M. L. Slobin

J. E. Manchester.

Tübingen, '99.

Elementare Theorie

der

analytischen Functionen

einer complexen Veränderlichen

von

J. Thomae,
Professor in Jena.

Zweite erweiterte und umgearbeitete Auflage.

Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Halle a. S.
Verlag von Louis Nebert.
1898.

Vorwort zur ersten Auflage.

So alt der Gedanke ist, die Functionentheorie elementar, ich meine ohne Anwendung der Infinitesimalrechnung, nur auf die Darstellung durch Potenzreihen zu gründen, so viele Vorzüge diese Methode besitzt, wegen der absoluten Strenge, die sie gestattet, so ist trotzdem meines Wissens eine consequente Durchführung eines solchen Planes noch von keinem Autor unternommen. Wohl findet man in Compendien der algebraischen Analysis zuweilen einige Kapitel diesem Gedanken gewidmet, allein eine zu einseitige Auffassung oder die Verfolgung noch anderer Ziele neben dem einen hindert, dass derselbe zur vollen Herrschaft gelangt. Anders mag es sich mit Vorlesungen verhalten, in welchen vielleicht mancher Lehrer der Mathematik demselben mit mehr oder weniger Energie gefolgt ist. Der letzte Umstand darf jedoch, wie ich glaube, einer Publication nicht hinderlich in den Weg treten, welche wie die vorliegende versucht, die Functionslehre überall elementar und völlig streng zu behandeln. Zwar macht er es unmöglich, die erste Urheberschaft wichtiger Sätze jedesmal festzustellen und anzuerkennen, da eben Veröffentlichtes nicht vorliegt, allein für den wissenschaftlichen Fortschritt ist dies ganz nebensächlich. Was jedoch die grundlegenden Principien einer solchen Behandlungsweise anbetrifft, so sind dieselben in einer Abhandlung des Herrn Weierstrass über analytische Facultäten enthalten.

Der Inhalt des vorliegenden Werkchens wird am besten aus dem beigegebenen ausführlichen Inhaltsverzeichnisse erkannt, und nur über den Umfang desselben füge ich hinzu, dass unschwer die angewandte Methode sich auf eine noch grössere Reihe von Functionen als geschehen hätte ausdehnen lassen, namentlich auf die durch die hypergeometrische Reihe dargestellten. Allein eine gewisse Beschränkung schien mir für's erste nothwendig.

Die in den ersten Paragraphen enthaltene Algebra der gebrochenen und negativen Zahlen bitte ich den Leser nicht als eine erschöpfende und vollständige Theorie dieser Formen ansehen zu wollen, sie wird in manchem Elementarbuche besser zu finden sein. Es mussten diese Betrachtungen nur Platz finden, um den formalen Standpunct zu kennzeichnen, auf welchen ich mich hier stelle. Die Schwierigkeiten beginnen nach meiner Ansicht erst bei den irrationalen Zahlen.

Jena.

J. Thomae.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Nachdem meine *Elementare Functionentheorie* schon seit einigen Jahren vergriffen ist, hat mich der Herr Verleger veranlasst, sie für eine neue Auflage zu bearbeiten. Es sind seitdem mehrere Werke mit ähnlicher Tendenz erschienen, insbesondere sind die Vorlesungen von Weierstrass durch Herrn Biermann im Jahre 1887 veröffentlicht worden. Was elementar sei, oder wo die Grenzen einer elementaren Functionentheorie liegen, dafür wird die Antwort sehr verschieden lauten können. In meinem Buche ist die Ableitung einer analytischen Function zwar formal definirt, aber die Anwendung der Algorithmen der Infinitesimalrechnung ist vermieden worden. Indem ich so mir engere Grenzen gesetzt habe, glaubte ich dem Bedürfniss der Lernenden entgegen zu kommen und konnte bei manchen Ausführungen der strengen Methode länger verweilen.

Der Grundplan des Werkes ist der ursprüngliche geblieben, die wesentlichste Aenderung ist die, dass die Theorie der ganzen rationalen Functionen in einem Zuge vor den transcendenten Functionen erledigt ist, während in der ersten Auflage dieses Kapitel in zwei Theile gespalten war, weil zur Erledigung einiger Hauptfragen die Darstellung der Einheitswurzeln durch trigonometrische Functionen benutzt wurde, was jetzt hier, wie schon seit vielen Jahren in meinen Vorlesungen vermieden worden ist. Ferner ist das Kapitel über Theta- und doppelt-periodische Functionen nicht wieder mit abgedruckt, weil dasselbe doch eine grössere Ausführlichkeit nöthig macht, wenn es wirklich Nutzen bringen soll. Dafür sind mehrere andere elementare Functionen, wie die Facultät und der Arcus-sinus ausführlicher untersucht, und es sind mehrere allgemeine Sätze der Functionentheorie, wie der vom wahren Convergenzkreise eingefügt. Endlich ist der Sturm'sche Satz, der vielleicht mehr in die Algebra gehört, der aber doch bei der Behandlung der ganzen rationalen Functionen leicht mitgenommen werden kann, in das Werk aufgenommen. Dass das Buch vielfach erweitert und umgearbeitet ist, geht schon daraus hervor, dass es trotz Fortlassung eines Kapitels gegen die erste Auflage an Umfang zugenommen hat.

Wenn das Büchlein dieselbe freundliche Aufnahme, wie die erste Auflage finden sollte, so wäre ich geneigt, sofern es meine Kräfte gestatten, etwa als einen zweiten Theil desselben die doppelt-periodischen Functionen und die hypergeometrischen Reihen, so weit sie der elementaren Behandlung fähig sind, folgen zu lassen.

Jena, im März 1898.

J. Thomae.

Inhalts-Verzeichniss.

Zahlentheorie. Seite 1—21.

Allgemeine Sätze über unendliche Reihen und Producte. Seite 21—32.

Allgemeine Sätze über Functionen von einer und von zwei veränderlichen Grössen. Begriff der Stetigkeit. Seite 32—42.

Die ganze Potenz, der binomische Satz, die ganzen rationalen Functionen. Seite 42—63.

Die Potenzreihen und die regulären Functionen. Seite 64—74.

Zahlentheorie.

§ 1. Einleitende Bemerkungen. Die gesammte reine Mathematik beschäftigt sich mit Beziehungen zwischen Zahlen. Es kann daher nicht befremden, dass in einem elementaren Lehrbuche über analytische Functionen, deren Behandlung einen Theil der reinen Mathematik bildet, zuerst auf den Zahlbegriff wenigstens berührungsweise eingegangen wird, oder dass dasselbe mit einer Zahlentheorie beginnt. Dabei beansprucht das Wort freilich eine etwas andere als die gebräuchliche Bedeutung. Sonst nämlich pflegt man unter Zahlentheorie die Untersuchung specieller, wesentlich durch ihre Discontinuität charakterisirter Zahlen, z. B. der ganzen Zahlen zu verstehen, und wir werden hier aus diesem engeren Theile der Zahlenlehre da und dort einige elementare Sätze als bekannt voraus zu setzen genöthigt sein. So den Satz, dass eine ganze Zahl sich nur auf eine Weise in Primfactoren zerlegen lässt, und dass von zwei ganzen Zahlen nur dann die eine durch die andere theilbar ist, wenn ihre Primfactoren sämmtlich in der ersten enthalten sind. — Die Zahlenlehre aber, die hier voraus zu schicken wäre, hat es mit der Aufstellung und Begrenzung des allgemeinen Zahlenbegriffes, wenigstens so weit es für die Arithmetik nöthig ist, zu thun. Von der hierdurch gestellten Aufgabe sondern wir jedoch einen Theil ab, indem wir (vorläufig) gemeine Zahlen und irrationale Zahlen von einander trennen, und nur die letzteren, so wie die complexen Zahlen mit ausführlicherer Gründlichkeit behandeln. Eine genaue Untersuchung der gemeinen Zahlen würde einen logischen Charakter tragen (vergl. Frege: Die Grundlagen der Arithmetik, Breslau 1884, und Dedekind: Was sind und was wollen die Zahlen, Braunschweig 1887 und 1893) und einen zu breiten Raum einnehmen; hier soll nur weniges über Erwerbung des Zahlenbegriffes beigebracht werden.

Mir scheint, dass die Methode, wie zuweilen Kinder zählen lernen, zur Begründung des Zahlbegriffes eine vollkommen ausreichende ist. Es wird ihnen eine bestimmte Objectenmenge, ein Gestell von zehn Stäben mit je zehn Steinen, die verschiebbar sind, gegeben, es wird ihnen also eine bestimmte Objectenmenge gegeben, von der man wegen der Verschiebbarkeit beliebige Theile absondern kann. Dass dabei eine Eintheilung nach zehn vorgenommen ist, geht uns im Grunde hier nichts an, dient blos dazu, das Kind sogleich in das dekadische System einzuführen. Diese Objecte oder Elemente nennen wir Rechensteine, und wenn wir einen bestimmten Theil davon absondern, so sagen wir, wir bringen diesen Theil aufs Brett. Die Rechensteine werden einander möglichst ähnlich, gewöhnlich als durchbohrte Kugeln hergestellt, so dass sie eine naive Betrachtung nicht von einander unterscheidet, ihre Vertauschbarkeit ohne weiteres zugiebt. Hierdurch wird sofort der fruchtbare Begriff der Gleichheit erzeugt. Die Rechensteine sind, oder um deutlicher zu sein,[1]) heissen einander gleich, weil sie für einander gesetzt werden können, obschon sie doch sicher verschiedene Dinge sind. Wir sind im Stande,

[1]) Vergl. Frege, Grundlagen der Arithmetik, S. 45.

von der Verschiedenheit der in einer Objectenmenge oder mit Dedekind zu reden in einem System enthaltenen Dinge zu abstrahiren, sie einander als gleich anzusehen, und dadurch den Begriff der Gleichheit zu einem fruchtbaren zu machen. Denn wenn Gleichheit, oder das Gleichheitszeichen $=$ nur die Identität bedeuten sollte, so würden wir bei der trivialen Erkenntniss, oder wenn man lieber will, Denknothwendigkeit a ist a ($a = a$) stehen bleiben. Der erste Gebrauch des Gleichheitszeichens ist in der Mathematik so überwiegend, dass für die zweite Bedeutung desselben für die Identität vielfach ein neues Zeichen ($\equiv$) eingeführt worden ist, ja es wird auch dieses Zeichen und das Wort Identität in der Analysis in einer weiteren Bedeutung gebraucht, wie sich später zeigen wird.

Andrerseits wird durch dieses Gleichsetzen auch der Begriff der Einheit, die Zahl Eins gewonnen. Werden sämmtliche Rechensteine vom Brett genommen bis auf einen, so wird die Vorstellung jedesmal dieselbe sein, welcher der Steine auch immer auf dem Brett gelassen wird. Hierdurch wird jeder Stein zu irgend einem andern in eine Beziehung gesetzt, nämlich in die Beziehung der Gleichheit mit diesem, dadurch wird er zum Element, zur Einheit der vorliegenden Menge. Fügt man einen andern Stein dem gegebenen auf dem Brett hinzu, so gewinnt man eine bestimmte Mehrheit, eine bestimmte Menge; ihre Vorstellung wird mit dem Worte Zwei verknüpft, und umgekehrt wird durch das Wort Zwei (oder Zeichen 2) die Vorstellung einer bestimmten Menge von Rechensteinen hervorgerufen. Durch weitere Hinzufügungen entsteht die sogenannte natürliche Zahlenreihe.

In diesen Begriff der Zahlen mischt sich zunächst noch der Begriff einer bestimmten Objectenmenge, der Rechensteine. Nimmt man ein zweites Rechenbrett, dessen Steine den früheren ähnlich sind, und übt an diesem den Zahlenbegriff ein, so merkt der Uebende, dass seine Zahlen nicht von dem speciellen Steinsystem abhängig sind. Für seinen Eindruck von drei Steinen ist es gleichgiltig, ob er sich des einen oder des anderen Rechenbrettes bedient. Nimmt man nun bunte, verschiedenfarbige Steine, so wird ihre Verschiedenheit, die ja vorher auch schon da war, auffälliger. Aber der Lernende abstrahirt nun schon von dieser Verschiedenheit, er bemerkt, wenn er die bunten Steine auf's Brett bringt und dieselben Operationen mit ihnen vornimmt wie mit den gleichfarbigen, dass bestimmten Mengen des einen Systems bestimmte Mengen des andern entsprechen, dass jedem Individuum der einen Menge ein Individuum der andern zugeordnet werden kann und umgekehrt. Die Eigenthümlichkeit der beiden Mengen, dass ihre Elemente, ihre Einheiten hin und zurück sich einander bestimmt entsprechen, dass sie, wie man zu sagen pflegt, sich ein-eindeutig auf einander beziehen oder abbilden lassen, bezeichnet man mit dem Ausdruck, die beiden Mengen sind gleichzahlig, und wenn die letzte Menge drei Elemente enthielt, so heisst das, ihre Individuen lassen sich auf drei Elemente der Menge, auf welche die Bezeichnung drei zuerst angewandt wurde, oder auf die Vorstellung derselben ein-eindeutig abbilden. Der weitere Fortschritt ist einfach. Statt der Rechensteine wird man beliebige andere, zunächst concrete Gegenstände setzen, die sich als unter einen allgemeinen Begriff fallende Gegenstände auffassen lassen, wie Pfennige, Thaler, Gulden, Kronen u. s. w. als Münzen. Auch hier werden bestimmte Mengen durch ein-eindeutiges Abbilden auf die elementare Menge der Rechensteine oder deren Vorstellung bezogen. Endlich kann jedes beliebige Ding, jeder Begriff als Element des allgemeinen Begriffes Gedankending gedacht werden und ist als solcher einem Rechenstein gleichzahlig, so dass ihm das Prädicat Eins zukommt, und jede Menge solcher Dinge kann auf eine gewisse Menge von Rechensteinen ein-eindeutig bezogen werden, und es kommt ihr aus diesem Grunde ein Prädicat zu, welches diese Möglichkeit ausdrückt, es ist das Prädicat der Anzahl. Da an Stelle der Rechensteine nach und nach nur deren Vorstellung tritt, oder statt der Steine das Zeichen 1, so kann man ihre Menge als endlos annehmen, wodurch man zu dem Satze gelangt, dass es keine letzte Zahl giebt, oder wie man auch sagt, dass es unendlich viele Zahlen giebt.

Herr Frege giebt auf Seite 79 seines oben angeführten Werkes folgende Definition: Die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist der Umfang des Begriffes „gleichzahlig dem Begriffe F". Diese Definition dürfte sich von der hier gegebenen nur durch die abstraktere Fassung unterscheiden, da hier die Gleichzahligkeit an einem bestimmten concreten Begriffe, den Rechensteinen, oder einer sie vertretenden Menge von Zeichen 1 festgestellt wird.

Der Begriff „Unendlich" ist einer der fruchtbarsten und schwierigsten zugleich. Herr Dedekind nennt eine Menge unendlich, wenn sich ihre Elemente ein-eindeutig auf einen Theil der Menge beziehen lassen, wie z. B. sich das System der ganzen Zahlen auf einen Theil derselben, etwa auf die geraden Zahlen, ein-eindeutig beziehen lässt. In den beiden Reihen

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 & 2.4 & 2.5 & 2.6 & \ldots \end{array}$$

ist durch das Untereinanderstehen entsprechender Zahlen eine solche Zuordnung gegeben. Hier aber wird dieser Begriff in der sonst üblichen asymptotischen Weise gehandhabt werden. Es ist nicht leicht, von vorn herein den Sinn des Zeichens ∞ und den Begriff Unendlich ein für allemal fest zu legen, er soll daher hier in jedem einzelnen Falle, wo er auftritt, sorgfältig discutirt werden, woraus dann eine sichere Erkenntniss des Umfanges dieses Begriffes fliessen wird.

Es wird, wie schon gesagt, hier nicht beabsichtigt eine vollständige Entwickelung des Zahlenbegriffes zu geben, was viel zu viel Raum einnehmen würde. Es wird vielmehr der Begriff der ganzen Zahlen und die Fähigkeit zählen zu können vorausgesetzt, und es werden über die ganzen und gebrochenen, positiven und negativen Zahlen nur wenige Bemerkungen vorauf geschickt, um den formalen Standpunkt zu kennzeichnen, auf den sich das vorliegende Werkchen stellt. Ein genaueres Eingehen auf den Begriff der irrationalen Zahlen und deren formale Eigenschaften hingegen ist für eine elementare Functionentheorie unerlässlich.

Die formale Auffassung der Zahlen zieht sich bescheidenere Grenzen als die logische. Sie fragt nicht, was sind und was wollen die Zahlen, sondern sie fragt, was braucht man von den Zahlen in der Arithmetik. Die Arithmetik ist für die formale Auffassung ein Spiel mit Zeichen, die man wohl leere nennt, womit man sagen will, dass ihnen (im Rechenspiel) kein anderer Inhalt zukommt als der, der ihnen in Bezug auf ihr Verhalten gegenüber gewissen Verknüpfungsregeln (Spielregeln) beigelegt wird. Aehnlich bedient sich der Schachspieler seiner Figuren, er legt ihnen gewisse Eigenschaften bei, die ihr Verhalten im Spiel bedingen, und die Figuren sind nur äussere Zeichen für dies Verhalten. Zwischen dem Schachspiel und der Arithmetik findet freilich ein bedeutsamer Unterschied statt. Die Schachspielregeln sind willkürliche, das System der Regeln der Arithmetik ist ein solches, dass die Zahlen mittels einfacher Axiome auf anschauliche Mannigfaltigkeiten bezogen werden können und uns in Folge dessen wesentliche Dienste in der Erkenntniss der Natur leisten.

Der formale Standpunkt hebt uns über alle metaphysischen Schwierigkeiten hinweg, das ist der Gewinn, den er uns bietet. Erst bei der Verknüpfung der Zahlen mit gegebenen Mannigfaltigkeiten tauchen metaphysische Fragen auf, zu deren Erledigung Axiome nöthig sind. Allerdings giebt es Fälle, in denen auch in der Arithmetik den Zahlen nicht blos eine formale Bedeutung zukommt, z. B. in dem Satze, „diese Gleichung ist vom Grade drei", also wenn die Zahlen als benannte auftreten. In solchen Fällen müssen wir uns an die Rechensteine erinnern, dürfen aber die Bedeutung des Prädicates drei als eine ebenso gesicherte ansehen als etwa die Bedeutung des Prädicates weiss in dem Satze: „der Schnee ist weiss". — Es ist eine beliebte Redensart, dass durch die formale Auffassung das Rechnen zu einem unwürdigen Spiel herabsinke. Wegen der sonstigen Vortheile aber, die der formale Standpunkt bietet, verzichte ich wenigstens gern darauf, neben den arithmetischen Eigenschaften in den Zahlen auch noch die Eigenschaft der Würde zu suchen.

§ 2. Die gemeinen Zahlen und die vier Grundoperationen. Ist der Begriff der ganzen Zahl und des Zählens erworben, so lassen sich zwei Rechnungsarten als besondere Arten des Zählens auf einfache und natürliche Weise einführen, die

Addition und Multiplication.

Diese sind ihrer Natur nach innerhalb des Gebietes ganzer Zahlen immer ausführbar. Geht man aber dazu über, diese Rechnungsarten umzukehren, führt man die neuen Rechnungsarten

Subtraktion und Division

ein, so sind dieselben im Gebiete der ganzen Zahlen nicht immer ausführbar. Stellt man aber die Forderung, dass diese Operationen immer ausführbar sein sollen, so gelangt man zu neuen Zahlengebilden, der Null, den negativen und gebrochenen Zahlen. Diese lassen sich als rein formale Gebilde auffassen, d. h. als Begriffe, deren Inhalt durch ihr Verhalten gegen die Rechnungsregeln erschöpft ist. Diese Regeln aber sind in den Formeln enthalten

$$a + a' = a' + a, \quad a + (a' + a'') = (a + a') + a'' = a + a' + a'', \quad (a' - a) + a = a'$$
$$aa' = a'a \qquad a(a'a'') = (aa')a'' = aa'a'', \qquad (a' : a)a = a'$$
$$a(a' + a'') = aa' + aa''.$$

Subtraktion und Division wird durch Einführung der neuen Zahlen zur Addition und Multiplication. Da die gesammte Arithmetik andre als diese vier, oder, wenn man will, zwei Rechnungsoperationen nicht kennt, so sind neue Gebilde in der ganzen Arithmetik widerspruchsfreie, wenn sie den vier (oder zwei) Grundoperationen gegenüber widerspruchsfrei sind. — Weil aber die neuen Zahlen sich zu vielen realen Mannigfaltigkeiten in einfache Correspondenz setzen lassen, so dass auch den Rechnungsoperationen selbst gewisse äussere Vorgänge entsprechen, wie zum Beispiel die Addition der Zusammensetzung gleich gerichteter Strecken, die Multiplication der Flächeninhaltbildung in der Geometrie entspricht, so ist eine rein formale Auffassung der Zahlen nicht bei allen Mathematikern beliebt. Jedenfalls lässt sie eine vollkommen widerspruchsfreie Begründung zu, und da für die Weiterbildung des Zahlenbegriffs doch an einer gewissen Stelle einmal die formale von Beziehungen auf Sinnesobjecte freie Auffassung eintreten muss, so entscheiden wir uns für dieselbe schon bei den negativen und gebrochenen Zahlen. In den Formeln der Arithmetik und Analysis sind die Zahlen unbenannte, und man braucht von ihnen als Operationsmedium nichts, als was die formale Definition in sie legt. Die niedere Arithmetik begründet das Rechnen mit diesen Zahlen und erweist in diesem Zahlengebiete die unbeschränkte Ausführbarkeit der vier Grundoperationen (Species) der Addition und Subtraktion, der Multiplication und Division, zu welchen neue einzuführen, wie schon bemerkt wurde, die Analysis bisher noch durch keine Aufgabe gezwungen worden ist. Sie weist die Eindeutigkeit (Widerspruchslosigkeit) der vier Grundoperationen mit allen Zahlen nach, mit Ausnahme der Null, mit welcher nur die Addition und Subtraktion und Multiplication eindeutig ausführbar ist, mit der aber die Division nicht eindeutig, also nicht widerspruchsfrei vollzogen werden kann. Ein Quotient, dessen Nenner Null ist, hat keine Bedeutung, und es nimmt die Null unter den Zahlen eine singuläre Stellung ein.

