :
erit quoque eadem secans MN parallela basi BC,
I. Si AM : AB :: AN : AC,
II. Si MB : AM :: NC : AN,
III. Si AB : MB :: AC : NC.

Nam ex prima analogia omnes hujusmodi proportionalium terminorum permutationes inferuntur per regulas proportionum.

Corollarium II.

409. QUadrilateri ABDC si latera singula secentur in punctis M, N, P, Q hac lege, ut AB : AC : DB : DC :: AM : AN : DP : DQ, quatuor rectæ, quæ in quatuor punctis junguntur, parallelogrammum efficient MPQN.

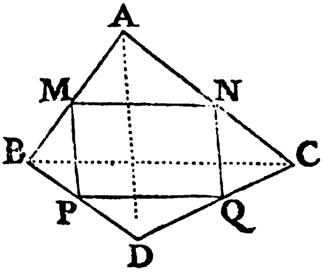


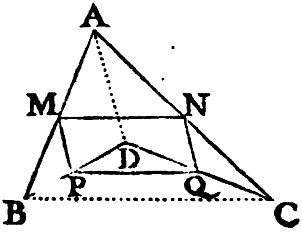


Nam ductis diagonalibus AD, BC,

I. In triangulo BAC, quia AB : AM :: AC : AN, erit MN parallela ipsi BC (n. 407.). Et similiter in triangulo BDC, quia DB : DP :: DC : DQ, erit PQ parallela ipsi BC. Ergo MN, PQ sunt invicem parallelæ.

II. In triangulo ABD, quia AB:AM::DB:DP, erit MP parallela ipsi AD (n. 407.). Et in triangulo ACD, quia AC:AN::DC:DQ, erit NQ parallela eidem AD. Ergo MP, NQ sunt invicem parallelæ. Ergo quadrilaterũ MPQN parallelogrammum est.



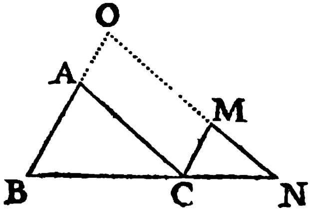


PROPOSITIO VII.

THEOREMA.

410. *Triangula* BAC, CMN *sibi mutuò æquiangula, sunt similia: hoc est, etiam* Triangula similia. *latera æqualibus angulis opposita, habent proportionalia.* Euclid. lib. *6.* prop. 4.

Demonstratio. Disponantur triangula in ea positione, ut latera homologa BC, CN unam rectam lineã efficiant, producanturque latera BA, NM, donec concurrant in puncto O. Quoniam igitur angulus ACB = MNC per hyp., erunt rectæ AC, ON pa-



ral-

rallelæ; & similiter, quia per hyp. angulus ABC $=$ MCN, rectæ OB, MC erunt parallelæ. Ergo OC parallelogrammum est, cujus latera opposita sunt æqualia. Cum autem AC parallela sit ipsi ON, erit BA : AO :: BC : CN.

Et rursum, quia MC parallela est ipsi OB, erit

BC : CN :: OM : MN.

Quare in hisce duabus analogiis substituendo CM ipsi AO, & AC ipsi OM, fiet

BA : CM :: BC : CN :: AC : MN :

hoc est, BA : BC : AC :: CM : CN : MN.

Ergo triangula sibi mutuò æquiangula, sunt similia. Quod erat &c.

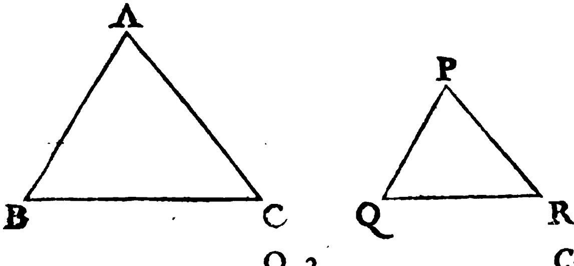
Corollarium I.

411. DUo triangula isoscelia sunt similia, si angulorum ad basim unum uni æqualem habeant, vel, si angulum a lateribus æqualibus comprehensum habeant æqualem.

Nam ex Elem. Lib. I. triangula in utroque casu erunt æquiangula.

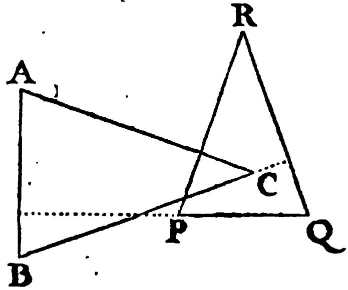
Corollarium II.

412. DUo triangula ABC, PQR sunt similia, si latera singula singulis fuerint parallela; quippe quæ æquiangula esse demonstratur ex theoria parallelarum.



Corollarium III.

413. DUo triangula ABC, PQR sunt similia, si latera unius perpendicularia sint lateribus alterius, singula singulis.



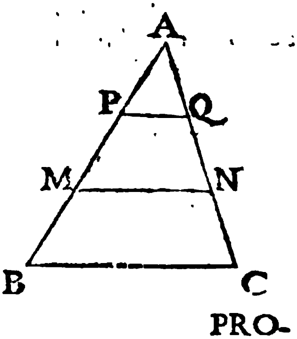
Nam, si per quadrantem integræ revolutionis convertatur triangulum PQR, hujus latera evadent parallela lateribus trianguli ABC; & consequenter triangula erunt æquiangula, & similia.

PROPOSITIO VIII.

THEOREMA.

414. *SI duo triangula* ABC, AMN *habeant angulum inter duo latera proportionalia æqualem, vel communem* A, *triangula erunt similia.* Euclid. lib. *6.* prop. *6.*

Demonstratio. Quia AB : AM :: AC : AN, erit recta MN parallela basi BC (n. 407.); & consequenter tres anguli unius æquales erunt tribus alterius, singuli singulis; hinc (n. 410.) duo triangula BAC, MAN sunt similia. Quod erat &c.

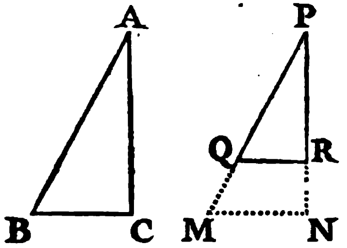


PRO-

PROPOSITIO IX.

THEOREMA.

415. *Triangula* ABC, PQR *sunt similia, si omnia latera habeant sibi mutuò proportionalia: hoc est, si* AB:AC:BC::PQ:PR:QR, *sive, si* AB:PQ::AC:PR::BC:QR. Euclid. lib. *6.* prop. 5.



Demonstratio. Minoris trianguli duo latera PQ, PR producantur, donec lateribus homologis AB, AC fiant æqualia, nimirum, PM=AB, & PN=AC; ducaturque MN. Itaque

I. Quia per hyp. AB:PQ::AC:PR, erit PM:PQ::PN:PR; duo ergo triangula PQR, PMN erunt similia (n. 414.).

II. Atqui triangulum ABC=triangulo PMN; nam per hyp. BC : QR :: AB : PQ :: PM : PQ; & propter similitudinem triangulorum PMN, PQR, PM:PQ::MN:QR. Ergo BC:QR:: MN:QR; & consequenter BC=MN. Est etiam per Constructionem AB=PM, AC=PN. Quare triangulum PMN=ABC. Ergo duo triangula ABC, PQR sunt pariter similia. Quod erat &c.

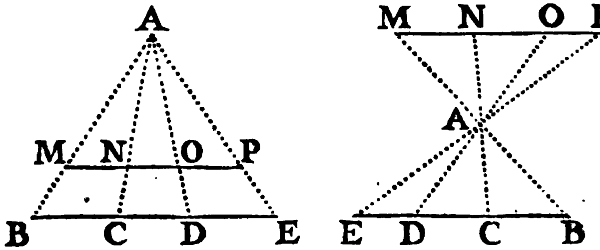
PROPOSITIO X.

THEOREMA.

Rectæ ad idem punctũ concurrentes.

416. *SI ab extremitatibus* B *&* E, *& ab aliis diversis punctis* C *&* D *ejusdem rectæ* BE *ducantur ad idem punctum* A *rectæ indefinitæ* AB, AC, AD, AE: *quævis recta* MP *parallela ipsi* BE, *hisce lineis intercepta dividetur in partes proportionales partibus rectæ* BE: *hoc est*,

BC:CD:DE::MN:NO:OP



Demonstratio. Triangula BAC, MAN; CAD, NAO; DAE, OAP, quæ sunt similia binatim, dabunt

BC:MN::AC:AN

AC:AN::CD:NO::AD:AO

AD:AO::DE:OP

Ergo BC:MN::CD:NO::DE:OP

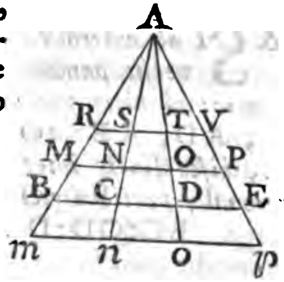
hoc est, BC:CD:DE::MN:NO:OP.

Quod erat &c.

Co-

Corollarium.

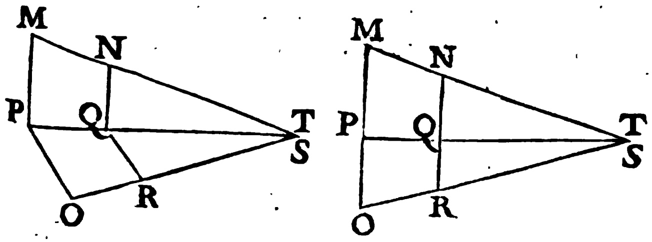
417. EX hoc Theoremate habes methodum expeditam secandi unam, aut plures lineas in partes datis proportionales: uti per te ipsum intelliges ex apposito schemate.



PROPOSITIO XI.

PROBLEMA.

418. *SI a duobus punctis* P *&* Q *ejusdem rectæ* PQ *discedant duæ parallelæ* PO, QR *inæquales, & similiter duæ aliæ parallelæ* PM, QN *proportionales duabus primis, hoc est,* PM: QN::PO:QR: *duæ rectæ* OR, MN *ductæ per extremitates harum linearum, quæ binatim sunt invicem parallelæ, productæ, si opus fuerit, necessariò concurrent in idem punctum* S *cum recta* PQ, *pariter, si opus sit, producta.* Punctum concursus duarũ rectarum.



De-

Demonstratio. Pone rectam OR occurrere rectæ PQ in S, & rectam MN occurrere in T. Dico duo puncta S & T in unicum coire. Nam, quia triangula MPT, NQT sunt similia, erit

PT : QT :: PM : QN.

Est autem per hyp. PM : QN :: PO : QR.

& propter similitudinem triangulorum OPS, RQS,

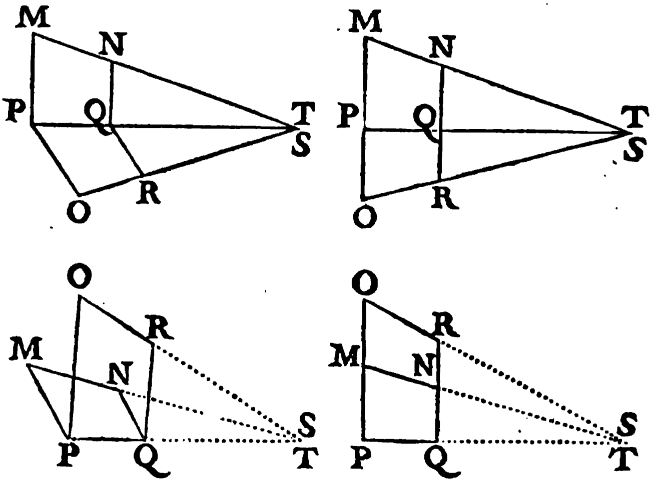
PO : QR :: PS : QS

Ergo PT : QT :: PS : QS

& div. PT — QT : QT :: PS — QS : QS

hoc est, PQ : QT :: PQ : QS

Ergo QT = QS; & consequenter punctum T coincidit cum S.



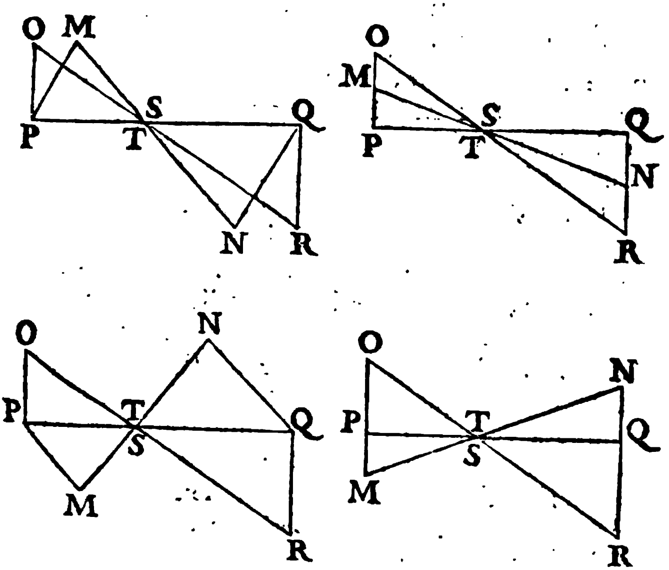
Vel

Vel in alia figurarum ſequentium ſerie, eamdem proportionem $PT : QT :: PS : QS$ transformabis componẽdo, $PT + QT : QT :: PS + QS : QS$, ideſt,

$$PQ : QT :: PQ : QS.$$

Ergo $QT = QS$; adeoque punctum T coincidit cum puncto S.

Quamobrem in omni caſu puncta T & S coibunt. Quod erat &c.



Hinc reſolutio ſequentis Problematis.

PROPOSITIO XII.

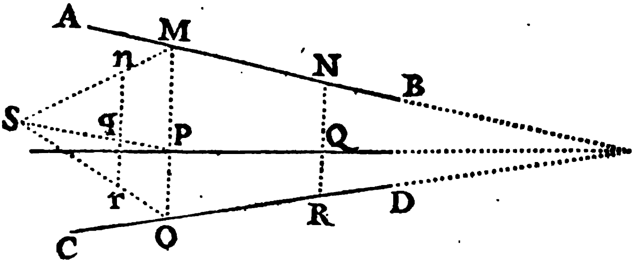
PROBLEMA.

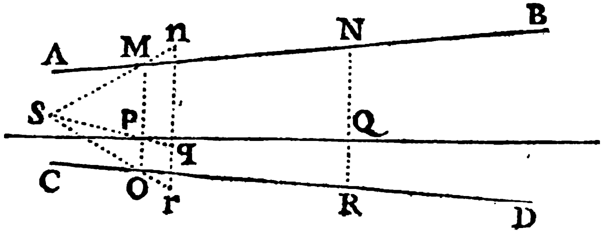
419. *A Puncto dato* P *rectam ducere* PQ, *quæ transeat per punctum concursus duarum aliarum rectarum, quando punctum concursus magis distat, quàm facilè determinari possit.*

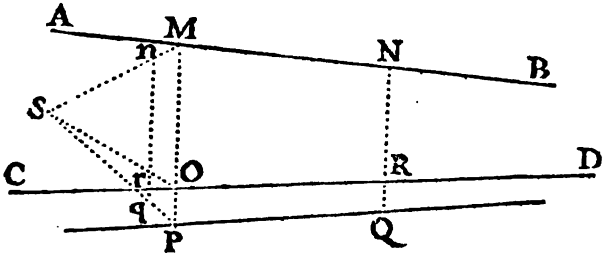
Resolutio. Per datum punctum P ducatur utcunque recta POM, quæ datis rectis AB, CD occurrat in O & M; huic a quovis puncto parallela ducatur QRN, occurrens iisdem datis rectis in punctis R & N; tum super recta MO a duabus rectis AB, CD intercepta, construatur triangulum æquilaterum MSO. Dein alterius parallelæ QRN portio NR a datis rectis intercepta transferatur in S*n*, & S*r* super lateribus SM, SO trianguli æquilateri, productis, si opus fuerit; ducaturque *nr*. Triangulum *n*S*r* erit æquilaterum (n. 414.); & consequenter *nr*=S*n*=NR ex Constr. Denique a vertice S trianguli æquilateri per datum punctum P ducatur recta SP, quæ producta, si opus fuerit, secabit in *q* rectam *nr*, pariter productam, si opus fuerit; tum portio *qr* transferatur in QR, super recta QRN; & a puncto Q sic determinato, per datum punctum P ducta recta PQ necessariò dirigetur versùs punctum concursus duarum rectarum AB, CD.

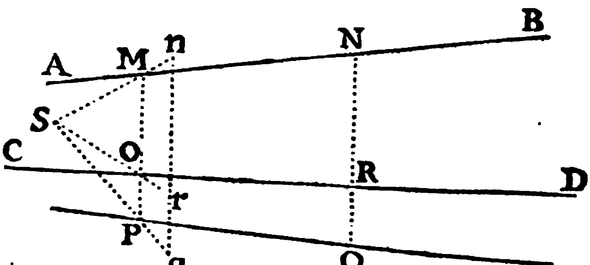
Demonstratio. Nam per Constructionem erit PM:PO::*qn*:*qr* (n. 416.) Atqui rursum per Constr. QR=*qr*. Itaque, si duæ istæ partes æquales subducantur ab æqualibus NR, *nr*, residuum QN=*qn*. Quamobrem substitutis QN,

QR

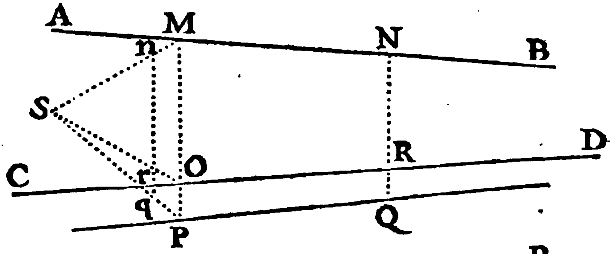

A
M
n
N
B
S
q
P
Q
r
R
D
C
O

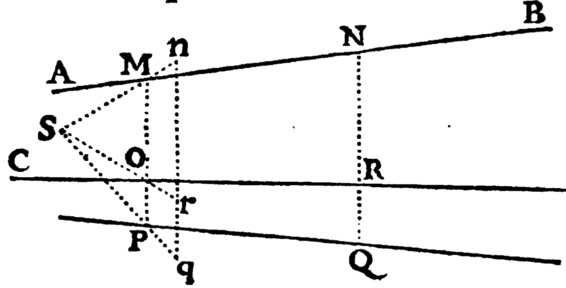

B
A
M
n
N
S
P
Q
q
C
O
r
R
D


A
M
n
N
B
S
C
r
O
R
D
q
P
Q


B
A
M
n
N
S
C
O
R
D
r
P
q
Q

QR loco partium *qn*, *qr* in priori analogia, habebitur PM:PO::QN:QR. Ergo tres rectæ AB, CD, PQ concurrent ad idem punctum (n. 418.). Quod erat &c.





PRA-

PRAXIS GEOMETRICA

ELEMENTI II. LIB. II.

AB hisce Theorematis, numero quidem paucis, sed usu amplissimis, complurium instrumentorum inventio profecta est, quorum aliqua hoc loco, præsertim celebriora attingam, & eorum descriptionem, usumque tradam.

Itaque I. agam de Circino, ut vocant, proportionis, quo utimur ad cognoscendam proportionem lineæ ad lineam, plani ad planum, solidi ad solidum; quemque jure dixeris totius Geometriæ compendium.

II. De Scala geometrica, qua perpetuò utuntur Geometræ, præsertim ubi Ichnographiæ vel ampliandæ, vel contrahendæ dant operam.

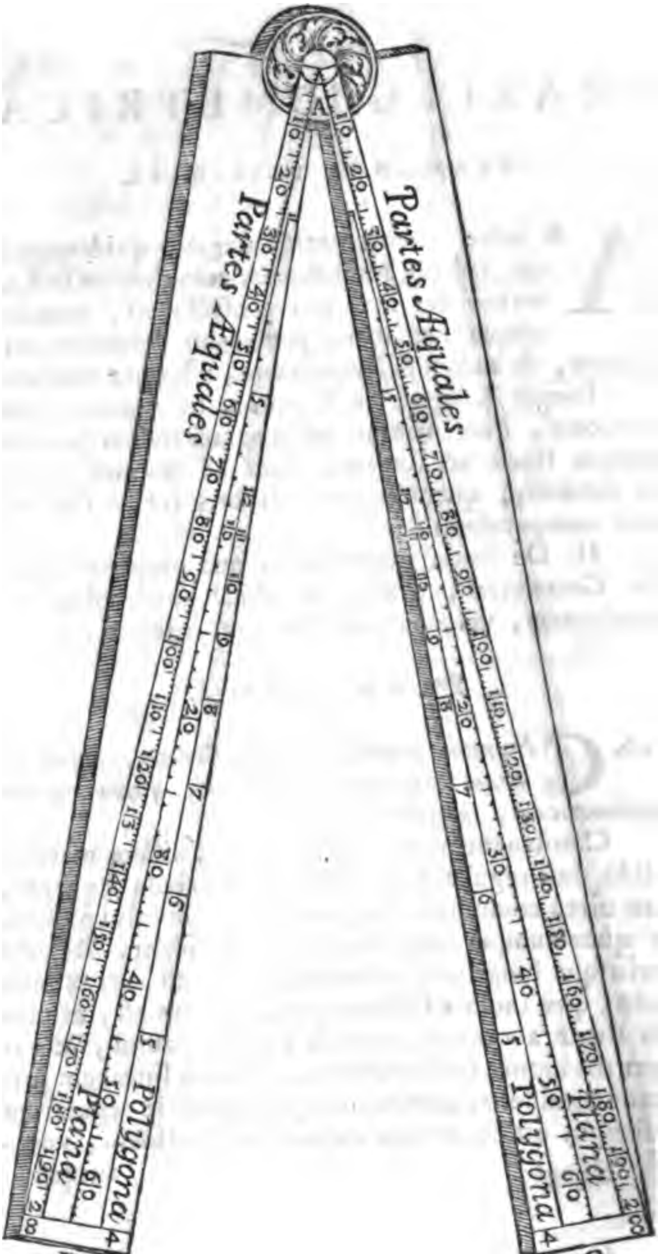
PROBLEMA I.

420. *Circinum proportionis construere, atque lineam partium æqualium, quam vocant arithmeticam, inscribere.*

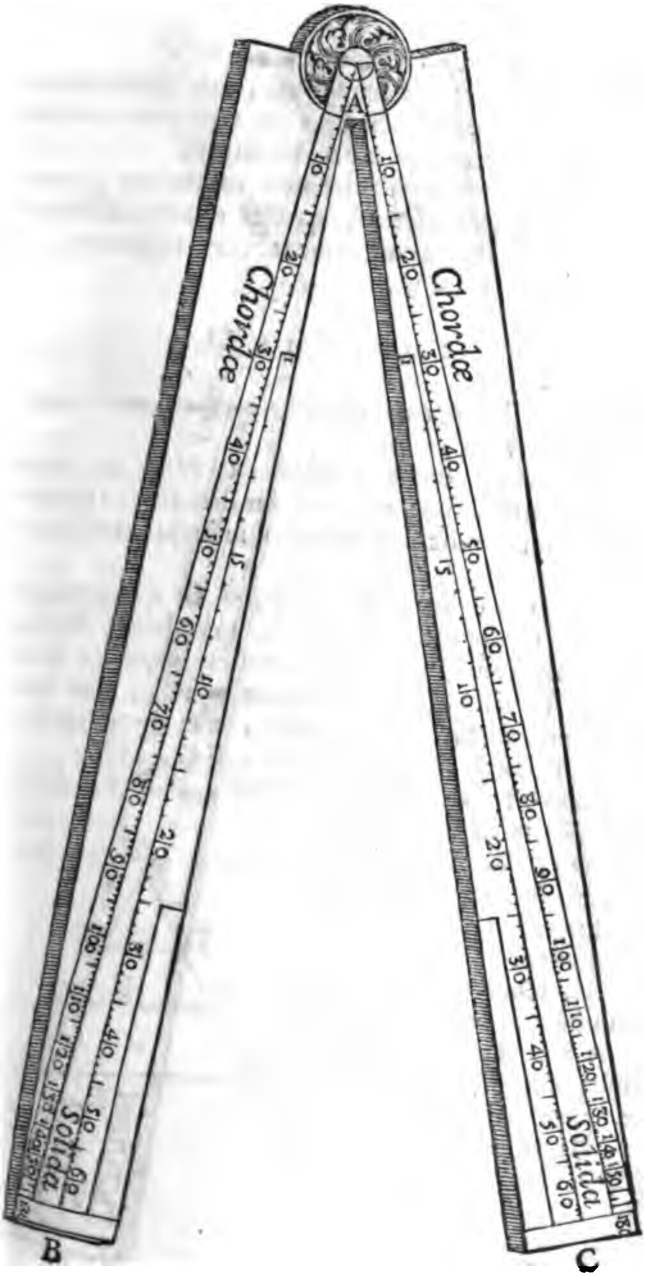
Construantur ex cupro, ligno, aliàve materià solidà duæ regulæ AB, AC, ut in tabula sequenti, quæ circa commune centrum ita circumvolvi possint, ut quemcunque angulum comprehendant. Regulæ utriusque longitudo determinata non est, uti & latitudo, quæ tanta esse debet, quanta opus est, ut plures lineæ a centro protensæ inscribi possint, & earum divisiones facilè distingui. Harum linearum primam considero, quæ in utraque superficie regularum inscripta est secundùm earum longitudinem, vocaturque

Constructio Circini proportionis.

Linea arithmetica.



A
Partes Æquales
Partes Æquales
Polygona
Plana
Polygona
Plana
B
C


A
Chordae
Chordae
Solida
Solida
B
C

turque linea partium æqualium, ſeu arithmetica. Hæc pro minoribus circinis in 100 partes æquales, pro majoribus in 200 dividitur.

Debet & haberi circinus communis, cujus cuſpides ſint acutiſſimæ, quibus exactè diſtantiæ omnium punctorum inſtrumenti transferantur, & inter ſe comparentur.

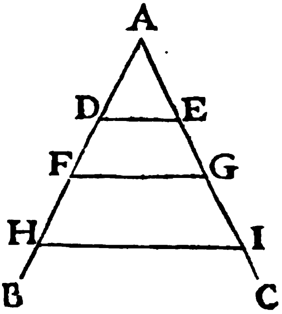
PROBLEMA II.

421. *Fundamentum circini proportionum exponere.*

Artificium omne pendet ex Prop. 7. hujus Elem. n. 410, hoc eſt, ex ſimilitudine triangulorum, quæ huic inſtrumento inſcribi intelliguntur.

Sint ergo duæ lineæ AB, AC quemcunque angulum comprehendentes, & æqualiter diviſæ, ita ut diviſiones unius ſint omnino æquales diviſionibus alterius. Per diviſionum puncta, quæ mutuò reſpondent, aut ducantur, aut duci intelligantur lineæ tranſverſales DE, FG, HI.

Conſtat I. triangula ADE, AFG, AHI eſſe iſoſcelia ex ſuppoſitione, nimirum, AE=AD, AG=AF &c., & conſequenter angulos ad baſes eſſe inter ſe æquales.



II. Cum angulus A ſit communis, erunt anguli ADE, AFG &c. æquales, & conſequenter lineæ DE, FG, &c. parallelæ.

III. Cum autem omnes

lineæ

lineæ transversales sint similiter parallelæ, æquiangula erunt triangula; & consequenter (n. 410.) AE:AG::DE:FG. Ergo, ut linea AE quota pars est lineæ AG, ita linea transversalis DE erit similis pars lineæ FG. Et sic de reliquis.

Corollarium.

422. SI lineæ AB, AC divisæ sint secundùm aliquam proportionem, etiam rectæ transversales eamdem proportionem observabunt, quemcunque tandem angulum lineæ AB, AC comprehendant. Cum igitur regulæ, ex quibus componitur instrumentum, ita compingantur, ut diduci, aut coarctari, hoc est, omnem angulum formare possint: hinc infinitas habes in eodem instrumento series linearum transversalium æquivalenter inscriptas, quæ eamdem inter se proportionem observabunt, ac lineæ re ipsa regulis inscriptæ. Sicuti ergo latera circini divisa sunt in partes æquales, ita etiam habes innumeras transversales divisas in partes æquales ab aliis transversalibus; eademque ratiocinatio accommodabitur aliis linearum speciebus, quas inscriptas vides in eodem instrumento, quarum usum suo loco exponemus.

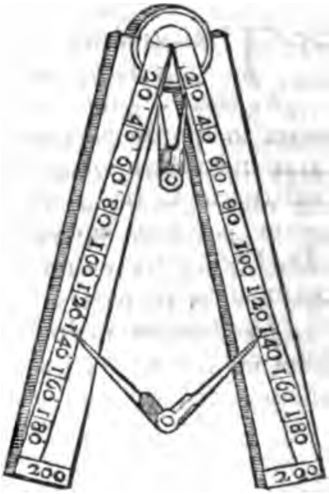
Similium triangulorum usus.

PROBLEMA III.

Divisio. 423. D*Atam rectam in quotlibet partes æquales dividere, puta, septem.*

Resolutio. I. Assumatur pro libito numerus, qui exactè per 7 dividi possit, quemadmodum 35, 70, 140.

II. Tum circino communi cape intervallum datæ lineæ; atque ita aperiatur circinus proportionis, ut hæc distantia accommodari utrique brachio possit ad assumptum numerum, puta, 140 & 140.



III. Stante hac instrumenti positione, accipiatur distantia transversalis inter 20 & 20. Hæc erit septima pars propositæ lineæ.

Vel, si longitudo datæ rectæ accommodata fuisset inter 70 & 70, distantia inter 10 & 10 esset septima pars quæsita.

Demonstratio consequitur ex similitudine triangulorum.

Corollarium.

424. QUamvis linea, cujus septima pars quæritur, ducta esset in solo, atque adeò in instrumentum transferri non posset, ejus tamen septi-

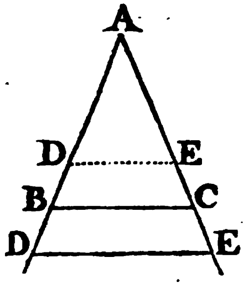
ſeptima pars ſic poſſet definiri. Ut, ſi linea 140 pedum proponeretur, aſſume circino communi 140 partes in linea arithmetica partium æqualium: hoc intervallum transfer hinc inde in notas numeri, qui per 7 dividi poſſit, puta, a 70 in 70: intervallum a 10 in 10 circino acceptum, & translatum in lineam partium æqualium, exhibebit 20 numerum pedum, quem continet ſeptima pars lineæ propoſitæ.

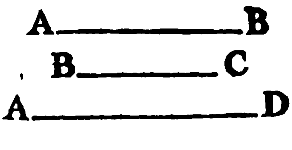
PROBLEMA IV.

425. TRibus datis rectis AB, BC, AD *quartam proportionalem* DE *invenire*. Quarta proportionalis.

Reſolutio. Linea AB transferatur a centro A circini in lineam partium æqualium; tum ita aperiatur inſtrumentum, ut intervallum ſecundæ lineæ conſtituatur in BC tranſverſim; deinde in eamdem lineam partium æqualium ſtatue menſuram tertiæ AD. Dico intervallum DE æquale eſſe quartæ proportionali quæſitæ.

Demonſtratio. Nam AB: BC :: AD: DE. Quod erat &c.



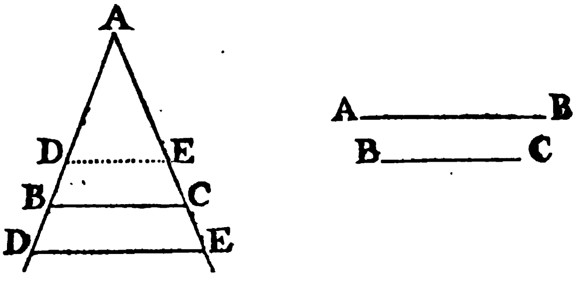


PROBLEMA V.

Tertia proportionalis.

426. **D**Uabus datis rectis AB, BC *tertiam proportionalem invenire.*

Resolutio. In eadem figura ponantur æquales BC & AD, erit transversalis DE tertia proportionalis duabus AB, BC.



PROBLEMA VI.

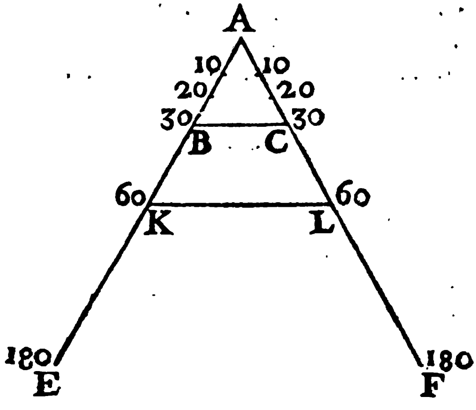
Linea chordarum.

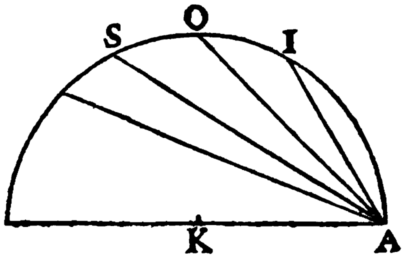
427. **C**Ircino proportionis lineam chordarum inscribere.

Resolutio. A centro circini ad extremitatem regularum inscribantur hinc atque inde duæ lineæ AE, AF, quæ bifariam dividantur in K & L; deinde in charta, aut tabellà separatà, semidiametro AK, aut AL semicirculus describatur, & in gradus 180 dividatur; tum ab eodem puncto A aut ducantur, aut ductæ intelligantur subtensæ AI, AO, AS, nempe unius, duorum, trium, quatuor graduum &c., quæ transferantur successivè in regulas AE, AF, initio semper facto a puncto A centro circini, ita ut subtensa graduum 60, utpote

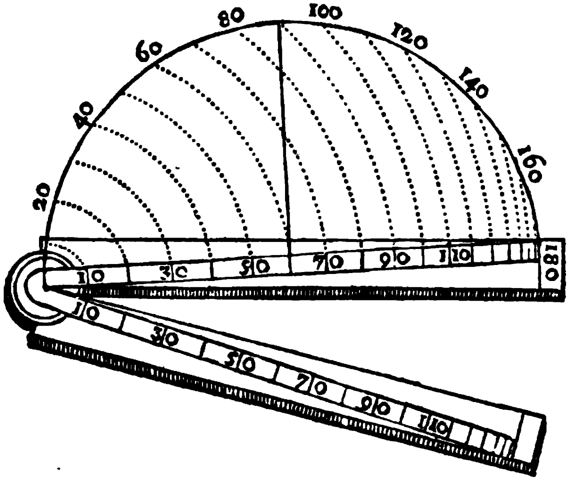
æqua-

æqualis ſemidiametro, ad puncta K & L, 60 & 60 perveniat. Hac methodo habebis lineam chordarum inſtrumento inſcriptam.





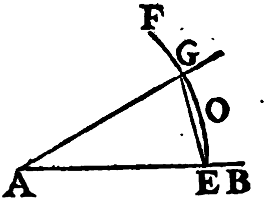
Vel describatur semicirculus divisus in 180 gradus, cujus diameter sit longitudo assumpta lineæ chordarum; tum facto centro in extremitate diametri, & lineæ chordarum, unà eàdemque operà transferantur chordæ, ac divisiones peragantur, uti factum vides in apposito schemate.

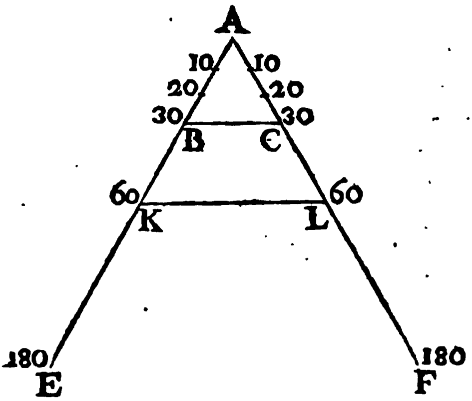


PROBLEMA VII.

Angulorum determinatio. 428. *IN dato puncto* A *rectæ* AB *angulum efficere graduum* 30.

Resolutio. I. Facto centro in dato puncto A, intervallo quovis describatur arcus EF; dein ita aperiatur instrumentum, ut intervallum assumptum AE aptetur inter 60 & 60. Stante hac instrumenti positione accipiatur circino communi distantia inter 30 & 30, quæ transferatur in arcum EF, a puna puncto E ad G; ducaturque A G. Dico chordam E G, & arcum E O G; & angulum E A G esse graduum 30, uti propositum fuerat.





Demonstratio. Duo triangula ABC, AKL sunt similia. Ergo AB: AK :: BC: KL; & consequenter, si AK sit radius circuli, seu chorda *60* graduum, AB est chorda 30 graduum; ac praeterea, si KL sit radius, BC est chorda graduum 30. Quod erat &c.

PROBLEMA VIII.

429. *Circinum proportionis ita aperire, ut lineæ chordarum angulum determinatum, puta, 30 graduum comprehendant.*

Resolutio. Circino communi assumatur in instrumento chorda 30 graduum, quæ transferatur a 60 in 60. Dico lineas chordarum comprehendere angulum graduum 30.

Demonstratio. Nam per n. 427. chorda graduum 60 æqualis est semidiametro circuli, cui omnes chordæ conveniunt. Ponatur radio quovis hic circulus descriptus, in eumque transferri chordam 30 graduum; perspicuum est duas illius circuli diametros per extremitatem chordæ 30 graduum ductas comprehendere angulum 30 graduum. Applicatur autem chorda huic circulo, dum transfertur a 60 in 60. Ergo translatà chordà 30 graduum a 60 in 60, lineæ chordarum angulum 30 graduum comprehendunt. Quod erat &c.

Corollarium.

430. EAdem methodus adhibenda est, dum proponitur ita aperiendus circinus proportionis, ut lineæ arithmeticæ, seu partium æqualium angulum 30 graduum efficiant, transferendo chordam 30 graduum a puncto 100 unius lateris in punctum 100 alterius lateris.

Eodem modo operaberis circa lineam planorum, & solidorum, de quibus alibi dicendum erit.

PRO-

PROBLEMA IX.

431. *APerto circino proportionis invenire angulum, quem linea chordarum, aut arithmetica comprehendat.*

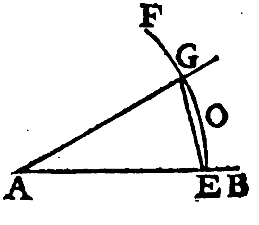
Sit primò inveniendus angulus, quem lineæ chordarum instrumento notatæ comprehendunt. Extende pedes circini communis a puncto 60 unius brachii in punctum 60 alterius, eamque distantiam transfer in lineam chordarum, incipiendo a centro: nota numeri, ad quem alter pes circini perveniet, indicabit numerum graduum illius anguli.

Eadem praxi determinabis angulum, quem lineæ partium æqualium comprehendunt, si nempe distantiam puncti medii unius lineæ, a puncto medio alterius lineæ transferas in lineam partium æqualium, incipiendo a centro; nam alter pes circini cadet in notam numeri indicantem quot gradus contineat ille angulus.

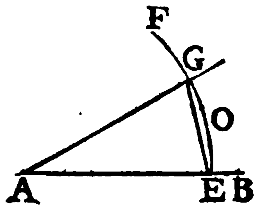
Eodem modo operaberis circa lineas planorum, & solidorum, de quibus alibi.

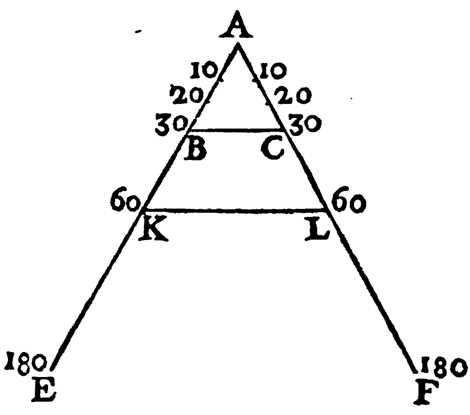
PROBLEMA X.

432. *DEterminare, quot graduum sit datus angulus* BAG.



I. Si angulus ſit notatus in charta, quolibet intervallo AE fiat arcus EOG, eademque diſtantia transferatur a 60 in 60; tum circinus communis ad intervallum EG extenſus, applicetur circino proportionali, ita ut cuſpis utraque conveniat duabus numerorum notis ſimilibus, puta, 30 & 30, experiendo ſcilicet cui diviſioni aptetur. Perſpicuum eſt angulum BAG fore graduum 30, ſi chorda EG æqualis ſit rectæ BC, hoc eſt, intervallo inter 30 & 30.



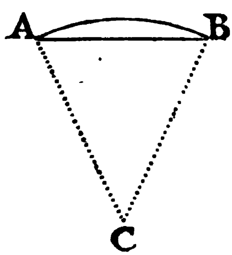


II.

II. Si angulus propositus comprehendatur a duabus lineis cogitatione tantùm intellectis, ut in solo, vel in aere, necesse est primò, ut singulis regulis instrumenti duæ infigantur dioptræ, per quas collineare liceat, atque hac ratione instrumentum idoneum fiat metiendæ horum angulorum quantitati; dein collocato circini centro in linearum concursu, si per ejus dioptras respicias duo signa in lineis angulum propositum formantibus posita, in hac positione apertus erit circinus secundùm talem angulum. Quare, si intervallum a 60 in 60 circino communi acceptum transferas in lineam chordarum, incipiendo a centro, habebis quantitatem illius anguli.

Corollarium.

Hinc cognita etiam quantitate graduum, puta, 50, alicujus arcus circuli AB, invenietur ejusdem radius AC.



Nempe circinus proportionis ita aperiatur, ut chorda AB dati arcus accommodari possit transversim inter 50 & 50: distantia inter 60 & 60 dabit radium quæsitum.

PROBLEMA XI.

433. *Circino proportionis lineam polygonorum inscribere.* Linea Polygonorum.

Polygonorum linea eo fine potissimùm inscribitur circino proportionis, ut datus circulus in quot-

libet

libet partes æquales dividatur, eidemque polygona regularia inſcribantur, a triangulo ad duodecagonum, quæ majoris ſunt uſus.

Itaque ad invenienda latera omnia polygonorum uſui eſt linea chordarum. Hæc autem inventio facilis eſt, ſi habemus angulum centri cujuslibet polygoni. Hunc autem reperiemus, dividendo 360 per numerum laterum illius polygòni; puta, ſi dividas 360 per 5, habebis gradus 72 pro angulo centri; ideoque ſubtenſa, ſeu chorda graduum 72, eſt latus pentagoni circulo inſcripti, cujus ſemidiameter æqualis eſt chordæ graduum 60. Quare vides in ipſa linea chordarum haberi latera omnium polygonorum, non ſolùm a triangulo æquilatero ad duodecagonum, ſed etiam reliquorum.

Triangulum ſubtendit chordam graduum 120, quadratum 90, pentagonum 72, hexagonum 60, heptagonum 51 $\frac{3}{7}$, octogonum 45, nonagonum 40, decagonum 36, undecagonum 32 $\frac{8}{11}$, duodecagonum 30.

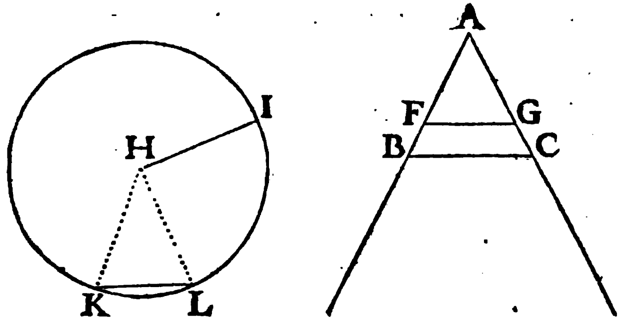
Hæc linea continens certum numerum laterum polygonorum regularium in eodem circulo, ſeparatim inſcribitur circino proportionis, ſumpto initio a centro ejuſdem. Quia verò latera polygonorum regularium eidem circulo inſcriptorum eò magis diminuuntur, quò plura ſunt polygoni latera, hinc latus trianguli eſt omnium maximum, æquaturque longitudini totius lineæ polygonorum; huic proximum eſt latus quadrati, dein latus pentagoni &c.

PRO-

Problema XII.

434. *Dato circulo H, invenire latus cujuscunque polygoni regularis in eo inscribendi.* Inventio polygoni regularis cujusvis.

Resolutio. Oporteat dato circulo octogonum inscribere. Semidiametrum HI dati circuli circino communi acceptum transfer in lineam polygonorum a B in C, nimirum, a *6* in *6*: distantia transversalis inter 8 & 8, hoc est, inter F & G, erit latus octogoni dato circulo H inscribendi. Atque ita de reliquis.



Demonstratio eadem semper est. Nam duo triangula ABC, AFG sunt æquiangula, & similia. Quare AB: AF :: BC: FG. Sicuti ergo AF latus exhibet octogoni circulo inscripti, cujus radius est AB per constructionem lineæ polygonorum: ita FG latus est alterius octogoni circulo inscripti, cujus radius sit BC. Nam lineæ transversales, seu bases eamdem rationem habent ac latera.

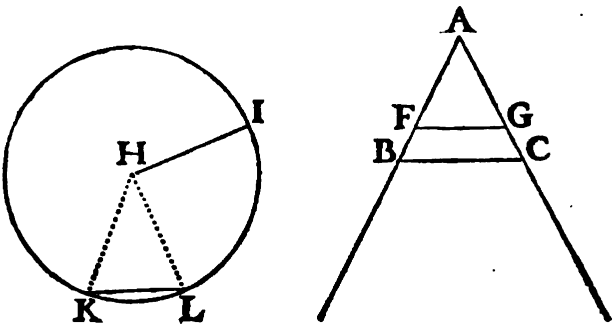
Scho-

Scholion.

SI proposita semidiameter major esset, quàm ut in circinum proportionis transferri posset inter 6 & 6, accipienda erit ejusdem semissis, vel tertia pars, vel quarta &c.; quo facto, duplum, triplum, quadruplum lineæ inventæ erit latus polygoni quæsiti.

PROBLEMA XIII.

435. *SUper data recta* KL *polygonum regulare, puta, octogonum describere.*



Resolutio. Datam rectam KL circino communi acceptam transfer in circinum proportionis inter 8 & 8; dein sumpto intervallo BC, hoc est, ex *6* in *6*, ab extremitatibus K & L agantur duo arcus se secantes in H; tum centro H radio HL describatur circulus. Hic circumscribet octogonum regulare dati lateris KL.

PRO-

PROBLEMA XIV.

436. *S*Calam geometricam simplicem construere.

Scalam vocant Geometræ lineam rectam in partes sectam progressionis decuplæ. Usum habet insignem non solùm in Geometria practica, sed in Architectura civili, & militari, & in omni Mathesi mixta. Scala geometrica.

Esto linea indefinita ABD ex qua a puncto B abscindantur 10 æquales particulæ B 1; 1, 2; 2, 3 &c. usque ad A; quæ, quò majores, vel minores erunt, eò tota scala erit major, minorve.

Deinde totum intervallum AB particularum 10 circino acceptum transcribatur, quoties libuerit, in rectam indefinitam AF, nimirum, ex B in C, ex C in D &c. Hæc erit scala, quæ petebatur.

In qua, si velis particulam B 1 repræsentare pedem unum, B 2 pedes duos, B 3 tres &c., repræsentabit BA pedes 10, CA pedes 20, DA pedes 30. Si autem velis B 1 accipere pro decempeda, hoc est, pro 10 pedibus, B 2 pro 20 pedibus &c., tunc BA referet pedes 100, CA pedes 200, & sic deinceps. Duo gradus progressionis decuplæ.

Itaque, si cupiam unicà circini aperturà sumere intervallum partium, puta, 27: ex D in B sunt pedes 20; ex B in 7 sunt pedes 7. Circini igitur crure uno fixo in D, & altero extenso usque ad 7, habes lineam D7 partiũ 27.

Eodem modo operandum erit, si cupias intervallum pedum 280. Tunc enim DB referet partes 200, & B 8 partes 80, ac proinde D 8 partes 280.

Scholion.

SEd quoniam scala hujusmodi solùm potest exhibere partium decades, & unitates, aut centenas, & decades, aut millia, & centenas, hoc est, duos tantùm gradus progressionis decuplæ: aliam practici Geometræ excogitarunt, quæ tres gradus progressionis decuplæ contineat, nimirum, millenas, centenas, decades; vel centenas, decades, unitates; vel decades, unitates, & unitatis decimas.

PROBLEMA XV.

437. *SCalam geometricam exactiorem construere.*

Construatur, ut supra, scala simplex A F; & in A excitetur perpendicularis A C arbitrariæ longitudinis, in qua signentur 10 æquales particulæ ex A in C, sive eæ æquales sint particulis B 1, B 2, sive non.

Tum ex termino 9 particulæ A 9 ducatur 9 C, ut constituatur triangulum A C 9, cujus ope invenientur partes decimæ ipsius A 9.

Tres gradus progressionis decuplæ.

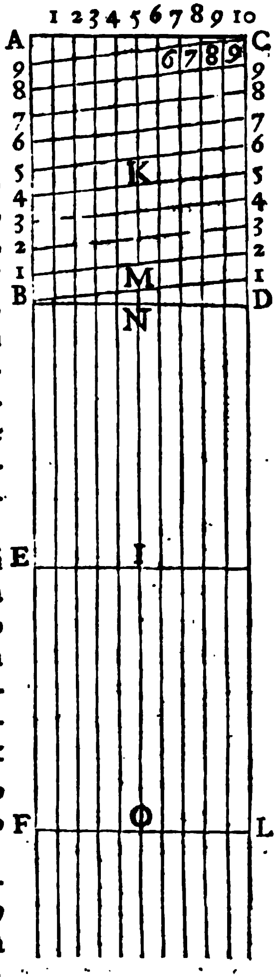
Deinde per singula divisionum puncta rectæ A C, ducantur parallelæ ad A B, quarum postrema est C D L; & a singulis divisionum punctis ipsius rectæ A F, nimirum, a punctis B, E, F excitentur totidem perpendiculares B D, F L &c.

Denique puncta 10 & 9, 9 & 8, 8 & 7 &c. lineis transversis connectantur, quæ invicem erunt parallelæ. Quibus peractis, absoluta est scala exhibens tres gradus progressionis decuplæ.

Nam lineolæ interceptæ in triangulo A C 9 sunt partes decimæ ipsarum A 9, 9 & 8 &c.; quæ

rur-

rursum decimæ sunt ipsarum AB, BE &c. Quod facilè demonstratur ex triangulorum similium indole in hunc modum.



Quoniam recta linea 6 & 6 per Constructionem est parallela ipsi A 9, erit (n. 397.), ut A 9 ad 6 & 6, ita AC ad 6 C. Atqui rursum per Constr., quarum partium AC est 10, earum 6 C est 4. Ergo etiam, quarum partium A 9 est 10, earum recta 6 & 6 est 4: hoc est, quatuor decimæ ipsius A 9.

Eodem modo ostendam rectam 7 & 7 esse tres decimas, rectam 8 & 8 duas decimas, ac tandem 9 & 9 esse unam decimam rectæ A 9; atque ita porro de aliis interceptis lineis.

Itaque in hac scala, si in triangulo AC 9 intercepta prima 9 & 9 supponatur pro unitate quamlibet mensuram repræsentante, uti pedem unum: tunc intercepta secunda erit 2, tertia erit 3; & sic deinceps usque ad A 9, quæ erit 10; A 8 erit 20, AB 100, AE 200 &c.

Quòd si in eodem triangulo AC 9 intercepta prima 9 & 9 ponatur pro 1 decimâ unitatis quamlibet mensuram repræſentantis, tunc intercepta ſecunda erit 2 decimæ, tertia 3 decimæ, & ſic deinceps; A 9 verò erit 1, A 8 2, A B 10, & ſic deinceps.

Idem dicendũ de triangulo B D I in partem contrariam poſito, ut inſtrumenti uſus commodior ſit.

Scholion.

QUemadmodum hìc linea exigua A 9, *vel* D 1 *in* 10 *partes æquales dividitur; ita eadem in quotcumque alias eodem artificio dividi poteſt. Neque opus eſt, ut angulus* A *ſit rectus, ſed idem obliquus eſſe poteſt.*

Uſum hujus inſtrumenti oſtendent Praxes ſequentes.

Praxis I.

438. *TRes gradus proportionis decuplæ,* 145 *ex ſcala deſumere unà circini aperturà, hoc eſt, unam centenam,* 4 *decades,* 5 *unitates.*

In triangulo D B 1 ex interceptis lineolis a vertice B quære quintam lineam M N, quæ dabit 5 unitates; tum in M N continuata versùs K numera 4 decades, ſeu 40 ex M uſque in K; rurſum ex N uſque in I accipe unam centenam; denique circini pede uno fixo in I, alterum extende uſque ad K. Recta, ſeu intervallum I K continet partes ſcalæ 145.

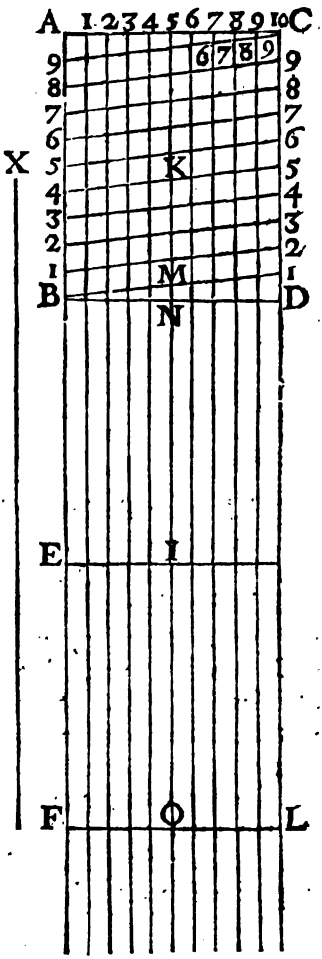
Eodem modo fuiſſet operandum, ſi quæſitæ forent partes 14 & 5 decimæ.

Praxis II.

439. *QUot partes ſcalæ recta quævis* X *in charta deſcripta contineat, invenire.*

Ac-

Accipiatur circino quantitas datæ rectæ X, quæ, si major sit, quàm I N, vel O N, eligatur ex parallelis E I, F L &c. recta illa, cujus distantia a B D sit minor proximè, quàm data X; ea sit F L. Deinde in recta F L eligatur intersectio talis, puta, O, ut uno circini crure posito in O, alterum etiam incidat in aliquam parallelæ O 5 intersectionem, puta, in K; quo præstito, nota erit recta X.

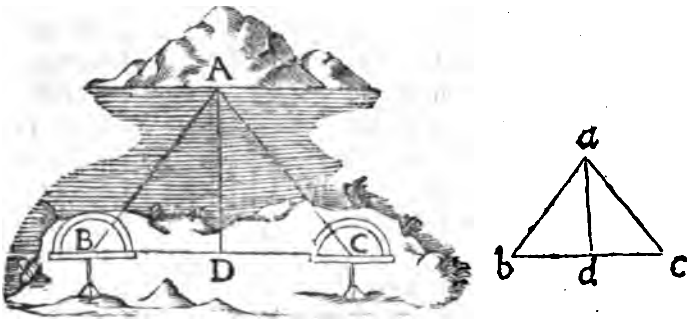


Nam O N = 200, M K = 40, M N = 5; ac proinde tota O K, hoc est, X continet partes scalę 245.

Quòd si data recta X minor fuisset, quàm A B, aut B E, tunc ejus quantitate, ut prius, circino accepta, eligenda est in recta B D intersectio talis, puta, N, ut uno circini crure posito in N, alterum etiam incidat in aliquam parallelæ N 5 intersectionem, puta, in K; quo obtento, nota erit rursum data recta X partium 45.

Praxis III.

440. D*Istantiam locorum* A *&* B, *a flumine, vel ab alia quavis causa variè impeditam, & interclusam, ope scalæ geometricæ metiri.*



Eligatur statio quælibet C, cujus distantiam a puncto B metiri liceat. Ope quadrantis, & linearum visualium BA, CA notentur anguli B & C; deinde in charta probè complanatà fiat recta *bc* tot partium scalæ, quot pedes in dato intervallo BC continentur; fiantque anguli *b* & *c* æquales angulis B & C. Itaque lateribus *ba*, *ca* coeuntibus in aliquo puncto *a*, exploretur, quotnam in scala particulas contineat latus *ab*: totidem pedes, vel hexapedas, vel decempedas intervallum AB continebit.

Dimensio distantiæ,

Nam triangula BAC, *bac* sunt æquiangula, ac proinde similia; hinc latera habent proportionalia.

Pra-

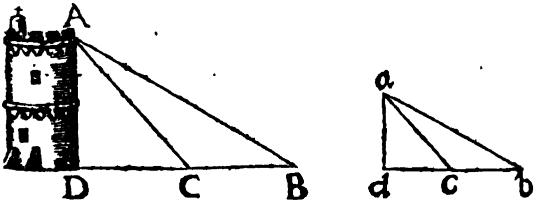
Praxis IV.

441. A*Ream trianguli imperviam invenire.* Ex dictis Lib. 1. patet ad dimensionem trianguli opus esse, ut notum sit latus unum unà cum perpendiculari in illud cadente ex opposito angulo. At quando trianguli area est impervia, non potest in eo perpendicularis designari, & mechanicè mensurari. Hujus autem inventio repetenda est, non solùm ex aliis Geometriæ principiis, de quibus infra, sed ex triangulorum similitudine, usuque scalæ geometricæ, hoc pacto. Areæ,

Sit ABC area, ut in fig. præced., cujus mensura in quadratis pedibus inquiritur. Fiat, ut prius, in charta triangulum simile *bac*; demittaturque in basim *bc* perpendicularis *ad*; & inveniantur particulæ, quas perpendiculum *ad* in scala continet; tot enim pedes continebit perpendiculum AD, ob similitudinem triangulorum ADB, *adb*; ejusque dimidium in basim ductum dabit aream ABC in pedibus quadratis.

Praxis V.

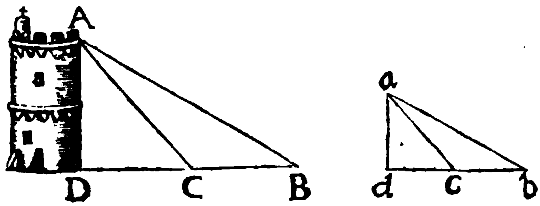
442. A*Ltitudinem montis, seu turris* AD, *datà distantià* BD *metiri.*



 Quan-

Quando diſtantia montis, turriſve ſive æſtimatione communi, ſive aliunde eſt nota, expeditiſſima erit altitudinis dimenſio.

Triangulo rectangulo ADB fiat ſimile in charta, *adb*, ita ut *bd* tot partium ſcalæ ſit, quot paſſuum datur diſtantia BD: inquire, quot partes ſcalæ contineat *ad*; totidem enim paſſus continebit altitudo quæſita AD.



Praxis VI.

443. A*ltitudinem* AD *montis, ſeu turris inacceſſam metiri.*

Eligantur in ſubjecta planitie duæ ſtationes B & C, quarum diſtantiam metiri liceat. Angulo B in prima ſtatione invento deſcribatur in charta æqualis *abd*; & quot pedum fuit intervallum ſtationum, totidem partes ex ſcala acceptas tranſcribe in latus *bd* ex *b* in *c*. Fiat deinde noto jam angulo ACD ſtationis ſecundæ æqualis *acd*; & latus *ca* occurrat lateri *ba* in *a*; tum ex *a* demitte perpendicularem *ad* occurrentem lateri *bc* in *d*. Conſtat triangula *bad*, *cad* triangulis opticis utriuſque ſtationis æquiangula eſſe, adeoque ſimilia, ac proinde *bc* referre intervallum ſtationum, *bd*, vel *cd* utramque diſtantiam, & *ad* altitudinem. Inquire igitur, quot partes ſcalæ contineant *cd*, vel *ad*; totidem quippe pedes diſtantia ipſa, & altitudo continebunt.

Altitudinis,

Corol-

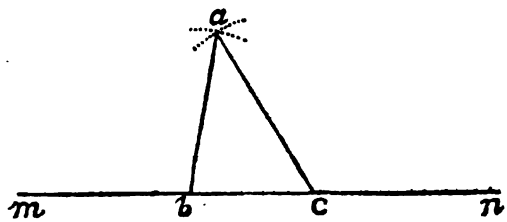
Corollarium.

HAc methodo inveniuntur latera, & area trianguli, cujus unum detur latus cum duobus angulis.

Praxis VII.

444. *IN triangulo quovis datis tribus lateribus, angulos invenire.*

Sumptis ex ſcala tribus rectis *bm*, *bc*, *cn* totidem partium, quot in datis lateribus pedes continentur, centris *b* & *c*, intervallis *bm*, *cn* deſcribantur arcus circulorum ſe mutuò interſecantium in *a*; ductiſque *ab*, *ac*, erit triangulum *bac* dato triangulo æquiangulum ob latera proportionalia, unde & altitudo, & area innoteſcet. Sed de his planiùs in Trigonometria conſtabit. Angulorum.



ELE-

ELEMENTUM III.

De Polygonis similibus generatim, & de Punctis similiter positis.

445. FIGURÆ rectilineæ, ut similes denominentur, utrumque postulant, quòd & angulos singulos singulis æquales habeant, atque etiam latera, quæ circum æquales angulos existunt, proportionalia.

Demonstravimus quidem n. 410. & 415., triangula, quorum anguli sunt æquales, habere etiam latera homologa proportionalia, & reciprocè; atque hinc, ut duo triangula similia dici possint, satis superque esse, si vel eorum anguli sint æquales, vel latera proportionalia.

At non eadem est ratio de polygonis, quæ plura habent, quàm tria latera, ut notavimus n. *396.* Nam & angulos habere possunt mutuò æquales, quin habeant latera proportionalia, & reciprocè. Utrumque igitur demonstrandum est de polygonis, ut dicantur similia; neque enim in his unum ex altero sequitur, quemadmodum in triangulis.

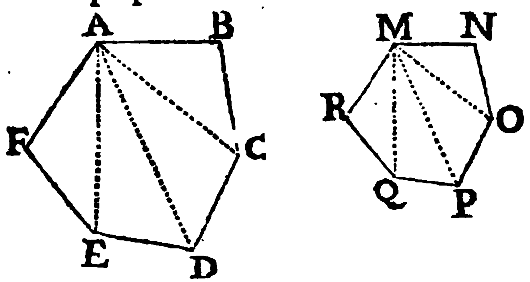
PRO-

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

Polygonorum similium compositio.

446. *SI ab angulis* A *&* M *mutuò respondentibus duorum similium polygonorum* ABCDEF, MNOPQR *ducantur rectæ ad reliquos angulos, triangula* ABC, ACD *&c. primi polygoni similia erunt triangulis* MNO, MOP *&c. secundi.* Euclid. lib. 6. prop. 20.



Demonstratio. Quoniam polygona sunt similia, erit (n. 445.) angulus B=N, & AB:MN::BC:NO; itaque (n. 414.) duo triangula ABC, MNO erunt similia; & consequenter angulus ACB=MON. Sed per hyp. angulus BCD =NOP. Quare subductis duobus primis angulis æqualibus ab hisce secundis, erit angulus ACD =MOP. Præterea habebitur

AC:MO::BC:NO

At rursum ex hyp. BC:NO::CD:OP.

Ergo AC:MO::CD:OP.

Quamobrem duo triangula ACD, MOP habent latera proportionalia circa æquales angulos ACD, MOP, & consequenter similia sunt (n. 414.).

Ea-

Eadem ratione demonstrabitur similia esse duo triangula ADE, MPQ; atque ita de reliquis. Quod erat &c.

PROPOSITIO II.

THEOREMA.

447. *SI duo polygona* ABCDEF, MNOPQR *eodem numero laterum terminata, dividantur in triangula similia, singula singulis, & similiter posita, per rectas ab angulis* A *&* M *ductas ad reliquos omnes angulos: duo hæc polygona erunt similia, hoc est, & angulos omnes habebunt æquales, singulos singulis, & latera circa æquales angulos proportionalia.*

Demonstratio. I. Quoniam per hyp. utriusque polygoni triangula sunt inter se similia, & similiter posita, anguli horum polygonorum componuntur ex eodem numero angulorum mutuò æqualium, & consequenter æquales sunt inter sè, singuli singulis.

II. Duo triangula ABC, MNO similia esse ponuntur; adeoque AB:MN::BC:NO; hoc est, latera circa æquales angulos B & N directè sunt proportionalia.

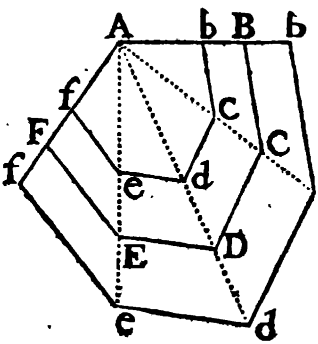
Rursum eadem triangula similia ABC, MNO exhibent BC:NO::AC:MO.
Atqui per hyp. AC:MO::CD:OP.
Ergo BC:NO::CD:OP;
hoc est, latera circa æquales angulos C & O sunt directè proportionalia.

Eodem modo demonstrabitur reliqua latera circa æquales angulos esse proportionalia, & consequenter duo polygona esse similia. Quod erat &c.

Co-

Corollarium I.

448. SI ab angulo quovis A polygoni ABCDEF ducantur rectæ indefinitæ ACc, ADd, AEe &c. per omnes reliquos angulos: deinde a puncto b sumpto in latere AB, etiam producto, ducatur bc parallela lateri BC; & rursum a puncto c, ubi hæc parallela occurrit rectæ ACc, ducatur cd parallela ipsi CD, & similiter de, ef: hoc novum polygonum Abcdef simile erit primo polygono ABCDEF.

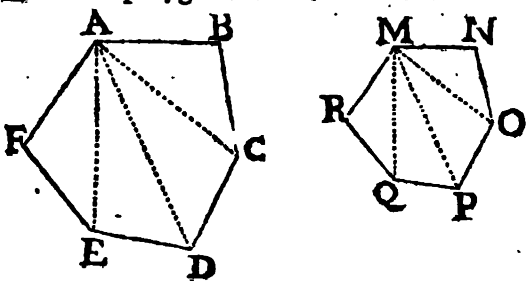


Nam utrumque componitur ex triangulis similibus, & similiter positis.

Hinc habes methodum construendi polygonum dato simile.

Corollarium II.

449. SI ab angulis mutuò respondentibus duorum polygonorum similium ABCDEF,



MN

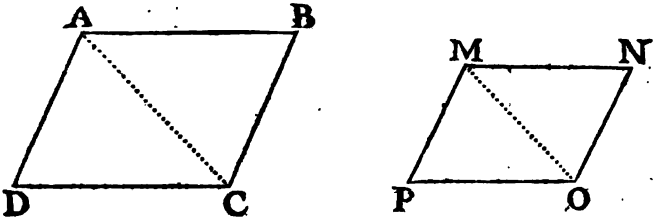
MNOPQR ducantur duæ diagonales AD, MP, duæ partes ABCD, ADEF primi polygoni similes erunt duabus partibus MNOP, MPQR secundi polygoni, singulæ singulis.

Nam intra easdem partes ductis diagonalibus AC, MO, triangula, quæ partem ABCD componunt, similia erunt triangulis, quæ secundam partem constituunt MNOP; & præterea utrinque hæc triangula sunt similiter posita. Ergo duæ partes ABCD, MNOP erunt similes (n. 446.).

Eodem ratiocinio demonstrabis duas reliquas ADEF, MPQR similes esse.

Corollarium III.

450. Ergo duæ diagonales AC, MO, ductæ per angulos respondentes duorum similium parallelogrammorum ABCD, MNOP, divident eadem in duo triangula similia, singula singulis.



Quamobrem duo triangula similia ABC, MNO considerari poterunt tanquam semisses duorum parallelogrammorum similium ABCD, MNOP.

De

De Punctis similiter positis.

DEFINITIONES.

Puncta similiter posita

451. *Duo puncta* G *&* S *dicuntur similiter posita respectu duarum rectarum* AB, MN, *seu respectu punctorum* A, B, *&* M, N, *quae easdem lineas terminant, quando distantiae* GA, GB *unius puncti* G *ab extremitatibus rectae* AB, *ad distantias* SM, SN *alterius puncti* S *ab extremitatibus rectae* MN, *sunt in eadem ratione, quam habet* AB *ad* MN.

Hoc est, quando $GA : GB : AB :: SM : SN : MN$.

Ad rectas lineas.

Casus I. Si puncta G & S sita sint in ipsis rectis AB, MN: ut demonstrentur esse similiter posita respectu harum linearum, satis erit ostendere, quòd $GA : GB :: SM : SN$,
sive $GA : SM :: GB : SN$.

Ratio est, quia in hoc casu haberetur (n. 394.)

$$GB : SN :: GA + GB : SM + SN;$$

hoc est, $GB : SN :: AB : MN$.
Collectis itaque in una serie antecedentibus harum rationum aequalium, & in altera serie consequentibus, erit, ut in definitione,

$$GA : GB : AB :: SM : SN : MN.$$

Rursum in eodem casu, satis erit ostendere, quòd $AB : GA :: MN : SN$,
vel $AB : MN :: GA : SN$.

Ratio est, quia in hoc casu haberetur

AB

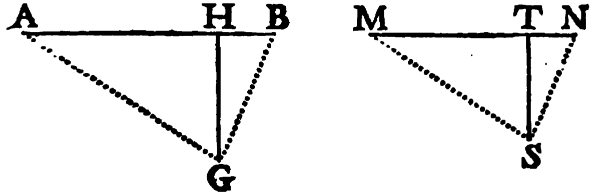
AB:MN::AB—GA:MN—SM(n.394.),
five AB:MN:: GB : SN.

Collectis itaque, ut prius, in una serie antecedentibus harum rationum æqualium, & consequentibus in altera, fiet

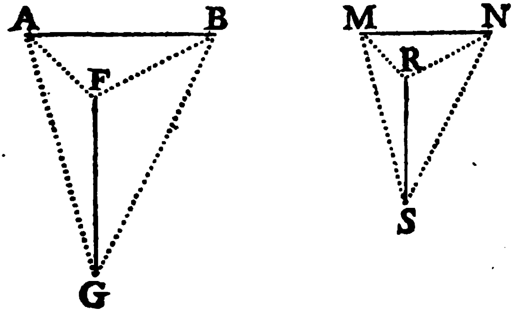
AB:GA:GB::MN:SM:SN.

Casus II. Si puncta G & S sint extra rectas AB, MN: ut demonstretur hæc puncta esse similiter posita respectu harum linearum, satis erit ostendere, triangula AGB, MSN esse similia. Nam in hoc casu erit

GA:GB:AB::SM:SN:MN.

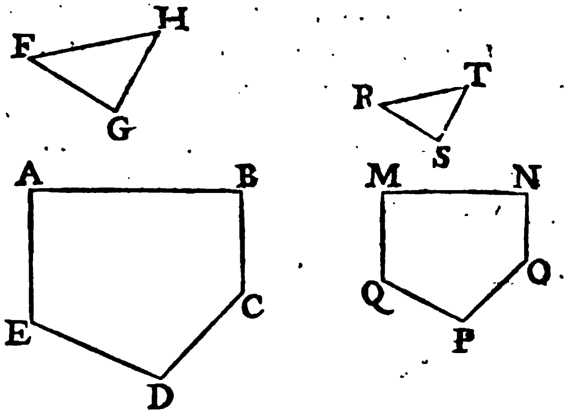


Si duæ rectæ FG, RS *terminentur a punctis similiter positis respectu duarum rectarum* AB, MN: *eædem rectæ* FG, RS *dicentur lineæ homologæ respectu rectarum* AB, MN.



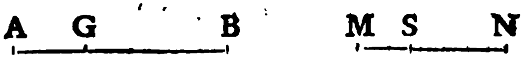
Puncta similiter posita ad polygona.

Duo puncta G *&* S *dicuntur etiam similiter posita respectu duorum polygonorum similium* ABCDE, MNOPQ, *quando sunt similiter posita ad omnia eorum respectivè latera.*



Corollarium.