§ 3. Grösse. Die gemeinen Zahlen lassen sich in Reihe ordnen, oder sie lassen sich dem Begriffe der Grösse unterordnen. Es ist $3 > 2$ und $3 > -4$ und $9:10 > 8:9$, weil in $9:10 = 81:90$ der Zähler 81 grösser ist als der Zähler 80 in $80:90 = 8:9$, während die Nenner gleich sind. Man kann von einer Zahl zu immer grösseren und grösseren fortschreiten, weil der Neubildung mittels Addition durch nichts eine Schranke gesetzt ist. Auch durch Division mit Zahlen, die absolut genommen (d. h. abgesehen vom Vorzeichen), kleiner und kleiner werden, kann man immer grössere und grössere Zahlen erzeugen. Die Zahl Null bildet die Schranke für das kleiner und kleiner werden einer positiven Zahl. Es ist jedoch zu beachten, dass diese Schranke selbst nicht zu den positiven Zahlen gehört, und dass es unter den positiven Zahlen keine kleinste giebt. Für die gemeinen Zahlen gilt der Satz, eine Zahl, die nicht negativ aber kleiner ist als jede angebbare positive Zahl, ist nothwendig Null. In diesem wichtigen Satze wird eine Zahl, die Zahl Null durch ein negatives Kriterium erkannt, ein ähnliches Erkennungszeichen giebt es für jede bestimmte gemeine Zahl. Eine Zahl, die sich von der Zahl a um weniger unterscheidet als jede noch so kleine positive Zahl, ist nothwendig die Zahl a selbst. — Auch für wachsende Zahlen lässt sich in ähnlicher Weise eine Schranke bilden; es ist — ich sage nicht die Zahl, sondern — der Begriff Unendlich. Obwohl das Zeichen ∞ häufig genug in der Analysis Verwendung findet, und auch hier verwendet werden wird, so muss man doch in dieser Wissenschaft, wenn man nicht auf ähnliche Widersprüche stossen will, wie beim Rechnen mit Null, und zwar noch viel häufiger als dort, mit dem Begriffe „Unendlich“ vorsichtig sein. Man pflegt zu unterscheiden zwischen dem potentiellen und dem actuellen Unendlich. Das erstere allein wird von der Mehrzahl der Mathematiker in der Arithmetik als zulässig angesehen. Wie das Rechnen damit im Grunde nur ein Rechnen mit sehr grossen Zahlen ist, wird sich ganz von selbst ergeben.

Das actuelle, das wirkliche Unendlich wird, wie ich wenigstens meine, am besten aus der Arithmetik und der Analysis verbannt. Es lässt sich nicht läugnen, dass man in der reinen Mathematik sowohl als auch in der angewandten auf Bildungen und Begriffe kommt, in denen das actuelle Unendlich zu stecken scheint. Man kann aber auch, und dies scheint vorzuziehen, in jenen Fällen qualitative Verschiedenheiten annehmen, z. B. statt zu sagen, die Gleichung $\sin x = 0$ ist von unendlich hohem Grade, lieber sagen, sie ist eine transcendente. Für das actuelle Unendlich tritt namentlich Herr Cantor in Halle ein, dessen geistvolle Untersuchungen über diesen Gegenstand aus den mathematischen in die philosophischen Fachschriften vorgerückt sind. Wir überlassen das actuelle Unendlich jedenfalls einer höhern Analysis und geben in der elementaren Functionentheorie nur dem potentiellen Unendlich Raum, uns in jedem Falle seiner Anwenduug eine genaue Bestimmung der Bedeutung dieses Begriffes vorbehaltend.

Wir wollen der Bequemlichkeit halber ein- für allemal die Festsetzung treffen, dass wir unter einer beliebig kleinen oder einer noch so kleinen Zahl immer eine solche verstehen, die absolut genommen klein, also der Null beliebig nahe zu wählen ist, während ohne diese Festsetzung eine negative absolut genommen grösser und grösser werdende Zahl darunter zu verstehen sein würde.

§ 4. Vorbereitende Bemerkungen über die Bildung von Irrationalzahlen. Bei der Bildung neuer Zahlen spielt der Begriff des Beliebiggrossen, oder des potentiellen Unendlich und der reciproke Begriff des Beliebigkleinen, wie wir sehen werden, eine hervorragende Rolle. Gedrängt wird man zu neuen Zahlen zuerst bei der Auflösung algebraischer Gleichungen, aber die Methode der Neubildung wird dem Rechnen mit den sogenannten unendlichen Decimalbrüchen abgelauscht. Das Rechnen mit unendlichen Decimalbrüchen ist im Grunde ein Rechnen mit unendlichen Reihen, und da eine Theorie dieser Reihen in der elementaren Functionentheorie erst begründet werden soll, so darf genau genommen schon hier eine Beziehung auf dieses Rechnen nicht genommen werden. Allein da jeder Leser dieses Buches mit unendlichen Decimalbrüchen schon rechnen kann, so mag in der Absicht, ein vorläufiges Licht auf den Weg zu werfen, der beschritten werden soll, wobei es sich um eine Beweisführung nicht handelt, ein Vorausgreifen auf diese Gebilde gestattet sein.

Was versteht man unter dem unendlichen Decimalbruche $z = 3{,}14514145141414514\,..$, und wie rechnet man mit ihm? Schreibt man die unendliche (endlose) Folge von Zahlen an

$$(3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}145;\ 3{,}1451;\ 3{,}14514;\ 3{,}145141;\ ..),$$

so versteht man in jedem Falle, in welchem es sich um einen Gebrauch von z handelt, unter den Zahlen der Folge irgend eine bestimmte, und man hat es demnach mit einem endlichen Decimalbruche zu thun. Aber man bindet sich nicht für immer den einmal gewählten Term für z zu nehmen, sondern man behält sich vor, wenn es erforderlich scheint, oder wenn es auch nur beliebt, einen andern, namentlich einen in der Folge an späterer Stelle stehenden Term, einen beliebig weit entfernten Term für z zu nehmen. Unsere Folge enthält unendlich viel Terme, d. h. keinen letzten, sondern wir sind im Stande, nach einer gewissen Vorschrift, die im Beispiel leicht erkennbar ist, immer neue Terme zu bilden, und der Begriff des unendlichen Decimalbruches besteht darin, dass wir aus der Folge einen Term wählen können, der beliebig viele Decimalen enthält, worin eben das potentielle Unendlich steckt. Ebenso verhält es sich mit dem Rechnen mit einem unendlichen Decimalbruch. Man rechnet in jedem einzelnen Falle mit einem bestimmten Terme, aber die Wahl dieses Termes bleibt dem Bedürfniss oder dem Belieben vorbehalten, man kann andere und andere an immer späterer Stelle stehende nehmen. Ein unendlicher Decimalbruch, ein Decimalbruch mit unendlich vielen Stellen, die durch irgend eine wohlbestimmende Vorschrift gegeben oder findbar sein müssen, ist eine Abkürzung, ein Zeichen für eine unendliche Folge von gewöhnlichen endlichen Decimalbrüchen, oder ein Zeichen, das einer solchen Folge zugeordnet ist. Insofern der Inhalt des Begriffes, für den der unendliche Decimalbruch ein Zeichen ist, in der Arithmetik wenigstens völlig dadurch erschöpft ist, dass das Verhalten dieses Zeichens gegenüber den Regeln der Rechnung bestimmt ist, — einer Rechnung, die thatsächlich immer mit einem bestimmten Terme der zugeordneten Folge vorgenommen wird, — ist dieser Begriff ein formaler zu nennen, und er wird in diesem Buch nur als solcher aufgefasst. Aber es scheint dem menschlichen Geiste ein Bedürfniss zu sein (was man auch auf andern Denkgebieten beobachten kann), jenem endlosen Processe mehr und mehr Decimalen zu nehmen, ein schliessliches, gewissermaassen reales, nur unsern unzulänglichen Kräften unerreichbares und deshalb ideales, aber nicht imaginäres Ende zuzuschreiben, zu dem man bei einem periodischen Decimalbruch wirklich gelangen kann und wozu wir in andern Fällen, z. B. bei Bestimmung von $\sqrt{2}$, durch geometrische Vorstellungen (Diagonale eines Quadrates) besonders veranlasst werden. Ein solcher Idealismus ist auch ganz ungefährlich, sofern er sich nur zur Wiedererkennung seiner Ideale derselben Regeln bedient als der Formalismus. Es ist nachzuweisen, dass jeder formalen Zahl, oder jedem Ideal unter den geordneten gemeinen Zahlen eine bestimmte Stelle zukommt, und dass an und mit ihr (ihm) die vier Grundoperationen eindeutig (widerspruchsfrei) vorgenommen werden können. Dazu dient die Theorie der Folgen.

§ 5. Die Zahlenfolge, insbesondere die Nullfolge. Eine Folge von (zunächst gemeinen) Zahlen $(a_1 a_2 a_3 \,..\, a_n \,..)$ heisst eine unendliche Folge, wenn kein Term in ihr ein letzter ist, sondern wenn nach einer zu gebenden Vorschrift immer wieder neue und neue Terme gebildet werden können. Einer solchen Folge ordnen wir ein Zeichen zu und drücken die Zuordnung durch das Gleichheitszeichen aus,

$$a = (a_1 a_2 a_3 \,..\, a_n \,..).$$

Für dieses Zeichen a nehmen wir unter Umständen eine gemeine Zahl. Wenn nämlich von einem bestimmten Term ab dieselbe Zahl immer wiederkehrt, so dass $a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = \,..\, = a$ ist, so wählen wir die Zahl a als Zeichen für die Folge. Aber auch dann, wenn in $(a_1 a_2 a_3 \,..\, a_n \,..)$ die Terme sich von der Folge $(a a a \,..\, a \,...)$ nur bez. um die Terme einer Nullfolge unterscheiden, die wir sogleich definiren, so ordnen wir die Zahl a als Zeichen der Folge $(a_1 a_2 \,..\, a_n \,..)$ durch das Gleichheitszeichen zu.

Eine Folge $(\delta_1 \delta_2 \delta_3 \,..\, \delta_n \,..)$ heisst eine Nullfolge, es wird ihr die Zahl Null durch das Gleichheitszeichen zugeordnet,

$$0 = (\delta_1 \delta_2 \delta_3 \,...\, \delta_n \,..),$$

wenn die Zahlen $\delta_1 \delta_2 \,..\, \delta_n \,..$ mit wachsendem Index beliebig klein werden, sodass für jede noch so kleine Zahl σ ein n so gefunden werden kann, dass alle[1]) Terme $\delta_n \delta_{n+1} \delta_{n+2} \,...$ absolut genommen kleiner als σ sind. Die einfachste Nullfolge ist natürlich $(0\,0\,0 \,..\, 0 \,..)$.

Ist die Zahl a so beschaffen, dass

$$(a_1 - a,\ a_2 - a,\ a_3 - a,\ ..\ a_n - a,\ ...),$$

eine Nullfolge ist, so wird der Folge $(a_1 a_2 \,..\, a_n \,..)$ die Zahl a als Zeichen zugeordnet, $a = (a_1 a_2 \,..\, a_n \,..)$ gesetzt. Dies ist der andere Fall, in welchem einer Folge eine gemeine Zahl als Zeichen zugeordnet wird, in welchem sie einer gemeinen Zahl gleich gesetzt wird. So ist z. B. die Folge

$$a = (0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333;\ 0{,}3333; ..)$$

für die in üblicher abkürzender Weise auch 0,3333 .. geschrieben wird, so beschaffen, dass

$$\left(0{,}3 - \frac{1}{3},\ 0{,}33 - \frac{1}{3},\ 0{,}333 - \frac{1}{3},\ 0{,}3333 - \frac{1}{3},\ ...\right) = \left(-\frac{1}{30}, -\frac{1}{300}, -\frac{1}{3000}, -\frac{1}{30000}, ..\right)$$

---

[1]) Da alle Terme nicht angeschrieben werden können, so ist unter „alle" hier und in ähnlichen Fällen zu verstehen, so viel man auch Terme bilden mag, oder, um negativ zu reden, es bedeutet der obige Satz, von einem bestimmten Index ab ist keine Term $> \sigma$.

ist. Die letzte Folge ist offenbar eine Nullfolge, sie ist gleich Null und daher ist

$$\left(0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333;\ ..\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\ ..\right) = \frac{1}{3}.$$

§ 6. Unterordnung der Zeichen für Zahlenfolgen unter den Begriff Grösse. Die Bedeutung des Gleichheitszeichens und der Zeichen für „grösser und kleiner" muss definirt werden, und zwar, da die gemeinen Zahlen als Folgen darstellbar sind, muss sie so definirt werden, dass sie der Bedeutung bei gemeinen Zahlen nicht widerspricht. — Bildet man aus den Folgen $a = (a_1\, a_2\, ..)$ $a' = (a'_1\, a'_2\, ...)$ die neue $(a_1 - a'_1,\ a_2 - a'_2,\ a_3 - a'_3,\ ..)$, der wir zur Abkürzung das Zeichen $a - a'$ zuordnen wollen, so heisst $a = a'$, wenn $a - a'$ eine Nullfolge (gleich Null) ist. Es heisst $a > a'$ bez. $a \leq a'$, wenn erstens $a - a'$ keine Nullfolge ist und wenn zweitens ihre Terme von einem bestimmten ab beständig positive bez. negative Zahlen sind.

Reicht nun dieses Kriterium hin, alle Folgen unter einander der Grösse nach zu vergleichen? Dass diese Frage zu verneinen ist, braucht nur durch ein Beispiel erwiesen zu werden. Ist $z = (2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, ..)$ und $1 = (1, 1, 1, ..\ 1, ..)$, so ist $z - 1 = (1, -1,\ 1, -1,\ 1, -1, ..)$. Diese Folge ist keine Nullfolge, weil ihre Terme nicht beliebig klein werden, sondern absolut genommen der Einheit gleich sind. Demnach ist die Folge z nicht gleich der Folge 1. Es giebt aber in der Folge $z - 1$ keinen letzten negativen Term, also ist z nicht grösser als 1, und es giebt auch keinen letzten positiven Term, und es ist daher auch z nicht kleiner als 1. Sollen aber die den Folgen zugeordneten Zeichen unter die Zahlen als der Grösse nach unter einander vergleichbar aufgenommen werden, so müssen sie eine wohlbestimmte Reihe bilden, jedes Zeichen muss einen wohlbestimmten Platz in der Grössenordnung einnehmen. Es wird demnach eine Folge von der Art wie z, die sich nicht mit jeder andern Folge der Grösse nach (in dem eben definirten formalen Sinne) vergleichen lässt, zur Erweiterung des Zahlenbegriffes unbrauchbar sein, die Folgen müssen einer Beschränkung unterworfen werden.

Diese Bedingung der Vergleichbarkeit befriedigen die sogenannten regulären Folgen. Ehe wir zu ihnen übergehen, bemerken wir, dass zu einem Zeichen, einer Zahl, unendlich viele Folgen gehören, weil alle Folgen demselben Zeichen zugeordnet sind, die sich nur um eine Nullfolge unterscheiden, und weil es offenbar unendlich viele Nullfolgen giebt.

§ 7. Reguläre Folgen. Eine Folge von Zahlen $(a_1\, a_2\, ..\ a_n\, ..)$ heisst regulär, wenn sich für jede noch so kleine Zahl σ eine solche Zahl N finden lässt, dass

$$a_{n+m} - a_n$$

absolut genommen kleiner als σ wird, welche positive ganze Zahl m und welche positive ganze Zahl $n \geqq N$ auch sein mag, oder, anders zu reden, regulär ist eine Folge $(a_1\, a_2\ ..)$ in der $a_{n+m} - a_n$ für jedes ganze beliebige positive m mit wachsenden n beliebig klein wird.

Ein unendlicher Decimalbruch ist eine reguläre Folge. Sei

$$3{,}1415145145145\ .. = (3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ 3{,}14151;\ ..)$$

der unendliche Decimalbruch, so ist $a_{n+m} - a_n$ ein endlicher Decimalbruch, der kleiner als $1 : 10^n$ ist, welche Zahl durch Vergrösserung von n beliebig klein gemacht werden kann. Wir können also mit unendlichen Decimalbrüchen rechnen, sobald wir mit regulären Folgen rechnen können. — Eine Nullfolge ist eine reguläre Folge.

Wir werden beweisen, dass eine reguläre Folge, und somit das ihr zugeordnete Zeichen sich an eine wohlbestimmte Stelle der Zahlenreihe einordnen, d. h. dass sich dies Zeichen mit jeder Zahl und mit jedem andern einer regulären Folge zugeordneten Zeichen der Grösse nach vergleichen lässt, so dass zwei Zeichen $a\ a'$, mögen sie gemeine Zahlen oder nur reguläre Folgen bedeuten, sicher in einer der drei Beziehungen zu einander stehen:

$$a = a',\ a < a',\ a > a'.$$

Später ergiebt sich auch umgekehrt, dass eine Folge, deren Zeichen in der Zahlenreihe einen im obigen Sinne wohlbestimmten Platz einnimmt, einen Schnitt bildet, eine reguläre Folge sein muss.

Zunächst jedoch einige allgemeine Sätze über reguläre Folgen. Sind

$$a = (a_1\, a_2 \,..\, a_n \,..),\quad a' = (a'_1\, a'_2 \,..\, a'_n \,..)$$

reguläre Folgen, so sind auch

$$(a_1 + a'_1\;\; a_2 + a'_2 \,..\, a_n + a'_n \,..),\quad (a_1 - a'_1\;\; a_2 - a'_2\;\; a_3 - a'_3 \,..\, a_n - a_n' \,..)$$

reguläre Folgen. Denn können $a_{n+m} - a_n\;\; a'_{n+m} - a'_n$ für wachsende n bei beliebigen positiven m beliebig klein gemacht werden, so kann auch

$$(a_{n+m} \pm a'_{n+m}) - (a_n \pm a'_n) = (a_{n+m} - a_n) \pm (a'_{n+m} - a'_n)$$

unter derselben Bedingung beliebig klein gemacht werden.

Sind in zwei regulären Folgen nur eine bestimmte (endliche) Anzahl von Termen verschieden, oder fehlen in der einen eine endliche Anzahl von Termen, die die andere enthält, so sind sie einander gleich, weil offenbar in diesen Fällen

$$(a_1 - a'_1\;\; a_2 - a'_2 \,..\, a_n - a'_n \,...)$$

eine Nullfolge ist.

Bildet man aus a eine Folge a', indem man beliebig viele Terme fortlässt, so jedoch, dass noch unendlich viele stehen bleiben, z. B. indem man a' aus a dadurch entstehen lässt, dass man alle Terme tilgt, deren Index nicht durch 3 theilbar ist, so ist a' wieder eine reguläre Folge, und es ist wieder $a' = a$, weil $(a_1 - a'_1\;\; a_2 - a'_2 \,..\, a_n - a'_n \,..)$ offenbar eine Nullfolge ist.

Ordnet man die Terme einer regulären Folge a in eine andere Folge a' um, indem man die Terme beliebig versetzt, so jedoch, dass jeder bestimmte Term der Folge a sich an einem wohlbestimmten Platz[1]) der andern Folge befindet, so ist a' ebenfalls regulär und $a' = a$, denn $a - a'$ ist, wie leicht zu erkennen, eine Nullfolge.

Für reguläre Folgen gilt der Satz

ist $a = a'$, $a' = a''$, so ist auch $a = a' = a''$.

Monotone Folgen. Eine Folge $(a_1 a_2 \,..\, a_n \,..)$, deren Terme unter einer bestimmten Zahl bleibend fortwährend zunehmen, oder, wenn Terme einander gleich sein sollten, jedenfalls nicht abnehmen, eine monotone Folge ist eine reguläre Folge. Denn liesse sich nicht für jedes noch so kleine σ ein n finden, sodass für jedes positive m $a_{n+m} - a_n < \sigma$ wäre, gäbe es also für ein gewisses σ immer wieder Terme, $a_\lambda\, a_\mu\, a_\nu\, a_\varrho$ .. von der Beschaffenheit, dass $a_\mu - a_\lambda \geqq \sigma$, $a_\nu - a_\mu \geqq \sigma$, $a_\varrho - a_\nu \geqq \sigma$, .. wäre, so würden für jedes ganze p Terme vorhanden sein, die grösser oder gleich $a_\lambda + p\sigma$ wären, d. h. die Terme müssten über alle Grenzen wachsen, was gegen die Voraussetzung ist. — Gleiches gilt für abnehmend monotone Folgen.

§ 8. Vergleichung mit Null. Das Zeichen einer regulären Folge ist entweder gleich Null, oder grösser als eine angebbare positive Zahl c oder kleiner als eine angebbare negative Zahl c_1, ist also entweder Null oder bestimmt positiv oder bestimmt negativ.

Dass eine reguläre Folge eine Nullfolge sein kann, ist selbstverständlich; sie unterscheidet sich von (0 0 0 .. 0 ..) nur um eine Nullfolge, ihr Zeichen ist 0. Eine reguläre Folge, in der kein Term der letzte positive und kein Term der letzte negative ist, oder kürzer zu reden, die unendlich viele positive und negative Terme enthält, ist eine Nullfolge. — Es seien $b_1\, b_2\, b_3$ .. die positiven, $b'_1\, b'_2\, b'_3$ .. die negativen Terme der regulären Folge $(a_1\, a_2 \,..)$, so sind auch $(b_1\, b_2 \,..)$ und $(b'_1\, b'_2 \,..)$ reguläre Folgen, und wegen der Bedingung der Regularität werden die Terme der Folge $(b_1 - b'_1,$

[1]) Dies würde nicht der Fall sein, wenn man etwa so ordnen wollte

$$(a_1\, a_3 \,..\;\; a_{2n+1} \,..\;\; a_2\, a_4 \,..\;\; a_{2n} \,...)$$

$b_2 - b'_2,\ b_3 - b'_3 \ldots)$ und a fortiori die Terme der Folge $(b_1 - 0,\ b_2 - 0,\ b_3 - 0, \ldots) = (b_1 b_2 \ldots)$ mit wachsendem Index beliebig klein, dasselbe gilt von den Termen der Folge $(a_1 a_2 \ldots)$, sie ist eine Nullfolge.

Ist die reguläre Folge $(a_1 a_2 \ldots)$ keine Nullfolge, so müssen demnach ihre Terme von einem bestimmten ab entweder sämmtlich positiv oder sämmtlich negativ sein, und es muss im ersten Falle eine Zahl c geben, unter die die Terme der Folge nicht herabsinken, (sonst wäre sie eben eine Nullfolge), oder eine negative Zahl c_1 in zweitem Falle über die die Terme nicht hinausgehen, es ist

$$(a_1 a_2 a_3 \ldots) \geqq (c c c \ldots) = c \quad \text{oder} \quad (a_1 a_2 a_3 \ldots) \leqq (c_1 c_1 c_1 \ldots) = c_1.$$

Vergleichung der regulären Folgen mit den gemeinen Zahlen und unter sich. Sind $a = (a_1 a_2 \ldots)$, $a' = (a'_1 a'_2 \ldots)$ reguläre Folgen, so bezeichnen wir die reguläre Folge $(a_1 - a'_1\ a_2 - a'_2 \ldots)$ mit $a - a'$. Ist die Folge $a - a'$ eine Nullfolge, so ist $a = a'$, ist die Folge positiv, so ist $a > a'$, ist sie negativ, so ist $a < a'$. Die Grössenvergleichung führt demnach stets zu einem wohlbestimmten Resultate, und da jede gemeine Zahl als Folge darstellbar ist, so führt auch die Vergleichung mit den gemeinen Zahlen zu einem wohlbestimmten Resultate. Sätze, wie der, ist $a < a' \leqq a''$, so ist auch $a < a''$, bedürfen keines weiteren Beweises, und dass die Vergleichung gemeiner Zahlen oder Zeichen für reguläre Folgen mit der gemeinen Vergleichung übereinstimmt, übersieht der Leser sofort.

Fordert man von neu zu bildenden Zahlen, dass sie mit den gemeinen Zahlen eine wohlgeordnete Reihe bilden, sich der Grösse nach mit den gemeinen Zahlen und unter sich vergleichen lassen, so steht von dieser Seite der Einführung neuer Zahlen als Zeichen für reguläre Folgen nichts im Wege, und da die gemeinen Zahlen als Folgen darstellbar sind, so wird auch der einheitliche Charakter der gesammten Zahlen gewahrt. Es muss nur noch nachgewiesen werden, dass die elementaren Rechnungsregeln sich auf sie bestimmt und widerspruchsfrei ausdehnen lassen. Das Rechnen mit Folgen wurde schon als ein Rechnen mit einem der Terme der Folge gekennzeichnet mit der Bestimmung, dass dieser Term ein beliebiger, oder besser gesagt, dass es nach und nach jeder beliebige sein soll. Daraus ergiebt sich von selbst, wie die vier Species auf die Folgen zu übertragen sind.

§ 9. Addition, Subtraction, Multiplication und Division mit Folgen und den ihnen zugeordneten Zeichen. Sind

$$a = (a_1 a_2 \ldots a_n \ldots) \quad a' = (a'_1 a'_2 \ldots a'_n \ldots)$$

reguläre Folgen, $a\, a'$ die zugehörigen Zeichen, so versteht man unter der Summe oder der Differenz dieser Zeichen bezw. die Folgen

$$a + a' = (a_1 + a'_1\ \ a_2 + a'_2 \ldots a_n + a'_n \ldots),$$
$$a - a' = (a_1 - a'_1\ \ a_2 - a'_2 \ldots a_n - a'_n \ldots),$$

die wieder reguläre Folgen sind. Die Summe und Differenz sind Folgen, zu denen gemeine Zahlen gehören, wenn die $a\, a'$ gemeine Zahlen sind. Auch ist unmittelbar ersichtlich, dass $a + a' = a' + a$, $(a - a') + a' = a$, $a - a' = -(a' - a)$ ist, wenn wir Folgen entgegengesetzte Zeichen zuordnen, deren Terme entgegengesetzte Zeichen haben. Sind drei Folgen $a\, a'\, a''$ gegeben, so ist die Unabhängkeit der Summe $a + a' + a''$ von der Reihenfolge der Posten evident. — Summe und Differenz zweier Nullfolgen sind Nullfolgen. Zu einem Zeichen gehören unendlich viele Folgen, die sich um Nullfolgen unterscheiden. Summe und Differenz sind von der Wahl der der Rechnung zu Grunde gelegten Folgen unabhängig.

Unter dem Product der Zeichen $a\, a'$ versteht man die Folge

$$aa' = (a_1 a'_1\ \ a_2 a'_2\ \ a_3 a'_3 \ldots a_n a'_n \ldots),$$

sie ist regulär, weil

$$a_{n+m} a'_{n+m} - a_n a'_n = (a_{n+m} - a_n)\ a'_{n+m} + a_n\ (a'_{n+m} - a'_n)$$

durch Annahme eines hinreichend grossen n für jedes positive m beliebig klein gemacht werden kann. Es ist

$$aa' = a'a \quad a(a'a'') = (aa')a'' = aa'a'',$$

wenn $a\ a'\ a''$ Zeichen regulärer Folgen sind.

Ist eine Folge b von a nur um eine Nullfolge verschieden, b' von a' ebenfalls, so ist auch aa' von bb' nur um eine Nullfolge verschieden, es ist $aa' = bb'$. — Ist abgesehen vom Vorzeichen $a < 1$, $a' < 1$, so ist auch $aa' < 1$, und $aa' < a$.

Das Zeichen $a\,a'$ ist dann und nur dann eine Nullfolge, wenn eins der beiden Zeichen $a\,a'$ zu einer Nullfolge gehört, denn die Terme $(a_n a'_n)$ werden nur dann kleiner und kleiner, wenn einer derselben mit wachsendem n kleiner und kleiner wird. — Es ist $a(a' + a'') = aa' + aa''$.

Der Quotient $a' : a$ ist diejenige Folge, die mit a multiplicirt a' liefert und es ist demnach

$$\frac{a'}{a} = \left(\frac{a'_1}{a_1}\ \frac{a'_2}{a_2} \,..\, \frac{a'_n}{a_n} \,..\right).$$

Diese Folge ist regulär, wenn

$$\frac{a'_{n+m}}{a_{n+m}} - \frac{a'_n}{a_n} = \frac{a_n a'_{n+m} - a'_n a_{n+m}}{a_n a_{n+m}} = \frac{(a'_{n+m} - a'_n)a_n - a'_n(a_{n+m} - a_n)}{a_n a_{n+m}}$$

für jedes positive m durch Annahme eines hinreichend grossen n beliebig klein gemacht werden kann. Dies findet dann und nur dann statt, wenn a keine Nullfolge ist. Dann kann auch die Folge a nicht unendlich viele Terme gleich Null enthalten. Das Vorkommen einzelner Terme gleich Null in a ist der Quotientenbildung $a' : a$ nicht hinderlich, wenn man diese Terme in a oder die entsprechenden sinnlosen in $a' : a$ einfach fortlässt. — Der Quotient zweier regulären Folgen ist eine reguläre Folge, wenn nicht der Nenner eine Nullfolge ist. Der Quotient zweier Nullfolgen aber kann jedweden beliebigen Wert annehmen, wenn man die Nullfolgen durch passende ihnen gleiche Folge ersetzt. Z. B. ist

$$\frac{(2\delta_1\ 2\delta_2 \,..\, 2\delta_n \,..)}{(\delta_1\ \delta_2 \,..\, \delta_n \,..)} = \frac{0}{0} = 2,$$

wenn $(\delta_1\ \delta_2 \,..)$ eine Nullfolge ist. — Dass sonst der Quotient zweier Zeichen von der Wahl der zu ihnen gehörigen Folgen unabhängig ist, ist leicht zu erweisen.

Nachdem gezeigt worden ist, dass die regulären Folgen zugeordneten Zeichen den Fundamentalregeln

$$a + a' = a' + a, \quad a + (a' + a'') = (a + a') + a'' = a + a' + a''$$
$$aa' = a'a, \quad a(a'a'') = (aa')a'' = aa'a'', \quad a(a' + a'') = aa' + aa''$$

genügen, dürfen die Zeichen für reguläre Folgen unter die Zahlen aufgenommen werden, wir nennen sie Zahlen. Eine besondere Stelle unter ihnen nimmt die Null ein in sofern die Division mit ihr unzulässig ist. Der Beweis dafür, dass die bekannten Ungleichungen bestehen: ist $a < a'$ $b < b'$, so ist $a + b < a' + b'$ u. s. w., kann unterdrückt werden.

§ 10. Gelangt man durch Einführung der Zeichen für reguläre Folgen als Zahlen zu neuen Zahlen, oder sind diese sämmtlich unter den gemeinen Zahlen enthalten? Diese Frage lässt sich principiell beantworten nach G. Cantor (Crelle's Journal B. 77). Man gelangt aber auch dazu durch die Auflösung einfacher quadratischer Gleichungen, also durch Beispiele, und da wir diese Auflösung hier nothwendig brauchen, so wählen wir diese Art der Beantwortung unserer Frage. Giebt es eine Zahl x, die mit sich selbst multiplicirt die ganze positive Zahl D liefert, $xx = D$, $x = \sqrt{D}$? Ist D das Quadrat einer ganzen Zahl, wie 1 4 9 16 25 . ., so ist die Frage selbstverständlich zu bejahen. Ist aber D keine solche Zahl, so giebt es unter den gemeinen Zahlen keine, welche die Aufgabe löste. Denn wäre in kleinster Benennung $p : q$ eine solche, so wäre $pp : qq = D$, also pp und mithin p müsste durch q theilbar sein, es müsste D eine Quadratzahl sein, was gegen die Voraussetzung ist. Wird nun nachgewiesen, dass unter den neuen Zahlen sich eine vorfindet, die der Gleichung $xx = D$ genügt, so ist erwiesen, dass die zu regulären Folgen gehörigen Zahlen neben den gemeinen neue Zahlen definiren.

Wir führen diesen Nachweis für eine beliebige durch eine Folge gegebene positive Zahl $a = (a_1 a_2 \, . \, .)$, weil die Annahme $a = D$ dabei ohne Belang ist. Wir dürfen uns dabei der Decimalbrüche bedienen, weil wir oben nachgewiesen haben, dass diese reguläre Folgen, also Zahlen sind.

Mag a eine gemeine oder durch eine Folge definirte Zahl sein, es giebt stets zwei auf einander folgende ganze Zahlen $\alpha, \alpha + 1$ von der Beschaffenheit, dass $\alpha\alpha < a \leqq (\alpha + 1)(\alpha + 1)$ ist. Im Falle der Gleichheit ist $\sqrt{a} = \alpha + 1$. Im andern Falle giebt es eine Zahl (Zehntel) $\beta \leqq 9$ von der Beschaffenheit, dass $(\alpha, \beta)(\alpha, \beta) < a \leqq (\alpha, \beta')(\alpha, \beta')$ ist, wo $\beta' = \beta + 1$ ist. Im Falle der Gleichheit ist $\sqrt{a} = \alpha, \beta'$. Im andern Falle giebt es eine ganze Zahl γ von der Beschaffenheit, dass $(\alpha, \beta\gamma)(\alpha, \beta\gamma) < a \leqq (\alpha, \beta\gamma')(\alpha, \beta\gamma')$ ist, wo $\gamma' = \gamma + 1$ ist, u. s. w. Bilden wir nun die Folge

$$\alpha, \beta\gamma\delta \, . \, . \, \nu \, . \, . = (\alpha; \; \alpha, \beta; \; \alpha, \beta\gamma; \; . \, .; \; \alpha, \beta\gamma \, . \, . \, \nu; \; \alpha, \beta\gamma \, . \, . \, \nu\varrho; \, . \, .),$$

so ist sie eine reguläre, sie definirt eine bestimmte Zahl. Aber das Product dieser Zahl mit ihr selbst

$$(\alpha \, . \, \alpha); \; (\alpha, \beta)(\alpha, \beta); \; . \, . \, . \; (\alpha, \beta\gamma \, . \, . \, \nu)(\alpha, \beta\gamma \, . \, . \, \nu); \; . \, .)$$

ist eine Folge, die sich von der Folge $(a \, a \, a \, . \, . \, a \, . \, .)$ nur um eine Nullfolge unterscheidet. Die Zahl $\alpha, \beta\gamma \, . \, . \, \nu \, . \, .$ mit sich selbst multiplicirt ergiebt also die Zahl a, und die Forderung eine Zahl x zu finden, die die Gleichung $xx = a$ befriedigt, ist stets erfüllbar.

Durch Folgen definirte Zahlen, die keine gemeinen Zahlen sind, werden irrationale, und im Gegensatz dazu die gemeinen rationale Zahlen genannt, die Gesammtheit beider aber reelle Zahlen. Die Bezeichnung transcendente Zahlen, die zuweilen für irrationale Zahlen gebraucht wird, soll für eine bestimmte, später zu beschreibende Klasse von Irrationalzahlen aufgespart werden.

Die Aufgabe, die Gleichung $xx = a$ zu lösen, wenn a eine positive Zahl ist, deren Lösung man mit $\sqrt{a}$ zu bezeichnen pflegt, ist keine vollkommen bestimmte, es giebt zwei aber auch nur zwei Lösungen. Ist x eine Lösung und x' eine andere, so ist $xx = x'x' = a$, $xx - x'x' = (x - x')(x + x') = 0$. Und da ein Product nur verschwinden kann, wenn ein Factor verschwindet, so ist entweder $x' = x$ oder $x' = -x$. Das Zeichen $\sqrt{a}$ hat also zwei Werthe $+\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$, und wird erst zu einem wohlbestimmten, wenn eine Nebenbestimmung hinzugefügt wird, die Aufgabe wird z. B. zu einer bestimmten, wenn man die positive Quadratwurzel aus a verlangt. Das Zeichen $\sqrt{0}$ hat einen und $\sqrt{-a}$, wenn a positiv ist, zunächst gar keinen Zahlwerth.

§ 11. Führen Folgen irrationaler Zahlen zu neuen Zahlen? Um diese Frage zu beantworten, muss der Begriff der Nullfolge erweitert werden, damit Folgen irrationaler Zahlen unter einander und mit gemeinen Folgen verglichen werden können. Der Folge $(\delta_1 \delta_2 \, . \, .)$ wird das Zeichen Null zugeordnet, sie wird gleich Null gesetzt, gleichviel ob die δ rationale oder irrationale Zahlen sind, wenn nur ihre Terme mit wachsendem Index beliebig klein werden. Folgen, die sich nur um Nullfolgen unterscheiden, gleichviel ob die Nullfolgen rationale oder irrationale Terme enthalten, sind (heissen) einander gleich. Diese Forderungen sind nöthig, wenn die Zahlen unter sich und mit den alten der Grösse nach vergleichbar sein sollen.

Ist a das Zeichen der gemeinen regulären Folge $(a_1 a_2 \, . \, . \, a_n \, . \, .)$, so giebt es einen bestimmten Werth von n, sodass für jedes positive m

$$-\sigma < a - a_{n+m} < \sigma$$

wird, wie klein auch die positive Zahl σ vorgegeben sein mag, oder es lässt sich n so gross annehmen, dass die Terme $a_n \; a_{n+1} \; a_{n+2} \, . \, .$ sich von a beliebig wenig unterscheiden, was man auch so auszudrücken pflegt

$$\lim a_n = a,$$

wo sich das limes-Zeichen auf n bezieht, das über alle Grenzen wachsen soll. Wird nämlich n so gross gewählt, dass $-\sigma < a_{n+m} - a_n < \sigma$ für jedes positive ganze m ist, so ist

$$a - a_n = (a_1 - a_n \;\; a_2 - a_n \,.\,.\, a_{n+m} - a_n \,.\,.) = (a_{n+1} - a_n \;\; a_{n+2} - a_n \,.\,.\, a_{n+m} - a_n \,.\,.\,.),$$

und in der letzten Folge sind alle Terme absolut genommen kleiner als σ, ihr Zeichen, oder die ihr zugehörige Zahl ist folglich kleiner als σ.

Ist nun $a = (a_1 a_2 \,.\,.\, a_n \,.\,.)$ eine reguläre Folge und sind

$$a_1 = (a_{11} a_{12} \,.\,.\, a_{1n} \,.\,.), \quad a_2 = (a_{21} a_{22} \,.\,.\, a_{2n} \,.\,.), \,.\,., \quad a_p = (a_{p1} a_{p2} \,.\,.\, a_{pn} \,.\,.), \,.\,.$$

gemeine reguläre Folgen, also rationale oder irrationale Zahlen, so bilden wir eine neue Folge in nachstehender Weise. Es sei $(\delta_1 \delta_2 \,.\,.\, \delta_n \,.\,.)$ eine aus positiven Termen bestehende Nullfolge. Wir nehmen aus a_1 einen Term $a_{1\alpha}$, so dass absolut genommen $a_1 - a_{1\alpha} < \delta_1$ ist, aus a_2 einen Term $a_{2\beta}$, so dass absolut genommen $a_2 - a_{2\beta} < \delta_2$ ist u. s. w., aus a_n einen Term $a_{n\nu}$, so dass absolut genommen $a_n - a_{n\nu} < \delta_n$ ist und so fort. So ist die Folge

$$(a_{1\alpha} a_{2\beta} \,.\,.\, a_{n\nu} \,.\,.)$$

eine gemeine reguläre Folge, zu welcher in der von uns gebildeten Zahlenreihe eine bestimmte Zahl als ihr Zeichen vorhanden ist. Da aber die Folge $(a_1 a_2 \,.\,.)$ sich von der Folge $(a_{1\alpha} a_{2\beta} \,.\,.)$ nur um eine Nullfolge unterscheidet, so gehört zu beiden dasselbe Zeichen, es wird also durch sie keine neue Zahl eingeführt.

Wird durch irgend eine arithmetische Forderung eine Eintheilung aller reellen Zahlen in zwei Klassen $K_1 K_2$ hervorgebracht, so dass jede Zahl in K_2 grösser ist als in K_1, so wird durch diese Forderung, mit Herrn Dedekind zu reden, im Zahlengebiet ein Schnitt hervorgebracht. Im Gebiete der rationalen Zahlen ist nicht jeder solche Schnitt als Zahl vorhanden, wie die Forderung, $\sqrt{D}$ zu finden, lehrt, obwohl die Forderung aus $xx = D$ x zu bestimmen einen solchen Schnitt liefert. Der einen Klasse gehören alle Zahlen an (wir beschränken uns auf positive), für die $xx < D$ ist, der andern alle Zahlen, für die $xx > D$ ist. In dem durch reguläre Folgen vervollständigten Zahlensysteme hingegen ist jeder solche Schnitt als Zahl vorhanden. Denn ist α die letzte zu K_1, $\alpha + 1$ die erste zu K_2 gehörende ganze Zahl, so müssen unter den Decimalzahlen $\alpha,0$; $\alpha,1$; $\alpha,2$; $\alpha,3$; .. $\alpha,9$· $\alpha + 1$ sich zwei solche um ein Zehntel von einander verschiedene vorfinden, dass α,β der Klasse K_1 $\alpha,(\beta+1)$ der Klasse K_2 angehört. Ebenso müssen sich unter den Zahlen $\alpha,\beta 0$; $\alpha,\beta 1$; $\alpha,\beta 2$; .. $\alpha,\beta 9$, $\alpha,(\beta+1)$ zwei um ein Hundertstel von einander verschiedene vorfinden, so dass $\alpha,\beta\gamma$ der Klasse K_1 $\alpha,\beta(\gamma+1)$ der Klasse K_2 angehört. Diese Betrachtung weiter und weiter fortgesetzt, führt zu einer Folge

$$\alpha,\beta\gamma \,.\,.\, \nu \,.\,. = (\alpha;\; \alpha,\beta;\; \alpha,\beta\gamma;\; .\,.\; \alpha,\beta\gamma \,.\,.\, \nu;\, .\,.)$$

zu einer bestimmten Zahl, von der man unmittelbar erkennt, dass sie die verlangte Eintheilung in die beiden Klassen $K_1 K_2$ liefert.

In dieser Eigenschaft, dass jeder Schnitt im erweiterten Zahlensysteme vorhanden ist, findet Herr Dedekind die Lückenlosigkeit, die Continuität des Systems der reellen Zahlen. Es ist aber diese Continuität eine durch eine Definition gewonnene, und es bleibt dahingestellt, ob sich diese Continuität mit der uns aus der Vorstellung einer continuirlichen Mannigfaltigkeit geläufigen deckt, ob man von einem Zahlencontinuum in dem Sinne reden kann, wie von einer continuirlichen Strecke oder einem Zeitraume. Ein principieller Unterschied zwischen der Zahlenmannigfaltigkeit und der der Puncte einer Strecke, um ein bestimmtes Beispiel einer vorstellbaren Mannigfaltigkeit heraus zu greifen, besteht darin, dass die Zahlenmannigfaltigkeit aus einzelnen Zahlen gebildet wird, das bestimmte Einzelne in derselben ist das Prius. In einer Strecke ist die Continuität das Prius, wir gelangen zum Einzeln nur durch eine, und zwar durch eine schwierige Abstraction. In der Arithmetik hat die Zahlenmannigfaltigkeit als eine (durch Definition) continuirliche zu gelten.[1])

---

[1]) Die wohlbestimmte Zahlenstrecke, die alle echten rationalen und irrationalen Brüche enthält, hat weder einen Anfang noch ein Ende. Ob man auch einer Zeit- oder Raumstrecke ihren Anfang oder ihr Ende vorstellbar nehmen könne, scheint mir fraglich.

§ 12. Die complexen Zahlen. Historisch hat die Aufgabe, quadratische Gleichungen allgemein aufzulösen, die auf die einfachere $xx = a$ zurückführbar ist, den ersten Grund zur Einführung irrationaler Zahlen gegeben. Wir haben die Gleichung $xx = a$ in jedem Falle lösen gelernt, wenn $a > 0$ ist. Dieselbe Aufgabe, wenn a negativ ist, hat zu den imaginären, und durch Zusammensetzung mit reellen, zu den complexen Zahlen geführt. Ist ω eine reelle Zahl, so lässt sich die Aufgabe $xx = -\omega\omega$ durch eine reelle Zahl x nicht lösen. Betrachtet man aber diese Aufgabe als eine unmögliche, so dass die quadratischen Gleichungen in lösbare und unlösbare zerfallen, so wird die Arithmetik mit Ausnahmefällen schwer belastet. Der nahe Zusammenhang zwischen Functionen, deren enge Verwandtschaft sich gleichsam fühlen lässt, wie die Verwandtschaft zwischen den Logarithmen und den cyclometrischen Functionen, der der Exponential- und Kreisfunctionen, würde nicht aufgedeckt werden können. In der reinen Geometrie ist man dazu gelangt, mittels der Involutionen das Imaginäre zu beherrschen, aber auch sie gewinnt an Einheit und Einfachheit der Aussprache, wenn sie ideale oder imaginäre Schnittpuncte einer Geraden mit einem Kegelschnitt einführt. So erwies es sich von grossem Nutzen, den Ausdruck $xx + \omega\omega$, der sich auf gewöhnliche Weise nicht in lineare Factoren zerlegen lässt, in ideale Factoren zu zerlegen, und eine passende Bezeichnungsweise wurde bald gefunden. Man spürte bald die Rechnungsregeln für die neuen Zahlen aus, und gewöhnte sich nach und nach die neuen Gebilde den alten, die imaginären den reellen Zahlen als ebenbürtig anzuerkennen.

Hier soll der umgekehrte Weg eingeschlagen werden. Es werden neue Zahlen geschaffen durch die Forderung, dass sie den für die reellen Zahlen gültigen Rechnungsregeln $a + a' = a' + a$, $a + (a' + a'') = (a + a') + a'' = a + a' + a''$, $aa' = a'a$, $a(a'a'') = (aa')a'' = aa'a''$, $a(a' + a'')$ $aa' + aa''$ gehorchen, dass die vier Species stets eindeutig (widerspruchsfrei) ausführbar seien, und dass nur die Zahl Null die Division nicht gestatte, oder was dasselbe ist, dass ein Product nicht Null sein kann, ohne dass ein Factor verschwindet. Später ergiebt sich, dass diese Zahlen ausreichen, alle algebraischen Gleichungen zu lösen. Fallen gelassen wird die Forderung, dass sich diese Zahlen mit den reellen oder unter sich der Grösse nach vergleichen lassen.