452. ERgo extremitates B & N duarum rectarum AB, MN sunt similiter positæ respectu earumdem rectarum. Nam & hæc duo puncta B & N sunt in ipsis rectis AB, MN, & eorum distantiæ ab extremitatibus A & M sunt hisce duabus rectis proportionales, ut patet.

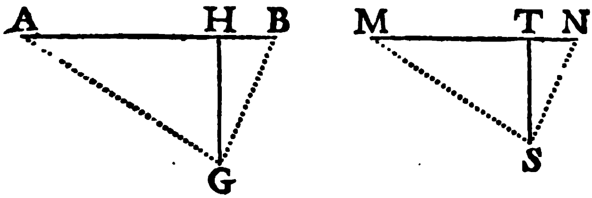


PRO-

PROPOSITIO III.

THEOREMA.

453. *Duobus punctis* G & S *similiter positis respectu duarum rectarum* AB, MN: *si ab iisdem punctis ad hasce lineas ducantur rectæ* GH, ST *hac lege, ut duo anguli* GHB, STN *sint æquales, & similiter positi, erunt pariter duo puncta incidentiæ* H & T *similiter posita respectu earumdem rectarum* AB, MN. Puncta incidentiæ similiter posita.



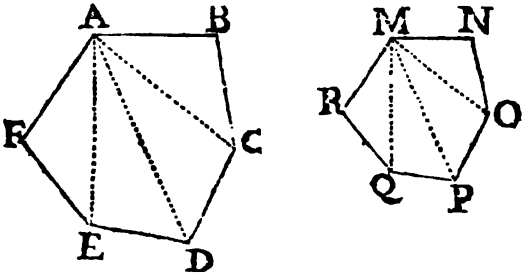
Demonstratio. Nam, si a punctis G & S ducantur rectæ GA, GB, & SM, SN ad extremitates rectarum AB, MN, triangula AGB, MSN erunt similia (n. 451.); & consequenter angulus ABG=MNS.

Quia verò angulus GHB=STN per hyp., duo triangula BGH, NST duos angulos habebunt æquales, unum uni, alterum alteri, & consequenter erunt similia. (n. 410.)
Atqui in triangulis similibus AGB, MSN est
AB:MN::GB:SN;
& in triangulis pariter similibus BGH, NST est
GB:SN::HB:TN.
Ergo AB:MN::HB:TN;
adeoque per Def. (n.451.) puncta H & T erunt similiter posita in duabus rectis AB, MN. Quod erat &c.

Corollarium.

454. QUoniam demonſtratum eſt n. 446. ſimilia polygona ABCDEF, MNOPQR dividi in ſimilia triangula, hinc ſequitur (n. 451.) vertices quoſcunque A & M duorum angulorum mutuò reſpondentium in eiſdem polygonis, eſſe ſimiliter poſitos reſpectu omnium laterum homologorum, non exceptis lateribus AB, AF, & eorum homologis MN, MR, reſpectu quorum demonſtratum eſt n. 452. puncta A & M eſſe ſimiliter poſita.

Quare vertices A & M erunt ſimiliter poſiti reſpectu horum polygonorum.



PROPOSITIO IV.

PROBLEMA.

455. *SI duo puncta* F, R, *& alia duo* G, S *ſint ſimiliter poſita reſpectu duarum rectarum* AB, MN: *rectæ homologæ* FG, RS *ab iiſdem punctis terminatæ, erunt in eadem ratione, quam habent inter ſe duæ rectæ* AB, MN.

Hoc eſt FG:RS::AB:MN.

De-

Demonstratio. Quoniam puncta F & R sunt similiter posita respectu duarum rectarum A B, M N, triangula A F B, M R N erunt similia (n. 451.), & consequenter anguli F A B, R M N æquales.

Rursum, quia puncta G & S sunt similiter posita respectu earumdem rectarum A B, M N, triangula A G B, M S N sunt similia, atque hinc anguli G A B, S M N æquales.

Ergo ab æqualibus angulis G A B, S M N subducendo utrinque æquales F A B, R M N, erunt reliqui F A G, R M S inter se æquales.

Quia verò triangula A F B, M R N sunt similia, erit A F : M R :: A B : M N.

Sed triangula pariter similia A G B, M S N exhibent A B : M N :: A G : M S.

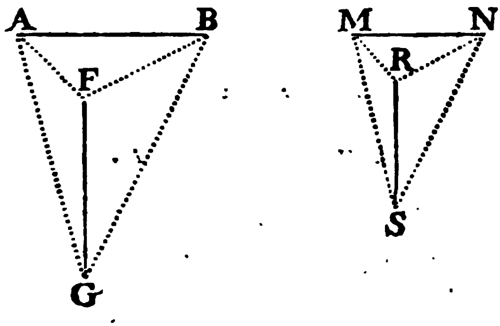
Ergo A F : M R :: A G : M S.

Quare duo anguli æquales F A G, R M S a lateribus proportionalibus intercipiuntur; & consequenter duo triangula erunt similia (n. 414.); atque hinc F G : R S :: A F : M R.

Atqui demonstratum est A F : M R :: A B : M N.

Ergo F G : R S :: A B : M N.

Quod erat &c.

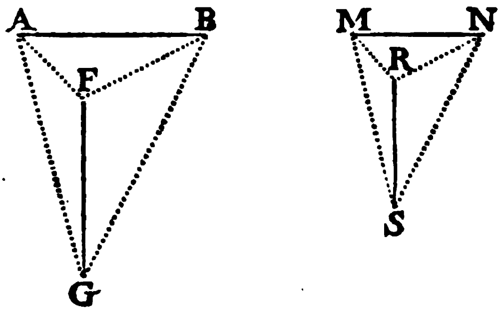


Corollarium.

456. Hinc, si duæ rectæ FG, RS terminentur a punctis similiter positis respectu duarum aliarum rectarum AB, MN: etiam extremitates harum AB, MN erunt puncta similiter posita respectu duarum rectarum FG, RS.

Nam, quoniam ostensum est (n. 455.) triangula FAG, RMS esse similia, erunt puncta A & M similiter posita respectu duarum rectarum FG, RS (n. 451.).

Eodem modo propter similitudinem triangulorum BFG, NRS demonstrabis duo puncta B & N esse similiter posita respectu duarum rectarum FG, RS.



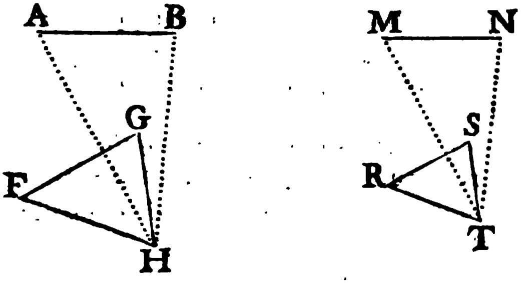
PROPOSITIO V.

THEOREMA.

457. *Si tria puncta* F, G, H *respectu rectæ* AB *sint similiter posita, quemadmodum tria puncta* R, S, T *respectu alterius rectæ* MN, *erit triangulum* FGH *simile triangulo* RST.

De-

Demonstr. Nam (n. 455.) [FG : RS :: AB : MN; GH : ST :: AB : MN; FH : RT :: AB : MN; hoc est, tria latera unius trianguli ad tria latera alterius, singula singulis, erunt in eadem ratione AB ad MN; & consequenter &c. Quod erat &c.



Corollarium.

458. FActa eadem suppositione sequitur etiam propter similitudinem triangulorum FGH, RST, quod tria puncta F, G, H, & alia tria R, S, T sint etiam inter se similiter posita: hoc est, quodvis H ex tribus primis respectu duorum reliquorum F, G, aut rectæ FG, similiter esse positum, atque aliud respondens punctum T ex tribus ultimis respectu duorum aliorum R, S, aut rectæ RS.

PROPOSITIO VI.

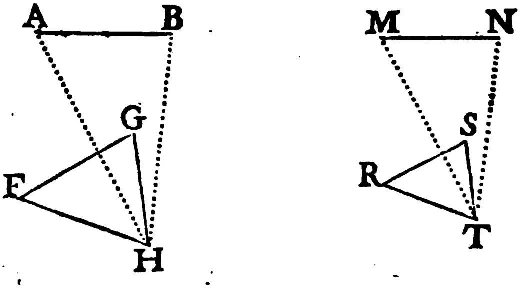
THEOREMA.

459. *SI duo puncta* H, T *sint similiter posita respectu duarum rectarum* FG, RS, *quæ terminatæ sint a punctis similiter positis respectu duarum aliarum* AB, MN: *Dico hæc puncta* H, T *fore etiam similiter posita respectu earumdem rectarum* AB, MN.

Demonstratio. Quoniam per hyp. extremitates duarum rectarum FG, RS sunt similiter positæ respectu duarum AB, MN, etiam harum extremitates erunt reciprocè similiter positæ respectu duarum FG, RS (n. 456.).

Quia verò per hyp. etiam duo puncta H, T sunt similiter posita respectu duarum FG, RS, sequitur tria puncta A, B, H, & ipsis respondentia M, N, T fore similiter posita respectu duarum FG, RS.

Quare triangula AHB, MTN erunt similia (n. 457.); & consequenter duo puncta H, T erunt similiter posita respectu duarum rectarum AB, MN. Quod erat &c.

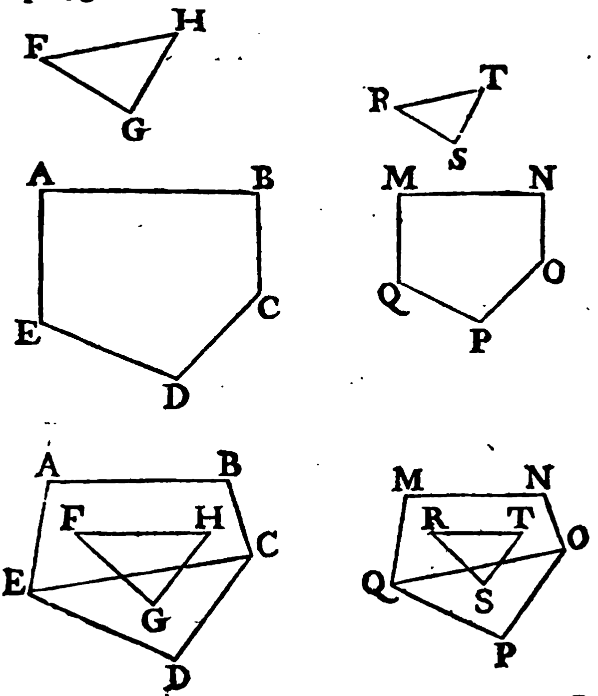


Co-

Corollarium I.

460. DEmonstravimus (n. 454.) latera mutuò respondentia duorum similium polygonorum ABCDE, MNOPQ esse similiter posita respectu omnium laterum homologorum, & consequenter respectu eorumdem polygonorum.

Ergo, si duo puncta G, S sint similiter posita respectu duorum laterum homologorum AB, MN, erunt etiam similiter posita respectu omnium laterum homologorum, & consequenter respectu ipsorum polygonorum.

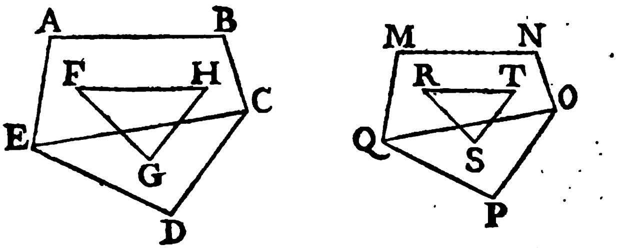


Co-

Corollarium II.

461. SI duæ rectæ FG, RS terminentur a punctis similiter positis respectu polygonorum similium ABCDE, MNOPQ, vel etiam duorum laterum homologorum AB, MN: puncta H, T, quæ erunt similiter posita respectu duarum rectarum FG, RS, erunt etiam similiter posita respectu horum laterum homologorum AB, MN (n. 459.), & consequenter (n. 460.) respectu eorumdem polygonorum.

Sequitur etiam puncta G, S, quæ sint similiter posita respectu duarum diagonalium homologarum CE, OQ, fore etiam similiter posita respectu polygonorum ABCDE, MNOPQ.



PROPOSITIO VII.

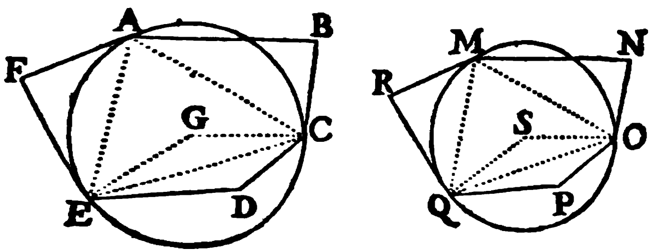
THEOREMA.

462. *SI in duobus polygonis similibus* ABCDEF, MNOPQR *circumducatur circulus per vertices* A, C, E *trium quorumlibet angulorum primi polygoni, & alter per vertices* M, O, Q *trium mutuò respondentium angulorum secundi: Dico centra* G & S *horum circulorum esse puncta similiter posita respectu eorumdem polygonorum.*

De-

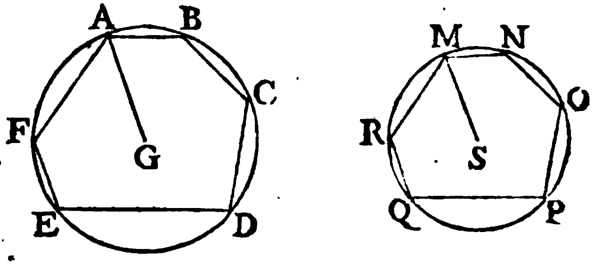
Demonstratio. Quoniam (n. 454.) in duobus polygonis similibus vertices angulorum respondentium sunt similiter positi respectu omnium laterum homologorum: erunt tria puncta A, C, E, & alia tria M, O, Q similiter posita respectu laterum homologorum AB, MN; & consequenter (n. 457.) duo triangula erunt similia, & anguli CAE, OMQ, quorum vertices ad circumferentiam existunt, æquales, & arcus CE, OQ, quibus insistunt, similes, seu ejusdem numeri graduum. Ergo, si a centris duorum circulorum ducantur radii ad extremitates arcuum CE, OQ, duo anguli ad centra G & S æquales erunt; adeoque duo triangula isoscelia CGE, OSQ erunt similia (n. 411.).

Itaque (n. 450.) centra G & S erunt similiter posita respectu duarum diagonalium homologarum CE, OQ, atque etiam (n. 461.) respectu duorum polygonorum similium. Quod erat &c.



Corollarium.

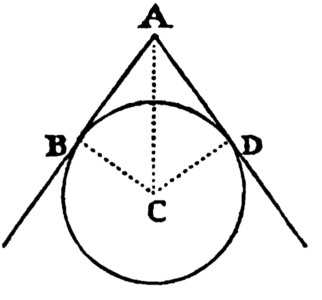
463. ERgo, si polygona similia ABCDEF, MNOPQR sint circulis inscripta, centra G & S circulorum erunt similiter posita respectu eorumdem polygonorum.



LEMMA.

464. *SI angulus* BAD *a duabus ejusdem circuli tangentibus comprehendatur, recta* AC *ab ejus vertice per centrum* C *ducta, eumdem angulum bifariam secabit.*

Demonstratio. A centro ad duo puncta contactuum ducantur radii CB, CD, qui perpendiculares erunt tangentibus AB, AD (139). Ergo obliqua CA ab hisce duabus perpendicularibus æqualibus æqualiter recedet; quod dabit AB=AD. Itaque duo triangula ABC, ADC mutuò æquilatera, erunt etiam mutuò æquiangula; & angulus BAC =DAC. Quod erat &c.

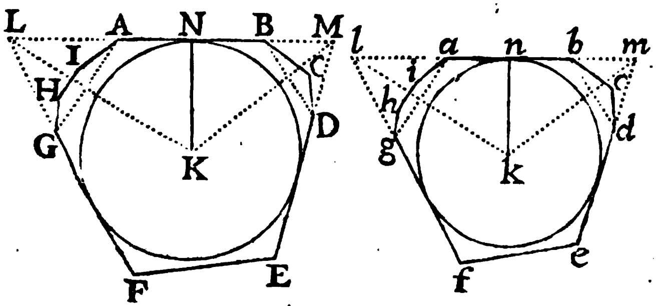


PRO-

PROPOSITIO VIII.

THEOREMA.

465. *In duobus polygonis similibus* ABCDEFGHI, abcdefghi *si describantur duo circuli, quos respectivè tangant tria latera homologa quæcunque* AB, DE, FG, *&* ab, de, fg: *Dico centra* K, k *duorum circulorum fore puncta similiter posita in hisce duobus polygonis.*



Demonstratio. Producantur in primo polygono latera tangentia AB, DE, FG, donec concurrant in L & M; ducanturque diagonales AG, BD, & a centro K rectæ KL, KM, quæ per Lemma divident bifariam angulos MLF, LME. Eadem constructio fiat in secundo polygono: uti vides in adjecto schemate.

His positis, quoniam duæ diagonales AG, *ag* transeunt per angulos respondentes duorum similium polygonorum, erunt partes pariter respondentes ABCDEFG, *abcdefg* inter se similes (n. 449.), & anguli BAG, FGA æquales angulis *bag*, *fga*, uterque utrique. Ergo illorum com-

complementa LAG, LGA æqualia erunt horum complementis *lag*, *lga*; atque adeo (n. 411.) duo triangula ALG, *alg* erunt similia, & puncta L & *l* similiter posita respectu duarum homologarum diagonalium AG, *ag* (n. 451.), atque etiam respectu polygonorum similium ABCDEFGHI, *abcdefgbi* (n. 461.).

Eodem modo demonstrabitur triangula BMD, *bmd* fore similia, & puncta M & *m* pariter similiter posita in polygonis similibus.

Jam verò triangula ALG, BMD cum sint similia triangulis respondentibus *alg*, *bmd*, anguli L & M, quos tangentes efficiunt, æquales erunt angulis *l* & *m*, quos aliæ tangentes intercipiunt, & illorum semisses MLK, LMK æquales erunt horum semissibus *mlk*, *lmk*.

Quare triangulum LKM simile erit triangulo *lkm*; & consequenter centra K, *k* erunt similiter posita respectu duarum rectarum LM, *lm*.

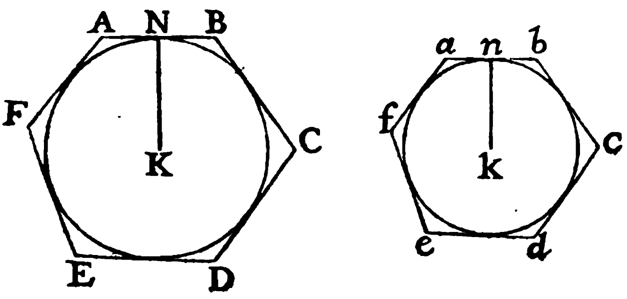
Quia verò duæ rectæ LM, *lm* terminantur a punctis similiter positis respectu duorum polygonorum ABCDEFGHI, *abcdefgbi*, erunt centra K, *k* (n. 461.) similiter posita respectu horum similium polygonorum. Quod erat &c.

Co-

Corollarium.

466. HInc, si duo polygona similia ABCDEF, *abcdef* sint circulis circumscripta, centra K, *k* horum circulorum erunt puncta similiter posita in hisce duobus polygonis.

Quia verò duo circuli considerari possunt instar duorum similium polygonorum, quorum latera numero augentur, & magnitudine minuuntur in infinitum: hinc perspicuum est centra duorum circulorum esse puncta similiter posita in eisdem circulis.



PRA-

PRAXIS GEOMETRICA

DE RE ICHNOGRAPHICA.

IN ſuperioribus Theorematis præclarè jacta ſunt fundamenta totius Ichnographiæ, cujus rude quoddam ſpecimen dabo Tironibus, quantum ſatis eſt, ut hiſce principiis inſtructi, ad eos Scriptores conferre ſe poſſint, qui hanc facultatem ſingulari ſtudio excoluerunt; hortorque imprimis eos, qui rei ichnographicæ daturi ſunt operam, ut legant, terantque manibus egregium ſanè opus Joannis Jacobi de Marinonis celeberrimi Profeſſoris Matheſeos, & præſertim Aſtronomiæ in Aula Viennenſi, ac Cæſarei Regii Conſiliarii, qui & Tabulæ Prætorianæ uſum, atque præſtantiam mirificè explicavit, & totius rei ichnographicæ ſcientiam novis animadverſionibus, inventiſque ita amplificavit, ut in hac illuſtranda paucos ſanè noſtra hac ætate habuerit pares, ſuperiorem fortaſſe neminem.

DEFINITIO.

467. *Ichnographia Regni, Toparchiæ, Urbis, Oppidi, vel eorum partis cujuſpiam, eſt delineatio baſis, veſtigii, ſituumque horizontalium, in quibus apparerent omnia ex ſublimi quodam verticali puncto, ſi ſingula diſtinctè conſpici poſſent.*

Hujuſmodi delineatio Mappa vocari ſolet, in qua multò diſtinctiùs, quàm in pictura proſpectuum, apparet partium poſitio, diſtantia, earumque proportio; & ope Scalæ geometricæ quantitas areæ elici poteſt ex delineata ejus extenſione, utpote ad ſimilem figuram reducta.

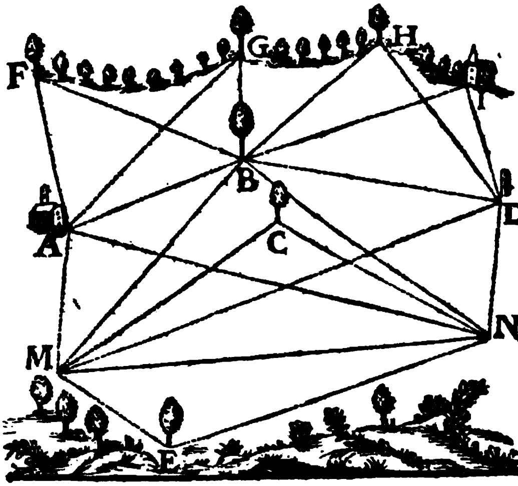
PROBLEMA I.

468. *Areæ cujusdam campestris rectilineæ liberè permeabilis Ichnographiam perficere; hoc est, figuram areæ campestri similem describere.*

Resolutio. I. Seligantur in ea planitie puncta quædam spectabilia A, B, C, D, E, F, G, H, I &c., nimirum, domus, arbores &c., quorum positio determinanda est, eaque in Mappam traducenda.

II. In aliqua ejusdem areæ parte, quæ latè pateat, & permeabilis sit, mensuretur exactè, & juxta quamlibet directionem recta MN, a cujus extremitatibus plura spectari possint puncta, quorum positionem determinare velis.

III. Sumpto ad capiendos angulos idoneo instrumento, in utraque extremitate rectæ MN metire angulos, quos hæc linea efficit cum lineis directis versùs puncta A, B, C, D, E, quæ a duobus punctis M & N spectari poterunt; hoc



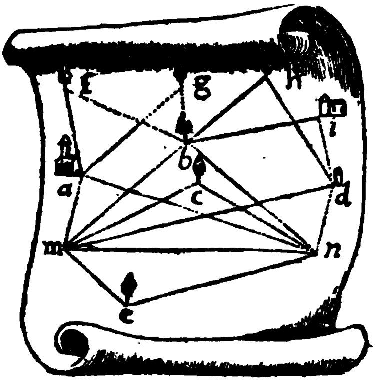
est,

eſt, in prima ſtatione M capiendi erunt anguli NMA, NMB, NMC, NMD, NME; & in ſecunda ſtatione N ſimiliter anguli MNA, MNB, MNC, MND, MNE.

IV. Puncta A, B, C, D, E obſervata a duabus extremitatibus rectæ MN, erunt vertices totidem triangulorum MAN, MBN, MCN, MDN, MEN, quorum baſis communis jam nota in aliqua menſura, erit MN, notis pariter ſingulorum angulis ad baſim. Ex hiſce datis reliqua elicientur in eiſdem triangulis; atque hinc derivabitur conſtructio aliorum ſimilium triangulorum, quorum communis baſis referatur ad eamdem MN.

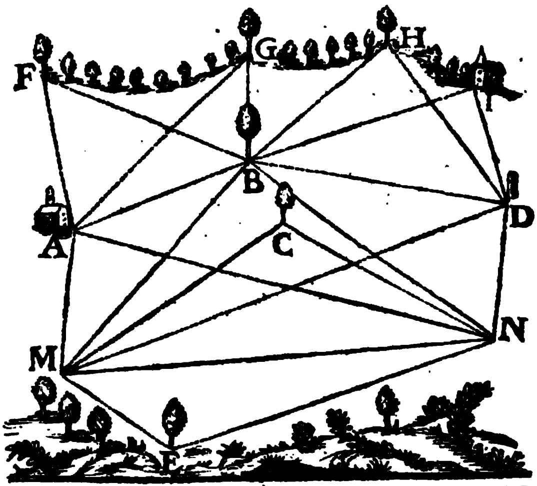
V. Itaque, ut in Mappa repræſentetur poſitio punctorum A, B, C, D, E, quæ obſervata fuerint a duabus extremitatibus rectæ MN, ducenda erit recta *mn*, quæ totidem partes æquales cujuſcunque magnitudinis continebit ope Scalæ geometricæ, quot pedes, vel hexapedæ, vel decempedæ &c. inventæ fuerint in recta MN.

VI. A puncto *m* ducantur rectæ *ma*, *mb*, *mc*, *md*, *me*, quæ cum recta *mn* efficiant angulos *nma*, *nmb*, *nmc*, *nmd*, *nme* æquales an-



gulis NMA, NMB, NMC, NMD, NME, quorum quantitas jam explorata eſt. Similiter fiat ab altera extremitate *n*. Hac methodo ſuper rectà *mn* conſtruentur triangula *man*, *mbn*, *mcn*, *mdn*, *men*, quæ ſimilia erunt, ſingula ſingulis, triangulis MAN, MBN, MCN, MDN, MEN, quæ conſtituta ſunt ſuper recta MN; ac propterea vertices *a*, *b*, *c*, *d*, *e* triangulorum in charta, repræſentant vertices A, B, C, D, E triangulorum in campo.

VII. Si verò aliorum etiam punctorum poſitio in campo determinanda ſit, ut notetur in charta: concipiatur recta AB inter puncta A & B, quorum poſitio inventa jam ſit; capianturque anguli, quos radii viſuales efficiunt ab extremitatibus A & B versùs nova puncta F & G, quæ erunt vertices totidem triangulorum AFB, AGB ſuper eadem baſi AB; quorum duo ad baſim anguli noti fient per inſtrumentum. Quamobrem in



Map-

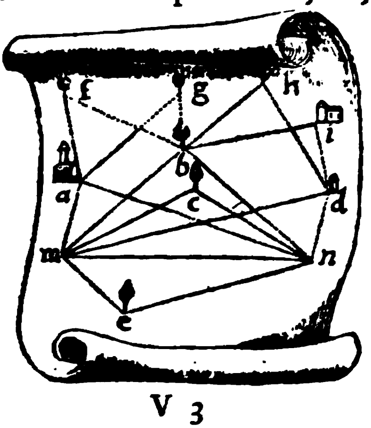
Mappa construi poterunt similia triangula *afb*; *agb* super rectà *ab* terminatà a duobus punctis *a* & *b*, quæ jam repræsentant puncta A & B in campo; & horum triangulorum *afb*, *agb* vertices *f* & *g* repræsentant duo puncta F & G.

VIII. Simili methodo in eadem Mappa per nova puncta *h* & *i* designabitur positio aliorum punctorum H & I, quæ conspici poterunt a duobus punctis B, D; atque ita de reliquis.

Demonstratio. Ut planum faciam singula puncta in Mappa repræsentare exactè positionem punctorum notabilium in campo, satis est ostendere distantias omnes inter puncta A, B, C, D, E, F, G &c. proportionales esse distantiis respectivis inter puncta *a*, *b*, *c*, *d* &c. in Mappa.

Itaque puncta A, B, C, D, E, quæ observata sunt ab extremitatibus basis MN, & eorum relativa *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in Mappa, cum sint vertices triangulorum similium, singulorum ad singula, & similiter positorum respectu eorum basis MN, *mn*, erunt pariter similiter posita respectu earumdem basium MN, *mn* (n. 451.).

Idem dicendum de punctis F, G, & eorum



 respe-

respectivis f, g respectu suarum basium AB, ab. Cum autem duæ istiusmodi bases AB, ab terminentur a punctis similiter positis respectu duarum rectarum MN, mn: etiam puncta F, G, & eorum respectiva f, g erunt pariter similiter posita respectu earumdem rectarum MN, mn (n. 459.).

Eodem ratiocinio utendum circa puncta H, I, & eorum respectiva h, i.

Ergo distantiæ inter puncta A, B, C, D &c. in campo, proportionales erunt distantiis inter puncta a, b, c, d &c. respectiva in Mappa, & consequenter erunt utrobique eodem modo disposita. Quod erat &c.

Recta autem mn usui erit instar Scalæ geometricæ ad metiendas distantias inter diversa puncta ejusdem Mappæ.

Scholion.

QUamvis methodus, quam attulimus, accommodari etiam possit ad determinandum cursum fluminum, riparum, ac sinuositatem viarum, ut in Mappam traducantur: tamen, quia, ut exactè repræsententur, opus est sæpius percurrere, & metiri singulas camporum partes, quarum positio, & figura determinanda est: idcirco in hisce casibus commodiorem methodum dabo.

PROBLEMA II.

469. *SInuosam fluminis ripam ope Pixidis magneticæ pinnulis instructæ ichnographicè in Mappa describere.*

Resolutio. Inter puncta A & E determinare oporteat in Mappa vel cursum fluminis, vel sinuosum iter ABCDE.

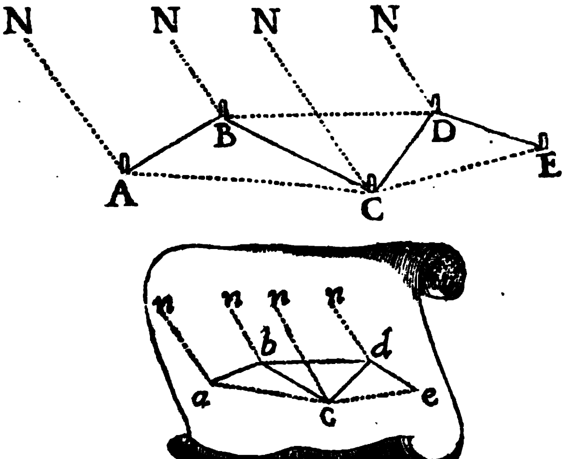
I. Notissima res est versorium acus magneti-

cæ

cæ constanter dirigi ad eamdem mundi plagam, borealem, & australem, cum aliqua levi declinatione pro varietate regionum, eidemque lineæ meridianæ semper respondere. Quare, si acus magnetica successivè collocetur in diversis ripæ punctis A, B, C, D, omnes versorii directiones AN, BN, CN, DN considerari poterunt tanquam invicem parallelæ.

II. Figantur pali in extremitatibus A, E, & in singulis ripæ flexibus B, C, D; tum explorentur anguli NAB, NBC, NCD, NDE, quos directio acus magneticæ efficit cum radio visivo ad proximiorem palum; mensurenturque omnes distantiæ AB, BC, CD, DE.

III. Antequam transferantur in Mappam quantitates horum angulorum, notæque distantiæ, separatim in charta ducatur recta *an*, quæ repræsentet directionem AN magnetis; & punctum *a* designet primum punctum A ripæ flexuosæ. Fiat deinde

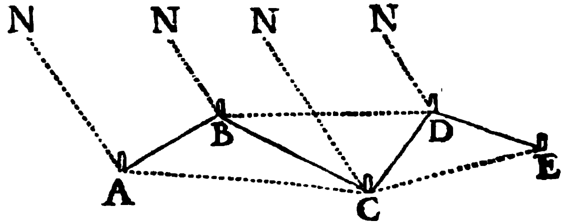


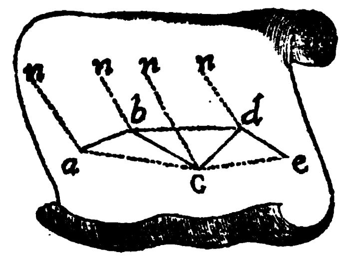
 angu-

angulus *nab* æqualis angulo NAB; ſumaturque *ab* totidem partium Scalæ, quot pedes, vel hexapedæ inventæ fuerint in AB.

IV. Ducatur a puncto *b* recta *bn* parallela ipſi *an*, ut repræſentetur directio BN magnetis in ſecunda ſtatione B; & reliqua peragantur, ut prius, in punctis *b*, *c*, *d*. Dico factum.

Demonſtratio. Nam rectæ AB, BC, CD, DE ſunt per Conſtructionem proportionales totidem reſpectivè rectis *ab*, *bc*, *cd*, *de*, angulique æquales, ſinguli ſingulis. Ergo puncta omnia A, B, C, D, E, & eorum relativa *a*, *b*, *c*, *d*, *e* ſunt ſimiliter poſita. Ductis enim rectis AC, BD, CE, & *ac*, *bd*, *ce*, triangula ABC, BCD, CDE ſimilia erunt triangulis *abc*, *bcd*, *cde*. Ergo figura *abcde*, quam conſtruximus, ſinuoſam fluminis ripam exactè repræſentat. Quod erat &c.





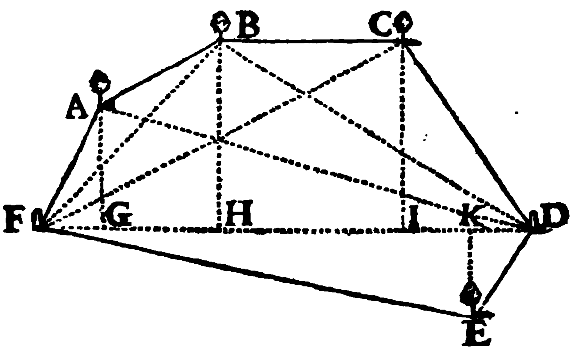
PRO-

PROBLEMA III.

470. *AReam campestrem ichnographicè delineare per Dioptram, seu normam Mensorum, quam Itali vocant* Squadra, *Galli* l'Equerre d'Arpenteur.

Inter instrumenta in campo usitata, simplicissimum illud est, ac sæpè, & utiliter adhibetur, inquit laudatus de Marinonis, in areis perviis, & plerumque in planitie jacentibus, ut dirimantur in triangula rectangula, quadrata, & oblonga, vel in trapezia duorum laterum æquidistantium, & ad communem basim normalium; narratque citatus Auctor Geometris Insubriæ tanta in æstimatione fuisse, ut diu potuerit de palma contendere cum ipsa Tabula Prætoriana, cujus usum, atque præstantiam ex eodem eximio Scriptore mox exponam. Hæc norma mensoria quatuor pinnulis instructa sit, quarum dioptræ sint in duobus planis invicem perpendicularibus.

Esto planities ABCDEF ichnographicè delineanda.



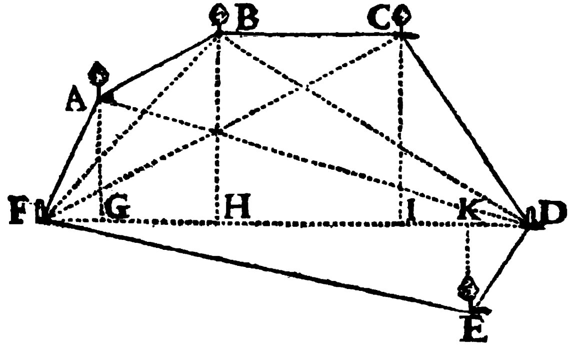
I.

I. Designetur bacillis recta FD, quæ transeat per duo quævis puncta, quæ Mensori videantur magis idonea; dein subsidio hujus normæ in eadem recta FD quærantur puncta G, H, I, K, quæ perpendiculariter respondent vertici angulorum A, B, C, E propositæ figuræ.

II. Mensurentur perpendiculares AG, BH, CI, EK, & præterea partes a perpendicularibus interceptæ FG, GH, HI, IK, KD.

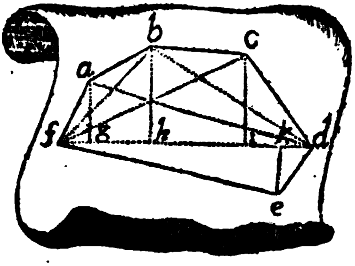
III. Omnes istiusmodi mensuræ ope Scalæ geometricæ transferantur in chartam, erectis perpendicularibus, junctisque punctis *f*, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Dico hujus perimetrum repræsentare exactè areæ campestris perimetrum ABCDEF.

Demonstratio. Triangula rectangula FGA, AGD, FHB, BHD, FIC, CID, FKE, EKD, & eorum relativa *fga*, *agd*, *fhb* &c. sunt similia, singula singulis, quippe quæ per Constr. habent latera circa angulum rectum proportionalia. Quare triangula FAD, FBD, FCD, FED, & eorum respectiva *fad*, *fbd*, *fcd*, *fed* composita erunt ex triangulis similibus; & consequenter (n. 447.) similia erunt, singula singulis.



Hinc

Hinc (n. 451.) puncta A, B, C, E, & eorum respectiva *a*, *b*, *c*, *e* erunt similiter posita respectu duarum rectarum FD, *fd*, & omnia puncta A, B, C, D, E, F, & eorum respectiva *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* erunt pariter inter se similiter posita. Quod erat &c.



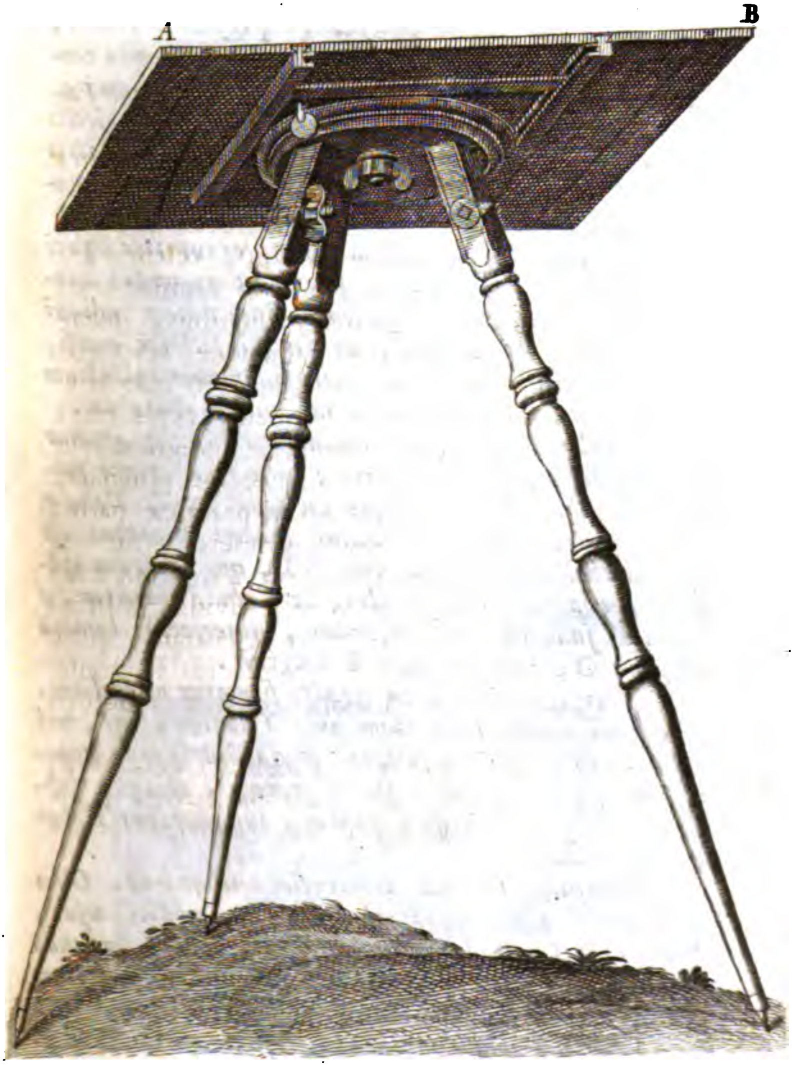
PROBLEMA IV.

471. *TAbulæ Prætorianæ deſcriptio ex Joanne Jacobo de Marinonis.*

Inſtrumentis omnibus, quæ ad angulorum, diſtantiarumque menſuras rite capiendas excogitata ſint a Geometris, præferri meretur hodierna Tabula, quam Prætorianam vocant, celebris Inventoris ſui Joannis Prætorii adſcito nomine anno 1576., quamque novis animadverſionibus, inventiſque ad meliorem formam, uſumque revocavit Joannes Jacobus de Marinonis, qui eo ipſo tempore, quo hæc Geometriæ Elementa typis edere parabam, ad me Viennà tranſmiſit egregium opus ſuum de re ichnographica; cui, & me plurimùm debere fateor in hac Geometriæ practicæ parte; atque, prout ordo Elementorum feret, ſic ejus inventa breviter præſtringam, ut Tironibus meis acuam ſitim, quò fiat, ut relictis rivulis, ad fontes, ac totius rei ichnographicæ ſcientiam, quam in hoc opere complexus eſt, quantocius ſe conferant. Deſcriptionem Tabulæ referam Auctoris verbis.

Primùm oſtenditur oblonga lignea tabula A B, *& quidem in poſtica, vel infima ejus parte, ut appareat quomodo ſuſtineatur a fulcro in tripodem deſinente.*

Deinde


A
B

Deinde conspicitur fulcri epistylium CD *cylindricum, basim supremam habens pedalis diametri, & crassitiem pollice majorem, ut tripodis genua contineat, ipsi epistylio adglutinata, cuneisque firmata.*

Genibus inseruntur tripodis crura EF, *trajectis clavis* GH, *qui motui axem suppeditant, additis matricibus* IK, *quæ genibus crura in unam compagem adstringunt, & motum liberiorem impediunt.*

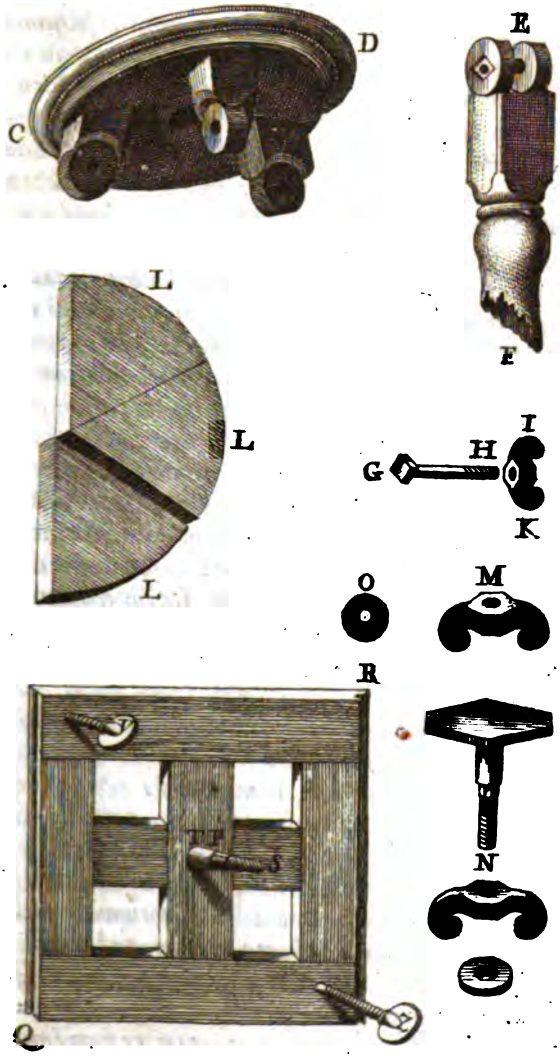
Ad epistylii structuram parati erant tres lignei semicylindri L, *quorum in singulis pars media integram suam retinuit crassitiem: duo autem reliqui trientes non nisi mediam; ut sex hi sectores excisi, simulque conjuncti, & adglutinati unicum cylindrum componerent, ligni alterationibus minùs obnoxium.*

Quadrum QR (*hoc nomine uti liceat*) *aptatur Tabulæ in postica ejus parte; inseritur nempe subscudibus ibi affixis, perque cochleas* Y, Z *Tabulæ adstringitur. In medio hujus quadri firmatus est axis orichalcicus, aut ligneus* ST, *qui centrum epistylii pervadens, cum quadro, ac Tabula volvitur, a matrice sua* M *adstringendus, interjectà laminà octogonà* O, *quæ prismati* P *congruit.*

Axis centralis N *in quadro firmatus ostenditur. Non rarò tamen solet idem axis Tabulæ affigi, vel adglutinari; sed consultiùs est quadro ipsum apponi, ut Tabula queat a fulcro sejungi, aliaque substitui; sicque idem axis duabus, aut pluribus Tabulis inserviat.*

Mensura Tabulæ arbitraria relinquitur. Olim erat unius pedis quadrati, ideoque modici usus. Nunc ejus longitudo excrevit ad tres pedes, latitudo ad duos cum dimidio, ut nimirum excedat folium chartæ majoris, quam imperialem appellant.

Charta Tabulæ apponenda, resectis extremis margini-


D
C
E
F
L
L
L
I
H
G
K
O
M
R
N
Q

ginibus, ut fiat rectangula, tota madefit ope humidæ spongiæ, vel humidi penicilli majoris, sicque convoluta relinquitur ad horæ spatium.

Deinde margines tenaci glutine farinaceo in adversa parte obducti, Tabulæ adglutinantur; postque levem extensionem charta rursum madefit intra margines, ut hi exsiccentur, folio adhuc humido manente.

Nocet autem hujusmodi folio paulo ante extenso proximitas fenestræ, vel januæ patentis; quia ob liberum aeris ingressum nimis citò exsiccatur; ideoque a glutine non detinetur. Nocet quoque vicinia calefactæ fornacis, vel, si æstivo tempore soli exponitur; quoniam, etsi fuerit exsiccatum, & a glutine detineatur, vi caloris contrahitur, & laceratur.

Addit prætereà accuratè, more suo, complures alias observationes in constructione hujus Tabulæ, ac præsertim, ut ubivis situm horizontalem exactè obtineat, aliaque ejusdemmodi in praxi obeunda; quæ singula Lector, cum occasio feret, poterit ex ipsius opere facilè cognoscere. Venio jam ad alteram hujus Instrumenti partem, quæ praxim spectat, ex eodem Scriptore luculenter descriptam.

PROBLEMA V.

472. TAbulæ Prætorianæ usus, atque præstantia. *Quoniam fulcrum per motum tripodis ad horizontem adducitur, charta supra tabulam fulcro parallelam extensa, planum horizontale præsefert.*

In hoc itaque plano punctum eligitur primæ stationi datæ, vel ad libitum sumptæ respondens, &

acu

acu verticaliter infixa signatur. Tabula verò ita dirigitur secundùm visam, vel relatam extensionem areæ, ut complura sequentium stationum, aliaque ichnographica puncta in Tabulæ charta signari queant; cùmque prima basis pervia, & apta electa fuerit, ad ejus terminum visum recta linea in tabula ducitur, & stationis adeundæ linea vocatur.

Hæc porro, quatenus ab aliis, quæ ductæ, vel ducendæ sunt, distingui possit, acu altera, in eadem directione, prout spatium patitur, antrorsum, vel retrorsum fixa, & non parum distante notatur.

Signo ibi posito, nisi quodpiam stabile fuerit, transitur ad sequentem stationem; & in ipso transitu sumitur mensura distantiæ, quæ basim constituit.

Ejus longitudo reducta, sive a Scala desumpta, transfertur in ejus lineam, ut habeatur terminus basis assumptæ, nempe ichnographicum punctum secundæ stationis, acu pariter infixa signandum. Ex hoc novo centro licebit alias rectas quotcunque ducere lineas, postquam tabula in debito ante omnia situ constituta, & punctum præcedentis stationis directum fuerit ad signum in ipsa relictum.

Ita porro per Tabulæ motum circularem, & rectum linea stationis redit ad verticale planum, in quo signata fuit; & reliquæ lineæ omnes prius ductæ evadunt parallelæ verticalibus planis, in quibus eæ ducebantur. Proinde collineando ad objecta prius visa, & intersecando lineas in præcedenti statione ad eadem ductas, puncta intersectionum fiunt puncta ichnographica objectorum distantium.

Verùm hæc exemplis, & praxi multò evidentiùs intelligent Tirones.

PROBLEMA VI.

473. *Aream rectilineam perviam ex unica statione ichnographicè describere.*

Resolutio. I. Posità Tabulà Prætorianà in situ horizontali, ut semper esse debet, ac præterea, si lubeat, in uno figuræ angulo, ita ut punctum *a* vertici ejus immineat: per dioptras regulæ affixas collineatio fiat in baculos in singulis angulis B, C, D, E defixos; ducanturque lineæ indefinitæ *ab*, *ac*, *ad*, *ae*.

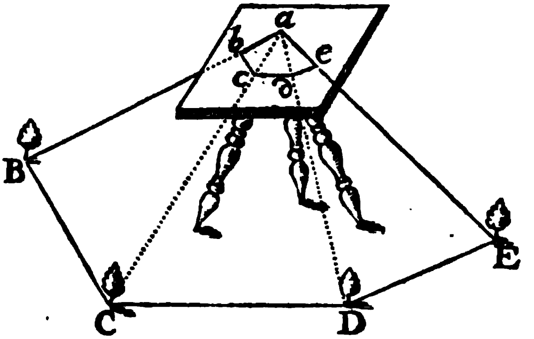
II. Investigetur longitudo rectarum *a*B, *a*C, *a*D, *a*E.

III. Deinde juxta scalam modicam determinentur in Tabula rectæ *ab*, *ac*, *ad*, *ae*.

IV. Ducantur *bc*, *cd*, *de*.

Dico *abcde* esse similem figuræ ABCDE.

Demonstratio. Nam triangula *abc*, *a*BC per Constr. similia sunt, cum habeant latera *ab*, *ac*, *a*B, *a*C circa communem angulum *a* proportionalia. Atque ita porro de reliquis triangulis. Quod erat &c.



Ali-

Aliter.

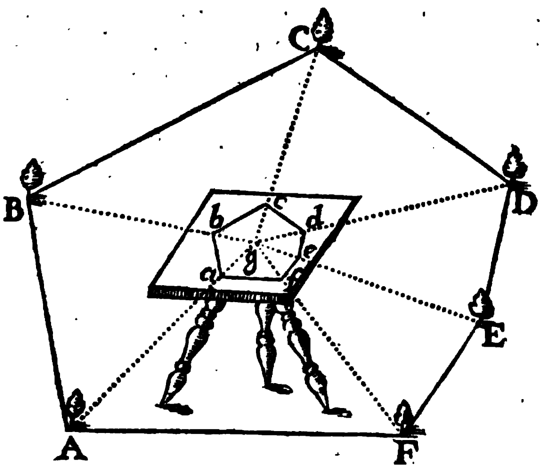
I. Tabulâ intra figuram positâ, eligatur punctum *g*, ex quo per dioptras regulæ affixas, ut ante, collineatio fiat in bacillos defixos in A, B, C, D, E, F; ducanturque rectæ indefinitæ *ga*, *gb*, *gc* &c.

II. Investigetur longitudo rectarum *g*A, *g*B, *g*C &c.

III. Inde determinetur longitudo rectarum *ga*, *gb*, *gc* &c. juxta scalam modicam.

IV. Tandem ducantur *ab*, *bc*, *cd* &c.

Dico *abcdef* esse similem figuræ ABCDEF. Demonstratio est eadem.



PROBLEMA VII.

474. *Ichnographiam areæ* A B C D E *non ubique perviæ, cujus anguli videri possint, ex duabus stationibus* A & B *perficere.*

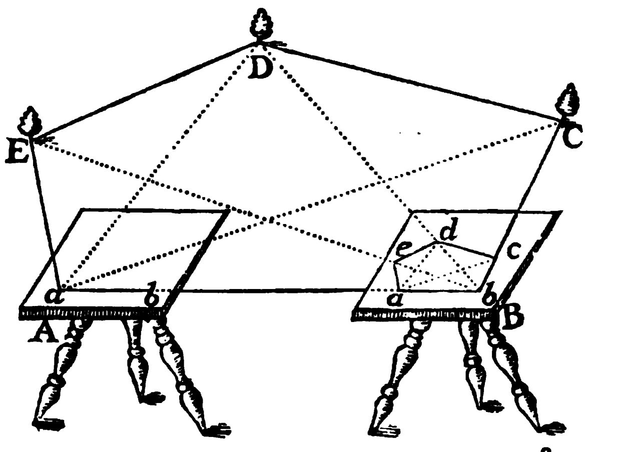
Resolutio. I. Positâ tabulâ in A, collineatio fiat in singulos areæ angulos B, C, D, E; ducanturque in mensula versùs eorumdem vertices rectæ ex puncto *a*.

II. Quæratur distantia stationum A B, & in mensulam ex Scala geometrica transferatur in *ab*.

III. Mensula ex A deferatur in B, hac lege, ut punctum cognomine *b* in eà designatum, ipsi B respondeat, & regulà ad lineam *ba* applicatà, per dioptras collineanti baculus in A defixus occurrat.

IV. Ex puncto *b* secundæ stationis in singulos rursus figuræ angulos collineatio fiat, & versùs eosdem rectæ ducantur, quæ priores in *e*, *d*, *c* intersecant.

V. Denique jungantur intersectionum puncta



a & *e*,

a & *e*, *e* & *d*, *d* & *c*, rectis *ae*, *ed*, *dc*.

Dico Ichnographiam esse absolutam.

Demonstratio. Nam per Constructionem in utraque statione A & B, eadem linea *ab* & *ba* congruit eidem directioni; angulique E*a*D, D*a*C, C*a*B primæ stationis, æquantur angulis *ead*, *dac*, *cab* secundæ stationis, singuli singulis; adeoque lineæ *a*E, *a*D, *a*C parallelæ sunt lineis *ae*, *ad*, *ac*. Hinc facilè demonstrabis triangula E*a*D, D*a*C, C*a*B similia respectivè triangulis *ead*, *dac*, *cad*; adeoque &c. Quod erat &c.

Scholion.

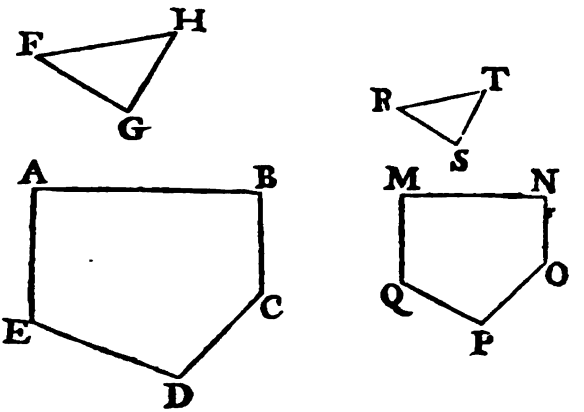
HÆc cursim indicare libuit, quantùm satis esset, ut Tirones intelligerent abstracta hæc, ut vocant, Theoremata exercendæ praxi viam ipsis amplissimam aperire, & quod caput est, idoneos reddi legendis Scriptoribus majoris notæ, qui hanc materiam accuratiùs tractarint.

ELEMENTUM IV.

De Ratione Laterum homologorum, & de Perimetro Figurarum similium.

475. SI duæ rectæ, puta, FG, RS terminentur a punctis similiter positis respectu duarum rectarum AB, MN, quæ possint esse latera homologa duorum similium polygonorum ABCDE, MNOPQ, demonstravimus n. 455. easdem rectas FG, RS in eadem esse ratione, quam habent inter se duæ rectæ, seu latera homologa AB, MN.

Quoniam verò polygona similia habent omnia latera homologa proportionalia; hinc omnes rectæ, puta, FG, RS, quæ terminentur a punctis similiter positis respectu duorum laterum homologorum AB, MN, erunt pariter inter se in eadem ratione, quam habent reliqua latera polygonorum. His animadversis fit

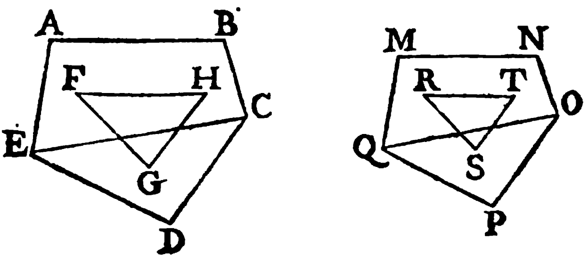


PROPOSITIO I.

THEOREMA.

476. **D**Uorum *ſimilium polygonorum perimetri ſunt inter ſe, uti eorum latera homologa.*

Demonſtratio. Quoniam polygona ſunt ſimilia, erit AB:MN::BC:NO::CD:OP::DE:PQ::EA:QM. Ergo per regulas proportionum, ut ſumma omnium antecedentium AB+BC+CD &c., hoc eſt, perimeter primi polygoni, ad ſummam omnium conſequentium MN+NO+OP &c., hoc eſt, perimetrum ſecundi: ita antecedens unum AB, latus primi eſt ad ſuum conſequens MN, latus nempe homologum ſecundi. Quod erat &c.



Corollarium.

477. **H**Inc duorum ſimilium polygonorum perimetri ſunt inter ſe, uti lineæ homologæ FG, RS, quæ a punctis ſimiliter poſitis terminantur. Nam per præced. perimetri ſe habent uti latera homologa AB, MN: hæc autem ſunt proportionalia lineis homologis FG, RS (n. 275.).

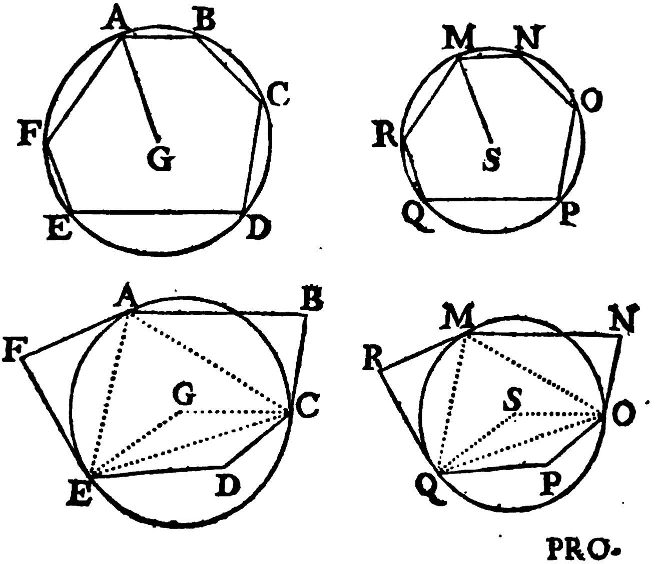
PRO-

PROPOSITIO II.

THEOREMA.

478. *SI duo polygona similia* ABCDEF, MN OPQR *vel circulis sint inscripta, vel tres dumtaxat angulos habeant respectivis circumferentiis respondentes, erunt ambitus polygonorum inter se, ut diametri.*

Demonstratio. Quoniam similium polygonorum perimetri sunt inter se, uti eorum latera homologa AB, MN, & præterea circulorum radii in eisdem polygonis terminantur a punctis similiter positis: erunt latera homologa AB, MN proportionalia radiis circulorum, & consequenter diametris. Ergo ambitus polygonorum proportionales erunt diametris suorum circulorum. Quod erat &c.

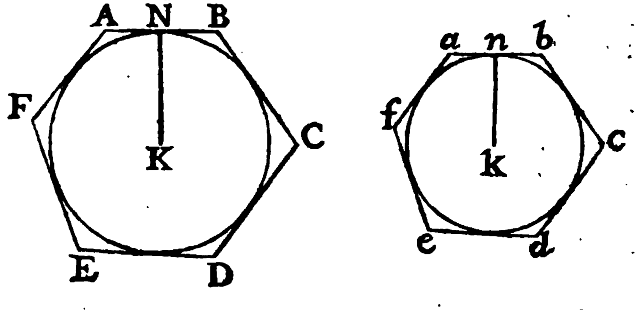


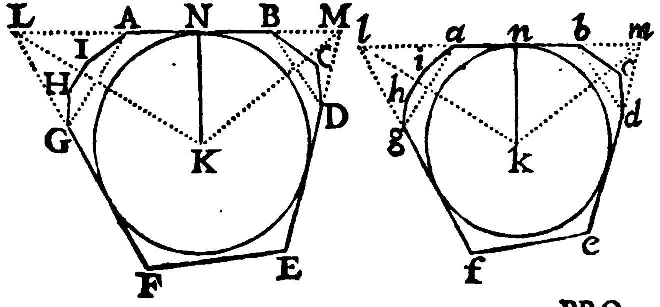
PROPOSITIO III.

THEOREMA.

479. *SI duo polygona similia* ABCDEF, abcdef *circulis sint circumscripta, vel eorum tria latera homologa circulos tangant, erunt polygonorum ambitus proportionales radiis.*

Demonstratio. Nam ambitus polygonorum proportionales sunt lateribus homologis AB, *ab* (n. 476.); & horum circulorum centra (n. 465.) sunt similiter posita in duobus polygonis. Ergo latera homologa AB, *ab* sunt proportionalia radiis KN, *kn*; & consequenter ambitus polygonorum &c.





PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

480. *SI duorum circulorum arcubus sine fine bisectis plura semper, ac plura in infinitum latera circumscribi, & inscribi intelligantur: ambitus polygonorum desinunt in circuli peripheriam. Et duorum circulorum circumferentiæ, sunt inter se, ut eorum radii, seu diametri.*

Demonstratio. Excessus ambitus circumscripti supra ambitum inscriptum tandem fiet quovis dato minor. Ergo multò magis excessus ambitus circumscripti supra peripheriam fiet quocunque dato minor. Similiter perspicuum est defectum ambitus inscripti ab ambitu circumscripto fieri quovis dato minorem, multòque magis defectum inscripti ambitus a peripheria. Ambitus igitur polygoni tam inscripti, quàm circumscripti, in peripheriam desinunt. Est enim instar axiomatis, quod a Newtono lib. I. princip. Mathem. lem. I. proponitur: *Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt, & ante finem temporis illius propiùs ad invicem accedunt, quàm pro data quavis ratione, fieri ultimò æquales.*

Pars altera consequitur ex Theor. præced.

PRA-

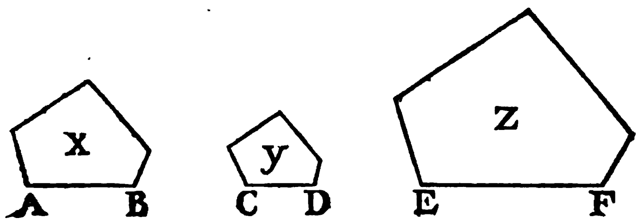
PRAXIS GEOMETRICA

Figurarum similium perimetrum addere, subrahere, multiplicare, ac dividere, hac lege, ut figuræ subnascentes sint datis similes.

PROBLEMA I.

481. F*Iguram* Z *construere, cujus perimeter æquetur summæ ex perimetris duarum figurarum* X, Y, *quæ eidem similes sint, & quarum* AB, CD *sint latera homologa.* Additio.

Resolutio. Accipiatur recta EF æqualis summæ AB+CD; tum super rectà EF, consideratà instar lateris homologi ipsi AB & CD, construatur (n. 448.) polygonum Z duobus datis X & Y simile. Dico hujus ambitum æqualem fore summæ ambitus duorum datorum X & Y.



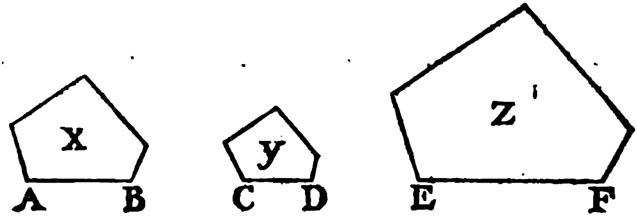
Demonstratio. Nam ambitus polygonorum similium Z, X, Y proportionales sunt eorum lateribus homologis. Atqui per Constructionem EF =AB+CD. Ergo ambitus polygoni Z æquatur summæ ex perimetris duorum reliquorum X, Y. Quod erat &c.

PRO-

PROBLEMA II.

482. *Invenire polygonum* X, *cujus perimeter æquetur differentiæ inter perimetros duorum polygonorum* Z, Y, *quæ eidem sint similia, & quorum duo latera* EF, CD *sint homologa.*

Subtractio.



Resolutio. Accipiatur recta AB æqualis differentiæ EF — CD laterum homologorum. Super rectà AB, consideratà instar lateris homologi ipsi EF, aut CD, construatur polygonum X simile dato Z, aut Y. Dico factum.

Demonstratio. Nam, quia $AB = EF - CD$, si utrinque adjiciatur $+ CD$, erit $AB + CD = EF - CD + CD$; hoc est, $AB + CD = EF$. Ergo summa ex perimetris duorum polygonorum X, Y æquabitur perimetro polygoni Z. Ergo ab utroque hujus æqualitatis membro, subducendo eumdem perimetrum polygoni Y, remanet perimeter polygoni X æqualis perimetro polygoni Z minùs perimetro polygoni Y, hoc est, æqualis differentiæ inter perimetros duorum datorum polygonorum Z & Y. Quod erat &c.

PRO-

PROBLEMA III.

483. *Invenire polygonum Z, cujus perimeter sit multiplex perimetri polygoni similis Y.* Multiplicatio.

Resolutio. Accipiatur recta EF, quæ sit æquè multiplex lateris CD polygoni Y; tum super rectà EF, consideratà instar lateris homologi ipsi CD, construatur polygonum Z simile dato Y. Dico perimetrum hujus novi polygoni Z fore tantundem multiplum perimetri polygoni dati Y, ac recta EF fuerit multiplex rectæ CD.

Demonstratio. Nam perimeter ad perimetrum erit, ut EF ad CD. Quod erat &c.

PROBLEMA IV.

484. *Perimetrum dati polygoni Z dividere in ratione data, suisque partibus perimetrum construere polygonorum X & Y dato similium.* Divisio.

Resolutio. Dividatur recta EF dati polygoni Z in ratione data; tum partibus ipsius EF æquales sume AB, CD; super quibus, consideratis instar laterum homologorum ipsi EF, construe polygona X & Y similia dato Z. Dico novorum polygonorum perimetros fore partes quæsitas perimetri polygoni Z.

Demonstratio. Nam I. perimetri polygonorum X & Y simul sumpti æquantur perimetro polygoni Z.

II. Duo polygona X & Y perimetros habent proportionales eorum lateribus homologis AB, CD, quæ æquales sunt partibus, in quas per Constr. divisa est recta EF in ratione data. Ergo perimeter polygoni Z divisus est in data ratione &c. Quod erat &c.

Mo-

Monitum.

485. *SI figuræ, circa quas operari oporteat, sint ex simplicioribus polygonis, eorum latera homologa erunt rectæ homologæ, quæ commodiùs assumi possint. Quòd si figuræ similes sint inscriptæ, vel circumscriptæ circulis, vel cum eisdem immediatè connectantur, vel denique figuræ ipsæ sint circuli, commodissimùm erit radios circulorum assumere pro lineis homologis.*

GEOMETRIÆ
THEORICO-PRACTICÆ
LIBER TERTIUS
DE RATIONE
SUPERFICIERUM.

ELEMENTUM I.

De Ratione Superficierum in Parallelogrammis, Triangulis, & Figuris similibus generatim.

DEFINITIONES.

486. SI *antecedentes plurium rationum termini, sicuti etiam ipsarum, consequentes, nimirum,* $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{D}{d}$ *inter se mutuò respectivè multiplicentur, producta* $\frac{ABD}{abd}$ *dicuntur habere inter se rationem compositam ex illis omnibus datis rationibus.* Ratio composita.

Corollarium I.

487. DAtis ergo quotcunque rationibus, sola multiplicatione antecedentium, & consequentium inter se mutuò respectivè, determinabitur ratio ex illis omnibus composita.

Corollarium II.

Exponens rationis compositæ.

488. Cum valor rationis sit quotus antecedentis per consequentem divisi (n. 360.), hinc sequitur exponentem rationis compositæ pariter componi ex simplicium rationum exponentibus inter se multiplicatis. Sic $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ exprimit rationem $ac : bd$ ex simplicibus compositam, cujus exponens componitur ab exponentibus simplicium inter se multiplicatis. Sic ex simplici ratione dupla 4 : 2, & 9 : 3 tripla, componitur ratio 36 : 6 sextupla, cujus exponens 6 est factum exponentium 2×3 rationum simplicium. Similiter ex ratione 4 : 2, & 9 : 3, & 20 : 5, oritur ratio 720 : 30, cujus exponens 24 est factum $2 \times 3 \times 4$.

Ratio composita ex omnibus intermediis.

489. *Ratio geometrica cujusvis termini* A *ad alium quemvis* F *componitur ex rationibus omnibus intermediis continuè sumptis, quæ oriuntur ex quovis numero terminorum interjacentium.* Sic ratio A : F æquatur rationi compositæ A : B, B : C, C : D, D : E, E : F, initio facto in A, & desinendo in F, sumptis terminis intermediis, quot libuerit. Similiter in numeris ratio 36 : 2 est composita ex 36 : 18, 18 : 6, 6 : 12, 12 : 4, 4 : 2. Ratio est, quia intermedii termini in antecedentibus, & consequentibus occurrunt; unde ratio composita ex A : B, B : C, C : D, D : E, E : F, eadem est, ac ratio ABCDE : BCDEF, in qua sublatis terminis communibus, remanet ratio A : F composita ex omnibus intermediis.

Co-

Corollarium.

490. Hinc duplex ſequitur geometrica argumentandi ratio, *ex æquo*, ut ajunt, *ordinatè*, & *ex æquo perturbatè*, vel, ut alii loquuntur, *ex æqualitate ordinata*, & *ex æqualitate perturbata*; Nam, ſi fuerint quotcunque quantitates A, B, C &c., aliæque ipſis numero æquales *a*, *b*, *c* &c. in duplici ſerie conſtitutæ, quæ binatim ſumptæ, ſint in eadem ratione, puta, A:B::*a*:*b*, & B:C::*b*:*c*, erit ex æqualitate ordinata, ut prima A ad tertiam C in prima ſerie, ita prima *a* ad tertiam *c* in ſecunda; hoc eſt, ratio duarum extremarum ex una parte æqualis erit rationi duarum extremarum ex alia. Ratio pendet ex numero præcedente. Nam ultimæ rationes ex intermediis æqualibus componuntur. Æqualitas ordinata.

491. Sin autem fuerint quotcunque quantitates A, B, C, aliæque ipſis numero æquales *a*, *b*, *c* in duplici ſerie conſtitutæ, quæ binatim ſumptæ, ſint in eadem ratione: ſit autem perturbata earum proportio, nempe A:B::*b*:*c*, & B:C::*a*:*b*: erit ex æquo perturbatè, ut A prima ad tertiam C in prima ſerie, ita prima *a* ad tertiam *c* in ſecunda ſerie; hoc eſt, ratio duarum extremarum ex una parte æqualis erit rationi duarum extremarum ex alia. Ratio eadem, quæ numeri præced. Æqualitas perturbata.

492. Si in ea per multiplicationem compoſitione rationum, quam definivimus n. 486., contingat, ut rationes componendæ ſint invicem ſimiles, ſeu æquales, ratio compoſita dici ſolet unius ſimplicis duplicata, triplicata &c., pro numero ſi- Ratio duplicata, triplicata &c.

milium rationum componentium. Quare *Ratio duplicata dicitur illa, quæ ex duabus: triplicata, quæ ex tribus: quadruplicata, quæ ex quatuor rationibus æqualibus inter se multiplicatis consurgit;* atque ita deinceps.

Corollarium I.

Ratio subduplicata, subtriplicata &c.

493. RAtio geometrica, quam habet quadratum unius quantitatis ad quadratum alterius, est duplicata rationis illius, quam habent ipsæ quantitates simplices ad invicem: ratio cuborum triplicata; & sic de reliquis potestatibus, quæ ex æqualium rationum multiplicatione componuntur. Et contra, ratio geometrica, quam habent inter se radices quadratæ, cubicæ &c., dicitur subduplicata, subtriplicata &c. rationis potestatum correspondentium.

Corollarium II.

494. HInc in omni geometrica progressione rationum æqualium, primus terminus ad tertium habere dicitur rationem duplicatam primi termini ad secundum: primus ad quartum habere dicitur rationem triplicatam; & sic deinceps. Ratio est, quia rationes illæ componuntur (n. 492.) ex omnibus intermediis, quæ æquales sunt inter se.