Eine complexe Zahl ist aus zwei Zahlen, die man, als der Grösse nach nicht mit einander vergleichbar, qualitativ verschieden nennen kann, zusammengesetzt. Für eine so zusammengesetzte Zahl wird gleichwohl oft nur ein Buchstabe geschrieben. Die beiden Bestandtheile müssen, damit sie nicht mit einander verwechselt werden, durch irgend ein (Qualitäts-)Zeichen von einander unterschieden werden. Für den einen, der in der Regel, aber nicht nothwendig zuerst geschrieben wird, — vielmehr folgt aus der Annahme, dass $a + a' = a' + a$ sein soll, wenn a eine Zahl der ersten Art, a' eine der zweiten Art ist, dass die Reihenfolge der Bestandtheile vertauscht werden kann, — für den einen Bestandtheil nehmen wir eine positive oder negative unbenannte reelle Zahl oder Null. Der zweite Bestandtheil wird durch das $+$ Zeichen angefügt, auch er ist eine Zahl, die aber eine Benennung eine Qualität hat, so dass der zweite Bestandtheil mit dem ersten sich nicht zu einer reellen Zahl vereinigt. Der zweite Bestandtheil ist eine Zahl, der wir durch ein vorgesetztes j eine Qualität ertheilen, $a = \alpha + j\beta$. Die Null ist ohne Qualität, so dass $j0 = 0$ ist. Die Gleichung $\alpha + j\beta = 0$ bedeutet $\alpha = 0$, $\beta = 0$ und zwei complexe Zahlen $a = \alpha + j\beta$, $a' = \alpha' + j\beta'$ sind einander dann und nur dann gleich, wenn $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ ist. Hat man zwei Zahlen zu addiren oder zu subtrahiren, so sind die gleichartigen Bestandtheile mit einander zu vereinigen, der Art, dass

$$a + a' = \alpha + \alpha' + j(\beta + \beta') \quad a - a' = \alpha - \alpha' + j(\beta - \beta')$$

ist. Die Sätze $a + a' = a' + a \quad a + (a' + a'') = a + a' + a''$ folgen hieraus von selbst. Für eine ganze Zahl m folgt aus der Additionsregel der Satz $m \,.\, j\beta = j(m\beta)$, $jm = mj$, wenn wir für $j1$ j schreiben. Ist $\beta = 1 : m$, so folgt weiter

$$mj\frac{1}{m} = j, \quad j\frac{1}{m} = \frac{1}{m}j, \quad j\frac{m}{n} = \frac{m}{n}j.$$

Irrationale Zahlen werden durch Folgen rationaler definirt, daraus schliesst man, dass überhaupt

$j\beta = \beta j$ ist. Aus der Gleichung $j(\beta' - \beta) = j\beta' - j\beta$ folgt für $\beta' = 0$, $j(-\beta) = -j\beta = -\beta j$, so dass also Zahlen von der durch j bezeichneten Qualität ausdrückbar sind als ein Product einer gemeinen Zahl und der Zahl $j = j1$. Aus diesem Grunde mag j zunächst die ideale Einheit genannt werden.

Um nun das Product zweier complexen Zahlen $a\,a'$ durch eine complexe Zahl darzustellen, setzen wir

$$aa' = (\alpha + \beta j)\;(\alpha' + \beta' j) = \alpha\alpha' + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)\,j + \beta\beta' jj,$$

und haben dabei von der Voraussetzung Gebrauch gemacht, dass die distributive Regel $(\alpha + \beta j)\,\alpha' = \alpha'\alpha + \alpha'\beta j$ und auch die associative Regel $a(a'a'') = (aa')\,a'' = aa'a''$ für die complexen Zahlen bestehen soll. Dazu kommt die Forderung, dass die Multiplication nicht zu neuen Zahlen führen soll, sondern wieder zu complexen Zahlen der Art ihrer Factoren. Deshalb muss man eine Annahme der Form machen

$$jj = \sigma + \tau j.$$

Man erkennt aber leicht, dass die Allgemeinheit nicht beschränkt wird, wenn man $\tau = 0$ setzt. Denn führt man statt j eine neue Einheit j' durch die Gleichung $j' = j - \frac{1}{2}\tau$ ein, so ist

$$j'j' = jj - j\tau + \tfrac{1}{4}\tau\tau = \sigma + j\tau - j\tau + \tfrac{1}{4}\tau\tau = \sigma + \tfrac{1}{4}\tau\tau$$

eine reelle Zahl. Jede Zahl von der Form $\alpha + \beta j$ ist einer Zahl von der Form $\alpha' + \beta' j'$ gleich, und jede Zahl $\alpha + j'\beta$ einer Zahl $\alpha' + \beta' j$, so dass die Zahlen der beiden Systeme ein-eindeutig durch einander ausdrückbar sind. Es genügt deshalb das System mit der einfacheren Multiplicationsregel zu betrachten, weil das allgemeinere auf dieses zurückgeführt werden kann. Es sei deshalb

$$jj = \pm\,\omega\omega,$$

wo ω eine reelle Zahl bedeutet.

Die erste Annahme sei $\omega = 0$. Alsdann verschwindet das Product $j\beta \,.\, j\beta'$, ohne dass ein Factor Null ist. Die Division $(\alpha + j\beta) : j\beta'$ ist unmöglich, weil $(x + jy) \,.\, j\beta' = jx\beta'$ ist, aber nicht gleich $\alpha + j\beta$ gemacht werden kann, wenn nicht $\alpha = 0$ ist. Im letzteren Falle aber ist der Quotient unbestimmt, indem zwar $x = \beta : \beta'$, y aber ganz willkürlich zu nehmen ist. Da ferner $(\alpha + j\beta)\;(\alpha + j\beta) = \alpha\alpha + 2\alpha\beta j$ ist, so ist in diesem Zahlengebiete die quadratische Gleichung $xx = -D$ (D positiv) ebenso unlösbar, als im Gebiete der reellen Zahlen. Aus diesen Gründen halten wir complexe Zahlen, in denen $jj = 0$ ist zur Aufnahme in die Arithmetik nicht für geeignet.

Ist ω von Null verschieden, so kann man, $j = j'\omega$ setzend, eine neue Einheit j' einführen, deren Multiplicationsgesetz

$$j'j' = \pm 1$$

ist. Zahlen dieser Einheit sind ein-eindeutig mit den Zahlen der alten Einheit verknüpft. Deshalb beschränkt man die Allgemeinheit der Untersuchung nicht, wenn man $jj = \pm 1$ als Multiplicationsgesetz annimmt.

Ist nun zuerst $jj = 1$, so folgt $(\beta + j\beta)\;(\beta' - j\beta') = \beta\beta'(1 + j)\;(1 - j) = 0$. Wir haben wieder Zahlen, in denen ein Product verschwindet, ohne dass ein Factor verschwindet. Die Division mit einer Zahl der Form $\beta - j\beta$ oder $\beta + j\beta$ ist entweder unmöglich oder unbestimmt, denn fügt man zu irgend einem Quotienten mit dem Nenner $\beta - j\beta$ eine Zahl $\beta' + j\beta'$, so ist die Summe ebenfalls ein Quotient. Ferner ist $(\alpha + \beta j)\;(\alpha + \beta j) = \alpha\alpha + \beta\beta + 2\alpha\beta j$. Eine Lösung der quadratischen Gleichung $xx = -D$, wenn D eine positiv reelle Zahl ist, ist in diesem Gebiete unmöglich. Aus diesen Gründen nehmen wir complexe Zahlen, deren Multiplicationsgesetz $jj = 1$ ist, in die Arithmetik nicht auf.

In der engern Zahlentheorie, wo es sich um Zahlen-Körper handelt, deren Individuen eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, können complexe Zahlen von der Form $\alpha + \sqrt{D}\,\beta$, in denen $\alpha\,\beta$ ganze Zahlen sind, und D eine ganze positive nicht-quadratische Zahl ist, mit grossem Nutzen eingeführt werden. In diesem Gebiete kann ein Product nicht Null werden, ohne dass ein Factor verschwindet, weil die Zahlen $\alpha\,\beta$ auf ganze positive oder negative beschränkt sind.

Es erübrigt noch das Multiplicationsgesetz $jj = -1$ zu betrachten. In diesem fruchtbaren Falle setzen wir i für j, und nennen i die imaginäre Einheit, Zahlen von der Form βi imaginäre, Zahlen von der Form $\alpha + \beta i$ schlechthin complexe Zahlen. Es werden jedoch wohl auch complexe Zahlen imaginäre genannt, und Zahlen von der Form βi rein imaginäre.

Das Product $aa' = (\alpha + \beta i)(\alpha' + \beta' i) = \alpha\alpha' - \beta\beta' + i(\alpha\beta' + \alpha'\beta)$ ist commutativ, $aa' = a'a$, weil sich das letzte Glied der Gleichung nicht ändert, wenn α mit α', β mit β' vertauscht wird. Dass es auch associativ ist, dass man in $aa'a''$ die Factoren beliebig mit einander vertauschen kann, zeigt die Gleichung

$$aa'a'' = \alpha\alpha'\alpha'' - \alpha\beta'\beta'' - \alpha'\beta\beta'' - \alpha''\beta\beta' + i(\alpha\alpha'\beta'' + \alpha\alpha''\beta' + \alpha'\alpha''\beta - \beta\beta'\beta'').$$

Das Product aa' kann nur verschwinden, wenn $\alpha\alpha' = \beta\beta'$ und zugleich $\alpha\beta' = -\alpha'\beta$ ist. Daraus folgt, dass entweder $\alpha\,\beta$ oder $\alpha'\,\beta'$ Null sein müssen, d. h. dass ein Factor verschwinden muss.

Die Division ist stets eindeutig ausführbar, wenn nicht der Nenner Null ist. Denn setzt man

$$\alpha + \beta i : \gamma + \delta i = x + yi,$$

so folgt

$$\begin{aligned} \alpha + \beta i &= (x + yi)(\gamma + \delta i) = \gamma x - \delta y + i(\delta x + \gamma y) \\ x : y : 1 &= \alpha\gamma + \beta\delta : \beta\gamma - \alpha\delta : \gamma\gamma + \delta\delta \\ \frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} &= \frac{\alpha\gamma + \beta\delta + i(\beta\gamma - \alpha\delta)}{\gamma\gamma + \delta\delta}, \end{aligned}$$

und dieser Quotient ist stets vorhanden, wenn nicht zugleich $\gamma = 0$, $\delta = 0$ ist. Für das Gedächtniss dürfte es bequemer sein, die Division so durchzuführen

$$\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{(\alpha + \beta i)(\gamma - \delta i)}{(\gamma + \delta i)(\gamma - \delta i)} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta + i(\beta\gamma - \alpha\delta)}{\gamma\gamma + \delta\delta}.$$

Wird in einer Zahl i durch $-i$ ersetzt, so erhält man die conjugirte. Der reelle Theil einer Zahl a pflegt durch $\Re(a)$ gekennzeichnet zu werden, er ist die halbe Summe der Zahl und ihrer conjugirten.

Hat man ein Aggregat von Producten und Quotienten der Form

$$\frac{(A_1 + B_1 i)\;(A_2 + B_2 i)\,..\;(A_n + B_n i)}{(a_1 + b_1 i)\;(a_2 + b_2 i)\,..\;(a_m + b_m i)}$$

und ist das Resultat $P + Qi$, so erhält man $P - Qi$, die conjugierte Zahl als Resultat, wenn man in jenem Aggregate jede complexe Zahl $A_\mu + B_\mu i$, $a_\nu + b_\nu i$ durch ihre conjugirte $A_\mu - B_\mu i$, $a_\nu - b_\nu i$ ersetzt, denn dies ist offenbar bei einem Producte oder Quotienten aus nur zwei Zahlen der Fall.

Diejenige stets vorhandene positive Zahl ϱ, die mit sich selbst multiplicirt $\alpha\alpha + \beta\beta$ liefert,

$$\varrho = \sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta} = abs\, a$$

wird der absolute Betrag von a, oder kürzer absolut a genannt. Der absolute Betrag jeder von Null verschiedenen Zahl ist von Null verschieden. Das Product conjugirter Zahlen giebt das Quadrat des absoluten Betrages (die Norm). Soll der absolute Betrag einer Zahl $a = \alpha + \beta i$ beliebig klein werden, so muss sowohl der reelle Bestandtheil α, als auch die mit i multiplicirte Zahl β, die mit i den imaginären Bestandtheil bildet, für sich beliebig klein werden, weil $\alpha\alpha + \beta\beta$ nur beliebig klein wird, wenn α und β zugleich beliebig klein werden.

§ 13. **Einige fundamentale Sätze der Rechnung mit complexen Zahlen.** Das Problem

$$zz = a = \alpha + \beta i$$

ist stets (zweifach) lösbar. Setzen wir $z = \sigma + \tau i$, so ist

$$\alpha + \beta i = \sigma\sigma - \tau\tau + 2\sigma\tau i, \quad \alpha = \sigma\sigma - \tau\tau, \quad \beta = 2\sigma\tau,$$
$$\alpha\alpha + \beta\beta = (\sigma\sigma + \tau\tau)\ (\sigma\sigma + \tau\tau), \qquad \sigma\sigma + \tau\tau = abs\ a$$
$$\frac{\alpha + abs\ a}{2} = \sigma\sigma, \qquad \frac{-\alpha + abs\ a}{2} = \tau\tau$$
$$\sigma + \tau i = \pm\left(\sqrt{\frac{\alpha + abs\ a}{2}} + i\sqrt{\frac{-\alpha + abs\ a}{2}}\right).$$

Da unter dem Zeichen $\sqrt{\ }$ positive Zahlen stehen, so ist die rechte Seite sicher vorhanden. Wird das Vorzeichen von $\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha + abs\ a)}$ willkürlich gewählt, so ist das von $\sqrt{\frac{1}{2}(-\alpha + abs\ a)}$ völlig bestimmt durch die Beziehung $\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha + abs\ a)}\ \sqrt{\frac{1}{2}(-\alpha + abs\ a)} = \frac{1}{2}\beta$. Bezeichnet man mit Kronecker das Vorzeichen einer reellen Grösse α mit $sgn\ \alpha$, so kann man die Bedingung so ausdrücken

$$sgn\sqrt{\frac{\alpha + abs\ a}{2}}\ .\ sgn\sqrt{\frac{-\alpha + abs\ a}{2}} = sgn\ \beta.$$

Es giebt nur zwei Lösungen, denn ist z eine, z' eine andere, so ist

$$(z + z')\ .\ (z - z') = 0$$

also, da ein Product nur verschwinden kann, wenn ein Factor verschwindet, $z' = z$ oder $z' = -z$. Dass $\sqrt{a}\ .\ \sqrt{a'} = \pm\sqrt{aa'}$ sei, ist leicht zu erweisen. Ebenso der Satz: Ist $a = a'$, so ist $\sqrt{a} = \pm\sqrt{a'}$.

Es ist $$abs\ a\ .\ abs\ a' = abs\ aa'.$$

Bew. Es sei $a = \alpha + \beta i$, $a' = \alpha' + \beta' i$, so ist zu erweisen, dass

$$(abs\ a)^2\ (abs\ a')^2 = (\alpha\alpha + \beta\beta)\ (\alpha'\alpha' + \beta'\beta') = (\alpha\alpha' - \beta\beta')\ (\alpha\alpha' - \beta\beta') + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)\ (\alpha\beta' + \alpha'\beta) = (abs\ aa')^2$$

sei. Denn sind die Quadrate zweier positiven Zahlen gleich, so müssen diese selbst gleich sein. Die gliedweise Ausführung der Multiplicationen in dieser Gleichung ergiebt die Richtigkeit des aufgestellten Satzes. Es folgt daraus sogleich

$$abs\ a : abs\ a' = abs\ (a : a').$$

Sehr häufig macht man von dem Satze Gebrauch, dass

$$abs\ (a + a') \leqq abs\ a + abs\ a'$$

sei. Es ist zu erweisen, dass (die Wurzeln positiv genommen)

$$\sqrt{(\alpha + \alpha')\ (\alpha + \alpha') + (\beta + \beta')\ (\beta + \beta')} \leqq \sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta} + \sqrt{\alpha'\alpha' + \beta'\beta'}$$

ist. Dies findet statt, wenn

$$(\alpha + \alpha')\ (\alpha + \alpha') + (\beta + \beta')\ (\beta + \beta') \leqq \alpha\alpha + \beta\beta + \alpha'\alpha' + \beta'\beta' + 2\ abs\ aa'$$

ist, oder wenn

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' \leqq \sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta}\ .\ \sqrt{\alpha'\alpha' + \beta'\beta'}$$

ist. Fällt $\alpha\alpha' + \beta\beta'$ negativ aus, so ist der Satz richtig, ist der Ausdruck positiv, so ergiebt sich die Richtigkeit auf folgende Weise. Es besteht die Beziehung

$$\alpha\alpha\beta'\beta' + \alpha'\alpha'\beta\beta - 2\,\alpha\alpha'\beta\beta' = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\ (\alpha\beta' - \alpha'\beta) \geqq 0.$$

Die Gleichheit tritt dann und nur dann ein, wenn $\alpha : \alpha' = \beta : \beta'$ und zugleich $\alpha\alpha' + \beta\beta'$ positiv ist, wenn die Zahlen denselben Richtungscoëfficienten haben, den wir nachher definiren wollen. Hieraus folgt

$$\alpha\alpha\beta'\beta' + \alpha'\alpha'\beta\beta \geqq 2\,\alpha\alpha'\beta\beta'$$

und durch beiderseitige Addition von $\alpha\alpha\alpha'\alpha' + \beta\beta\beta'\beta'$

$$\alpha\alpha'\beta\beta' + \alpha'\alpha'\beta\beta + \alpha\alpha\alpha'\alpha' + \beta\beta\beta'\beta' = (\alpha\alpha + \beta\beta)\ (\alpha'\alpha' + \beta'\beta') \geqq (\alpha\alpha' + \beta\beta')\ (\alpha\alpha' + \beta\beta'),$$

mithin ist

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' \leqq \sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta}\ \sqrt{\alpha'\alpha' + \beta'\beta'},$$

wenn die Wurzeln positiv genommen werden. Somit ist der Satz erwiesen.

Setzt man eine Zahl in die Form

$$a = abs\, a\,(\varkappa + \varkappa' i), \quad \varkappa = \alpha : \sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta}, \quad \varkappa' = \beta : \sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta},$$

so ist $$abs\,(\varkappa + \varkappa' i) = 1. \qquad \varkappa\varkappa + \varkappa'\varkappa' = 1.$$

Die Zahl $\varkappa + \varkappa' i$ mag der Richtungscoëfficient der Zahl a heissen. Später gelingt es eine andre reelle Grösse *arcus* a einzuführen, die mit *abs* a zusammen die Zahl a bestimmt, die bequemer als der Richtungscoëfficient ist, zunächst aber bedienen wir uns des Richtungscoëfficienten. — Das Product oder der Quotient zweier Richtungscoëfficienten ist wieder ein Richtungscoëfficient, d. h. eine complexe Zahl, deren absoluter Betrag Eins ist.

Reguläre complexe Folgen. Eine Folge complexer Zahlen

$$(a_1\, a_2 \,..\, a_n \,..), \quad a_n = \alpha_n + \beta_n i$$

heisst regulär, wenn $abs\,(a_{n+m} - a_n)$ für jedes positive m dadurch beliebig klein gemacht werden kann, dass n gross genug genommen wird. Es giebt dann eine complexe Zahl a von der Beschaffenheit, dass $abs\,(a - a_n)$ beliebig klein wird, oder dass $lim\, a_n = a$ wird. Diese Zahl ist das zur Folge gehörende Zeichen, die Folge ist dieser Zahl gleich zu setzen. Es kann $abs\,(a_{n+m} - a_n)$ nicht beliebig klein werden, wenn nicht $\alpha_{n+m} - \alpha_n$, $\beta_{n+m} - \beta_n$ für sich beliebig klein werden. Die Zahl

$$a = \alpha + \beta i = (\alpha_1\, \alpha_2 \,..\, \alpha_n \,..) + i\,(\beta_1\, \beta_2 \,..\, \beta_n \,..)$$

ist die Zahl $lim\, a_n$. Für complexe Folgen besteht die Gleichung

$$(\alpha_1 + \beta_1 i \quad \alpha_2 + \beta_2 i \,..\, \quad \alpha_n + \beta_n i \,..) = (\alpha_1\, \alpha_2 \,..\, \alpha_n \,..) + i\,(\beta_1\, \beta_2 \,..\, \beta_n \,..).$$

§ 14. Graphische Darstellung der complexen Zahlen. Nachdem wir zu den reellen und complexen Zahlen auf formalem Wege gelangt sind, ohne, wie sonst wohl üblich, vom Grössenbegriffe auszugehen, denn das Grösser und Kleiner wurde auch formal definirt, bedienen wir uns des Umstandes, dass manche Vorgänge und Thatsachen der Maassgeometrie eine auffallende Uebereinstimmung mit Rechnungsoperationen zeigen, das Zahlensystem mit Vorstellbarem zu verknüpfen oder, wie wir sagen, uns eine Abbildung desselben zu verschaffen. Das Haften unserer Vorstellung an einem solchen Bilde erleichtert uns zuweilen das formale Denken, und die geometrische Darstellung gewährt namentlich eine bequeme Terminologie für manche arithmetische Beziehungen. Der Gefahr, arithmetische Sätze durch geometrische Betrachtungen erweisen zu wollen, weil dies oft leicht erscheint, muss man allerdings sorgfältig aus dem Wege gehen, weil ein solcher Beweis nicht jedesmal arithmetisch bindend ist. Volle Strenge kann man derartigen Beweisen nur dann zugestehen, wenn man die den geometrischen zum Beweise dienenden Beziehungen entsprechenden analytischen Relationen für den ganzen Gang des Beweises fortlaufend angeben kann. Dies gilt namentlich für die elementare Functionentheorie, wo es sich um strenge Begründung der Fundamentalsätze handelt. Ist das erreicht, so wird man etwas freier sich anschaulicher Hülfsmittel bedienen können, wenn man dadurch zu schnellerem Fortschritt gelangt.

Auf einer geraden Linie, sie liege horizontal vor uns, nehmen wir einen festen Punct an und schreiben an seine Stelle die Zahl Null, wir denken uns die Stelle, den Punkt als Träger der Null. Sodann nehmen wir eine bestimmte Strecke als Maasseinheit und tragen sie von Null aus in der Richtung von links nach rechts ab. An ihren Endpunct setzen wir die Zahl Eins, denken diesen Punct als Träger der Zahl Eins. Tragen wir diese Strecke wiederholt in derselben Richtung ab, so erhalten wir die Träger der Zahlen 2 3 4 .., tragen wir aber die Strecke von Null anfangend wiederholt von rechts nach links ab, so erhalten wir die Träger der Zahlen -1 -2 -3 ... Theilen wir dann nach den Regeln der messenden Geometrie die Strecke zwischen zwei auf einander folgenden ganzen Zahlen, zwischen $\pm a$ und $\pm a + 1$ in n gleiche Theile, so nehmen wir den m^{ten} Theilpunct zum Träger der Zahl $\pm a + (m : n)$. Die zu $m : n$ gehörende Strecke hat wie die

Zahl $m:n$ die Eigenschaft, dass ihr n-faches die Strecke m bez. die Zahl m ist. Die Zahl $m:n$ darf die Maasszahl der Strecke zwischen den Puncten, deren Träger die Zahlen 0 und $m:n$ sind, genannt werden. Man erkennt dabei, dass die Zahlen an sich ebenso wenig Grössen sind als die Puncte, deren Träger sie sind. Erst durch Beziehung auf einander werden sie Grössen, wie zwei Puncte eine Strecke bestimmen, die Grösse hat. Die Träger irrationaler Zahlen construirt man durch einen analogen Process wie die irrationale Zahl selbst. Ist die Zahl durch einen Decimalbruch gegeben, so schneidet man erst den ganzzahligen Bestandtheil des Decimalbruches als Strecke von Null aus ab, dann die Zehntel, dann die Hundertstel u. s. w. Dass man auf diese Weise zu einem bestimmten Puncte gelange, und dass umgekehrt jeder bestimmte Punct durch successive Abmessungen als Träger einer bestimmten Zahl aufgefasst werden könne, das ist das Axiom, auf dem die Möglichkeit ein-eindeutiger Abbildung der Zahlen auf die Puncte einer Geraden beruht. Durch Zuhülfenahme der Ebene lassen sich übrigens manche irrationale Zahlen, wie $\sqrt{2}$ als Diagonale eines Quadrates, genau construiren, wenn man überhaupt von genauen Constructionen reden darf, die im Grunde doch nur eine Fiction sind.

Ist $\alpha > \beta$ nach den im § 5 für Grössenvergleichung gegebenen Regeln, so ist die Strecke $\overline{0\alpha}$ (von Null bis α) grösser als die Strecke $\overline{0\beta}$, $\overline{0\beta}$ bildet einen Theil von $\overline{0\alpha}$, wenn α und β beide positiv sind. Sind $\alpha\beta$ negative Zahlen, so ist $\overline{0\alpha} < \overline{0\beta}$, wenn $\alpha > \beta$ ist. Sind α und β von entgegengesetztem Zeichen, ist etwa α positiv, β negativ, so folgt aus der nun selbstverständlichen Gleichung $\alpha > \beta$ nichts über das Grössenverhältniss der Strecken $\overline{0\alpha}$ $\overline{0\beta}$, sondern nur dass sie verschieden gerichtet sind.

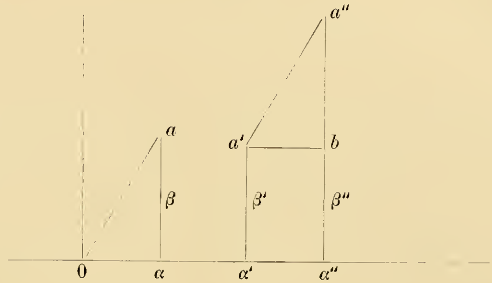
Nun zieht man eine zweite Gerade, welche die erste im Puncte Null schneidet, und zwar nimmt man (am einfachsten und deshalb am besten) diese Gerade senkrecht zur ersten an. Den Puncten dieser Geraden lässt man die mit i multiplicirten, also rein imaginären Zahlen gerade so entsprechen, wie die reellen Zahlen den Puncten der ersten Geraden, indem man sich beim Abtragen desselben Maassstabes, derselben Einheit bedient. Es ist üblich, die positiv imaginären Zahlen oberhalb der reellen Geraden oder der reellen Achse aufgetragen zu denken, und eine Drehung, durch welche die reelle positive Achse sich der positiv imaginären nähert (eine Linksdrehung), eine positive Drehung zu nennen. Von einem Puncte der Ebene der beiden Achsen fällt man Lothe auf sie. Ist die Entfernung von der imaginären Achse α (positiv oder negativ, je nachdem der Punct mit der positiv reellen Achse auf derselben Seite der imaginären Achse liegt oder nicht) und ist das Maass der Entfernung von der reellen Achse β (positiv oder negativ, je nach der Lage des Punctes zur reellen Achse), so ist der Punct Träger der complexen Zahl $\alpha + \beta i$. So entspricht nun jedem Puncte der Ebene eine Zahl, jeder Zahl ein Punct, der der Träger der Zahl ist.

Die Entfernung des Trägers einer Zahl vom Puncte Null, natürlich mit demselben Maassstabe gemessen, der zur Bestimmung der Lage des Trägers schon diente, ist gleich dem absoluten Betrage der Zahl, wie der Pythagoräische Lehrsatz zeigt. Ist von einer Zahl der absolute Betrag gegeben, so müsste man zur völligen Bestimmung des Trägers der Zahl, und somit der Zahl, noch den Winkel kennen, den der Radiusvector des Trägers der Zahl mit einer festen Richtung, etwa mit der positiv reellen Achse bildet. Diesen Winkel, oder vielmehr den ihn messenden Bogen auf dem Einheitskreise nennen wir den arcus der Zahl, *arc* a. Das arithmetische Verhältniss jedoch, welches zwischen diesem arcus und dem absoluten Betrage einerseits und zwischen dem reellen und imaginären Bestandtheile einer Zahl andererseits besteht, ist zu complicirt, als dass es schon hier erörtert werden könnte, und zwar hat diese Schwierigkeit ihren innern Grund darin, dass durch absoluten Betrag und arcus eine Zahl zwar völlig bestimmt ist, umgekehrt aber zu einer Zahl wohl ein bestimmter absoluter Betrag, aber unendlich viele arcus gehören.

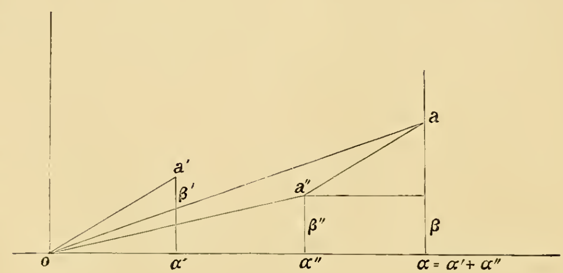
Der absolute Betrag der Differenz $a'' - a'$ zweier Zahlen ist die Strecke zwischen den Trägern dieser Zahlen, *arc* $(a'' - a')$ ist der (durch einen Bogen des Einheitskreises gemessene) Winkel, den die von a' nach a'' gerichtete Strecke mit der positiv reellen Achse bildet. Sind $\alpha' + \beta' i$, $\alpha'' + \beta'' i$ die Zahlen a' a'', und ist $a = \alpha + \beta i$ ihre Differenz $a'' - a'$, so sind die

Dreiecke (a', a'', b) und $(0, a, a)$ congruent, und es ist deshalb die Strecke $(a'a'')$ gleich der Strecke $(0, a)$, und $\sphericalangle\, (a'a'', a'b) = \sphericalangle\, (0a, 0\alpha)$. Dabei ist $a'b$ parallel der Achse der reellen Zahlen. Aus diesen geometrischen Betrachtungen fliesst die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes.

Alle Zahlen z, welche die Gleichung $abs\,(z - a) = \varrho$ befriedigen, liegen auf einem Kreise, dessen Radius ϱ, dessen Mittelpunct der Träger von a, oder kürzer gesprochen, dessen Mittelpunct a ist. Alle Zahlen, die der Ungleichung $abs\,(z - a) < \varrho$ genügen oder, genauer zu reden, ihre Träger liegen im Innern desselben Kreises. Aus diesen Beispielen ersieht man schon, welchen Nutzen wir für die Terminologie aus der Zahlenabbildung ziehen können, wenn es sich um Bestimmung von Zahlengebieten handelt,



wir können die Ungleichung $abs\,(z - a) < \varrho$ durch die Bestimmung ersetzen: alle Zahlen, die im Innern eines Kreises ϱ liegen. Addirt man zwei Zahlen $a' = \alpha' + \beta' i$, $a'' = \alpha'' + \beta'' i$ zu einander, so erhält man den Träger der Summe a dadurch, dass man α'' zu α', β'' zu β' fügt, in der Richtung von links nach rechts bez. von unten nach oben, wenn $\alpha''\beta''$ positive Zahlen sind, in der entgegengesetzten, wenn sie negativ sind. Die Summe hat zum absoluten Betrage die Strecke zwischen 0 und a $(= a' + a'')$, a'' hat zum absoluten Betrage die Strecke zwischen 0 und a'', a' die Strecke zwischen a'' und a. Da nun nach einem Satze der Maassgeometrie die Seite $0a$ kleiner, höchstens gleich ist der Summe der Seiten $0a'$, $a'a$, so folgt hieraus der schon arithmetisch erwiesene Satz $abs\,(a' + a'') \leq abs\, a' + abs\, a''$, der Fall



der Gleichheit tritt dann ein, wenn $arc\, a' = arc\, a''$ ist, oder wenn die Zahlen denselben Richtungscoëfficienten haben. Der Träger q des Richtungscoëfficienten einer Zahl a wird durch den Radiusvector von a auf dem mit dem Radius Eins um den Punct 0 geschlagenen Kreise bestimmt. Zahlen, oder vielmehr die Träger der Zahlen, die denselben Richtungscoëfficienten oder denselben arcus haben, liegen auf einer Geraden durch den Punct Null. — Auf die Darstellung der complexen Zahlen durch die Puncte einer Ebene gründen wir später die Theorie der winkeltreuen Abbildung.

Complexe Zahlen mit mehr als zwei Einheiten. Es liegt nahe zu versuchen, complexe Zahlen mit drei oder mehr Einheiten (Qualitäten) einzuführen, und es sind wirklich verschiedene Versuche nach dieser Richtung gemacht. Als ein solcher kann der Quaternionencalcul, dem Untersuchungen von Grassmann verwandt sind, angesehen werden. Allein diese Gebilde genügen den fundamentalen Rechnungsregeln nicht, es ist ab nicht gleich ba, bei andern $a(a' + a'')$ nicht gleich $aa' + aa''$. Obschon eine solche Symbolik nützlich sein kann, so gehört sie doch nicht in die Arithmetik. Lässt man nur den Satz fallen, dass ein Product nicht verschwindet, ohne dass ein Factor verschwindet, so sind in der That erweiterte complexe Zahlen möglich. Abschliessende Untersuchungen über dieselben finden sich in den Göttinger Nachrichten von 1884 von Weierstrass und Dedekind. Diese haben ergeben, dass die Anzahl der Einheiten gerade sein muss, und dass eine Rechnung mit diesen Zahlen nur eine symbolische Zusammenfassung von neben einander auszuführenden gewöhnlichen Rechnungen bedeuten würde. Diese Zahlen lösen keine neue Aufgabe, sie sind deshalb überflüssig. Damit ist der von Gauss schon längst ausgesprochene Satz, dass die Arithmetik auf die bekannten complexen Zahlen zu beschränken sei, bestätigt. Ein näheres Eingehen auf diese Untersuchungen geht über den Rahmen einer elementaren Functionentheorie hinaus.

§ 15. Grenzzahlen. Hier noch einige Sätze über beliebige Zahlenfolgen oder Zahlenmengen. Sind die Zahlen der unendlichen Menge reeller Zahlen $(a_1 a_2 \,.\,.\, a_n \,.\,.)$ in bestimmten Grenzen, etwa zwischen M und $-M$ gelegen, so dass $M > a_n > -M$ ist, was auch n sein mag, so giebt es (mindestens) eine Zahl a von der Beschaffenheit, dass unter den Zahlen $(a_1 a_2 \,.\,.\, a_n \,.\,.)$ sich unendlich viele (d. h. beliebig viele) Zahlen vorfinden, die sich von a beliebig wenig (unendlich wenig) unterscheiden. Es sei b_1 die erste unter den Zahlen $a_1 a_2 \,.\,.$, die gleich a_1 oder grösser ist als a_1, b_2 die erste, die wieder gleich b_1 oder die grösser ist als b_1, .., b_n die erste, die gleich b_{n-1} oder die grösser ist als b_{n-1}, so ist entweder einmal für ein bestimmtes n die Zahl b_n so beschaffen, dass keine folgende gleich oder grösser als b_n ist, oder es giebt immer wieder eine grössere b_{n+1}, $b_{n+2} \,.\,.$ Im letzten Falle bilden $(a_1 b_1 b_2 \,.\,.\, b_n \,.\,.)$ eine (zunehmend) monotone Folge und daher (§ 7) eine reguläre Folge. Die zu ihr gehörige Zahl G heisst die obere Grenze der Zahlen $a_1 a_2 \,.\,.$, sie ist offenbar zugleich eine Grenzzahl der Menge $a_1 a_2 \,.\,.\,.$ Unter den Zahlen $a_1 a_2 \,.\,.$ giebt es demnach entweder eine grösste, oder eine obere Grenze, die erste ist eine wirklich in der Menge vorhandene Zahl, die letztere ist im Allgemeinen nicht darin enthalten. Nur wenn eine Zahl unendlich oft in der Menge enthalten ist, so ist sie eine Grenzzahl und zugleich in der Menge enthalten. Auch kann offenbar eine Zahl a in der Folge zugleich eine grösste und eine Grenzzahl sein, denn nach Fortlassung dieser Zahl in der Menge kann der Rest dieselbe Zahl zur oberen Grenze haben. — Ebenso besitzt die Menge entweder eine kleinste Zahl, oder eine untere Grenze g, sie ist im letzten Fall eine Grenzzahl der Menge.

Ist aber in $a_1 a_2 \,.\,.$ eine grösste und eine kleinste Zahl enthalten, so findet man eine Grenzzahl c der Menge in folgender Weise. Es sei die grösste Zahl (die nicht zugleich Grenzzahl sein mag) c_1, streicht man in der Menge c_1, so sei die grösste Zahl c_2, streicht man c_2, so sei die grösste Zahl c_3 u. s. w. Die Zahlen $c_1 c_2 c_3 \,.\,.$ bilden eine (abnehmend) monotone, also eine reguläre Folge, die zu ihr gehörende Zahl c ist eine Grenzzahl der Menge $a_1 a_2 \,.\,.\, a_n \,.\,.\,.$ Es ist leicht zu erkennen, dass die Grenzzahl c in der Menge der a zwar nicht vorzukommen braucht, dass sie aber auch darin enthalten sein kann.

Auch eine unendliche Menge oder Folge[1]) complexer Zahlen $a_1 a_2 \,.\,.\, a_n \,.\,.$ besitzt (mindestens) eine Grenzzahl, wenn $\operatorname{abs} a_n$, was auch n sein mag, kleiner ist als eine bestimmte (übrigens beliebig grosse) Zahl M. — Die reellen Theile von $a_1 a_2 \,.\,.$ bilden eine unendliche Menge, die eine Grenzzahl besitzen. Wir können demnach aus den Zahlen $a_1 a_2 \,.\,.$ eine Folge herausheben, die in Bezug auf ihre reellen Bestandtheile regulär ist, etwa die Menge

$$(\lambda_1 + \mu_1 i \quad \lambda_2 + \mu_2 i \,.\,.\, \quad \lambda_n + \mu_n i \,.\,.).$$

Aus der unendlichen Menge $\mu_1 \mu_2 \,.\,.$ lässt sich, weil sie eine Grenzzahl besitzt, eine reguläre Folge herausheben $(\delta_1 \delta_2 \,.\,.\, \delta_n \,.\,.)$, deren zugehörige Zahl δ eine Grenzzahl der Folge $\mu_1 \mu_2 \,.\,.$ ist. Sind die zu $\delta_1 \delta_2 \,.\,.$ in der Folge $\lambda_1 + \mu_1 i \quad \lambda_2 + \mu_2 i \,.\,.$ gehörenden reellen Theile $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_n \,.\,.$, so ist die Folge

$$(\gamma_1 + \delta_1 i \quad \gamma_2 + \delta_2 i \,.\,.\, \quad \gamma_n + \delta_n i \,.\,.)$$

in ihrem reellen wie in ihrem imaginären Theile eine reguläre, also eine reguläre complexe Folge,

---

[1]) Es ist vielleicht gerathen, das Wort „Folge“ den regulären Folgen vorzubehalten, und eine beliebige Folge eine „Menge“ zu nennen.

zu der eine bestimmte complexe Zahl $c = \gamma + \delta i$ gehört, die eine Grenzzahl der Folge $\lambda_n + \mu_n i$, also auch der Folge $a_1 a_2 ..$ ist. Es giebt in $a_1 a_2 ..$ unendlich viele Zahlen, die sich von c beliebig wenig unterscheiden, und es kann in besonderen Fällen die Zahl c in $a_1 a_2 ..$ auch selbst vorkommen, im einfachsten Falle unendlich oft vorkommen.

In der Menge

$$(2 \quad -2 \quad 1 \quad 1 - \tfrac{1}{2} \quad -1 + \tfrac{1}{2} \quad 1 - \tfrac{1}{3} \quad -1 + \tfrac{1}{3} \; .. \quad 1 - \tfrac{1}{4} \quad -1 + \tfrac{1}{4} \; ..)$$

giebt es eine grösste Zahl, die Zahl 2, eine kleinste -2, zwei Grenzzahlen $+1$, -1, die eine $+1$ ist in der Menge enthalten, die andre -1 nicht.

Die Zahlen der Folge $a_1 a_2 .. a_n ..$ sind den ganzen Zahlen $1 \; 2 \; .. \; n \; ..$ durch die Indices eindeutig zugeordnet, man kann ihre Mächtigkeit (Cantor) eine abzählbar unendliche nennen. Durch Gleichungen oder Ungleichungen kann man auch Mengen von höherer Mächtigkeit, von der Mächtigkeit der reellen Zahlen selbst bestimmen, z. B. wenn man die Menge aller reellen Zahlen betrachtet, die der Ungleichung $m < x < m + 1$ genügen, oder alle Zahlen z, für die $abs\, z = 1$ ist, die auf dem Einheitskreise liegen. Dass diese Mächtigkeiten wirklich höhere sind, ist von Herrn Cantor (Crelle's Journal Bd. 77) bewiesen.

Fragt man, was man von den Zahlen in der Arithmetik braucht, so giebt darüber das längst bekannte Rechnen mit (unendlichen) Decimalbrüchen Auskunft. Eine principielle Durchführung der formalen Auffassung der Zahlen ist jedoch zuerst von E. Heine (Crelle's Journal Bd. 74) unter Mitwirkung des Herrn Cantor gegeben. Dass man trotz Feststellung des Zahlenbegriffes in formaler Weise häufig die Worte „Grösse“ oder „Werth“ für reelle und auch für complexe Zahlen gebraucht, ist aus Gewohnheit zu erklären, und ohne Schaden thunlich.

Allgemeine Sätze über unendliche Reihen und Producte.

§ 16. Die Summe einer unendlichen Reihe. Unter dem Werthe oder der Summe einer unendlichen Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + .. + a_n + ..$ versteht man die Zahl s, die zur Folge $(s_1 s_2 s_3 .. s_n ...)$ gehört, wenn

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \; .., \quad s_n = a_1 + a_2 + .. + a_n, \; ..$$

ist. Damit die Reihe einen Werth, eine Summe habe, damit sie convergire, ist es nothwendig und hinreichend, dass die (im Allgemeinen complexe) Folge $(s_1 s_2 .. s_n ..)$ eine reguläre sei. Es muss also

$$abs\,(s_{n+m} - s_n) = abs\,(a_{n+1} + a_{n+2} + .. + a_{n+m})$$

dadurch beliebig klein (unendlich klein) gemacht werden können, dass n gross genug genommen wird, welche positive ganze Zahl m auch sein mag, so dass m auch von n abhängen, z. B. gleich n sein kann. Ist s die zu $(s_1 s_2 ..)$ gehörende Zahl, so schreibt man dem in § 11 eingeführten Sprachgebrauche gemäss oft auch $lim\, s_n = s$, $(n = \infty)$. Setzt man $m = 1$, so zeigt sich, dass die Bedingung der Convergenz $lim\,(s_{n+m} - s_n) = 0$ die Bedingung in sich schliesst, dass die Terme a_n mit wachsenden n beliebig klein werden $(lim\, a_n = 0)$. Diese Bedingung ist jedoch keineswegs eine ausreichende, wie weiter unten das Beispiel der harmonischen Reihe zeigt.

Wird das aus n Factoren bestehende Product $z.z\ldots z$ gleich z^n gesetzt, und beachtet, dass für positive ε

$$(1+\varepsilon)^2 > 1+2\varepsilon,\quad (1+\varepsilon)^3 > 1+3\varepsilon),\ \ldots,\ (1+\varepsilon)^n > 1+n\varepsilon,\ \ldots$$

ist, und mithin $(1+\varepsilon)^n$ mit wachsenden n über alle Grenzen wächst, (woraus sofort folgt, dass für ein z, dessen absoluter Betrag kleiner als Eins ist, z^n dem absoluten Betrage nach mit wachsenden n beliebig klein wird), so ergiebt unser Convergenzkriterium sogleich die Convergenz der geometrischen Reihe $1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots$ für alle Werthe von z, für die $abs\ z < 1$ ist. Denn es ist $s_n = 1+z+\ldots+z^{n-1} = (1-z^n):(1-z)$ und $s_{n+m}-s_n = z^n(z^m-1):(z-1)$, und dieser Ausdruck wird für jedes m, wenn $abs\ z < 1$ ist, beliebig klein, wenn n gross genug genommen wird, weil $abs\ ((z^m-1):(1-z)) < 2\ abs\ (1-z)$ ist.

Ein anderes einfaches Beispiel für eine convergente Reihe, welches noch dazu für viele Convergenzuntersuchungen practische Bedeutung hat, ist die Reihe

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + . - \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} + \ldots$$

in der die Terme $a_1 a_2 a_3 \ldots$ positiv reelle Zahlen sind, und eine abnehmend monotone Nullfolge bilden, so dass $a_{n+1} \leqq a_n$ und $lim\ a_n = 0$ ist. In der That, es ist

$$\begin{aligned} s_{n+m} - s_n &= (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} \ldots + (-1)^{m+1}\ a_{n+m}) \\ &= (-1)^n ((a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \ldots +) \\ &= (-1)^n (a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \ldots). \end{aligned}$$

In der vorletzten Zeile sind alle Terme unter der weiteren Klammer positiv, gleichviel ob alle Terme Differenzen sind, oder ob der letzte eingliedrig ist (bei ungeradem m). Die Terme unter der weiten Klammer der letzten Zeile sind sämmtlich negativ, bis auf den ersten, der positiv ist. Die Klammer ist deswegen $\geqq a_{n+1} - a_{n+2}$ und $\leqq a_{n+1}$ und

$$a_{n+1} \geqq abs\,(s_{n+m} - s_n) \geqq 0,$$

und da nach der Voraussetzung a_{n+1} mit wachsenden n beliebig klein wird, so wird $abs\,(s_{n+m} - s_n)$ für wachsende n beliebig klein, die Reihe ist convergent.