Co-

Corollarium III.

495. HInc patet, qua de causa Euclides rationem compositam definiens ex duabus $a:b$, & $c:d$, jubet, ut fiat consequens primæ rationis b ad novam quantitatem e, uti antecedens secundæ rationis c est ad suum consequens d; deinde rationem $a:e$ compositam vocans ex duabus prædictis; quam definitionem ex nostra, quam attulimus n. 486., statim intelliges. Nam ratio $a:e$ componitur ex rationibus $a:b$, & $b:e$. Atqui ratio $b:e=c:d$ ex hypothesi. Ergo ratio $a:e$ composita est ex rationibus $a:b$, & $c:d$. Definitio Euclidea.

Itaque, cum Euclides demonstrat lib. 6. prop. 23. æquiangula parallelogramma habere proportionem compositam ex duabus rationibus, quas duo latera circa unum angulum unius habent ad duo latera circa angulum æqualem alterius, jubet prius, ut duæ illæ rationes laterum continuentur in tribus quantitatibus; tum demonstrat eam proportionem parallelogramma inter se habere, quam prima quantitas habet ad tertiam.

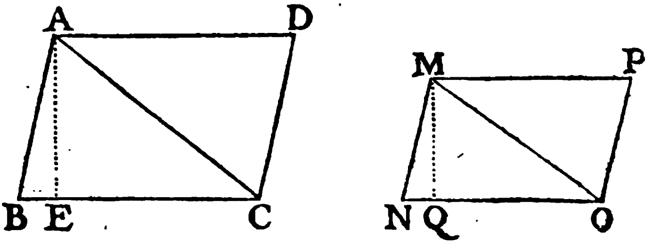
PROPOSITIO I.

THEOREMA.

Ratio parallelogrammorum,

496. *Duo quævis parallelogramma* ABCD, MNOP *sive similia sint, sive non similia, sunt inter se, uti facta basis in altitudinem respectivè, nimirum, sunt in ratione composita basis ad basim, & altitudinis ad altitudinem* (*n.* 486.).

Demonstratio. Nam (n. 263.) parallelogramma ABCD, MNOP æquantur productis BC × AE, & NO × MQ, nimirum, eorum basis in respectivam altitudinem. Ergo sunt inter se, uti hæc producta, sive in ratione composita BC ad NO, & AE ad MQ. Quod erat &c.



Corollarium.

Triangulorum.

ERgo duo triangula quæcunque BAC, NMO sunt pariter inter se, uti producta BC × AE, NO × MQ, nimirum, eorum basis in respectivam altitudinem. Sunt enim semisses horum productorum.

PRO-

PROPOSITIO II.

THEOREMA.

497. *Parallelogramma* ABCD, MNOP, *quæ unum angulum uni habent æqualem, & consequenter æquiangula sunt, habent rationem compositam ex rationibus laterum æqualem angulum continentium; nimirum, si angulus* B = N, *erit* ABCD: MNOP :: AB × BC : MN × NO. Euclid. lib. 6. prop. 23. Parallelogramma æquiangula.

Demonstratio. Ab æqualibus angulis A & M demittantur perpendiculares AE, MQ super latera BC, NO æqualibus angulis B & N adjacentia. Triangula AEB, MQN erunt & æquiangula, & similia.

Ergo AE : MQ :: AB : MN.
Atqui BC : NO :: BC : NO.
Ergo multiplicatis respectivè terminis, habebitur AE × BC : MQ × NO :: AB × BC : MN × NO.
Jam verò parallelogrammum ABCD = AE × BC, & parallelogrammum MNOP = MQ × NO.
Ergo ABCD : MNOP :: AB × BC : MN × NO.
Quod erat &c.

Corollarium.

Neque aliter ratiocinaberis de triangulis, quæ sunt semisses parallelogrammorum.

PRO-

PROPOSITIO III.

THEOREMA:

Parallelogramma similia.

498. *Parallelogramma similia* ABCD, MNOP *sunt inter se, uti quadrata laterum homologorum, idest*, $ABCD : MNOP :: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$. Euclid. lib. 6. prop. 19.

Demonstratio. Ab æqualibus angulis A & M demittantur perpendiculares AE, MQ in latera homologa BC, NO. Triangula AEB, MQN æquiangula, erunt similia; atque hinc

$$AE : MQ :: AB : MN.$$

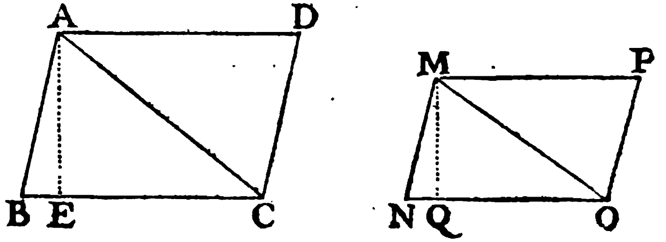
Atqui per hyp. parallelogramma ABCD, MNOP sunt pariter similia. Ergo

$$BC : NO :: AB : MN.$$

Multiplicatis itaque inter se antecedentibus, & consequentibus hujus duplicis analogiæ, erit

$AE \times BC : MQ \times NO :: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$. (n. 395.).
Est autem $AE \times BC = ABCD$,
& $MQ \times NO = MNOP$ (n. 263.).

Ergo $ABCD : MNOP :: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$. Quod erat &c.



Co-

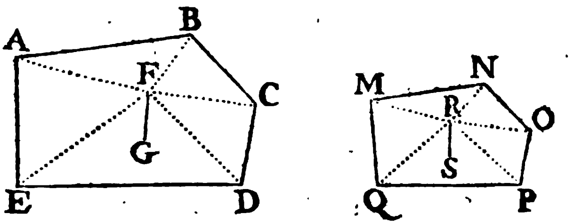
Corollarium.

499. DUo triangula similia sunt pariter inter se, uti quadrata $\overline{AB}^2$, $\overline{MN}^2$ laterum homologorum, seu in ratione duplicata eorumdem (n. 493.).

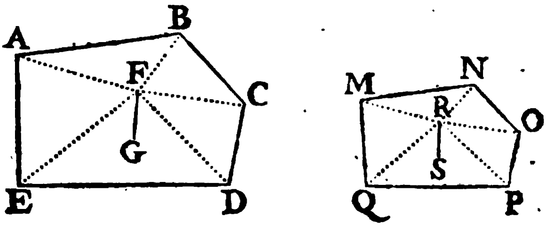
PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

500. *Similium polygonorum superficies* ABCDE, MNOPQ *sunt inter se, uti quadrata* $\overline{AB}^2$, $\overline{MN}^2$ *suorum laterum homologorum.* Euclid. lib. 6. prop. 20. Polygona similia



Demonstratio. A duobus punctis F & R similiter positis respectu duorum laterum homologorum AB, MN, in duobus polygonis ducantur rectæ ad omnes angulos. Quoniam hæc puncta F & R sunt etiam similiter posita respectu omnium laterum homologorum (n. 460.), triangula AFB, BFC &c. erunt similia triangulis MRN, NRO &c., singula singulis (n. 451.). Ergo per præced. Corol. erunt inter se, ut quadrata laterum homologologorum; hoc eſt, quia AB:MN::BC:NO:: CD:OP &c., triangula invicem comparata, ſingula ſingulis, erunt, ut $\overline{AB}^2$, $\overline{MN}^2$. Ergo, ut omnium antecedentium triangulorum ſumma ad ſummam omnium conſequentium, hoc eſt, polygonum ad polygonum, ita $\overline{AB}^2$:$\overline{MN}^2$. Quod erat &c.



Corollarium I.

501. ERgo duo ſimilia polygona A B C D E, M N O P Q ſunt inter ſe, uti quadrata $\overline{FG}^2$, $\overline{RS}^2$ duarum rectarum, quæ terminata ſint a punctis ſimiliter poſitis reſpectu horum polygonorum.

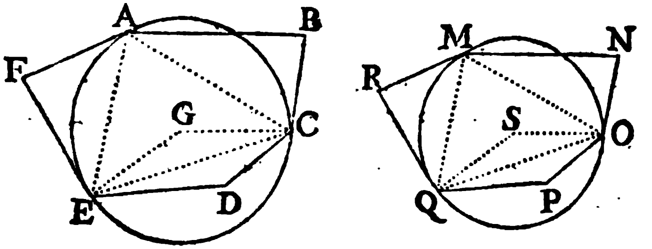
Nam (n.455.) AB:MN::FG:RS.

Corollarium II.

502. HInc duo polygona ſimilia ABCDEF, MNOPQR, quorum tres anguli eodem modo reſpondent circumferentiæ circuli, ſunt inter ſe, uti quadrata radiorum.

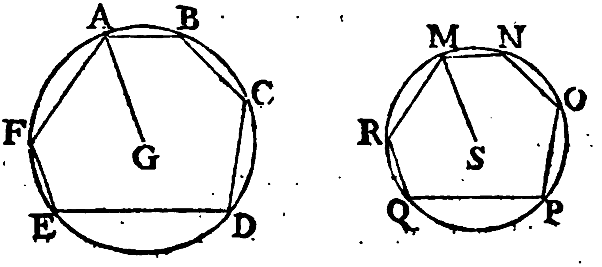
Nam ductis radiis GC, SO ad reſpectivos angulos C & O, centra G & S ſunt puncta ſimiliter

liter posita in duobus polygonis (n. 462.), & vertices angulorum C & O sunt pariter puncta similiter posita (n. 454.). Ergo AB : MN :: GC : SO (n. 455.). Atqui per Theor. polygonum ad polygonum est, ut $\overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$. Ergo &c. Quod erat &c.



Corollarium III.

503. Ergo duo polygona similia ABCDEF, MNOPQR circulis inscripta, sunt, ut quadrata radiorum. Habent enim ad minimùm tres angulos respondentes circumferentiæ suorum circulorum. Circulis inscripta,

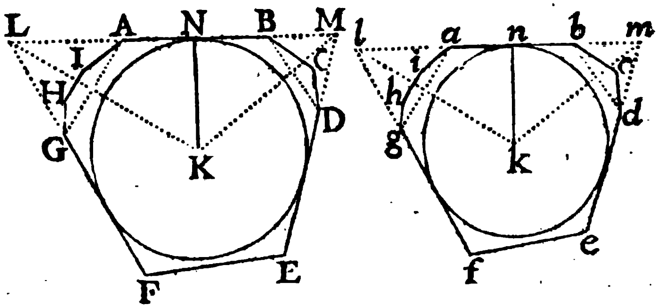


Co-

Corollarium IV.

504. SImiliter duo polygona similia ABCDEF GHI, *abcdefghi*, quæ tribus lateribus homologis duos circulos tangant, erunt proportionalia quadratis radiorum.

Nam ductis radiis KN, *kn* perpendicularibus ad puncta contactuum N, *n*, erunt (n. 453.) puncta N, *n* similiter posita respectu eorumdem laterum. Quamobrem (n. 455.) AB:*ab*::KN:*kn*. Atqui per Theor. polygona similia sunt inter se uti $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$. Ergo etiam, uti $\overline{KN}^2 : \overline{kn}^2$. Quod erat &c.



Corollarium V.

Circulis circumscripta. 505. ERgo duo similia polygona circulis circumscripta, radiorum quadratis sunt proportionalia.

Corollarium VI.

506. CIrculi sunt inter se, uti quadrata radiorum.

Nam considerari possunt circuli tanquam polygona regularia similia infinitorum laterum, inscripta, vel circumscripta iisdem circulis, in quos desinunt.

ELE-

ELEMENTUM II.

De Quadratis, & Figuris similibus in Triangulo rectangulo invicem comparatis.

DEFINITIONES.

507. Quemadmodum, si numerus in seipsum ducatur, productum dicitur quadratum, seu potestas secunda, cum numerus ipse potestas prima, seu radix dicatur; & si quadratum iterum ducatur in suum numerum, factum dicitur cubus, seu potestas tertia: ita, si valor rectæ lineæ consideretur in certo quodam partium determinatarum numero, in quas intelligatur divisa, quasque vocamus mensuras, puta, pedes, hexapedas &c., hæc recta linea appellabitur potestas prima; sin autem idem mensurarum numerus in seipsum multiplicetur, productum erit potestas secunda, seu ejusdem rectæ quadratum; cujus superficies totidem mensuras quadratas, puta, pedes quadratos, continet, quot unitates habet idem productum. Atque ita de cubo, seu potestate tertia dicendum. Ultra potestatem tertiam, seu cubum extensio geometrica non procedit; quippe natura loci, spatiique plures non patitur dimensiones. Quadratum autem rectæ AC designari solet per $\overline{AC}^2$, & ejusdem cubus per $\overline{AC}^3$.

Radix.

Quadratum.

Cubus.

Itaque quadrata invicem comparata habent inter se eam proportionem, quam obtinent numeri mensurarum æqualium, quas continent eorum

super-

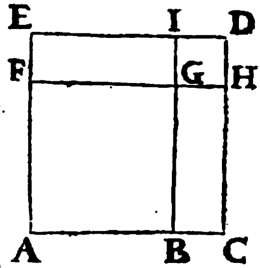
ſuperficies. Quare, ſi quærenda ſit duorum quadratorum proportio, & latus primi ſit 2 menſurarum, ſecundi ſit 3: ducantur in ſe ipſos dati numeri; horum producta numerica dabunt rationem quadratorum inter ſe.

LEMMA I.

Compoſitio quadrati.

508. *SI recta* AC *ſecta ſit utcunque in* B, *quadratum totius* AC *componitur ex quadratis partium* AB, BC, *&* *duplo rectangulo, cujus contigua latera ſint duæ partes* AB, BC; *hoc eſt*, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB \times BC$. Euclid. lib. 2. prop. 4.

Demonſtratio. Super recta AC conſtruatur quadratum ACDE; & lateris AE accipiatur portio AF = AB, vel FE = BC; ducanturque rectæ FH, BI parallelæ lateribus AC, AE. Per Conſtructionem evidens eſt quadratum totius ACDE componi ex quadratis partium AB, BC, & duplo rectangulo ſub iiſdem partibus contento. Quod erat &c.



LEMMA II.

509. *SI recta* AC *fuerit utcunque ſecta in* B, *quadratum unius ſegmenti* AB *æquatur quadratis totius* AC, *&* *ſegmenti alterius* BC, *minus duobus rectangulis contentis ſub tota* AC, *&* *eodem ſegmento* BC; *hoc eſt*, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AC \times BC$. Euclid. lib. 2. prop. 7.

De-

Demonstratio. Per Constructionem præced. constat AG, GD esse quadrata duarum partium AB, BC ejusdem rectæ AC; ac præterea duo rectangula BD FD contineri sub tota AC, ejusque parte BC, & consequenter utrumque rectè exprimi per $AC \times BC$.

His positis, perspicuum est excessum quadrati ACDE supra quadratum AG componi ex duobus rectangulis BD, FI. Si eidem quadrato ACDE addatur etiam quadratum GD, excessus summæ horum quadratorum supra quadratum AG erit compositus ex duobus rectangulis BD, FI, & quadrato GD, hoc est, per Constructionem, ex duobus rectangulis æqualibus BD, FD, seu ex duplo rectangulo BD. Ergo, si a duobus quadratis totius AC, & partis BC subducatur quantitas $2\,AC \times BC = 2\,BD$, residuum erit quadratum AG super AB constructum; hoc est, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AC \times BC$. Quod erat &c.

Corollarium I.

510. QUoniam $AB = AC - BC$, perspicuum est quadratum unius segmenti AB æquari quadrato differentiæ totius rectæ AC, & segmenti alterius BC.

Corollarium II.

511. ITaque tres termini $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB \times BC$ component quadratum summæ rectarum $AB + BC$. Tres alii termini $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AB \times BC$ component quadratum differentiæ rectarum $AB - BC$.

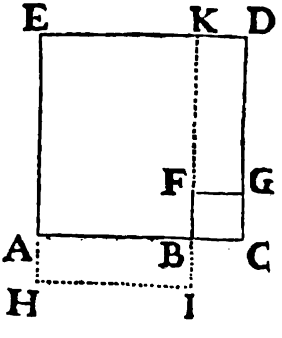
LEMMA III.

512. D*Ifferentia duorum quadratorum, quæ ſuper duabus rectis* AC, BC *conſtrui intelligantur, æquatur producto ſummæ duarum rectarum in earumdem differentiam.*

Hoc eſt, $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AC+BC} \times \overline{AC-BC}$

Demonſtratio. Recta BC conſtituatur ſuper rectà AC; conſtruanturque ſuper iiſdem duo quadrata ACDE, BCGF, quorum angulus C communis ſit; productoque latere EA primi quadrati, donec AH = BC, ducatur a puncto H ipſi AC parallela HI, cui latus FB ſecundi quadrati protractum occurrat in I, & ſimiliter latus idem BF ex altera parte protractum terminetur in K.

Itaque, quia per Conſtructionem AC = CD, & BC = CG, ſubducendo ſecundam æqualitatem a prima, fiet AB = GD. Cum autem rurſum per Conſtr. AH = BC = FG, erunt duo rectangula HB, FD æqualia; adjectoque utriſque eodem rectangulo AK, erit HB + AK, ſeu HK = FD + AK.



Jam verò FD + AK eſt differentia duorum quadratorũ ACDE, BCGF, quæ conſtructa concipiantur ſuper AC, & ſuper BC. Ergo rectangulum HK erit pariter differentia eorum-

dem

dem quadratorum, nimirum, $ACDE - BCGF = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = HK = EH \times AB$.
Atqui per Constr. $EH = AC + BC$, & $AB = AC - BC$.
Ergo $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AC + BC} \times \overline{AC - BC}$.

Corollarium.

513. SI recta A D secetur æqualiter in C, & inæqualiter in B, quadratum dimidiæ A C, minùs quadrato partis intermediæ B C, æquabitur rectangulo sub inæqualibus partibus A B, B D; hoc est, $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AB \times BD$. *Euclid. lib. 2. prop. 5.*
Nam per Constr. $AB = AC + BC$
$BD = CD - BC = AC - BC$.
Ergo formula præced. Theor., $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AC + BC} \times \overline{AC - BC}$, in hanc transformabitur, $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AB \times BD$. Quod erat &c.

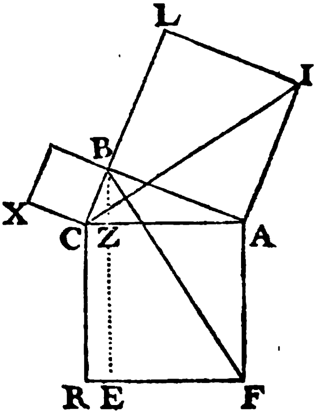
PROPOSITIO I.

THEOREMA.

514. *IN omni triangulo* ABC *rectangulo, quadratum lateris* AC, *quod recto angulo opponitur, & hypotenusa dicitur, æquale est duobus simul reliquorum laterum* AB, CB *quadratis*. Euclid. lib. 1. prop. 47.

Quadratum hypotenusæ.

Demonstratio. Ducantur IC, BF, & præterea BE parallela lateri AF. Si angulis IAB, FAC rectis, ac proinde æqualibus, addatur communis angulus BAC, erunt toti IAC, FAB æquales anguli. Atqui per Constr. in triangulis IAC, FAB etiam latera, quæ æquales illos angulos continent, inter se sunt æqualia, nimirum, IA, CA ipsis BA, FA, unum uni, alterum alteri. Ergo triangula IAC, FAB æquantur (n. 229.); quæ, quia cum parallelogrammis ABLI & ZAFE consistunt in iisdem basibus IA, FA, & in iisdem parallelis IA, LBC, & AF, EZB, sunt eorum dimidia (n. 250.). Ergo parallelogramma ABLI, ZAFE, utpote æqualium dupla, erunt æqualia inter se.



Eodem discursu ductis rectis AX, BR, demonstratur parallelogramma EC, BX æqualia esse. Totum igitur quadratum AR utrisque IB, & BX æquale erit. Quod erat &c.

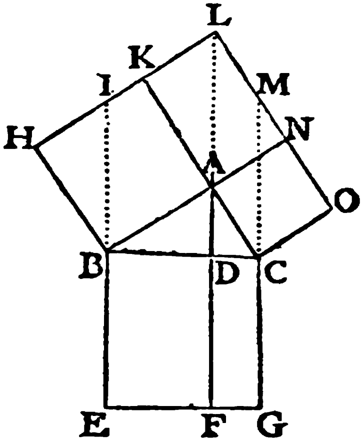
Ali-

Aliter.

Ab anguli recti vertice A demittatur in hypotenusam perpendicularis AD, quæ producta occurrat in F lateri EG quadrati ejusdem hypotenusæ; cujus duo latera EB, GC, & ipsis parallela AF producantur, donec duorum quadratorum HK, ON lateribus productis occurrant in punctis I, M, L. Invenies itaque

I. Duo triangula BAC, BHI esse perfectè æqualia. Nam BA = BH; & anguli BAC, BHI sunt æquales, utpote recti; tum etiam æquales anguli ABC, HBI, quippe complementa ejusdem anguli ABI. Ergo (n. 230.) duo triangula BAC, BHI sunt æqualia; & consequenter BC = BI = BE.

II. Duo parallelogramma BF, ABIL super æqualibus basibus BE, BI, & inter easdem parallelas EI, FL constituta, sunt æqualia. Atqui propter eamdem rationē parallelogrammum ABIL æquatur quadrato AH. Ergo parallelogrammum BF æquatur quadrato AH.

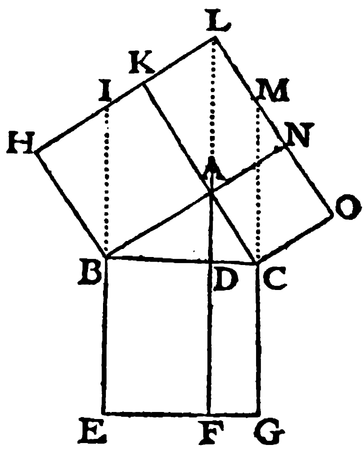


Eodem discursu ostenditur parallelogrammum DG æquari quadrato AO. Ergo quadratum hypotenusæ BC &c. Quod erat &c.

Scholion.

515. INventio porro admirabilis, atque pulcherrimi hujus Theorematis ad Pythagoram refertur, qui, ut ſcribit Vitruvius lib. 9., hoſtias Muſis immolavit, quòd ſe in tam præclaro invento adjuverint. Idem Theorema paulo infra ad omnes figuras ſimiles, ſimiliterque deſcriptas extendi poſſe demonſtrabimus longè univerſaliùs, quàm hoc Pythagoræ inventum, quod ſola quadrata includit.

Quamvis autem ad demonſtrationem ſecundam Theorematis parum interſit ſcire, in quo puncto recta DA producta occurrat rectæ HK pariter productæ: tamen facilè demonſtrari poteſt rectam DA productam neceſſariò tranſire per punctum L, in quo occurrunt latera HK, ON producta, duorum quadratorum adjacentium angulo recto BAC.



Nam duo triangula AKL, BHI perfectè æqualia eſſe conſtabit, & conſequenter KL = HI = AC = AN &c.

Co-

Corollarium I.

516. SI ab angulo recto in hypotenusam demittatur perpendicularis AD, erunt quadrata hypotenusæ, & duorum laterum proportionalia toti hypotenusæ, ejusque partibus BD, DC. Ratio quadratorum in triangulo rectangulo,

Nam quadratum BG, & duo rectangula BF, DG inter easdem parallelas, eam inter se proportionem habent, quam eorum bases; hoc est,

BG:BF:CF::BC:BD:DC.

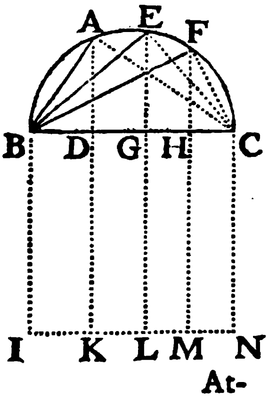
Itaque, si duobus rectangulis BF, CF substituantur quadrata eisdem respectivè æqualia AH, AO, erit

BG:AH:AO::BC:BD:DC.

Corollarium II.

517. IN circulo BAEFC, si ab extremitate B diametri ducantur quotlibet chordæ BA, BE, BF, & a punctis A, E, F, demittantur in diametrum BC perpendiculares AD, EG, FH, erit In semicirculo.

$$\overline{BC}^2:\overline{BA}^2:\overline{BE}^2:\overline{BF}^2::BC:BD:BG:BH.$$



Nam ductis rectis AC, EC, FC, triangula singula in eodem semicirculo erunt rectangula; constructoque quadrato BN, productisque perpendicularibus, erit per Theor. $\overline{BC}^2 = BN$; $\overline{BA}^2 = BK$; $\overline{BE}^2 = BL$; $\overline{BF}^2 = BM$.

Atqui $BN:BK:BL:BM::BC:BD:BG:BH$.

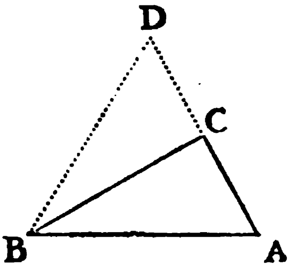
Ergo $\overline{BC}^2:\overline{BA}^2:\overline{BE}^2:\overline{BF}^2::BC:BD:BG:BH$.

Nimirum, quadrata diametri, & omnium chordarum, quæ ab extremitate B ducuntur, proportionalia ſunt diametro, ejuſque partibus interceptis a puncto B, & ſingulis perpendicularibus demiſſis ab extremitate chordarum.

Corollarium III.

518. SI quadratum ſuper uno trianguli latere AB deſcriptum, æquale ſit duobus reliquorum laterum AC, BC quadratis, angulus BCA, quem reliqua latera continent, rectus erit. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 48. Propoſitio converſa.

Nam, ſi ex puncto C erigatur ſuper CB perpendicularis CD, quæ fiat æqualis lateri CA, ducaturque BD, erit (n. 514.) $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2$, hoc eſt, per Conſtr. $= \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$. Atqui per hyp. $\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2$. Igitur $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$; adeoque $BD = AB$; ac propterea triangula ACB, BCD ſunt ſibi mutuò æquilatera, & (n. 232.) angulus ACB æqualis angulo BCD, qui rectus eſt per Conſtr.



PRO-

PROPOSITIO II.

THEOREMA.

519. *SI tres figuræ similes* X, Y, Z *suis homologis lateribus* BC, BA, AC *triangulum rectangulum* BAC *efficiant, demittaturque ab angulo recto perpendicularis* AD *super hypotenusam* BC: *Dico* I. X:Y:Z::BC:BD:DC. Ratio figurarum similium in triangulo rectangulo.

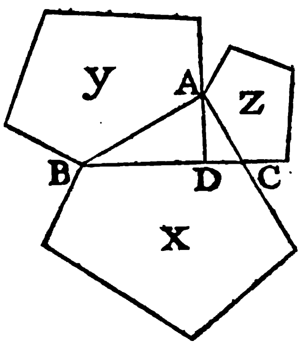
II. X=Y+Z.

Demonstratur I. pars. Quoniam tres figuræ X, Y, Z sunt similes, & rectæ BC, BA, AC sunt latera homologa terminata a punctis similiter positis respectu earumdem, erit (n. 500.)

$$X:Y:Z::\overline{BC}^2:\overline{BA}^2:\overline{AC}^2.$$

Atqui (n. 516.) $\overline{BC}^2:\overline{BA}^2:\overline{AC}^2::BC:BD:DC.$
Ergo X:Y:Z::BC:BD:DC.
Quod erat primum.

Hinc consequitur II. pars. Nam X:Y+Z::BC:BD+DC. Atqui BC=BD+DC. Ergo X=Y+Z. Quod erat alterum.



Corollarium I.

520. SI a lateribus trianguli rectanguli similia polygona quæcunque describantur, illud, quod opponitur angulo recto, duobus simul reliquis æquale erit. Euclid. lib. 6. prop. 31. Theorema Pythagoricũ universalius.

Co-

Corollarium II.

521. SI trium circulorum radii, vel diametri triangulum rectangulum efficiant, ille, qui opponitur angulo recto, duobus simul reliquis æquatur. Nam considerari possunt tanquam tria polygona similia infinitorum laterum.

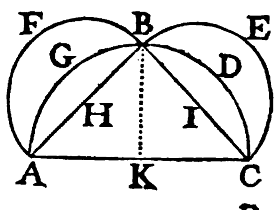
Corollarium III.

Lunulæ Hippocratis.

522. QUamvis adhuc lateat artificium geometricè inveniendi dimensionem circumferentiæ circuli, ejusque aream: tamen a præced. Corollario consequitur dimensio areæ quorumdam spatiorum, quæ a portionibus circumferentiæ circulorum terminantur, vocamusque lunulas Hippocratis, cui hæc inventio adscribitur.

Construatur triangulum rectangulum isosceles ABC; tum super tribus lateribus, tanquam diametris, describantur semicirculi AGBDC, AFB, BEC. Spatium comprehensum a quadrante circuli AGB, & semicircumferentia AFB vocatur lunula, uti etiam spatium BDCEB. Dico autem duas lunulas simul sumptas æquari triangulo ABC.

Nam (n. 521.) area semicirculi AGBDC æqualis est duabus areis simul sumptis semicirculorum AFB, BEC. Ergo ab area majoris semicirculi subducendo utrinque segmenta BGAH, & BDCI, residuum semicirculi majoris erit triangulum ABC. Duorum autem semicirculorum minorum residua erunt duæ lunulæ AFBG, BECD, quarum summa æquabitur triangulo ABC; & alterutra triangulo ABK.



De

De Quantitatibus incommensurabilibus.

DEFINITIONES.

523. *Quantitates commensurabiles dicuntur illæ, quas aliqua communis mensura metitur: incommensurabiles, quæ nullam habent mensuram communem.*

Ejusmodi quantitates existere mox demonstrabitur.

Ratio, seu proportio, quæ existit inter magnitudines commensurabiles, & numeris exprimi potest, dicitur rationalis, & ratio numeri ad numerum. Ratio numeri ad numerum.

Ratio, quæ existit inter magnitudines incommensurabiles, & nullis numeris explicari potest, non est ratio numeri ad numerum; eaque dici solet irrationalis, aut surda. Ratio surda.

524. *Quemadmodum exponens rationis est quotus unius termini per alium divisi: ita exponentes rationis sunt minimi numeri, qui eamdem inter se rationem habent, quam antecedens ad consequens.* Exponentes rationis.

Inveniuntur autem exponentes rationis ea planè ratione, qua fractio reducitur ad minimos terminos, non mutato ejusdem valore. Nam, si uterque terminus, puta, 8 ad 16, vel 32 ad 64 &c., dividatur per maximam communem mensuram 8, vel 32, quotientes 1 & 2 erunt exponentes rationis 8 ad 16, vel 32 ad 64.

LEM-

LEMMA.

Indicium rationis rationalis, aut surdæ.

525. *Ratio duplicata rationis numeri ad numerum necessariò habet pro suis exponentibus quadratos numeros.*

Nam, si rationis numeri ad numerum, puta, 3 ad 6, duplicatam habere velim, huic necessariò adjicienda est ratio altera, quæ sit primæ æqualis, nimirum, $3:6::4:8$; tum multiplicatis inter se duobus antecedentibus, & duobus consequentibus, horum facta 12, 48, dabunt rationem duplicatam alterius simplicis $3:6$, vel $4:8$; uti constat ex n. 487.

Jam verò hæc ratio 12 ad 48 revocetur ad minimos terminos 1, 4, qui erunt & exponentes rationis duplicatæ, & numeri quadrati. Quod universaliter verum esse sic ostenditur.

Duæ rationes æquales ita disponantur, ut unam proportionem efficiant, $3:6::4:8$.
Revocentur ad minimos terminos, $1:2::1:2$.
In hac reductione duarum rationum æqualium, non mutato earum valore, evidens est duo antecedentia eumdem prorsus numerum conficere, uti & duo consequentia; quæ, si inter se respectivè multiplicentur, dabunt necessariò pro exponentibus duos numeros quadratos. Nam horum quilibet erit factum ejusdem numeri in seipsum ducti.

Corollarium.

526. SI detur ratio duplicata, cujus exponentes non sint numeri quadrati, ratio simplex, cujus illa est duplicata, non erit ratio numeri ad numerum.

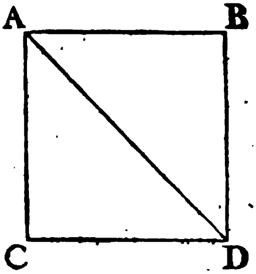
PRO-

PROPOSITIO III.

THEOREMA.

527. IN *quadrato* ABCD *diagonalis* AD *lateri* AC *incommensurabilis est longitudine; hoc est, ratio diametri ad latus, non est ratio numeri ad numerum*. Euclid. lib. 10. prop. 117. Quantitas incommensurabilis longitudine.

Demonstratio. Ratio quadrati rectæ AD ad quadratum rectæ AC est duplicata (n. 498.) rationis simplicis, lineæ AD ad lineam AC. Ergo, si duo quadrata rectarum AD & AC non habeant pro suis exponentibus numeros quadratos, ratio simplex rectæ AD ad rectam AC non erit ratio numeri ad numerum ex præced. Corol. Atqui horum duorum quadratorum exponentes sunt 2 & 1, adeoque numeri non quadrati; nam triangulum ACD rectangulum est, & latus AC æquale lateri CD. Quadratum ergo hypotenusæ AD duplum est quadrati lateris AC. Quare ratio simplex, cujus est duplicata ratio 2 ad 1, non est ratio numeri ad numerum; ideſt, ratio diametri AD ad latus AC irrationalis est; & consequenter quadrati diameter est incommensurabilis lateri, quamvis harum rectarum quadrata sint commensurabilia, quorum ratio 2 ad 1 numeris exprimi potest. Quod erat &c.



Scho-

Scholion.

GEometræ, ut idipsum exprimant, dicunt, diametrum, & latus esse quantitates incommensurabiles longitudine, sed commensurabiles potentià.

PROPOSITIO IV.

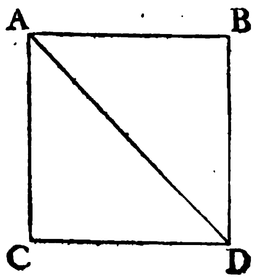
PROBLEMA.

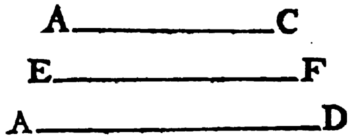
Quantitas incommensurabilis potentià.

528. *INvenire rectas lineas incommensurabiles non solùm longitudine, verùm etiam potentià, hoc est, quarum quadrata non habeant rationem, quæ numeris exprimi possit.*

Resolutio. Inveniatur media proportionalis inter diagonalem, & latus quadrati, uti docebimus Lib. 4. Dico hanc esse incommensurabilem tum longitudine, tum potentià respectu lateris, & diagonalis.

Demonstratur I. pars. Sit recta E F media proportionalis inventa inter latus A C, & diametrum A D. Ratio rectæ A C ad rectam A D est duplicata rationis rectæ A C ad rectam E F (n. 494.).





Qua-

Quare brevitatis causà sit AC = X.
EF = Y.
AD = Z.

Per suppositionem erit $x:y::y:z$.
Multiplicentur inter se duo antecedentia x & y, & duo consequentia y & z hujus continuæ proportionis, habebitur (n. 487.) ratio ex duabus rationibus composita xy, zy.

Hæc autem ratio non differt a ratione x ad z; quippe quæ per eamdem quantitatem y multiplicatur. Ergo ratio x ad z componitur ex ratione x ad y, & ex ratione y ad z, nimirum ex duabus rationibus æqualibus; hoc est, (n. 492.) ratio x ad z est duplicata rationis x ad y, nempe ratio rectæ AC ad rectam AD est duplicata rationis rectæ AC ad rectam EF.

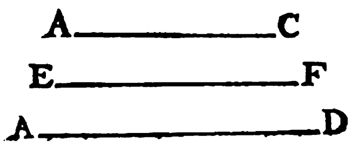
His positis, (n. 526.) erit recta AC longitudine incommensurabilis rectæ EF. Nam earum ratio duplicata, quæ est ratio rectæ AC ad rectam AD, pro exponentibus non habet quadratos numeros.

Demonstratur II. pars. Nam quadratum rectæ AC est ad quadratum rectæ EF in ratione duplicata rectæ AC ad EF: hoc est, in ea ipsa ratione, quam habet recta AC ad rectam AD. Atqui (n. 527.) recta AC est incommensurabilis rectæ AD. Ergo quadratum rectæ AC est incommensurabile quadrato rectæ EF. Quod erat &c.

Con

Corollarium I.

529. HInc lineæ incommensurabiles in infinitum haberi possunt, si totidem mediæ proportionales semper quærantur, puta, inter rectam AC, & rectam EF; atque ita porro in infinitum.



Corollarium II.

530. ATque hoc vel unico argumento, tametsi cætera omnia deessent, evidenter demonstratur quantitates ex definito punctorum numero componi non posse; alioqui nullæ essent incommensurabiles; omnium quippe mensura communis esset punctum.

Corollarium III.

Figuræ planæ, & solidæ incommensurabiles.

531. INventis lineis rectis longitudine incommensurabilibus, invenientur etiam aliæ quamplurimæ magnitudines, planæ scilicet, atque solidæ incommensurabiles inter se. Sint enim rectæ AC & AD longitudine inter se incommensura-

surabiles, inter quas media proportionalis sit EF. Quoniam (n. 493. & 500.) AC prima est ad AD tertiam, uti figura rectilinea quævis super AC constituta ad figuram rectilineam sibi similem, similiterque positam super EF; sunt autem AC & AD longitudine incommensurabiles: erunt pariter rectilineæ illæ figuræ super AC & EF incommensurabiles.

Rursum, si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata ejusdem altitudinis, quorum bases sint figuræ rectilineæ similes, similiterque descriptæ super AC & EF: habebunt pyramides, & prismata, uti alibi demonstrabitur, eamdem proportionem, quam bases: hoc est, quam habent rectilineæ figuræ incommensurabiles.

Corollarium IV.

532. HÆc rectarum incommensurabilitas impedimento est, quo minùs in plerisque operationibus usus scalæ geometricæ universalis esse possit, puta, in additione figurarum similium.

Propositum sit construere quadratum alterius dati duplum. Dividatur latus dati quadrati in maximum partium numerum, idest, in 100 partes. Duc 100 in 100: factum 10000 erit valor quadrati dati; ejusque duplum 20000 valor quadrati quæsiti. Ab hoc tamen invento valore deduci methodus non potest, qua propositum quadratum construatur. Oportet enim ipsius latus invenire expressum tali numero, qui in se ipsum ductus exhibeat 20000. At hic numerus frustra in scala geometrica quæreretur, cujus partes essent centesimæ lateris quadrati primi. Nam numerus 141 in seipſum ductus dabit 19881; & 142 dabit 20164: uterque autem a quæſito numero vel deficeret, vel excederet. Idemque dicendum, ſi latus quadrati dati divideretur in plus quàm 100 partes. Verùm id genus problemata facilè expedientur in praxi geometrica, quam ſubjicio, per Prop. 1., ejuſque Corol.

PRA-

PRAXIS GEOMETRICA

ELEMENTI II. LIB. III.

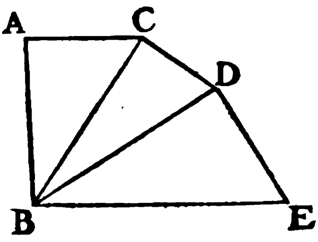
Similium Figurarum Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Divisio.

PROBLEMA I.

533. DATIS *quotcunque figuris similibus, invenire unam æqualem omnium summæ, & ipsis similem.* Additio.

Resolutio. Figurarum similium, quæ addi debent, determinentur latera homologa, quorum duo AB, AC constituantur ad angulum rectum BAC. Hypotenusa BC erit latus homologum figuræ similis, & æqualis summæ duarum.

Quibus si tertiam figuram similem addi oporteat, ab extremitate hypotenusæ BC excitetur perpendicularis CD æqualis lateri homologo tertiæ figuræ; ducaturque hypotenusa BD. Hæc erit latus homologum figuræ similis, & æqualis summæ trium similium figurarum, quarum latera homologa sunt AB, AC, CD. Atque ita porro, si plures aliæ similes figuræ essent addendæ.



Si circulus quæreretur æqualis summæ plurium circulorum: horum radii, vel diametri disponantur, ut jubet Problema; circulus, cujus radius, vel diameter sit hypotenusa, æquatur summæ reliquorum.

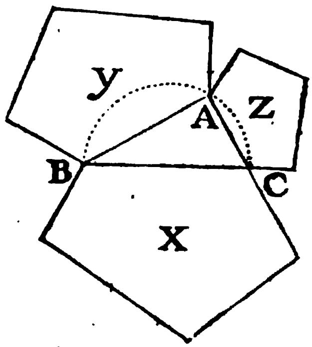
Omnia constant ex n. 520. & 521.

PROBLEMA II.

Subtractio. 534. *Figuram similem ab altera simili subtrahere, ita ut residuum sit figura similis duabus primis.*

Resolutio. Quoniam (n. 520.) $X = Z + Y$, perspicuum est $X - Z = Y$; vel $X - Y = Z$.

Itaque duarum similium figurarum, quarum minor a majore subtrahenda est, determinentur latera homologa; fiat deinde triangulum rectangulum BAC, cujus hypotenusa BC sit latus figuræ majoris, & alterutrum ex duobus lateribus anguli recti, puta, BA, sit homologum latus minoris figuræ subtrahendæ. Tertium latus AC trianguli rectanguli erit homologum latus figuræ similis, quæ duarum datarum sit differentia.



Triangulum verò rectangulum, ut jubet Problema, sic construitur. Super recta BC, quæ sit æqualis uni lateri majoris figuræ, describatur semicirculus BAC; tum ab extremitate B ejusdem diametri ducatur chorda BA æqualis lateri homologo figuræ minoris. Chorda AC erit latus homologum figuræ similis, & æqualis quæsitæ differentiæ duarum reliquarum. Nam angulus in semicirculo rectus est.

Si circuli essent invicem subtrahendi, assumantur eorum radii, vel diametri pro lineis homologis.

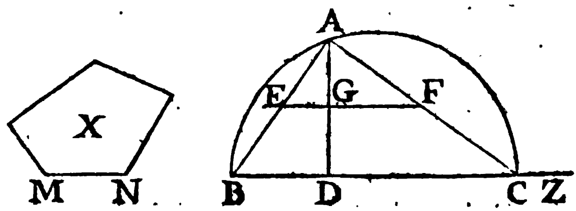
PRO-

PROBLEMA III.

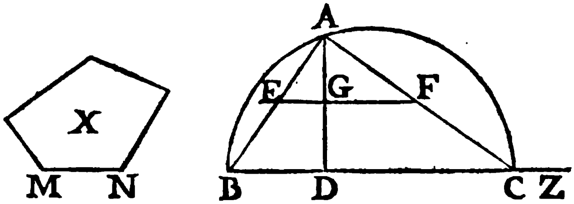
535. *Figuram construere multiplam, & similem figuræ datæ* X. Multiplicatio.

Resolutio. Si figura proposita multiplicanda sit per numerum integrum, puta, 3, multiplicatio revocatur ad additionem, ut in Probl. 1.; sin autem multiplicanda sit in quavis alia ratione, quæ numeris etiam exprimi non possit:

Ducatur recta indefinita BZ, in qua a quovis puncto D excitetur perpendicularis DA; sumaturque pro libito portio BD, quæ respondeat datæ figuræ. Fiat deinde BC æquè multiplex ipsius BD, ac quæsita figura multiplex esse debeat propositæ figuræ X; tum super recta BC, tanquam diametro, describatur semicirculus, qui perpendiculari indefinitæ DA occurrat in puncto A; a quo ad extremitates diametri ducantur chordæ AB, AC, quæ rectum angulum efficient in A. Denique super chorda AB, quæ vergit versùs BD respondentem datæ figuræ, sumatur AE æqualis rectæ MN ejusdem datæ figuræ X; ducaturque EF parallela diametro BC. Dico rectam EF a duabus chordis interceptam, fore latus figuræ quæsitæ, homologum lateri MN propositæ figuræ X.



Demonstratio. Nam figura similis datæ X constructa super rectà EF homologà ipsi MN, toties continebit figuram X, cujus latus homologum est AE, seu MN, quoties EF continet EG (n. 519.). Atqui EF : EG :: BC : BD; & per Constr. BC tot vicibus continet BD, quot vicibus figura quæsita continere debet propositam figuram X. Ergo &c. Quod erat &c.



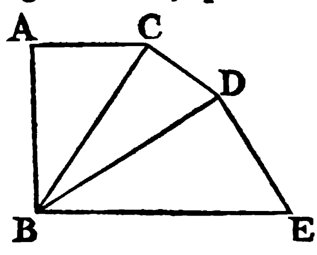
Scholion.

536. *Assuescant Tirones radices quadratas cujusvis summæ quadratorum invenire, easque geometricè, & per litteras designare.*

Itaque I. latus quadrati est ejusdem radix, nimirum, $AB = \sqrt{\overline{AB}^2}$.

II. In triangulo rectangulo BAC, *quia* $\overline{BC}^2$

Expressiones radicum. $= \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$, *hypotenusa* BC *est radix summæ quadratorum* $\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$, *nimirum*, $BC = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2}$.



III. In triangulo rectangulo BCD, *hypote-*

nusa

nusa BD *est radix summæ trium quadratorum*, & *ita exprimitur*: $BD = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2}$ &c.

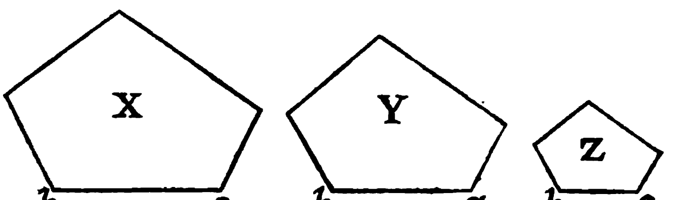
Monitum.

CAveant itaque Tirones, ne radicem quadratam summæ plurium quadratorum, $\sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2}$ *putent esse summam radicum* BA + AC + CD *eorumdem*; *nam ex dictis sola hypotenusa* BD *est illorum radix.*

Similiter in triangulo rectangulo BAC *radix differentiæ quadratorum* $\overline{BC}^2 - \overline{BA}^2$ *non est* BC — BA, *sed* $AC = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BA}^2}$.

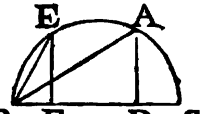
PROBLEMA IV.

537. INvenire lineas rectas proportionales totidem figuris similibus X, Y, Z &c., quarum nota sint latera homologa bc, ba, be &c.



 Re-

Resolutio. Super recta BC æquali rectæ *bc* majoris figuræ X, describatur semicirculus BEAC; ductisque chordis BA, BE &c., quæ sint æquales lineis *ba*, *be* homologis ipsi *bc*, ab earum chordarum extremitatibus demittantur perpendiculares AD, EF &c. ad diametrum BC. Dico X : Y : Z &c. :: BC : BD : BF &c.



Demonstratio. Quoniam figuræ X, Y, Z &c. sunt similes, ac præterea rectæ *bc*, *ba*, *be* &c. sunt earum lineæ homologæ, habebitur (n. 500.)

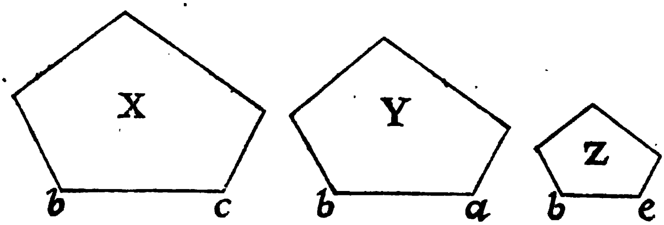
X : Y : Z &c. :: $\overline{bc}^2 : \overline{ba}^2 : \overline{be}^2$ &c.

Atqui (n. 517.) $\overline{bc}^2 : \overline{ba}^2 : \overline{be}^2$: &c.,

sive per Const. $\overline{BC}^2 : \overline{BA}^2 : \overline{BE}^2$ &c. :: BC : BD : BF &c.

Ergo X : Y : Z &c. :: BC : BD : BF &c.

Quod erat &c.



Corollarium.

538. Inventis lineis, quæ proportionales sint totidem figuris similibus, quemadmodum facilè invenitur, quoties una linea alteram contineat, ita peræquè decerni poterit, quot vicibus major duarum figurarum similium contineat minorem.

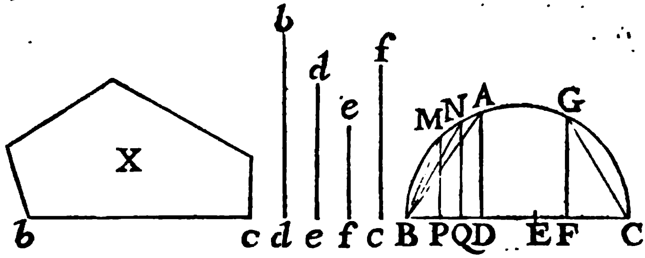
Scho-

Scholion.

Docuimus alibi, quo artificio figura quævis data dividi possit in plures partes, quæ sint in data ratione. Cùm verò partes ab hac divisione provenientes non sint similes figuræ divisæ, reliquum est, ut hoc etiam scitu dignissimum Problema geometricum resolvatur.

PROBLEMA V.

539. *Propositam figuram* X *dividere in partes, quæ sint ipsi similes, ac præterea proportionales datis numeris, seu lineis* bd, de, ef, fc. Divisio.



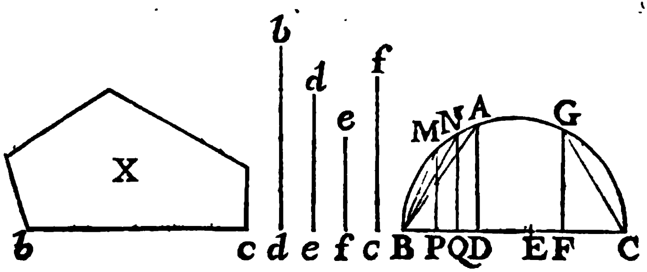
Resolutio. In data figura X eligatur recta *bc* in hanc rem commodior, cui æqualis fiat recta BC, quæ dividatur in partes BD, DE, EF, FC proportionales datis numeris, seu lineis *bd*, *de*, *ef*, *fc*, quæ sunt in ea ipsa ratione, in qua esse debent partes quæsitæ figuræ X; tum super recta BC, tanquam diametro, describatur semicirculus BAC; & ab extremitatibus D & F partium BD, FC, excitentur perpendiculares DA, FG, occurrentes semicircumferentiæ in A & G; dein

dein ducantur chordæ BA, CG; ac super his, tanquam lineis homologis ipsi *bc*, construantur duæ figuræ similes figuræ X.

Dico I. has duas figuras fore duas partes propositæ figuræ X respondentes duabus proportionalibus *bd*, *fc*.

Ut autem inveniantur reliquæ partes figuræ X respondentes reliquis proportionalibus *de*, *ef*, transferantur diametri partes intermediæ DE, EF in BQ, BP, hac lege, ut earum origo communis sit punctum extremum B diametri; tum excitatis diametro perpendicularibus QN, PM, ducantur chordæ NB, MB; ac rursum super his, tanquam lineis homologis ipsi *bc*, construantur duæ figuræ similes figuræ X.

Dico II. hasce novas figuras fore reliquas partes figuræ X respondentes duabus reliquis proportionalibus *de*, *ef*.



Demonstratio. Ut hæc constructio resolvendo Problemati idonea demonstretur, duo præstanda mihi sunt.

Ostendam I. summam harum figurarum similium figuræ X, eidem æquari.

Ostendam II. easdem figuras proportionales esse datis rectis *bd*, *de*, *ef*, *fc*; quod utrumque conditio Problematis postulat.

Ita-

Itaque I. figura X, quæ constructa intelligitur super diametro BC=*bc*, omnesque reliquæ figuræ similes ipsi X, pariter constructæ super chordis AB, NB, MB, GC, tanquam lineis homologis rectæ BC, seu *bc*, erunt per Probl. IV. proportionales rectis BC, BD, BQ, BP, FC, sive rectis BC, BD, DE, EF, FC, quippe BQ=DE, & BP=EF; & consequenter (n. 394.) figura constructa super BC=*bc* erit ad summam aliarum similium super chordis AB, NB, MB, GC constructarum, uti BC est ad summam BD+DE+EF+FC. Atqui BD+DE+EF+FC=BC. Ergo &c. Quod erat primum.

II. Ex prima parte constat figuras similes constructas super chordis AB, NB, MB, GC proportionales esse rectis BD, DE, EF, FC. Atqui per Constr. rectæ BD, DE, EF, FC proportionales sunt lineis datis *bd*, *de*, *ef*, *fc*, seu datis numeris. Ergo &c. Quod erat alterum.

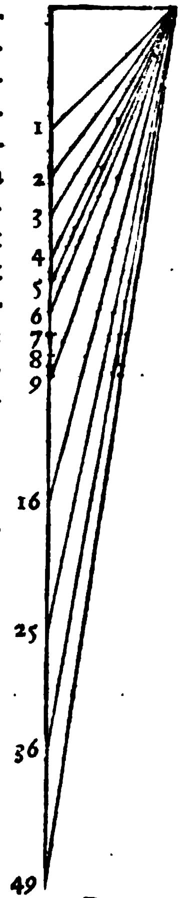
De

De Circino proportionis.

PROBLEMA I.

540. *Lineam planorum circino proportionis inscribere.*

Resolutio. Voco lineam planorum, illam, in qua exhibentur latera homologa figurarum planarum similium. In utraque regula inscribuntur duæ lineæ, quæ in centrum commune circini coeunt. Incipiendo a centro ambæ ita dividuntur, ut primæ divisioni apponatur unitas, & est latus quadrati omnium minimi, & primi; secunda divisio habet 2, designatque latus quadrati dupli; atque ita porro juxta seriem naturalem numerorum designantur latera quadratorum, quæ primum, seu minimum contineant bis, ter, quater &c. Hujusmodi autem divisiones, & latera quadratorum multiplicium inveniuntur ope trianguli rectanguli, & n. 533., uti constare potest ex adjecta figura.



PRO-

PROBLEMA II.

541. F*Iguram planam minuere, aut augere secundùm datam rationem.*

Resolutio. Si figura proposita sit regularis, nimirum, quadratum, pentagonum, circulus, triangulum æquilaterum, sufficiet invenire latus figuræ quæsitæ. Proponatur ergo quadratum quodcunque augendum secundùm rationem 4 ad 9. Latus dati quadrati transfero ad intervallum 4 & 4 notatum in linea planorum. Intervallum 9 & 9 exhibebit latus quadrati, quod se habeat ad propositum quadratum, ut 9 ad 4.

Demonstratio. Lineæ transversales eamdem inter se rationem habent, ac latera. Sed lineæ 4 & 9 sunt latera quadratorum eamdem rationem habentium, ac 4 ad 9. Ergo & lineæ transversales erunt latera quadratorum eamdem rationem habentium. Quod erat &c.

Idem dicendum de omnibus figuris similibus.

Quòd si figura proposita irregularis fuerit, ita ut requirantur plura latera ad descriptionem figuræ similis, pro singulis lateribus eodem modo operandum esset.

PROBLEMA III.

542. I*Nvenire, quam rationem habeant inter se figuræ planæ similes.*

Resolutio. Ut nota fiat ratio, quam habet figura plana quæcunque ad aliam similem, comparari debent duo tantùm latera homologa; Si enim latus utriusque figuræ applicetur lineæ planorum, in-

incipiendo a centro, numeri, quos attingent, indicabunt, quam rationem habeant prædictæ figuræ.

Vel, ita aperiatur circinus proportionis, ut latus unius figuræ propositæ interjiciatur inter numeros eosdem transversaliter, puta, inter 5 & 5: intervallum 9 & 9, cui congruet latus alterum figuræ homologum, indicabit numerum 9, ad quem numerus 5 eamdem rationem habebit, ac prima figura ad secundam.

PROBLEMA IV.

543. *Circinum proportionis ita aperire, ut duæ lineæ planorum angulum rectum efficiant.*

Resolutio. Super linea planorum, incipiendo a centro, accipe circino communi intervallum cujuslibet numeri planorum, puta, 8; hoc idem intervallum applicetur utrinque transversim numero, qui sit semissis præcedentis, nimirum, 4 & 4 ejusdem lineæ planorum; quo facto, duæ lineæ planorum efficient in centro angulum rectum.

Demonstratio pendet ex n. 518.

PROBLEMA V.

544. *Datis quotcunque figuris planis similibus, construere figuram similem omnibus simul sumptis æqualem.*

Resolutio. Circinus proportionis ita aperiatur, ut duæ lineæ planorum angulum rectum comprehendant; tum latera duarum figurarum transfer hinc, atque inde in lineas planorum: linea iis subtensa, seu intervallum inter duos numeros inventum, dabit latus homologum figuræ similis, & æqualis primis duabus.

Pa-

Pariter latus inventum transferatur in unam lineam planorum, & latus tertiæ figuræ in oppositam: linea utrique ſubtenſa, erit latus figuræ ſimilis, & æqualis tribus primis.

Hac praxi uti poſſumus, etiamſi latera transferri non poſſint in lineam planorum, modo ſubſtituantur pro pedibus, aut hexapedis totidem partes æquales ex ſcala geometrica.

PROBLEMA VI.

545. *Invenire latus figuræ ſimilis, æqualis differentiæ duarum figurarum ſimilium.*

Reſolutio. Proponantur duæ figuræ planæ ſimiles, veluti, duo quadrata, duo circuli &c. Quæratur autem latus quadrati, aut circuli, qui ſit æqualis earum figurarum differentiæ.

Aperiatur circinus proportionis, ita ut lineæ planorum angulum rectum comprehendant; tum latus minoris figuræ transfer a centro in alterutram lineam planorum, puta, a centro in punctum *9*; dein circino communi accipe latus alterum homologum figuræ majoris, ac pedem circini ita in extremo *9* primi lateris colloca, ut alius pes aliam lineam planorum in aliquo puncto diviſionis attingat, puta, in 4. Diſtantia a centro ad punctum 4 inventa in altera linea planorum, indicabit latus homologum alterius figuræ ſimilis, quæ differentiam propoſitam adæquet duarum ſimilium figurarum, quarum ratio hic ponitur eſſe, ut *9* ad 13.

Demonſtratio pendet ex n. 534.

ELEMENTUM III.

De Quadratis in triangulo non rectangulo, & in parallelogrammo invicem comparatis, & de Quadrilateris circulo inscriptis.

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

546. IN *omni triangulo obtusangulo* BCD, *si ab angulo acuto* D *perpendicularis* DF *demittatur in latus* BC *productum, & eidem angulo oppositum, erit* Quadratum lateris obtuso angulo oppositi.

I. $\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CF.$

II. $\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{BC}^2 + 2BC \times BF.$

Euclid. lib. 2. prop. 12.

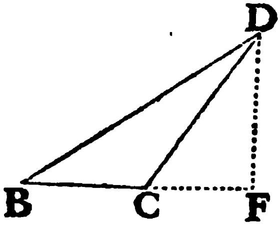
Demonstratur I. pars. Triangula BFD, CFD sunt rectangula in F.

Ergo $\overline{BD}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{BF}^2$

& $\overline{DF}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{CF}^2.$

Quia verò $BF = BC + CF$, erit (n. 508.)

$\overline{BF}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CF}^2 + 2BC \times CF.$



Ergó in prima æquatione utrique quadrato $\overline{DF}^2$ & $\overline{BF}^2$ ſubſtituendo valorem ſuum, fiet

$$\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,BC \times CF.$$

Quod erat primum.

Demonſtratur II. pars. Triangula CFD, BFD rectangula in F, dabunt

$$\overline{CD}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{CF}^2$$
$$\overline{DF}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BF}^2$$

Quia verò $CF = BF - BC$, erit (n. 509.)

$$\overline{CF}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC \times BF.$$

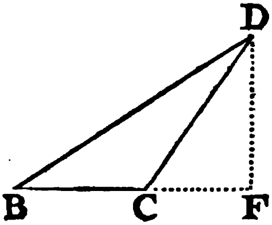
Ergo in prima æquatione utrique quadrato $\overline{DF}^2$ & $\overline{CF}^2$ ſubſtituendo valorem ſuum, fiet

$$\overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC \times BF.$$

Adde utrique membro eamdem quantitatem $-\overline{BC}^2 + 2\,BC \times BF$; deletiſque terminis ſe mutuò deſtruentibus propter ſigna contraria $\pm$, habebitur

$$\overline{CD}^2 - \overline{BC}^2 + 2\,BC \times BF = \overline{BD}^2.$$

Quod erat alterum.



PRO-

PROPOSITIO II.

PROBLEMA.

547. IN *omni triangulo obtusangulo* BCD, *si ab angulo acuto* D *demittatur perpendicularis* DF *in latus eidem oppositum productum*, *invenire*

I. $CF = \frac{\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2}{2BC}$,

II. $BF = \frac{\overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2}{2BC}$.

Resolutio & demonstratio. Ex præced. Theor. habes

I. $\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CF$,

II. $\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{BC}^2 + 2BC \times BF$.

In prima æqualitate adde utrique membro $-\overline{CD}^2 - \overline{BC}^2$, & in secunda adde pariter utrinque $-\overline{CD}^2 + \overline{BC}^2$: erit

I. $\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 = 2BC \times CF$,

II. $\overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 = 2BC \times BF$.

Harum duarum æqualitatum utrumque membrum dividatur per $2BC$: fiet

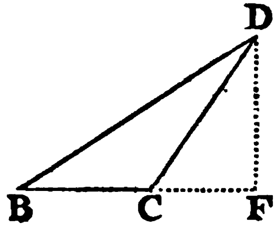
I. $\frac{\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2}{2BC} = CF$,

II. $\frac{\overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2}{2BC} = BF$.

Quod erat &c.

Corollarium.

548. HInc ex notis BF, vel CF ſtatim innoteſcet perpendicularis DF. Nam in triangulo rectangulo BFD, ſi a quadrato BD ſubtrahas quadratum BF, vel in triangulo rectangulo CFD, ſi a quadrato CD ſubtrahas quadratum CF: in utroque caſu reſiduum erit quadratum DF, cujus radix quadrata dabit DF perpendicularem quæſitam.



PROPOSITIO III.

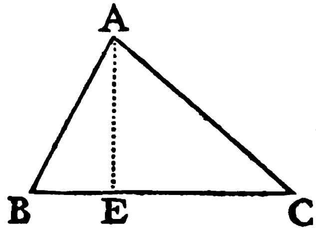
THEOREMA.

Quadratum lateris acuto angulo oppoſiti.

549. *IN omni triangulo* ABC, *ſi ab angulo* A *in latus oppoſitum* BC *demittatur perpendicularis* AE, *quæ intra triangulum cadat, erit*

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC \times BE.$$

Euclid. lib. 2. prop. 13.



De-

Demonstratio. Duo triangula AEC, AEB ſunt rectangula in E.

Ergo $\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2$,

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BE}^2.$$

Et quoniam $EC = BC - BE$, habebitur (n. 509.)

$$\overline{EC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BE}^2 - 2\,BC \times BE.$$

His itaque valoribus ſubſtitutis in prima æqualitate, erit

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC \times BE.$$

Quod erat &c.

Eodem modo demonſtrabitur $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC \times EC$.

Corollarium I.

550. IN eadem figura ex notis lateribus AC, AB, BC invenietur ſegmentum BE, & conſequenter perpendicularis AE.

Nam (n. 549.) $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC \times BE$. Ergo utrique membro æquationis addendo $2\,BC \times BE$, & utrinque ſubducendo $\overline{AC}^2$, erit

$$2\,BC \times BE = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2;$$

& utrumque membrum dividendo per 2 BC, fiet

$$BE = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\,BC}.$$

Invento ſegmento BE, invenies, ut nuper, in triangulo rectangulo ABE perpendicularem AE.

Corollarium II.

551. HInc habetur dimensio cujuscunque trianguli, cujus tria latera sint nota, licet aream habeat imperviam. Horum quippe Theorematum beneficio innotescit perpendicularis, etiamsi eam impedimenta loci non sinant designari. Perpendicularis autem multiplicata per semissem lateris, producit aream trianguli; ut patet ex dictis.

PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

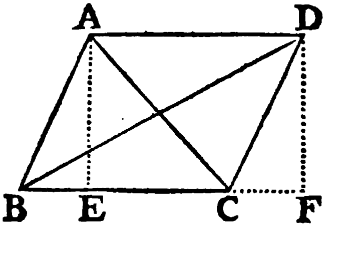
552. *IN omni parallelogrammo* ABCD *summa duorum quadratorum ex diagonalibus* AC, BD *æquatur summæ quatuor quadratorum ex lateribus* AB, AD, BC, CD; *hoc est*,

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2.$$

Demonstratio. Ab extremitatibus lateris AD demittantur perpendiculares AE, DF in latus oppositum BC. Constat BE=CF; & consequenter $2BC \times BE = 2BC \times CF$.

His positis, triangulum ABC dabit (n. 549.)

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BE.$$



Et

Et (n. 546.) triangulum BCD dabit

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2BC \times CF.$$

Addantur simul hæ duæ æquationes, suppressis terminis æqualibus $-2BC \times BE$, $+2BC \times CF$, qui contrarietate signorum se mutuò destruunt, fiet

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2;$$

Et uni ex duobus $\overline{BC}^2$ substituatur $\overline{AD}^2$: erit

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2.$$

Quod erat &c.

PROPOSITIO V.

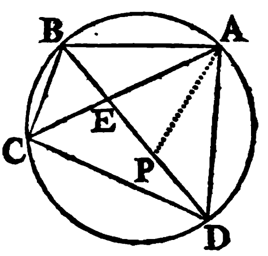
THEOREMA.

553. *Si quadrilaterum* ABCD *circulo sit inscriptum, factum duarum diagonalium* AC, BD *æquatur summæ factorum laterum oppositorum, nimirum,*

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$

Demonstratio. Fiat angulus BAP = angulo CAD: erit etiam angulus BAC = angulo DAP. His positis.

I. Triangula BAP, CAD erunt æquiangula, & similia. Nam angulus BAP = angulo CAD per Constr., & angulus ABP = angulo ACD. Quare AB:AC::BP:CD; & consequenter (n. 379.)



$$AC \times BP = AB \times CD.$$

II. Duo triangula CAB, DAP sunt pariter similia.

 Nam

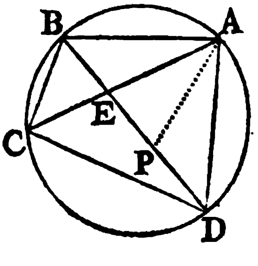
Nam præter angulum BAC = angulo DAP, erit etiam angulus ACB = angulo ADP.
Ergo AC : AD :: BC : PD;
atque adeo AC × PD = AD × BC.
Utriusque æquationis membra invicem addantur: prodibit AC × BP + AC × PD = AB × CD + AD × BC, hoc est, quia BP + PD = BD,
AC × BD = AB × CD.
Quod erat &c.

PROPOSITIO VI.

THEOREMA.

554. IN *quadrilatero* ABCD, *quod circulo sit inscriptum, si ducantur diagonales* AC, BD, *diagonalis* AC *aliam* BD *secabit in partes* BE, DE *proportionales factis* AB × BC, AD × DC *laterum huic diagonali adjacentium, nimirum,*
BE : DE :: AB × BC : AD × DC.

Demonstratio. I. Triangula AEB, DEC sunt similia; nam angulus ABE = angulo DCE, & angulus BAE = angulo CDE. Itaque
BE : CE :: AB : CD.

II. Triangula BEC, AED sunt pariter similia. Ergo CE : DE :: BC : AD.


Harum itaque duarum proportionum terminis respectivè multiplicatis, suppressoque termino CE, qui invenitur in primo antecedente, & primo consequente, prodibit BE : DE :: AB × BC : AD × CD. Quod erat &c.

GEOMETRIÆ
THEORICO-PRACTICÆ
LIBER QUARTUS
DE SECTIONIBUS
RECTARUM GEOMETRICIS.

ELEMENTUM I.

De Lineis sectis in ratione reciproca, ac de Mediis Proportionalibus.

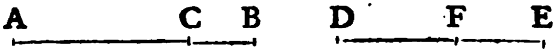
DEFINITIONES.

555. DUæ *rectæ* AB, DE *dicuntur sectæ in ratione reciproca, quando pars una* AC *primæ est ad unam partem* DF *secundæ, uti pars altera* FE *secundæ est ad partem alteram* CB *primæ.* Sectio rectarum in ratione reciproca.

Vel, quando pars una AC *primæ est ad unam partem* DF *secundæ, uti integra secunda linea* DE *est ad primam* AB.

In

In primo casu, *ubi* AC:DF::FE:CB, *dicuntur duæ rectæ* AB, DE *sectæ in partes reciprocas, sive reciprocè proportionales; ac proinde* AC×CB=DF×FE.



In secundo casu, *ubi* AC:DF::DE:AB, *dicuntur duæ rectæ* AB, DE *reciprocæ, seu reciprocè proportionales uni suarum partium; ac proinde* AC×AB=DF×DE.

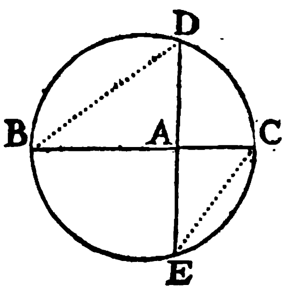
PROPOSITIO I.

THEOREMA.

Chordarum sectio in ratione reciproca.

556. *SI in eodem circulo duæ chordæ* BC:DE *se se mutuò secuerint in quovis puncto* A, *erunt earum segmenta reciprocè proportionalia, nimirum,* AB:AE::AD:AC; *ac proinde rectangulum comprehensum sub segmentis unius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.* Euclid. lib. 3. prop. 35.

Demonstratio. Ducantur chordæ BD, CE per extremitates earum, quæ se intersecant. Perspicuum est ex dictis triangula BAD, EAC esse æquiangula, & similia. Ergo AB:AE::AD:AC; & consequenter AB×AC=AE×AD. Quod erat &c.



Ce-

Corollarium I.

557. SI duarum chordarum una DE sit secta bifariam, ita ut AD=AE, analogia modò inventa AB:AE::AD:AC transformari per substitutionem poterit in hanc, AB:AD::AD:AC; & consequenter tres lineæ AB, AD, AC erunt continuè proportionales; & semissis AD chordæ DE sectæ in duas æquas partes, erit media proportionalis inter duo segmenta AB, AC alterius chordæ. Media proportionalis.

Corollarium II.

558. SI chorda BC per centrum circuli transeat, seceteque aliam DE perpendiculariter, hanc quoque secabit bifariam; & consequenter recta AD, quam jam nominavimus ordinatam circulo respectu diametri BC, cui est perpendicularis, erit media proportionalis inter duas ejusdem diametri partes AB, AC; atque adeo $AD \times AD$, sive $\overline{AD}^2 = AB \times AC$. Ordinata circulo.

Corollarium III.

559. PErspicuum hinc fit, lineam rectam, quæ in circulo a quovis puncto diametri, ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam usque, mediam esse proportionalem inter duo diametri segmenta, quæ a perpendiculari facta sunt.

PRO-

PROPOSITIO II.

THEOREMA.

Secantium sectio in ratione reciproca.

560. *SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque ducantur duæ secantes* AB, AE, *quæ a cava circuli peripheria terminentur in duobus punctis* B & E, *erunt*

I. Secantes integræ AB, AE *reciprocè proportionales suis partibus* AC, AD *circulo externis, nimirum*, AB:AE::AD:AC.

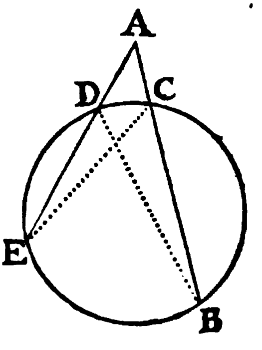
II. Rectangula comprehensa sub integris secantibus AB, AE, & *suis partibus exterioribus* AC, AD, *erunt inter se æqualia; hoc est*, AB×AC = AE×AD. Euclid. lib. 3. prop. 36. corol. 1.

Demonstratio. Ducantur chordæ BD, CE. Triangula ADB, ACE erunt æquiangula, & consequenter similia, propter angulum A utrique communem, & angulos E & B ad circumferentiam insistentes eidem arcui DC æquales. Ergo

I. AB:AE::AD:AC.

II. AB×AC = AE×AD.

Quod erat &c.



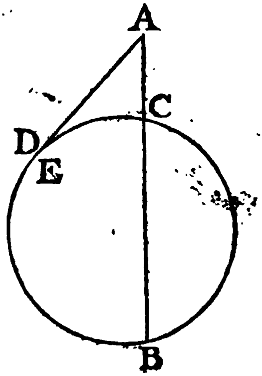
PRO-

PROPOSITIO III.

THEOREMA.

561. *SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera verò tangat: quod sub tota secante* AB, *&* *ejus parte exteriori* AC *comprehenditur, rectangulum, æquale erit ei, quod a tangente describitur, quadrato*. Euclid. lib. 3. prop. 36. Quadratum tangentis.

Demonstratio. Nam, si recta AE, quæ in præced. figura secans erat, evaderet tangens, duo puncta E & D commiscerentur in unicum, quod erit punctum contactus, & fiet $AE = AD$. Quare præcedens proportio $AB : AE :: AD : AC$ in hanc transformabitur, $AB : AD :: AD : AC$; ac proinde $\overline{AD}^2 = AB \times AC$. Quod erat &c.



Corollarium I.

562. HInc manifestum est, si a puncto quovis extra circulum assumpto plurimæ lineæ rectæ circulum secantes ducantur, rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus esse omnia inter se æqualia. Rectangula secantium.

Demonstratio sequitur ex Prop. 2., atque etiam

ex

ex Prop. 3. Nam ducta tangente circulum, erunt quadrato tangentis æqualia singula illa rectangula; quare & inter se omnia æqualia erunt.

Corollarium II.

Tangentes ab eodem puncto ductæ.

563. CONstat etiam duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter se esse æquales. Nam ducta secante, erunt per præced. quadrata tangentium æqualia eidem rectangulo, ac proinde æqualia inter se, & propterea tangentes æquales.

Corollarium III.

564. EX eodem Theoremate facilè demonstrabis ab eodem puncto extra circulum assumpto duci tantùm posse duas lineas, quæ circulum tangant. Similiter, si duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in convexam peripheriam incidant, & earum una circulum tangat, alteram quoque circulum tangere demonstrabis.

Scholion.

QUoniam ex Propositione I. facillimè consequitur demonstratio Theorematis in Trigonometriâ maximè necessarii, quodque operosiùs ex aliis principiis demonstrari solet, placet hoc loco illud subdere.

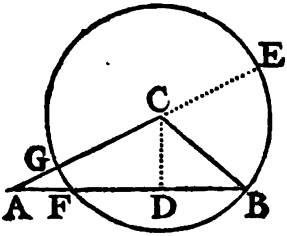
PRO-

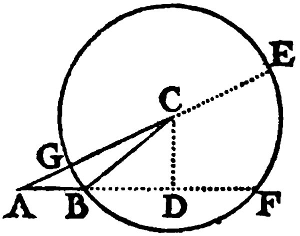
PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

565. *In omni triangulo rectilineo* ACB, *si a vertice* C *cujusvis anguli demittatur perpendicularis* CD *in basim, seu latus oppositum* AB, *productum, si opus fuerit, hæc proportio obtinebitur.*

Uti basis AB *est ad summam* AC+CB *duorum laterum, ita horum differentia* AC—CB *est ad differentiam* AD—DB (*fig.* 1.), *vel ad summam* AD+DB (*fig.* 2.) *duorum segmentorum basees.*





Demonstratio. Centro C, radio CB describatur circulus; producaturque AC, donec occurrat circumferentiæ. Ex n. 560. patet fore

$$AB : AE :: AG : AF.$$

Cum autem $CE = CB$, & $DF = DB$, erit

I. $AE = AC + CB$,

II. $AG = AC - CB$,

III. $AF = AD - BD$, ut in fig. 1.

vel $AF = AD + BD$, ut in fig. 2.

Substitutis itaque hisce valoribus in superiori analogia, erit $AB : AC + CB :: AC - CB : AD - BD$,

vel $AB : AC + CB :: AC - CB : AD + BD$.

Quod erat &c.

Quanti ſit uſus hoc Theorema, conſtabit in Trigonometria.

PROPOSITIO V.

PROBLEMA.

Media proportionalis.

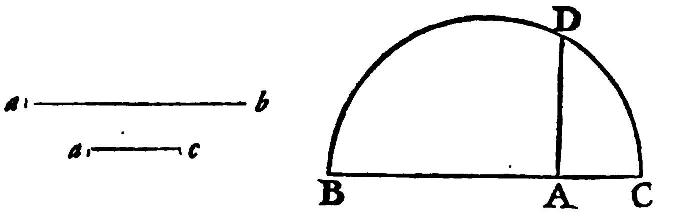
566. D*Uabus datis rectis lineis* ab, ac, *mediam proportionalem invenire*. Euclid. lib. *6.* prop. 13.

Media proportionalis quæſita eſſe poteſt vel ordinata, vel chorda, vel tangens circuli.

Ordinata.

I. Reſolvendi modus. Datæ rectæ *ab*, *ac*, quibus media invenienda eſt proportionalis, diſponantur in directum ſecundùm lineam unicam rectam BC, ſuper qua, tanquam diametro, deſcribatur ſemicirculus; deinde ex puncto A, in quo junguntur, perpendicularis educatur AD ad circumferentiam. Dico hanc eſſe mediam proportionalem inter AB & AC, hoc eſt, inter datas lineas *ab*, *ac*.

Demonſtratio patet ex Conſtruct. & n. 559.

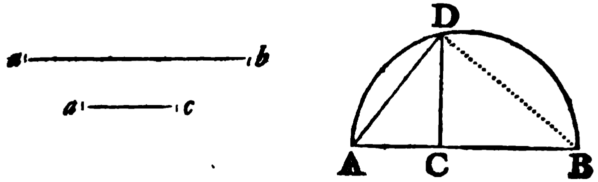


Chorda.

II. Reſolvendi modus. Super recta AB$=$*ab* deſcribatur ſemicirculus; tum abſcindatur AC$=$*ac*; & a puncto C excitetur perpendicularis CD, quæ circumferentiæ occurrat in D. Chorda DA eſt media

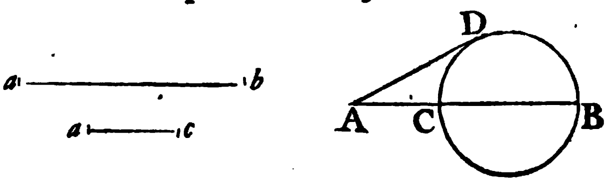
dia proportionalis quæſita inter AB & AC, hoc eſt, inter *ab* & *ac*.

Demonſtratio. Ducatur chorda DB. Triangula rectangula ADB, ACD ſunt æquiangula, & ſimilia. Ergo AB:AD::AD:AC. Quod erat &c.



III. Reſolvendi modus. Super eadem recta linea, initio facto a puncto A, accipiantur duæ partes AB, AC æquales datis lineis *ab*, *ac*; tum ſuper earum differentia BC deſcribatur circulus; ad quem, ſi a puncto A ducatur tangens AD, hæc erit media proportionalis inter AB & AC. Tangens.

Demonſtratio pendet ex n. 561.



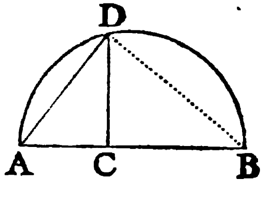
Corollarium.

567. HInc in omni triangulo rectangulo ADB, ſi ab angulo recto in baſim AB demittatur perpendicularis DC, erit Tres mediæ proportionales.

I. Perpendicularis DC media proportionalis inter baſeos ſegmenta AC, CB.

II. Latus minus AD medium proportionale inter basim AB, & segmentum adjacens AC.

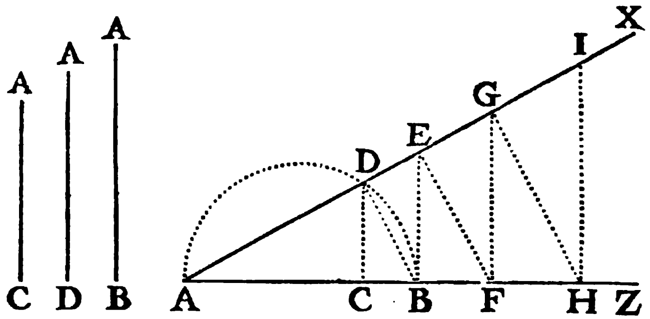
III. Latus majus DB medium proportionale inter basim AB, & segmentum adjacens BC.



PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

568. D*Atis tribus primis rectis* AC, AD, AB *progressionis geometricæ linearum, invenire reliquas in infinitum.*



Resolutio. Tres datæ lineæ continuè proportionales ita disponantur, ut prima sit AC, secunda efficiens angulum quemvis in A sit AD, tertia primæ superimposita sit AB. Producantur AD, AB indefinitè in X & Z; tum diametro AB describatur semicirculus; & a puncto C educatur perpendicudicularis CD occurrens circulo in D, a quo rursum excitetur perpendicularis DB, quæ occurret rectæ AZ in B, & hinc perpendicularis altera BE occurrens rectæ AX in E; atque ita porro per alternas vices. Dico fore

∺ AC.AD.AB.AE.AF.AG.AH &c.

Demonstratio. Per Constr. triangula ADB, ABE, AEF, AFG &c. sunt rectangula, & habent angulum communem in A, & consequenter æquiangula sunt, & similia, & eorum latera homologa proportionalia. Ergo

AC:AD::AD:AB

AD:AB::AB:AE

AB:AE::AE:AF &c.

Quod erat demonstrandum.

PRAXIS GEOMETRICA

ELEMENTI I. LIB. IV.

PROBLEMA I.

569. PARALLELOGRAMMO *æquale quadratum construere.*

Resolutio. Inveniatur media proportionalis inter basim, & altitudinem parallelogrammi; hæc erit latus quadrati quæsiti.

PROBLEMA II.

570. TRiangulo *æquale quadratum construere.*

Resolutio. Inveniatur media proportionalis inter basim, & semissem altitudinis, vel inter semissem baseos, & altitudinem; hæc erit latus quadrati quæsiti.

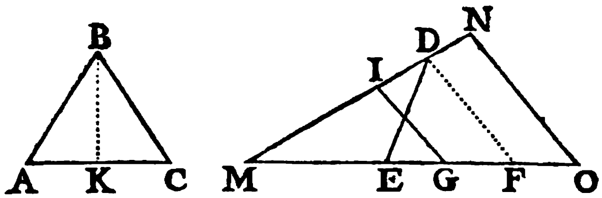
PROBLEMA III.

571. CUicunque *figuræ rectilineæ æquale quadratum construere.*

Resolutio. Cum omnis figura rectilinea reduci possit in triangulum, quod per Probl. præced. transformatur in quadratum; hinc patet resolutio Problematis.

PROBLEMA IV.

572. *Triangulum* ABC *in aliud transformare, quod sit simile dato triangulo* MNO.



Resolutio. Ex basi MO trianguli MNO assumatur pars ME æqualis basi AC trianguli ABC, quod transformandum proponitur; tum in latere MN trianguli MNO seligatur punctum D, cujus altitudo supra latus alterum MO æquetur altitudini BK alterius trianguli ABC; ducaturque DE. Constat ex dictis triangulum MDE æquale esse triangulo ABC; nam utriusque bases, & altitudines per Constr. æquantur.

Jam verò, si recta DE sit parallela rectæ NO, triangulum MDE erit & æquale triangulo ABC, & simile triangulo MNO, & consequenter satisfaciet problemati.

Sin autem DE non sit parallela rectæ NO, a puncto D ducatur DF parallela eidem lateri NO; tum fiat MG media proportionalis inter MF & ME; ac demum ducatur GI parallela lateri NO. Dico triangulum MIG & esse simile triangulo MNO, & æquale triangulo MDE, seu ABC.

Demonstratio. Quoniam rectæ DF, IG sunt paralellæ eidem NO, erunt inter se parallelæ; ac proinde

proinde triangula MDF, MIG sunt similia. Ergo (n. 499.) MDF : MIG :: $\overline{MF}^2 : \overline{MG}^2$. Rursum, quia per Constr. MF : MG :: MG : ME, erit $\overline{MF}^2 : \overline{MG}^2$ :: MF : ME. Atqui (n. 375.) MF : ME :: MDF : MDE. Ergo MDF : MIG :: MDF : MDE; & consequenter duo triangula MIG, MDE sunt æqualia. Quare, cum triangulum MIG sit simile triangulo MNO, & præterea æquale triangulo MDE = ABC, perspicuum est triangulum MIG satisfacere problemati.

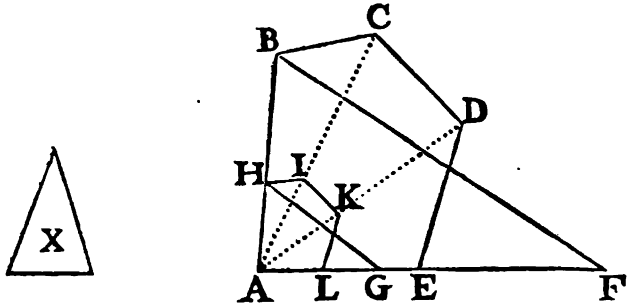
Corollarium.

573. CUm in superioribus Elementis demonstratum jam sit figuram quamlibet rectilineam reduci posse in triangulum, & per præced. Probl. triangulum quodvis transformetur in aliud simile triangulo dato: hine patet figuram quamvis rectilineam transformari posse in triangulum simile dato triangulo.

PRO-

PROBLEMA V.

574. *Datum triangulum X transformare in polygonum simile dato polygono* ABCDE.



Resolutio. Juxta methodum explicatam n. 320. polygonum ABCDE transformetur in triangulum ABF, quod & latus AB, & angulum BAF communem habeat cum eodem, quod quæritur, polygono; dein per præced. Probl. triangulum datum X transformetur in aliud triangulum AHG, simile triangulo ABF. Ductis insuper in polygono ABCDE diagonalibus AC, AD, a puncto H ducatur HI parallela lateri BC, & a puncto I parallela IK lateri CD, denique a puncto K parallela KL lateri DE. Patet (n. 447.) polygonum AHIKL simile esse polygono proposito ABCDE; Dico præterea æquari triangulo AHG = X.

Demonstratio. Cum enim duo polygona ABCDE, AHIKL sint similia, erit (n. 498.)

$$AHIKL : ABCDE :: \overline{AH}^2 : \overline{AB}^2.$$

Atqui triangula AHG, ABF, cum sint pariter similia, dabunt (n. 499.) $\overline{AH}^2 : \overline{AB}^2 :: AHG : ABF$.

Ergo $AHIKL : ABCDE :: AHG : ABF$.

Cum

Cum autem per Conſtr. ABCDE=ABF, erit etiam AHIKL=AHG=X. Quod erat &c.

Corollarium.

575. CUm omnes figuræ rectilineæ transformari poſſint in triangula, & triangulum quodvis in polygonum ſimile dato polygono: hinc patet figuram quamvis rectilineam converti poſſe in polygonum dato ſimile.

ELEMENTUM II.

De Lineis sectis extrema, & media ratione, ac de Pentagonis, & Decagonis regularibus.

DEFINITIO.

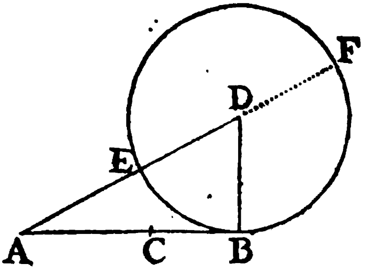
576. *SI linea recta quævis* AB *ita dividatur in* C *inæqualiter, ut sit, quemadmodum tota* AB *ad majus segmentum* AC, *ita* AC *majus segmentum ad* CB *minus segmentum, dicetur divisa secundùm extremam, & mediam rationem.*

Habet autem, inquit Clavius in Scholio prop. 30. lib. *6*., admiranda hæc sectio lineæ extremà, & media ratione insignes utilitates, proprietatesque, ut in Libris Stereometriæ manifestum erit, ut non sine causa a plerisque Geometris linea ita divisa divinam quodammodo dicatur habere proportionem.

PROPOSITIO I.

PROBLEMA.

577. **P***Ropositam rectam lineam* AB *extrema, ac media ratione secare*. Euclid. lib. *6*. prop. 30., & lib. 2. prop. 11.



Resolutio. Ab extremitate B rectæ AB excitetur perpendicularis BD æqualis semissi datæ rectæ AB; ducaturque DA; tum centro D, intervallo DB describatur circulus, qui rectam DA secabit in E. Fiat denique AC$=$AE: Dico rectam AB sectam esse extrema, & media ratione in C: hoc est, AB:AC::AC:CB.

Demonstratio. Producatur AD, donec occurrat circulo in F, erit (n. 561.) $AF \times AE = \overline{AB}^2$; atque hinc per regulas proportionum

$$AF:AB::AB:AE.$$

Cum autem per Constr. sit AE$=$AC, fiet

$$AF:AB::AB:AC.$$

In omni autem proportione geometrica ex dictis antecedens est ad suum consequens, uti differentia antecedentium est ad differentiam consequentium.

Quare

Quare AB:AC::AF—AB:AB—AC. Atqui AB—AC=CB; & AB=EF; adeoque AF—AB=AF—EF=AE=AC; ſubſtitutis itaque hiſce valoribus in ultima analogia, fiet AB:AC::AC:CB. Quod erat &c.

PROPOSITIO II.

THEOREMA.

578. *SI duorum angulorum quilibet* B *&* D *ad baſim trianguli iſoſcelis duplus ſit anguli* A *ad verticem, ſeceturque bifariam angulus* D *ad baſim per rectam* DC, *hæc ſecabit extremâ, & media ratione latus oppoſitum* AB; *nimirum, fiet*

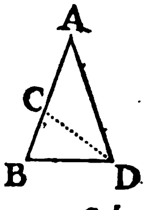
AB:AC::AC:CB.

Demonſtratio. Duo triangula BAD, BCD ſunt ſimilia, quippe quæ habent angulum communem B, & per Conſtr. angulus BDC=A. Quia verò latera AB, AD trianguli iſoſcelis BAD ſunt æqualia, erunt quoque æqualia latera DB, DC alterius trianguli ſimilis BDC. Rurſum, quia in eodem triangulo ACD anguli A & CDA per Conſtr. ſunt æquales, etiam latera DC, AC iis oppoſita æqualia erunt. Itaque DB=DC=AC.

Jam verò propter ſimilitudinem triangulorum BAD, BDC, erit

AB:DB::DB:CB;

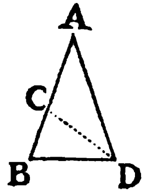
Subſtitutàque AC loco ipſius BD, erit denique AB:AC::AC:CB. Quod erat &c.



Scho-

Scholion.

IN hujus autem Theorematis demonstratione animadvertere juvat basim BD *trianguli isoscelis* BAD, *cujus anguli ad basim dupli sunt anguli ad verticem, æquari majori segmento* AC *lateris* AB *secti media, & extrema ratione per rectam* DC, *quæ bifariam dividit angulum ad basim.*



PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

579. *ISosceles triangulum* ABD *construere, quod habeat utrumque eorum, qui ad basim sunt, angulorum, duplum reliqui ad verticem.* Euclid. lib. 4. prop. 10.

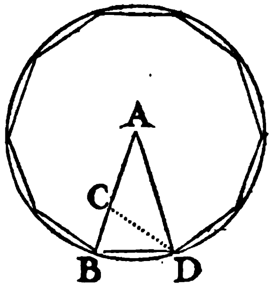
Resolutio. Dividatur recta AB extremà, & media ratione in C; tum super minori segmento BC, tanquam basi, construatur triangulum isosceles ope duarum sectionum circulorum æqualium sub eodem intervallo segmenti majoris AC; jungaturque AD. Dico factum.

Demonstratio. Nam externus angulus BCD duplus est interni A; & per Constr. BCD$=$CBD. Rursum, quia per hyp. AB:AC::AC:CB, hoc est, per Constructionem AB:BD::BD:CB, duo triangula BAD, BCD circa angulum communem B habebunt latera proportionalia, & consequenter similia erunt, & æquiangula. Ergo angulus BDA æqualis erit angulo BCD$=$B. Triangulum

gulum itaque BAD & isosceles est &c. Quod erat &c.

Corollarium.

580. SI a puncto A, intervallo AB, vel AD ejusdem trianguli isoscelis describatur circulus, basis BD erit latus decagoni circulo inscripti. Nam propter naturam hujusmodi trianguli isoscelis BAD, utervis angulorum B & D ad basim valet duas quintas duorum rectorum, hoc est, gradus 72; & consequenter angulus A erit una quinta duorum rectorum, hoc est, graduum 36. Quare angulus A erit angulus ad centrum decagoni regularis circulo inscripti. Nam, si 360 dividatur per 10, prodibit 36.



PROPOSITIO IV.

PROBLEMA.

581. D*Ecagonum regulare circulo inscribere.*
Resolutio. Radius AB secetur extrema, & media ratione in C. Segmentum majus AC erit latus decagoni circulo inscripti.
Demonstratio constat ex Corol. præced.

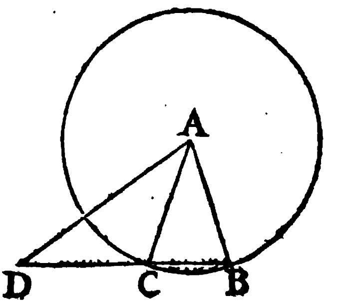
PROPOSITIO V.

THEOREMA.

582. *SI recta linea componatur ex latere hexagoni, & latere decagoni inscripti in eodem circulo, tota composita dividetur extrema, & media ratione in eo puncto, in quo duæ rectæ se mutuò jungunt.*

Esto CB latus decagoni inscripti circulo A; jungaturque in directum linea CD æqualis radio AC, hoc est, lateri hexagoni. Dico totam compositam BD sectam fore extrema, & media ratione in puncto C.

Demonstratio. Jungatur DA. Triangula BDA, BAC sunt inter se similia; habent quippe angulum communem in B, & præterea angulum BDA æqualem angulo CAB; nam & propter triangulum isosceles CDA, angulus externus BCA est duplus interni BDA, & per n. 580. idem angulus BCA est duplus anguli CAB; ergo BDA =CAB. Quare DB: BA::BA:BC; & substituendo CD loco ipsius AB, fiet DB : CD :: CD : BC. Quod erat &c.



PRO-

PROPOSITIO VI.

THEOREMA.

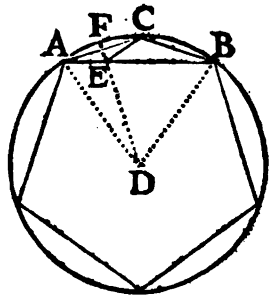
583. *Quadratum ex latere pentagoni inscripti circulo æquatur summæ quadratorum ex latere hexagoni, & ex latere decagoni inscripti eidem circulo.*

Esto AB latus pentagoni inscripti circulo; seceturque bifariam in puncto C arcus AB. Chorda AC, sive CB erit latus decagoni, & radius DB latus hexagoni. Dico $\overline{AB}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{AC}^2$.

Demonstratio. Arcus AC secetur bifariam in F per radium DF; ducaturque EC. Triangulum AEC, cum sit isosceles, simile erit triangulo ACB; nam angulus CAB ad basim utrique communis est. Ergo AB:AC::AC:AE; ac proinde $\overline{AC}^2 = AB \times AE$.

Jam verò angulus ad centrum ADB pentagoni est 72 graduum; ergo angulorum quilibet ABD & BAD erit graduum 54; qui gradus sunt tres quartæ partes anguli ad centrum.

Cum autem angulus FDB habeat pro mensura arcum FB, continebit quoque tres quartas partes ejusdem anguli ad centrum ADB; ergo duo triangula ADB, DEB sunt similia; hinc AB:BD::BD:BE; adeoque $\overline{DB}^2 = AB \times BE$. Atqui $AB \times AE + AB \times BE = \overline{AB}^2$. Ergo $\overline{AB}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{AC}^2$. Quod erat &c.



PROPOSITIO VII.

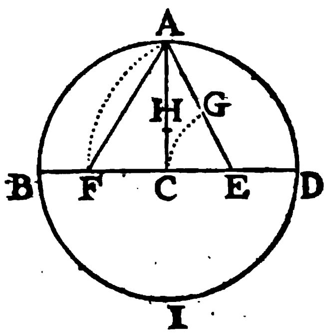
PROBLEMA.

584. *In triangulo rectangulo* ACF *exhibere tria latera* AC, CF, AF *hexagoni, decagoni, & pentagoni regularis, quae eidem circulo inscribi possint.*

Resolutio. Radius AC sit perpendicularis diametro BD; seceturque radius CD bifariam in E, a quo, tanquam centro, intervallo EA describatur arcus AF; ducaturque chorda AF. Dico factum.

Demonstratio. I. Ostensum jam est radium AC esse latus hexagoni regularis eidem circulo inscripti. Quod erat primum.

II. Quoniam $CE = \frac{CD}{2} = \frac{AC}{2}$, si fiat EG $= CE$, erit hypotenusae residuum AG (n. 577.) aequale majori segmento AH radii AC secti extrema, & media ratione in H. Ergo latus decagoni regularis, quod inscribi possit circulo ABID aequatur ipsi AG; cum autem $CE = EG$, si fiat $EF = AE$, erit $CF = AG$; & consequenter CF erit latus decagoni eidem circulo inscripti. Quod erat alterum.



III. In triangulo rectangulo ACF quadratum hypotenusae AF aequatur summae quadratorum ex latere AC hexagoni, & ex latere FC decagoni.

Ergo

Ergo per præced. hypotenusa AF est latus pentagoni regularis eidem circulo inscripti. Quod erat reliquum.

APPENDIX.

De mirabili natura lineæ cujusdam inflexæ, quam Quadratricem Dinostratis vocant, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium inscribitur, & circulus quadratur, & alia scitu jucundissima perficiuntur.

585. DOcuimus alibi nondum repertam fuisse artem, qua solo circino, & regulà inscribantur circulo figuræ ordinatæ laterum 7, 9, 11, 13, 17 &c.; cum illa inscriptio figurarum dependeat a divisione circumferentiæ in partes datas, quæ etiamnum desideratur. Licebit tamen ope lineæ cujusdam inflexæ, quam quadratricem Dinostratis vocant, angulos, & circumferentias circulorum dividere in quotlibet partes æquales.

PROPOSITIO VIII.

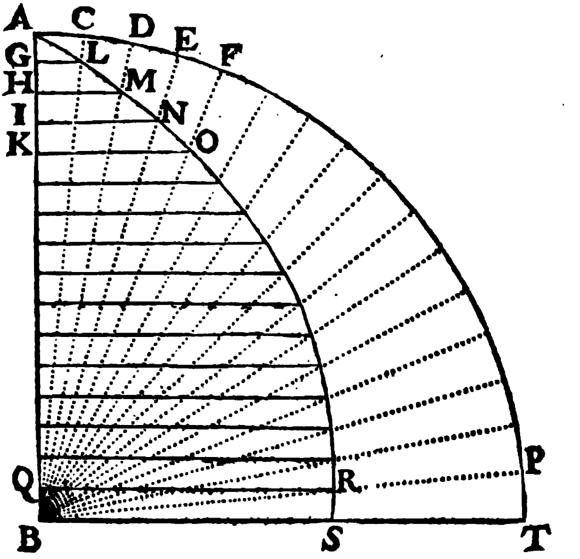
PROBLEMA.

586. *QUadratricem describere.*

Resolutio. Describatur quadrans circuli

culi ABT; arcus AT, & diameter AB dividantur in totidem partes æquales; quod facilè obtinebitur, si & arcus AT, & diameter AB secetur primùm bifariam, deinde utraque semissis iterum bifariam, atque ita deinceps, quantùm libuerit. Quò autem plures extiterint divisiones, eò accurratius quadratrix linea describetur. Nos ad confusionem vitandam secuimus tam arcum AT, quàm radium AB in 16 partes æquales.

Deinde ex centro B ad singula divisionum puncta quadrantis AT ducantur radii BC, BD, BE, BF &c., & per puncta G, H, I, K totidem parallelæ semidiametro BT, quæ occurrent radiis in punctis L, M, N, O &c., per quæ quadratrix linea AS ducenda est, quæ exactior evadet, si quadrans circuli, & semidiameter dividan-



tur

tur in multò majorem numerum partium æqualium. Hac enim ratione fiet, ut puncta L, M, N, O &c. ita proximè ad se se invicem accedant, ut sine errore sensibili per eadem puncta linea æquabiliter sinuosa progrediatur.

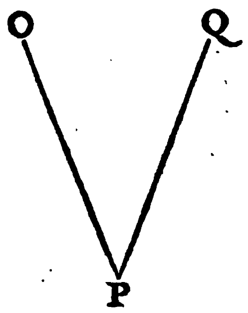
Corollarium.

587. EX genesi hujus curvæ patet, quòd, si ducantur parallelæ HM & KO, occurrentes curvæ in punctis M & O, per quæ ducantur radii BD & BF, patet, inquam, quod arcus AD ad arcum DF habebit eamdem rationem, quam habet linea AH ad lineam HK.

PROPOSITIO IX.

PROBLEMA.

588. A*Ngulum rectilineum* OPQ *trifariam dividere.*

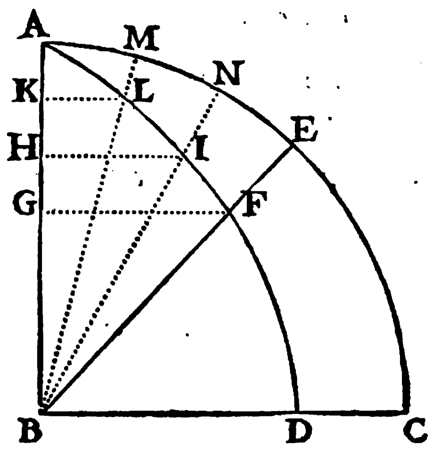


Resolutio. Esto quadratrix AD, & circuli quadrans AC. Fiat angulus ABE æqualis dato; & a puncto F, ubi radius BE secat curvam AD, demittatur perpendicularis FG ad semidiametrum AB, cujus segmentum AG dividatur in tres partes æquales in punctis K & H, a quibus ducantur KL, HI parallelæ ipsi FG; quæ secent curvam in punctis L & I, per quæ a centro B transeant radii BLM, BIN, qui divident arcum AE, & angulum ABE in tres partes æquales.

Demonstratio. Nam per constructionem curvæ AK:AG::AM:AE; est autem AK tertia pars ipsius AG; erit itaque arcus AM tertia pars arcus AE. Quod erat &c.

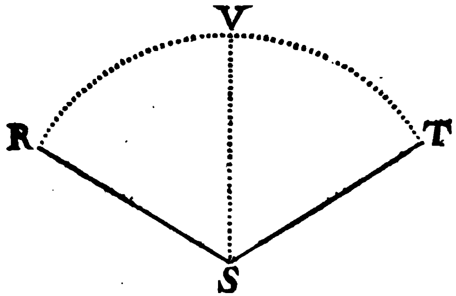
Eadem methodo angulus datus dividi poterit in quotvis partes æquales.

Sin autem trifariam dividendus proponatur



an-

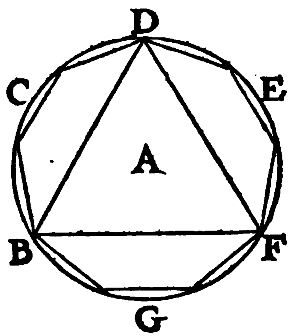
angulus obtusus RST, secetur primò bifariam, ut habeatur acutus RSV, quem supponere liceat æqualem angulo ABE; tum, ut ante, dividatur acutus trifariam in M & N; sumaturque arcus AN, qui, cum sit duplus sextæ partis arcus RT, erit consequenter tertia pars ejusdem arcus RT.



PROPOSITIO X.
PROBLEMA.

589. *Irculo nonagonum, hoc est, figuram novem laterum regularem inscribere.*

Resolutio. Radius circuli sexies circumducatur peripheriæ, ut habeantur puncta B, C, D, E, F, G, quæ eamdem divident in sex partes æquales. Jam verò a primo puncto ad tertium, a tertio ad quintum, a quinto ad primum ducantur rectæ, quæ triangulum æquilaterum dabunt BDF, quod totam circumferentiam dividet in tres partes æquales; denique per Probl. præced. arcus quilibet trifariam secetur, & habebitur nona pars circumferentiæ, cujus chorda erit latus nonagoni.



PRO-

ELEMENTA
GEOMETRIÆ
THEORICÆ ET PRACTICÆ,

AUCTORE
ANTONIO LECCHIO
E SOCIETATE JESU,
IN UNIVERSITATE BRAYDENSI
MATHESEOS PROFESSORE.

TOMUS II.

MEDIOLANI MDCCLIV.
EX TYPOGRAPHIA BIBLIOTHECÆ AMBROSIANÆ
APUD JOSEPH MARELLUM
SUPERIORUM FACULTATE AC PRIVILEGIO.

LECTORI.

DUo sunt, quæ Tironi impeditam faciunt, ac minus accommodam Geometriam Solidorum: alterum est, Solidorum in plana superficie descriptio, quæ res phantasiam plane subactam postulat, & exercitatam: alterum, prolixitas demonstrationum, præsertim in methodo antiqua. Nam, quod ad primum attinet, quanti laboris est in tanto linearum procursu, in suo quamque positu rite repræsentare? atque has e plano ipso, ac typo veluti prodeuntes sibi fingere, illas in recessu & e longinquo, alias ad normam insistentes, plerasque obliqua positione; tum planorum pariter occurrentium intersectiones, parallelismum, ac solidorum angulorum cujusque modi flexiones varias in eadem plana superficie imaginari? Operosius est Tironi interdum corporis magnitudinem, figuram, & situm concipere animo, quam theorematis ipsius naturam, vimque demonstrationis, ordinemque complecti.

Ut hac molestia Tirones levarem, multum operæ in figuris quam aptissime delineandis consumpsi, quæque describi oporteret, deligendis. Ac primo, quæ in corporum sectionibus subnascuntur proprietates variæ, non unico iconismo complexus sum omnes. Singulis

lis sectionum modis singuli typi respondent, ut figuram minus impeditam haberemus uni rei servientem; tum vero ipsas sectionum facies curavi, ut in planum traducerentur, & aliæ aliis opem ferrent, & legentium imaginationem dirigerent. Quid quod, simul ac Tironi collibitum est, præsto est typus Propositioni cuivis subjectus; neque modo huc, modo illuc contorquenda est oculorum acies, quod Tironi solet esse molestissimum; sed ad legentem veniunt figuræ etiam non vocatæ. Parva quidem res in speciem, & exilis, sed ad usum magna, ac prope necessaria, præsertim in Geometria Solidorum.

Quod vero ad methodum attinet, eam mihi tenendam censui, quam superioribus Libris; & insigniora Geometriæ practicæ problemata cum Theoria conjunxi. Nam properanti ad Geometriam hæc tanquam diversoria capienda tibi sunt, commorandumque modo in hac, modo in illa Geometriæ practicæ parte, qua se cunque dederit occasio, quoad expediet, ut locorum situm non tanquam civis, & incola, sed ut cupidus viator inspexisse videare. Antiquam etiam Geometrarum methodum, quam exhaustionum appellant, longioremque, quo utebantur, ambitum indirectæ demonstrationis per reductionem ad absurdum, penitus inflexi ad Recentiorum expeditam, directamque

que

que demonſtrandi methodum; ſive indiviſibilium eam voces, ſive evaneſcentium, aut infinite parvorum. Ac ne qua forte ſuboriri poſſet dubitatio de firmitate principiorum, quorum alia ab Antiquis adhibita fuere, alia a Recentioribus invecta, diſſertationem adjeci in calce operis, *de Methodo Geometrica*, quam quidem Tironibus cupio eſſe notiſſimam: in qua & plura illuſtrium Mathematicorum principia attuli ſane inter ſe diverſa, ſingulorum commodis, atque incommodis adnotatis; & unam quaſi ex omnibus conflatam argumentandi rationem inſtitui, quæ mihi & commodiſſima, & minime omnium periculoſa eſſe viſa eſt. Nam in diſciplinis, & artibus omnibus, per quas gradimur, tendimuſque ad naturæ cognitionem, ipſa artium principia, & fundamenta cognoſcenda ſunt, capitaque illa rerum, e quibus omnis poſtea ad ſingulas tractandas, & demonſtrandas res, argumentatio ducitur, percipienda penitus, & probe tenenda. Illa etiam me cura coquebat, quod in tanta principiorum varietate propius nihil eſſe factum videbam, quam ut labefactarentur fundamenta ſcientiæ omnium firmiſſimæ.

Illud tamen ſibi perſuadeat Tiro velim, laborem quidem ipſi imminutum iri hac noſtra qualicumque opera, non penitus ſublatum; quod nullus Scriptorum mehercule aut

præ-

præſtitit hactenus, aut præſtare in poſterum poteſt. Habet enim Geometria Solidorum, non ſingularem quidem, ac propriam difficultatem, præſertim in noſtra methodo; ſed totius Geometriæ planæ comprehenſionem uſque adeo ad ſingula theoremata pervagatam, & fuſam, ut quicunque ab hujus elementis probe inſtructus non acceſſerit, vix poſſit in Solidorum natura inveſtiganda cum fructu verſari; quæ res non mediocrem in prima elementaria inſtitutione exercitationem, uſumque deſiderat.

Veruntamen, ſicut in omnibus artibus, ita & in Geometria, hoc primum, hoc poſtremum eſſe monitum Tironi volo, ut multo ante ingenium quiſque ſuum exploret, quo una ſpes omnis vertitur. Eſt enim quatenus Scriptorum induſtriæ dari locus poſſit: at præclaram illam perfecti Geometræ laudem nemo aſſequetur unquam, cui ingenium ad res geometricas plane factum natura non dederit. Quemadmodum eorum oculi, quibus a natura vegeti, & perſpicaces ſunt traditi, facili, lenique converſu in quamcunque ſe dederint partem, celeriter omnia, & ſine labore, quæ volunt, contuentur; ſic mens bene inſtructa, & ſubornata a natura ad omnia comprehendenda perſpicax erit, in quæ intenderit, quæque parvo ductu, exiguaque monſtratione Scriptor aperuerit.

GEOMETRIA ELEMENTARIS THEORICO-PRACTICA SOLIDORUM.

AGGREDIMUR eam partem Geometriæ, quæ corpora, ſive ſolida conſiderat, proprioque vocabulo Stereometria eſt appellata. Solidum autem, ſive corpus, nempe tertium genus quantitatis, illud dicitur, quod longitudinem, latitudinem, & craſſitudinem, ſive profunditatem habet. Cùm autem ſolidi geneſis Lib. 1. Geom. planæ deſcripta, ea ſit, ut concipiamus ſuperficiem aliquam elevari, ſive in tranſverſum moveri, & ſic deſcribi veſtigium quoddam longum, latum, atque profundum, vel imaginemur ſolidum corpus tanquam compoſitum ex infinitis numero planis invicem ſuperimpoſitis: hinc, ut rectè, & ordine procedamus, conſultiſſimùm erit, horum Elementorum exordia capere ex vario planorum inter se, & cum lineis rectis occursu, in quo jaciuntur fundamenta, quibus solidorum, hoc est, corporum doctrina universa nititur.

Quotquot autem Geometriam elementarem tradiderunt, omissis ferè, & posthabitis solidorum elementis, eamdem mancam admodum, atque imperfectam tradidisse censendi sunt. Quotus enim quisque est, qui Matheseos partes plerasque sine solidorum scientia aggredi possit? Nam & Trigonometria sphærica, & pars magna Geometriæ practicæ, Staticæ, atque Geographiæ hisce principiis innituntur, & quæ occurrunt paullo difficiliora in Gnomonica, Sectionibus conicis, Astronomia, Perspectiva, atque Optica universa, intellectis rite solidorum principiis faciliora redduntur.

ELEMENTUM I.

De vario Planorum inter se, & cum lineis rectis occursu.

AXIOMA I.

1. *SI a quovis puncto cujusdam plani ducatur recta linea, hæc, vel cum eodem plano tota congruet, vel ab ipso tota recedet.*

Patet ex genesi rectæ lineæ, & planæ superficiei tradita Lib. I. Geom. planæ n. 20. & 21.

Corollarium I.

2. BIna rectæ lineæ puncta cum eodem plano congruere non possunt, quin tota congruat.

Corollarium II.

3. EJusdem rectæ lineæ pars una nequit esse in subjecto plano, & altera extra ipsum. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 1.

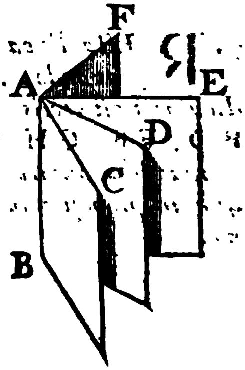
Corollarium III.

4. SI duo plana se mutuò secent, communis eorum intersectio est linea recta. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 3.

Nam, si bina quævis sectionis communis puncta connectantur lineà rectà, hæc jacebit in utroque plano (n. 2.).

AXIOMA II.

5. PEr quamvis rectam lineam AB infinita numero plana duci possunt.



Ab extremitate A rectæ AB duci intelligantur infinitæ numero rectæ AC, AD, AE &c. Jam verò, si recta AB motu sibi semper parallelo moveatur juxta varias harum rectarum directiones AC, AD, AE &c., totidem plana generabit, quæ per eamdem rectam AB transibunt.

AXIOMA III.

6. OMne triangulum in uno est plano, Et duæ rectæ se mutuò secantes, in eodem plano sunt. Euclid. lib. 11. prop. 2.

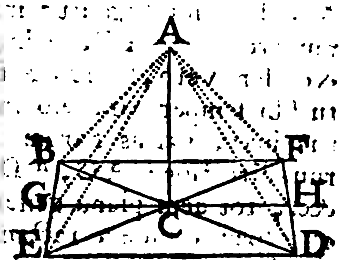
Instar axiomatis assumi potest, cùm triangulum nihil sit aliud, quàm plana superficies tribus rectis comprehensa. Ex quo etiam patet pars altera.

De

De Rectis perpendiculariter plano occurrentibus.

DEFINITIO.

7. *Recta linea* AC *plano perpendicularis dicitur, quando perpendicularis est rectis omnibus* BD, EF, GH *&c., a quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano.* Perpendicularis plano.



Corollarium I.

8. Hinc a puncto A in sublimi extra planum unica perpendicularis AC ad idem planum duci potest. Nam ab eodem puncto A ad eamdem rectam, puta, BD, perpendicularis unica duci potest. Plano perpendicularis unica ab eodem puncto.

Corollarium II.

9. Ergo etiam ab eodem puncto C ejusdem plani unica perpendicularis CA excitari potest. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 13.

PROPOSITIO I.

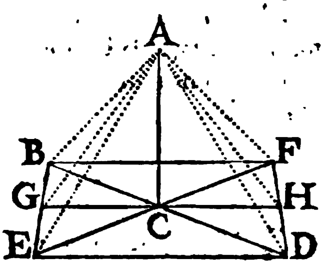
THEOREMA.

10. *Si recta quæpiam* AC *sit perpendicularis binis rectis* BD, EF, *quæ in eodem plano se intersecant in ipsius rectæ termino* C, *erit eadem* AC

pariter perpendicularis cuilibet alteri rectæ GH, *quæ per eumdem terminum* G *ducatur in eodem plano.*

Demonstratio. Fiat CE=CD=CB=CF; ductisque rectis BE, FD, triangula BCE, FCD erunt similia, & æqualia; adeoque BE=FD; & angulus CEG=CFH. Atqui angulus ECG =FCH opposito ad verticem, & CE=CF per Constructionem. Ergo triangula ECG, FCH sunt perfectè æqualia; & consequenter CG=CH, & GE=FH.

Dein a puncto A ducantur rectæ AE, AF, AB, AD. Omnes istiusmodi rectæ erunt æquales inter se, quippe quæ æqualiter distant à perpendiculari AC. Quia verò BE=FD, triangula EAB, FAD sunt perfectè æqualia. Erit ergo angulus AEG=AFH. Et quoniam GE=FH, & AE =AF, triangula EAG, FAH erunt pariter perfectè æqualia. Ergo AG=AH. Sed ostensum jam est CG=CH. Ergo recta AC habet duo puncta A & C, quorum singula æquidistant à duobus terminis rectæ GH; & consequenter recta AC est perpendicularis ipsi GH (n. 54. lib. 1. Geom. planæ). Quod erat &c.



Corollarium I.

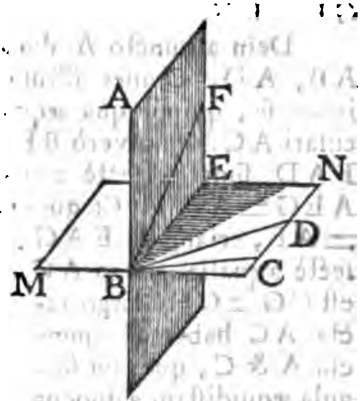
11. ERgo recta AC perpendicularis binis rectis BD, EF in quodam plano ductis per ejus concursum cum ipso plano, erit perpendicularis & reliquis omnibus, & ipsi plano. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 4.

Co-

Corollarium II.

12. Si duæ rectæ BC, BD perpendiculares sint ad idem punctum B cujusdam rectæ AB, quævis alia recta, puta, BF per idem punctum B ducta, quæ non sit in plano MN perpendicularium BC, BD, non erit perpendicularis eidem rectæ AB.

Nam ducto plano per ABF ad occursum plani MN, recta BE communis intersectio, erit perpendicularis ipsi AB (n. 10.). Atqui BE & BF in eodem plano ABF positæ, ambæ non possunt esse perpendiculares eidem AB ad idem punctum B (n. 50. lib. 1. Geom. planæ). Ergò BF non erit perpendicularis rectæ AB.



Corollarium III.

13. Ergo, si tres rectæ BC, BD, BE eidem rectæ AB ad idem punctum B sint perpendiculares, tres illæ erunt in uno plano. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 5.

Nam, si earum quævis, puta, BE esset extra planum reliquarum, eadem non esset perpendicularis rectæ AB (n. 12.), contra hypothesim.

AXIOMA IV.

14. E *Binis rectis parallelis, si una sit perpendicularis plano cuipiam, erit & altera.* Euclid. lib. 11. prop. 8.

AXIOMA V.

15. L*ineæ rectæ, quæ eidem plano sunt perpendiculares, inter se sunt parallelæ.* Euclid. lib. 11. prop. 6.

Scholion.

J*Ure monet P. Tacquet in suis elementis duas hasce Euclidis propositiones postulari posse, tanquam per se immediatè notas.*

PROPOSITIO II.

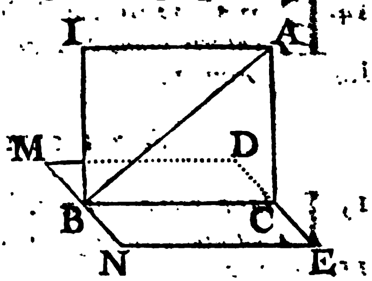
PROBLEMA.

16. D*ato puncto* A *in sublimi, ad subjectum planum* ME *perpendicularem* AC *ducere.* Euclid. lib. 11. prop. 11.

Resolutio. Ducta quavis recta MN in plano dato ME, ducatur ex A perpendicularis AB in eamdem MN; tum in eodem plano dato ducatur recta BC ipsi MN perpendicularis; in quam ex A demittatur rursum perpendicularis AC. Hæc erit perpendicularis dato plano ME.

Demonstratio. Nam, cùm recta MN per Constr. perpendicularis sit binis rectis BA, BC, erit eadem

eadem (n. 11.) perpendicularis plano per ipsas ducto AIBC. Quare, si ducatur recta DCE parallela ipsi MBN, erit & ipsa DE perpendicularis eidem plano AIBC (n. 14.), ac proinde etiam perpendicularis rectæ AC (n. 7.). Cùmque ipsa AC sit etiam perpendicularis rectæ CB per Constr., erit eadem AC perpendicularis toti plano MNED (n. 11.). Quod erat &c.



PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

17. D*Ato plano* ME, *a puncto* B, *quod in illo datum est, perpendicularem* BI *excitare*. Euclid. lib. 11. prop. 12.

Resolutio. Assumatur punctum quodcunque A extra planum ME, & ducatur perpendicularis AC in subjectum planum, per præced.; tum in plano BCAI ex B ducatur recta BI parallela rectæ CA. Dico rectam BI fore perpendicularem quæsitam.

Demonstratio patet ex Axiomate 4. n. 14.

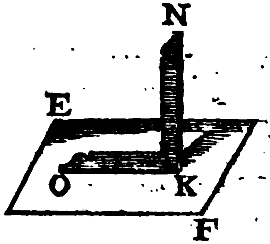
Corollarium.

LIneæ ab eodem puncto ductæ, nequeunt ambæ ad idem planum esse perpendiculares. Nam (n. 15.) forent parallelæ, quod fieri non potest.

Scho-

Scholion.

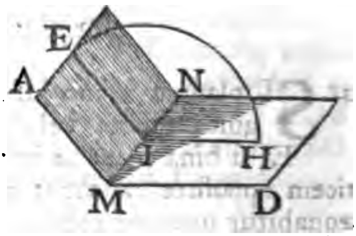
MEchanicè per datum punctum K in plano dato EF perpendicularis ducitur eidem plano, si norma OKN angulo suo recto K ad datum punctum applicetur, ita ut super plano dato latus OK circa latus alterum immobile KN circumrotari possit. Recta enim secundùm KN ducta, erit ad planum datum ex dato puncto K erecta perpendicularis.



De occursu Planorum inter se.

DEFINITIO II.

Angulus planus, 18. BInorum planorum AN, ND, se in quadam recta intersecantium aperturam, seu divaricationem voco Angulum planum.

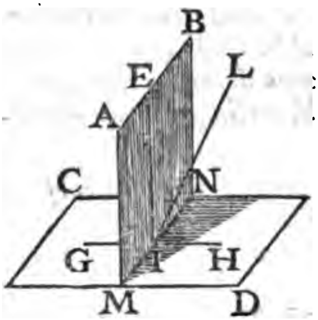


Corollarium.

Ejusque mensura. 19. SI in binis planis AN, ND, e quovis puncto I mutuæ intersectionis MN ducantur binæ rectæ EI, HI perpendiculares ipsi intersectioni, ni, angulus rectilineus EIH erit mensura inclinationis planorum. Nam arcus EH & est mensura anguli rectilinei EIH, & proportionalis est divaricationi horum planorum, & consequenter considerari debet tanquam mensura anguli plani.

DEFINITIO III.

20. *Planum* AN *perpendiculare dicitur plano* CD, *quando eidem insistens in neutram partem inclinat: hoc est, cum plano* CD *duos angulos efficit* AND, BMC *hinc atque inde æquales.* Planum alteri perpendiculare.



Corollarium I.

21. SI planum plano insistat, vel duos rectos angulos efficit, vel duobus rectis æquales.

Et si bina plana se intersecent, angulos ad verticem oppositos habebunt æquales, quorum summa æquabitur quatuor rectis.

Scholion.

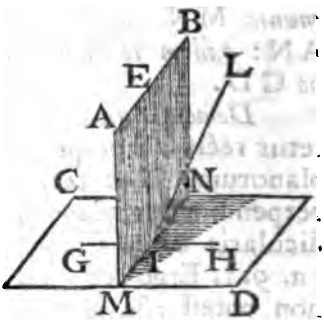
QUæ de lineis rectis circa unum punctum se intersecantibus demonstrantur angulorum affectiones, facilè per te ipsum traduces ad communem planorum intersectionem.

Co-

Corollarium II.

22. PLanum AN transiens per rectam EI alteri plano CD perpendicularem, est ipsi quoque perpendiculare. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 18.

Nam, si a termino I rectæ EI ducatur GIH perpendicularis sectioni communi MN planorum, anguli rectilinei EIH, EIG erunt recti, & inter se æquales. Ergo etiam (n. 19.) anguli plani erunt recti, & inter se æquales; ac proinde planum AN perpendiculare erit plano CD (n. 20.).



PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

23. SI *bina plana* AN, CD *sibi invicem perpendicularia fuerint, ac præterea in plano* AN *ducatur* EI *perpendicularis communi sectioni* MN *duorum planorum: eadem recta* EI *perpendicularis erit plano* CD.

Demonstratio. Per punctum I in plano CD ducatur recta GIH perpendicularis sectioni MN. Angulus rectilineus EIH est mensura inclinationis planorum (n. 19.). Atqui per hyp. angulus planus est rectus. Ergo rectilineus EIH rectus erit; & consequenter EI perpendicularis duabus rectis MN, GH, & ipsi plano CD (n. 11.). Quod erat &c.

PRO-

PROPOSITIO V.

THEOREMA.

24. *SI bina plana* AN, CD *sibi invicem perpendicularia fuerint, & a puncto* I *sectionis communis* MN *ducatur recta* IL, *quæ non sit in plano* AN: *eadem recta* IL *non erit perpendicularis plano* CD.

Demonstratio. In plano AN a puncto I excitetur recta IE perpendicularis sectioni MN duorum planorum. Hæc recta IE per præced. erit pariter perpendicularis plano CD. Atqui a puncto I perpendicularis unica IE ad planum CD excitari potest (n. *9*.). Ergo recta IL, quæ non est in plano AN, non potest esse perpendicularis eidem plano CD. Quod erat &c.

Corollarium I.

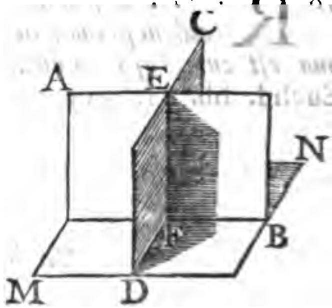
25. SI bina plana AN, CD sibi invicem perpendicularia fuerint, recta EI uni ex iis, nempe plano CD perpendicularis per intersectionem MN ducta, jacebit in altero.

Co-

Corollarium II.

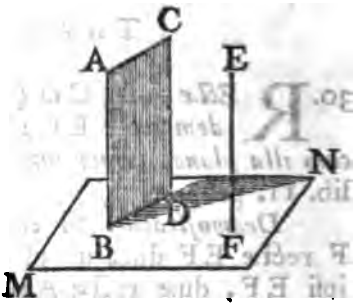
26. DUorum planorum A B, C D eidem plano M N perpendicularium interſectio E F eſt ipſi plano M N perpendicularis. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 19.

Nam recta E F ipſi plano perpendicularis, educta ex puncto F, in quo ſe interſecant illa duo plana, debet jacere in utroque ex ipſis (n. 24.), ac proinde congruere cum eorum communi interſectione.



Corollarium III.

27. ERgo duæ perpendiculares A B, C D eidem plano M N, ſunt in eodem plano. Nam junctis extremitatibus B & D, per rectam B D, ſuper M N excitetur planum perpendiculare A D, quod ſecet M N in recta B D: duæ perpendiculares A B, C D erunt in eodem plano A D, quod perpendiculariter inſiſtit plano M N (n. 24. & 25.).

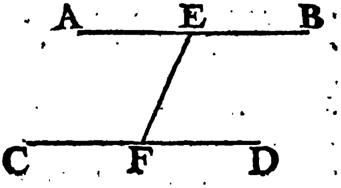


De

De occursu Rectarum parallelarum in planam superficiem.

AXIOMA VI.

28. Recta EF *secans rectas* AB, CD *positas in eodem plano, in uno est cum ipsis plano.* Euclid. lib. 11. prop. 7.



Corollarium.

29. Hinc, si recta EF secet parallelas AB, CD, in eodem erit cum ipsis plano. Omnes enim parallelæ sunt in uno plano.

PROPOSITIO VI.

THEOREMA.

30. Rectæ AB, CD (Fig. n. 27.), *quæ sunt eidem rectæ* EF *parallelæ, licet non in eodem cum illa plano, etiam inter se sunt parallelæ.* Euclid. lib. 11. prop. 9.

Demonstratio. Si enim per quodvis punctum F rectæ EF ducatur planum MN perpendiculare ipsi EF, duæ rectæ AB, CD, per hyp. parallelæ eidem EF, erunt pariter perpendiculares plano MN (n. 14.), & consequenter parallelæ inter se (n. 15.). Quod erat &c.

PRO-

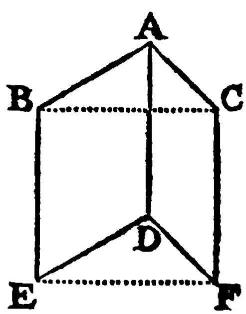
PROPOSITIO VII.

THEOREMA.

31. *SI duæ rectæ* AB, AC, *quæ angulum* BAC *comprehendant, fuerint parallelæ duabus rectis* DE, DF, *quæ angulum* EDF *efficiant, erunt anguli* BAC, EDF *invicem æquales, licet non sint in eodem plano*. Euclid. lib. 11. prop. 10.

Demonstratio. Fiat AB=DE, & AC=DF; ducanturque rectæ BE, AD, CF, BC, EF.

Quoniam igitur rectæ AB, DE sunt parallelæ, & æquales, erunt in eodem plano; & rectæ AD, BE, quæ earum extremitates jungunt, pariter parallelæ, & æquales (n. 105. & 107. lib. 1. Geom. planæ). Rursum, quia per Constr. AC, DF sunt parallelæ, & æquales, rectæ AD, CF sunt pariter parallelæ, & æquales. Ergo rectæ BE, CF sunt (n. 30.) parallelæ, & æquales; & consequenter rectæ BC, EF sunt etiam parallelæ, & æquales. Itaque duo triangula BAC, EDF habent tria latera mutuò æqualia, singula singulis; & consequenter anguli BAC, EDF sunt æquales. Quod erat &c.



Corollarium.

32. ERgo, si ex binis parallelis AB, DE, altera AB sit perpendicularis uni AC ex binis aliis parallelis AC, DF, etiam secunda DE ex primis binis perpendicularis erit secundæ DF ex binis secundis.

De

De Planis parallelis.

DEFINITIO IV.

33. P*Arallela plana sunt, quæ utcunque, & in quamlibet partem producta semper æquidistant.*

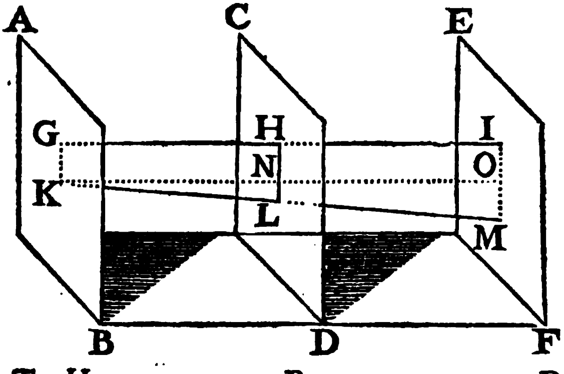
Corollarium.

34. SI duo plana parallela plano quopiam secentur, communes illorum sectiones sunt parallelæ. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 16.

PROPOSITIO VIII.

THEOREMA.

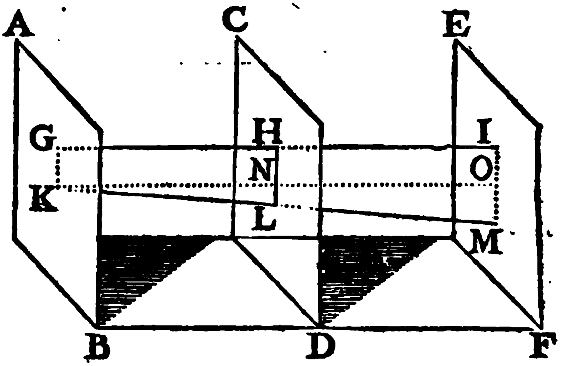
35. S*I binas rectas quascunque* GI, KM *secent plana parallela* AB, CD, EF, *easdem secabunt quoque eadem ratione in punctis* H & L.
Hoc est, GH:HI::KL:LM.



Demonstratio. Ducatur recta KO parallela ipsi GI, & occurrens planis CD, EF in punctis N & O. Quoniam (n. 34.) GK, HN, IO intersectiones planorum parallelorum sunt inter se parallelæ, erit ex regulis proportionum KL:LM::KN:NO ::GH:HI. Quod erat &c.

Corollarium.

36. Simili ratione, ubi planum secet bina plana parallela, in eorum angulis planis omnes illæ affectiones habebuntur, quas Elem. 2. Lib. 1. Geom. planæ demonstravimus in angulis rectilineis, ubi recta secat binas rectas parallelas.

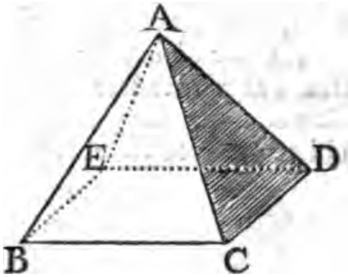


ELEMENTUM II.

De Angulo solido, de Prismate, & Cylindro.

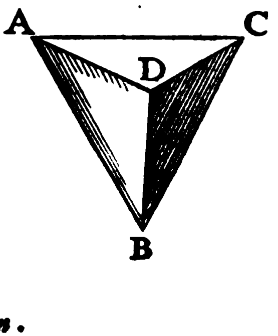
DEFINITIONES.

37. *SI ex omnibus angulis* B, C, D, E *polygoni cujusdam rectilinei ad quodvis punctum* A *positum extra ejus planum ducantur rectæ, consurget in* A *angulus solidus constans tot angulis planis, quot sunt polygoni latera.* Angulus solidus



Corollarium I.

38. HInc angulus solidus rectilineus tribus ad minimum planis angulis ADC, CDB, BDA non in eodem existentibus plano, sed ad unum punctum D constitutis continetur. Rectilineus:



Scholion.

QUemadmodum angulus planus est inclinatio linearum, ita solidus angulus est inclinatio superficierum;

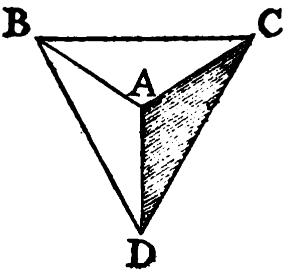
cierum; atque, ut ex tribus rectis unicum triangulum componitur, ita ex tribus angulis planis unicus angulus solidus.

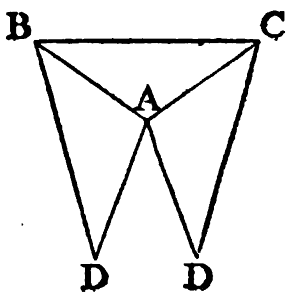
Corollarium II.

Ejus quantitas:

39. OMnes anguli plani angulum solidum constituentes simul sumpti minores sunt quatuor rectis. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 21.

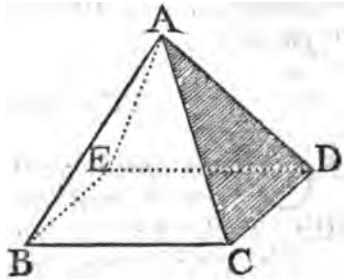
Finge tibi anguli solidi verticem A ita comprimi versùs polygoni basim BCD, ut penitus complanetur. Hoc fieri certè non potest, quin aperiatur latus aliquod, puta, AD, ac proinde figura anguli solidi abeat in planam; in qua omnes anguli plani circa A pertinentes ad priorem angulum solidum simul cum apertura nova DAD constituent quatuor rectos; atque adeo perspicuum est omnes angulos planos angulum solidum constituentes simul sumptos minores esse quatuor rectis.

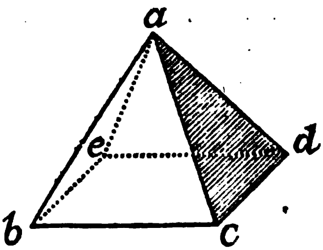




40. *Æqua-*

40. *Æquales anguli solidi dicuntur, qui planis angulis numero, & magnitudine æqualibus, eodemque ordine dispositis continentur.* Nimirum æquales erunt anguli solidi constituti ad vertices A & *a*, si non solùm fuerint quatuor anguli plani, qui utrumque constituant, verùm etiam, si ita illi se se habuerint, ut angulus B A C sit æqualis angulo *b a c*, & angulus C A D = *c a d* &c. Æqualitas.





Vel, *æquales anguli solidi sunt, qui intra invicem positi congruunt.*

41. *Angulus solidus vocatur rectus, qui tribus rectis angulis planis comprehenditur, uti constabit in cubo. Angulus solidus obtusus est, qui rectum superat, acutus verò, qui a recto deficit.* Angulus solidus rectus: obtusus: acutus.

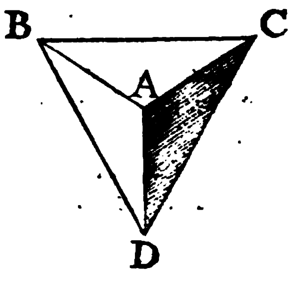
Corollarium I.

42. HInc omnes anguli solidi recti sunt inter se æquales. Omnes enim continentur angulis planis numero, & magnitudine æqualibus.

Corollarium II.

43. SI angulus ſolidus A tribus planis angulis B A C, C A D, D A B continetur, horum duo quilibet ſunt reliquo majores, nimirum B A C + C A D > D A B. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 20.

Nam plana ſuperficies B A D intercepta a lateribus A B, A D eſt minima omnium ſuperficierum vel curvarum, vel inflexarum, eoſdem terminos A B, A D habentium; ergo angulus B A D minor eſt duobus quibuſlibet angulis ſimul ſumptis B A C, C A D angulum ſolidum A conſtituentibus.



Corollarium III.

44. EX quotcunque angulis planis poterit ſemper angulus ſolidus conſtitui, dummodo & omnes ſimul minores ſint quatuor rectis, & quivis ex iis minor ſit reliquis ſimul ſumptis. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 23.

Anguli ſolidi conſtitutio.

Scholion.

45. *QUæ hic de angulis ſolidis minutiùs tractari ſolent, aliò transferam, tum quia pleraque neceſſaria non ſunt, & geometrico rigore demonſtrari non poſſunt ſine fuſiore apparatu, tum verò maximè quia non alium habent uſum, quàm pro figu-*

ris

ris solidis regularibus, quæ planis superficiebus terminantur, & vocantur poliedra regularia, seu corpora regularia, quippe quæ planis regularibus, & æqualibus continentur; quorum tractatio in aliis Elementis erit commodior. Nunc verò ad genesim, affectionesque explicandas aggrediamur prismatis, & cylindri, quæ multò faciliorem viam nobis aperient ad reliqua solidorum symptomata demonstranda.

AXIOMA.

46. *Illæ magnitudines sunt æquales, quarum elementa sunt numero, & quantitate respectivè æqualia.*

In hoc Axiomate tota vertitur demonstrandi methodus, quam indivisibilium vocant, a Bonaventura Cavallerio Mediolanensi primùm inventa, & passim adhibita a recentioribus Geometris, qui eam mollire conati sunt, substituendo loco indivisibilium evanescentia divisibilia, quæ Cavallerianæ methodo apprime quadrant; ut alibi in hisce Elementis planum faciam, ne Tirones morer in ipso limine. Summam itaque trado hujus methodi indivisibilium, quantùm satis est ad progrediendum. Methodus Indivisibilium.

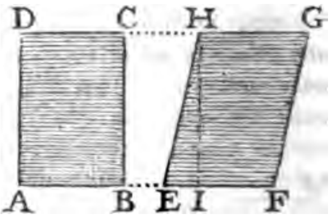
I. Considerantur lineæ quasi ex infinitis punctis constare, superficies ex infinitis lineis, solida ex infinitis planis, aliisve superficiebus, ut res postulaverit.

II. Indivisibilia hæc elementa, ac tota eorum summa comparatur in una magnitudine cum singulis elementis, eorumque summà in altera magnitudine; & sic duarum magnitudinum ratio, vel æqualitas determinatur.

Hinc, si duarum superficierum, vel solidorum elementa demonſtrentur eſſe numero, & quantitate reſpectivè æqualia, duæ illæ ſuperficies, vel ſolidæ magnitudines erunt æquales; numerus autem horum elementorum determinatur a perpendiculari, quæ vel ſuperficierum, vel ſolidorum metitur altitudinem.

Exemplum. Demonſtrare oporteat duo parallelogramma ſuper eadem baſi, vel æquali, & inter eaſdem parallelas conſtituta, eſſe æqualia.

Summa linearum, quæ componunt ſuperficiem primi parallelogrammi æquatur ſummæ linearum, quæ componunt ſuperficiem ſecundi. Nam utriuſque ſumma in ſpatio ab iiſdem parallelis intercepto concluditur, cujus extenſionem metitur perpendicularis CB=HI. Similiter lineæ lineis æquales eſſe demonſtrantur, ſingulæ ſingulis. Ergo duo hæc parallelogramma ex eodem æqualium elementorum numero conſtant, ac proinde æqualia ſunt.



Eodem principio mox demonſtrabitur vel ratio, vel æqualitas ſolidorum.

Scholion.

Quàm circumſcriptè hac methodo utendum ſit, quæ vitandæ æquivocationes, an differat de re ab antiqua exhauſtionum methodo, & quibus de cauſis hanc indiviſibilium methodum antiquæ prætulerint recentiores Geometræ, exponam fuſiùs peculiari diſſertatione in calce horum Elementorum.

De

De Prismate, & Cylindro.

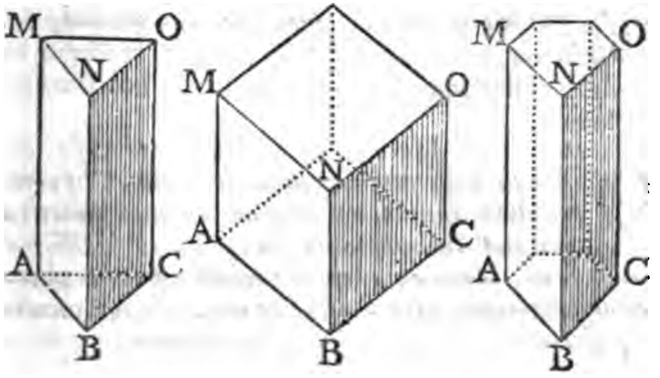
DEFINITIONES.

47. *SI planum quodvis* ABC *motu sibi semper parallelo moveatur juxta directionem rectæ* AM, *spatium solidum, quod ab eodem plano describitur, vocatur prisma.* Prisma.

48. *Planum* ABC, *ex cujus motu gignitur prisma, basis generatrix dicitur. Recta* AM *directrix, & perpendicularis ducta a quovis puncto basis generatricis ad basim oppositam, vocatur altitudo prismatis.* Basis generatrix. Directrix. Altitudo.

49. *Si linea directrix* AM *perpendicularis sit basi generatrici* ABC, *prisma dicitur rectum; aliter, obliquum.* Prisma rectum: Obliquum.

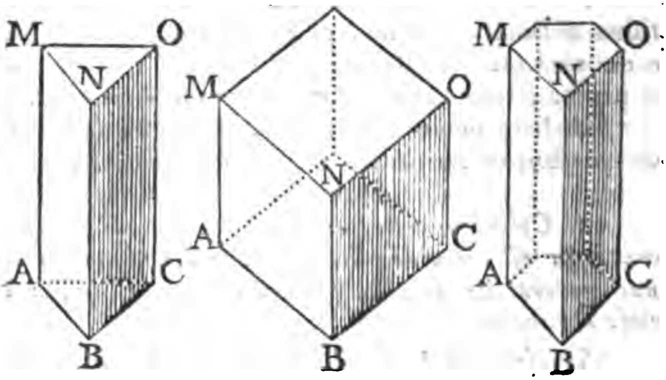
50. *Si basis generatrix* ABC *sit parallelogrammum, hujusmodi prisma vocari solet parallelepipedum; quod rectum, aut obliquum erit, uti directrix, perpendicularis fuerit, aut obliqua basi generatrici. Pa-* Parallelepipedum Rectum, aut obliquum:



ral-

Rectangulum. *rallelepipedum dicitur etiam rectangulum, si & rectum sit, ejusque basis generatrix sit pariter rectangulum.*

Cubus. ·51. *Cubus autem vocari solet parallelepipedum rectangulum, cujus basis sit quadratum, & linea directrix* AM *æquetur lateri* AB *ejusdem basis.*



Corollarium I.