Betrachten wir das Beispiel

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - . + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \ldots$$

so folgt daraus, dass die Terme $\left(1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ldots\right)$ der Reihe niemals zunehmen, eine abnehmend monotone Nullfolge bilden, die Convergenz derselben, und daraus die der Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots \frac{1}{(n-1)n} + \ldots$$

mit dem Werthe 1. Denn ist die Summe der ersten n Glieder der ersten Reihe s_n, die der zweiten t_n, so ist $t_n = s_{2n}$, und es ist (§ 7) $(t_1 t_2 \ldots t_n \ldots) = (s_2 s_4 s_6 \ldots)$ mit $s = (s_1 s_2 \ldots s_n \ldots)$ eine reguläre Folge, und ihr Werth ist s.

Dass das nothwendige Kriterium $lim\ a_n = 0$ keine ausreichende Bedingung ist, pflegt man an dem Beispiel der harmonischen Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

nachzuweisen. Denn die Terme dieser Reihe sind grösser oder mindestens gleich den entsprechenden Termen der Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$$

Die Summe der ersten $(1+2+4+8+16+\ldots+2^n)$ Glieder der letzten Reihe ist aber $\frac{1}{2}n$ und wächst mit n über alle Grenzen, die Reihe ist divergent.

Eine Reihe ermangelt auch der Convergenz, ohne dass die Summe der ersten n Glieder mit n über alle Grenzen wächst, wie die Reihe $1-1+1-1+1-1+-\ldots$, bei der $s_{2n}=0 \quad s_{2n+1}=1$ ist, bei ihr kann $s_{n+m}-s_n$ nicht für jedes m dadurch beliebig klein gemacht werden, dass man n gross genug nimmt.

Bei Untersuchungen, die nicht die Summe, sondern nur die Convergenz einer Reihe angehen, kann man stets eine endliche, aber sonst beliebige Anzahl von Termen fortlassen.

§ 17. **Reihenvergleichung bei absoluten Termen.** Sind die Terme $b_1 b_2 b_3 \ldots$ einer Reihe sämmtlich positiv reell und von einem bestimmten ab sämmtlich kleiner, oder höchstens gleich den entsprechenden (also ebenfalls positiven) Termen einer anderen convergenten Reihe $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$, so ist auch $b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots$ eine convergente Reihe.

Beweis: Es sei $\quad s_n = a_1+a_2+\ldots+a_n, \quad t_n = b_1+b_2+\ldots+b_n,\quad$ so ist

$$t_{n+m}-t_n = b_{n+1}+b_{n+2}+\ldots+b_{n+m}, \quad s_{n+m}-s_n = a_{a+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+m}$$

und folglich

$$t_{n+m}-t_n \leqq s_{n+m}-s_n$$

und da diese Ausdrücke positiv sind, so muss $t_{n+m}-t_n$ mit $s_{n+m}-s_n$ beliebig klein werden w. z. b. w.

So convergirt die Reihe

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots,$$

denn ihre Terme sind kleiner als die entsprechenden Terme der Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\ldots,$$

deren Convergenz oben nachgewiesen wurde.

Hülfssatz für Summenschätzungen. Sind $h_1 h_2 \ldots h_m$ reelle Zahlen grösser oder gleich Null, und sind $H_1 H_2 \ldots H_m$ beliebige complexe Zahlen, die absolut genommen kleiner oder gleich der positiven Zahl H sind, so ist für jedes ganze beliebige m

$$abs\,(h_1 H_1 + h_2 H_2 + \ldots + h_m H_m) \leqq H(h_1+h_2+\ldots+h_m).$$

Denn es ist $\quad abs\, h_m H_m = h_m \quad abs\, H_m \leqq h_m H$

$$abs\,(h_1 H_1 + h_2 H_2 + \ldots + h_m H_m) \leqq abs\, h_1 H_1 + abs\, h_2 H_2 + \ldots + abs\, h_m H_m$$
$$\leqq h_1 H + h_2 H + \ldots + h_m H \leqq (h_1+h_2+\ldots+h_m) H.$$

Man kann dafür auch schreiben $h_1 H_1 + h_2 H_2 + \ldots + h_m H_m = \Theta(h_1+h_2+\ldots+h_m)H$, wo $abs\,\Theta \leqq 1$ ist.

§ 18. **Convergenz complexer Reihen.** Multiplicirt man die als positiv vorausgesetzten Terme einer convergenten Reihe $p_1+p_2+\ldots+p_n+\ldots$ bez. mit complexen Zahlen $M_1 M_2 M_3 \ldots M_n \ldots$, deren absolute Beträge über eine bestimmte positive Zahl M nicht hinausgehen (oder, wie man oft sagt, die endlich bleiben) und bildet aus den Producten eine neue Reihe

$$p_1 M_1 + p_2 M_2 + \ldots + p_n M_n + \ldots,$$

so ist auch diese eine convergente Reihe. — Ist nämlich

$$s_n = p_1+p_2+\ldots+p_n, \quad t_n = p_1 M_1 + p_2 M_2 + \ldots + p_n M_n,$$

so ist nach dem Hülfssatz des vorigen Paragraphen

$$abs\,(t_{n+m}-t_n) \leqq (p_{n+1}+\ldots+p_{n+m}) M \leqq (s_{n+m}-s_n) M,$$

und da wegen der vorausgesetzten Convergenz der p-Reihe $s_{n+m} - s_n$ mit wachsenden n beliebig klein wird, was auch m für eine positive Zahl sein mag, so gilt dies auch für $abs\,(t_{n+m} - t_n)$ und die Convergenz ist erwiesen.

Von den Zahlen $M_1\,M_2\,..\,M_n$ können beliebig viele Null sein, z. B. alle mit geradem Index, setzt man die übrigen gleich Eins, so gewinnt man den Satz: Ist $p_1 + p_2 + .. + p_n + ..$ eine convergente Reihe mit positiven Termen, und ist $q_1 + q_2 + .. + q_n + ..$ eine neue Reihe, die aus der ersten Reihe dadurch hervorgeht, dass man beliebig viele Terme derselben tilgt, so convergirt auch diese Reihe.

Nimmt man für $M_1\,M_2\,..$ Richtungscoëfficienten, also Zahlen mit dem absoluten Betrage Eins, so folgt daraus, dass die Reihe $a_1 + a_2 + .. + a_n + ..$ gewiss convergent ist, wenn die Reihe

$$abs\,a_1 + abs\,a_2 + .. + abs\,a_n + ..$$

convergirt. Eine Reihe, die dieser Bedingung genügt, heisst eine absolut convergente Reihe. — Entsteht die Reihe $b_1 + b_2 + ..$ aus der absolut convergenten Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + ..$ durch Streichung beliebig vieler (unendlich vieler) Terme, so ist sie auch absolut convergent.

Einige practische Convergenzkriterien. Sind die Terme einer Reihe $a_1 + a_2 + .. + a_n + ..$ so beschaffen, dass $n\,n\,a_n$ für jedes n unter einer bestimmten, also von n unabhängigen Grenze bleibt, (oder ist $lim\;n\,n\,a_n$ für wachsende n, wie man sagt, endlich) so convergirt die Reihe. Denn setzt man $n\,n\,a_n = M_n$, so ist

$$a_1 + a_2 + .. a_n + .. = M_1 + \frac{M_2}{2^2} + \frac{M_3}{3^2} + .. + \frac{M_n}{n^2} + ..$$

und die letzte Reihe convergirt nach den eben aus einander gesetzten Principien, weil $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + .. + \frac{1}{n^2} + ..$, eine Reihe mit absoluten Termen und eine Reihe ist, deren Convergenz bereits erwiesen wurde. So convergirt z. B. die Reihe

$$\frac{1}{C} + \frac{1}{A + B + C} + \frac{1}{4A + 2B + C} + .. + \frac{1}{nnA + nB + C} + ..,$$

wenn ABC beliebige Zahlen sind mit der Beschränkung, dass A nicht Null sein darf. Auch darf $Ax^2 + Bx + C$ nicht für ein ganzzahliges x verschwinden, weil sonst ein sinnloses (ein unendliches) Glied vorkäme. Unterdrückt man aber ein solches Glied, so ist die Reihe wieder convergent.

So lange $abs\,(z - a) < 1$ ist, convergirt die Reihe $A_0 + A_1\,(z - a) + A_2\,(z - a)^2 + .. + A_n(z - a)^n + ..$, wenn $abs\,A_n$ für jedes n unter einer bestimmten Zahl M bleibt. — Hat eine Reihe $a_1 + a_2 + .. + a_n + ..$ die Eigenschaft, dass von einem bestimmten Terme ab $abs\,a_{n+1} : abs\,a_n < \Theta$ ist, wo Θ eine positive Zahl kleiner als 1 ist, und zwar eine von n unabhängige Zahl, so ist die Reihe convergent. Denn aus

$$abs\,\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \Theta, \quad abs\,\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leq \Theta, \quad abs\,\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} \leq \Theta, ..$$

folgt $abs\,a_{n+m} \leq \Theta^m \,.\, abs\,a_n$ und die gegebene Reihe convergirt, weil

$$a_1 + a_2 + .. + a_n + \Theta \quad abs\,a_n + .. + \Theta^m \quad abs\,a_n + ..$$

eine convergente Reihe ist. Uebrigens giebt es Fälle, in denen die Reihe convergirt, obgleich Θ von n abhängig ist, und mit wachsenden n sich der Eins nähert, wie die Reihe $\Sigma(1 : n^2)$, in der $a_{n+1} : a_n = n^2 : (n+1)^2 = 1 - \frac{2n - 1}{(n+1)^2}$ ist. Das Beispiel $\Sigma\,(1 : n)$, in dem $a_{n+1} : a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ ist, lehrt aber, dass eine Reihe divergiren kann, wenn Θ zwar kleiner als Eins, aber von n abhängig ist. Auf feinere Convergenzkriterien soll aber an dieser Stelle nicht eingegangen werden.

§ 19. Absolut convergente Reihen besitzen den Charakter von Summen, d. h. man kann die Posten beliebig vertauschen, ohne den Werth oder die Summe der Reihe zu ändern, man nennt sie deshalb wohl auch unbedingt convergente Reihen.

Eine solche Umordnung kann von zweierlei Art sein. Erstens kann jeder Term seinen Platz so geändert haben, dass er nur um eine endliche Zahl von Stellen vorgerückt oder zurückgegangen ist, oder zweitens, es kann die Reihe in mehrere unendliche Reihen zerlegt worden sein, ja es kann die Anzahl dieser Reihen selbst wieder unendlich gross sein. In beiden Fällen gilt der ausgesprochene Satz. Ein Beispiel des ersten Falles wäre die Umordnung der Reihe $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ in die $a_1 + a_3 + a_2 + a_5 + a_7 + a_4 + a_9 + a_{11} + a_6 + \ldots + a_{4n-3} + a_{4n-1} + a_{2n} + \ldots$, ein Beispiel der zweiten Art wäre die in $a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1} + \ldots + a_2 + a_4 + a_6 + \ldots a_{2n} + \ldots$, in der die Glieder mit ungeradem Index zuerst zu summiren wären, dann die mit geradem.

Ist $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ die gegebene Reihe, s_n die Summe der ersten n Glieder, $t = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ die umgeordnete Reihe, t_n die Summe ihrer ersten n Glieder, und ist die Umordnung eine Umordnung der ersten Art, (wie schon die Bezeichnung ergiebt), so ist von den Folgen

$$(s_1\, s_2\, s_3 \ldots s_n \ldots)\ (t_1\, t_2\, t_3 \ldots t_n \ldots)$$

die erste nach der Voraussetzung eine reguläre. Bilden wir die Folge $(t_1 - s_1,\ t_2 - s_2, \ldots, t_n - s_n, \ldots)$ und nehmen wir die ganze Zahl ν so gross an, dass $abs\, a_{\nu+1} + abs\, a_{\nu+2} + \ldots abs\, a_{\nu+\mu}$ für jedes μ kleiner als σ ist, wo σ beliebig klein vorgegeben ist, so können wir noch n so gross annehmen, dass t_n und s_n die Terme $a_1\, a_2 \ldots a_\nu$ zugleich enthalten. Dann ist $s_n = s_\nu + \Theta\sigma$, $t_n = s_\nu + \Theta'\sigma$, wo $abs\, \Theta \leq 1$, $abs\, \Theta' \leq 1$ ist, und folglich $abs\,(t_n - s_n) \leq 2\sigma$. Die Folge $(t_1\, t_2 \ldots)$ unterscheidet sich von der Folge $(s_1\, s_2 \ldots)$ nur um eine Nullfolge, es ist $lim\, t_n = lim\, s_n = s$. Die umgeordnete Reihe convergirt und hat denselben Werth als die ursprüngliche.

Es kann aber auch die Reihe unter Erhaltung der Convergenz und des Summenwerthes in einzelne oder unendlich viele Theilreihen zerfällt werden. Die obigen Schlussfolgerungen werden hinfällig, wenn n nicht so gross genommen werden kann, dass t_n alle Terme von s_ν enthält, wie gross auch ν genommen werden mag, wenn die Reihe in mehrere, oder unendlich viele Reihen zerpflückt wird. Der letztere Fall ist der weitere, weshalb es genügt, ihn allein zu behandeln. Ist die neue Reihe

$$\begin{aligned} b = {} & b_{11} + b_{12} + b_{13} + \ldots + b_{1n} + \ldots \\ & + b_{21} + b_{22} + b_{23} + \ldots + b_{2n} + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + b_{m1} + b_{m2} + b_{m3} + \ldots + b_{m,n} + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und kommt jeder in b enthaltene Term in der Reihe $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ vor und ebenso umgekehrt jeder Term der Reihe a in der Doppelreihe b, was z. B. geschieht, wenn $b_{11} = a_1$, $b_{12} = a_2$, $b_{21} = a_3$, $b_{13} = a_4$, $b_{22} = a_5$, $b_{31} = a_6$, $b_{14} = a_7$, $\ldots$ $b_{1,n} = a_{\frac{1}{2}(n-1)n+1}$, $b_{2,n-1} = a_{\frac{1}{2}n(n-1)+2}$, $\ldots$ $b_{m,n-m} = a_{\frac{1}{2}(n-1)n+m+1}$, $\ldots$ ist, so kann verlangt werden, dass die Reihe $b_{11} + b_{12} + \ldots + b_{1n} + \ldots$ zuerst für sich summirt werde, die Summe sei b_1, dass sodann die Reihe $b_{21} + b_{22} + \ldots$ für sich summirt werde, ihre Summe sei b_2 u. s. w., und dass dann die Summe der Reihe $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ gebildet werde. Es fragt sieh dann, ob die Reihe b, die man ihrer Form wegen eine Doppelreihe nennt, convergirt, und ob im Bejahungsfalle die Summe den Werth a hat. Die Reihen b_1, b_2, $\ldots$ convergiren für sich, weil sie Theile einer absolut convergenten Reihe sind.

Bildet man die Summe der Doppelreihe in der Weise, dass man eine bestimmte Anzahl von Gliedern summirt, z. B. $n\,.\,m$ Glieder aus jeder der ersten m Horizontalreihen die ersten n Glieder, und nun m und n wachsen lässt, so hat man den schon erledigten Fall einer Umordnung der a-Reihe in eine andere, in der die Terme a sich an einer bestimmten Stelle vorfinden. Neues tritt eben erst ein, wenn man die Theilreihen für sich summirt, also gewissermaassen unendlich viele Glieder herausnimmt, summirt, und dann die Summe der Theilsummen bildet.

Es sei $b_{m1} + b_{m2} + .. + b_{mn} = (b)_{mn}$. Dann können wir m und n so gross nehmen, dass für jedes ν

$$(b)_{1, n+\nu} + (b)_{2, n+\nu} + .. + (b)_{m, n+\nu} = a + \tfrac{1}{2}\Theta\sigma$$

ist, wo σ eine beliebig klein vorgegebene Zahl und $abs\ \Theta \leq 1$ ist. Weiter können wir ν so gross annehmen, dass

$$(b)_{1, n+\nu} = b_1 - \frac{\Theta_1 \sigma}{2m}, \quad (b)_{2, n+\nu} = b_2 - \frac{\Theta_2 \sigma}{2m}, \ .. \ (b)_{m, n+\nu} = b_m - \frac{\Theta_m \sigma}{2m}$$

wird, wenn $abs\ \Theta_1$, $abs\ \Theta_2, ..\ abs\ \Theta_m$ kleiner oder gleich Eins sind. Daraus folgt, dass $b_1 + b_2 + ..$ $+ b_m = (b)_{1, m+\nu} + (b)_{2, n+\nu} + .. (b)_{m, n+\nu} + (\Theta_1 + \Theta_2 + .. \Theta_m) \dfrac{\sigma}{2m} = a + \Theta'\sigma$ ist, wo $\Theta' = \frac{1}{2}\Theta$ $+ (\Theta_1 + \Theta_2 + .. + \Theta_m) : 2m$ eine Zahl ist, deren absoluter Betrag kleiner oder gleich Eins ist. Es unterscheidet sich also $b_1 + b_2 + .. + b_m$ von a, wenn m gross genug genommen wird, beliebig wenig, woraus sowohl die Convergenz der Reihe $b_1 + b_2 + ..$ folgt, als auch dass ihr Werth a ist.

Hieraus geht hervor, dass ein wesentlicher Unterschied zwischen einer gewöhnlichen (einfach unendlichen) und einer Doppelreihe (zweifach unendlichen Reihe) nicht vorhanden ist, dass vielmehr die eine Form ohne Weiteres in die andere Form umgewandelt werden kann. Gleiches gilt von den dreifach, vierfach und mehrfach unendlichen Reihen. — Die Convergenz von Doppelreihen ist eingehender untersucht von Herrn A. Pringsheim im Bande XXVII der Sitzungsberichte des K. bayer. Academie der Wissenschaften.

§ 20. Bedingt convergente Reihen haben den Charakter einer Summe nicht. Der Satz, dass der Werth einer Reihe ungeändert bleibt, wenn man ihre Terme umordnet, hat zur ausdrücklichen Voraussetzung, dass die Reihe der absolut genommenen Terme convergire. Bei anderen Reihen hat diese Unveränderlichkeit nicht statt. So ist z. B. offenbar

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + .. + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + .. = 0,$$

während die aus denselben Termen bestehende convergente Reihe

$$1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + .. + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} + ..$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + .. + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + ..$$

grösser als $\frac{1}{2}$ (beiläufig gleich $log\ 2$) ist. Aehnliches gilt natürlich auch von den Doppelreihen.

Bildet man eine Reihe aus positiven und negativen reellen Termen, und bezeichnet man die positiven Terme mit $a_1, a_2, a_3, ..$, die negativen mit $-b_1, -b_2, -b_3, ..$, und wächst $a_1 + a_2 + ..$ $+ a_n ..$ und ebenso $b_1 + b_2 + .. + b_n ..$ mit wachsenden n über alle Grenzen, während $lim\ a_n$ und $lim\ b_n$ Null ist, so kann man aus den Termen a und den Termen $-b$ eine Reihe bilden, die sie sämmtlich enthält, und deren Summe eine beliebige Zahl C ist. Denn vereinigt man abwechselnd so lange positive Zahlen $a_1, a_2, ..$ zu einer Summe, bis ihr Werth eben nur grösser als C wird, und fügt dann so lange negative Glieder $-b_1, -b_2, ..$ hinzu, bis der Werth eben nur kleiner als C wird, so wird die Abweichung von C nie mehr betragen, als der Werth des dem letzten Zeichenwechsel voraufgehenden Gliedes. Da nun sowohl die a als auch die b mit wachsendem Index beliebig klein werden, so werden auch die Abweichungen von C, wenn man nur hinreichend viele Terme a und b zur Reihe verwendet, beliebig klein werden, und die so gebildete unendliche Reihe wird gegen C convergiren. (Riemann.)

Es muss aber bemerkt werden, dass jede convergente Reihe gewisse Umordnungen zulässt. Lässt sich nämlich eine bestimmte Zahl λ angeben, so dass kein Term der Reihe, wo er auch stehen mag, um mehr als λ Stellen durch die Umordnung versetzt wird, z. B. $(\lambda = 1)$, wenn $a_1 + a_2 + \ldots a_{2m-1} + a_{2m} + \ldots$ in die Reihe $a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + \ldots a_{2n} + a_{2m-1} + a_{2m+2} + \ldots$ umgeordnet wird, so ist die neue Reihe jedes Mal convergent und hat denselben Werth als die Mutterreihe. Denn ist die Summe der ersten n Terme der Mutterreihe s_n, die Summe der ersten n Terme der umgeordneten, der Tochterreihe t_n, so ist $t_{n+\lambda} - t_n = \varepsilon_1 a_{n+1} + \varepsilon_2 a_{n+2} + \ldots + \varepsilon_{2\lambda} a_{n+2\lambda}$, wo die ε entweder Eins oder Null sind, da in $t_{n+\lambda} - t_n$ nur λ Terme vorkommen, deren grösster Index höchstens $a_{n+2\lambda}$ ist. Ist $abs\, a_{n+\varrho}$ die grösste unter den Zahlen $abs\, a_{n+1}\ abs\, a_{n+2} \ldots abs\, a_{n+2\lambda}$, so ist $abs\,(t_{n+\lambda} - s_n) \leq \lambda\ abs\, a_{n+\varrho}$ und wird folglich wegen der vorausgesetzten Convergenz der Reihe $a_1 + a_2 + \ldots$ mit wachsenden n beliebig klein, so dass $lim\ t_n = lim\ s_n$ ist.

§ 21. Addition und Multiplication convergenter Reihen. Die Summe oder Differenz zweier convergenten Reihen $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ und $b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ wird durch gliedweise Addition bez. Subtraction gefunden, so dass

$$a \pm b = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots$$

ist. Denn setzt man $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $t_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, so gehört die Folge

$$(s_1 \pm t_1,\ s_2 \pm t_2,\ \ldots,\ s_n \pm t_n,\ \ldots)$$

zur Zahl $a \pm b$, wenn $(s_1, s_2, \ldots)$ zu a, und $(t_1, t_2, \ldots)$ zu b gehört.

Eine convergente Reihe wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man ihre Glieder mit dieser Zahl multiplicirt,

$$b\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots) = ba_1 + ba_2 + \ldots + ba_n + \ldots$$

Denn ist $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s_n$, so gehört zur Folge

$$(bs_1,\ bs_2,\ \ldots\ bs_n,\ \ldots)$$

nach § 9 die Zahl $b \,.\, a$, wenn a zu $(s_1,\ s_2,\ \ldots\ s_n,\ \ldots)$ gehört.