52. EX hac prismatis genesi, & aliorum inde subnascentium solidorum, facilè intelliges Euclidæas definitiones, quæ communiter hoc loco tradi solent.

Prisma est figura solida planis comprehensa, quorum adversa duo, sunt parallela, æqualia, & similia.

Parallelepipedum est solidum sex quadrilateris ex adverso parallelis comprehensum.

Si sex plana ex adverso parallela sint quadrata, solidum iis comprehensum cubus erit.

Co-

Corollarium II.

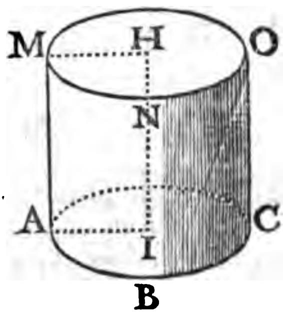
53. HInc omne parallelepipedum eſt priſma, licet non omne priſma ſit parallelepipedum. Nam in omni parallelepipedo duo plana poſita ex adverſo ſunt ſimilia, æqualia, & parallela, prout priſma poſtulat. Verùm, cùm hæc in parallelepipedo debeant eſſe parallelogramma, quod non poſtulat priſma, non omne priſma eſt parallelepipedum. In quo differant & conveniant.

Similiter omnis cubus eſt parallelepipedum; at non viciſſim omne parallelepipedum eſt cubus.

54. *Cylindrus eſt ſpecies priſmatis, cujus baſis generatrix eſt circulus; diciturque rectus, aut obliquus, prout directrix* AM *perpendicularis eſt, aut obliqua baſi generatrici.* Cylindrus.

55. *Axis cylindri recti, aut obliqui eſt recta* HI *baſium centra connectens.* Axis.

56. *Gignitur etiam cylindrus rectus a rectangulo* AMHI *circa unum latus* HI *in orbem ducto.*



Corollarium I.

57. CUm omne priſma gigni intelligatur ex parallela elevatione baſis generatricis, quam elevationem altitudo ipſius priſmatis metitur: concipi idcirco poteſt quævis priſmatum ſpecies veluti compoſita ex tot planis rectilineis ſibi mutuò impoſitis, adeoque inter ſe parallelis, ſimilibus, & æqua- Compoſitio priſmatum, & menſura.

æqualibus, quot ſunt puncta in illius altitudine. Quare poteſt priſma quodcunque aſſumi, veluti factum ex ductu baſis in altitudinem.

Corollarium II.

Superficies priſmatis.

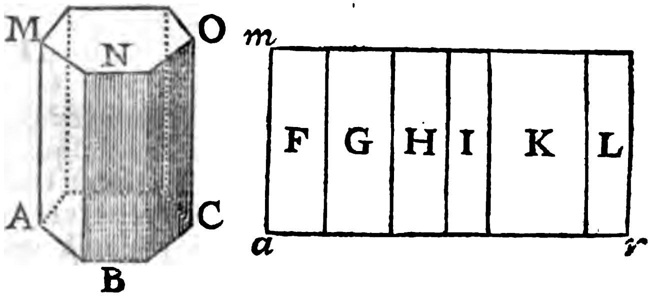
58. DEmpta baſi generatrice ABC, & ipſi oppoſita MNO, ſuperficies priſmatis componitur ex totidem parallelogrammis, quot baſis generatrix ABC habet latera.

Nam in geneſi priſmatum ſuperiùs deſcripta, latus quodlibet baſis generatricis movetur motu ſibi parallelo juxta directionem lineæ rectæ, ac proinde parallelogrammum gignit. Si priſma rectum ſit, quodlibet horum parallelogrammorum erit rectangulum.

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

59. *SUperficies cujuſvis priſmatis ſive recti, ſive obliqui, non comprehenſis baſibus utrinque oppoſitis, æquatur rectangulo* FGHIKL, *cujus baſis* ar *æqualis ſit ſummæ laterum, ſive perimetro baſis generatricis, & altitudo æqualis altitudini priſmatis.*



De-

Demonstratio. Nam (n. 58.) superficies cujusvis prismatis, non comprehensis basibus utrinque oppositis, componitur ex totidem parallelogrammis, quot basis generatrix habet latera. Atqui parallelogramma singula, quibus superficies componitur, æqualia sunt singulis parallelogrammis F, G, H, I, K, L, quorum per hyp. æquales sunt respectivè bases, & altitudo utrinque communis. Ergo superficies cujusvis prismatis &c. Quod erat &c.

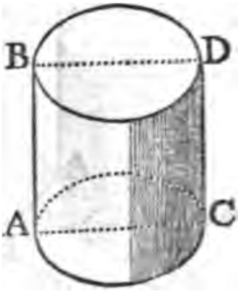
Corollarium I.

60. CUm autem basis prismatis multiplicato in infinitum numero laterum, & imminuta eorum magnitudine abeat in curvam continuam, satis patet prisma abire in solidum cylindricum, cujus superficies, demptis utrinque basibus oppositis, æqualis erit rectangulo *mar*, habente basim *ar* æqualem perimetro circuli ABC, & altitudinem *ma* æqualem altitudini dati prismatis in cylindrum abeuntis. Superficies cylindri.

Corollarium II.

61. ERgo superficies convexa cylindri recti, cujus altitudo AB est æqualis diametro AC suæ basis, erit quadrupla areæ ejusdem basis.

Nam circulus, hoc est, basis generatrix hujus cylindri æquatur rectangulo, cujus basis sit circuli perimeter, & altitudo semissis radii (n. 296. lib. I. Geom. planæ); & superficies convexa ejusdem cylindri est æqualis rectangulo, cujus basis sit idem circuli perimeter, & altitudo ejusdem diameter, sive semissis radii quater sumpta.



PRO-

PROPOSITIO II.

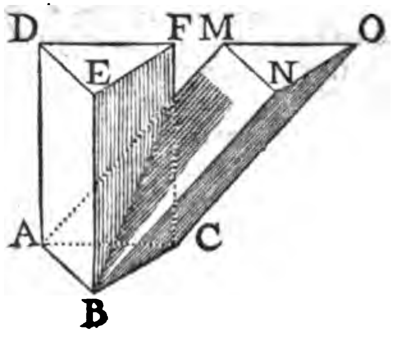
THEOREMA.

Æqualitas prismatum.

62. *Prismata* ABCDEF, ABCMNO, *quæ eamdem habeant basim, aut bases æquales, & inter parallela plana existant, erunt æqualia.* Euclid. prop. 29. & 30. lib. 11.

Demonstratio. Ad normam genesis superiùs descriptæ concipiamus prisma quodvis tanquam compositum ex infinitis laminis, seu superficiebus rectilineis invicem superimpositis, & basi generatrici parallelis: lamina quælibet hujus prismatis æqualis erit basi generatrici (n. 47.); & consequenter, si duo prismata eamdem habeant basim, aut bases æquales, componentur etiam ex laminis, seu superficiebus rectilineis æqualibus.

Rursum, quia per hyp. prismata existunt inter parallela plana, necesse est, ut eodem prorsus laminarum numero componantur. Cùm enim duo plana parallela semper æquidistent, fieri non potest ut major laminarum numerus congeratur in unum



prifpriſma, quàm in aliud. Ergo duorum priſmatum, quæ æqualem, vel eamdem habent baſim, & altitudinem, elementa omnia ſunt numero, & magnitudine reſpectivè æqualia; ac proinde per axioma n. 46. erunt inter ſe æqualia. Quod erat &c.

Corollarium.

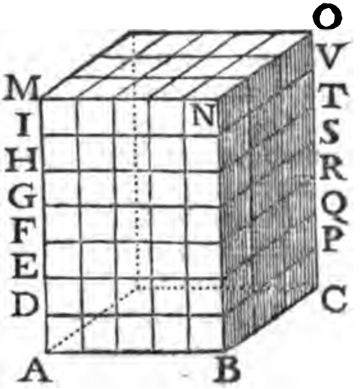
63. ERgo priſmata, quorum baſes, & altitudines æquantur, ſunt pariter æqualia; nam poſſunt inter parallela plana exiſtere.

PRAXIS GEOMETRICA

ELEMENTI II. SOLIDORUM.

Dimensio Prismatum, & Cylindrorum.

64. CORPORUM mensura est cubus alicujus notæ mensuræ linearis, ut pollicis, palmi, pedis &c. Recta MI repræsentat longitudinem unius pedis, supra quam descriptum sit quadratum, sive pes quadratus. Cubus supra hoc quadratum descriptus, est cubus unius pedis, sive pes cubicus; cujus nimirum & longitudo, & latitudo, & altitudo, hoc est, dimensiones singulæ sunt unius pedis. Atque idem de aliis mensuris intellige. Vide quæ diximus n. 39. Geom. planæ.



P R O B L E M A I.

65. *SOliditatem parallelepipedi invenire.*

Resolutio. Parallelepipedum producitur ex basi in altitudinem ducta, vel ex multiplicatione trium laterum angulum solidum continentium in parallelepipedo recto.

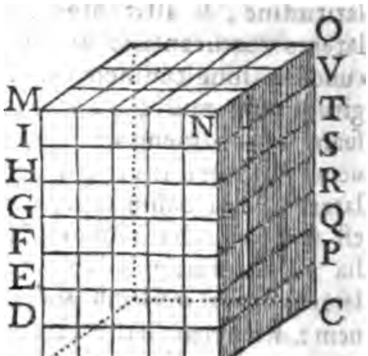
Basis ad arbitrium est quodlibet unum e planis sex, quæ parallelepipedum continent, puta, planum ABC.

Altitudo autem est perpendicularis inter basim ABC, & planum oppositum MNO extensa, quæ in parallelepipedo recto est ipsum latus ejus BN.

Metire igitur tria latera BA, BC, BN angulum solidum continentia. Esto BA pedum 5, BC pedum 3, quibus inter se multiplicatis producetur numerus quadratorum pedum 15, quibus basis ABC æqualis est; quo deinde per numerum pedum linearium 7 altitudinis, seu lateris tertii BN multiplicato, provenient 105 pedes cubici, quibus parallelepipedum æquale est.

Quòd si parallelepipedum sit cubus, uno latere noto, ejus soliditas innotescit. Cubi enim omnia latera sunt æqualia.

Demonstratio pendet ex genesi, & compositione prismatum n. 47. tradita; cui ut assuescant Tirones, sibique familiarem reddant hanc demonstrandi methodum, eamdem in re præsenti juvat retexere.



Intelligatur basis ABC moveri versùs MNO juxta directricem BN, ea lege, ut semper maneat sibi ipsi parallela. Quando basis ABC absolverit unum pedem AD, constat singula ejus qua-

drata,

drata, seu pedes quadratos produxisse unum cubum, seu unum pedem cubicum. Rursum ubi absolverit pedem secundum DE, singuli baseos pedes quadrati produxerunt cubicum pedem unum; & sic deinceps per reliquos lateris, seu altitudinis AM pedes procedendo. Ergo quando basis pervenerit in MNO, hoc est, quando totum parallelepipedum descripserit, manifestum est, ipsam tot pariter produxisse pedes cubicos, quantus est numerus, qui fit ex quadratis pedibus baseos multiplicatis per pedes altitudinis BN; ac proinde ex altitudine in basim ductà innotescit vera quantitas parallelepipedi. Quod erat &c.

Corollarium.

66. QUando conclavia, cubicula, aulæ plerumque parallelepipeda sunt, eorum capacitas ex hoc Problemate nullo negotio deducitur.

Si murus extruendus proponatur, longitudine, latitudine, & altitudine datis; & quæstio sit, quot lateres requirantur: explora prius, quot lateres secundùm longitudinem suam dispositi expleant longitudinem muri; deinde, quot lateres secundùm suam latitudinem dispositi expleant muri latitudinem: numeri inventi inter se multiplicati dabunt lateres, qui basim muri constituunt; perinde enim est sive æqualia rectangula, sive quadrata æqualia ad mensuram adhibeas. Inquire tandem, quot lateres supra invicem positi expleant muri altitudinem: numerus basis supra repertus, ductus in numerum altitudinis dabit numerum laterum, qui murum totum constituunt; habenda tamen erit ratio spatii a calce lateribus intermixta occupandi.

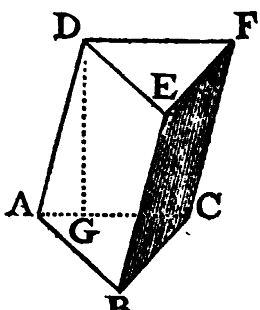
PROBLEMA II.

67. *Soliditatem prismatis cujuscunque invenire.*

Resolutio. Prismatis soliditas producitur ex basi ducta in altitudinem. Est autem basis alterutrum e parallelis planis; quæ, quoniam efformari possunt per figuras quaslibet rectilineas, etiam prismatum species innumeræ sunt. Altitudo est perpendicularis, utraque plana parallela tangens. Si prisma rectum est, latus ipsum est altitudo.

Fac igitur notam prismatis altitudinem DG in aliqua mensura. Si prisma sit erectum, e plano superiore ad inferius demitte perpendiculum, cujus longitudinem metire aliqua mensura. Si prisma jaceat in terra, inter utrumque parallelum planum extende perpendiculariter normæ adminiculo productum funem; ejusque longitudinem metire, ut prius.

Deinde, ut Elem. 7. Lib. 1. Geom. planæ traditum est, ubi omnis generis figuræ rectilineæ mensurantur, unam ex basibus ABC notam redde in quadratis ejusdem mensuræ, qua altitudinem fecisti notam: numerus quadratorum basis ductus in numerum altitudinis, dabit numerum cuborum ejusdem mensuræ, quibus datum prisma æquale est.

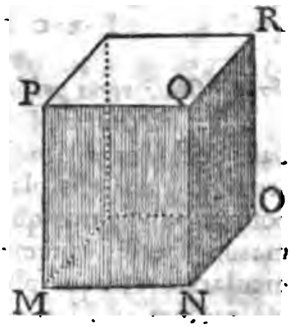


Demonstratio patet ex n. 47.

Vel, super rectangulo, quod basi ABC æquale sit, intelligatur erigi parallelepi-

pedum

pedum rectum MR, ejusdem altitudinis cum prismate ABCDEF; erit hoc prismati æquale (n. 62.). Atqui parallelepipedum istud producitur ex basi sua ducta in suam altitudinem (n. 65.), hoc est, per Constructionem ex prismatis basi ABC in altitudinem ejusdem prismatis. Ergo etiam prisma ABCDEF producitur ex basi ABC in altitudinem prismatis. Quod erat &c.



PROBLEMA III.

68. *Cylindrum metiri.*

Resolutio. Omnis cylindri soliditas habetur ex basi in altitudinem ducta. Metire igitur cylindri altitudinem aliquà mensurà: item basis diametrum; tum ex hac inquire (n. 297. Geom. planæ), quot quadrata ejusdem mensuræ contineat basis. Hæc per altitudinem multiplicata dabit ejusdem mensuræ cubos, quibus cylindrus datus æqualis est.

Demonstratio constat ex n. 54.

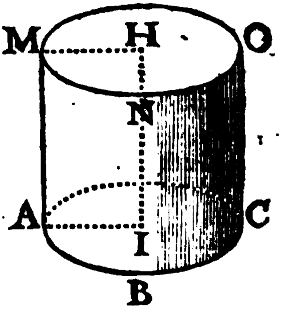
Scholion.

69. *PEr cylindrum hìc intelligo non eum tantummodo, qui propriè cylindrus dicitur, & definitur n. 54.; sed etiam omnia illa solida, quæ fiunt ex plano curvilineo quocunque ducto in aliquam altitudinem, dummodo basis curvilineæ, vel elypticæ, vel alterius generis dimensio in aliqua nota mensura, saltem quàm proximè inveniatur. Pro his omnibus regula universalis tradita est.*

Aliter.

70. C*Ylindri recti dimensio facilior.*

Resolutio. Metire latus A M, & radium A I basis: hæc in se invicem ducta dabunt aream rectanguli A M H I; tum ex radii A I semisse, tanquam radio, elice peripheriam illi debitam (n. 297. Geom. planæ). Area rectanguli ducta in hanc peripheriam dabit cubos, quibus cylindrus æqualis est.



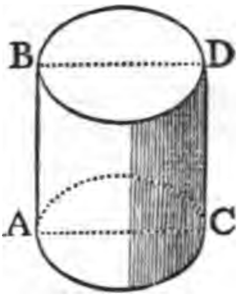
Demonstratio patet ex prop. 2. lib. 3. cyl., & Annul. P. Taquet, ejusque corollario, ubi demonstrat cylindrum æquari parallelepipedo, cujus basis est rectangulum I M, quod cylindrum genuit; altitudo autem par peripheriæ, cujus radius est semissis radii A I.

PRO-

PROBLEMA IV.

71. *Curvam Cylindri circularis recti superficiem metiri.*

Resolutio. Cylindrica superficies producitur ex circumferentia basis ducta in altitudinem. Metire igitur diametrum AC basis cylindri, ex qua reperi circumferentiam basis; tum mensurà eàdem metire altitudinem. Hæc in circumferentiam ducta exhibebit ejusdem mensuræ quadrata, quibus cylindri curva superficies (demptis nempe basibus, quæ sunt duo circuli) æqualis est.



Scholion.

Hæc regula tantùm pertinet ad cylindrum strictè dictum, & quidem rectum; nondum enim inventa est ratio metiendi superficiem cylindri scaleni, multò minùs elyptici, & aliorum, uti monet P. Tacquet lib. 3. Geom. pract.

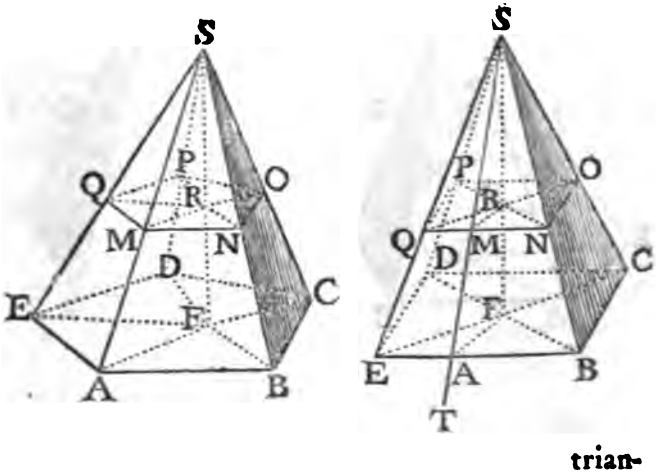
ELEMENTUM III.

De Sectionibus Pyramidis, & Coni, ac de horum Solidorum affectionibus, & comparatione cum Prismate, & Cylindro.

DEFINITIONES.

72. PYRAMIS SABCDE *est figura solida, pluribus, quàm duobus, triangulis planis rectilineis comprehensa, quorum vertices in unum omnes punctum* S *coeant, & ipsorum bases figuram planam rectilineam* ABCDE *constituant.* Pyramis.

73. *Planum rectilineum* ABCDE *Basis dicitur*; & potest esse vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum &c.; a quo quidem tota pyramis denominationem sumit, ita ut dicatur pyramis triangula, quadrangula, pentagona, hexagona &c.; tot enim Basis.



trian-

triangulis quælibet pyramis comprehenditur, quot anguli, seu latera in illius base numerantur.

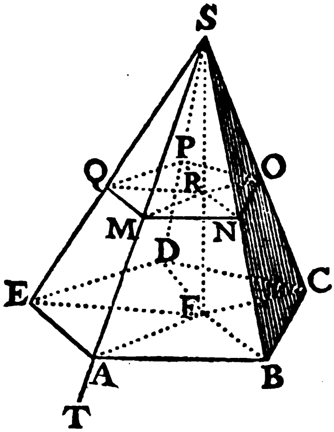
Vertex. 74. *Punctum* S, *in quo coeunt omnium triangulorum vertices, nuncupatur summitas, seu Vertex pyramidis.*

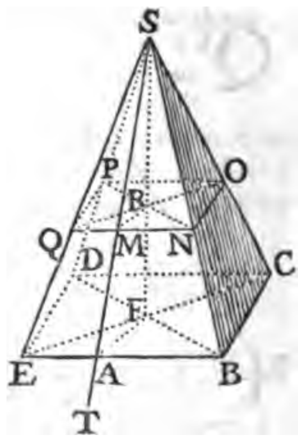
Altitudo. 75. *Perpendicularis* SF *a vertice* S *ducta in planum rectilineum basis* ABCDE, *dicitur Altitudo pyramidis.*

Axis. Pyramis recta, & inclinata. 76. *Axis verò vocatur recta ducta a vertice in centrum basis. Si axis ad perpendiculum basi incumbat, pyramis recta vocatur; inclinata verò, si axis obliquè ad basim se habeat.*

Scholion.

UT triangulum inter rectilineas figuras planas, ita pyramis inter solidas prima, & simplicissima est.





77. Ali-

77. Aliter etiam, ac multò universaliùs definiri pyramis, & conus hac ratione potest.

Si extra planum quodvis ABCDE *acceptum fuerit punctum* S, *ab eoque ducatur recta indefinita* ST, *tangens planum in* A, *quæ, puncto* S *manente fixo, circa perimetrum plani* ABCDE *convertatur, donec in eum locum* SAT *redeat, unde moveri cœperat: superficies a recta linea* ST *descripta, dicitur pyramidalis superficies; corpus verò, quod hac superficie, & plano rectilineo continetur, pyramis vocatur.* Pyramidis genesis.

78. *Si pyramis* SABCDE *pro basi habeat polygonum regulare* ABCDE; *& recta* SF *ducta a vertice* S *ad centrum* F *circuli, cui polygonum potest inscribi, sit perpendicularis plano hujus polygoni: dicetur pyramis regularis.* Pyramis regularis.

Corollarium I.

79. QUæ a vertice pyramidis regularis ad singulos suæ baseos angulos ducuntur rectæ SA, SB, SC &c., omnes sunt æquales. Sunt enim totidem hypotenusæ triangulorum SFA, SFB, SFC &c., quæ rectangula sunt in F, & perfectè æqualia.

Corollarium II.

80. PYramidis regularis triangula omnia ASB, BSC, CSD &c., quorum vertices coeunt in summitatem S pyramidis, sunt quoque inter se perfectè æqualia.

81. Si

81. *Si basis pyramidis sit circulus, pyramis vocatur Conus.*

Conus.

Rectæ SA, SB, SC *a vertice* S *coni ad circumferentiam baseos ductæ, vocantur Latera coni*; quæ tota esse in coni superficie, ex ejus genesi manifestum est.

Latera coni.

Axis.

Axis coni est recta SF *ex vertice ad baseos centrum ducta.*

Altitudo.

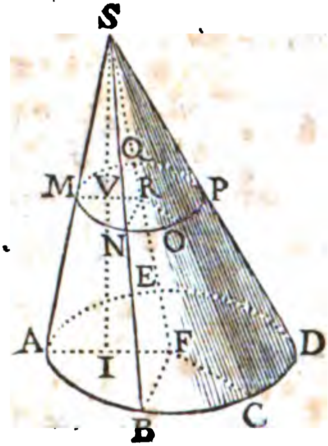
Altitudo coni est perpendicularis SI *ducta a vertice coni in ejusdem basim* ABCDE.

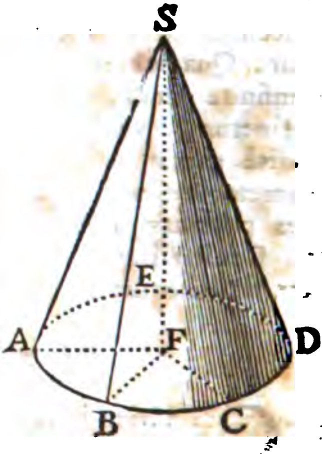
Conus rectus,

Si coni axis SF *sit suæ basi perpendicularis, conus rectus vocatur*; idemque axis SF vicem altitudinis obibit.

Scalenus.

Sin autem coni axis SF *sit suæ basi obliquus, conus vocabitur obliquus, seu scalenus*; ejusque axis SF altitudinem SI superabit.





Scho-

Scholion.

82. *Conus rectus concipi etiam potest genitus a triangulo rectangulo* SFA *circa unum latus* SF *basi perpendiculare in orbem ducto; ex qua genesi rursum infertur rectas omnes* SA, SB, SC *ductas a vertice coni recti ad circumferentiam suae basis, esse inter se aequales.*

LEMMA I.

83. *Cylindrus considerari potest tanquam prisma infinitorum laterum.*

Spectetur prisma, cujus utraque basis opposita sit polygonum regulare. Evidens est multiplicari non posse latera polygoni baseos, quin pariter multiplicentur parallelogramma, quibus prisma continetur. Quamobrem, si latera baseos sint infinita, & infinitè parva, parallelogramma, quibus prisma continetur, evadent similiter numero infinita, & infinitè parvae latitudinis; ac proinde & polygoni perimeter desinet in peripheriam circuli, & superficies prismatis abibit in curvam superficiem cylindri. Constat itaque cylindrum non differre a prismate infinitorum laterum.

Corollarium.

84. Cylindrica idcirco superficies assumi potest, veluti composita ex infinitis parallelogrammis infinitè parvae latitudinis.

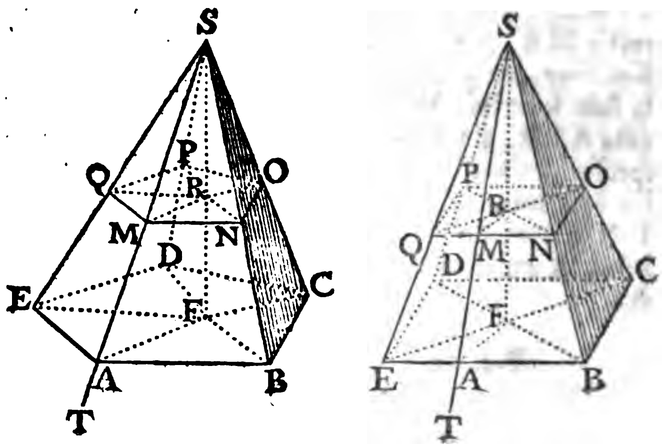
LEM-

II. In planis æquiangulis ABCDE, MNOPQ, latera circa æquales angulos erunt proportionalia.

Nam propter parallelas AB, MN, triangula ASB, MSN sunt similia; ac proinde AB:MN:: SB:SN.

Similiter propter parallelas NO, BC, triangula BSC, NSO sunt similia; & consequenter SB:SN::BC:NO.

Ergo AB:MN::BC:NO; atque ita de reliquis. Quare sectiones MNOPQ, ABCDE sunt similes. Quod erat &c.



PRO-

PROPOSITIO III.

THEOREMA.

89. *SI a vertice* S *pyramidis ducatur utcunque in basim recta* SF, *punctum* R, *ubi sectioni parallelæ eadem occurrit*, *&* *punctum* F *basis*, *erunt puncta similiter posita in basi* ABCDE, *&* *in sectione parallela* MNOPQ. Puncta similiter posita.

Demonstratio. Per rectam SF, & per rectas SA, SB, SC &c. ducantur totidem plana FSA, FSB &c. Rectæ AF, BF, CF &c. parallelæ erunt rectis MR, NR, OR &c., singulæ singulis (n. 34.). Similiter, ex præced., latera AB, BC &c. parallela sunt lateribus MN, NO &c. Ergo (n. 31.) triangula AFB, BFC &c. æquiangula erunt singulis respectivè triangulis MRN, NRO &c. Quare similia sunt inter se, & (n. 451. Geom. planæ) puncta F & R sunt similiter posita in utroque plano parallelo, & simili ABCDE, MNOPQ. Quod erat &c.

PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

90. *LIneæ homologæ* AF, MR, *sive intersectiones planorum parallelorum cum plano transeunte per rectam* SF, *ac præterea latera homologa* AB, MN, *&* *perimetri basis*, *&* *sectionis*, *erunt omnia duabus rectis* SF, SR *proportionalia*.

Demonstratio. Nam propter rectarum AF, MR parallelismum, triangula ASF, MSR sunt simi-

similia; ac proinde AF:MR::SF:SR. Quod erat primum.

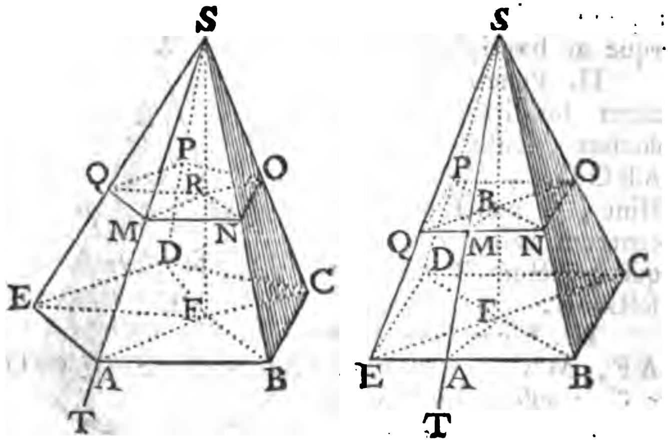
Et quoniam triangula AFB, MRN sunt similia ex præced., erit AB:MN::AF:MR; & consequenter AB:MN::SF:SR. Quod erat secundum.

Denique, quia (n. 88.) polygona ABCDE, MNOPQ similia sunt, erunt (n. 476. Geom. planæ) inter se, uti AB ad MN. Ergo ABCDE: MNOPQ::SF:SR. Quod erat tertium.

PROPOSITIO V.

THEOREMA.

91. *Areæ basis* ABCDE, *& sectionis parallelæ* MNOPQ *erunt quadratis* $\overline{SF}^2$, $\overline{SR}^2$ *proportionales*.



De-

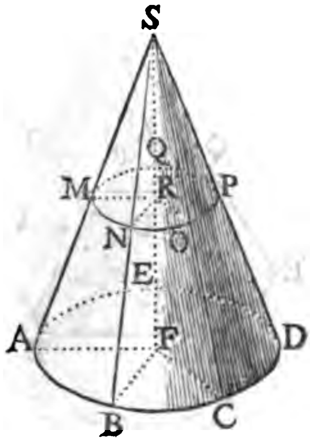
Demonstratio. Quoniam (n. 88.) duo plana parallela ABCDE, MNOPQ sunt similia, erit (n. 500. Geom. planæ) area ABCDE ad aream MNOPQ :: $\overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$. Atqui, ex præced., AB : MN :: SF : SR; & consequenter $\overline{AB}^2 : \overline{MN}^2 :: \overline{SF}^2 : \overline{SR}^2$. Ergo area ABCDE ad aream MNOPQ :: $\overline{SF}^2 : \overline{SR}^2$. Quod erat &c.

Corollarium I.

92. QUia conus considerari potest tanquam pyramis infinitorum laterum (n. 85.); hinc quæcunque dicta sunt de sectione pyramidis, locum habebunt in cono. Sectiones coni.

Quare, si conus SABCDE secetur plano MNOPQ parallelo suæ basi ABCDE,

I. Sectio MNOPQ erit basi similis; & consequenter circulus erit peræque ac hæc ipsa basis.



II. Puncta F & R erunt similiter posita in duobus circulis parallelis ABCDE, MNOPQ. Hinc, si punctum F sit centrum basis, erit quoque punctum R centrum sectionis.

III. Lineæ homologæ AF, MR, quæ etiam possunt esse radii duorum circulorum parallelorum, proportionales erunt dua-

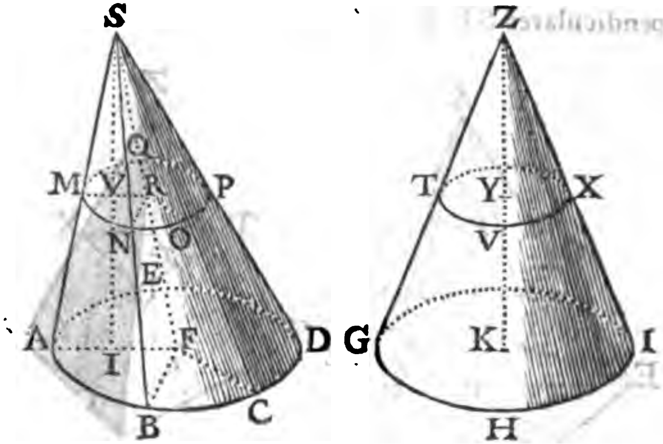
 bus

bus lineis SF, SR. Cùm autem circulorum perimetri sint, ut radii (n. 480. Geom. planæ); hinc horum perimetri erunt, ut rectæ SF, SR, quæ a vertice pyramidis per centra circulorum parallelorum transeunt.

IV. Cùm superficies circulorum proportionales sint quadratis radiorum (n. 506. Geom. planæ); hinc circulorum parallelorum superficies ABCDE, MNOPQ proportionales erunt quadratis $\overline{SF}^2$, $\overline{SR}^2$ duarum rectarum, quæ a vertice pyramidis per centra circulorum transeunt.

Corollarium II.

93. Si a vertice coni ad quodvis punctum I basis ducatur recta SI, quæ occurrat in U sectioni circulari MNOPQ parallelæ ipsi basi, erit (n. 87.) $SF : SR :: SI : SU$, & $\overline{SF}^2 : \overline{SR}^2 :: \overline{SI}^2 : \overline{SU}^2$. Atqui, ex præced. Coroll., radii AF, MR, & pe-



rimetri

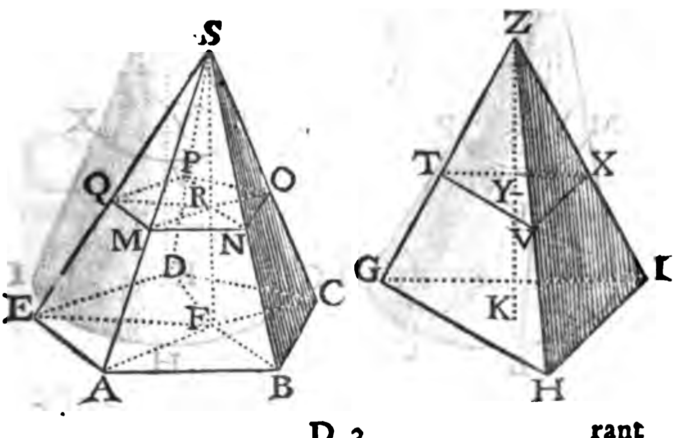
rimetri duorum circulorum parallelorum ABCDE, MNOPQ sunt proportionales rectis SF, SR, & superficies horum circulorum quadratis $\overline{SF}^2$, $\overline{SR}^2$. Ergo radii AF, MR, & circulorum perimetri se habent, ut rectæ SI, SU; & horum superficies, uti quadrata $\overline{SI}^2$, $\overline{SU}^2$.

PROPOSITIO VI.

THEOREMA.

94. *SI duæ pyramides, aut coni* SABCDE, ZGHI *ejusdem altitudinis secentur plano basibus parallelo, & in æquali ab utriusque vertice, vel basi distantia: erunt areæ sectionum* MNOPQ, TVX *proportionales areis suarum respectivè basium* ABCDE, GHI. Areæ sectionum.

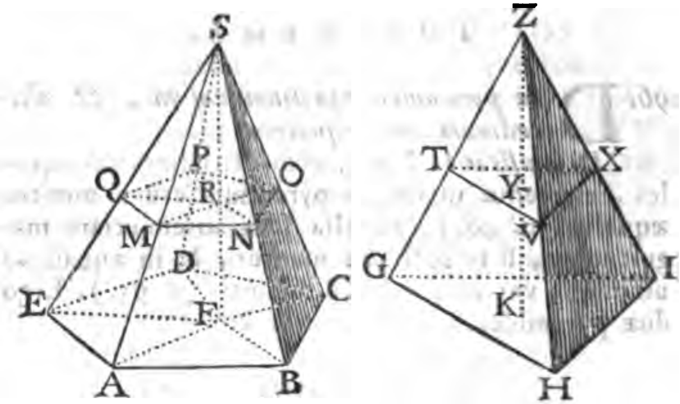
Demonstratio. Ex summitatibus S & Z demittantur in utriusque pyramidis, aut coni basim perpendiculares SF & ZK, quæ suis basibus occur-



 rant

rant in F, K, & planis sectionum parallelis occurrant pariter in R, Y.

Quoniam, per hyp., eadem est utriusque pyramidis altitudo, eademque sectionum parallelarum distantia a suis summitatibus S & Z, erit SF = ZK, & SR = ZY; ac proinde $\overline{SF}^2 = \overline{ZK}^2$, & $\overline{SR}^2 = \overline{ZY}^2$. Atqui area MNOPQ ad aream ABCDE :: $\overline{SR}^2 : \overline{SF}^2$ (n. 91.), sive :: $\overline{ZY}^2 : \overline{ZK}^2$; & $\overline{ZY}^2 : \overline{ZK}^2$ :: area TVX : ad aream GHI. Ergo area MNOPQ :: ABCDE :: TVX : GHI; & alternando MNOPQ : TVX :: ABCDE : GHI. Quod erat &c.



Co-

Corollarium.

95. SI duæ pyramides æqualium basium, & altitudinum secentur plano earum basibus parallelo, & in æquali ab earum vertice, vel basi distantia, erunt sectionum areæ MNOPQ, TVX inter se æquales; quippe quæ proportionales sunt areis basium ABCDE, GHI, quæ ponuntur æquales.

PROPOSITIO VII.

THEOREMA.

96. *DUæ pyramides æqualium basium, & altitudinum sunt æquales.*

Demonstratio. Nam, cùm altitudines sint æquales, elementa utriusque pyramidis erunt numero æqualia (n. 46.); æqualia sunt autem etiam magnitudine, si respectivè sumantur, & in æquali ab utriusque vertice, vel basi distantia (n. 95.). Ergo duæ pyramides &c. Quod erat &c.

Corollarium.

COni æqualium basium, & altitudinum sunt æquales. Conus enim est pyramis infinitorum laterum (n. 85.).

PROPOSITIO VIII.

THEOREMA.

97. *Omnis sectio parallelepipedi, prismatis, cylindri, pyramidis, aut coni, quæ sit suæ basi parallela, erit eidem basi similis.* Euclid. lib. 11. prop. 25.

Demonstratio. Nam I. res patet in parallelepipedo, prismate, cylindro, quorum genesis repetenda est ex motu sibi constanter parallelo ejusdem basis generatricis.

II. In pyramide, & cono constat n. 94.

PROPOSITIO IX.

THEOREMA.

98. *Omnia solida ejusdem nominis invicem comparata, nimirum, parallelepipeda, prismata, cylindri, pyramides, aut coni, æqualium basium, & altitudinum, sunt æqualia, sive recta ea sint, sive obliqua.* Euclid. lib. 11. prop. 29. 30. & 31.

Demonstratio. Nam sectiones omnes basi parallelæ, sunt per præced. eidem basi similes; & in æquali a suis basibus, quæ ponuntur æquales, distantia, sunt magnitudine æquales; & in æquali altitudine, sunt etiam numero æquales. Ergo omnia hæc solida ejusdem nominis invicem comparata eodem constant elementorum æqualium numero; ac proinde per Axioma sunt æqualia. Quod erat &c.

Co-

Corollarium.

99. Ergo in solidorum mensura determinanda, erit unicè habenda ratio & eorum altitudinis, & basis. Nam, quamvis parallelepipedum obliquum plus habeat superficiei, quàm rectum; tamen utriusque soliditas erit æqualis, si æqualem ambo basim habeant, & altitudinem.

PROPOSITIO X.

THEOREMA.

100. *Solida parallelepipeda, & prismata æqualium altitudinum, sunt, ut bases; & quæ habent æquales bases, sunt, ut altitudines.* Euclid. lib. 11. prop. 32.

Demonstratio. Nam I., si sint æqualium altitudinum, horum elementa erunt quidem utrinque numero æqualia, sed magnitudine basibus proportionalia, singula singulis. Ergo omnium summa in uno ad omnium summam in altero, hoc est (n. 46.), prismata æqualium altitudinum, erunt inter se, ut bases. Quod erat primum.

II. Si sint æqualium basium, horum elementa erunt quidem utrinque magnitudine æqualia, singula singulis, sed numero altitudinibus proportionalia. Ergo omnium summa in uno ad omnium summam in altero, hoc est, prismata æqualium basium, erunt, ut altitudines. Quod erat alterum.

Co-

Corollarium.

HInc cylindri æqualium altitudinum, sunt, ut bases, & qui habent æquales bases, sunt, ut altitudines. *Euclid. lib.* 12. *prop.* 11. *&* 14.

Nam cylindri sunt prismata infinitorum laterum.

PROPOSITIO XI.

THEOREMA.

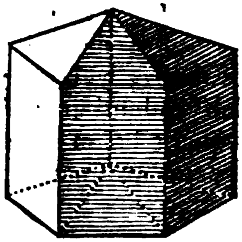
101. *SI cylindrus plano secetur adversis basibus parallelo, erunt cylindri segmenta, uti segmenta axis.* Euclid. lib. 12. prop. 13.

Demonstratio. Nam omnia harum sectionum plana erunt inter se æqualia. Ergo segmenta erunt, ut totidem cylindri æqualium basium; ac proinde, per præced., erunt, ut altitudines; quæ in cylindris rectis sunt ipsimet axes, & in cylindris obliquis sunt axibus proportionales. Quod erat &c.

PROPOSITIO XII.

THEOREMA.

102. *OMne prisma polygonum dividi potest in prismata triangularia.*



Demonstratio. Cùm enim adversæ bases oppositæ, parallelæ, & æquales sint polygonæ, quæ in triangula resolvi possunt; constat divisionem hanc peragi posse in omni prismate polygono, ut in subjecta figura. Quod erat &c.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

THEOREMA.

103. *Si basis prismatis æquet bases omnes plurium minorum prismatum sub eadem altitudine, etiam soliditas prismatis æquabit soliditatem reliquorum omnium simul sumptorum. Idem dicendum de pyramidibus.*

Demonstratio. Nam, si concipiantur in hisce solidis plana parallela basi, æqualis erit planorum numerus in singulis, cùm sit æqualis altitudo. Præterea planum quodlibet in majore prismate æquale erit summæ omnium in reliquis. Nam basis est ad summam basium, uti sectio in majore prismate ad summam omnium sectionum in reliquis. Atqui basis prismatis, per hyp., æquat summam basium prismatum minorum. Ergo &c. Quod erat primum.

Eadem consideratio traducitur ad pyramides sub eadem altitudine, si modò sectiones comparentur in æquali a basibus distantia. Quod erat alterum.

Corollarium.

104. EOdem modo demonstrabitur vel cylindrum æquari prismati æqualis altitudinis, & basis, vel cylindrum æquari pluribus cylindris sub eadem altitudine, quorum bases simul sumptæ æquent basim majoris cylindri. Nam cylindrus est species prismatis polygoni infinitorum laterum.

LEM-

LEMMA.

105. *Omnis pyramis polygona dividi potest in trigonas pyramides.*

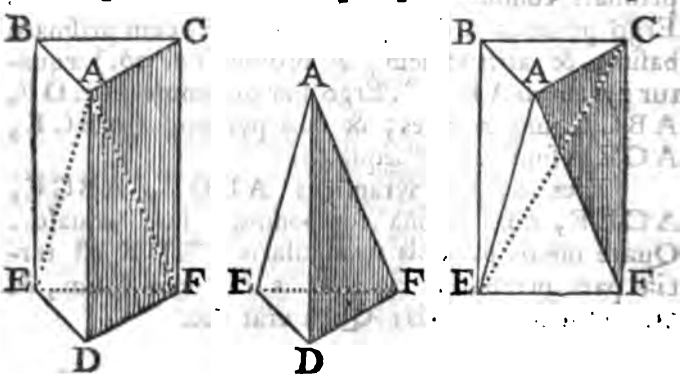
Nam pyramidis polygonæ basis est polygonum, quod resolvi potest in triangula. Jam verò, si à vertice pyramidis polygonæ, juxta directionem laterum ejusdem, concipiantur totidem plana, quæ per hæc triangulorum latera polygonum dividentia transeant, totidem pariter habebuntur pyramides triangulares, in quas pyramis polygona dividitur.

PROPOSITIO XIV.

THEOREMA.

106. *Omnis pyramis triangularis est tertia pars prismatis eamdem basim, & altitudinem habentis.* Euclid. lib. 12. prop. 7.

Demonstratio. Triangulare prisma ABCFDE secetur plano transeunte per punctum A, & per



puncta

puncta E, F, sive per latus EF basis EFD. Perspicuum est divisum iri prisma in duas pyramides ABCFE, AEDF; quarum prima ABCFE basim habebit parallelogrammum BCFE, & verticem A; secunda verò AEDF basim habebit cum prismate communem, nimirum triangulum EDF, ejusque verticem A in basi opposita BAC ejusdem prismatis. Dico hanc secundam pyramidem AEDF habentem eamdem cum prismate basim, & altitudinem, fore tertiam prismatis partem.

Secetur enim rursum prima pyramis ABCFE plano transeunte per punctum A, & per puncta C & E, sive per rectas AC & AE. Sanè, cùm diagonalis EC dividat parallelogrammum BCFE in duo triangula æqualia, pyramides ABCE, ACEF habebunt æquales bases. Habent autem etiam æqualem altitudinem; cùm altitudo utriusque non differat a recta ducta a vertice A perpendiculariter in planum parallelogrammum BCFE. Ergo (n. 96.) duæ istæ pyramides ABCE, ACEF sunt æquales.

Atqui pyramis ABCE ita etiam considerari potest, ut ejus vertex sit punctum E, ejusque basis prismati communis, sit etiam triangulum ABC. Ergo pyramis ABCE eamdem habet cum prismate basim, & altitudinem; ac proinde (n. 96.) æquatur pyramidi AEDF. Ergo duæ pyramides AEDF, ABCE sunt æquales; & duæ pyramides ABCE, ACEF sunt pariter æquales.

Tres itaque pyramides AEDF, ABCE, ACEF, quæ prisma componunt, sunt æquales. Quare omnis pyramis triangularis AEDF est tertia pars prismatis triangularis eamdem basim, & altitudinem habentis. Quod erat &c.

Co-

Corollarium I.

107. Hinc omne prisma triangulare dividi potest in tres pyramides triangulares inter se æquales. *Euclid.* 12. *prop.* 7.

Corollarium II.

108. Hinc pyramis quævis polygona est tertia pars prismatis eamdem basim, & altitudinem habentis. Nam, uti prisma quodvis resolvitur in triangularia prismata (n. 102.), ita & pyramis quæcunque in trigonas pyramides (n. 105.). Quo facto, patet demonstratio ex Theoremate. Nam singulæ partes prismatis triplæ erunt singularum partium pyramidis; ac proinde totum prisma totius pyramidis triplum est.

Corollarium III.

109. Ergo conus est tertia pars cylindri eamdem basim, & altitudinem habentis. *Euclid. lib.* 12. *prop.* 10.

Nam multiplicato in infinitum numero laterum, & imminuta eorum magnitudine, pyramis abit in conum, & prisma in cylindrum desinit.

Corollarium IV.

110. Ergo pyramis quæcunque æquatur prismati sub eadem basi, & triente suæ altitudinis, vel, sub eadem altitudine, & triente suæ baseos.

Et

Et reciprocè, prisma quodvis æquatur pyramidi sub eadem basi, & triplo majore altitudine, vel, pyramidi sub eadem altitudine, & basi triplo majore.

Corollarium V.

111. PYramides æquè altæ, sunt directè, ut bases; & quæ habent bases æquales, sunt, ut altitudines. *Euclid. lib.* 12. *prop.* 6.

Nam prismata tripla sunt pyramidum eamdem basim, & altitudinem habentium. Atqui prismata æquè alta, sunt directè, ut bases; & quæ habent bases æquales, sunt, ut altitudines (n. 100.). Ergo etiam pyramides æquè altæ &c.

Corollarium VI.

112. SImiliter coni æquè alti, sunt directè, ut circuli basium; & vicissim, coni æqualium basium, sunt, ut altitudines. *Euclid. lib.* 12. *prop.* 11.

PROPOSITIO XV.

THEOREMA.

113. *SI parallelepipeda æqualia sunt, reciprocant bases, & altitudines; hoc est, basis primi est ad basim secundi, ut reciprocè altitudo secundi ad altitudinem primi. Et, si reciprocant bases, & altitudines, æqualia sunt.* Euclid. lib. 11. prop. 34.

Demonstratur prima pars. Altitudo primi vocetur A, ejusque basis M: altitudo secundi vocetur B, ejusque basis N. Quoniam parallelepipeda po-

ponuntur æqualia, erit $A \times M = B \times N$; & consequenter, si hæc æquatio in analogiam resolvatur, ut dictum est n. 383. Geom. planæ, erit $A : B :: N : M$; hoc est, altitudines erunt in ratione reciproca basium. Quod erat primum.

Secunda pars patet. Nam, si ponatur $A : B :: N : M$, erit $A \times M = B \times N$. Quod erat alterum.

Corollarium.

114. QUæ hic de parallelepipedis demonstrata sunt, æquè conveniunt prismatis quibuscunque, pyramidibus, conis, & cylindris. *Euclid. lib.* 12. *prop.* 9.

PROPOSITIO XVI.

PROBLEMA.

115. *SOliditas pyramidis cujuscunque, aut coni habetur ex basi ducta in tertiam partem altitudinis.*

Resolutio. Metire igitur mensura aliqua pyramidis altitudinem: explora deinde, quot ejusdem mensuræ quadrata contineat basis; quæ pro multiplici pyramidum specie esse potest figura quævis rectilinea. Numerus quadratorum baseos ductus in trientem numeri altitudinis, aut altitudo tota in basis trientem dabit cubos ejusdem mensuræ, quibus data pyramis æqualis est.

Exemplum. Altitudo pyramidis inventa sit pedum 90; basis verò pedum quadratorum 10000 contineat. Triens altitudinis 90 est 30, quæ ducta in basim 10000 efficiunt 300000 pedum cubicorum, quibus pyramis data æqualis est.

De-

Demonſtratio. Pyramis eſt tertia pars priſmatis eamdem baſim, & altitudinem habentis (n. 108.). Atqui hujus ſoliditas provenit ex altitudine tota ducta in baſim. Ergo pyramidis ſoliditas proveniet ex tertia altitudinis parte in baſim ducta, aut ex tota altitudine in baſeos trientem. Quod erat &c.

Eadem demonſtratio convenit cono ex n. 109.

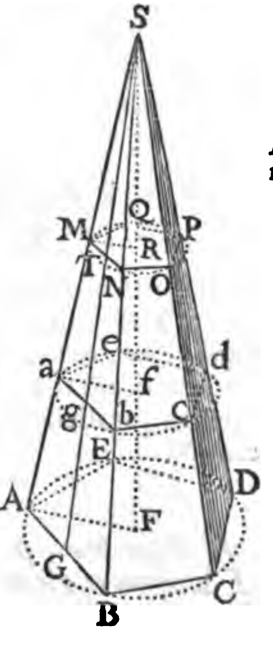
ELEMENTUM IV.

De truncis Pyramidum.

DEFINITIONES.

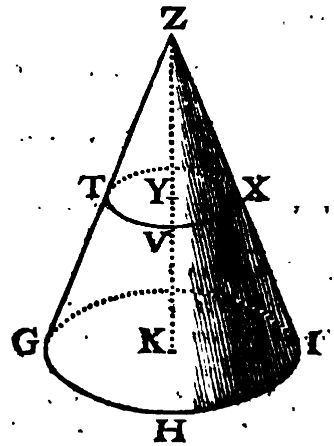
116. *SI pyramis quævis* SABCDE *secetur utcunque plano* MNOPQ, *portio pyramidis a basi* ABCDE, *&* *sectione* MNOPQ *intercepta, dicitur truncus pyramidis, seu pyramis obtruncata.* Pyramis obtruncata

117. *Si sectio* MNOPQ *sit parallela basi* ABCDE, *truncus pyramidis vocabitur pyramis truncata ad bases parallelas.* Ad bases parallelas.



 118.

Coni truncus. 118. *Si conus* ZGHI *secetur plano* TVX *parallelo, aut non parallelo suæ basi, portio coni a basi, & sectione intercepta, dicitur truncus coni, seu conus truncatus ad bases parallelas, aut non parallelas.*



PROPOSITIO I.

THEOREMA.

119. *Solidum speciem præferens trunci pyramidis, & cujus bases oppositæ sint parallelæ, quin similes sint, non erit truncus pyramidis.*

Demonstratio. Nam (n. 88.) omnis sectio pyramidis parallela basi, est eidem basi similis. Quod erat &c.

Scholion.

Atque hinc, si dubitetur, an solidum aliquod sit truncus pyramidis, satis erit expendere, an sectio basi parallela, sit eidem basi similis.

Corollarium.

120. Ergo duo quævis plana similia considerari possunt, perinde ac si horum unum esset basis

basis pyramidis, & alterum esset sectio parallela basi.

PROPOSITIO II.

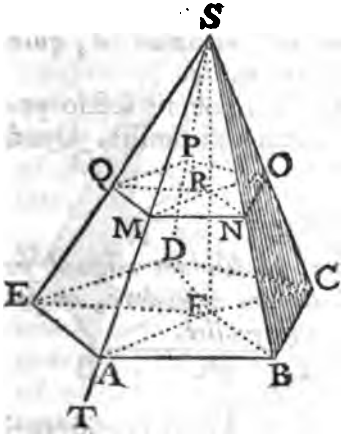
THEOREMA.

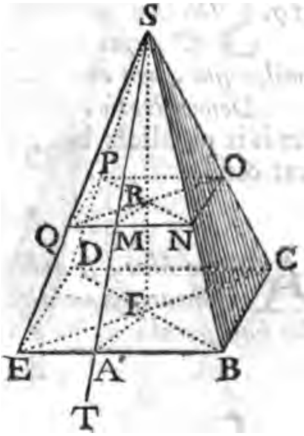
121. IN *omni pyramide obtruncata* ABCDEMN OPQ *ad bases parallelas, hæc duplex proportio habebitur:*

I. Uti differentia AB—MN *duorum laterum homologorum, quæ ad duas trunci parallelas bases spectant, est ad minus latus* MN; *ita altitudo* FR *trunci est ad altitudinem* SR *pyramidis ablatæ* SMNOPQ. Inventio altitudinis ablatæ in pyramide obtruncata,

II. Uti differentia AB—MN *duorum laterum homologorum, quæ ad duas oppositas bases pertinent, est ad majus latus* AB; *ita altitudo* FR *trunci est ad altitudinem* SF *pyramidis integræ* SABCDE. Et altitudinis integræ.

Demonstratio. Nam, si pyramis quæcunque





SABCDE secetur plano parallelo suæ basi, erit (n. 90.) AB:MN::SF:SR; hinc dividendo, & convertendo elicietur hæc duplex proportio:

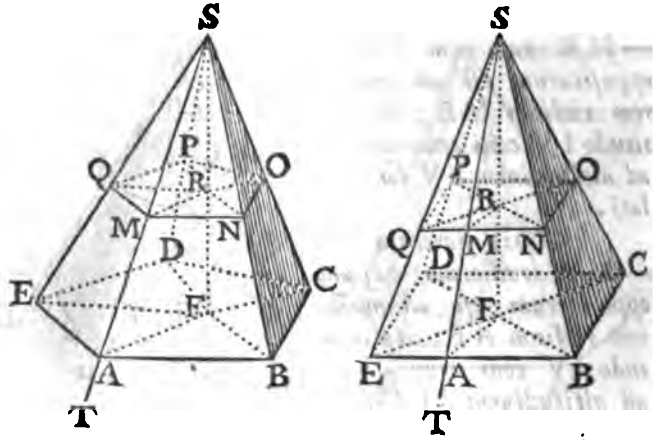
I. AB—MN:MN::SF—SR:SR, sive:: FR:SR.

II. AB—MN:AB::SF—SR:SF, sive:: FR:SF.

Ponatur jam rectam SF perpendicularem esse basi ABCDE, ac proinde perpendicularem quoque sectioni parallelæ MNOPQ: erit FR altitudo pyramidis obtruncatæ ad bases parallelas, SF altitudo pyramidis integræ, SR altitudo pyramidis ablatæ. Constat itaque propositum.

Corollarium.

122. COgnita altitudine trunci pyramidis ad bases parallelas, cognitisque duobus lateribus homologis harum basium, per simplicem pro-



por-

portionem invenietur altitudo pyramidis ablatæ, & altitudo pyramidis integræ.

Scholion.

123. *Quoniam multiplicato in infinitum numero laterum, & imminuta magnitudine pyramis definit in conum, cui pariter (n. 92.) convenire demonstravimus symptomata omnia, quæ de sectione pyramidis parallela basi demonstrata sunt (n. 90.); idcirco hoc idem Theorema, proportione servata, locum habebit in omni cono obtruncato ad bases parallelas. Itaque*

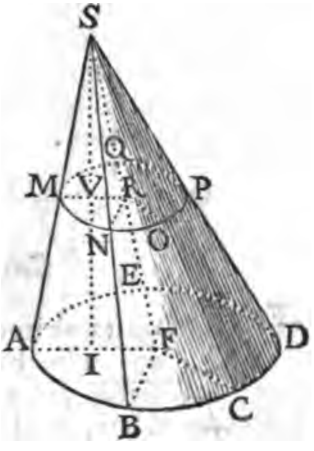
PROPOSITIO III.

THEOREMA.

124. *In omni cono obtruncato* ABCDEMNOPQ *ad bases parallelas, hæc duplex proportio habebitur:*

I. Uti differentia AF — MR *radiorum basium oppositarum est ad minorem radium* MR; *ita altitudo* IV *coni truncati est ad altitudinem* SV *coni ablati.*

Inventio altitudinis ablatæ in cono obtruncato,



II. Uti differentia AF — MR *radiorum basium oppositarum est ad majorem radium* AF; *ita altitudo* IV *coni truncati est ad altitudinem* SI *coni integri.*

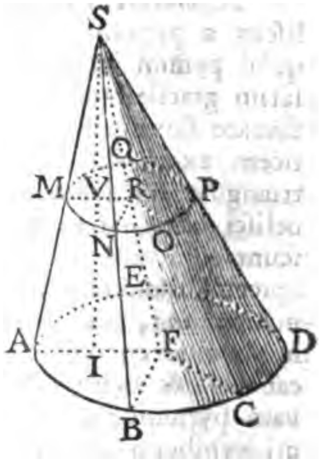
Et altitudinis integræ.

Demonstratio. Nam, si conus quicunque SAB CDE secetur plano basi parallelo, ducaturque a vertice S coni ad quodvis punctum I suæ basis recta SI occurrens in V sectioni circulari MNOPQ, demonstravimus n. 92. radios AF, MR basium oppositarum proportionales esse duabus rectis SI, SV; hoc est, AF:MR::SI:SV; hinc dividendo, & convertendo hæc duplex proportio elicitur:

I. AF—MR:MR::SI—SV:SV, sive:: IV:SV.

II. AF—MR:AF::SI—SV:SI, sive:: IV:SI.

Ponatur jam rectam SI perpendicularem esse basi ABCDE coni, & consequenter perpendicularem pariter sectioni parallelæ MNOPQ: SI erit altitudo coni integri; SV erit altitudo coni ablati; IV erit altitudo coni obtruncati ad bases parallelas. Constat itaque propositum.



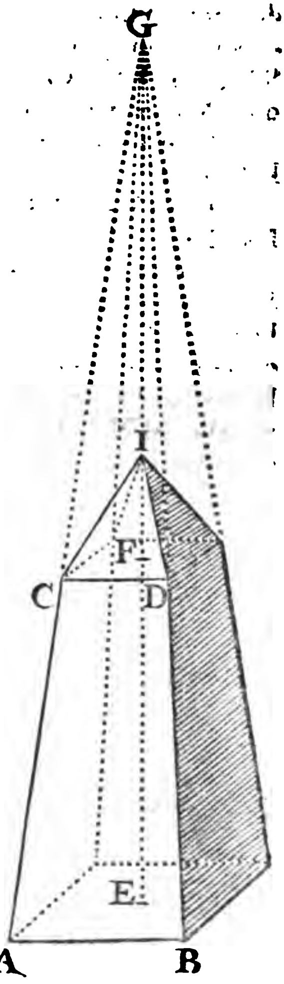
Corollarium.

125. Cognita altitudine coni truncati, cognitisque radiis basium oppositarum parallelarum, invenietur per simplicem proportionem altitudo coni ablati, & altitudo coni integri.

PRA-

PROBLEMA I.

126. *ALtitudinem obelisci, si truncus non esset, sed lateribus continuo fluxu in ultimum punctum confluentibus ad instar pyramidis excurreret, invenire.*



Resolutio. Differt obeliscus a pyramide in eo, quòd pyramidis latera paulatim gracilescant, & continuato fluxu a basi ad verticem excurrant ad instar triangulorum isoscelium; obelisci verò latera gracilescunt quidem sensim versùs apicem, non tamen continuato fluxu, sed antequam in punctum confluant, truncantur, & deinde in parvam pyramidem desinunt; uti exhibetur in schemate. Unde obeliscus vocari etiam solet pyramis truncata; & corpus trunco impositum C D I solet appellari pyramidium, seu pyramidion.

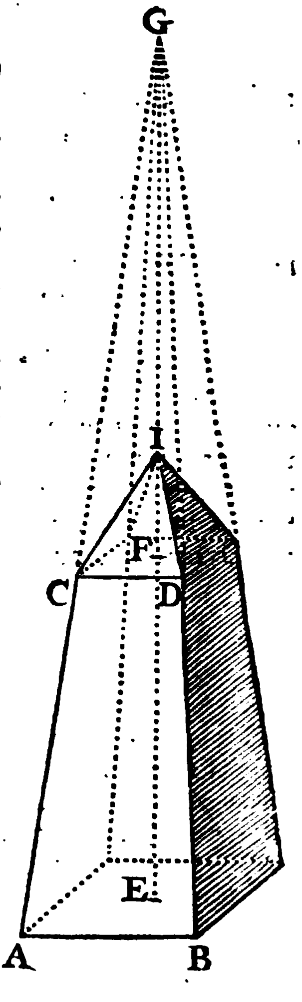
Sit datus itaque obeliscus ABDIC, cujus basis infimæ singula latera A B habeant palmos 10, supremæ

basis

basis CD latera singula palmos *6*, & altitudo EF inter utramque basim interjecta, palmos 20.

Fiat itaque (n. 121.) AB — CD : AB :: EF ad altitudinem quæsitam EG; hoc est, 10 — *6* : 10 :: 20 : 50, altitudo pyramidis integræ, si obeliscus in pyramidem sensim abiisset.

Pyramidis porro CDG altitudinem FG habebis, si notam altitudinem obelisci EF a tota altitudine inventa subduxeris, videlicet 20 a 50; residuum dabit 30 palmos pro altitudine pyramidis ablatæ CDG.



Scho-

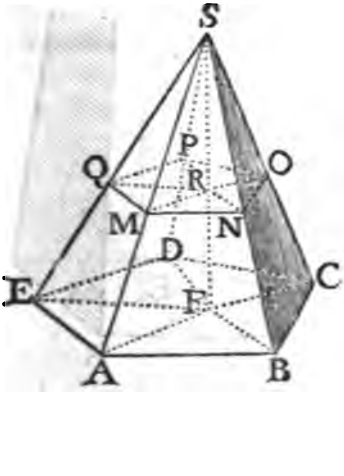
Scholion.

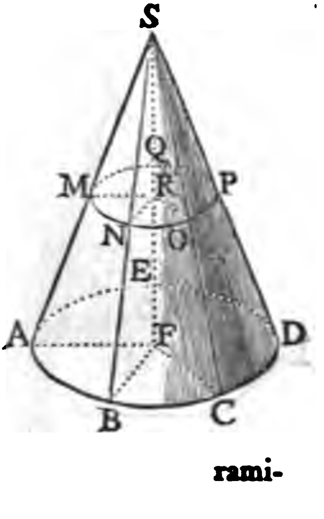
Hac methodo invenit P. Kircherus obeliscum Pamphilium, si in apicem ultimum excurrisset, futurum fuisse pyramidem 133 *palmorum.*

PROBLEMA II.

127. *Trunci pyramidalis, aut conici duobus parallelis planis, aut circulis intercepti soliditatem invenire.*

Resolutio. Metire aliquo genere mensuræ altitudinem trunci; tum inveniatur (n. 121. & 124.) altitudo incognita pyramidis, aut coni ablati, quæ, si addatur altitudini notæ ipsius trunci, fit nota altitudo totius pyramidis integræ, aut coni S A B C D E. His ita inventis, reperiatur (n. 115.) soliditas totius pyramidis, aut coni integri; tum soliditas py-





rami-

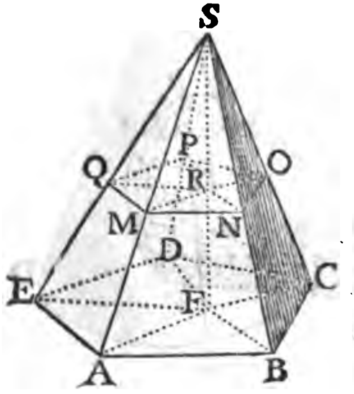
ramidis, aut coni ablati SMNOPQ; minorem ſubtrahe a majori: reſiduum dabit ſoliditatem trunci pyramidalis, aut conici duobus parallelis planis, aut circulis intercepti.

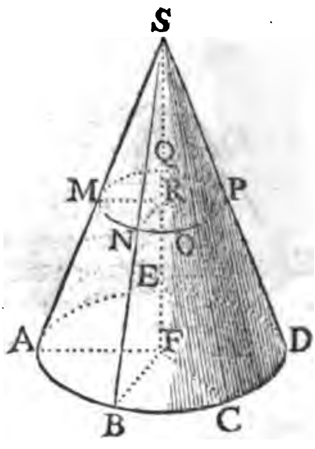
Corollarium I.

128. SOliditas obeliſcorum cum Kirchero in obeliſco Pamphilio lib. 1. cap. 6. inveſtigabitur eadem methodo, inquirendo ſeparatim ſoliditatem trunci pyramidis, dein ſoliditatem pyramidii.

Corollarium II.

129. SImiliter gravitatem, ſive pondus obeliſcorum ita invenies. Fac ex eadem obeliſci materia cubum ejuſdem prorſus magnitudinis cum menſuris cubicis, quibus conſtat obeliſci ſoliditas: hujus cubi pondus explora per exactiſſimam bilancem: duc numerum ponderis, puta, librarum, in





nu-

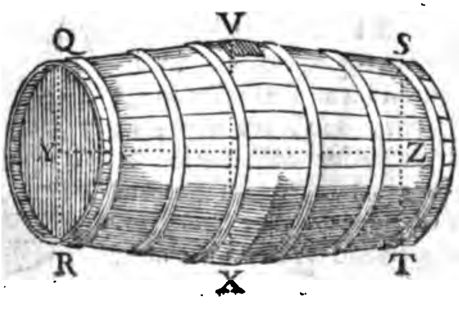
numerum cuborum totius obelisci; & summa producta dabit pondus quæsitum.

Corollarium III.

130. EX hoc Problemate habetur dimensio doliorum, quæ componuntur plerumque ex duobus truncis conicis QRXV, STXV basi communi XV ex adverso insistentibus. De horum dimensione alias praxes mox subjiciam. Hic solùm moneo, ut liquoris dolio contenti quantitas habeatur, a diametris VX, QR, & latere QV deducendam esse asserum crassitiem, antequam operatio in Problemate præscripta instituatur.

Scholion.

MEnsuræ liquidorum pro locorum varietate sunt variæ. Hoc omnibus commune, unam esse minimam, sive primam, ex qua cæteræ majores componuntur. Quantitas liquidi minimam mensuram efficiens a Republica determinanda est.



PRO-

PROBLEMA III.

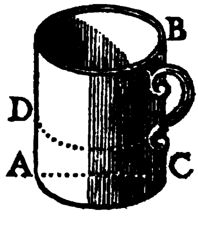
131. *Virgam construere, cujus ope haud difficulter invenitur numerus mensurarum fluidi alicujus, puta, vini, cerevisiæ &c. in vase cylindrico contenti.*

Resolutio. Metiri liquidum nihil est aliud, quàm invenire, quot contineat mensuras, nimirum, quot pintas, vel cados &c. Quicumque ergo dolia metiri desiderat,

I. Determinare debet certam mensuram in sua regione usitatam, puta, pintam, seu sextarium.

II. Cùm autem vasa consueta, quibus utuntur communiter Mercatores in mensuris liquidorum, sint irregularia, eadem ad figuram regularem revocare oportet. Si dolia nostratia quadratam haberent basim, mensuras reliquas ad cubos, aut ad parallelepipeda revocaremus; cùm autem cylindrica sint, aut tantisper conica, præstat cylindrorum mensuram hìc constitui cylindrum; atque adeo pinta, seu sextarius ad cylindrum revocetur.

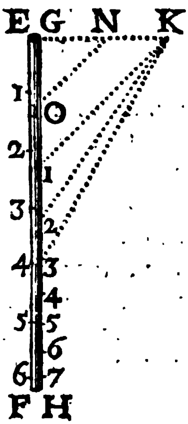
III. Fiat ergo ex stanno, aut etiam ferro albo cylindrus AB satis exactè compositus, & cujus diameter basis cognoscatur: in illud vas infundatur sextarius vini, aut, si velis, duo, vel tres, ut exactiùs procedat observatio; & diligenter observa, quam partem cylindri occupet: puta, CD; noteturque altitudo AD, quæ uni, vel pluribus pintis regionis tuæ respondeat.



IV.

IV. Tum in duabus ejusdem virgæ faciebus fiant duæ species notarum, altera pro altitudinibus, & altera pro diametris basium. Ac prima quidem, quæ altitudinibus numerandis destinatur, ita perficietur. Dividatur virga EF in partes æquales altitudini notæ AD.

V. Altera verò ejusdem virgæ facies GH, quam diametris basium assignavimus, dividatur eo modo, quo lineam quadratorum dividendam esse diximus n. 540. Geom. planæ; nimirum, sit linea GK perpendicularis ad GH; sintque GK, G 1 æquales lineæ, seu diametro AC. Perspicuum est lineam K 1 esse diametrum circuli dupli ipsius AC. Nam circuli se habent, ut quadrata diametrorum (n. 506. Geom. planæ).



VI. Fiat G 2 = K 1: erit K 2 diameter circuli tripli basis AC. Sit G 3 = K 2; & ita deinceps. Habebuntur diametri circulorum omnium certam rationem habentium cum diametro AC.

Scholion.

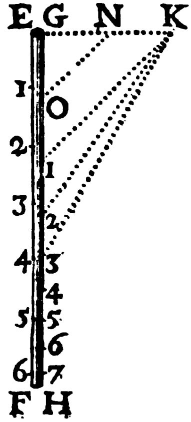
132. *Si quis vellet diametrum circuli duplo minoris ipsius* AC, *dividat latera* GK, G 1 *bifariam in* O *&* N. *Dico* ON *esse diametrum circuli duplo minoris ipsius* AC. *Nam circulus, cujus diameter* OG, *aut* GN, *est quarta pars circuli* AC; *quibus simul æqualis est circulus, cujus diameter* ON; *ut constat ex elementis; atque ita deinceps.*

Pro-

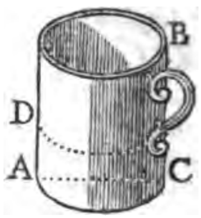
PROBLEMA IV.

133. M*Etiri quodvis vas cylindricum ope virgæ superiùs constructæ.*

Resolutio. Esto quodvis vas cylindricum L M N O, cujus quæritur capacitas. Primò metire basim M N virgâ basibus destinatâ. Ponamus M N æqualem esse lineæ G 3: circulus diametro M N descriptus, triplus erit circuli A C; atque adeo, si impleretur vas cylindricum usque ad punctum P, posito quòd M P æqualis sit altitudini A D, vas L M N O contineret triplo majorem quantitatem, puta, tres sextarios. Metire insuper altitudinem L M virgâ altitudinibus destinatâ. Ponamus eam continere tres partes: multiplico basim 3 per altitudinem 3. Dico vas cylindricum M O esse capacem 9 pintarum.



Demonstratio patet ex n. 68.



Scho-

Scholion I.

134. *IN constructione hujus virgæ mensoriæ monet Bayerus citatus a Wolfio, minorem, quoad fieri possit, assumi oportere altitudinem cylindri mensuram unam, puta, sextarium, capientis. Nam, quò minor est altitudo ejusdem, eò major erit basis diameter; unde & ipsa, & diametri cylindrorum plures mensuras capientes, postea faciliùs in suas minutias subdividentur. Idem Bayerus apud Wolfium suadet, ut nonnisi unius digiti altitudo assumatur.*

Scholion II.

135. *SI cui notus sit calculus decimalium, quem fusè exposui in meis Commentariis Arithmeticæ universalis Newtoni, facilè inveniet diametros* G2, G3, G4 *&c. etiam in numeris; easque determinabit in particulis diametri* AC, *per modum scalæ geometricæ divisæ centesimis, aut millesimis.*

Exemplum. *Sit diameter* AC *divisa in particulas* 1000: *erit ejus quadratum* = 1000000; *ex hujus duplo extracta radix quadrata erit* G2; *si ex triplo, quadruplo, quintuplo &c. radix extrahatur, prodibunt diametri* G3, G4, G5 *&c.; quem in usum constructa est tabula, quam subjicio.*

Mensura	Diameter	Mensura	Diameter
1	1.000	11	3.316
2	1.414	12	3.464
3	1.732	13	3.605
4	2.000	14	3.741
5	2.236	15	3.873
6	2.449	16	4.000
7	2.645	17	4.123
8	2.828	18	4.242
9	3.000	19	4.359
10	3.162	20	4.472 &c.

Ratio est, quia cylindri eamdem altitudinem habentes sunt inter se, ut bases, & consequenter, ut quadrata diametrorum. Ergo quadratum diametri vasis duas, tres, quatuor &c. mensuras capientis est duplum, triplum, quadruplum &c. quadrati diametri vasis mensuram unam capientis. Quare, si inde extrahantur radices, habebuntur diametri ipsæ.

Scholion III.

136. *In hoc artificio metiendi quodvis vas cylindricum notat Wolfius analogiam non inconcinnam. Nam, quemadmodum superiùs solidorum omnium mensura assumptus est cubus; ita hoc loco cylindrorum mensuram constituimus cylindrum. Similiter circulorum mensura constituitur circulus, sicuti superiùs omnium superficierum mensura quadratum.*

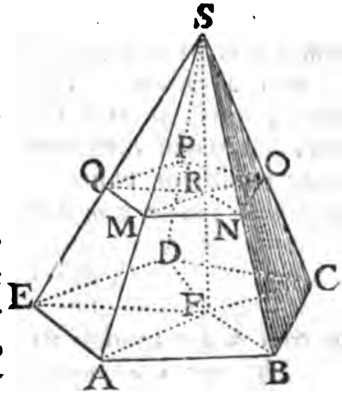
PROBLEMA V.

137. *An praxis communiter adhiberi solita in dimetiendis vasis inæqualium basium sit errori sensibili obnoxia.*

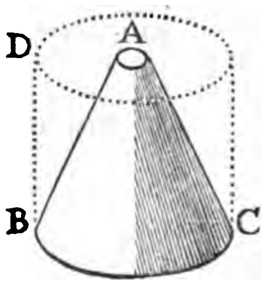
Reso-

Resolutio. Hactenus praxis tradita ritè procederet, si liquidorum vasa, quorum capacitatem metimur, bases utrinque haberent æquales; at pleraque vel conica sunt, vel ex duobus conis truncatis conflata, quemadmodum dolia, aut alia ejusdemmodi. Qua in re, si quis exactè procedere vellet, ei perficiendus esset conus, & metiendus duplex conus, & aut minor ex majori auferendus, aut unus alteri addendus esset.

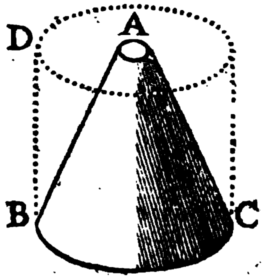
Communiter tamen aliter proceditur. Quæritur area basis ABCDE, item area basis MNOPQ. Adduntur simul istæ bases; earumque summæ dimidium sumitur; sic enim habetur basis, quam vocant æquatam, seu aliquam basim intermediam inter utramque basim. Hanc basim intermediam multiplicant per altitudinem; atque ita mensuram capacitatis eliciunt coni truncati.



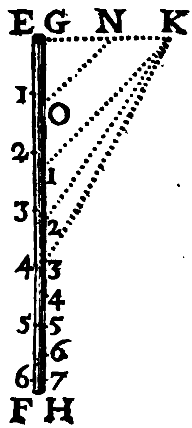
Hæc praxis, quamvis sit usitatissima, tamen est errori obnoxia, quoties magna est differentia inter utramque basim; quod ita demonstro. Sit conus ABC ferè perfectus, ita ut circa punctum A restet parvus admodum circulus. Sanè in hoc cono



modicè truncato differentia inter utramque basim sensibilis est. Itaque, juxta praxim usitatam, inter circulum, seu basim BC, & basim A quæratur circulus medius, seu æquatus: hic erit ferè media pars circuli BC, aut paulo major; multiplicetur per altitudinem coni: producetur cylindrus, qui erit ferè media pars cylindri CD. Atqui conus ABC est tantùm tertia pars cylindri BD, ut jam ostensum est. Itaque hæc praxis est errori obnoxia, ubi magna differentia est inter utramque basim.



Ubi tamen hæc differentia modicissima est, uti sæpius accidit, defectus, qui ex ea sequitur, fit insensibilis, ac proinde nullius momenti; atque hinc citra errorem sensibilem hac praxi utimur in mensura doliorum, uti mox ostendam.



PRO-

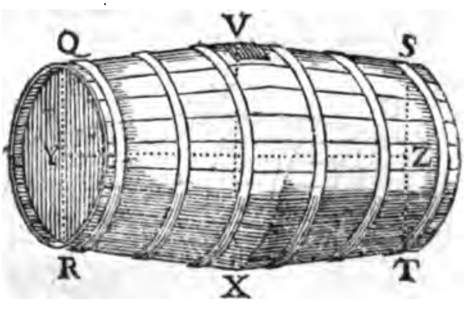
PROBLEMA VI.

138. I*Nvenire soliditatem dolii; hoc est, determinare numerum mensurarum, quas capit.*

Resolutio. Sit dolium QRTS. I. Virgà superiùs descriptà metire diametrum VX; quia verò basis QR paulo minor est, metire etiam diametrum QR, ac proinde basim; sumaturque inter utramque media: puta, sit prima, seu VX æqualis lineæ G 3; & sit QR æqualis lineæ G 2; determinetur pro vera basi semissis summæ horum numerorum, nimirum $2\frac{1}{2}$, ut in Probl. præced.

II. Sumatur longitudo YZ, quæ ponatur æqualis lineæ E *6*, jam ad altitudines cylindrorum metiendas Probl. præced. comparatæ: multiplica $2\frac{1}{2}$ per *6*; & habebis productum 15. Dico dolium QRTS esse capax sextariorum 15.

Demonstratio. Nam ex Probl. præced. dolium pro cylindro haberi potest, cujus basis inter fundum, & ventrem dolii media æquidifferens sit. Quod erat &c.



 Scho-

Scholion I.

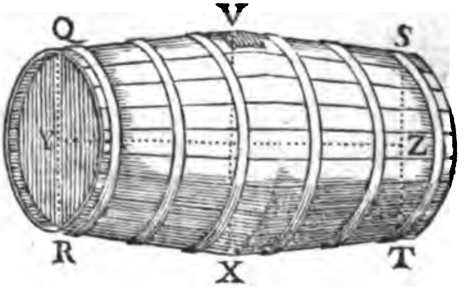
139. *OMnes mensuræ intra vas accipiendæ sunt, ita ut, si exteriùs desumantur, semper ligni crassities sit detrahenda.*

Scholion II.

SUpponitur autem basis ST *æqualis basi* QR; *alioquin illius diversitatis ratio haberi deberet. Similiter, si contingat basim non esse perfectè circularem, sed unam diametrum esse alterâ longiorem, utramque diametrum metiri oporteret, & earum semisummam assumere pro diametro circuli fundo dolii æqualis.*

Scholion III.

HÆc praxis, etsi ad rigorem geometricum non sit exacta, tamen satis experientiæ respondet in iis doliorum figuris passim in Italia adhiberi solitis. Quare hac praxi contenti esse possumus in tanta regionum, & doliorum varietate.



ELE-

ELEMENTUM V.

De Mensura superficierum Pyramidis, & Coni.

DEFINITIO.

140. ALTITUDO absoluta pyramidis longè diversa est ab altitudine triangulorum ejusdem superficiem componentium. Illam definivimus esse rectam a summitate pyramidis ductam perpendiculariter in ejus basim; hæc autem est linea ab eodem pariter vertice ducta perpendiculariter in latus perimetri basis.

Quare *in pyramide recta, & regulari, & cono pariter recto altitudo utriusque superficiei est linea recta omnium brevissima, quæ super eamdem superficiem a vertice figurarum ad perimetrum basis duci possit.* Altitudo superficiei.

Scholion.

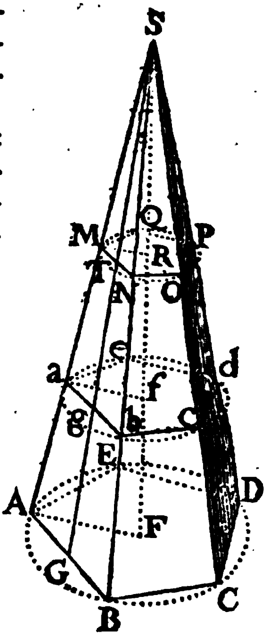
I*N harum superficierum definienda mensura observabis non comprehendi superficiem basium.*

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

141. *Superficies pyramidis rectæ, & regularis* SABCDE *æquatur triangulo* ZHI, *cujus altitudo* ZH *sit æqualis altitudini* SG *trianguli cujusvis* SAB, *& cujus basis* HI *sit æqualis perimetro* ABCDE *basis pyramidis.*

Vel, æquatur parallelogrammo sub eadem altitudine, & cujus basis sit semissis ejusdem perimetri.



Demonstratio. Nam hæc triangula superficiem pyramidis rectæ, & regularis componentia, habent æqualem basim, & altitudinem, & inter se æqualia sunt; ac proinde omnia simul sumpta æquantur triangulo rectangulo ZHI, cujus basis HI æqualis sit summæ basium, & altitudo ZH æqualis communi altitudini eorumdem triangulorum. Cùm autem hoc idem triangulum æquetur parallelogrammo sub eadem altitudine, & semissi baseos; hinc constat propositum.

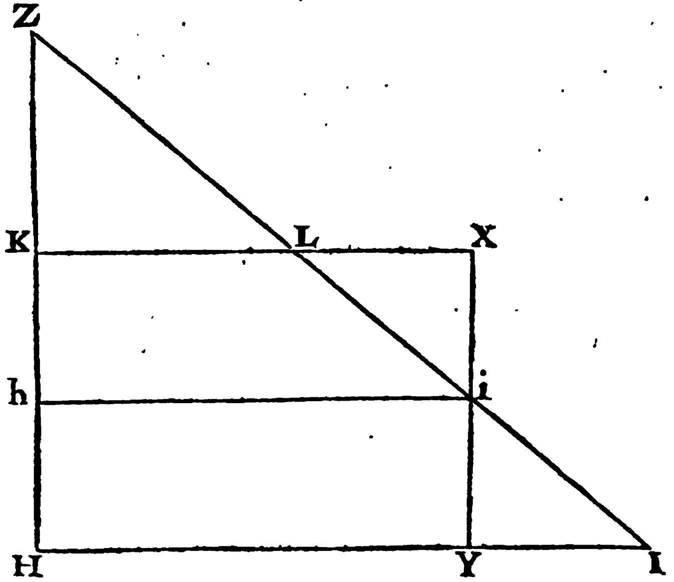
Corollarium.

SUperficies pyramidis rectæ, & regularis est factum ex semissi perimetri baseos in altitudinem superficiei, vel ex semissi ejusdem altitudinis in perimetrum baseos.

PROPOSITIO II.

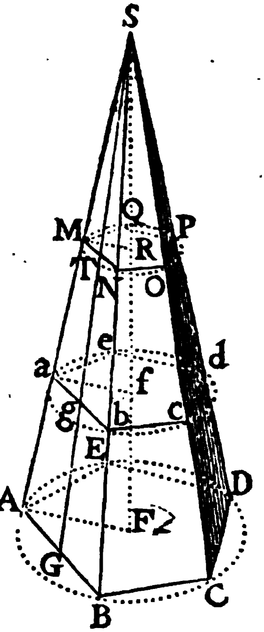
THEOREMA.

142. *SI pyramis eadem* SABCDE *recta, & regularis secetur plano* MNOPQ *suæ basi parallelo, quod occurrat in* T *rectæ* SG *metienti altitu-*



dinem

dinem superficiei conicæ; ac præterea ab altitudine descripti trianguli Z H I *abscindatur portio* Z K = S T, *ducaturque* K L *parallela basi* H I: *Dico eamdem rectam* K L *æqualem esse perimetro sectionis* M N O P Q.



Demonstratio. Nam (n. 90.) perimetri sectionis parallelæ M N O P Q, & basis A B C D E proportionales erunt rectis SG, S T, sive, per hyp., Z H, Z K; idest, A B C D E : M N O P Q :: S G : S T :: Z H : Z K. Cùm autem propter parallelas H I, K L, duo triangula Z H I, Z K L sint similia, erit Z H : Z K :: H I : K L. Ergo A B C D E : M N O P Q :: H I : K L. Atqui, per Constr., A B C D E = H I. Ergo M N O P Q = K L. Quod erat &c.

Corollarium I.

143. QUamobrem superficies pyramidum S A B C D E, S M N O P Q, non comprehensis earum basibus, erunt æquales triangulis Z H I, Z K L.

Corollarium II.

144. SUperficies trunci pyramidis regularis inter bases parallelas A B C D E, M N O P Q, non comprehensis hisce basibus, æquatur trapezio H I L K.

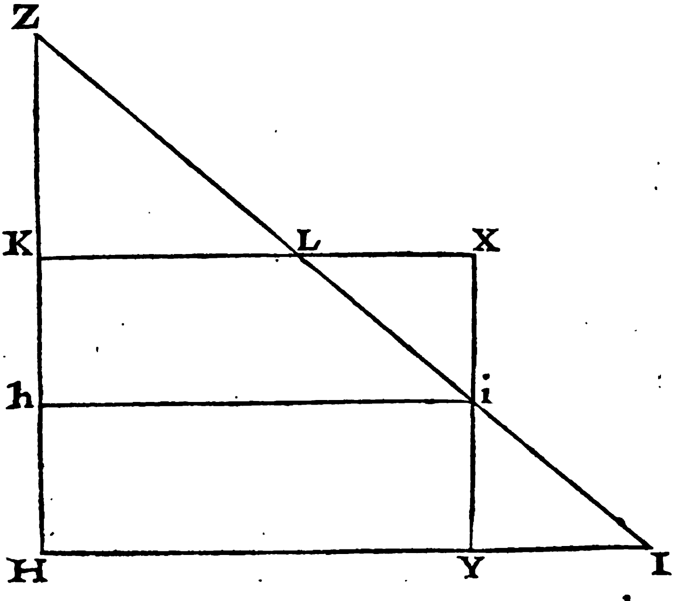
Co-

Corollarium III.

145. ERgo, si a puncto medio *h* altitudinis KH hujus trapezii ducatur *hi* parallela basi HI, hæc recta *hi* æqualis erit perimetro sectionis *abcde* parallelæ basi ABCDE, transeuntis per punctum *g* sumptum pariter in medio rectæ TG.

Corollarium IV.

146. CUm autem, per Constr., K*h*=*h*H, erit quoque L*i*=*i*I, ac proinde trapezium HILK æquale rectangulo KHYX, & *hi*=HY; hinc superficies trunci pyramidis inter duas bases pa-

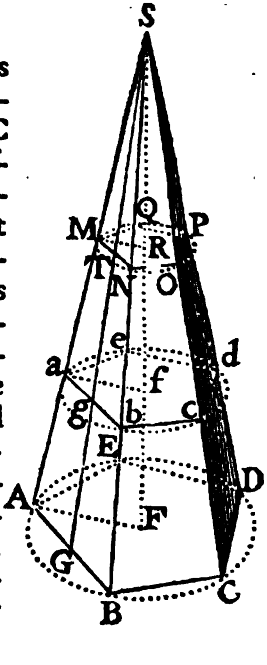


ral-

rallelas æquatur areæ parallelogrammi KHYX, cujus basis HY æqualis sit perimetro sectionis *abcde* factæ in distantiis æqualibus ab iisdem trunci basibus, & cujus altitudo KH æqualis sit rectæ TG perpendiculari lateribus AB, MN basium ejusdem trunci.

Corollarium V.

147. PRæterea, cùm duo triangula LXi, IYi sint æqualia, erit $LX = YI$, & $KL + LX = bi = HY = KL + YI$. Ergo $2bi = KL + YI + HY = KL + HI$; & consequenter $bi = HY = \frac{KL + HI}{2}$.



Hinc rursum superficies trunci pyramidis regularis inter duas bases parallelas ABCDE, MNOPQ, demptis iisdem basibus, æquatur rectangulo KHYX, cujus basis sit semissis summæ duarum rectarum KL, HI, sive semissis summæ perimetri duarum basium oppositarum, & cujus altitudo KH sit æqualis rectæ GT perpendiculariter ductæ ad latera parallela AB, MN earumdem basium. Itaque semisumma perimetri basium oppositarum ducta in altitudinem GT, dabit superficiem trunci pyramidalis regularis inter duas bases parallelas, non comprehensis iisdem basibus.

Scho-

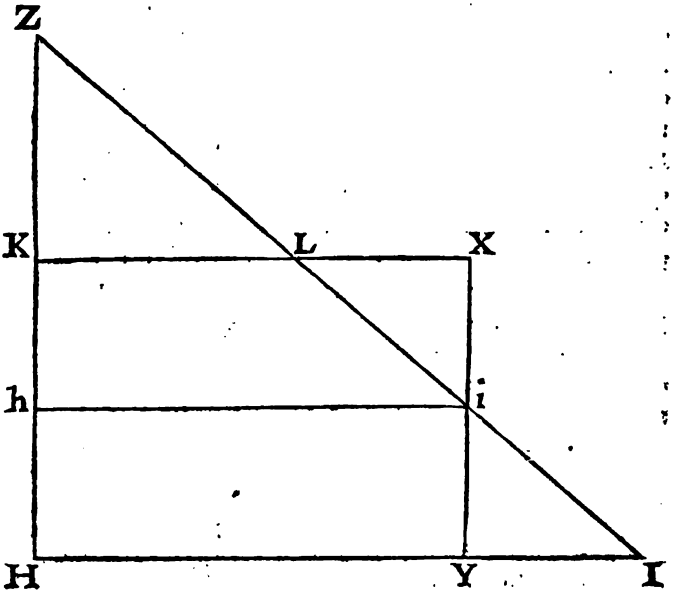
Scholion.

MEtiendæ superficiei pyramidis irregularis nulla alia suppetit regula, quàm separatim quærere aream triangulorum coeuntium ad verticem pyramidis, quorum summa addita areæ basis dabit integram pyramidis superficiem.

Corollarium VI.

148. QUoniam conus rectus est pyramis regularis infinitorum laterum, hinc

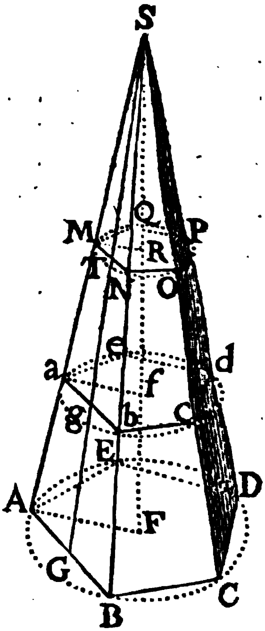
I. Superficies coni recti est semissis producti ex perimetro baseos in latus coni, seu altitudinem su-



per-

perficiei conicæ, vel, est factum ex semissi perimetri baseos in latus coni; vel ex semissi lateris in perimetrum baseos.

II. Cùm sectio MNOPQ sit parallela basi, & ad æquales a vertice, & ejusdem basi distantias facta, erit perimeter circuli MNOPQ æqualis semissi circumferentiæ basis. Superficies itaque ejusdem coni erit factum ex perimetro hujus sectionis MNOPQ ducto in latus coni.



III. Superficies coni recti truncati ad bases parallelas MNOPQ, ABCDE, non comprehensis basibus, erit productum ex ductu circumferentiæ sectionis *abcde* parallelæ iisdem basibus, & ad distantias æquales, in rectam AM, quæ conjungit extremitates duorum radiorum parallelorum FA, RM basium oppositarum, seu, quæ omnium brevissima est, quæ inter bases oppositas duci possit.

IV. Denique superficies ejusdem coni recti truncati est factum ex semisse summæ circumferentiarum basium oppositarum in eamdem rectam AM.

Scholion.

QUòd attinet ad superficiem coni scaleni, nondum reperta est ratio, qua revocari ad mensuram possit.

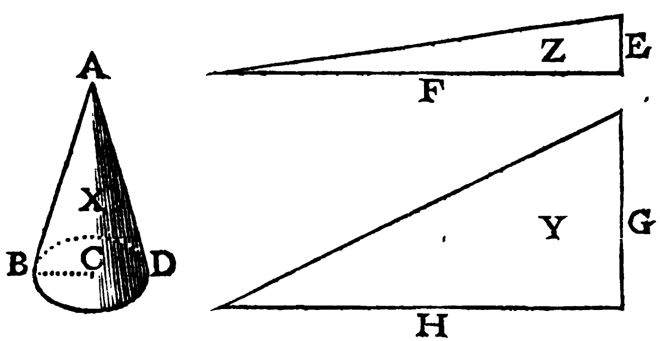
PRO-

PROPOSITIO III.

THEOREMA.

149. *Superficies coni recti* X *est ad superficiem circuli baseos* BCD, *uti* AB *altitudo suæ superficiei est ad radium* BC *ejusdem circuli*. Archimedes lib. 1. prop. 18.

Demonstratio. Superficies hujus circuli æquatur triangulo rectangulo Z, cujus latus E æquale sit radio BC, & latus alterum F perimetro ejusdem circuli (n. 296. Geom. planæ). Superficies coni X æquatur triangulo rectangulo Y, cujus latus G æquale sit altitudini, seu lateri coni AB, & latus alterum H perimetro suæ basis (n. 148.). Ergo duorum triangulorum Y & Z habentium bases æquales F & H, erunt superficies, uti eorum altitudines G & E. Atqui AB = G, & BC = E. Itaque superficies coni X est ad superficiem circuli BCD, uti AB altitudo superficiei conicæ est ad BC radium circuli. Quod erat &c.



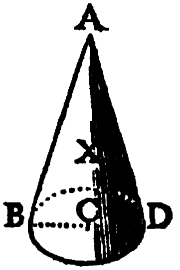
PRO-

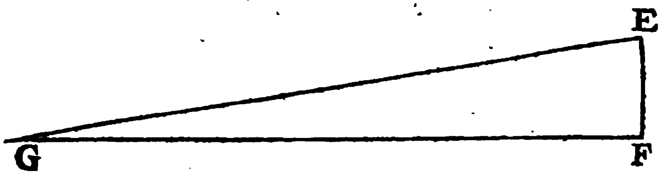
PROPOSITIO IV.

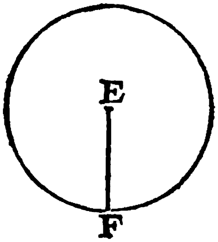
THEOREMA.

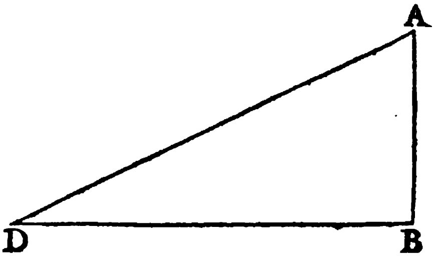
150. *Superficies circuli, cujus radius sit medius proportionalis inter altitudinem superficiei conicæ, & radium basis coni, æquatur superficiei ejusdem coni*. Archimedes lib. 1. prop. 17.

Demonstratio. Esto conus X, cujus AB sit altitudo suæ superficiei, & BD perimeter suæ basis. Quare superficies conica æqualis erit triangulo rectangulo ABD (n. 148.). Rursum recta BC sit radius basis coni; ponaturque EF media proportionalis inter AB & BC; atque eadem EF sit radius circuli, cujus perimeter sit recta FG. Itaque superficies hujus circuli æqualis erit triangulo re-









ctan-

ctangulo EFG. Demonſtrandum jam unicè ſupereſt triangulum ABD, nempe ſuperficiem coni X æquari triangulo EFG, hoc eſt, ABD$=$EFG. Per hyp., AB:EF::EF:BC; & quoniam circumferentiæ circulorum ſunt inter ſe, uti eorum diametri, vel ſemidiametri; ideſt, EF:BC::FG:BD, erit AB:EF::EF:BC::FG:BD. Ergo AB:EF::FG:BD; & conſequenter AB$\times$BD $=$EF$\times$FG. Atqui horum æqualium productorum ſemiſſes ſunt triangula ABD & EFG. Ergo ABD$=$EFG. Quod erat &c.

ELEMENTUM VI.

De Sphæra.

DEFINITIONES.

151. SPHÆRA *est solidum unica superficie comprehensum, in cujus area punctum est* C, *quod dicitur centrum; a quo omnes rectæ, quæ in illam curvam superficiem cadunt, sunt inter se æquales.* Centrum,

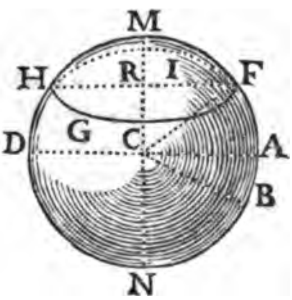
152. *Quævis recta* CA, CB, CF *&c. ducta a centro sphæræ in ejus superficiem, dicitur radius, seu semidiameter. Recta autem* DA, *aut alia quævis per centrum ducta, & utrinque terminata ad superficiem, vocatur diameter sphæræ.* Radius, Diameter,

Corollarium I.

153. OMnes sphæræ diametri æquales sunt inter se. Nam diameter quævis componitur ex binis radiis.

Corollarium II.

154. SI semicirculus MAN circa suam diametrum MN immotam gyret, generat sphæram habentem idem centrum, & eamdem diametrum. Nam omnes rectæ CB, CA, CF ductæ a centro immoto C semicirculi ad quævis superficiei puncta, erunt æquales eidem CM, vel CN immotæ. Genesis sphæræ.



Corollarium III.

155. HInc, si in semiperipheria MAN semicirculi genitoris sumatur quodvis punctum F, a quo ducatur perpendicularis FR ad suam diametrum, hæc eadem recta erit radius circuli descripti per revolutionem puncti F.

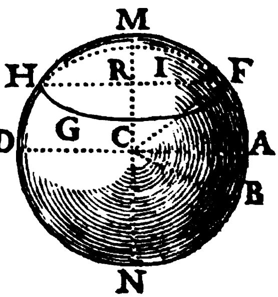
Corollarium IV.

Compositio sphæræ, 156. SOliditas ergo sphæræ considerari poterit tanquam composita ex infinitis laminis circularibus parallelis invicem superimpositis; quas transversim, & perpendiculariter secet eadem diameter MN, & quarum singulæ producantur a totidem ordinatis semicirculi, & perpendicularibus diametro MN, circa quam revolvuntur.

Sector, *Si sector* MRF *circuli gyret circa suum radium* MR, *solidum a revolutione hujus sectoris inde genitum, vocatur sector sphæræ, seu pyramis sphærica.*

Segmentum. *Si sphæra secetur plano, partes, in quas eadem dividitur, vocantur segmenta.*

Si planum secans FGHI *non transeat per centrum* C, *portio sphæræ, quæ continet centrum, dici solet majus segmentum, & illa, quæ est extra centrum, segmentum minus.*



Sabo-

Scholion.

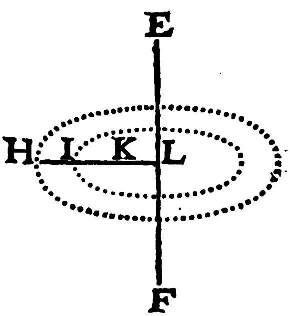
CUm sphæricæ portionis, aut corporis ei inscripti, aut coni superficiem nomino, semper intelligo absque basi; & dum cylindri superficiem dico, intelligo similiter absque basibus, nisi adjungatur tota. Rursum, cùm de cylindris, & conis ago, semper intelligo rectos.

Corollarium V.

157. HInc, si sphæra secetur quovis plano, sectio erit circulus, qui erit omnium maximus, si sectionis planum transeat per centrum sphæræ; quo casu habebit diametrum, & centrum commune cum diametro, & centro sphæræ; ac prout planum sectionis magis, vel minùs accedet ad centrum sphæræ, circulus per sectionem genitus, erit major, vel minor.

MONITUM.

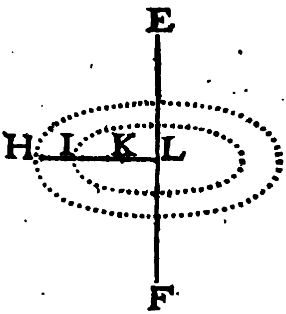
158. *SI recta* HL *gyret circa rectam* EF, *cui sit perpendicularis, singula hujus rectæ puncta describent circumferentiam circuli, cujus centrum est punctum* L. *Jam verò, cùm in ordinandis proportionibus, designandisque productis inter demonstrandum sæpius adhibendæ sint circumferentiæ, & superficies circulorum; molestumque accidat, si singulis*



vicibus opus sit scribere, circumferentia, aut superficies circuli sub hoc, vel illo radio: *consultiùs putarunt plerique recentiores Geometræ has expressiones compendiosiùs signis aliquot notare.*

Itaque circumf. HL, circumf. IL, circumf. KL *significant circumferentias circulorum sub radio* HL, IL, KL. Circul. HL, circul. IL, circul. KL *significant superficies circulorum sub radio* HL, IL, KL &c.

Similiter, cùm area circuli sit factum ex circumferentia in semissem radii, superficies circuli sub radio KL *poterit etiam sic designari, circumf.* $KL \times \frac{KL}{2}$.



Eadem ratione cylindrus, cujus radius HL, *&* *altitudo* EL, *notabitur per circul.* $HL \times EL$. *Et conus, cujus radius* HL, *&* EL *altitudo, repræsentabitur per* $\frac{\textit{circul. } HL \times EL}{3}$.

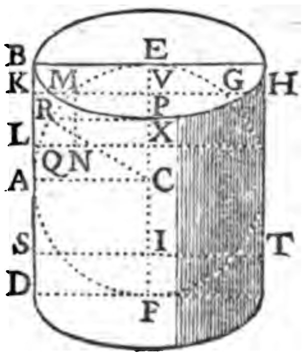
De

De Superficie Sphæræ.

LEMMA I.

159. *SI cylindrus rectus sphæræ circumscribatur, & utriusque convexa superficies secetur planis basi cylindri parallelis, & intervallis infinitè parvis, zonæ elementares utriusque convexæ superficiei erunt numero æquales.*

Demonstratio, quæ a sola vocum explanatione pendet. Esto semicirculus E A F inscriptus rectangulo E B D F. Semicircumferentia E A F, & latus B D rectanguli intelligantur divisa in infinitas particulas infinitè parvas, & invicem respondentes, uti M Q, K L, per infinitas rectas, puta, K V, L X perpendiculares diametro E F. Tum circa diametrum E F rotentur semicirculus, & rectangulum E B D F: ille sphæram, hoc cylindrum sphæræ circumscriptum motu suo generabit. Particula autem quævis, puta, M Q semiperipheriæ E A F describet zonam infinitè parvæ latitudinis, ac proinde elementum superficiei sphæricæ, quam eadem circumferentia describet. Et rursum in recta B D pars quævis infinitè parva correspondens K L describet zonam elementarem respectivam superficiei convexæ cylindri geniti a recta B D sub eadem sphæræ diametro, & altitudine.



 His

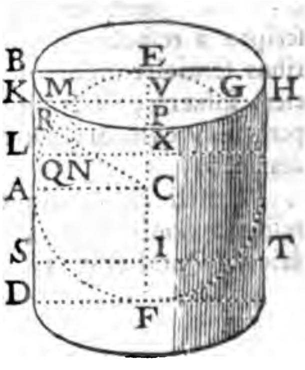
His animadversis, perspicuum est zonas elementares utriusque convexæ superficiei, sphæricæ, & cylindricæ fore numero æquales. Nam perpendiculares omnes K V, L X ad axem E F revolutionis semper divident semicircumferentiam E A F, & rectam B D in eumdem numerum partium, quæ invicem respondebunt, singulæ singulis. Quod erat &c.

LEMMA II.

160. *Iisdem stantibus, zonæ elementares utrinque descriptæ a particulis mutuò respondentibus* M Q, K L *tum semicircumferentiæ, tum rectæ* B D, *sunt magnitudine æquales, singulæ singulis.*

Demonstratio. Particula M Q semiperipheriæ, cùm sit infinitè parva, censeri poterit instar lineæ rectæ; ac proinde in sua revolutione super E F, & latitudine sua infinitè parva describet superficiem parvi coni truncati, cujus oppositæ bases erunt genitæ a duabus rectis M V, Q X perpendicularibus axi E F.

Quamobrem, si per punctum medium R particulæ M Q ducatur ad axem E F perpendicularis R P, hæc recta erit radius circuli (n. 155.) ad æquale intervallum a duabus oppositis basibus parvi trunci conici M V X Q.



Hinc superficies convexa hujus coni, seu minimæ zonæ sphæricæ descriptæ per M Q habebitur (n. 148.), si per M Q latus coni multiplicetur circumferentia circuli, cujus radius est R P; nimirum, superficies zonæ sphæricæ elementaris ritè repræsentabitur per hoc productum, circumf. R P $\times$ M Q. Similiter (n. 60.) superficies convexa parvæ zonæ cylindricæ descriptæ per K L habebitur, si per K L multiplicetur circumferentia circuli, cujus radius est L X; nimirum, superficiem hujus zonæ cylindricæ benè repræsentat hoc productum, circumf. L X $\times$ K L. His positis, propositum Lemma huc tandem devolvitur, ut ostendatur circumf. R P $\times$ M Q $=$ circumf. L X $\times$ K L.

Ducatur infinitè parva M N parallela axi E F, seu perpendicularis ipsi P R; ducaturque R C. Constat duo triangula M N Q, R P C esse similia (n. 413. Geom. planæ); nam habent latera mutuò perpendicularia, singula singulis. Ergo M Q : M N :: R C : R P. Atqui M N $=$ K L, & R C $=$ A C $=$ L X; hinc M Q : K L :: L X : R P. Jam verò (n. 480. Geom. planæ) L X : R P :: circumf. L X : circumf. R P. Quare M Q : K L :: circumf. L X : circumf. R P; & consequenter circumf. R P $\times$ M Q $=$ circumf. L X $\times$ K L.

Equantur itaque duarum zonarum correspondentium superficies, sphærica, & cylindrica, descriptæ a respectivis particulis M Q, K L elementaribus semicircumferentiæ E A F generantis superficiem sphæræ, & rectæ B D generantis convexam superficiem cylindri sub eadem sphæræ altitudine, & diametro.

Simili ratiocinio demonstrabitur æqualitas in reliquis zonis elementaribus sphæricis, & cylindricis. Quod erat &c.

Scho-

Scholion.

HÆc duo Lemmata quàm expeditam viam aperiant Archimedæis de sphæra Theorematis demonstrandis facilè intelliget is, qui Archimedem ipsum legerit.

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

161. *CYlindri recti sphæræ circumscripti superficies convexa, demptis basibus oppositis, æqualis est superficiei sphæræ.*

Demonstratio. Per duo Lemmata præcedentia constat summam omnium zonarum elementarium, quæ componunt superficiem sphæricam, & numero, & magnitudine respectivè æquari summæ omnium zonarum, quæ componunt superficiem convexam cylindri sphæræ circumscripti. Ergo cylindri &c. Quod erat &c.

Corollarium I.

162. CUjuscumque sphæræ superficies quadrupla est maximi circuli ejusdem sphæræ. *Archimedes lib.* 1. *prop.* 37.

Sphæram concipe inscriptam cylindro: cujus proinde basis æqualis erit maximo circulo ejusdem sphæræ, & altitudo æqualis diametro maximi sphæræ circuli. Hoc posito, superficies convexa hujus cylindri recti est quadrupla areæ suæ basis (n. *61.*). Atqui superficies convexa cylindri per Theor. æquat superficiem sphæricam. Ergo hæc est

qua-

quadrupla areæ basis cylindri circumscripti, hoc est, circuli maximi ejusdem sphæræ.

Corollarium II.

163. **E**X hoc præclaro, atque admirabili Theoremate habetur dimensio superficiei sphæricæ. Duplex est praxis.

I. Metire diametrum sphæræ, ex qua (n. 297. Geom. planæ) elice circumferentiam: utriusque semisses invicem multiplicatæ dabunt (n. 295. & 296. Geom. planæ) aream maximi sphæræ circuli: quæ quater sumpta ipsam sphæræ superficiem dabit.

Ut si, juxta suppositionem P. Tacquet, & aliorum, maximus orbis terræ circulus inventus sit continere quadrata milliaria unius horæ, sive belgica 5940000, hic numerus quadruplicatus exhibet quadrata milliaria belgica 23760000, quæ in superficie orbis terræ continentur.

Scholion.

AD inveniendam aream maximi circuli, quoniam perinde est sive semisses diametri, & circumferentiæ inter se multiplices, sive totas, modò producti sumas dimidium: ea ex duabus via tenenda est, qua fractiones evitantur.

II. Multiplica diametrum sphæræ per circumferentiam maximi circuli: productum ipsa erit sphæræ superficies. Nam productum ex diametro, & circumferentia quadruplum est producti ex semidiametro, & semicircumferentia, hoc est, maximi sphæræ circuli. Atqui etiam sphæræ superficies quadrudrupla est maximi circuli. Ergo productum ex diametro, & circumferentia, superficiei sphæræ equale est.

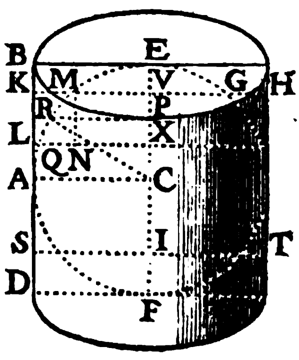
Ut si terræ diametro, juxta eamdem suppositionem, dentur milliaria unius horæ $2750\frac{14}{71}$; atque inde maximi circuli circumferentia eliciatur milliariorum 8640: hi duo numeri, omissa fractione, invicem multiplicati dabunt rursum quadrata milliaria belgica 23760000. totam orbis terræ superficiem constituentia.

Corollarium III.

164. SI cylindrus, ac sphæra cylindro inscripta secentur planis KH, ST ad axem EF perpendicularibus, erunt singula superficiei cylindricæ segmenta segmentis singulis superficiei sphæricæ æqualia.

Nam utraque convexa superficies trunci sphærici, & cylindrici ex iisdem elementis componitur, ex eodem nempe zonarum correspondentium, & æqualium numero.

Hinc superficiem convexam trunci sphærici inter duo plana parallela intercepti metiri facilè disces. Nam, quemadmodum superficiem convexam cylindri inter duo plana parallela intercepti metimur, multiplicando ejus altitudinem KS, seu VI per circumferentiam circuli, cujus radius sit SI, sive AC, qui est etiam radius sphæræ; ita superficies convexa trunci sphærici a



duo-

duobus planis parallelis comprehensi obtinebitur, multiplicando eorumdem planorum distantiam VI per circumferentiam circuli, qui eumdem habeat radium, quem habet sphæra; nimirum, circumf. AC $\times$ VI, sive circumf. EC $\times$ VI.

Corollarium IV.

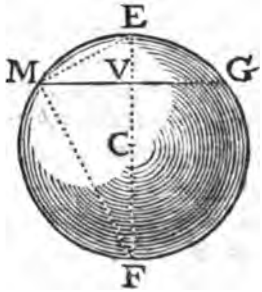
165. HInc segmenti sphærici EMVGE convexa superficies æquat convexam superficiem cylindri BH habentis eamdem sphæræ diametrum, & eamdem altitudinem EV, quam habet idem segmentum.

Nam utriusque convexa superficies ex iisdem constat zonarum correspondentium elementis, numero, & magnitudine æqualibus. Itaque, quemadmodum superficies convexa cylindri BH = circumf. KV $\times$ BK = circumf. EC $\times$ EV; ita superficies convexa segmenti EMVGE æquabitur facto circumf. EC $\times$ EV.

PROPOSITIO II.

THEOREMA.

166. *SEgmenti sphærici* EMVGE *convexa superficies æquat planam superficiem circuli, cujus radius sit chorda* EM *ducta a summitate segmenti ad extremitatem basis.*



Demonstratio. Ducantur chordæ ME, MF. Triangula EVM, EMF cùm sint rectangula, & habeant angulum communem in E, erunt similia.

Ergo

Ergo $EV:EM::EM:EF::\frac{EM}{2}:\frac{EF}{2}=EC.$

Quare $EV:EM::\frac{EM}{2}:EC;$

five $EV:\frac{EM}{2}::EM:EC.$

Cùm autem circulorum circumferentiæ ſint, ut radii, erit $EM:EC::$ circumf. EM : circumf. EC.

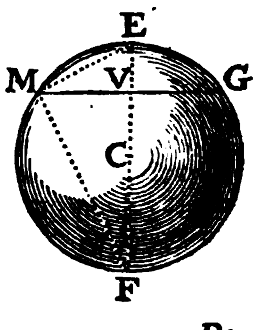
Ergo $EV:\frac{EM}{2}::$ circumf. EM : circumf. EC;

ac proinde circumf. $EC \times EV =$ circumf. $EM \times \frac{EM}{2}$.

Atqui primum productum, circumf. $EC \times EV$ eſt (n. 165.) ſuperficies convexa ſegmenti ſphærici EMVGE; & ſecundum productum, circumf. $EM \times \frac{EM}{2}$ eſt ſuperficies circuli, cujus radius ſit EM. Ergo &c. Quod erat &c.

Corollarium.

167. SUperficies convexa ſegmenti ſphærici EMVGE adæquat utramque ſimul ſuperficiem, nimirum, circuli, ſeu baſeos ſegmenti ſub radio MV, & ſuperficiem circuli ſub radio EV, qui altitudinem exhibet ejuſdem ſegmenti ſphærici.



Nam, cùm triangulum MVE ſit rectangulum in V, ſuperficies circuli, cujus radius eſt latus EM, æquabitur ſummæ duorum circulorum, quorum radii ſunt hæc eadem latera MV, EV anguli recti.

De

De Sphæræ Soliditate.

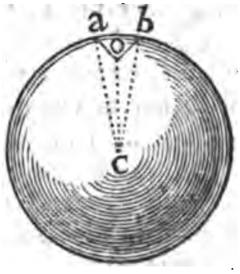
PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

168. *Sphæræ soliditatem invenire.*

Resolutio. Superficiem sphæræ inventam n. 163. duc in trientem sui radii, vel in sextantem suæ diametri: hoc factum dabit soliditatem sphæræ.

Demonstratio. Si enim superficies sphæræ concipiatur resoluta in particulas ita parvas, puta, *a o b*, ut infinitè accedant ad superficiem planam, & a singulis earum perimetri punctis ad centrum sphæræ tendant rectæ *a c*, *o c*, *b c*, habebitur soliditas sphæræ resoluta in totidem pyramides, quarum bases erunt illæ particulæ superficiei sphæricæ, & altitudo communis erit radius sphæræ. Quare omnium summa æquabitur pyramidi habenti basem æqualem toti illi superficiei sphæricæ, & altitudinem eamdem. Atqui (n. 115.) hujus pyramidis soliditas habetur, multiplicando suam basim, idest sphæræ superficiem, per trientem suæ altitudinis, radii nempe sphæræ. Ergo soliditas sphæræ invenitur, multiplicando ipsius superficiem in trientem sui radii, vel in sextantem suæ diametri. Quod erat &c.



Co-

Corollarium.

169. OMnis ſphæra æqualis eſt cono, vel pyramidi, cujus altitudo par eſt radio ſphæræ, baſis verò ſuperficiei ſphæræ æqualis.

Exemplum. Eſto ſphæræ diameter $= 4$ pedibus. Per rationem veræ proximam ab Archimede traditam inveniatur longitudo circumferentiæ ſui maximi circuli. Fiat itaque $7 : 22 :: 4 : \frac{4 \times 22}{7} = \frac{88}{7}$, valor circumferentiæ quæſitæ, quæ multiplicata per ſuam diametrum (n. 163.) dabit ſuperficiem ſphæræ; erit itaque hæc ſuperficies $= \frac{88}{7} \times 4 = \frac{352}{7} = 50 + \frac{2}{7}$. Denique ducatur $50 + \frac{2}{7}$ in ſextam partem diametri, hoc eſt, in $\frac{4}{6}$, ſive in $\frac{2}{3}$, erit $50\frac{2}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{100}{3} + \frac{4}{21} = 33\frac{1}{3} + \frac{4}{21} = 33 + \frac{11}{21}$. Quod ſignificat ſoliditatem unius ſphæræ, cujus diameter ſit $= 4$ pedibus, eſſe 33 pedum cubicorum, & $\frac{11}{21}$ unius pedis cubici proximè; nam ratio Archimedæa diametri ad circumferentiam circuli non eſt niſi ratio approximata.

Scholion I.

170. *DEmonſtratio jam allata hujus Problematis, & aliorum ſequentium per methodum indiviſibilium facillima eſt, ac penitus diverſa ab ea demonſtrandi methodo, qua uſus eſt Archimedes; quæ, quamvis ſubtilis, & ingenioſa ſit, prolixa tamen eſt, & ar-*

& ardua, ad quam videlicet adbibentur propositiones undecim, præter alias non paucas, a quibus illæ dependent. Ipsum verò Theorema ab Archimede proponitur in hunc modum: Omnis sphæra quadrupla est coni basim habentis æqualem maximo circulo sphæræ, altitudinem verò radium.

Scholion II.

171. *Hinc, dato quòd superficies terræ sit proximè sphærica, invenietur ejus soliditas.*

Inventa sit sphæræ terrestris superficies continere quadrata unius horæ milliaria 23760000; *& semidiameter esto milliariorum horariorum* 1375, *cujus tertia pars est* $458\frac{1}{3}$: *multiplica* 458, *omissa fractione, per* 23760000: *provenient* 10882080000 *cubica unius horæ milliaria pro soliditate orbis terræ.*

PROPOSITIO IV.

PROBLEMA.

172. *Invenire rationem, quam habet soliditas sphæræ ad soliditatem cylindri eidem sphæræ circumscripti.*

Resolutio, ac demonstratio. Quoniam basis cylindri sphæræ circumscripti est maximus circulus ejusdem sphæræ, & altitudo hujus cylindri est sphæræ diameter; vocetur L cylindrus, S sphæra, C circumferentia maximi ejusdem circuli, & D ipsius diameter.

Jam verò soliditas hujus cylindri habetur ex ductu suæ basis in suam altitudinem; basis cylindri propositi est circulus, cujus area æquatur producto circumferentiæ in semissem radii, sive in quartam partem diametri. Itaque hæc area erit $C \times \frac{D}{4} = \frac{CD}{4}$; quæ rursum ducta in altitudinem D, exhibet $\frac{CDD}{4}$ soliditatem cylindri L circumscripti.

Atqui soliditas sphæræ S est $\frac{CDD}{6}$; nam (n. 163.) superficies sphæræ est CD, quæ multiplicata in sextam partem suæ diametri, nimirum, in $\frac{D}{6}$, dabit (n. 168.) $CD \times \frac{D}{6} = \frac{CDD}{6}$ soliditatem sphæræ.
Quare $L:S::\frac{CDD}{4}:\frac{CDD}{6}$.
Multiplicetur utrumque membrum secundæ rationis, more fractionum, per 4 & 6:
erit $L:S::6\,CDD:4\,CDD::6:4::3:2$.
Ergo $L:S::3:2$. Quod erat &c.

Hinc ostenditur celebre Archimedæum Theorema. *Soliditas cylindri recti ad soliditatem sphæræ, cui circumscribitur, est in proportione sesquialtera, hoc est, ut* 3 *ad* 2; sive, *Soliditas sphæræ æquatur duabus tertiis partibus soliditatis cylindri recti sphæræ circumscripti.*

Scholion.

QUanti hoc Theorema fecerit Archimedes, argumento est, quòd tumulo suo sphæram cylindro inscriptam apponi voluerit. Qua de re erit non injucunda Tironibus narratio Tullii lib. 5. *tusc. quæst.*

Ex

Ex eadem urbe humilem homunculum a pulvere, & radio excitabo, qui multis annis post fuit, Archimedem; cujus ego Quæstor ignoratum ab Syracusanis, cùm esse omnino negarent, septum undique, & vestitum vepribus, & dumetis indagavi sepulcrum: tenebam enim quosdam senariolos, quos in ejus monumento esse inscriptos acceperam; qui declarabant in summo sepulcro sphæram esse positam cum cylindro. Ego autem, cùm omnia collustrarem oculis, (est enim ad portas agragianas magna frequentia sepulcrorum) animadverti columellam non multùm e dumetis eminentem, in qua inerat sphæræ figura, & cylindri; atque ego statim Syracusanis (erant autem principes mecum) dixi me illud ipsum arbitrari esse, quod quærerem. Immissi cum falcibus multi purgarunt, & aperuerunt locum; quò, cùm patefactus esset aditus, ad adversam basim accessimus. Apparebat epigramma exesis posterioribus partibus versiculorum, dimidiatis ferè. Ita nobilissima Civitas, quondam verò etiam doctissima, sui civis unius acutissimi monumentum ignorasset, nisi ab homine arpinate didicisset.

Verùm, ne fortasse Tirones calculo literali minimè assueti, præcedentem demonstrationem ægrè assequantur, placet idem Theorema geometricè, & universaliter demonstrare, præmisso hoc Lemmate.

LEMMA.

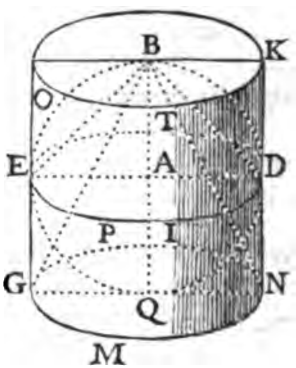
173. *Hemisphærium* EOBD, *coni* EBD *eamdem secum basim, & altitudinem habentis duplum est.*

Demonstratio. Conus, cujus basis est superficies hemisphærica EOBD, altitudo autem radius, est ad conum EBD, ut basis ad basim, hoc est, ut superficies hemisphærica EOBD ad maximum circulum PT. Atqui superficies hemisphærica EOBD dupla est maximi circuli PT (n. 162.). Ergo conus habens pro basi superficiem EOBD, pro altitudine radium AB, duplus est coni EBD. Jam verò (n. 168. & 169.) hemisphærium æquatur cono habenti pro altitudine radium, pro basi superficiem hemisphæricam EOBD. Ergo etiam hemisphærium coni EBD duplum est. Quod erat &c.

PROPOSITIO V.

THEOREMA.

174. *Cylindrus rectus* GK *sphæræ, cui circumscribitur, & soliditate, & superficie tota sesquialter est.*



Demonstratio. Communis sphæræ, ac cylindri axis esto BQ; conus verò maximus hemisphærio EOBD inscriptus, sit EBD.

I. Cylindrus EK (semissis totius GK) triplus est coni EBD (n. 109.); hemisphærium verò ejusdem coni duplum est ex

Lem.

Lem. Ergo cylindrus eſt ad hemiſphærium, ut 3 ad 2; & conſequenter totus cylindrus GK eſt ad totam ſphæram, ut 3 ad 2.

II. Superficies convexa cylindri ſphæræ circumſcripti abſque baſibus quadrupla eſt baſeos MI; ac proinde cum baſibus, hoc eſt, tota cylindri ſuperficies erit ſextupla baſeos MI, quæ par eſt maximo circulo ſphæræ. Atqui ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli. Ergo tota cylindri GK ſuperficies eſt ad ſphæræ ſuperficiem, ut *6* ad 4, ſive, ut 3 ad 2.

Itaque cylindrus ſphæræ ſibi inſcriptæ & ſoliditate, & tota ſuperficie ſeſquialter eſt. Quod erat &c.

Scholion.

Opportunè notat P. Tacquet idcirco fortaſſe inter alia tam multa, & præclara inventa ſua hoc Archimedi præ reliquis placuiſſe, quòd & corporum, & ſuperficierum corpora ipſa continentium eadem eſſet, atque una rationalis proportio.

Corollarium I.

175. Si concipiatur conus GBN habens pro baſi pariter circulum ſphæræ maximum, & cylindrus ſphæræ circumſcriptus; erunt conus, ſphæra, cylindrus ad ſe invicem, ut numeri 1, 2, 3.

Nam cylindrus æquatur producto ex baſi ſua, ſive areà circuli ſphæræ maximi in diametrum BQ (n. *68.*); ſphæra binis ejus producti trientibus (n. 174.); conus uni trienti (n. 10*9*.).

Corollarium II.

176. SI concipiatur conus habens pro basi circulum sphæræ maximum, & pro altitudine radium ejusdem sphæræ, hæc erit quadrupla hujus coni.

Corollarium III.

177. ERgo sphæra æquatur cono, cujus basis sit quadrupla maximi sphæræ circuli, & altitudo par radio ejusdem sphæræ. Nam hic conus quadruplus erit alterius habentis radium sphæræ pro altitudine, & pro basi circulum sphæræ maximum.

Corollarium IV.

178. ERgo sphæra æquatur etiam cono, cujus basis sit æqualis superficiei sphæricæ, & altitudo par radio ejusdem. Nam superficies sphæræ quadrupla est maximi sphæræ circuli.

ELEMENTUM VII.

De Ratione Superficierum, & Solidorum in corporibus similibus.

DEFINITIO.

179. CORPORA *similia sunt, quæ totidem ex æquo planis sibi mutuò similibus continentur.*

Corollarium I.

180. IN corporibus similibus latera omnia homologa planorum terminantium pariter homologorum sunt in eadem ratione. Nam in planis similibus latera homologa sunt proportionalia.

Corollarium II.

181. PLana omnia terminantia homologa duorum corporum similium sunt in eadem ratione. Hæc quippe plana, cùm sint similia, erunt proportionalia quadratis suorum laterum homologorum. Cùm autem latera homologa sint omnia in eadem ratione (n. 180.), eorum quadrata erunt pariter in eadem ratione; & consequenter plana omnia terminantia homologa duorum corporum similium sunt in eadem ratione.

Corollarium III.

182. IN corporibus similibus anguli solidi homologi sunt æquales. Nam in planis similibus anguli homologi sunt æquales; anguli verò solidi homologi ex concursu planorum homologorum oriuntur.

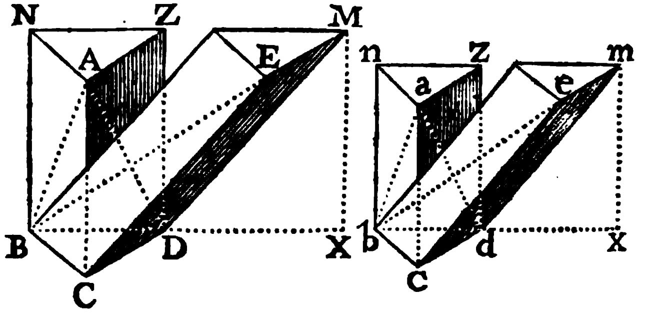
PROPOSITIO I.

THEOREMA.

Ratio altitudinum.

183. *Similium prismatum* BCDEM, bcdem *altitudines* MX, mx *sunt, ut duo quælibet homologa basium latera* CD, cd.

Demonstratio. Erectis enim ad perpendiculum super easdem bases duobus aliis prismatis similibus NC, *nc*, & sub iisdem respectivè altitudinibus, erit (n. 180.) latus ZD ad latus homologum *zd*, hoc est, per hyp., MX:*mx*::CD:*cd*. Quare similium prismatum BCDEM, *bcdem* &c. Quod erat &c.



Co-

Corollarium I.

184. HInc similium pyramidum altitudines sunt pariter, ut duo quælibet homologa basium latera.

Corollarium II.

185. BAses prismatum, & pyramidum similium sunt in ratione duplicata altitudinum. Sunt enim plana similia (n. 179.), & consequenter in ratione duplicata laterum homologorum CD, *cd* (n. 499. & 500. Geom. planæ).

Corollarium III.

186. ALtitudines prismatum, & pyramidum similium sunt directè, ut perimetri basium. Nam perimetri basium sunt, ut duo latera earumdem homologa (n. 476. Geom. planæ).

Corollarium IV.

187. QUoniam cylindri similes sunt species prismatum similium (n. 83.), & coni similes, species pyramidum similium (n. 85.); hinc altitudines tam cylindrorum, quàm conorum similium erunt directè inter se, ut peripheriæ circulorum basis. Cùm autem peripheriæ sint, ut radii (n. 480. Geom. planæ), altitudines horum solidorum erunt pariter directè inter se, ut radii circulorum basis.

PRO-

PROPOSITIO II.

THEOREMA.

Ratiò superficierum.

188. *SUperficies omnium solidorum similium, quæ planis rectilineis terminantur, sunt, ut duo quælibet plana homologa, ac proinde proportionales quadratis duorum homologorum laterum planorum eorumdem.*

Demonstratio. Plana similia, quibus ipsa solida continentur, sunt in eadem ratione (n. 181.). Ergo, ut singula singulis, ita omnia omnibus; hoc est, summa planorum terminantium solidum, sive tota superficies ipsius solidi erit ad summam omnium planorum terminantium aliud solidum, sive ad totam superficiem alterius solidi similis, ut planum unius ad planum alterius. Atqui plana similia sunt inter se, ut quadrata laterum homologorum. Ergo superficies omnium solidorum similium &c. Quod erat &c.

Corollarium I.

189. SUperficies prismatum, & pyramidum similium sunt in ratione duplicata, sive, ut quadrata suarum altitudinum. Horum namque altitudines sunt directè inter se, ut duo quælibet homologa basium latera (n. 183. & 184.).

Corollarium II.

190. HInc, cùm cylindri similes sint species prismatum similium, & similes coni sint species similium pyramidum, curvæ tam cylindrorum,

quàm

quàm conorum similium superficies sunt respectivè inter se in ratione duplicata, sive, ut quadrata suarum altitudinum.

Corollarium III.

191. CUm altitudines cylindrorum, & conorum similium sint, ut radii circulorum basis (n. 187.), curvæ superficies cylindrorum & conorum similium sunt respectivè in ratione duplicata, sive, ut quadrata ipsorum radiorum, ac proinde, ut ipsi basium circuli (n. 506. Geom. planæ).

Corollarium IV.

192. CUrvæ similium cylindrorum, atque conorum superficies, sumptæ unà cum eorumdem circulis, sunt in ratione radiorum circulorum basis duplicata. Nam circuli, quibus similes cylindri terminantur, quique sunt similium conorum bases, sunt pariter in ratione duplicata suorum radiorum.

PROPOSITIO III.

THEOREMA.

193. *OMnia prismata, parallelepipeda, cylindri, pyramides, & coni sunt in ratione composita basium, & altitudinum.* Ratio solidorum.

Demonstratio. Sunt enim, ut facta ex basibus in altitudines. Ergo in ratione composita basium, & altitudinum (n. 486. Geom. planæ). Quod erat &c.

Co-

Corollarium I.

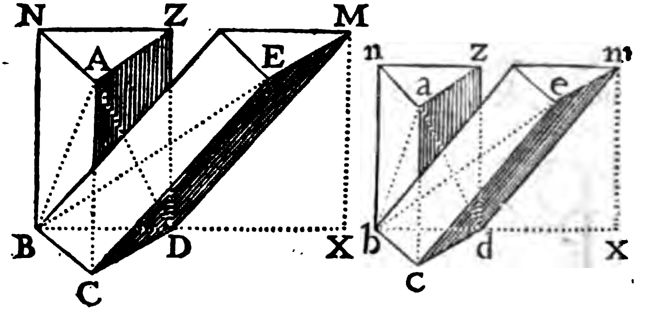
194. QUare, si bases fuerint æquales, altitudinum rationem habent; si altitudines fuerint æquales, basium rationem habent.

Corollarium II.

195. CYlindrorum, & conorum bases sunt circuli, qui duplicatam habent rationem suarum diametrorum. Ergo cylindri, & coni quicunque sunt in ratione composita ex directa altitudinum, & duplicata diametrorum; & consequenter, si fuerint æquè alti, sunt, ut quadrata diametrorum.

Corollarium III.

196. QUare, si in cylindris, & conis altitudo fuerit diametro basium æqualis, erunt in ratione triplicata diametrorum basium (n. 492. Geom. planæ).



PRO-

PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

197. P*Rismata similia* MBC, mbc *sunt in ratione triplicata suorum laterum homologorum* CD, cd.

Demonstratio. Sunt quippe inter se, per præced., in ratione composita ex ratione basium BCD, *bcd*, & ex ratione altitudinum MX, *mx*. Atqui bases BCD, *bcd* sunt in ratione duplicata laterum homologorum CD, *cd* (n. 499. Geom. planæ); & altitudines MX, *mx* sunt directè, ut ipsa latera CD, *cd* (n. 183.). Ergo prisma MBC est ad prisma *mbc* in ratione composita ex ratione laterum CD, *cd*, & ex eadem duplicata. Hæc autem est ipsissima ratio triplicata laterum CD, *cd*. Ergo prismata similia sunt in ratione triplicata suorum laterum homologorum. Quod erat &c.

Corollarium I.

198. CUbi sunt in ratione triplicata laterum homologorum. Nam omnes cubi sunt solida similia, & similia prismata (n. 179.).

Corollarium II.

199. PRismata similia sunt in ratione triplicata suarum altitudinum. Altitudines namque horum prismatum sunt, ut duo quælibet ipsorum latera homologa (n. 183.).

Co-

Corollarium III.

200. PYramides ſimiles ſunt in ratione triplicata tum laterum homologorum, tum altitudinum. Pyramides quippe ſunt directè inter ſe, ut priſmata ſuper eaſdem baſes, & ſub iiſdem altitudinibus conſtituta (n. 108.); atque adeo pyramides ſimiles ſunt, ut priſmata ſimilia; ac proinde &c.

Corollarium IV.

201. CUm cylindri ſimiles ſint ſpecies priſmatum ſimilium, & ſimiles coni ſint ſpecies pyramidum ſimilium, tam cylindri, quàm coni ſimiles ſunt in ratione triplicata ſuarum altitudinum.

Corollarium V.

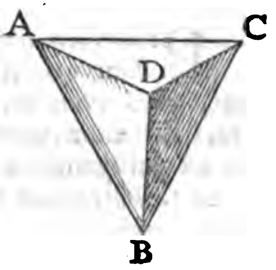
202. CUmque altitudines tam cylindrorum, quàm conorum ſimilium ſint directè inter ſe, ut radii circulorum baſis (n. 187.), tam cylindri, quàm coni ſimiles ſunt directè inter ſe in ratione ipſorum radiorum triplicata; atque hinc, ut cubi tam ipſorum radiorum, quàm ſuarum altitudinum (n. 494. Geom. planæ).

DEFINITIONES.

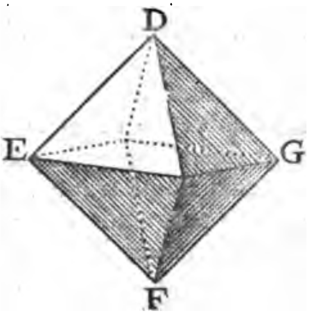
203. E*X omnibus ſolidis, quæ planis ſuperficiebus terminantur, illa dicuntur regularia, quæ planis regularibus, & æqualibus continentur; omneſque ipſorum anguli ſunt inter ſe æquales.*

204. Corpora regularia ſunt cubus, tetraedrum, octaedrum, dodecaedrum, & icoſaedrum. Cætera autem corpora ab his diverſa, irregularia nuncupantur.

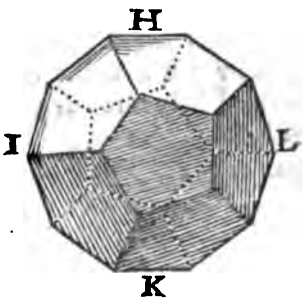
205. *Tetraedrum est solidum quatuor triangulis planis rectilineis, regularibus, & inter se æqualibus terminatum;* ut solidum A BCD.



206. *Octaedrum est solidum octo triangulis planis rectilineis, regularibus, & inter se æqualibus comprehensum;* ut solidum D EFG.



207. *Dodecaedrum est solidum, quod duodecim pentagonis æqualibus, & regularibus continetur;* ut solidum HIKL.



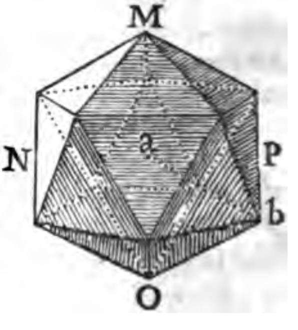
208.

208. *Icosaedrum* postremò *est solidum, quod viginti triangulis planis rectilineis, regularibus, & æqualibus comprehenditur*; ut solidum MNOP.

209. Universaliter *Polyedrum vocatur illud solidum, quod pluribus figuris planis rectilineis terminatur*. Est enim polyedrum in genere solidorum, quod est polygonum in genere planorum.

210. *Polyedrum regulare illud dicitur, quod planis regularibus, & æqualibus continetur; omnesque ipsius anguli solidi sunt inter se æquales*.

211. *Centrum polyedri regularis est punctum a sumptum in illius area, a quo omnes rectæ ductæ ad singulos ipsius polyedri angulos solidos sunt æquales*. Nam, quemadmodum polygono regulari circumscribi potest circulus, cujus peripheria per apices omnium angulorum polygoni transeat; ita cuilibet polyedro regulari sphæra circumscribi potest, cujus superficies per apices omnium angulorum ipsius polyedri simul transeat; ac proinde perspicuum est ejusmodi punctum in quolibet polyedro regulari reperiri.



212. *Radius polyedri regularis est recta quævis linea ducta ab illius centro ad apicem angulorum ipsius polyedri*. Sic recta *a b* est radius polyedri regularis MNOP.

Co-

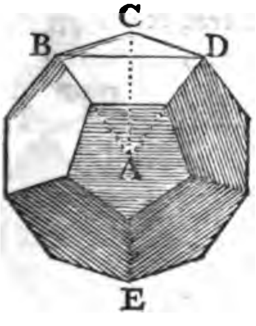
Corollarium.

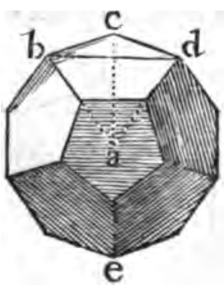
213. OMnia corpora regularia, nimirum, omnes cubi, omnia tetraedra &c. ſunt reſpectivè ſibi mutuò ſimilia. Etenim planis numero æqualibus, & figurà ſimilibus, utpote regularibus, omnia reſpectivè continentur.

LEMMA.

214. P*Olyedra ſimilia in totidem ex æquo pyramides ſimiles, quarum baſes ſint ipſorum plana terminantia, reſolvi poſſunt, ſi ab eorum centro ad ſingulos angulos ſolidos ducantur radii.*

Cùm enim polyedrum ſit inter figuras ſolidas, quod eſt polygonum inter planas, quemadmodum duo quælibet polygona ſimilia reſolvi poſſunt in tot ſimilia triangula, quot ſunt ipſorum latera; ita duo quælibet ſimilia polyedra reſolvuntur in tot ſimiles pyramides, quot ſunt plana, quibus polyedra ipſa terminantur.



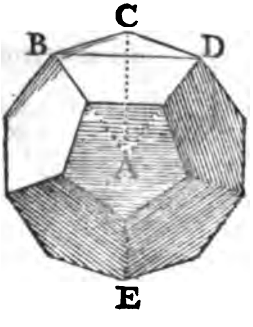


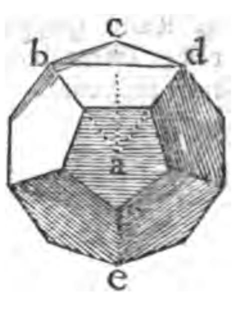
PROPOSITIO V.

THEOREMA.

215. *Polyedra similia sunt in ratione triplicata suorum laterum homologorum.*

Demonstratio. Pyramis BADC, cujus vertex est centrum polyedri, sit una ex illis, ex quibus componitur polyedrum BCDE; & similiter pyramis *badc* una ex illis, in quas resolvitur polyedrum *bcde*; eruntque per Lemma pyramides ipsæ similes inter se. Quamobrem pyramis BADC est ad pyramidem *badc* in ratione triplicata lateris CD ad latus homologum *cd* (n. 200.). Duæ autem quælibet pyramides similes, in quas polyedra ipsa resolvi possunt, hanc eamdem habent rationem inter se; eademque est ratio omnium laterum homologorum in polyedris similibus (n. 180.). Ergo summa omnium pyramidum componentium polyedrum BCDE erit ad summam earum omnium, quæ polyedrum *bcde* constituunt, sive, soliditas unius ad soliditatem alterius erit, ut illarum una BADC ad unam *badc*, atque adeo in ratione triplicata lateris CD ad latus homologum *cd*. Quod erat &c.





Co-

Corollarium I.

216. RAdii polyedrorum regularium ejusdem generis sunt directè inter se, ut duo quælibet latera homologa planorum. Etenim tam radii AB, *ab*, quàm rectæ BD, *bd* sunt latera homologa pyramidum similium BADC, *badc*, in quas polyedra similia resolvuntur; erit ergo AB : *ab* :: BD : *bd* (n. 180.).

Corollarium II.

217. SUperficies polyedrorum regularium ejusdem generis sunt in ratione duplicata suorum radiorum. Hujusmodi namque polyedra sunt similia solida (n. 213.), quorum superficies sunt in ratione duplicata laterum homologorum (n. 188.); radii autem sunt directè inter se, ut duo quælibet homologa planorum latera.

Corollarium III.

218. POlyedra regularia similia ejusdem generis sunt in ratione suorum radiorum triplicata. Radii quippe sunt directè inter se, ut duo quælibet latera homologa planorum, quibus terminantur polyedra.

LEMMA.

219. *POlyedrum regulare planis numero infinitis, & magnitudine infinitè parvis comprehensum desinit in sphæram.*

Perspicuum est enim, tantò magis ad sphæram polyedrum accedere, quò numero plura, & magnitudine exiliora sint plana, quibus continetur. Quare, si multiplicetur numerus planorum, & eorum magnitudo minuatur in infinitum, polyedrum abibit in sphæram.

Corollarium.

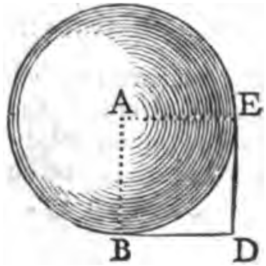
220. OMnes idcirco sphæræ spectari possunt tanquam polyedra regularia ejusdem generis.

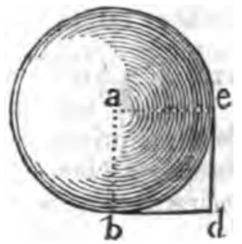
PROPOSITIO VI.

THEOREMA.

221. *SPhærarum superficies sunt in ratione duplicata suorum radiorum.*

Demonstratio. Sphæræ EB, *e b* assumi possunt





tan-

tanquam polyedra regularia ejuſdem generis. Ergo earum ſuperficies ſunt in ratione radiorum AB, *ab* duplicata, ſive, ut eorum quadrata (n. 217.). Quod erat &c.

Scholion.

Itaque ſphæra, cujus radius ſit unius pedis, tricesies minùs ſuperficiei habebit, quàm ſphæra, cujus radius ſit pedum 6. Superficies quippe harum ſphærarum erunt, ut quadrata radiorum, ſive, ut 1 ad 36.

PROPOSITIO VII.

THEOREMA.