Das Product absolut convergenter Reihen erhält man, indem man eine Reihe bildet, die die Producte jedes Termes der einen Reihe mit jedem Terme der andern Reihe enthält. Ist das Product

$$a \,.\, b = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots)\,(b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots)$$

zu bilden, so ist dasselbe nach dem eben bewiesenen Satze gleich

$$\begin{aligned} & a_1 b + a_2 b + \ldots + a_n b + \ldots \\ = & \; a_1 b_1 + a_1 b_2 + \ldots + a_1 b_m + \ldots \\ + & \; a_2 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_2 b_m + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + & \; a_n b_1 + a_n b_2 + \ldots + a_n b_m + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Diese Reihe convergirt noch, wenn für $a_n b_m$ der absolute Betrag gesetzt wird, also ist sie absolut convergent, und ihre Terme können beliebig angeordnet werden. Eine oft benutzte Anordnung ist die:

$$a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3 + a_4 b_1 + a_3 b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_4 + \ldots$$
$$+ a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + a_{n-2} b_3 + \ldots + a_1 b_n + \ldots$$

Aus dem Producte $(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots)\ (1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots)$ gelangt man zu der Doppelreihe $\Sigma\Sigma \frac{1}{m^2 n^2}$, aus der man leicht schliessen kann, dass eine Doppelreihe $\Sigma\Sigma a_{nm}$ convergent ist, wenn $n^2 m^2 a_{nm}$ für alle n und m absolut genommen unter einer bestimmten Zahl bleibt.

§ 22. Satz von du Bois-Reymond: Es giebt keine letzte absolut convergente Reihe. Dies will sagen, ist $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ eine convergente Reihe mit positiven Termen, so giebt es stets eine andere convergente Reihe $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$ mit positiven Elementen, deren Terme von einem bestimmten ab sämmtlich grösser sind als die Terme der Reihe der a, und zwar so, dass $\lim b_n : a_n$ mit n über alle Grenzen wächst. Zum Beweise dieses Satzes setzen wir $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \ldots = \alpha_1$, $a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + \ldots = \alpha_2$, $a_3 + a_4 + \ldots + a_n + \ldots = \alpha_3, \ldots$, so ist die Reihe

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_4 - \alpha_5 + \ldots$$

convergent, weil ihre Terme zu Null herabsinken, ihre Zeichen wechseln und dem absoluten Betrage nach niemals zunehmen (§ 16). Dasselbe gilt, die Quadratwurzeln positiv vorausgesetzt, von der Reihe

$$\sqrt{\alpha_1} - \sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_3} + \sqrt{\alpha_3} - \sqrt{\alpha_4} + . - \ldots,$$

und von den ihr gleichen Reihen

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}} + \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\alpha_3}} + \frac{\alpha_3 - \alpha_4}{\sqrt{\alpha_3} + \sqrt{\alpha_4}} + \ldots$$

$$= \frac{a_1}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}} + \frac{a_2}{\sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\alpha_3}} + \frac{a_3}{\sqrt{\alpha_3} + \sqrt{\alpha_4}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{\alpha_{n+1}}} + \ldots,$$

deren Terme sämmtlich positiv sind. Bildet man also die Reihe $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$ und setzt $b_n = a_n : (\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{\alpha_{n+1}})$, so ist dieselbe convergent und

$$b_n : a_n = 1 : (\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{\alpha_{n+1}})$$

wächst mit n über alle Grenzen.

Lassen sich die positiv reellen Terme einer Reihe $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ so in Differenzen $a_n = b_{2n-1} - b_{2n}$ zerlegen, dass die Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ von einer bestimmten ab fortwährend abnehmen oder wenigstens nicht zunehmen und beliebig klein werden, oder wie man auch sagt, gegen Null convergiren, so convergirt die Reihe der a.

§ 23. Definition des unendlichen Productes. Unter dem Werthe eines unendlichen Productes

$$p = (1 + a_1)\,(1 + a_2)\,(1 + a_3)\,\ldots\,(1 + a_n)\,\ldots$$

versteht man die Zahl, welche zur Folge $(p_1, p_2, \ldots p_n \ldots)$ gehört, wenn $p_1 = 1 + a_1$, $p_2 = (1 + a_2)p_1$, $p_3 = (1 + a_3)p_2, \ldots, p_n = (1 + a_n)p_{n-1}, \ldots$ ist. Damit eine solche Zahl vorhanden sei, ist nothwendig und hinreichend, dass der absolute Betrag der Differenz

$$p_{n+m} - p_n$$

für beliebige positive m dadurch beliebig klein gemacht werden kann, dass n gross genug genommen wird. Setzen wir die vorstehende Differenz gleich $\delta_{n,m}$ und ist p_n nicht Null, bleibt vielmehr $abs\, p_n$ über einer bestimmten Zahl für jedes n, so muss

$$\frac{p_{n+m}}{p_n} = 1 + \frac{\delta_{n,m}}{p_n} = 1 + \varepsilon_{n,m}$$

sein, und der absolute Betrag von $\varepsilon_{n,m}$ muss beliebig klein gemacht werden können. Ist $p_{n+m} : p_n = 1 + \varepsilon_{n,m}$ und $\varepsilon_{n,m}$ für jedes m von einem bestimmten n ab absolut genommen kleiner als σ, so giebt es eine solche Zahl n, dass $abs\, p_{n+m} : p_n < 2$ ist. Für dieses n sei $abs\, p_n = P$, dann ist $abs\, p_{n+m} < 2P$ und es wächst demnach p_n mit n dem absoluten Betrage nach nicht über eine bestimmte Grenze. Andererseits kann man n so gross annehmen, dass $abs\, p_{n+m} : p_n > \frac{1}{2}$ ist. Hat für dieses n $abs\, p_n$ den Werth τ, so ist $abs\, p_{n+m} > \frac{1}{2}\tau$, und es sinkt demnach $abs\, p_n$ mit wachsenden n nicht unter eine gewisse Grenze > 0 herab. Aus diesem Kriterium folgert man nun leicht wiederum das frühere, und es enthält also nicht blos eine nothwendige, sondern auch eine hinreichende Bedingung, und es kann p_n dem absoluten Betrage nach nicht über eine bestimmte endliche Zahl hinausgehen und nicht unter eine bestimmte Zahl herabsinken.

Nähert sich p_n immer mehr der Null, so ist damit die Convergenz des Productes ausgesprochen, indem dann $p = 0$ ist. Allein solche Producte, welche gegen Null convergiren, ohne dass ein Factor Null ist, verhalten sich anders als unendliche Producte, die gegen eine bestimmte endliche von Null verschiedene Zahl convergiren, und es ist deshalb zweckmässig und bequem anzunehmen[1]), dass ein Product nur dann convergire, wenn es gegen einen von Null verschiedenen endlichen Werth convergirt. Ist ein Factor Null, so soll das Product convergiren, falls das Product der ersten n Factoren nach Fortlassung dieses Factors mit wachsenden n einem von Null verschiedenen Werthe zustrebt und (absolut genommen) nicht über alle Grenzen wächst.

Hülfssatz. Sind $a'_1, a'_2, \ldots$ positive Zahlen, so ist

$$1 > (1 - a'_{n+1})(1 - a'_{n+2}) > 1 - a'_{n+1} - a'_{n+2},$$
$$1 > (1 - a'_{n+1})(1 - a'_{n+2})(1 - a'_{n+3}) > 1 - a'_{n+1} - a'_{n+2} - a'_{n+3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$1 > (1 - a'_{n+1})(1 - a'_{n+2}) \ldots (1 - a'_{n+m}) > 1 - a'_{n+1} - a'_{n+2} - \ldots - a'_{n+m}.$$

§ 24. Der Ausdruck $(p_{n+m} : p_n) - 1$ ist eine Summe von Grössen der Form $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots a_{n+m}, a_{n+1} \cdot a_{n+2}, \ldots, a_{n+1} \cdot a_{n+m}, a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot a_{n+3}, \ldots, a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot a_{n+3} \ldots a_{n+m}$, die nur durch das $+$ Zeichen mit einander verbunden sind. Ist

$$p' = (1 + a'_1)(1 + a'_2) \ldots (1 + a'_n) \ldots$$

convergent und sind $a'_1, a'_2, \ldots a'_n, \ldots$ die absoluten Beträge von $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$, so ist auch

$$p = (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \ldots$$

convergent.

Zunächst erkennt man leicht die Richtigkeit in dem speciellen Falle

$$(1 - a'_1)(1 - a'_2) \ldots (1 - a'_n) \ldots$$

Setzt man nämlich $(1 + a'_{n+1})(1 + a'_{n+2}) \ldots (1 + a'_{n+m}) = 1 + \delta$, $(1 - a'_{n+1})(1 - a'_{n+2}) \ldots (1 - a'_{n+m}) = 1 - \varepsilon$, so ist $\varepsilon < \delta$ und also mit δ beliebig klein. Denn nach dem Hülfssatz des vorigen Paragraphen ist $\delta > a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m} > \varepsilon$.

Der Beweis des allgemeinen Falles ist nicht schwieriger. Denn es ist $(p'_{n+m} : p'_n) - 1$ ein aus den absoluten Beträgen des Aggregates, dem $(p_{n+m} : p_n) - 1$ gleich ist, gebildetes Aggregat, und folglich ist

$$abs\left(\frac{p_{n+m}}{p_n} - 1\right) \leqq \frac{p'_{n+m}}{p'_n} - 1,$$

und das Product ist convergent.

Aus der Convergenz des unendlichen Productes

$$(1 - a'_1)(1 - a'_2) \ldots (1 - a'_n) \ldots$$

folgt umgekehrt die des unendlichen Productes

$$(1 + a'_1)(1 + a'_2) \ldots (1 + a'_n) \ldots$$

Es ist nämlich, weil die a' gegen Null convergiren, für hinlänglich grosse n

$$(1 - a'_{n+1})(1 - a'_{n+2}) \ldots (1 - a'_{n+m}) \leqq (1 - a'_{n+1} a'_{n+1})(1 - a'_{n+2} a'_{n+2}) \ldots (1 - a'_{n+m} a'_{n+m}) \leqq 1.$$

---

[1]) In der ersten Auflage war nur „bequem" gesetzt. Herr Pringsheim hat im 23. Band der Leipziger Annalen ausgedehntere Untersuchungen über Convergenz unendlicher Producte angestellt. Er hält dort die Zulassung des Grenzwerthes 0 für „unlogisch", was mir doch zu viel gesagt scheint.

Ist nun $(1-a'_{n+1})\,(1-a'_{n+2})\,..\,(1-a'_{n+m}) = 1-\delta_{n,m}$, so folgt

$$1-\delta_{n,m} \leqq (1-a'_{n+1})\,(1-a'_{n+2})\,..\,(1-a'_{n+m})\,.\,(1+a'_{n+1})\,..\,(1+a'_{n+m}) \leqq 1$$

$$1 \leqq (1+a'_{n+1})\,(1+a'_{n+2})\,..\,(1+a'_{n+m}) \leqq \frac{1}{1-\delta_{n,m}} = 1+\frac{\delta_{n,m}}{1-\delta_{n,m}}.$$

Es wird aber $\delta_{n,m} : (1-\delta_{n,m})$ mit $\delta_{n,m}$ beliebig klein, das Product ist convergent, w. z. b. w.

§ 25. Zurückführung der Convergenzbedingung eines unendlichen Productes auf die Convergenz einer unendlichen Reihe. Ist

$$a_1 + a_2 + a_3 + \,..\, + a_n + \,..$$

eine absolut convergente Reihe, so ist

$$(1+a_1)\,(1+a_2)\,..\,(1+a_n)\,..$$

ein absolut convergentes Product, und umgekehrt, ist das Product absolut convergent (d. h. convergirt es auch noch dann, wenn man a_1, a_2, .. durch die absoluten Beträge dieser Grössen ersetzt), so ist auch die Reihe absolut convergent.

Nach dem Hülfssatz des § 23 ist

$$1 > (1-a'_{n+1})\,(1-a'_{n+2})\,..\,(1-a'_{n+m}) > 1-a'_{n+1}-a'_{n+2}-\,..\,-a'_{n+m}.$$

Ist nun $a'_1 + a'_2 + a'_3 + \,..$ convergent, so wird $a'_{n+1} + a'_{n+2} + \,..\, + a'_{n+m}$ mit wachsenden n beliebig klein, also wird

$$(1-a'_{n+1})\,(1-a'_{n+2})\,..\,(1-a'_{n+m})-1$$

für hinlänglich grosse n beliebig klein, und das Product $(1+a_1)\,(1+a_2)\,(1+a_3)\,..$ ist convergent.

Umgekehrt, ist das Product $(1+a_1)\,(1+a_2)\,..$ absolut convergent, so ist auch die Reihe $a_1 + a_2 + \,..$ absolut convergent. Denn da

$$(1+a'_{n+1})\,(1+a'_{n+2})\,..\,(1+a'_{n+m})-1 > a'_{n+1}+a'_{n+2}+\,..\,+a'_{n+m}$$

mit wachsenden n beliebig klein wird, so ist das nothwendige und hinreichende Kriterium für die Convergenz der Reihe erfüllt.

§ 26. Ein absolut convergentes Product hat den Charakter eines Productes, insofern man darin die Factoren beliebig vertauschen kann, ohne den Werth desselben zu ändern. Auch lässt es sich in ein convergentes unendliches Product verwandeln, dessen Factoren selbst unendliche Producte sind (zweifach unendliches Product). Der Beweis ist dem im § 19 für den ähnlichen Reihensatz beigebrachten analog zu führen, weshalb wir ihn unterdrücken, und lässt sich ausserdem durch Vermittelung der Logarithmen auf den früheren zurückführen.

Bedingt convergente unendliche Producte. Es giebt Grenzwerthe unendlich vieler Factoren, die den Namen eines unendlichen Productes eigentlich nicht verdienen, weil die Factoren desselben nicht vertauscht werden können, ohne dass sich der Grenzwerth ändert. Wir lernten unendliche Reihen kennen, deren Terme nicht vertauscht werden durften. Zwischen einer solchen nicht absolut, sondern nur bedingt convergenten Reihe

$$a_1 + a_2 + \,..\, + a_n + \,..$$

und dem Producte

$$(1+a_1)\,(1+a_2)\,..\,(1+a_n)\,..$$

besteht in Bezug auf die Convergenz nicht mehr die Correspondenz, wie sie im § 25 für absolut convergente Ausdrücke aufgestellt wurde, und man muss sich davor hüten, das Product für convergent zu halten, weil es die entsprechende Reihe ist. Beispiele sind die Producte

$$(1-\sqrt{\tfrac{1}{2}})\,(1+\sqrt{\tfrac{1}{2}})\,(1-\sqrt{\tfrac{1}{3}})\,(1+\sqrt{\tfrac{1}{3}})\,(1-\sqrt{\tfrac{1}{4}})\,(1+\sqrt{\tfrac{1}{4}})\,..,$$

$$\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{i}{\sqrt{4}}\right)\left(1-\frac{i}{\sqrt{4}}\right)..$$

Dass in jedem convergenten Product eine Umstellung der Factoren zulässig ist, bei der kein Factor um mehr als λ Stellen versetzt ist, wird wie bei den Reihen erwiesen. Dass aber bei bedingt convergenten Producten nicht jede Umstellung zulässig ist, ersieht man aus einem Beispiele. Zieht man in dem unendlichen Product

$$(1-x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{4}\right)..\left(1-\frac{x}{2n-1}\right)\left(1+\frac{x}{2n}\right)..$$

je zwei Factoren zusammen, so dass man erhält

$$\left(1-\frac{x+xx}{2}\right)\left(1-\frac{x+xx}{3\,.\,4}\right)..\left(1-\frac{x+xx}{(2n-1)2n}\right)..,$$

welches Product absolut convergent ist, weil die Reihe

$$(x+xx)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\,.\,4}+\frac{1}{5\,.\,6}+..+\frac{1}{(2n-1)2n}+..\right)$$

absolut convergent ist, so sieht man, dass das vorgegebene Product in der gegebenen Reihenfolge der Factoren convergirt. Es strebt aber für positiv reelle x

$$(1-x)\left(1-\frac{x}{3}\right)..\left(1-\frac{x}{2n-1}\right)..$$

der Grenze Null zu, während

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{4}\right)..\left(1+\frac{x}{2n}\right)..$$

gegen Unendlich divergirt.

Das Product $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)..\left(1-\frac{1}{n}\right)..$ nämlich convergirt, oder es ist vielleicht besser zu sagen divergirt gegen Null. Denn setzen wir $\left(1-\frac{1}{2}\right)..\left(1-\frac{1}{n}\right)=p_n$, $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)..\left(1+\frac{1}{n}\right)=q_n$, $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)..\left(1-\frac{1}{nn}\right)=r_n$, so convergirt r_n gegen einen bestimmten von 0 verschiedenen Werth, der kleiner als Eins ist, und $q_n>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+..+\frac{1}{n}$ wächst mit n über alle Grenzen. Da nun $p_n=r_n:q_n$ ist, so nähert sich p_n mit wachsenden n der Null beliebig.

Für eine Reihe $a_1+a_2+..+a_n+..$ schreibt man oft kürzer $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} a_n$, das soll heissen, man bilde eine Summe aus den Zahlen $a_1, a_2, .., a_n$, deren kleinster Index 1 ist, deren letzter Index n über alle Grenzen wächst. Ebenso schreibt man für $(1+a_1)\,(1+a_2)..(1+a_n)..$ oft kürzer

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+a_n).$$

Unendliche Reihen und Producte, bei denen die Summe oder das Product der ersten n Terme unbestimmt, aber in endlichen Grenzen enthalten bleibt für jedes n, werden wohl *oscillirende* genannt. Hier sind sie unter die divergenten einbegriffen.

§ 27. Satz von Abel. Es giebt keine letzte divergente Reihe aus positiven Termen. Ist die Reihe mit positiven Termen

$$(a) \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

divergent, obschon die Terme a_n mit wachsenden n gegen Null convergiren, so giebt es immer eine divergente Reihe $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$, deren positive Terme $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$ von einem bestimmten ab kleiner als die entsprechenden Terme $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sind, so klein, dass $a_n : b_n$ mit n über alle Grenzen wächst.

Beweis. Mit der Reihe a divergirt auch das Product

$$(p) \quad a_1\left(1+\frac{a_2}{a_1}\right)\left(1+\frac{a_3}{a_1+a_2}\right)\left(1+\frac{a_4}{a_1+a_2+a_3}\right)\ldots\left(1+\frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}\right)\ldots,$$

weil das Product p_n der ersten n Factoren gleich der Summe s_n der ersten n Glieder der Reihe (a) ist. Demnach (§ 25) ist die Reihe

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$$

divergent, wenn

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = \frac{a_2}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_3}{a_1+a_2}, \quad \ldots \quad b_n = \frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}, \ldots$$

gesetzt wird. Es ist aber alsdann

$$a_n : b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1},$$

und es wächst daher dieser Quotient mit n über alle Grenzen, w. z. b. w.

Allgemeine Sätze über Functionen von einer und von zwei veränderlichen Grössen. Begriff der Stetigkeit.

§ 28. Der Functionsbegriff. Die Grösse f heisst in dem Intervalle von a bis b (a sei $< b$) eine Function der reellen Veränderlichen x, wenn jedem reellen Werthe von x zwischen den reellen Zahlen a und b, diese eingeschlossen, ein völlig bestimmter Werth von f zugeordnet ist. Es kann also eine Function von x durch eine Tabelle gegeben gedacht werden, in welche zu jeder Zahl x eine correspondirende Zahl f eingeschrieben ist. Von einem analytisch darstellbaren Gesetz ist dabei gar nicht die Rede, wenn gleich ein Algorithmus, eine Methode erfordert wird, zu jedem Werthe von x den zugehörigen von f in eindeutiger Weise zu bilden, weil eine Tabelle unmöglich alle rationalen und irrationalen Zahlen in einem noch so kleinen Intervalle enthalten kann. Es können aber diese Methoden für einzelne Theile des Intervalles oder für gewisse Klassen von Zahlen, z. B. für rationale und irrationale sehr verschieden sein. Ein analytischer Ausdruck wie z. B. $f = ax + b$ wird natürlich eins der häufigst angewandten Mittel sein, einen solchen Algorithmus zu geben. — Ist der Werth von f für eine oder einzelne Stellen des Intervalles $a \ldots b$ nicht völlig bestimmt, so kann man die Beziehung zwischen f und x immer noch unter den Functionsbegriff fallen lassen, indem man diese Stellen als singuläre Stellen bezeichnet. Die Function ist dann, genau zu reden, eben nur mit Ausnahme jener singulären Stellen eine völlig bestimmte. Wir werden hier unter einer in einem Intervalle $a \ldots b$ wohlbestimmten Function eine solche verstehen, die darin überall völlig eindeutig bestimmt ist und keine singulären Stellen hat. Damit ist auch ausgeschlossen, dass f an einer Stelle unendlich gross sei, weil ja eine unendlich grosse Zahl nach dem hier Vorgetragenen keinen unmittelbaren Sinn hat, sondern nur im asymptotischen Sinne gebraucht werden darf. Ist das Intervall nach einer Seite hin unbegrenzt, oder wie man sich ausdrückt, unendlich, z. B. nach der obern, so heisst das, für b kann jede noch so grosse Zahl gesetzt werden. Das Intervall kann auch nach beiden Seiten hin unbegrenzt sein.

In vielen Fällen kann man von der Beziehung zwischen f und x, von dem Verlauf der Function x eine Vorstellung durch graphische Darstellung gewinnen, indem man f als Ordinate (man braucht dann lieber den Buchstaben y für f), x als Abscisse im Sinne der analytischen Geometrie auffasst. Die Function f wird dann durch eine Curve dargestellt. Doch gelingt es nicht immer, auf diese Weise zu einem deutlichen Bilde zu gelangen, z. B. wenn $y = f(x)$, für alle rationalen x gleich Null, für alle irrationalen x gleich 1 ist.

Aendert man eine analytische Function durch einen einfachen Imperativ ab, z. B. indem man $f(x) = -x^2$ setzt, so lange $x \gtrless 0$ ist, aber $f(x) = -1$ für $x = 0$, so ist $f(x)$ überall eine wohlbestimmte Function, sie stellt sich graphisch dar durch eine die x-Achse von unten her zu berühren strebende Parabel, nur findet die Berührung nicht statt, weil eben statt des Berührungspunctes $x = 0$, $y = 0$ der Punct $x = 0$, $y = -1$ gesetzt ist. Bedeutet $E(x)$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl, so ist $f(x) = E(x)$ eine überall wohlbestimmte Function, die graphisch durch eine treppenförmige Curve dargestellt wird. Bedeutet augenblicklich das Zeichen *lim*, dass n als ganze Zahl positiv über alle Grenzen wächst, so ist (Seidel)

$$f(x) = lim\,[1 : (1 + x^{2n})]$$

überall eine wohlbestimmte Function, sie hat den Werth 0, so lange $x > 1$ und so lange $x < -1$ ist, sie hat den Werth 1, so lange $-1 < x < 1$ ist, für $x = -1$ und $x = 1$ aber hat sie den Werth $\frac{1}{2}$.