222. *Sphæræ ſunt in ratione triplicata, ſive, ut cubi ſuorum radiorum* AB, *ab*.

Demonſtratio. Cùm enim per Lem. ſpectentur tanquam polyedra regularia ejuſdem generis, erunt & ipſæ ſphæræ in ratione triplicata, ſive, ut cubi ſuorum radiorum AB, *ab*, vel diametrorum. Quod erat &c.

Corollarium I.

223. Datis duabus ſphæris, quarum una habeat 1 pedem diametri, & altera 3 pedes, ſoliditas primæ erit viceſies ſepties minor ſoliditate ſecundæ. Nam prima erit ad ſecundam, ut cubus unitatis ad cubum ternarii, ſive, ut 1 ad 27.

Corollarium II.

224. NOtabis obiter principium universale, quod maximi usus est in physicis, nimirum, non eadem proportione decrescere superficiem corporis, qua decrescit tota moles, seu soliditas; cùm hæc decrescat in ratione triplicata, superficies verò solùm in ratione duplicata. Quare in minore mole corporis major proportionaliter superficies habetur, & in majore mole alterius homogenei corporis minor respectivè superficies; quod adhibito superiore exemplo sic explicatur.

Sphæra, cujus diameter sit trium pedum, viceſies septies plus habet soliditatis, quàm sphæra diametri unius pedis. Quamobrem, si harum sphærarum superficies parem habere deberent proportionem ad earum soliditatem, superficies majoris ad superficiem minoris esse oporteret, ut 27 ad 1. Est autem tantùm, ut 9 ad 1; sunt enim sphærarum superficies inter se, uti quadrata diametrorum ex Theor. Itaque superficies corporum non sunt eorum soliditati proportionales.

PROPOSITIO VIII.

THEOREMA.

225. P*Olyedra, quæ dicuntur regularia, plura esse non possunt, quàm quinque, nimirum, tetraedrum, octaedrum, icosaedrum, cubus, dodecaedrum.*

Demonstratio. Angulorum solidorum proprietas demonstrata n. 39. maximum usum habet pro figuris

ris solidis determinandis, quæ vocantur polyedra regularia; quippe quæ facies omnes æquales habent rectilineas, & regulares. Ea autem non posse esse plura, quàm quinque, sic ex anguli solidi natura demonstratur.

Omnis angulus solidus constare debet angulis planis, qui simul sumpti sint minores quatuor rectis (n. 39.); non potest autem constare paucioribus, quàm tribus. Itaque

I. A tribus triangulis æquilateris in unum punctum coeuntibus potest constitui angulus solidus pyramidis, seu tetraedri. Nam trianguli æquilateri angulus quivis continet gradus 60; & consequenter tres anguli plani constituentes angulum solidum erunt simul minores duobus rectis.

II. Ex quatuor triangulis æquilateris similiter ad unum punctum coeuntibus constitui potest angulus solidus octaedri.

III. Ex quinque angulus solidus icosaedri. Nam æquilateri trianguli anguli quatuor, aut quinque sunt quatuor rectis minores.

IV. Angulus quivis quadrati, cùm sit graduum 90, per se patet a tribus quadratis in unum punctum coeuntibus effici solidum angulum cubi.

V. Angulus quivis pentagoni continet gradus 108. Quoniam verò tres anguli pentagonici sunt quatuor rectis minores, poterunt tria pentagona in unum punctum coeuntia constituere solidum angulum, nempe dodecaedri.

Atque hinc quinque exsurgunt regularia corpora. Præter hæc nulla esse alia sic demonstratur.

A sex æquilateris triangulis non poterit effici angulus solidus, multò minùs a pluribus; sex quippe anguli trianguli æquilateri conficiunt quatuor rectos.

A quatuor quadratis non posse constitui angulum solidum, ac multò minùs a pluribus, per se patet.

Quatuor anguli pentagonici sunt quatuor rectis majores; singuli enim efficiunt gradus 108. Ergo a quatuor pentagonis nequit fieri angulus solidus.

Angulus quivis hexagoni continet gradus 120; & consequenter tres anguli hexagonici sunt quatuor rectis æquales.

Cùm verò tres anguli hexagonici sint quatuor rectis æquales, tres anguli figurarum quarumlibet hexagono majorum, ut septagoni, octogoni &c. quatuor rectis majores erunt.

Quare manifestum est reliquas figuras ordinatas omnes esse ineptas ut solidum angulum constituant; adeoque quinque tantùm esse species corporum regularium, eorum nimirum, quæ constituantur tribus angulis pentagonorum, quatuor quadratorum, tribus, vel quatuor, vel quinque triangulorum æquilaterorum. Quod erat &c.

PROPOSITIO IX.

PROBLEMA.

226. *Metiri soliditatem, ac superficiem quinque corporum regularium.*

Resolutio. Tetraedri soliditas invenitur n. 115., cùm sit pyramis triangularis æquilatera.

Cubi, seu hexaedri soliditas n. 67.

Octaedri area sic invenitur. Quia octaedrum dividitur in duas pyramides similes, & æquales, utriusque pyramidis area est investiganda.

Dodecaedri area similiter invenitur. Quia ductis

ctis ex centro dodecaedri ad omnes ejus angulos rectis lineis, dodecaedrum dividitur in duodecim pyramides pentagonas æquales; si soliditas unius inventa multiplicetur per 12, procreatur area totius dodecaedri.

Icosaedrum dividitur pariter in 20 pyramides triangulares æquales. Soliditas inventa unius pyramidis multiplicetur per 20; & totius icosaedri soliditas obtinebitur.

Superficies eorundem prodit, si area unius plani terminantis quæratur, & inventa multiplicetur per numerum, a quo corpus denominatur.

PROPOSITIO X.

PROBLEMA.

227. *Soliditatem corporum irregularium metiri.*

Resolutio. Corporum irregularium dimetiendorum ratio geometrica alia non est, quàm ut prius in regularia resolvantur. Nam soliditates singulorum inventæ per Probl. præced., & simul junctæ dabunt soliditatem totius corporis irregularis.

Quoniam verò quædam irregularia corpora commodè in regularia resolvi non possunt, cujusmodi sunt statuæ, urnæ, amphoræ, vasa diversarum figurarum, frusta saxorum, & similia; idcirco Clavius, Wolfius, ac plerique Scriptores aliam tradunt mechanicam regulam ad hujusmodi corpora dimetienda, quam describit Clavius lib. 5. Geom. pract. cap. 11.

Paretur arca lignea ex asseribus lævigatis, instar parallelepipedi cujusdam, quæ pice ita oblinatur, ut aquam continere possit. Arca hæc tantæ

debet

debet esse longitudinis, latitudinis, atque altitudinis, ut corpus metiendum intra ipsam positum, aquà totum possit operiri.

Posita hac arca horizonti æquidistante, beneficio libellæ, aut perpendiculi, infundatur in eam tantùm aquæ, quantùm satis est, ut corpus impositum omnino tegat; notenturque diligenter suprema latera aquæ in asseribus arcæ, ut habeatur altitudo aquæ usque ad arcæ fundum.

Extracto deinde corpore, ita tamen, ut nihil aquæ extra arcam cadat, notentur rursum latera aquæ, postquam quieverit.

Quòd si metiamur duo parallelepipeda, quorum basis communis est arcæ fundus, altitudines verò sunt rectæ lineæ a lateribus aquæ notatis usque ad basim, & minus a majore subtrahamus; relinquetur parallelepipedum soliditati corporis propositi omnino æquale.

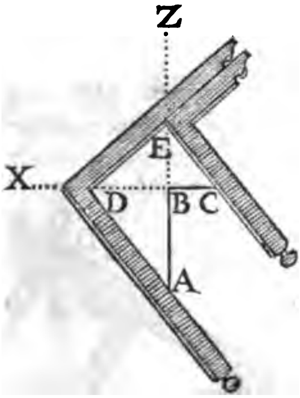
PRAXIS GEOMETRICA
ELEM. VII. SOLIDORUM.

De Transformatione Figurarum solidarum in alias Figuras solidas.

PROBLEMA I.

228. INTER *duas datas rectas* AB, BC *invenire duas medias proportionales.*

Resolutio. Ponantur AB, BC ad rectum angulum; & producantur indefinitè versus X & Z. Accipiantur deinde duæ normæ; & unius normæ angulus D applicetur rectæ BX, ea lege, ut & latus unum transeat per A, & ad punctum E, in quo latus alterum secabit rectam BZ, applicata norma secunda transeat per C. Dico BD, BE duas esse medias proportionales inter AB & BC; hoc est, AB:BD::BD:BE::BE:BC.



Demonstratio patet ex n. 567. Geom. planæ. Nam ADE rectangulum triangulum est; & ab angulo recto in basim perpendicularis cadit DB. Ergo AB:BD::BD:BE. Ob eamdem causam BD:BE::BE:BC. Quod erat &c.

Scho-

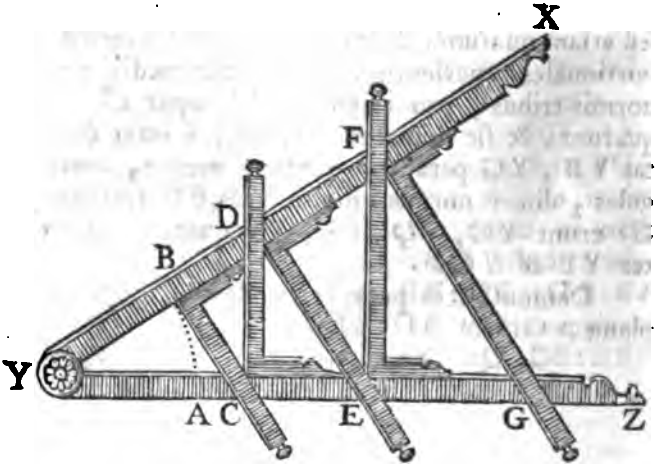
Scholion.

HÆc resolutio, quæ Platoni tribuitur, quamvis illa quidem & ingeniosa sit, & omnium, quæ afferri solent, facillima; tamen, quia habita normæ, & regulæ applicatione, non nisi tentando fit, geometrica non est.

PROBLEMA II.

229. *INter duas datas rectas invenire quotvis medias proportionales.*

Resolutio. Ad similitudinem circini paretur instrumentum X Y Z, compositum duabus regulis mobilibus X Y, Z Y, quæ aperiri possint, & claudi circa Y. His insertæ sint plures normæ inter se connexæ ea lege, ut, dum aperiuntur regulæ, norma B C impellat normam C D in regula Y Z, & norma C D



im-

impellat normam DE in regula YX, & sic deinceps; dum verò regulæ clauduntur, omnia puncta B, C, D, E, F, G incidant in unum, idemque punctum A. Sint itaque inveniendæ duæ mediæ proportionales inter duas datas rectas. Minor datarum transferatur in regulam YX, & sit YB; major in regulam alteram YZ, & sit YE. Applicetur norma prima ad punctum B, ibidemque firmetur; & aperiantur regulæ, donec normæ tertiæ latus transeat per E. Dico YC, YD esse duas medias proportionales inter datas YB, YE.

Demonstratio manifesta est ex n. 567. Geom. pl. Nam ex natura instrumenti in trigono rectangulo YCD erit YB : YC :: YC : YD.
Rursum in trigono rectangulo YDE erit
YC : YD :: YD : YE. Quod &c.

Corollarium.

230. Hoc instrumento, quod excogitavit Cartesius, inter duas datas non solùm duæ, sed etiam quatuor, & sex, immo quotvis mediæ proportionales reperientur. Pro duabus mediis opus est normis tribus, pro tribus mediis opus est normis quatuor, & sic deinceps. Itaque, si inter duas datas YB, YG petantur quatuor mediæ, aperi regulas, donec normæ quintæ latus FG transeat per G: erunt YC, YD, YE, YF quatuor mediæ inter YB & YG.

Demonstratio patet ex eodem n. 567. Geom. planæ.

Scholion I.

ARtificium hoc, quamvis sit paulò operosius, magnam sanè laudem Cartesio conciliavit, tum quia nihil perficit tentando, tum verò maximè quia ad quotcunque medias se extendit; quod neque per sectiones conicas, neque per modos ullos a Geometris hactenus inventos obtineri potest. Qua verò ratione idem Problema per analysim resolvatur, fusè docuimus in nostris commentariis Arith. universalis lib. 2. parte 3. n. 291.

Scholion II.

PEr duas medias proportionales perficitur cubi duplicatio, & corpora quæcunque in data proportione augentur, vel minuuntur; quemadmodum idipsum in figuris planis effici demonstravimus per unam mediam. At quoniam in Geometria practica multò commodiùs numeris utimur, quàm lineis; idcirco subdo sequens Problema, cujus generalem resolutionem dedi in meis commentariis Arith. univers. lib. 2. p. 3. n. 291.

PROBLEMA III.

231. *INter duos datos quotvis numeros, puta, 2 & 16, invenire duos medios proportionales.*

Resolutio. I. Primus datorum 2 cubetur, & fiat 8.

II. Instituatur regula trium, in qua duo primi termini sint primus, & secundus datorum numerorum 2 & 16, & tertius terminus sit cubus 8 primi numeri 2; & per regulam proportionum inveniatur quartus proportionalis *64*, nimirum, 2 : 1*6* : : 8 : *64*.

III.

III. Radix cubica hujus quarti numeri proportionalis, hoc est, 4, erit primus duorum mediorum, qui quæruntur.

IV. Inter hunc primum numerum duorum mediorum inventum 4, & secundum datum 16 quæratur rursum medius proportionalis; qui, uti præscribitur in Arithmetica, obtinebitur, multiplicando 4 in 16; & a producto 64 extracta radix quadrata 8 dabit medium proportionalem quæsitum inter 4 & 16. Quamobrem 4 & 8 sunt duo medii proportionales inter datos numeros 2 & 16; sunt enim in proportione continua, 2 : 4 :: 4 : 8 :: 8 : 16.

Quòd si inter operandum radix cubica, aut quadrata obtineri exactè non possit, approximatio ad veram radicem ope decimalium instituenda est; uti docuimus in nostris commentariis Arith. universalis.

Demonstratio. Si quatuor numeri fuerint in proportione continua, erit cubus primi ad cubum secundi, uti primus numerus ad quartum (n. 493. Geom. planæ). Cognitis ergo primo numero, & quarto, & cubo primi, invenietur per regulam auream cubus secundi; cujus radix cubica dabit secundum numerum quatuor continuè proportionalium. Denique medius proportionalis inter secundum & quartum exhibet tertium numerum quatuor continuè proportionalium. Quod erat &c.

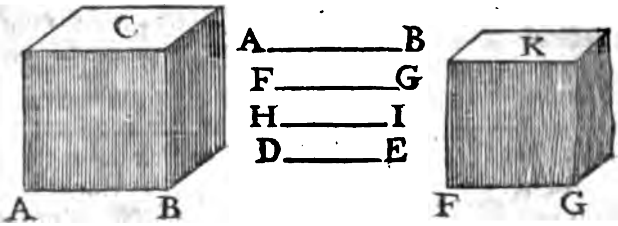
PRO-

PROBLEMA IV.

232. *Invenire cubum, qui ad alium datum C sit in data quacunque ratione, puta 2, ad 3.*

Resolutio. Dividatur latus AB dati cubi C in tres partes æquales; & harum partium duabus fiat æqualis recta DE; tum inter AB & DE quærantur per Probl. I. aut II. aut III. duæ mediæ proportionales FG, HI. Dico cubum, cujus latus sit FG prima duarum mediarum, fore illum, qui quæritur.

Demonstratio. Quoniam quatuor rectæ AB, FG, HI, DE sunt in proportione continua, erit cubus primæ AB ad cubum secundæ FG, uti prima AB ad quartam DE (n. 493. Geom. planæ). Atqui per Constr., AB est ad DE, uti 2 ad 3. Ergo &c. Quod erat &c.



Scholion.

Atque hoc est celebratissimum illud Problema, quod deliacum a deliaco Apolline dictum est, quòd is lue sævissima Athenas populante, consultus respondisset, pestem cessaturam, si ejus ara, quæ cubica erat, duplicaretur. Ita Valerius Maximus lib. 8.

Co-

Corollarium.

233. QUoniam sphæræ sunt, ut cubi suorum radiorum, seu diametrorum (n. 222.), quemadmodum cylindri, prismata, coni, & pyramides similes (n. 201. & 202.); hinc, dato id genus solido, ut inveniatur aliud simile solidum in data ratione majus, vel minus, satis erit, ut eadem operatio instituatur respectu suorum axium, quæ nuper instituta est respectu laterum cubi. Invento axe, construendum est solidum dato simile; quod proinde erit in data ratione.

Scholion.

UT ne Tironum exercitationi desim, sequentium Problematum vel penitus omittam, vel brevissimè indicabo demonstrationes, quæ ex præjactis Elementis facilè repeti possunt.

PROBLEMA V.

234. *PYramidem, conum, aut sphæram transformare in parallelepipedum æqualis soliditatis.*

Resolutio. I. Basis rectilinea, vel circularis pyramidis, aut coni transformetur in æquale rectangulum, uti docuimus Elem. 7. Geom. planæ n. 296. & 297., & in Praxi geom. ejusdem Elem. n. 305. & sequentibus; tum super hoc rectangulo, tanquam base, fiat parallelepipedum, cujus altitudo sit tertia pars altitudinis pyramidis, aut coni propositi. Dico factum &c.

II. Quod attinet ad sphæram, ejus superficies transformabitur primò in rectangulum, multiplicando sphæræ diametrum in circumferentiam maximi circuli (n. 163.); tum super hoc rectangulo construatur parallelepipedum, cujus altitudo æquet trientem radii sphæræ, aut sextantem suæ diametri. Dico factum &c.

PROBLEMA VI.

235. *Cylindrum, aut prisma quodvis polygonum in parallelepipedum ejusdem soliditatis convertere.*

Resolutio. Reducta basi cylindri, aut prismatis dati in rectangulum, super quo erigatur parallelepipedum ad eamdem cum prismate, & cylindro altitudinem, Dico factum &c.

PROBLEMA VII.

236. *Dato cono æqualem pyramidem ejusdem altitudinis construere; & vicissim, pyramidi conum æqualem ejusdem altitudinis.*

PROBLEMA VIII.

237. *Dato prismati, vel cylindro, æqualem sub eadem altitudine pyramidem, vel conum construere.*

Et vicissim, datæ pyramidi, vel cono æquale prisma, vel cylindrum ejusdem altitudinis invenire.

Resolutio. In primo casu, basis prismatis, vel cylindri triplicetur, hoc est, augeatur in ratione tri-

tripla; tum super eadem basi sic aucta, extruatur pyramis, vel conus ad eamdem altitudinem.

In secundo casu, basis pyramidis, vel coni minuenda erit in ratione tripla; & supra eamdem sic imminutam erigatur prisma, vel cylindrus ad ipsius pyramidis, vel coni altitudinem.

PROBLEMA IX.

238. *Datum cylindrum, vel prisma, similiter datum conum, vel pyramidem cujuscumque altitudinis, in æqualem cylindrum &c. sub data qualibet alia altitudine, & supra basem quotcunque angulorum revocare.*

Resolutio. In ea proportione, quàm data altitudo quæsiti solidi habet ad altitudinem dati, augeatur, vel minuatur basis ejusdem dati solidi. Nam solidum supra hanc basim auctam, vel diminutam secundùm datam altitudinem, constructum, erit id, quod quæritur, hoc est, æquale dato solido; quandoquidem altitudines cum basibus reciprocæ sunt.

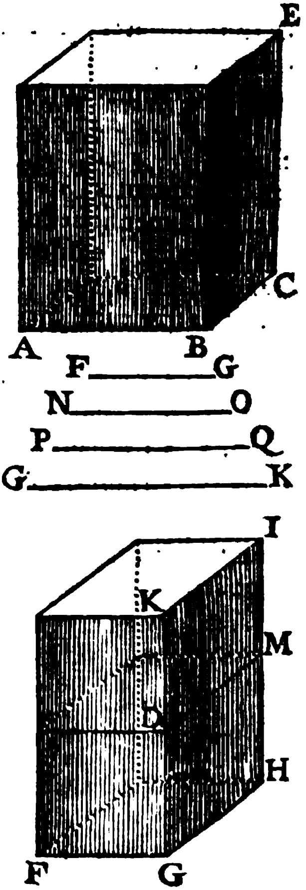
Quòd si basi constructi solidi fiat æqualis basis quotcunque angulorum, & supra eam construatur solidum sub data altitudine, erit hoc etiam solidum proposito solido æquale.

PROBLEMA X.

239. *Dato parallelepipedo* A E *æqualem cubum construere.*

Resolutio. Si tres parallelepipedi A E dimensiones fuerint inter se inæquales, uti hic supponitur:

I. Inter duas minores dimensiones A B & B C quæratur media proportionalis F G, cujus quadratum F H sit basis alterius parallelepipedi F I habentis eamdem altitudinem dati parallelepipedi A E; quare unum alteri erit æquale, cùm utriusque bases, & altitudines sint æquales.



II. Inter latus unum F G, & altitudinem G K alterius parallelepipedi F I, quærantur duæ mediæ proportionales N O & P Q. Dico cubum primæ N O æqualem fore parallelepipedo F I, seu dato A E.

Demonstratio. Fiat G D $=$ F G, ut habeatur cubus F M; voceturque F G, seu G H, seu G D, a; G K, b; & N O, c. Parallelepipedum F I erit aab; cubus F M erit aaa; & cubus ex

recta

recta NO erit ccc. Oportet jam ostendere $aab = ccc$.

Cubus FM, & parallelepipedum FI, propter eamdem basim FH, erunt inter se in ratione suarum altitudinum GD & GK; ac proinde

$$aaa : aab :: a : b.$$

Deinde propter quatuor rectas continuè proportionales, erit cubus primæ FG ad cubum secundæ NO, uti prima FG ad quartam GK; hoc est

$$aaa : ccc :: a : b.$$

Ergo $\quad aaa : aab :: aaa : ccc$;

& consequenter $aab = ccc$. Quod erat &c.

Si dimensiones dati parallelepipedi forent numeris expressæ, easdem inter se multiplicare oporteret; & ex harum producto extracta radix cubica dabit latus cubi quæsiti.

Corollarium.

240. Hinc patet reductio omnium solidorum in cubos. Nam pyramides, coni, sphæræ, cylindri, prismata (n. 234. & 235.) transformantur in parallelepipeda æqualis soliditatis.

De Circino proportionis, ac de usu Lineæ Stereometricæ, seu solidorum, & Metallicæ.

241. GEometriæ elementaris progressionem æquis passibus comitatur circinus proportionis; ac duæ postremæ eidem instrumento inscriptæ, explicandæ sunt lineæ, solidorum nimirum, ac metallica, quarum in praxi geometrica mirificus est usus. Vocant passim hanc lineam stereometricam, seu solidorum, quia ejus usus elucet in augendis, ac minuendis corporibus, seu solidis; hæc continet homologa latera solidorum similium, quæ minimi solidi ab unitate incipientis multipla sunt juxta ordinem naturalem numerorum 1, 2, 3 &c. usque ad 64; qui numerus ferè solet esse maximus terminus divisionum ejusdem lineæ stereometricæ, proximo intervallo prope lineam chordarum, instrumento inscriptæ.

PROBLEMA XI.

242. L*ineam solidorum instrumento inscribere.*

Resolutio. Divisio hujus lineæ hac methodo instituitur.

I. Accipe ex scala geometrica quotcunque particulas, puta, 1000, pro latere solidi omnium maximi 64 circino inscribendi. Seligitur numerus iste partium æqualium, quippe qui commodior est calculo peragendo, reliquisque lateribus solidorum eliciendis.

II. Quia verò radix cubica numeri 64 est 4, & radix cubica unitatis est 1; consequens est, ut latus assumptum solidi 64 quater contineat latus solidi

primi,

primi, & omnium minimi ab unitate incipientis; cujus proinde latus erit in iisdem particulis 250. Nam solida similia sunt inter se, ut cubi suorum laterum homologorum (n. 215.).

III. Numerus earumdem particularum 500, duplus primi numeri 250, dabit latus octavi solidi, nimirum solidi octies majoris primo. Nam cubus numeri 2, idest 8 continet octies cubum unitatis.

Similiter numerus 750, triplus primi numeri 250, erit latus solidi vigesimi septimi. Nam cubus numeri 3 est 27; & totidem vicibus continet cubum unitatis.

IV. Paulo major difficultas subeunda in calculo est, ut inveniantur latera homologa solidorum, quæ dupla sint, tripla, quadrupla &c. primi solidi; quæ quidem latera non ita exactè exprimi numeris pariter possunt; nam eorum solidorum radices sunt incommensurabiles. Approximatio tamen ad ipsorum radices surdas, quantùm satis est ad usum, fieri potest sequenti methodo.

V. Invenire oporteat numerum, qui exprimat latus solidi, quod duplum sit primi solidi, similis, & omnium minimi. Hujus latus inventum 250 cubetur, & fiat cubus 15625000; a quo duplicato, hoc est, a numero 31250000, extrahatur radix cubica, quæ proximè invenietur esse 315, & erit latus solidi dupli.

VI. Ut habeatur latus solidi, quod triplum sit primi, & minimi, triplicandus erit hic idem numerus 15625000, ab eoque sic triplicato extrahenda radix cubica, quæ invenietur esse 360; atque ita de reliquis lateribus homologis, quæ singula clarè perspicies in sequenti tabula.

Divisiones laterum homologorum pro Linea solidorum.

1	250.	33	802.
2	315.	34	810.
3	360.	35	818.
4	397.	36	825.
5	427.	37	833.
6	454.	38	840.
7	478.	39	848.
8	500.	40	855.
9	520.	41	862.
10	538.	42	869.
11	556.	43	876.
12	572.	44	882.
13	588.	45	889.
14	602.	46	896.
15	616.	47	902.
16	630.	48	908.
17	643.	49	914.
18	655.	50	921.
19	667.	51	927.
20	678.	52	933.
21	689.	53	939.
22	700.	54	945.
23	711.	55	951.
24	721.	56	956.
25	731.	57	962.
26	740.	58	967.
27	750.	59	973.
28	759.	60	978.
29	768.	61	984.
30	777.	62	989.
31	785.	63	995.
32	794.	64	1000.

Problema XII.

243. Similia corpora in data proportione augere, vel minuere.

Resolutio. Quæritur cubus alterius dati duplus. Latus cubi dati transfer circino communi in lineam solidorum transversim, hinc atque inde ad intervallum numeri pro libito assumpti, puta, inter 20 & 20: stante eadem circini proportionum apertura, accipe intervallum numeri dupli, ut in hoc exemplo intervallum transversale inter 40 & 40. Hoc erit latus cubi quæsiti.

Si quæras sphæram alterius datæ triplam in soliditate; transfer diametrum datæ sphæræ ad intervallum pro libito assumptum, puta, inter 20 & 20: intervallum inter *60* & *60* erit diameter sphæræ quæsitæ.

Si minuenda sit sphæra in proportione tripla, procedendum esset contraria ratione.

Corollarium.

Simili methodo utendum cum lateribus homologis aliorum corporum regularium similium ad illa augenda, vel minuenda. Quòd si latera hæc homologa longiora sint, quàm ut intervallis instrumenti transversim applicari possint, sumatur horum semissis, triens, quadrans &c. Nam quod ex eadem operatione prodibit, erit semissis, triens, aut quadrans dimensionis quæsitæ.

Demonstratio pendet ex similitudine triangulorum, & constructione lineæ solidorum.

PROBLEMA XIII.

244. *Datis duobus ſolidis ſimilibus, invenire eorum proportionem mutuam.*

Reſolutio. Aperto inſtrumento, latus unius ſolidi transferatur in lineam ſolidorum ad intervallum eorum numerorum, qui tibi commodiores videbuntur; tum vide, cui intervallo numerorum in eadem linea accommodatur tranſverſim latus homologum alterius ſolidi ſimilis. Numeri, quibus hæc duo latera homologa convenient, dabunt quæſitam rationem duorum corporum ſimilium.

PROBLEMA XIV.

245. *Lineam conſtruere, hoc eſt, modulum, vulgò* calibro, *qui uſui ſit ad cognoſcenda diverſa pondera inæqualium pilarum ferrearum, quæ a tormentis bellicis explodi ſolent.*

Reſolutio. Docet experientia, pilam ferream, cujus diameter ſit trium pollicum, ponderare quatuor libras; vel, ut tutiùs procedas propter varietatem hujus metalli inæqualiter defæcati, poteris per te ipſum, capere experimentum. Hoc dato, invenies diametros reliquarum pilarum diverſi ponderis, & ejuſdem metalli hac methodo. Trium pollicum longitudinem transfer in lineam ſolidorum tranſverſim inter 4 & 4: ſtante hac inſtrumenti apertura, accipe circino communi in eadem linea ſolidorum, intervalla omnium numerorum ab 1 uſque ad *64*: longitudines ſingulæ transferantur ſucceſſivè in lineam metallo inciſam, vel in latus circini proportionis, uti obſervabis in adjecta figura ſe-

ſequentis paginæ; & ad extremitatem cujuslibet diametri appone numeros reſpondentes in linea ſolidorum. Hi numeri ſignabunt totidem libras globi ferrei, habentis talem diametrum.

Ut autem in eadem recta, hoc eſt, in eodem modulo ſignentur fractiones, puta, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ unius libræ, ita operaberis. Accipe globum ferreum unius libræ; ejuſque diametrum transfer in lineam ſolidorum, ad intervallum quarti ſolidi, nimirum, inter 4 & 4. Sub hac inſtrumenti apertura intervallum primi ſolidi, hoc eſt, inter 1 & 1, erit diameter globi ponderantis $\frac{1}{4}$ unius libræ: intervallum inter 2 & 2 erit diameter globi ponderantis $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ libræ; atque ita de reliquis.

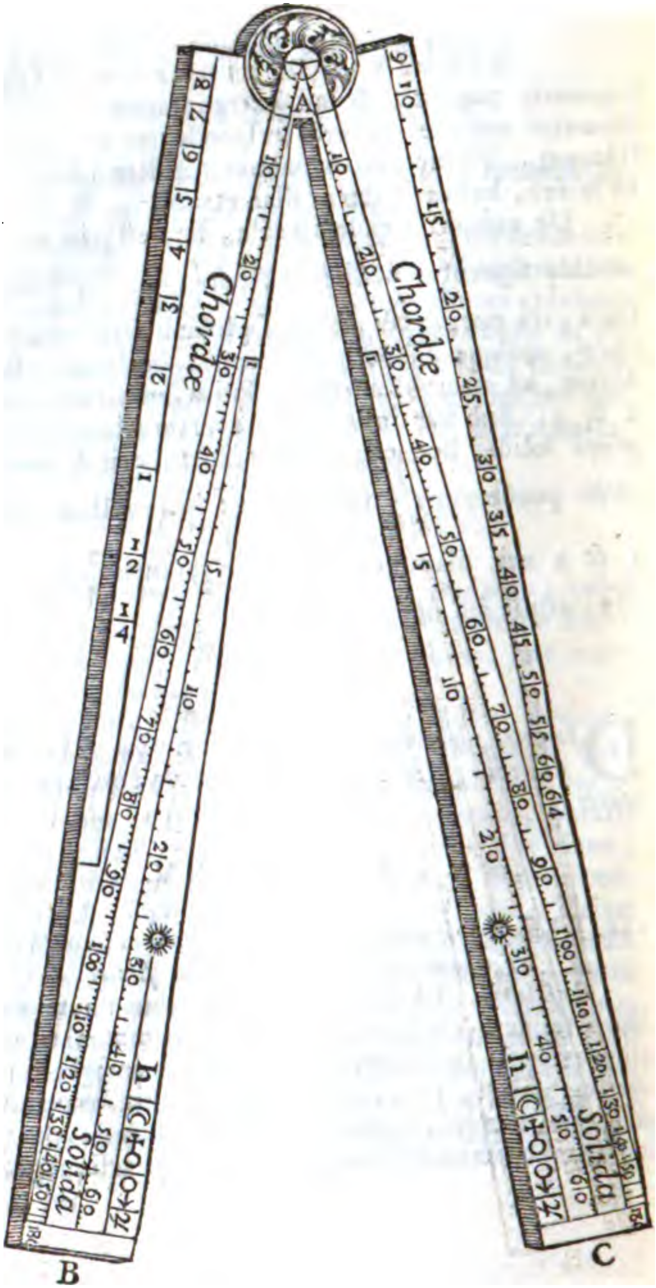
Scholion.

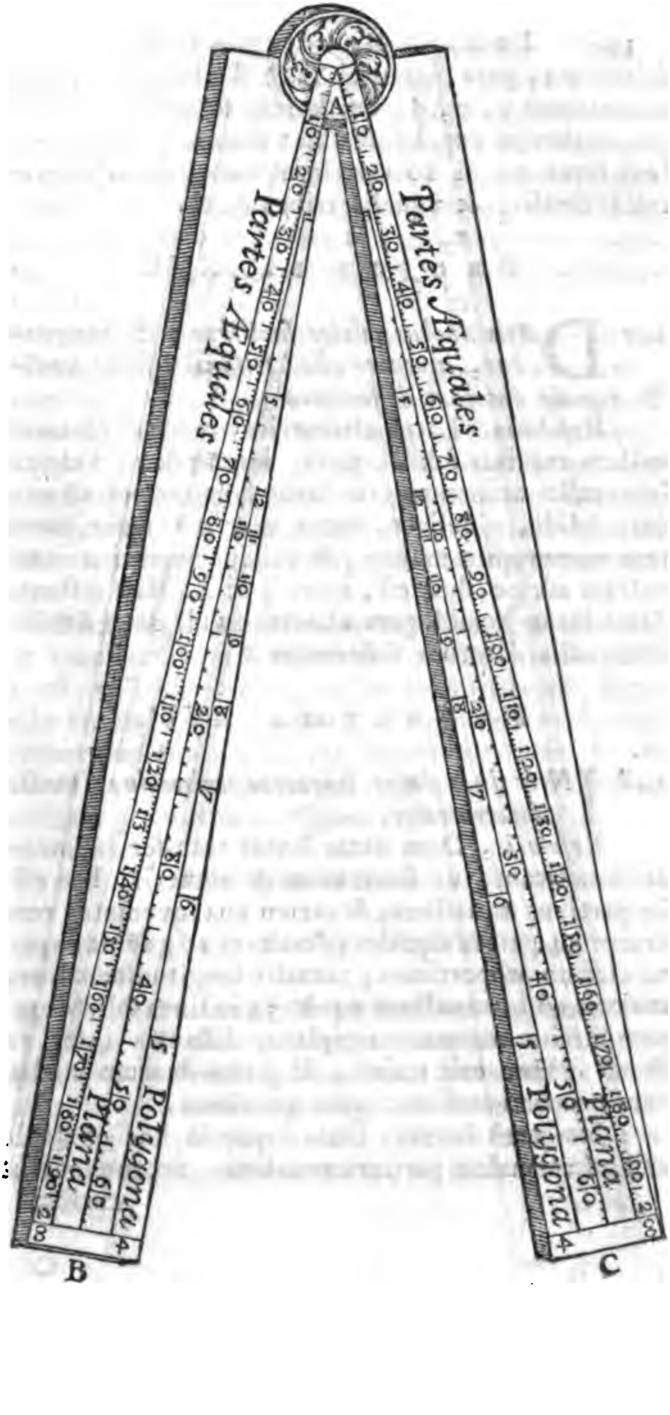
Diametri globorum menſurantur circino ſphærico; ut tradi ſolet in inſtrumentis Architecturæ militaris.

PROBLEMA XV.

246. *Propoſitis quotlibet ſolidis ſimilibus, conſtruere unum omnibus æquale, ac ſimile.*

Reſolutio. Ex datis ſolidis ſimilibus unum pro libito ſelige; ejuſque latus circino communi acceptum transfer in lineam ſolidorum, ad intervallum cujuſvis ſolidi, puta, inter 5 & 5: hac manente poſitione, quæres, quibus tranſverſim numeris, & intervallis accommodentur latera homologa reliquorum ſoli-


A
Chordæ
Chordæ
Solida
Solida
B
C


A
Partes Æquales
Partes Æquales
Polygona
Plana
Polygona
Plana
B
C

solidorum, puta, numeris 7 & 8: horum omnium numerorum 5, 7, 8, qui horum solidorum inter se proportionem exprimunt, fiat summa 20. Intervallum inter 20 & 20 erit latus homologum alterius solidi similis, & æqualis tribus datis.

PROBLEMA XVI.

247. *Datis duobus solidis similibus, & inæqualibus, invenire aliud solidum eisdem simile, & æquale datorum differentiæ.*

Resolutio. Latus alterutrius transfer ad intervallum cujusvis solidi, puta, inter 5 & 5: vide cui intervallo accommodetur latus homologum alterius dati solidi, videlicet, inter *9* & *9*: aufer minorem numerum a majore; & residui numeri 4 intervallum accipe, hoc est, inter 4 & 4. Hæc distantia dabit latus homologum alterius solidi datis similis, & æqualis datorum differentiæ.

PROBLEMA XVII.

248. *Inter duas datas lineas invenire duas medias proportionales.*

Resolutio. Duas datas lineas transfer in lineam arithmeticam, ut fiant notæ in numeris, hoc est, in partibus æqualibus; & earum una inveniatur continere 54 partes æquales, & altera 1*6*; deinde aperto circino proportionis, transfer longitudinem lineæ majoris ad intervallum 54 & 54 in linea solidorum; tum circino communi accipiatur distantia inter 1*6* & 1*6*. Hæc erit major, & prima duarum mediarum proportionalium, quas quærimus.

Jam verò inventa linea, quæ in hoc exemplo erit 3*6* earundem partium æqualium, accommodetur

rursum

rurſum eidem intervallo 54 & 54; quod fiet reſtrictis paululum lateribus inſtrumenti; & altera vice accipiatur diſtantia inter 16 & 16. Hæc erit minor, & ſecunda duarum mediarum, quæ in hoc exemplo invenietur eſſe 24 partium æqualium; ac propterea hæ quatuor lineæ erunt in eadem continua proportione, quam habent hi quatuor numeri 54, 36, 24, 16.

Demonſtratio. Nam propter conſtructionem inſtrumenti, & lineæ ſolidorum, ac proportionem, quam intervalla ſumpta tranſverſim, obtinent cum lateribus inſtrumenti, erit cubus rectæ tranſverſalis 54 ad cubum alterius rectæ tranſverſalis 36, uti latus ipſum lineæ ſolidorum 54 ad latus alterum 16. Quare recta tranſverſalis 36 erit prima duarum mediarum proportionalium, quæ interponi debent inter 54 & 16.

Rurſum per eamdem conſtructionem, cubus rectæ tranſverſalis 36 ad cubum rectæ tranſverſalis 24 eſt, ut latus idem 54 ad latus alterum 16. Ergo recta tranſverſalis 24 eſt ſecunda duarum mediarum proportionalium, quæ interponuntur inter 54 & 16. Tres itaque rectæ 54, 36, 24, 16 ſunt in continua proportione. Quod erat &c.

De Linea Metallica.

Problema XVIII.

249. L*ineam metallicam inſtrumento inſcribere*.

Reſolutio. Corpora regularia, ut ſphæræ, cubi, & ſimilia, diverſorum metallorum comparari inter ſe poſſunt dupliciter, mole, ac pondere. Pondere comparatio fit, quando inter corpora diverſi generis, mole æqualia, at inæqualia ponde-

re,

re, quæritur, quæ ſit ratio ponderis illorum, & quantò unum altero ſit gravius, aut levius. Magnitudine autem fit comparatio, cùm poſita pari gravitate, quæritur, quæ ſit ratio, ſeu proportio magnitudinis eorumdem, quantòve ſit unum altero majus, aut minus.

Poſſunt præterea corpora ejuſdem generis, ſed molis differentis, comparari inter ſe quoad pondus, tum etiam quoad magnitudinem.

Omnibus his comparationibus uſui erit ſequens linea inſtrumento inſcribenda, quam idcirco metallicam vocant; quippe quæ conducit ad cognoſcendam proportionem, quam inter ſe habent ſex metalla, ex quibus ſolida confici ſolent. Hæc prope lineam ſolidorum inſcribitur; ſignanturque metalla notis charateriſticis, quas unicuique proprias voluerunt Alchimiſtæ.

Diviſio hujus lineæ fundatur experimentis diverſorum ponderum, quæ ſub eadem mole obtinent ſingula ſex iſthæc metalla; unde elicitur eorum proportio quoad diametros globorum ex diverſis metallis ſub æquali pondere; uti exhibetur ſequenti tabula.

Aurum	☉	730.
Plumbum	♄	863.
Argentum	☾	895.
Cuprum	♀	937.
Ferrum	♂	974.
Stannum	♃	1000.

Ita-

Itaque a centro instrumenti duc lineam rectam æqualem longitudini ejusdem: hæc dividatur in particulas æquales 1000; & in ea notetur numerus particularum desumptus ab eadem tabula: punctis finalibus appone signa, quæ significant metalla, eo ordine, quo in tabula notantur. Stannum minus omnium ponderosum, designabitur in extremitate hujus lineæ, secundùm totam longitudinem scalæ partium 1000; ac reliqua metalla centro propiora; ordine quæque suo.

PROBLEMA XIX.

250. D*Ato globo unius metalli, ejusque diametro; invenire alium cujuslibet alterius metalli pondere æqualem.*

Resolutio. Data diameter transferatur ad intervallum duorum punctorum, quæ dati globi metallum designant: sub hac instrumenti apertura accipiatur distantia eorum punctorum, quæ speciem metalli quæsitam notant. Hæc distantia erit diameter globi, qui quæritur.

Corollarium.

251. RESpectu corporum similium eodem modo operaberis, ut invenias latera singula homologa, nimirum, longitudinem, latitudinem, & altitudinem, seu profunditatem corporum, quæ construenda sunt.

PROBLEMA XX.

252. I*Nvenire proportionem metallorum quoad pondus.*

Resolutio. Sit invenienda proportio,

quam habeat argentum ad aurum quoad pondus; hoc est, decerni debeat, quantò ponderosior sit globus aureus globo argenteo ejusdem molis, & voluminis.

A centro instrumenti ad punctum, seu signum metalli minùs ponderantis inter duo proposita, quod semper remotius erit ab eodem centro, uti argentum respectu auri, accipe circino communi in linea metallica hanc distantiam; eamque, aperto instrumento, transfer in lineam solidorum transversim ad intervallum cujuslibet numeri, puta, inter 50 & 50. Stante hac instrumenti apertura, accipe rursum in linea metallica distantiam a centro ad punctum, seu signum auri; quam distantiam experiundo tentabis cuinam numero transversim applicetur in linea solidorum; inveniaturque congruere intervallo 27 & 27, paulo plus. Hi duo numeri permutatim exprimunt proportionem duorum metallorum; nimirum, pondus auri erit ad pondus argenti sub eodem volumine, ut 50 ad $27\frac{1}{6}$, sive, ut 100 ad $54\frac{1}{3}$.

PROBLEMA XXI.

253. *Dato quovis corpore, vel artefacto ex stanno, vel ex materia cujusvis ex sex metallis, invenire, quantum ex quinque aliis metallis requiratur, ut confici possit aliud corpus, vel artefactum simile, & æquale proposito.*

Resolutio. Esto statua ex stanno, cui exactè similis, & æqualis proponatur construenda alia ex argento.

I. Ponderetur accuratè statua ex stanno; inveniaturque esse librarum 36.

II.

II. In linea metallica accipiatur distantia a centro instrumenti usque ad punctum, seu signum argenti, ex quo novam statuam conficere oportet.

III. Aperto instrumento, hæc distantia transferatur transversim ad numeros lineæ solidorum 36 & 36.

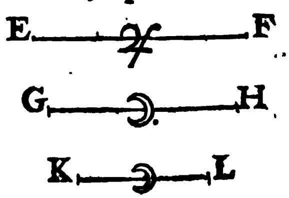
IV. Denique in eadem linea metallica accipiatur distantia a centro instrumenti ad punctum, seu signum stanni; & manente prima instrumenti apertura, exploretur, quibus transversim numeris lineæ solidorum accommodari possit hæc distantia; inveniaturque congruere intervallo 50 & 50, paulo plus. Hic numerus indicabit, libris argenti $50\frac{1}{4}$ circiter opus esse, ut construatur statua, vel aliud quodvis artefactum simile, & æquale proposito stanneo.

Problema XXII.

254. *Duorum corporum similium ex diversis metallis invenire rationem ponderum, datis earum diametris, aut lateribus homologis.*

Resolutio. Recta EF sit diameter sphæræ stanneæ, & GH diameter argenteæ; quæraturque ratio ponderum, quam inter se habent propositæ sphæræ.

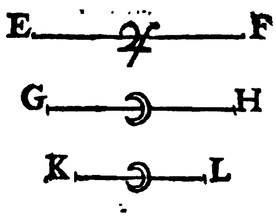
Accipe diametrum EF, eamque transfer transversim ad intervallum punctorum, quæ stannum designant; tum manente eadem instrumenti apertura, sume intervallum punctorum, quæ designant argentum, hoc est, metallum alterius sphæræ: si hoc intervallum æquale esset diame-



tro GH, duæ propositæ sphæræ essent pondere æquales; si verò diameter sphæræ argenteæ minor sit intervallo punctorum argenti, quemadmodum diameter KL, indicio id erit, pondus sphæræ argenteæ minus esse pondere stanneæ.

Ut autem decerni possit, quantò minùs ponderet, simul erunt comparandæ diametri GH & KL in linea solidorum, hoc pacto.

Inventum intervallum punctorum argenti, quod in nostro casu est GH, transferatur ad intervallum cujuslibet numeri ex linea solidorum, puta, ad 60 & 60; explora deinde, quibus numeris ejusdem lineæ accommodetur transversim diameter datæ sphæræ argenteæ KL; ponaturque congruere intervallo 20 & 20: erit pondus sphæræ argenteæ, cujus diameter KL, ad pondus sphæræ stanneæ, cujus diameter EF, ut 20 ad 60.



PROBLEMA XXIII.

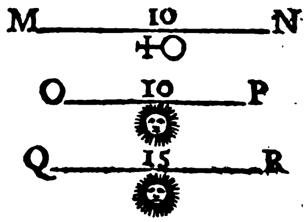
255. D*Atis pondere, & diametro sphæræ, aut latere cujuslibet alterius corporis ex quavis sex metallorum specie conflati, invenire diametrum, aut latus homologum alterius corporis similis ex quopiam aliorum quinque metallorum, quod sit ponderis dati.*

Resolutio. Esto recta MN diameter sphæræ cupreæ, cujus pondus sit librarum 10: quæritur diameter sphæræ aureæ, cujus pondus sit librarum 15.

I. Ope lineæ metallicæ inveniatur diameter sphæræ aureæ, cujus pondus æquet pondus sphæræ cu-

cupreæ; nimirum, diameter MN transferatur ad intervallum punctorum, quæ cuprum designant; & in hac circini apertura accipiatur intervallum punctorum auri, quod dabit diametrum OP sphæræ aureæ, ponderis librarum 10.

II. Hanc diametrum OP transfer in linea solidorum ad intervallum 10 & 10; & in eadem instrumenti apertura intervallum 15 & 15 ejusdem lineæ solidorum dabit quæsitam diametrum QR sphæræ aureæ, ponderis librarum 15.



DISSERTATIO

DE METHODO GEOMETRICA.

CUm omnis elementaris inſtitutio nihil ferè ſit aliud, quàm artium introductio, atque ex variis principiis collecta doctrina, qua fit, ut artium ſtudioſi per ſe ipſi niti poſſint, & progredi longiùs ad reliquum, qui multò amplior ſupereſt, ſcientiæ curriculum conficiendum: hoc mihi etiam in hiſce Elementis putavi eſſe faciendum, ut ſeparatim exponerem, qua methodo uterentur antiqui Geometræ in ſolidorum demonſtrationibus, quave recentiores; & utra utri præſtaret; an nominibus inter ſe differret, re congrueret; an denique, ut plerique opinantur, quantùm antiquorum methodum facilitate vincit recentiorum demonſtrandi ratio, tantùm antiquorum methodus ævidentià præcelleret. Magni enim refert hanc utriuſque methodi comprehenſam animo notitiam afferre ſecum Tirones, qui & in veterum Geometrarum lectione verſari volent, a quibus hæc omnis de ſolidis parta doctrina eſt, & recentiorum etiam inventa, qui Geometriam noſtra hac ætate amplificarunt, seriò cognoſcere. Quare tripartita erit hæc diſſertatio.

I. Exponam Antiquorum methodum, quam vocant, exhauſtionum, ejuſque principia, & quomodo demonſtrationibus geometricis applicetur.

II. Agam de Recentiorum methodo, quam vocant, indiviſibilium, vel evaneſcentium diviſibilium, & infinitè parvorum; eamque a variis, quæ opponi ſolent, difficultatibus vindicabo.

III. Oſtendam cum Walliſio hanc Recentiorum methodum reapſe non aliam eſſe ab antiquiori exhauſtionum methodo, eodemque niti utramque fundamento; ſed breviore via per hanc obtineri, quod longiore ambitu methodus Antiquorum aſſequebatur.

De

De Methodo exhaustionum.

DEFINITIO.

1. *MAgnitudo quævis per inscriptas sibi magnitudines exhauriri dicitur, cùm inscriptæ magnitudines ab ipsa deficere tandem possunt defectu minore quovis dato.*

Similiter, magnitudo quævis per circumscriptas sibi magnitudines exhauritur, cùm hæ ipsam denique superant excessu minore quovis dato.

Quibus autem principiis in hac methodo uterentur antiqui Geometræ, placet ex eodem Newtono repetere, qui tom. 1. Philos. nat. sect. 1. antiquam exhaustionum methodum ad recentioris methodi facilitatem, ac brevitatem inflexit, iisdem positis principiis.

LEMMA I.

2. *QUantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt, & ante finem temporis illius propiùs ad invicem accedunt, quàm pro data quavis differentia, fiunt ultimò æquales.*

Sensus est. Intelligantur circulo inscripta, & circumscripta duo polygona ordinata. Palam est ambitum polygoni circumscripti excedere ambitum inscripti. Finge jam arcubus sine fine bisectis, plura semper, ac plura latera eidem circulo circumscribi, & inscribi: constat excessum ambitus circumscripti supra ambitum polygoni inscripti tandem fieri quovis dato minorem; & utrumque ad peripheriam circuli

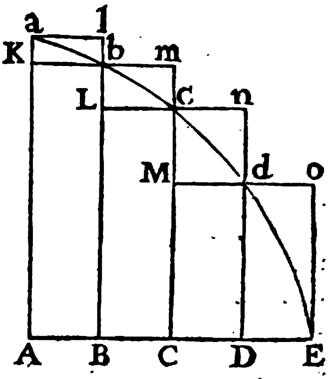
culi accedere propiùs, quàm pro data quavis differentia; hoc est, utriusque ambitum tandem in peripheriam desinere, & ad æqualitatem cum circulo, quem polygona exhauriunt, constanter accedere. Ergo utriusque polygoni ambitus fient ultimò æquales.

Demonstratio. Nam, *Si negas*, inquit Newtonus loco cit., *fiant ultimò inæquales; & sit earum differentia D. Ergo nequeunt propiùs ad æqualitatem accedere, quàm pro data differentia D: contra hypothesim*. Quod erat &c.

LEMMA II.

Ultimæ rationes æqualitatis.

3. *SI in figura quavis* AacE, *rectis* Aa, AE, *& curvà* acE *comprehensà, inscribantur parallelogramma quotcunque* Ab, Bc, Cd *&c. sub basibus* AB, BC, CD *&c. æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd *&c. figuræ lateri* Aa *parallelis contenta, & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn *&c.; dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: Dico, quòd ultimæ rationes, quas habent ad se invicem figura inscripta, circumscripta, & curvilinea, sunt rationes æqualitatis*.



Demonstratio. Nam figuræ inscriptæ, & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum *Kl*, *Lm*, *Mn*, *Do*, hoc est, ob æquales omnium

nium bases, rectangulum sub unius basi *Kb*, & altitudinum summà *Aa*, idest rectangulum *ABla*: Sed hoc rectangulum, eò quòd latitudo ejus *AB* in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per Lem. I.) figura inscripta, & circumscripta, & multò magis figura curvilinea intermedia fiunt ultimò æquales. Quod erat &c.

Corollarium I.

4. HInc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum figura curvilinea.

Corollarium II.

5. ET multò magis figura rectilinea, quæ chordis evanescentium arcuum *ab*, *bc*, *cd* &c. comprehenditur, coincidit ultimò cum figura curvilinea.

Corollarium III.

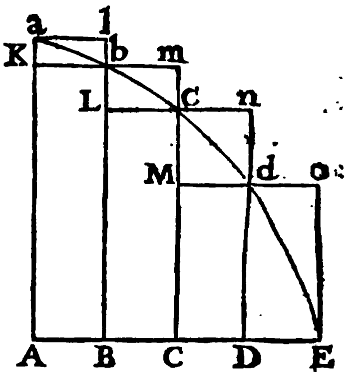
6. UT & figura rectilinea circumscripta, quæ tangentibus eorumdem arcuum comprehenditur.

Corollarium IV.

7. ET propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros *acE*) non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei; hoc est, nón sunt ex lateribus rectis quocunque numero finito compositæ, sed sunt figurarum rectilinearum, quorum latera numero augentur, & longitudine minuuntur in infinitum, limites curvilinei. Exhaustionum limites.

Ap-

Appositè autem perimetrum *acE* vocat Newtonus limitem curvilineum, quippe qui limes est augmentationis summæ parallelogrammorum inscriptorum, & limes diminutionis summæ circumscriptorum. Nam summa inscriptorum augeri magis non potest, quàm figura curvilinea *acE*, ad quam propiùs in infinitum accedere potest: neque summa circumscriptorum decrescere potest infra eamdem figuram curvilineam, ad cujus æqualitatem constanter vergit, propiùsque semper accedit, quàm pro data quavis differentia. Quare perimeter *acE* limes est augmentationis unius summæ, & diminutionis alterius summæ. Fieri ergo potest, ut ita proximè accedant ad hunc limitem, ut earum differentia a figura curvilinea assignari non possit; ac proinde figura inscripta, circumscripta, & curvilinea æquales sint. Idem dicendum, si eadem parallelogramma inscribantur, & circumscribantur simili ratione triangulo.



LEMMA III.

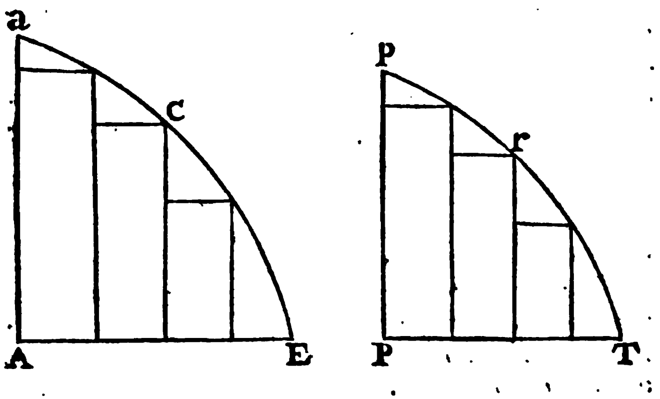
8. *SI in duabus figuris* AacE, PprT, *inscribantur, ut supra, duæ parallelogrammorum series, sitque idem amborum numerus; & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una figura ad parallelogramma in altera, singulorum ad singula, sint eædem: Dico, quòd figuræ duæ*

duæ AacE, PprT, *sunt ad invicem in eadem illa ratione*.

Demonstratio. Etenim, ut sunt parallelogramma singula ad singula; ita componendo fit summa omnium ad summam omnium, & ita figura ad figuram; existente nimirum figura priore (per Lem. II.) ad summam priorem, & figura posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. Quod erat &c.

Corollarium.

9. Hinc, si duæ cujuscunque generis quantitates in eumdem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur, & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione.

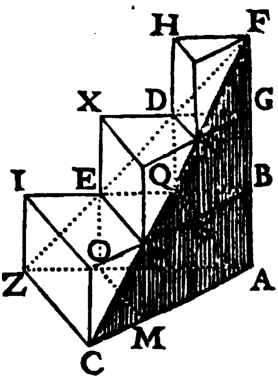


LEM-

LEMMA IV.

10. *SI in pyramide* ZCAF *inſcribantur, & circumſcribantur priſmata quotcunque, ut ſupra, in infinitum: Dico, quòd ultimæ rationes, quas habent ad ſe invicem priſmata inſcripta, circumſcripta, & pyramis, ſunt rationes æqualitatis.*

Demonſtratio. Dividatur latus pyramidis in aliquot æquales partes AB, BG, GF; & per B & G factis ſectionibus GDN & BEP, baſi ZAC parallelis, inſcripta intelligantur pyramidi priſmata triangularia BEPMAO & GDNKBQ: his deinde extra pyramidem continuatis, intelligantur pyramidi eſſe circumſcripta priſmata CIBA, PXGB, NHFG. Exceſſus circumſcriptorum ſupra inſcripta, ſunt ſolida IM, XK, HG, quæ ſimul ſumpta æquantur priſmati CIBA; nam priſma HG eſt æquale priſmati DB, ac proinde HG + XK = PXGB = MEBA; ergo tria priſmata HG + XK + IM = CIBA. Atqui, ſi AF in plures ſine fine partes æquales dividatur, ac proinde priſmatum numerus in infinitum multiplicetur, AB fiet quavis datà minor. Ergo etiam priſma CIBA fiet quovis dato minus. Itaque priſmatum circumſcriptorum, multòque magis pyramidis ZCAF exceſſus ſupra inſcripta priſmata fiet quovis dato minor. Ergo ultimæ rationes, quas ha-



bent

bent ad se invicem prismata inscripta, circumscripta, & pyramis, sunt rationes æqualitatis. Quod erat &c.

LEMMA V.

11. *Pyramidum, & prismatum, quæ conis, & cylindris in infinitum inscribuntur, rationes ultimæ cum iisdem conis, & cylindris sunt rationes æqualitatis.*

Demonstratur, ut Lemma II. Nam, ut isthic plana circulo inscripta in infinitum, exhauriunt circulum, in eumque desinunt; ita hìc pyramides, & prismata, quæ conis, & cylindris in infinitum inscribantur, eosdem exhauriunt, & fiunt ultimò his æquales. Quod erat &c.

Scholion.

HÆc methodus his principiis progrediens, quomodo demonstrationibus geometricis solidorum applicetur, palam faciam uno, aut altero exemplo; ut hanc Tirones cum methodo indivisibilium conferre possint, & quid inter utramque discriminis intersit, decernere.

Exem-

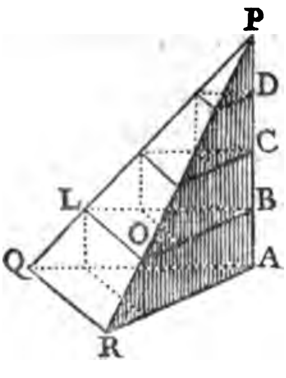
Exemplum I.

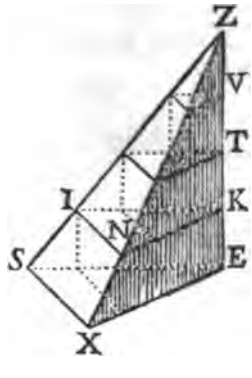
THEOREMA.

12. *Pyramides triangulares æquè altæ eam inter se proportionem habent, quam bases* AQR, ESX.

Demonstratio. Pyramidum altitudines æquales referant latera AP, EZ, quibus in quot placuerit partes æquales, sed æquè multas utrinque divisis, factisque per divisionum puncta sectionibus ad bases parallelis, intelligantur utrique pyramidi inscripta esse prismata trigona æquè multa, & æquè alta.

Jam verò, quia prismata LA, IE sunt æquè alta, erit prisma LA ad prisma IE, ut basis LOB ad basim INK (n. 100. Geom. sol.); hoc est, (n. 94. Geom. sol.) ut basis QRA ad basim SXE. Eodem modo ostendam singula prismata uni pyramidi inscripta, esse ad singula inscripta alteri, ut basis QAR ad basim SEX. Ergo etiam simul omnia sunt ad omnia, ut basis ad basim. Quare, cùm eadem





tan-

tandem (per Lem. IV.) desinant in ipsas pyramides, etiam ipsæ erunt, ut bases (per Lem. III. ejusq. Coroll.). Quod erat &c.

Exemplum II.

THEOREMA.

13. *Conorum æquè altorum proportio eadem est, quæ basium. Idem accidit cylindris æquè altis.*

Demonstratio. Pyramides conis æquè altis inscriptæ, sunt, ut bases. Atqui pyramides tandem in conos desinunt (per Lem. V.). Ergo etiam coni sunt, ut bases (per Lem. III. ejusq. Coroll.). Quod erat primum.

Idem demonstrabis de cylindris respectu prismatum sine fine inscriptorum. Quod erat alterum.

De Methodo indivisibilium.

14. METhodus exhaustionum per continuam inscriptionem, & circumscriptionem figurarum, donec earum inter se differentia evadat quavis assignabili minor: hæc, inquam, methodus traducta est in eam, quæ dici jam solet Geometria indivisibilium, seu methodus indivisibilium.

Inventores methodi.

A Bonaventura Cavallerio Mediolanensi Ordinis Jesuatorum primitus introducta est hæc methodus in tractatu primùm edito, anno 1635.; postea a Torricellio illustrata in operibus suis anno 1644. editis; & rursum ab eodem Cavallerio in alio tractatu ab illo edito, anno 1647. uberiùs exculta, & amplificata. Galilæus, a cujus schola prodierant par illud nobile Geometrarum, Cavallerius, & Torricellius, multò ante hujus methodi semina jecerat in Dialogo I.; &, quod mirere, primus omnium hac ipsa methodo usus est, suppresso indivisibilium nomine, Dialog. III. theor. I. Italiæ ergo debemus, Italisque Geometris novam hanc Geometriæ methodum, quæ tantopere hoc ævo exculta est.

15. Summa totius methodi Cavallerianæ hæc est.

I. Continuum quodvis, seu quantitas consideratur ex indivisibilibus numero infinitis constare, nimirum, ut exponit Wallisius in tract. de motu, cap. 4., *ex particulis homogeneis, infinitè exiguis, numero infinitis*; hoc est,

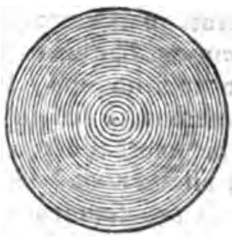
Linea concipitur constare ex infinitis punctis, sive lineolis infinitè exiguis, longitudine æqualibus, vel

vel æquè altis, quarum cujusvis longitudo, vel altitudo sit pars infinitesima longitudinis, vel altitudinis totius lineæ; Elementa dimensionum.

Superficies ex infinitis lineis sive rectis, sive curvis parallelis, hoc est, superficieculis æquè altis, quarum cujusvis altitudo sit infinitesima pars totius altitudinis; aut etiam ex punctis, quibus illæ lineæ intelliguntur constare, nimirum, ex superficieculis æqualibus, & similibus, quarum cujusvis magnitudo sit infinitesima totius areæ;

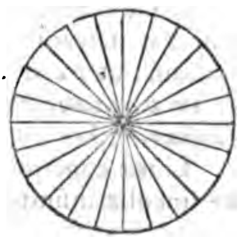
Solidum denique ex infinitis numero superficiebus, hoc est, solidolis æquè altis, sive æquè crassis, quorum cujusvis altitudo, vel crassities sit infinitesima totius; vel etiam ex solidolis infinitè exiguis, & æqualibus, quorum singulorum magnitudo sit infinitesima totius.

II. Hujusmodi lineolæ, superficieculæ, solidola &c., quæ communiter dici solent elementa, variis modis disponi possunt, prout Geometræ demonstranti expedire videbitur.

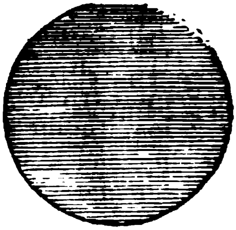


Compositio,

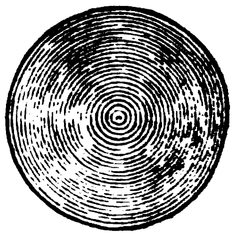
Exemplum. Circulus dicetur hoc sensu ex infinitis numero rectis parallelis constare, ad eamdem unam aliquam diametrum ordinatim applicatis, hoc est, parallelogrammis æquè altis; vel ex infinitis numero circumferentiis concentricis, hoc est, annulis æquè crassis; vel



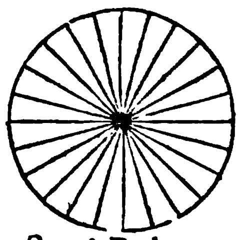
ex infinitis numero radiis, hoc eſt, ſectoribus, vel triangulis ſimilibus &c. Et ſphæra ſimiliter ſive ex infinitis numero planis æquè craſſis, ſive ex totidem ſuperficiebus ſphæricis concentricis, ſive ex infinitis numero ſectoribus ſphæricis, aut pyramidulis &c.



Comparatio, III. Hæc, quæ vocant paſſim, indiviſibilia elementa, ac tota eorum ſumma comparatur in una magnitudine cum ſingulis elementis, eorumque ſummà, in alia magnitudine; & ſic duarum magnitudinum ratio, vel æqualitas determinatur.



Itaque, ſi recta linea concipiatur diviſa in partes inter ſe æquales, & quavis data minores, ævidens eſt fore eamdem duplam, triplam &c. alterius, ſi duplò, aut triplò plura ejuſdemmodi elementa contineat; quæ non modò inter ſe æqualia eſſe oportet in eadem linea, ſed in alia quavis, cui poſſit illa comparari: aliter hujuſmodi lineæ non haberent communem menſuram; neque in earum comparatione quidquam decerni poſſet de earum mutua magnitudine.



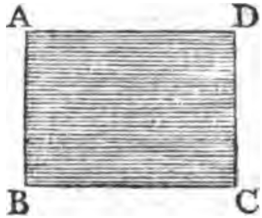
Similiter, ſi ab omnibus rectæ AB elementis excitentur totidem perpendiculares, quas in rem preſentem pono eſſe inter ſe longitudine æquales:

I. Hæ quidem perpendiculares habebunt ſingulæ latitudinem infinitè parvam, ſed æqualem, quippe quæ æquabitur latitudini elementorum rectæ AB.

II.

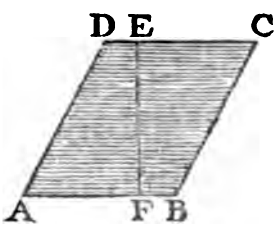
II. Erunt invicem parallelæ, ac se se contingent juxta totam suam longitudinem; quare omnes simul sumptæ rectangulum ABCD conficient, cujus superficies erit harum perpendicularium summa; quæque æquabitur facto primæ BC ductæ in numerum elementorum rectæ AB.

III. Hinc, si rectangulum aliud habeatur, quod duplò, aut triplò plures perpendiculares primis æquales in longitudine contineat, hoc ipso demonstrabitur fore duplum, aut triplum primi. Hujusmodi autem perpendiculares sunt illæ, quæ vocantur elementa superficierum, & quas crassitie, seu latitudine æquales esse oportet, non solùm in eadem superficie, sed etiam in omnibus superficiebus, quas inter se comparare volumus.



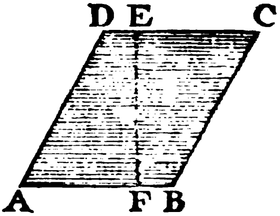
IV. Hæc autem elementorum æqualitas sive in lineis, sive in superficiebus, aut solidis, hac methodo sancitur. Cùm enim eædem lineæ incidentes in aliam occupent ejusdem puncta majora, vel minora, prout plus minùsve ad illam inclinatæ fuerint, ac puncta omnium minima sint illa, quæ occupantur a lineis perpendiculariter incidentibus: hinc linea, super quam elementa superficierum perpendiculariter incidunt, illa est, quæ unicè assumitur tanquam mensura elementorum omnium. Æqualitas elementorum.

Exemplum. Esto parallelogrammum ABCD, cujus elementa sint basi AB parallela; quæraturque linea, quæ horum elementorum numerum exprimat, ac metiatur. Hæc erit perpen-

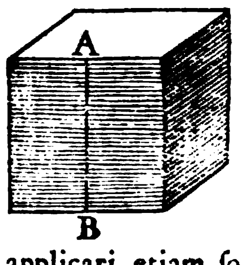


 di-

dicularis EF, non autem latus AD. Ratio est, quia hujus parallelogrammi elementa singula occupant ejusdem perpendicularis EF puncta omnium minima, quæ possint occupari; & consequenter totidem sunt superficiem parallelogrammi componentia elementa, quot sunt in perpendiculari EF. Secus verò, cùm eadem rectanguli ABCD elementa obliquè incidant in latus AD, occupant majora puncta, quàm sint ejusdem lateris elementa; ac proinde par utrinque elementorum numerus esse non potest.



V. Simili ratione, si ab omnibus elementis lineæ AB concipiamus excitari superficies eidem perpendiculares, quas in rem præsentem ponamus æquales esse longitudine, & latitudine, I. Hujusmodi superficies habebunt omnes æqualem crassitiem, & minorem quavis data: II. Erunt invicem parallelæ, ac se contingent secundùm utramque dimensionem; solidumque conficient, cujus soliditas æquabitur summæ harum superficierum. Hinc, si aliud solidum contineat duplò, aut triplò plures superficies æquales, definietur duplum, aut triplum esse primi solidi. Quare hæ superficies dicentur elementa solidorum.

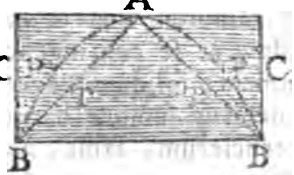


VI. Hæc eadem methodus applicari etiam solet elementis figurarum secundùm aliquam ordinatam proportionem crescentibus, vel decrescentibus, sive in planis, sive in solidis.

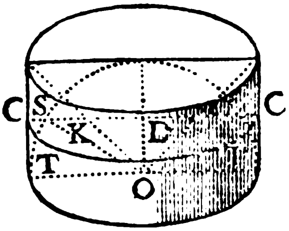
Esto

Esto parabola APBB (figura plana ex sectione coni genita, utì in sectionibus conicis exponetur) ex innumeris rectis composita, basi BB parallelis, quarum una sit PP; atque triangulum inscriptum ejusdem basis, & altitudinis, ex totidem parallelis, quarum una sit TT; & circumscriptum rectangulum, seu parallelogrammum ex totidem, quarum una sit CC. Jam, si probetur rectas illas omnes PP in parabola, ad omnes TT in triangulo esse, ut 4 ad 3; & ad omnes CC in parallelogrammo, ut 2 ad 3: hinc concludetur parabolam ad triangulum esse, ut 4 ad 3; & ad parallelogrammum, ut 2 ad 3. Elementorum proportionalitas.

Similiter in solidis ponamus conoeidem parabolicam ex innumeris circulis confici, quorum unus sit PP; & inscriptum conum ex totidem, quorum unus sit TT; & circumscriptum cylindrum ex totidem, quorum unus sit CC. Jam, si probetur omnes illos circulos PP, ad omnes TT esse, ut 3 ad 2; atque ad omnes CC, ut 3 ad 6: hinc concludetur conoeidem parabolicam in eisdem rationibus esse ad conum, & cylindrum.



Atque his principiis celebris illa Archimedis propositio: *Sphæram esse duos trientes cylindri circumscripti*, facilè demonstratur a Wallisio, tract. de Algebra, cap. 73., in hunc modum.

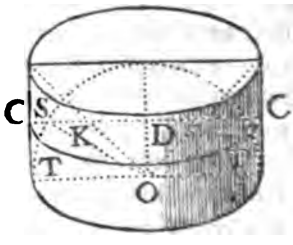


Suppositis enim (ut in figura) cylindro, hemisphærio, & inverso cono, ejusdem basis, & altitudi-

 nis,

Uſus methodi indiviſibilium.

nis, planis ſecari baſi parallelis, quorum unum ſit CTTC; quoniam quadratum rectæ SD eſt ubique æquale quadrato rectæ OS, ſeu CD, dempto quadrato OD, ſeu DK; & conſequenter, cum circuli ſint inter ſe, ut ſemidiametrorum quadrata: erunt omnes circuli complentes hemiſphærium, æquales omnibus complentibus cylindrum, demptis omnibus complentibus conum. Ergo cylindrus, dempto cono, eſt æqualis hemiſphærio; & conſequenter, cùm conus ſit cylindri triplus, hemiſphærium eſt duo trientes cylindri ſibi circumſcripti; adeoque tota ſphæra duo trientes cylindri circumſcripti ſphæræ. Quod erat &c.



EXAMEN

Methodi indivisibilium.

16. UT primùm prodiit Geometria indivisibilium, offendit Geometras vox ipsa indivisibilium; ac durior visa est hæc compositio linearum e punctis, superficierum e lineis, solidorum e superficiebus: contra quàm omni ævo definita fuerat horum genesis; nimirum, lineam generari ex fluxu, seu motu continuo puncti, superficiem motu continuo lineæ, solidum motu continuo superficiei. Itaque hæc indivisibilium quantitatum hypothesis, partim novitate vocum, partim quòd primi Inventores multò accurratiùs eamdem non circumscripserint, rejecta est a pluribus, ut primùm proposita fuit; nec desunt etiamnum, qui fallacem hanc esse suspicentur, eique minimè fidendum autument. Inter reliquos Dominus De la Chapelle in sua Geometriæ institutione, n. 412. hanc methodum ad examen revocat; compluresque fallacias, ac paralogismos in eadem retegere se posse putat. Quare, si ab hujus ingeniosissimi Viri difficultatibus Geometriam hanc indivisibilium vindicavero, simulque ostendero eamdem recidere in antiquam exhaustionum methodum; non erit cur posthac timeant Tirones hanc semitam, uti facillimam in demonstrando, ita & firmissimam inire.

17. *On a opposé*, inquit ipse, *contre cette méthode, qu' il étoit impossible qu' une surface fût composée de lignes sans aucune largeur, & que la solidité d'un corps puisse résulter de plusieurs surfaces mises les unes sur les autres &c.* Objectio D. De la Chapelle,

In

In eumdem ſenſum oppoſuerat P. Tacquet lib. 1. par. 1. cylindricorum, & annularium, in ſcholio ad prop. 12.

Ac Patris Tacquet.

Methodum demonſtrandi per indiviſibilia, vel, ut ego appellare ſoleo, per heterogenea, quam nobilis Geometra Bonaventura Cavallerius in lucem protulit, pro legitima, ac geometrica admittendam non exiſtimo. Procedit illa a lineis ad ſuperficies, a ſuperficiebus ad corpora; atque æqualitatem, vel proportionem in lineis repertam concludit de ſuperficie, repertam in ſuperficiebus traducit ad ſolida. Qua ratiocinandi forma conficitur omnino nihil; quando neque ex circulis ſphæra componitur &c. Admittunt quidem Geometræ, lineam generari ex fluxu puncti, ſuperficiem ex fluente linea, corpus ex ſuperficie; ſed aliud longè eſt, ex indiviſibilium fluxu quantitatis ſpecies generari, aliud ex indiviſibilibus componi. Primum omnino exploratæ veritatis eſt; alterum cum Geometria ſic pugnat, ut niſi illud ipſa deſtruat, ipſam deſtrui neceſſe ſit.

18. At jam pridem præoccupaverat hanc objectionem Walliſius cap. 75. Algebræ, his verbis.

Walliſii ſolutio.

Jam verò hæc non ita intelligenda ſunt, quamvis verba ſic ſonare videantur, quaſi lineæ illæ, quarum nulla eſt latitudo, complere poſſent ſuperficiem; aut ſuperficies planæ, aliæque, quarum nulla eſt craſſities, complere ſolidum. Sed per lineas intelligendæ ſunt minutulæ ſuperficies, ejuſdem cum lineis illis longitudinis, ſed latitudinis exiguæ; quarum omnium, quotcunque fuerint, latitudines ſimul ſumptæ, altitudinem æquent illius figuræ, quam ſupponuntur complere. Et ſimiliter per ſuperficies illas, circuloſve, intelligenda ſunt priſmata, cylindrive, ea tenuitate, ut ſimul omnium craſſities, ſeu altitudo æqualis ſit altitudini illius ſolidi, quod ſupponuntur complere. Cùm igitur dici-

dicitur parabola, triangulum, aut parallelogrammum ex totidem lineis constare, aut solidum ex totidem circulis, & similia; tantundem est ac si diceretur, constare quidem illa ex totidem tenuibus parallelogrammis, solidumque ex totidem tenuibus cylindrulis, ut eorum omnium, quotcunque fuerint, altitudines simul sumptæ, æquales sint altitudini illius figuræ, quam componunt.

19. Ex his constat in methodo indivisibilium nullum fieri ad heterogeneas quantitates transitum, hoc est, utì exponit P. Tacquet, a punctis ad lineas, a lineis ad superficies &c., neque æqualitatem, aut proportionem lineis repertam transferri ad superficies &c. Nam ex prima methodi indivisibilium positione elementa linearum sunt lineolæ æquè altæ, superficierum sunt superficieculæ æquè altæ &c.; ac proinde nulla reductione opus est, utì necessarium putat P. Tacquet, qui sic Cavallerium oppugnat, ut ipsius invento faveat, ac, si quid durinsculi in ipsis vocibus præseferat, emollire velit, & planius facere; ait enim: *Absit tamen, ut invento pulcherrimo debitam laudem cupiam detrahere. Hoc solùm dico, demonstrationes per heterogenea institutas, ad assensum non cogere, nisi, quod fieri plerumque potest, ad homogenea reducantur.* Quid autem sibi velit nomine hujus reductionis ad homogenea, explicat ipse Prop. 9. lib. 1. parte 1. cylindric. & annul. Ego verò ad exemplum Tironibus multò familiarius hanc ipsam Tacqueti reductionem traducam; & an differat a prima Cavallerii indivisibilium positione, clarissimè exponam.

Exem-

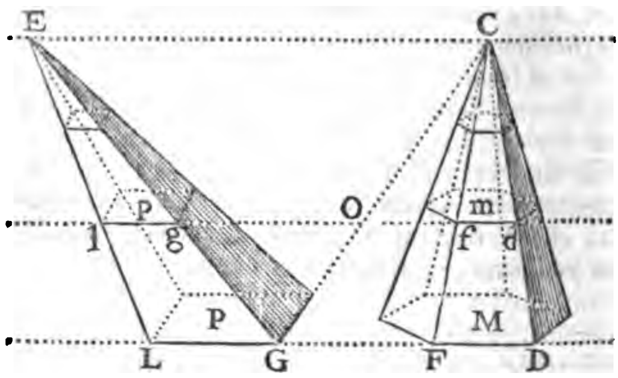
Exemplum.

20. PYramides CM, EP, æqualium baſium, & altitudinum, ſunt æquales in ſoliditate.

Methodo indiviſibilium

DEmonſtratio. Eſto baſis M pyramidis hexagonalis CM, æqualis in ſuperficie baſi P pyramidis quadratæ EP, ejuſdem altitudinis. Si utraque pyramis ſecetur plano baſibus parallelo, hæc ſectio exhibebit duo plana elementaria *m*, *p*, ſimilia (n. 94. Geom. ſol.) reſpectivæ baſi pyramidum.

Concipe jam in omni parallelarum CE, DL intervallo fieri hujuſmodi ſectiones ſimiles: dividetur utraque pyramis in eumdem numerum planorum elementarium. Quare, ſi demonſtretur elementa ſingula componentia pyramidem hexagonalem æquari ſingulis reſpectivè elementis pyramidis quadratæ, demonſtrabitur utriuſque pyramidis æqualitas.



Oſten-

Oſtendam itaque elementum m æquari elemento p, quod eidem correſpondet. Ducatur CG, & propter parallelas CE, dl, DL, erit

$DF:df::CD:cd::CG:CO::EG:Eg::GL:gl.$

Ergo $DF:df::GL:gl;$

atque hinc $\overline{DF}^2:\overline{df}^2::\overline{GL}^2:\overline{gl}^2.$

Cùm autem planum M ſit ſimile plano m, & planum P ſimile plano p, ac præterea figuræ ſimiles ſint inter ſe, utì quadrata laterum homologorum,

erit $M:m::\overline{DF}^2:\overline{df}^2;$

& $P:p::\overline{GL}^2:\overline{gl}^2;$

& conſequenter $M:m::P:p;$

& alternando, $M:P::m:p.$

Sed per hyp. $M=P$. Ergo $m=p$.

Eadem æqualitas demonſtrabitur in aliis elementis. Ergo ſumma elementorum pyramidis hexagonalis æquatur ſummæ elementorum pyramidis quadratæ. Cùm autem horum elementorum numerus, propter æqualem altitudinem pyramidum, ſit utrinque æqualis, pyramides æqualium baſium, & altitudinum erunt æquales. Quod erat &c.

21. P. Tacquet loco cit. coarguit hanc argumentandi formam, qua fit, ut æqualitas inventa in ſuperficiebus, ſeu pyramidum ſectionibus traducatur ad ſolida: ſuperficiem, & ſoliditatem ait eſſe quantitates heterogeneas, nullumque ab una in aliam fieri tranſitum poſſe, cùm pyramis, & quodvis aliud corpus non componatur ex hiſce planis elementaribus nullam habentibus craſſitiem: monet opus eſſe, ut quantitates heterogeneæ ad homogeneas reducantur, ſi nempe dividatur latus pyramidis in æquales ſine fine particulas, factiſque per diviſionum puncta ſectionibus baſi parallelis, inſcripta intelligantur utrique pyramidi priſmata quadrata,

ta, & hexagona æqualium semper altitudinum; quæ prismata in pyramides ipsas desinent, prout prismatum inscriptorum numerus augetur, & altitudo minuitur in infinitum. Ex horum autem prismatum, quæ comparantur inter se, perpetua æqualitate, necessariò etiam pyramidum æqualitas demonstrabitur.

Reductio ad homogenea inutilis.

At, pace tanti Viri, hæc reductio est ipsissima Cavallerii positio, utì expositum est n. 15., & ab eodem Wallisio disertis verbis declaratur. Neque enim Cavallerius cogitavit unquam, corporum elementa esse superficies omni prorsus crassitie carentes; sed corporum elementa esse voluit alia minora corpora, puta in casu nostro, prismata inscripta, quæ propter altitudinem infinitè parvam jurè vocari poterant superficies, quasi evanescente crassitie. Hoc verò asserere non aliud est, quàm, more Veterum, per inscripta homogenea propositas quantitates exhaurire.

22. Opponit rursum D. De la Chapelle. *Reprenons la démonstration des Indivisibilistes. Les pyramides de même base, & de même hauteur ont un même nombre de tranches: on l'accorde. Il est démontré géométriquement que toutes les tranches de l'une sont égales à toutes les tranches de l'autre, chacune à chacune: on en convient. Or les pyramides sont composées de ces tranches superficielles? Les defenseurs des indivisibles en ont reconnu l'impossibilité. Il faut donc que ce soient des tranches solides, qui composent les pyramides; ainsi il reste à démontrer que ces tranches solides sont égales, chacune à chacune. Les Indivisibilistes le supposent; leur démonstration est donc une pétition de principe. A la vérité ils prouvent à la rigueur que les bases, entre lesquelles sont comprises les petites tranches élémentaires ou les petites pyramides tronquées, ont une égualité correspondante;*

mais

mais c'est changer l'état de la question. Je demande que l'on m'établisse une égualité de solides, e l'on n'aboutit qu'à une égualité de surfaces. Quel paralogisme!

Miror hæc objici posse ab eo, qui demonstrandi methodum in superiori Theoremate adhibitam paulo attentiùs considerarit; nimirum, duo elementa, hoc est, solida invicem comparata in utraque pyramide demonstrantur æqualia iisdem geometricis principiis, quibus uti solemus in prima elementari Geometria, ac præterea iisdem principiis, eademque progressione, qua utebantur antiqui Geometræ in methodo exhaustionum. Nam juxta hanc methodum indivisibilium, parallelogramma ex minutis parallelogrammis, cylindri ex minutis cylindrulis, pyramides ex minutulis prismatis constant, quorum summa adæquat figuram, quam componunt.

23. Verum quidem est, inquit Wallisius loc. cit., ejusmodi minuta parallelogramma complere posse exactè illud grandius, quod componunt, parallelogrammum, cubos componi ex minutis prismatis, etiam secundùm geometricum rigorem; sed in triangulo, parabola, aut in pyramide id fieri exactè non potest; quippe quæ ex parallelogrammis, aut prismatis non componuntur. Attamen verissimum illud est, posse utique ex hujusmodi parallelogrammis confici figuram triangulo, seu parabolæ inscribendam, aut circumscribendam, & ex prismatis inscribendam, aut circumscribendam pyramidi, quæ ab illis differat magnitudine, quæ minor sit quavis assignabili; & quidem quæ ita continuè minuatur, prout augetur parallelogrammorum illorum, aut prismatum numerus; ac proinde, si hæc supponantur infinitè multa, erit ea differentia infi-

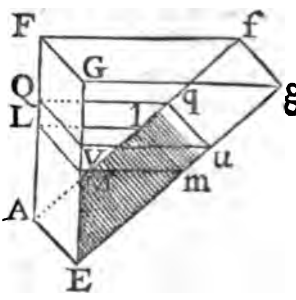
nitè

nitè exigua, adeoque evanescens: *Quæ non alia est*, inquit Wallisius, *quàm exhaustionum methodus, aliis terminis exposita, & compendiosiùs.*

Idipsum vidit acutissimus Vir Dominus De la Chapelle, qui paulo post subdit: *Peut-être que cette méthode bien analysée ne seroit pas différente de la méthode d'exaustion; mais c'est a quoi je ne veux pas toucher*; contra quàm fieri oportebat in hac ipsa, quam tradit, elementari institutione, in qua maximè intererat, ut quid veri, quid falsi utraque methodus contineret, an vocibus differret, an re, accuratè expenderet, & cautè definiret.

Hanc esse ipsissimam Cavallerii mentem facilè constat ex toto ipsius opere, ac præsertim ex iis difficultatibus, quas egregii suæ ætatis Geometræ Cavallerio objecerant. Nam, utì refert etiam P. Boschovich in suis elementis, opposuerat Cavallerio P. Guldinus, fieri aliquando posse, ut hæc methodus indivisibilium in errorem induceret, si ita acciperetur, utì verba sonare viderentur. Nam, si bina rectangula $FAEG$, $fAEg$, non in eodem plano posita terminarentur ad binas rectas Ff, Gg, perpendiculares plano prioris; rectangulum posterius esset longius priore in ratione rectæ Eg subtendentis angulum rectum EGg, ad EG latus trianguli rectanguli; cùm nimirum communis altitudo esset FA, & tamen sectiones LM, lm essent æquales eidem AE, adeoque & inter se.

Objectio P. Guldini.

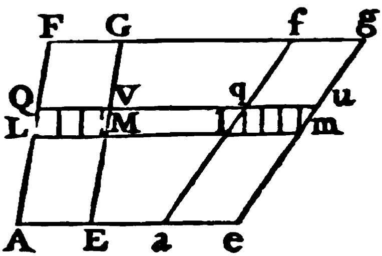


Respondit Cavallerius in hoc casu lineas, a quibus eæ superficies ve-

luti

lati contexuntur, esse utrobique quidem æquales, sed textum ipsum rariorem in secundo rectangulo. Si enim fiat secunda sectio *QUu* admodum proxima priori, bina fila *QU*, *qu* erunt æqualia inter se, sed *qu* ab *lm* remotius, quàm *QU* ab *LM*. Suam autem methodum ajebat tunc solùm procedere, cùm, præter æqualitatem sectionum, e quibus figura constare concipitur, etiam binarum quarumcunque inter se proximarum distantiæ æquales sint; hæc enim cautio necessaria est, ut figurarum æqualitas demonstretur. Sint enim parallelogrammata *AG*, *ag* (ut in fig. seq.) constituta in eodem plano super basibus æqualibus *AE*, *ae*, & inter easdem parallelas: eorum æqualitas hac methodo ostenditur: Distantiæ æquales sectionum. tum quia sectiones *LM*, *lm*, *QU*, *qu* parallelæ basibus *AE*, *ae* æquales sint iis, & inter se; tum verò maximè, quia lineæ illæ in ipsis superficiebus parallelogrammorum æquè inter se distent, licet earum distantiæ *UM*, *um*, computatæ in directione laterum, non sint æquales, si eæ directiones diversæ fuerint, adeoque ipsorum laterum æqualitas non habeatur.

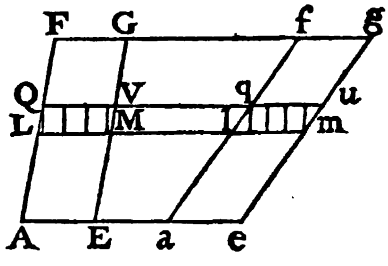
Atque hinc intelliges planissimè, quare in methodo Cavallerii superficies *AFGE*, *afge* non concipiantur componi e lineis *LM*, *lm*, sed ex areolis *LMUQ*, *lmuq*, quæ inter lineas conti-



nentur, uti & solida ex spatiolis solidis inter superficies contentis; in quibus nimirum areolis, & spatiolis solidis bases, & crassitudines æquales erunt, & numerus idem.

Nam erectis lineis perpendicularibus utrique oppositæ sectioni infinitè proximæ, continuataque divisione utriusque sectionis in infinitum numerum particularum æqualium, & similium, æqualis semper assumi poterit utrobique earumdem numerus; & solùm circa margines *LQ*, *UM*, *lq*, *um*, ob laterum obliquitatem deesse poterunt hinc inde in angulis infinitè parva spatiola, quorum numerus respectu reliquorum minuetur in infinitum, ubi in infinitum minuatur crassitudo, & sectiones oppositæ ad se invicem accedant in infinitum. Quare, ubi illorum elementorum, nimirum spatiorum, quæ binis sectionibus infinitè proximis continentur, æqualitas assumitur, contemnitur aliquid infinitè parvum respectu ipsius summæ.

Explicat autem egregiè P. Boschovich in suis elementis tom. I. n. 113., quì fieri possit, ut, quoties in comparandis binis quantitatibus finitis, contemnendo aliqua, quæ respectu earum sunt infinitè parva, invenitur æqualitas, toties vera æqualitas haberi debeat, nec ullus, ne infinitesimus quidem



error

error inde oriri possit. *Finitæ enim quantitates*, inquit, *sunt eæ, quæ in se determinatæ sunt: infinitè parvæ quantitates sunt eæ, quæ concipiuntur minui ad arbitrium ultra quoscunque limites in se determinatos. Porro contemptus quantitatum infinitesimarum in comparatione quantitatum finitarum nullum errorem parere potest, ne infinitesimum quidem. Nam, si illæ finitæ quantitates essent inæquales, haberent differentiam aliquam in se determinatam; quoniam autem illæ quantitates infinitesimæ possunt minui ultra quoscunque limites in se determinatos, poterunt simul omnes esse minores, quàm illa differentia supposita, quam idcirco compensare non possent; nec posset ex illarum contemptu derivari æqualitas quantitatis illius in se determinatæ, nimirum differentiæ suppositæ.*

Infinitesimarum contemptus.

De Methodo exhaustionum ab antiquis Geometris adhibita Euclide, & Archimede.

24. VEteres Geometræ in hac ipsa, quam exposuimus, exhaustionum methodo, multò longiore ambitu utebantur; ac in iis quæstionibus, quæ infiniti considerationem involvunt, suas demonstrationes ad absurdum revocabant, & ex falsis suppositionibus verum eruebant. Ejusmodi Antiquorum methodus eodem fundamento innititur, quo methodus Recentiorum, sed multò est implicatior, & longior; cujus brevem synopsim dabo, quæ usui erit Tironibus in veterum Geometrarum lectione.

Instar Lemmatis præmittunt hoc Theorema, quod Euclides demonstrat prop. 1. lib. 10. elem.; nimirum: *Duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si a majore auferatur majus quàm dimidium, & ab eo, quod reliquum est, rursus detrahatur majus quàm dimidium, & hoc semper fiat: relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine.*

Euclidis Lemma.

Notat Wallisius veram fore propositionem, si pro $\frac{1}{2}$ sumeretur $\frac{1}{3}$, aut $\frac{1}{4}$, aliave pars hujusmodi, & sic continuè; assumit autem Euclides $\frac{1}{2}$, non ex necessitate, sed pro arbitrio suo, ut commodiùs hoc Lemma applicetur propositionibus, quæ hac methodo demonstrandæ erunt; utì mox exemplo planum faciam.

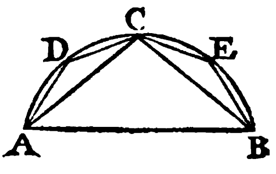
Dicet fortasse quispiam: Si ablatio dimidii sufficit, aut etiam adhuc minoris; cur jubet Euclides, ut auferatur continuè plusquam dimidium? quasi verò, si quid eo minus auferatur, non sufficeret.

Re-

Respondet Wallisius loco cit. Si Propositionem hanc propter se præcipuè intendisset Euclides, non esset dubitandum, quin dixisset potius: Si a toto auferatur sui dimidium, & a residuo dimidium sui, & ita porro in infinitum; aut etiam adhuc universaliùs: Si a toto auferatur pars sui proportionalis, & a residuo similis pars sui proportionalis, aut etiam major, & sic continuè &c. Nam hac etiam via perveniretur tandem ad partem data quavis minorem. Cur ab Euclide restrictiùs proponatur.

Sed Propositionem hanc intenderat Euclides, non tam propter se ipsam, sed ut Lemma ad ulteriores usus: hinc non omne illud in hoc Theoremate dici, quod dici potuisset, sed tantundem, & in tali forma, ut aptissimè posset ad eos usus accommodari; similemque cautionem passim adhibet in aliis Lemmatis exponendis; cautèque abstinet ab eis universaliùs proponendis, quàm erat opus ad rem suam. *Quod moneo*, inquit Wallisius, *ne quis eum negasse putet, aut ignorasse illorum universalitatem, quæ minùs universaliter pronunciat, aut nescire quæ tacet.*

Euclidæi Theorematis exemplum hoc esto. In segmento circuli A C B inscriptum triangulum A B C ejusdem basis, & altitudinis, est plusquam dimidium; est enim dimidium circumscripti parallelogrammi: hoc igitur exempto, residua segmenta A C, C B simul sumpta, sunt minus quàm dimidium. Similiterque inscripta triangula A D C & C E B sunt plusquam dimidium illorum segmentorum; adeoque residua segmenta quatuor A D, D C, C E, E B simul sumpta, sunt minus quàm dimidium primi residui; & sic continuè; ita ut tandem perveniatur ad resi- Usus Lemmatis.



dua ſegmenta tam exigua, ut eorum aggregatum minus ſit quavis data quantitate.

Scopus Euclidis.

At verò, inquit Walliſius, ſi requiratur, ut inſcribantur triangula ſuper eas baſes, quæ ſint præcisè dimidia illorum ſegmentorum; aut eorum certa pars aliqua, id ægrè obtinebitur. Prudenter itaque factum eſt ab Euclide, ut illud Lemma ſic verbis exponeretur, ut aptiſſimè poſſit his uſibus accommodari.

Veterum in demonſtrando circuitus.

Hoc Lemmate nititur antiqua methodus exhauſtionum, qua paſſim utuntur Euclides, Archimedes, aliique Geometræ, tum veteres, tum recentiores. Sed antiqui eodem, quo recentiores, principio, ſeu Lemmate exorſi, longiore circuitu in progreſſu ſuas demonſtrationes ad abſurdum revocabant, & ex falſis ſuppoſitionibus verum eruebant. Summa totius progreſſus erat hujuſmodi. Ut inter duas quantitates, quæ ad æqualitatem conſtanter vergunt, & tandem propiùs accedunt, quàm pro data quavis differentia, rationem æqualitatis intercedere demonſtrarent, prius ſupponebant inter eas quantitates eſſe vel majoris, vel minoris inæqualitatis rationem; deinde utrumque falſum demonſtrabant; & ex hac reductione, quam ad abſurdum vocant, inter illas quantitates perfectam æqualitatem eſſe concludebant.

Reductio ad abſurdum.

Hujus methodi ſpecimen exhibeo ex Archimedis prop. 1. de dimenſione circuli.

Exemplum I.

THEOREMA.

25. *Circulus æqualis eſt triangulo rectangulo, cujus latera angulum rectum continentia, æqualia ſunt*

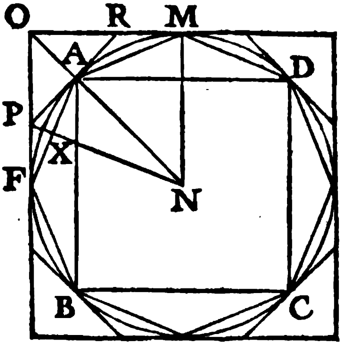
sunt alterum semidiametro, alterum perimetro istius circuli.

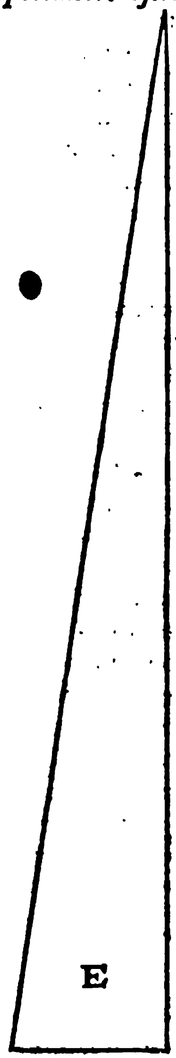
Demonstratio. Esto A B C D circulus, & E triangulum, uti supponitur. Dico huic triangulo illum circulum esse æqualem, hoc est, neque majorem, neque minorem esse.

Indirecta Antiquorum demonstratio.

Esto enim, si fieri potest, major ille circulus triangulo; sitque A C quadratum inscriptum; sintque arcus continuè bisecti, uti expositum est in Lemmate: segmenta residua simul sumpta (per Lem.) minora erunt, quàm excessus, quo supponitur circulus excedere triangulum. Ergo sic inscripta figura rectilinea est triangulo major.

Jam verò a centro N est N X ad inscriptæ rectilineæ perimetrum perpendicularis, quæ minor est semidiametro circuli, & consequenter minor & altero laterum trianguli E continentium angulum rectum. Rursum

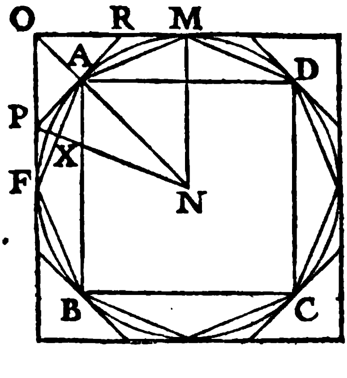




 peri-

perimeter inscriptæ figuræ rectilineæ, quippe qui minor est circuli perimetro, minor quoque erit eorum laterum reliquo ejusdem trianguli E; & consequenter rectilinea figura inscripta minor erit triangulo E; quod est absurdum; nam ante præsumebatur major.

Esto jam, si fieri potest, circulus ille triangulo minor. Circumscribatur quadratum; sintque arcus continuè bisecti, & per bisectionum puncta tangentes ductæ. Est igitur O A R angulus rectus, adeoque O R major quàm M R = R A. Ergo triangulum R O P est plusquam dimidium figuræ O F A M, & sic continuè; eruntque tandem (per Lem.) residui sectores, quales P F A, minùs quàm excessus, quo supponitur triangulum E excedere circulum; ac proinde circumscripta rectilinea figura minor



erit

erit triangulo E; quod est absurdum, propter NA æqualem uni lateri trianguli E ex suppositione, & propter perimetrum rectilineæ figuræ circumscriptæ majorem base ejusdem trianguli E; nam hic perimeter major est perimetro circuli, cui circumscribitur.

Itaque circulus, cùm neque major sit, neque minor, æqualis est triangulo E. Quod erat &c.

Hæc est ab antiquis Geometris adhibita demonstrandi ratio, quæ quàm perplexa sit, & tædio plena, nemo non videt.

Confer jam Recentiorum directam, brevemque demonstrationem, quam sic proponunt.

Exemplum II.

THEOREMA.

26. *Circulus est æqualis triangulo, cujus basis est peripheria circuli, altitudo autem semidiameter.*

Demonstratio. Polygona ordinata circulo circumscripta, & triangula bases habentia ambitum polygoni, altitudinem verò radium circuli, semper sunt æqualia. Atqui polygona circulo in infinitum circumscripta, in circulum desinunt; similiterque triangula (ut mox ostendam), quæ pro basi habent ambitum polygoni circumscripti, pro altitudine verò radium, tandem desinunt in triangulum, pro basi habens peripheriam, pro altitudine eumdem radium. Ergo circulus, & triangulum pro basi habens peripheriam, pro altitudine radium, æqualia sunt. Directa Recentiorum demonstratio.

Quòd autem triangula sub ambitu polygoni, & radio desinant in triangulum sub peripheria, & radio, sic demonstro. Triangula sub ambitu circum-cumscripti polygoni, & radio, sunt ad triangulum sub peripheria, & eodem radio, ut basis ad basim, nempe, ut ambitus polygoni ad peripheriam, cùm altitudinem habeant communem. Atqui ambitus polygoni in peripheriam desinit. Ergo & triangula desinent in triangulum. Quod erat &c.

Hæc autem perbrevis, ac directa demonstratio unicè postulat præmitti instar Lemmatis Theorema, quod demonstravimus n. 293. Geom. planæ.

Polygonum ordinatum circulo circumscriptum æquatur triangulo, cujus basis est ambitus polygoni, altitudo verò circuli radius.

Et polygonum ordinatum circulo inscriptum æquatur triangulo, cujus basis est polygoni inscripti ambitus, altitudo verò perpendicularis in latus unum ex centro ducta.

De Methodo Newtoniana evanescentium divisibilium, sive rationum primarum, & ultimarum.

27. HÆc Veterum indirecta, & perplexa demonstrandi ratio minimè placuit Newtono, qui, ut & rigidam illam Archimedis, & Euclidis, in theorematum demonstratione methodum adhiberet, & Recentiorum etiam assequeretur brevitatem, & facilitatem directæ demonstrationis,

I. Antiquorum utique principium Lemmate I. generaliter expressit, ut fusè exposui num. 2., illudque in Lemmatis sequentibus n. 3. 4. &c. ad curvas generatim applicavit, & inde directas, perbrevesque demonstrationes in toto operis decursu deduxit. *Præmisi verò*, inquit ipse lib. 1. sect. 1. lem. 11. philos. nat., *hæc Lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonstrationes, more veterum Geometrarum, ad absurdum; contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium.*

II. Sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis; & propterea methodus illa minùs geometrica censetur, durior, inquam, & minùs geometrica, quippe quæ, saltem quoad voces, videtur abhorrere a genesi quantitatis geometricæ; loco indivisibilium evanescentia divisibilia substituit; & quantitates mathematicas non ut ex partibus quàm minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas considerat. *Malui*, inquit, *demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas, & rationes, primasque nascentium, idest, ad limites summarum, & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonstrationes, qua potui brevitate*

te

te, *præmittere*. Nimirum, ut dictum est n. 3., si area curvilinea in parallelogramma rectilinea dividatur, & eorum numerus augeatur, & latitudo minuatur in infinitum, horum parallelogrammorum summa nunquam poterit esse major areà curvilineà; sed hæc area erit terminus, seu limes, ad quem parallelogrammorum decrescentium summa semper accedit, & quem tandem attingit, ubi parallelogramma evanescunt, aut nascuntur. Idem dicendum de evanescentibus curvarum chordis respectu perimetri curvilineæ. *His enim*, inquit, *idem præstatur*, *quod per methodum indivisibilium*; *& principiis demonstratis tutiùs utemur*.

III. Ac ne quispiam in horum evanescentium divisibilium notione laboraret, & minùs cautè eamdem usurparet, sic porro monet. *Si quando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero*, *vel*, *si pro rectis usurpavero lineolas curvas*; *nolim indivisibilia*, *sed evanescentia divisibilia*; *non summas*, *& rationes partium determinatarum*, *sed summarum*, *& rationum limites semper intelligi*.

Quantitates itaque evanescentes concipi non debent velut determinatæ, aut determinabiles quædam portiones quantitatum, quæ certam, & definitam parvitatem obtineant. Quascunque enim portiunculas linearum, superficierum, aut corporum acceperimus, aut designaverimus, hæ semper re ipsà finitæ erunt, non evanescentes; quare non sunt intra certos terminos, quantumvis proximos, coarctandæ; unde hæ quantitates semper ut decrescentes, ac perpetuò diminuendæ accipi debent.

IV. Quia verò opponi poterat, quantitatum evanescentium nullam esse ultimam proportionem; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est: Respondet Newtonus loc. cit. *Sed & eodem argumento æquè contendi posset nullam esse corporis ad certum locum, ubi motus finitur, provenientis velocitatem ultimam* (puta, gravis sursum projecti, & ad altissimum locum pervenientis); *hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam, ubi attingit, nullam esse*. Dein Newtonus directè respondet, & fallaciam vocum aperit. *Et responsio facilis est: Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur; neque antequam attingit locum ultimum, & motus cessat, neque postea, sed tunc, cùm attingit; idest, illam ipsam velocitatem, quacum corpus attingit locum ultimum, & quacum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitatum, non antequam evanescunt, non postea, sed quacum evanescunt. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quacum nascuntur; & summa prima, & ultima est quacum esse, vel augeri, aut minui incipiunt, & cessant.*

Hæc itaque summa est hujus methodi evanescentium, utì constare cuivis potest ex Lem. I. II. & III. n. 2. & seq. Ut quantitatum evanescentium, aut nascentium relationes, atque proprietates inveniantur, considerantur I. quantitates finitæ, quarum investigantur relationes, & proprietates, & lex, qua continuò crescunt, vel decrescunt: II. His cognitis facilè intelligitur, quænam proprietates quantitatibus illis crescentibus, ac decrescentibus semper conveniant, ac proinde etiam cùm in infinitum minuuntur, & evanescunt, vel cùm nascuntur. Imò verò ex Lem. I. aliisque invenitur, quæ sint proprietates, quæ licet quantitatibus finitis non conveniant, evanescentibus tamen, & nascentibus competunt;

petunt; cùm nempe quantitates finitæ decrescentes, ad illas proprietates, ut ita dicam, perpetuò accedunt, & ad eas tempore dato accedunt magis quàm pro data quavis differentia. *In hoc continuo accessu*, inquit Newtonus, *extat limes, quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima; & par est ratio limitis quantitatum, & proportionum omnium incipientium, & cessantium; cùmque hic limes sit certus, & definitus, problema est verè geometricum, eundem determinare.*

Contendi etiam potest, pergit Newtonus, *quòd, si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines; & sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus; contra quam Euclides de incommensurabilibus libro decimo elementorum demonstravit. Verùm hæc objectio falsæ innititur hypothesi. Ultimæ rationes illæ, quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum (hoc est, quantitatum determinatarum, & indivisibilium), sed limites, ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant, & quas propiùs assequi possunt, quàm pro data quavis differentia, nunquam verò transgredi, neque prius attingere, quàm quantitates diminuuntur in infinitum. Res clariùs intelligetur in infinitè magnis. Si quantitates duæ, quarum data est differentia, augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ, seu maximæ, quarum ista est ratio.*

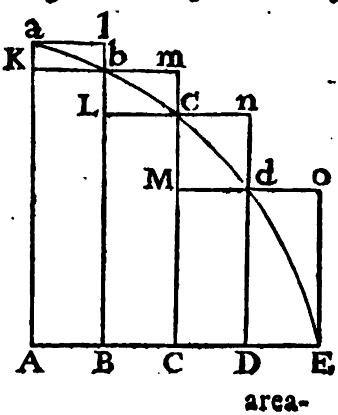
Denique, quod in methodo Cavallerii caveri oportere dixeram in usu vocum, idipsum monet Newtonus. *In sequentibus igitur, si quando facili re-*

rerum conceptui consulens dixero quantitates quàm minimas, vel evanescentes, vel ultimas: cave intelligas quantitates magnitudine determinatas; sed cogita semper diminuendas sine limite.

Ut autem Tirones diversarum quantitatum sine fine decrescentium limites, quos nunquam transgredi possunt, neque prius attingere, quàm quantitates diminuantur in infinitum, distinctiùs assequantur, resumatur schema Lemmatis II. n. 3.

Linea *Bb* motu sibi semper parallelo accedat ad lineam *Aa*; & interim punctum *b* ita moveatur in linea *Bb*, ut semper reperiatur in arcu *ba*: decrescente linearum *Aa*, *Bb*, distantià *AB*, decrescit quoque earum differentia *Ka*; & tandem, evanescente *AB*, evanescit *Ka*; atque hinc *Bb*, seu *AK* fit ultimò æqualis lineæ *Aa*.

Evanescunt autem *AB*, *Ka*, cùm lineæ *Aa*, *Bb*, neque distantes, neque prorsus congruentes dici possunt, sed simul, ut sic dixerim, conjungi incipiunt. In illo statu evanescentiæ, linearum *Aa*, *Bb* differentia *Ka* minor est quavis linea data, seu infinitè parva est, aut inassignabilis respectu *AK*, & *Bb*.

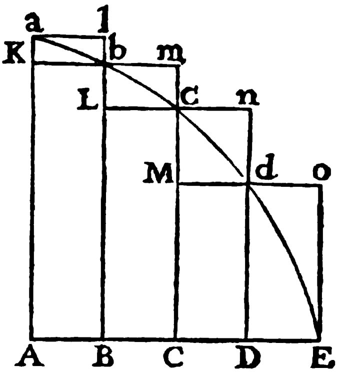


Similiter, quia evanescente *Ka*, trianguli *Kab*, & parallelogrammi *Kl* areæ infinitesimæ sunt respectu parallelogrammi evanescentis *Ab*; parallelogrammum istud *Ab* usurpari potest pro parallelogrammo *Al*, aut etiam pro figura *ABba*, hoc est, pro differentia

area-

arearum curvilinearum *AEca*, *BEcb*.

Ex his ſequitur diverſos eſſe infiniteſimorum, ſeu evaneſcentium ordines. Nam parallelogrammum *Kl* infiniteſimum erit reſpectu parallelogrammi *Ab*; hoc verò parallelogrammum infiniteſimum erit reſpectu areæ curvilineæ *AEca*. Idemque dicendum de quantitatibus ſolidis evaneſcentibus diverſorum ordinum, ſi figura *AEca* circa axem ſuum *AE* revolvatur.



SY-

SYNOPSIS.

28. HAbes jam quid inter Veterum, & Recentiorum methodum intersit; ac præterea an indivisibilium methodus nomine differat, re congruat cum methodo evanescentium divisibilium.

I. Antiqui perinde, ac recentiores Geometræ eodem omnes fundamento usi sunt; & quantitates infinitè parvas, seu evanescentes, pro nihilo habendas esse in multis demonstrationibus, tanquam axioma posuerunt Euclides, & Archimedes. Hinc licet imperfecta admodum fuerit Veterum Geometria, non iis tamen omnino ignota fuerunt methodi infinitesimalis principia. Unico exemplo vulgaris Geometriæ contentus ero.

Ut demonstrarent circulos esse inter se, ut quadrata diametrorum, fingebant iis circulis inscripta esse, vel circumscripta polygona similia, quorum latera numero augerentur, & longitudine minuerentur in infinitum; ita ut polygonorum inscriptorum, vel circumscriptorum differentia foret quavis data magnitudine minor. Quia verò hæc polygona sunt, ut quadrata diametrorum circulorum, quibus inscribuntur, vel circumscribuntur, circulos pariter esse, ut quadrata diametrorum, concludebant.

Hæc demonstrandi ratio varios infinitorum ordines supponit; quamvis idipsum vel non adverterent Veteres, vel non exprimerent. Nam considerabant polygona circulis inscripta, tanquam composita ex infinitis numero, atque infinitè parvis, seu evanescentibus lateribus; quæ sunt minimæ illæ quantitates, quas Recentiores vocant infinitesimas primi ordinis. Constat præterea differentiam polygoni inſcripti circulo, quavis data minorem, componi ex infinitis numero, atque infinitè parvis, ſeu evaneſcentibus circuli ſegmentis, quorum chordæ ſunt latera polygoni: hæc rurſum ſegmenta ſunt minimæ illæ quantitates, quas ſecundi ordinis infiniteſimas dicunt Recentiores.

His limitibus hanc methodum circumſcripſerant Veteres; primuſque omnium Cavallerius anno 1635. univerſæ Geometriæ planæ, ac ſolidæ eamdem methodum applicavit; quam idcirco Geometriam indiviſibilium, hoc eſt, infinitè parvorum nominavit.

II. Hinc methodus indiviſibilium non alia eſt, quàm exhauſtionum methodus compendioſior, & ad ſolidorum Theoremata uberiùs traducta.

III. A methodo Cavallerii Newtonus voces *indiviſibilium* ſuſtulit, rem retinuit; & corporum elementa per evaneſcentia diviſibilia luculentiùs explicat; & lineas e lineolis, non e punctis, ſuperficies ex areolis, non e lineis, ſolidum ex ſpatiolis ſolidis, non e ſuperficiebus compoſitum ſupponit. Quod idem Cavallerius, breviùs quidem, ſed obſcuriùs propoſuerat per methodum indiviſibilium.

IV. Antiquam autem exhauſtionum methodum ad meliorem formam revocavit nova methodus, qua fit, ut inter duas quantitates æqualitas directè ſæpe demonſtretur, quam indirectè, & per longiſſimas ambages Antiqui per reductionem ad abſurdum inveniebant.

V. Eodem fundamento innititur tam methodus Cavalleriana, quàm methodus evaneſcentium diviſibilium, ſeu infiniteſimalis: utraque inveſtigationi eſt aptiſſima, utraque demonſtrationes mirum in modum contrahit.

VI. In utraque methodo cavendum, ne contemtemnatur aliquid, quod non decreſcat ultra quoſcunque limites in ſe determinatos reſpectu ejus quantitatis, ex cujus comparatione contemnitur. Quod ſi caveatur, nullus error uſquam committi poterit.

VII. Tot itaque diſſidentes methodus ſive exhauſtionum, ſive indiviſibilium, ſive evaneſcentium diviſibilium, & infinitè parvorum in eumdem ferè ſcopum conſpirare facilè intelliges. Quod multò ante proſpexerat D. d'Alembert in celeberrimo ſuo tractatu Dimanicæ his verbis.

La méthode des infinimens petits a un inconvénient; c'eſt que les commençans, qui n'en pénétrent pas toûjours l'eſprit, pourrojent s'accoûtumer à regarder ces infinimens petits comme des réalitez; c'eſt une erreur contre laquelle on doit être d'autant plus en garde que de grands hommes y ſont tombés, & qu'elle même a donné occaſion à quelques mauvais livres contre la certitude de la Géométrie. La méthode des infinimens petits n'eſt autre choſe que la méthode des raiſons premiéres, & derniéres, c'eſt à dire, des rapports des quantitates qui naiſſent ou qui s'évanouiſſent.

FINIS.

Cum uſu invaluerit, ut Euclidis Elementa paſſim a Scriptoribus antiquioribus citentur, ac plerique Euclidæo ordini jamdiu aſſueverint; viſum mihi fuit faciendum, ut Indicem ſubjicerem, unde conſtare poſſet cuivis, ubinam in noſtra elementari inſtitutione, eorum demonſtratio quærenda ſit, quæ Euclides ſex prioribus Libris Geometriæ planæ, & undecimo, ac duodecimo Geometriæ Solidorum complexus eſt. Pleraſque omiſimus, quas Euclides in gratiam ſequentium demonſtrat. Propoſitionibus ſingulis in ordine Euclidæo reſpondent numeri, quibus ſeries noſtrorum Elementorum contexitur.

In ordine Euclidæo	Lib. I.	In noſtro Tomus I.
Prop.	1.	num. 208.
	4.	229.
	5.	226.
	6.	224.
	8.	232.
	10.	73.
	11.	70.
	12.	66.
	13.	74.
	14.	78.
	15.	86.
	16.	222.
	18. 19.	227.
	20.	211.
	21.	88. 235.
	22.	212.
	23.	64.
	24. 25.	231.
	27.	110.
	28.	114.
	29.	115.
	30.	116.

In ordine Euclidæo		In nostro
	Lib. I.	Tomus I.
Prop.	31.	num. 103.
	32.	121.
	33.	244.
	34.	248. 249.
	35. 36.	252.
	37. 38.	257.
	39. 40.	259.
	41.	250.
	42. 44. 45.	304. &c.
	47.	514.
	48.	518.
	Lib. II.	
	4.	508.
	5.	513.
	11.	577.
	12.	546.
	13.	549.
	Lib. III.	
	1.	144.
	2.	137.
	3.	145. 146.
	4.	145.
	5. 6.	130.
	7. 8.	132. 136.
	9.	134.
	10.	134. 150.
	11. 12.	153.
	13.	151.
	15.	135.
	16.	139. 160.
	17.	185.
	18.	139.
	19.	141.
	20.	177.
	21.	176.

22.

In ordine Euclidæo	In nostro
Lib. III.	Tomus I.
Prop. 22.	num. 188.
25.	144.
26. 27.	135. 179.
31.	180. 181. 182.
32.	186.
33.	191.
34.	190.
35.	556.
36.	560. 561.
Lib. IV.	
5.	207.
10.	579.
15.	288.
Lib. V.	
4.	386.
16.	384.
17.	390.
18.	388. 392.
22.	490.
23.	491.
26.	387.
27.	385.
28.	389.
29.	391.
Lib. VI.	
1.	374.
2.	397. 400. 407.
3.	401.
4.	410.
5.	415.
6.	414.
10.	402. 403.
12.	404.
13.	566.
16.	383.

In ordine Euclidæo	In nostro
Lib. VI.	Tomus I.
Prop. 19.	num. 498.
20.	446. 500.
23.	497.
30.	577.
31.	520.
Lib. XI.	Tomus II.
1.	3.
2.	6.
3.	4.
4.	11.
5.	13.
6.	15.
7.	28.
8.	14.
9.	30.
10.	31.
11.	16.
12.	17.
13.	9.
16.	34.
18.	22.
19.	26.
20.	43.
21.	39.
23.	44.
25.	97.
29. 30. 31.	62. 98.
32.	100.
Lib. XII.	
6.	111.
7.	106. 107.
9.	114.
10.	109.
11.	112.
13.	101.
34.	113.

INDEX

Universalis Propositionum, quæ in Elementis Geometriæ planæ continentur.

Notiones.

De Lineis.

Postu-

De Mensuris.

LIBER I.

ELEMENTUM I.

De variis Linearum rectarum sibi mutuò occurrentium affectionibus.

puncto

dem

ELEMENTUM II.

De variis rectarum Linearum nunquam concurrentium affectionibus.

Theor.

ELEMENTUM IV.

De Angulorum mensura.

ELE-

Elementum V.

De Triangulis rectilineis.

ELEMENTUM VI.

De Quadrilateris.

Coroll.

Praxis Geometrica.

De Figuris Isoperimetris.

ELEMENTUM VII.

De Polygonis.

Coroll.

Praxis Geometrica.

Figurarum planarum Reductio, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio.

Reductio.

Additio.

Multiplicatio.

Subtractio.

De Geodesia.

Triangulorum Divisio.

Probl.

Quadrilaterum Divisio.

Multilaterum Divisio.

LIBER II.

De Proportione rectarum Linearum.

ELEMENTUM I.

De Rationibus, & Proportionibus.

Coroll.

ELEMENTUM II.

De Lineis proportionaliter sectis, de Triangulis similibus, ac de Lineis ad idem punctum concurrentibus.

Praxis Geometrica.

Probl.

Elementum III.

De Polygonis similibus generatim, & de Punctis similiter positis.

PRAXIS GEOMETRICA.

De Re Ichnographica.

ELEMENTUM IV.

De Ratione Laterum homologorum, & de Perimetro Figurarum similium.

Praxis Geometrica.

Figurarum similium perimetrum addere, subtrahere, multiplicare, ac dividere, hac lege, ut figuræ subnascentes sint datis similes.

LI.

LIBER III.

De ratione Superficierum.

ELEMENTUM I.

ELEMENTUM II.

De Quadratis, & Figuris similibus in Triangulo rectangulo invicem comparatis.

unius

De Quantitatibus incommensurabilibus.

PRA-

Similium Figurarum Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio.

De Circino proportionis.

ELE-

Elementum III.

De Quadratis in Triangulo non rectangulo, & in Parallelogrammo invicem comparatis, & de Quadrilateris circulo inſcriptis.

LIBER IV.

De Sectionibus Rectarum geometricis.

ELEMENTUM I.

De Lineis sectis in ratione reciproca, ac de Mediis proportionalibus.

PRA-

Praxis Geometrica.

Elementum II.

De Lineis ſectis extrema, & media ratione, ac de Pentagonis, & Decagonis regularibus.

IN-

INDEX

Universalis Propositionum, quæ in Elementis Geometriæ Solidorum continentur.

ELEMENTUM I.

De vario Planorum inter se, & cum Lineis rectis occursu.

De occursu Planorum inter se.

De occursu Rectarum parallelarum in planam superficiem.

De Planis parallelis.

ELEMENTUM II.

De Angulo solido, de Prismate, & Cylindro.

Coroll.

PRAXIS GEOMETRICA.

Dimensio Prismatum, & Cylindrorum.

ELEMENTUM III.

De Sectionibus Pyramidis, & Coni, ac de horum Solidorum affectionibus, & comparatione cum Prismate, & Cylindro.

simul

Elementum IV.

De Truncis Pyramidum.

hæc

PRAXIS GEOMETRICA.

ELE-

ELEMENTUM V.

De Mensura superficierum Pyramidis, & Coni.

ELEMENTUM VI.

De Sphæra.

ELE-

Elementum VII.

De Ratione Superficierum, & Solidorum in Corporibus similibus.

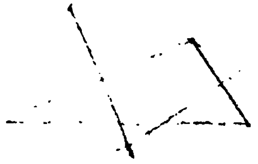
PRA-

De Transformatione Figurarum solidarum in alias Figuras solidas.

De Circino proportionis, ac de usu Lineæ Stereometricæ, seu solidorum, & Metallicæ.

FINIS.

Pag.	*lin.*	*Errata.*	*Corrige.*
135.	15.	duobus	quatuor
136.	18.	quatuor	tribus
211.	5.	methodus	methodi



erit triangulo E; quod eſt abſurdum, propter N A æqualem uni lateri trianguli E ex ſuppoſitione, & propter perimetrum rectilineæ figuræ circumſcriptæ majorem baſe ejuſdem trianguli E; nam hic perimeter major eſt perimetro circuli, cui circumſcribitur.

Itaque circulus, cùm neque major ſit, neque minor, æqualis eſt triangulo E. Quod erat &c.

Hæc eſt ab antiquis Geometris adhibita demonſtrandi ratio, quæ quàm perplexa ſit, & tædio plena, nemo non videt.

Confer jam Recentiorum directam, brevemque demonſtrationem, quam ſic proponunt.

Exemplum II.

THEOREMA.

26. *Circulus eſt æqualis triangulo, cujus baſis eſt peripheria circuli, altitudo autem ſemidiameter.*

Demonſtratio. Polygona ordinata circulo circumſcripta, & triangula baſes habentia ambitum polygoni, altitudinem verò radium circuli, ſemper ſunt æqualia. Atqui polygona circulo in infinitum circumſcripta, in circulum deſinunt; ſimiliterque triangula (ut mox oſtendam), quæ pro baſi habent ambitum polygoni circumſcripti, pro altitudine verò radium, tandem deſinunt in triangulum, pro baſi habens peripheriam, pro altitudine eumdem radium. Ergo circulus, & triangulum pro baſi habens peripheriam, pro altitudine radium, æqualia ſunt.

Directa Recentiorum demonſtratio.

Quòd autem triangula ſub ambitu polygoni, & radio deſinant in triangulum ſub peripheria, & radio, ſic demonſtro. Triangula ſub ambitu circum-cumscripti polygoni, & radio, sunt ad triangulum sub peripheria, & eodem radio, ut basis ad basim, nempe, ut ambitus polygoni ad peripheriam, cùm altitudinem habeant communem. Atqui ambitus polygoni in peripheriam desinit. Ergo & triangula desinent in triangulum. Quod erat &c.

Hæc autem perbrevis, ac directa demonstratio unicè postulat præmitti instar Lemmatis Theorema, quod demonstravimus n. 293. Geom. planæ.

Polygonum ordinatum circulo circumscriptum æquatur triangulo, cujus basis est ambitus polygoni, altitudo verò circuli radius.

Et polygonum ordinatum circulo inscriptum æquatur triangulo, cujus basis est polygoni inscripti ambitus, altitudo verò perpendicularis in latus unum ex centro ducta.

De

De Methodo Newtoniana evanescentium divisibilium, sive rationum primarum, & ultimarum.

27. HÆc Veterum indirecta, & perplexa demonstrandi ratio minimè placuit Newtono, qui, ut & rigidam illam Archimedis, & Euclidis, in theorematum demonstratione methodum adhiberet, & Recentiorum etiam assequeretur brevitatem, & facilitatem directæ demonstrationis,

I. Antiquorum utique principium Lemmate I. generaliter expressit, ut fusè exposui num. 2., illudque in Lemmatis sequentibus n. 3. 4. &c. ad curvas generatim applicavit, & inde directas, perbrevesque demonstrationes in toto operis decursu deduxit. *Præmisi verò*, inquit ipse lib. 1. sect. 1. lem. 11. philos. nat., *hæc Lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonstrationes, more veterum Geometrarum, ad absurdum; contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium.*

II. Sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis; & propterea methodus illa minùs geometrica censetur, durior, inquam, & minùs geometrica, quippe quæ, saltem quoad voces, videtur abhorrere a genesi quantitatis geometricæ; loco indivisibilium evanescentia divisibilia substituit; & quantitates mathematicas non ut ex partibus quàm minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas considerat. *Malui*, inquit, *demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas, & rationes, primasque nascentium, idest, ad limites summarum, & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonstrationes, qua potui brevita-*

te

te, *præmittere*. Nimirum, ut dictum est n. 3., si area curvilinea in parallelogramma rectilinea dividatur, & eorum numerus augeatur, & latitudo minuatur in infinitum, horum parallelogrammorum summa nunquam poterit esse major areà curvilineà; sed hæc area erit terminus, seu limes, ad quem parallelogrammorum decrescentium summa semper accedit, & quem tandem attingit, ubi parallelogramma evanescunt, aut nascuntur. Idem dicendum de evanescentibus curvarum chordis respectu perimetri curvilineæ. *His enim*, inquit, *idem præstatur, quod per methodum indivisibilium; & principiis demonstratis tutiùs utemur*.

III. Ac ne quispiam in horum evanescentium divisibilium notione laboraret, & minùs cautè eamdem usurparet, sic porro monet. *Si quando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel, si pro rectis usurpavero lineolas curvas; nolim indivisibilia, sed evanescentia divisibilia; non summas, & rationes partium determinatarum, sed summarum, & rationum limites semper intelligi*.

Quantitates itaque evanescentes concipi non debent velut determinatæ, aut determinabiles quædam portiones quantitatum, quæ certam, & definitam parvitatem obtineant. Quascunque enim portiunculas linearum, superficierum, aut corporum acceperimus, aut designaverimus, hæ semper re ipsà finitæ erunt, non evanescentes; quare non sunt intra certos terminos, quantumvis proximos, coarctandæ; unde hæ quantitates semper ut decrescentes, ac perpetuò diminuendæ accipi debent.

IV. Quia verò opponi poterat, quantitatum evanescentium nullam esse ultimam proportionem; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima,

ubi

ubi evanuerunt, nulla est: Respondet Newtonus loc. cit. *Sed & eodem argumento æquè contendi posset nullam esse corporis ad certum locum, ubi motus finitur, provenientis velocitatem ultimam* (puta, gravis sursum projecti, & ad altissimum locum pervenientis); *hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam, ubi attingit, nullam esse.* Dein Newtonus directè respondet, & fallaciam vocum aperit. *Et responsio facilis est: Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur; neque antequam attingit locum ultimum, & motus cessat, neque postea, sed tunc, cùm attingit; idest, illam ipsam velocitatem, quacum corpus attingit locum ultimum, & quacum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitatum, non antequam evanescunt, non postea, sed quacum evanescunt. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quacum nascuntur; & summa prima, & ultima est quacum esse, vel augeri, aut minui incipiunt, & cessant.*

Hæc itaque summa est hujus methodi evanescentium, utì constare cuivis potest ex Lem. I. II. & III. n. 2. & seq. Ut quantitatum evanescentium, aut nascentium relationes, atque proprietates inveniantur, considerantur I. quantitates finitæ, quarum investigantur relationes, & proprietates, & lex, qua continuò crescunt, vel decrescunt: II. His cognitis facilè intelligitur, quænam proprietates quantitatibus illis crescentibus, ac decrescentibus semper conveniant, ac proinde etiam cùm in infinitum minuuntur, & evanescunt, vel cùm nascuntur. Imò verò ex Lem. I. aliisque invenitur, quæ sint proprietates, quæ licet quantitatibus finitis non conveniant, evanescentibus tamen, & nascentibus competunt;

petunt; cùm nempe quantitates finitæ decrescentes, ad illas proprietates, ut ita dicam, perpetuò accedunt, & ad eas tempore dato accedunt magis quàm pro data quavis differentia. *In hoc continuo accessu*, inquit Newtonus, *extat limes, quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima; & par est ratio limitis quantitatum, & proportionum omnium incipientium, & cessantium; cùmque hic limes sit certus, & definitus, problema est verè geometricum, eundem determinare.*

Contendi etiam potest, pergit Newtonus, *quòd, si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines; & sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus; contra quam Euclides de incommensurabilibus libro decimo elementorum demonstravit. Verùm hæc objectio falsæ innititur hypothesi. Ultimæ rationes illæ, quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum (hoc est, quantitatum determinatarum, & indivisibilium), sed limites, ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant, & quas propiùs assequi possunt, quàm pro data quavis differentia, nunquam verò transgredi, neque prius attingere, quàm quantitates diminuuntur in infinitum. Res clariùs intelligetur in infinitè magnis. Si quantitates duæ, quarum data est differentia, augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ, seu maximæ, quarum ista est ratio.*

Denique, quod in methodo Cavallerii caveri oportere dixeram in usu vocum, idipsum monet Newtonus. *In sequentibus igitur, si quando facili*

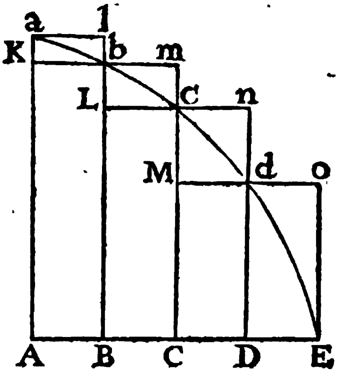
re-

rerum conceptui consulens dixero quantitates quàm minimas, vel evanescentes, vel ultimas: cave intelligas quantitates magnitudine determinatas; sed cogita semper diminuendas sine limite.

Ut autem Tirones diversarum quantitatum sine fine decrescentium limites, quos nunquam transgredi possunt, neque prius attingere, quàm quantitates diminuantur in infinitum, distinctiùs assequantur, resumatur schema Lemmatis II. n. 3.

Linea *Bb* motu sibi semper parallelo accedat ad lineam *Aa*; & interim punctum *b* ita moveatur in linea *Bb*, ut semper reperiatur in arcu *ba*: decrescente linearum *Aa*, *Bb*, distantià *AB*, decrescit quoque earum differentia *Ka*; & tandem, evanescente *AB*, evanescit *Ka*; atque hinc *Bb*, seu *AK* fit ultimò æqualis lineæ *Aa*.

Evanescunt autem *AB*, *Ka*, cùm lineæ *Aa*, *Bb*, neque distantes, neque prorsus congruentes dici possunt, sed simul, ut sic dixerim, conjungi incipiunt. In illo statu evanescentiæ, linearum *Aa*, *Bb* differentia *Ka* minor est quavis linea data, seu infinitè parva est, aut inassignabilis respectu *AK*, & *Bb*.

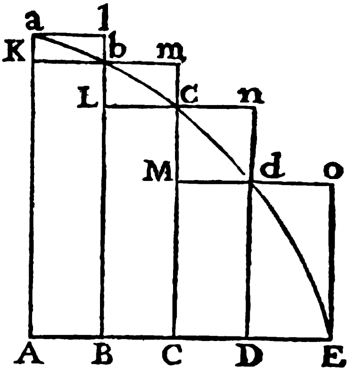


Similiter, quia evanescente *Ka*, trianguli *Kab*, & parallelogrammi *Kl* areæ infinitesimæ sunt respectu parallelogrammi evanescentis *Ab*; parallelogrammum istud *Ab* usurpari potest pro parallelogrammo *Al*, aut etiam pro figura *ABba*, hoc est, pro differentia

area-

arearum curvilinearum *AEca*, *BEcb*.

Ex his ſequitur diverſos eſſe infiniteſimorum, ſeu evaneſcentium ordines. Nam parallelogrammum *Kl* infiniteſimum erit reſpectu parallelogrammi *Ab*; hoc verò parallelogrammum infiniteſimum erit reſpectu areæ curvilineæ *AEca*. Idemque dicendum de quantitatibus ſolidis evaneſcentibus diverſorum ordinum, ſi figura *AEca* circa axem ſuum *AE* revolvatur.



SYNOPSIS.

28. HAbes jam quid inter Veterum, & Recentiorum methodum intersit; ac præterea an indivisibilium methodus nomine differat, re congruat cum methodo evanescentium divisibilium.

I. Antiqui perinde, ac recentiores Geometræ eodem omnes fundamento usi sunt; & quantitates infinitè parvas, seu evanescentes, pro nihilo habendas esse in multis demonstrationibus, tanquam axioma posuerunt Euclides, & Archimedes. Hinc licet imperfecta admodum fuerit Veterum Geometria, non iis tamen omnino ignota fuerunt methodi infinitesimalis principia. Unico exemplo vulgaris Geometriæ contentus ero.

Ut demonstrarent circulos esse inter se, ut quadrata diametrorum, fingebant iis circulis inscripta esse, vel circumscripta polygona similia, quorum latera numero augerentur, & longitudine minuerentur in infinitum; ita ut polygonorum inscriptorum, vel circumscriptorum differentia foret quavis data magnitudine minor. Quia verò hæc polygona sunt, ut quadrata diametrorum circulorum, quibus inscribuntur, vel circumscribuntur, circulos pariter esse, ut quadrata diametrorum, concludebant.

Hæc demonstrandi ratio varios infinitorum ordines supponit; quamvis idipsum vel non adverterent Veteres, vel non exprimerent. Nam considerabant polygona circulis inscripta, tanquam composita ex infinitis numero, atque infinitè parvis, seu evanescentibus lateribus; quæ sunt minimæ illæ quantitates, quas Recentiores vocant infinitesimas primi ordinis. Constat præterea differentiam polygoni inſcripti circulo, quavis data minorem, componi ex infinitis numero, atque infinitè parvis, ſeu evaneſcentibus circuli ſegmentis, quorum chordæ ſunt latera polygoni : hæc rurſum ſegmenta ſunt minimæ illæ quantitates, quas ſecundi ordinis infiniteſimas dicunt Recentiores.

His limitibus hanc methodum circumſcripſerant Veteres; primuſque omnium Cavallerius anno 1635. univerſæ Geometriæ planæ, ac ſolidæ eamdem methodum applicavit; quam idcirco Geometriam indiviſibilium, hoc eſt, infinitè parvorum nominavit.

II. Hinc methodus indiviſibilium non alia eſt, quàm exhauſtionum methodus compendioſior, & ad ſolidorum Theoremata uberiùs traducta.

III. A methodo Cavallerii Newtonus voces *indiviſibilium* ſuſtulit, rem retinuit; & corporum elementa per evaneſcentia diviſibilia luculentiùs explicat; & lineas e lineolis, non e punctis, ſuperficies ex areolis, non e lineis, ſolidum ex ſpatiolis ſolidis, non e ſuperficiebus compoſitum ſupponit. Quod idem Cavallerius, breviùs quidem, ſed obſcuriùs propoſuerat per methodum indiviſibilium.

IV. Antiquam autem exhauſtionum methodum ad meliorem formam revocavit nova methodus, qua fit, ut inter duas quantitates æqualitas directè ſæpe demonſtretur, quam indirectè, & per longiſſimas ambages Antiqui per reductionem ad abſurdum inveniebant.

V. Eodem fundamento innititur tam methodus Cavalleriana, quàm methodus evaneſcentium diviſibilium, ſeu infiniteſimalis: utraque inveſtigationi eſt aptiſſima, utraque demonſtrationes mirum in modum contrahit.

VI. In utraque methodo cavendum, ne contemtemnatur aliquid, quod non decrescat ultra quoscunque limites in se determinatos respectu ejus quantitatis, ex cujus comparatione contemnitur. Quod si caveatur, nullus error usquam committi poterit.

VII. Tot itaque diffidentes methodus sive exhaustionum, sive indivisibilium, sive evanescentium divisibilium, & infinitè parvorum in eumdem ferè scopum conspirare facilè intelliges. Quod multò ante prospexerat D. d'Alembert in celeberrimo suo tractatu Dimanicæ his verbis.

La méthode des infinimens petits a un inconvénient; c'est que les commençans, qui n'en pénétrent pas toûjours l'esprit, pourrojent s'accoûtumer à regarder ces infinimens petits comme des réalitez; c'est une erreur contre laquelle on doit être d'autant plus en garde que de grands hommes y sont tombés, & qu'elle même a donné occasion à quelques mauvais livres contre la certitude de la Géométrie. La méthode des infinimens petits n'est autre chose que la méthode des raisons premiéres, & derniéres, c'est à dire, des rapports des quantitates qui naissent ou qui s'évanouissent.

FINIS.

Cum usu invaluerit, ut Euclidis Elementa passim a Scriptoribus antiquioribus citentur, ac plerique Euclidæo ordini jamdiu assueverint; visum mihi fuit faciendum, ut Indicem subjicerem, unde constare posset cuivis, ubinam in nostra elementari institutione, eorum demonstratio quærenda sit, quæ Euclides sex prioribus Libris Geometriæ planæ, & undecimo, ac duodecimo Geometriæ Solidorum complexus est. Plerasque omisimus, quas Euclides in gratiam sequentium demonstrat. Propositionibus singulis in ordine Euclidæo respondent numeri, quibus series nostrorum Elementorum contexitur.

In ordine Euclidæo		In nostro
	Lib. I.	Tomus I.
Prop.	1.	num. 208.
	4.	229.
	5.	226.
	6.	224.
	8.	232.
	10.	73.
	11.	70.
	12.	66.
	13.	74.
	14.	78.
	15.	86.
	16.	222.
	18. 19.	227.
	20.	211.
	21.	88. 235.
	22.	212.
	23.	64.
	24. 25.	231.
	27.	110.
	28.	114.
	29.	115.
	30.	116.

In ordine Euclidæo		In nostro
Lib. I.		Tomus I.
Prop. 31.	num.	103.
32.		121.
33.		244.
34.	248.	249.
35. 36.		252.
37. 38.		257.
39. 40.		259.
41.		250.
42. 44. 45.	304.	&c.
47.		514.
48.		518.
Lib. II.		
4.		508.
5.		513.
11.		577.
12.		546.
13.		549.
Lib. III.		
1.		144.
2.		137.
3.	145.	146.
4.		145.
5. 6.		130.
7. 8.	132.	136.
9.		134.
10.	134.	150.
11. 12.		153.
13.		151.
15.		135.
16.	139.	160.
17.		185.
18.		139.
19.		141.
20.		177.
21.		176.

22.

In ordine Euclidæo		In nostro
Lib. III.		Tomus I.
Prop. 22.		num. 188.
25.		144.
26. 27.	135.	179.
31.	180. 181.	182.
32.		186.
33.		191.
34.		190.
35.		556.
36.	560.	561.
Lib. IV.		
5.		207.
10.		579.
15.		288.
Lib. V.		
4.		386.
16.		384.
17.		390.
18.	388.	392.
22.		490.
23.		491.
26.		387.
27.		385.
28.		389.
29.		391.
Lib. VI.		
1.		374.
2.	397. 400.	407.
3.		401.
4.		410.
5.		415.
6.		414.
10.	402.	403.
12.		404.
13.		566.
16.		383.

O 4 19.

In ordine Euclidæo	In nostro
Lib. VI.	Tomus I.
Prop. 19.	num. 498.
20.	446. 500.
23.	497.
30.	577.
31.	520.
Lib. XI.	Tomus II.
1.	3.
2.	6.
3.	4.
4.	11.
5.	13.
6.	15.
7.	28.
8.	14.
9.	30.
10.	31.
11.	16.
12.	17.
13.	9.
16.	34.
18.	22.
19.	26.
20.	43.
21.	39.
23.	44.
25.	97.
29. 30. 31.	62. 98.
32.	100.
Lib. XII.	
6.	111.
7.	106. 107.
9.	114.
10.	109.
11.	112.
13.	101.
34.	113.

INDEX

Universalis Propositionum, quæ in Elementis Geometriæ planæ continentur.

Notiones.

De Lineis.

Postu-

dem

Elementum II.

De variis rectarum Linearum nunquam concurrentium affectionibus.

cient

PRAXIS GEOMETRICA

Libellationis.

ELEMENTUM III.

De Lineis circularibus, earumque mutuo inter se, & cum lineis rectis occursu.

Theor.

cum,

ELEMENTUM IV.

De Angulorum mensura.

ELE-

Elementum V.

De Triangulis rectilineis.

Elementum VI.

De Quadrilateris.

Coroll.

PRAXIS GEOMETRICA.

De Figuris Isoperimetris.

Elementum VII.

De Polygonis.

Coroll.

Praxis Geometrica.

Figurarum planarum Reductio, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Diviſio.

Reductio.

Additio.

Multiplicatio.

Subtractio.

De Geodesia.

Triangulorum Divisio.

Probl.

Elementum II.

De Lineis proportionaliter sectis, de Triangulis similibus, ac de Lineis ad idem punctum concurrentibus.

Praxis Geometrica.

Probl.

ELEMENTUM III.

De Polygonis similibus generatim, & de Punctis similiter positis.

Praxis Geometrica.

De Re Ichnographica.

Elementum IV.

De Ratione Laterum homologorum, & de Perimetro Figurarum similium.

pta,

LIBER III.

De ratione Superficierum.

ELEMENTUM I.

ELEMENTUM II.

De Quadratis, & Figuris similibus in Triangulo rectangulo invicem comparatis.

PRA-

Similium Figurarum Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio.

De Circino proportionis.

ELE-

Elementum III.

De Quadratis in Triangulo non rectangulo, & in Parallelogrammo invicem comparatis, & de Quadrilateris circulo inscriptis.

LIBER IV.

De Sectionibus Rectarum geometricis.

Elementum I.

De Lineis sectis in ratione reciproca, ac de Mediis proportionalibus.

PRA-

Praxis Geometrica.

Elementum II.

De Lineis sectis extrema, & media ratione, ac de Pentagonis, & Decagonis regularibus.

IN-

INDEX

Universalis Propositionum, quæ in Elementis Geometriæ Solidorum continentur.

ELEMENTUM I.

De vario Planorum inter se, & cum Lineis rectis occursu.

De occursu Planorum inter se.

De occursu Rectarum parallelarum in planam superficiem.

De Planis parallelis.

ELEMENTUM II.

De Angulo solido, de Prismate, & Cylindro.

Coroll.

PRAXIS GEOMETRICA.

Dimensio Prismatum, & Cylindrorum.

ELEMENTUM III.

De Sectionibus Pyramidis, & Coni, ac de horum Solidorum affectionibus, & comparatione cum Prismate, & Cylindro.

simul

ELEMENTUM IV.

De Truncis Pyramidum.

hæc

ELE-

De Sphæra Soliditate.

ELE-

Elementum VII.

De Ratione Superficierum, & Solidorum in Corporibus similibus.

PRA-

De Transformatione Figurarum solidarum in alias Figuras solidas.

De Circino proportionis, ac de usu Lineæ Stereometricæ, seu solidorum, & Metallicæ.

FINIS.

Pag.	*lin.*	*Errata.*	*Corrige.*
135.	15.	duobus	quatuor
136.	18.	quatuor	tribus
211.	5.	methodus	methodi