Umkehrbar ist im Allgemeinen eine solche Function nicht, d. h. im Allgemeinen giebt es kein zusammenhängendes Intervall $c\,..\,d$ von der Beschaffenheit, dass, wenn f nach und nach jeden Werth zwischen den Grenzen c, d annimmt, zu jedem solchen Werthe ein zugehöriger Werth von x vorhanden ist, die Werthe von f brauchen kein Intervall stetig auszufüllen, andrerseits können zu einem f mehrere, ja unzählig viele Werthe von x gehören, so dass also das zu einem f gehörende x nicht eindeutig bestimmt ist. Wenn freilich f für $a \leqq x \leqq b$ jeden Werth $c \leqq f \leqq d$ ein Mal und nur ein Mal annimmt, so ist die Function eindeutig umkehrbar.

Sind die Zahlen f, die zu den Zahlen x in dem Intervalle ab gehören, reell, so sagen wir, f sei eine reelle Function von x, sind sie complex, so ist f eine complexe Function von x. Eine complexe Function der reellen Veränderlichen x kann aus zwei reellen Functionen zusammengesetzt werden. Ist nämlich die complexe Zahl f für einen reellen Werth von x gegeben, so ist sowohl ihr reeller Theil, als auch der mit i multiplicirte Theil gegeben, und jeder dieser Theile ist eine reelle Function von x. Wir können daher unsere nächsten Untersuchungen erstlich auf reelle Functionen beschränken.

§ 29. Functionen von zwei Veränderlichen. Ist eine Zahl f bestimmt, wenn eine reelle Zahl x und eine reelle Zahl y gegeben ist, und zwar für alle Werthe von x und y, die ein bestimmtes Gebiet erfüllen, z. B. wenn die Werthe von x zwischen a und b, die von y zwischen c und d liegen, oder welche durch die Bedingung $(x-p)\,(x-p) + (y-q)\,(y-q) \leqq rr$ bestimmt sind, oder indem wir von den Bemerkungen im § 14 Gebrauch machen, welche in einem geometrisch durch eine geschlossene Linie umgrenzten Gebiete liegen, so ist f eine Function von x und y in jenem Gebiete, und zwar eine reelle Function, wenn die Werthe reell sind, eine complexe, wenn sie complex sind. Eine complexe Function zweier Veränderlichen kann natürlich ebenso, wie die einer Veränderlichen, aus zwei reellen Functionen, von denen die eine den Factor i erhält, zusammengesetzt werden.

Hängt f von zwei Zahlen x und y ab, hat aber die eine, etwa y, während einer bestimmten Untersuchung immer denselben Werth, so pflegt man diese Zahl einen Parameter der Function f zu nennen.

Umgebung. Das Intervall $x_0 - \varepsilon$ bis $x_0 + \eta$, wenn ε und η beliebig kleine, aber von Null verschiedene Zahlen sind, pflegt man die Umgebung des Punctes x_0 zu nennen, und wenn x zwischen $x_0 - \varepsilon$ und $x_0 + \eta$, y zwischen $y_0 - \varepsilon'$ und $y_0 + \eta'$ liegt, so pflegt man dies Gebiet, wenn $\varepsilon\eta\varepsilon'\eta'$ beliebig kleine, aber von Null verschiedene Zahlen sind, eine Umgebung der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ zu nennen. Statt dieses in graphischer Darstellung rechteckigen Gebietes wird auch jedes andere beliebig kleine Gebiet um $x_0 y_0$, z. B. ein Kreis, wenn der Punct $x_0 y_0$ im Innern, nicht am Rande liegt, die Umgebung genannt. In jedes solches Gebiet lässt sich ein Rechteck oder ein Kreis einschreiben.

§ 30. Obere und untere Grenze. Eine reelle Function f von x, $f = f(x)$, die zwischen a und b endlich bleibt, deren Werthe also zwischen zwei angebbaren Zahlen P und Q liegen, wenn sie für jedes angebbare x zwischen a und b wohlbestimmt ist, hat eine obere Grenze G und eine untere Grenze g von der Beschaffenheit, dass für keinen Werth von x die Function grösser als die Zahl G oder kleiner als die Zahl g ist, dass aber entweder für bestimmte Werthe von x die Function f wirklich gleich G bez. g wird, oder dass Werthe von x angegeben werden können, für welche sich f von G bez. g beliebig wenig, d. h. um weniger als jede noch so klein vorgegebene Zahl σ unterscheidet.

Beweis. Die den Werthen von x zwischen a und b entsprechenden Werthe von f können als eine unendliche Werthmenge, als ein unendlicher Werthvorrath angesehen werden, und es ist die Grenzuntersuchung der des § 15 verwandt. Da aber der Werthvorrath von f von höherer Mächtigkeit ist, als der einer durch die Indices auf die ganzen Zahlen bezogenen Menge $(a_1 a_2 \,..\, a_n \,..)$, so kann man doch nicht ohne Weiteres auf die frühere Untersuchung verweisen. Wir greifen aus dem Vorrath irgend einen Werth $f(x_0)$ heraus und bilden dann die Zahlenreihe $f(x_0)$, $f(x_0) + 1$, $f(x_0) + 2$, .., $f(x_0) + n$, so dass $f(x_0) + n - 1 < P$, $f(x_0) + n \geqq P$ ist. Nun legen wir uns die Frage vor, welches dieser Intervalle ist so beschaffen, dass es noch Werthe im Vorrath f giebt, die grösser als $f(x_0) + m$ sind, aber keinen, der grösser als $f(x_0) + m + 1$ ist. Dieses Intervall kann spätestens das Intervall $f(x_0) + n - 1$ bis $f(x_0) + n$ sein. Practisch kann die Beantwortung der Frage schwierig sein, aber begrifflich muss sie eine bestimmte Antwort zulassen. Es mögen in dem Intervalle von $p = f(x_0) + m$ bis $p' = f(x_0) + m + 1$ noch Werthe von f vorhanden sein. Ist ihre Anzahl eine bestimmte endliche, so giebt es eine bestimmte Anzahl bestimmter Werthe von x, etwa $x_1 x_2 \,..\, x_n$, für die $f > p$ ist. Unter diesen Werthen giebt es einen grössten, oder mehrere einander gleiche grösste. Dieser Werth ist eine obere Grenze, die die Function f auch wirklich an einer oder einigen bestimmten Stellen annimmt. — Wir wollen sagen, dass in diesem Falle die obere Grenze zugleich ein Maximum der Function sei. — Giebt es unendlich viele Werthe von f, die zwischen p und $p' = p + 1$ liegen, so bilden wir die Intervalle p, $p + 0{,}1$, $p + 0{,}2$, .. $p + 0{,}9$, p', und legen uns die Frage vor, welches dieser Intervalle $p + 0{,}\alpha$ bis $p + 0{,}\alpha'$, $(\alpha' = \alpha + 1)$ ist so beschaffen, dass es noch Werthe von f giebt, die $p + 0{,}\alpha$ übersteigen, aber über $p + 0{,}\alpha'$ nicht hinausgehen. Begrifflich muss diese Frage eine bestimmte Antwort zulassen, und $p + 0{,}9$ bis p' ist das letztmögliche Intervall, für das noch die Antwort ja lauten kann. Ist $p + 0{,}\alpha$ bis $p + 0{,}\alpha'$ das Intervall, welches die geforderte Eigenschaft hat, und ist die Anzahl der Werthe von f, die in das Intervall fallen, eine bestimmte endliche, so hat die Function eine obere Grenze, die sie ein oder einige Male annimmt, die zugleich ein Maximum ist. Giebt es aber unendlich viele Werthe von f, die zwischen $p + 0{,}\alpha$ und $p + 0{,}\alpha'$ liegen, so theilen wir das Intervall in 10 Theile, deren Endpuncte

$$p + 0{,}\alpha; \quad p + 0{,}\alpha 1; \quad p + 0{,}\alpha 2; \;.. \quad p + 0{,}\alpha\beta; \quad p + 0{,}\alpha\beta'; \;.. \quad p + 0{,}\alpha 9; \quad p + 0{,}\alpha'$$

$(\beta' = \beta + 1)$ sind. Unter diesen muss ein Intervall $p + 0{,}\alpha\beta$ bis $p + 0{,}\alpha\beta'$ vorhanden sein, so dass es noch Werthe von f giebt, die $> p + 0{,}\alpha\beta$, aber $\leqq p + 0{,}\alpha\beta'$ sind. Ist ihre Anzahl endlich, so giebt es darunter einen oder einige unter einander gleiche grösste Werthe. Dieser ist die obere Grenze von f und ist zugleich ein Maximum. Giebt es aber unendlich viele, so theilen wir das Intervall wieder in 10 Theile und fahren so fort. Giebt es nur eine endliche Anzahl von Werthen f, die in das Intervall $p + 0{,}\alpha\beta \,..\, \lambda\mu$ bis $p + 0{,}\alpha\beta \,..\, \lambda\mu'$ $(\mu' = \mu + 1)$ fallen, so hat die Function eine obere

Grenze, die zugleich ein Maximum ist. Giebt es aber unendlich viele, so theilen wir weiter, und gelangen so zu einem grössten Werth von f, oder das Verfahren geht ins Unbegrenzte weiter und liefert einen bestimmten unendlichen Decimalbruch $G = p + 0{,}\alpha\beta \,..\, \lambda\mu\nu\varrho \,..$, er ist die obere Grenze von f, die entweder an einer bestimmten Stelle angenommen wird, vielleicht aber auch für keinen Werth von x erreicht wird. In der That, es kann f einen grösseren Werth als G nicht annehmen, wie aus dem Verfahren, G zu finden, ganz von selbst folgt. Da es aber in dem Intervalle $p + 0{,}\alpha\beta \dots \lambda\mu$ bis $p + 0{,}\alpha\beta \,..\, \lambda\mu'$ unendlich viele Werthe von f giebt, wie viele Decimalstellen unser Bruch auch enthalten mag, so giebt es unendlich viele Werthe des Vorrathes f, die sich von G beliebig wenig unterscheiden. Dies ist natürlich keine Nothwendigkeit, wenn es unter den Werthen von f einen grössten giebt, wenn die obere Grenze zugleich ein Maximum ist, denn dann brauchen ja in den Intervallen $p + 0{,}\alpha \,..\, \lambda\mu$ bis $p + 0{,}\alpha \,..\, \lambda\mu'$ nicht unendlich viele Werthe des Vorrathes zu liegen. Ist z. B. $f = 0$, so lange $0 \leq x < \frac{1}{2} < x \leq 1$ ist, aber $f = 1$ für $x = \frac{1}{2}$, so ist $G = f(\frac{1}{2}) = 1$ eine obere Grenze und zugleich ein Maximum, und es kommen im Werthvorrathe f keine Werthe vor, die von G um weniger als $\frac{1}{2}$ verschieden wären. Ist aber $f = x$, so lange $0 \leq x < 1$ ist, $f(1) = 0$, so ist 1 die obere Grenze der Function f, die aber für keinen Werth von x angenommen wird. In dem noch so kleinen Intervall $1 - \varepsilon < x < 1$ liegen unendlich viele Werthe von f, die sich von 1 beliebig wenig unterscheiden.

Die Untersuchung für die untere Grenze ist analog.

Die stets positive Grösse $G - g$ heisst die grösste Schwankung der Function im Intervall $a \,..\, b$.

Hat f keinen grössten Werth, sondern nur eine obere Grenze G, so lässt sich stets ein Werth x_0 des Intervalles $a \,..\, b$ angeben, so dass in jeder noch so kleinen Umgebung desselben $x_0 - \varepsilon \,..\, x_0 + \eta$ unendlich viele Werthe von f enthalten sind, die sich von G beliebig wenig unterscheiden.

Wir setzen $f(x) = f[a + \xi(b - a)] = \varphi(\xi)$ und betrachten $\varphi(\xi)$ im Intervalle $0 \,..\, 1$. Der Werthvorrath φ ist derselbe als der Vorrath f, durch Einführung der Variabeln ξ für x aber reduciren wir das Intervall $a \,..\, b$ auf das Intervall $0 \,..\, 1$. Zerlegen wir das Intervall $0 \dots 1$ in 10 Theile von 0 bis 0,1 bis 0,2, .. $0{,}\alpha$ bis $0{,}\alpha'$, .. 0,9 bis 1, $(\alpha' = \alpha + 1)$, so muss es in einem (oder mehreren) dieser Intervalle unendlich viele Werthe von φ, also von f geben, die sich von G beliebig wenig unterscheiden, wenn dies für das ganze Intervall statt hat. Das Intervall $0{,}\alpha \,..\, 0{,}\alpha'$ sei ein solches. Dies theilen wir in zehn Theile $0{,}\alpha \,..\, 0{,}\alpha 1 \,..\, 0{,}\alpha 2 \,..\, 0{,}\alpha 3$ u. s. w. bis $0{,}\alpha 9 \,..\, 0{,}\alpha'$. In mindestens einem dieser Intervalle, etwa zwischen $0{,}\alpha\beta \,..\, 0{,}\alpha\beta'$ $(\beta' = \beta + 1)$ müssen Werthen von ξ unendlich viele Werthe $\varphi(f)$ zugehören, die G beliebig nahe kommen. So fahren wir fort und finden, dass in einem Intervalle $0{,}\alpha\beta \,..\, \lambda\mu \leq \xi \leq 0{,}\alpha\beta \,..\, \lambda\mu'$ $(\mu' = \mu + 1)$ die obere Grenze G sein muss, dass in ihm unendlich viele Werthe von φ oder f zu finden sind, die G beliebig nahe kommen. Die weitere Anwendung dieser Schlussweise gebiert von selbst einen Algorithmus, der uns zu einer bestimmten Zahl $\xi_0 = 0{,}\alpha\beta \,..\, \lambda\mu\nu\varrho \,..$ führt, die die verlangte Eigenschaft hat. Denn ist eine beliebig kleine Umgebung $\xi_0 - \varepsilon \,..\, \xi_0 + \eta$ der Stelle ξ_0 gegeben, so kann man von dem Decimalbruch so viele Stellen nehmen, dass $0{,}\alpha\beta \,..\, \lambda\mu$ bis $0{,}\alpha\beta \,..\, \lambda\mu'$ ganz im Innern jener Umgebung liegt, und den Punct ξ_0 enthält. Zwischen diesen Zahlen aber giebt es unendlich viele Werthe von ξ welchen Werthe von φ oder f zugehören, die G beliebig nahe kommen. Dasselbe gilt offenbar für die Zahl $x_0 = a + (b - a)\xi_0$.

Der Satz von der obern und untern Grenze gilt in gleicher Weise für eine reelle Function von zwei Veränderlichen xy, die in einem Gebiete wohl bestimmt ist, und deren Werthe eine bestimmte Zahl P absolut genommen nicht übersteigen. Es kam ja bei Bestimmung derselben nur die Werthmenge f, nicht die Variabeln in Betracht. Es giebt aber auch hier, wenn die obere Grenze (bez. untere Grenze) nicht wirklich für ein bestimmtes Werthpaar xy angenommen wird, eine bestimmte Stelle xy_0, in deren Umgebung, wie klein sie auch sei, unendlich viele Werthe von f liegen, die dieser Grenze beliebig nahekommen.

Ist das Gebiet durch $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ bestimmt, in graphischer Darstellung durch ein Quadrat, so theilen wir dasselbe in hundert Theilgebiete, von denen $0{,}\alpha \leq x \leq 0{,}\alpha'$, $0{,}\mathfrak{a} \leq y \leq 0{,}\mathfrak{a}'$

($\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + 1$, $\alpha' = \alpha + 1$) eins ist. In einem dieser Theilgebiete mindestens, etwa in dem angeschriebenen, muss die obere Grenze von f gleich G sein. Dies theilen wir wieder in hundert Theile u. s. f., und schliessen, in dem Gebiete

$$0,\alpha\beta\,..\,\lambda\mu \leqq x \leqq 0,\alpha\beta\,..\,\lambda\mu', \quad 0,\mathfrak{ab}\,..\,\mathfrak{lm} \leqq y \leqq 0,\mathfrak{ab}\,..\,\mathfrak{lm}'$$

($\mu' = \mu' + 1$, $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} + 1$) muss die obere Grenze G sein. Die Fortsetzung dieser Schlussweise schafft einen Algorithmus, der uns zu einem Zahlenpaare

$$x_0 = 0,\alpha\beta\,..\,\lambda\mu\nu\varrho\,... \quad y_0 = 0,\mathfrak{ab}\,..\,\mathfrak{lmnr}\,..$$

führt, und in jeder noch so kleinen Umgebung der Stelle $x_0 y_0$ giebt es unendlich viele Werthe von f, die G beliebig nahe kommen, was ganz wie oben bei einer Variabeln erwiesen wird. Ist das gegebene Gebiet kein Quadrat, so können wir jedenfalls ein Quadrat construiren, dessen Seiten der x- und y-Achse parallel sind, und das das Gebiet im Innern enthält. In denjenigen Theilen des Quadrates, die dem gegebenen Gebiete nicht angehören, geben wir f überall den Werth $f(x_1 y_1)$, wo $x_1 y_1$ ein Punct des Gebietes ist. Ist nun $a \leqq x \leqq b$ $a \leqq y \leqq b$ das Quadrat, so reduciren wir durch die Substitution $x = a + \xi(b - a)$, $y = x + \eta(b - a)$ das Gebiet auf das Quadrat $0 \leqq \xi \leqq 1$, $0 \leqq \eta \leqq 1$, woraus folgt, dass die eben angestellte Untersuchung eine in Bezug auf die Wahl des Gebietes hinreichend allgemeine ist. In dem dem Gebiete nicht angehörenden Theile des Quadrates liegt aber die obere oder untere Grenze nicht, wenn $f(x_1 y_1)$ nicht etwa eine dieser Grössen ist.

§ 31. Stetigkeit einer Function einer Veränderlichen in einem Puncte. Dirichlet's Bezeichnungen $f(x+0)$, $f(x-0)$. Eine reelle Function f der reellen Veränderlichen x heisst in einem Puncte stetig, wenn sich eine bestimmte Zahl h so angeben lässt, dass dem absoluten Betrage nach

$$f(x \pm \xi h) - f(x) \leqq \sigma$$

wird, für jeden zwischen Null und Eins gelegenen Werth von ξ, wenn σ beliebig klein vorgegeben ist. Ist diese Voraussetzung nur für die Differenz $f(x + \xi h) - f(x)$ erfüllt, so heisst die Function in diesem Puncte vorwärts stetig, und ist sie für die Differenz $f(x - \xi h) - f(x)$ erfüllt, so heisst sie rückwärts stetig.

Man schreibt häufig, und es ist dies bequemer, für die Stetigkeitsbedingung $f(x \pm h) - f(x) \leqq \sigma$, und man meint dann, dass diese Bedingungen für ein beliebig vorgegebenes σ für ein bestimmtes h erfüllt sein müssen, auch wenn dann für h noch kleinere Werthe gewählt werden. Wenn f den Werth A an der Stelle x_0 und an der Stelle x_1 annimmt, so würde $f(x_0 + h) - f(x) = 0$ also kleiner als jedes σ sein, wenn $h = x_1 - x_0$ gesetzt wird, während daraus auf die Stetigkeit der Function keineswegs geschlossen werden dürfte. $E(x)$ ist ein Beispiel einer überall vorwärts aber nicht schlechthin stetigen Function.

Nähert sich der Werth $f(x+h)$ für abnehmende h einer bestimmten Grenze, so bezeichnet Dirichlet diesen Werth mit $f(x+0)$, nähert sich $f(x-h)$ mit abnehmendem h einer Grenze, so bezeichnet er diesen Werth mit $f(x-0)$. $f(x+0)$, $f(x)$ und $f(x-0)$ können alle drei von einander verschieden sein. Ist jedoch $f(x)$ an der Stelle x eine stetige Function, so fallen die drei Werthe zusammen, denn $f(x+0)$ und $f(x-0)$ können sich nach der Definition der Stetigkeit von $f(x)$ nicht um σ unterscheiden, wenn σ beliebig klein vorgegeben wird, sind also gleich $f(x)$. Daraus, dass $f(x)$ eine wohlbestimmte Function ist, folgt nicht, dass auch $f(x+0)$ bestimmt ist, wie das Beispiel der Function lehrt, die zwischen 0 und 1 für alle rationalen x den Werth 0, für alle irrationalen x den Werth 1 hat.

Eine an jeder Stelle des Intervalles $a\,...\,b$ stetige Function ist völlig bestimmt, wenn sie in jedem noch so kleinen Intervalle unendlich oft, z. B. für alle rationalen Werthe von x gegeben ist. Denn ist x_0 irgend eine Zahl des Intervalles $a\,...\,b$, so lassen sich eine monotone Folge bildende Zahlen $x_1 x_2\,..\,x_n\,..$ angeben, die sich der Zahl x_0 beliebig nähern, und die zugleich der Menge angehören, für die f gegebene Werthe annimmt. Ist nun X_0 eine Grenzzahl der Menge $f(x_1)\ f(x_2)\ ..\ f(x_n)\ ..$, so ist $f(x_0) = X_0$. Denn wäre $f(x_0)$ vor X_0 um σ verschieden, so würden, wie klein man auch die Umgebung von $x_0\ x_0 - \varepsilon\ ..\ x_0 + \eta$ nimmt, unendlich viele solche Zahlen x_n in sie fallen, für die $f(x_n)$ von X_0 um mehr als $= \frac{1}{2}\sigma$ verschieden wäre, was gegen die Voraussetzung der Stetigkeit ist. Hieraus fliesst ganz von selbst, dass zu der Menge $f(x_1)\ f(x_2)\ ..$ nur eine Grenzzahl gehören kann.

Ist $f(x)$ im Punct x_0 stetig, so giebt es eine Umgebung, in der die grösste Schwankung von $f(x)$ kleiner als eine beliebig klein vorgegebene Zahl σ ist.

Summen, Producte und Quotienten stetiger Functionen. Eine Summe (oder Differenz) und ein Product zweier stetigen Functionen ist immer wieder eine stetige Function. Denn ist

$$F(x) = f(x) + \varphi(x), \quad \Phi(x) = f(x) \,.\, \varphi(x), \quad abs\,\eta \leq 1, \quad abs\,\zeta \leq 1, \quad \xi \leq 1,$$

$$abs\,[f(x \pm \xi h) - f(x)] < \sigma, \quad abs\,[\varphi(x \pm h\xi) - \varphi(x)] < \sigma, \quad f(x \pm \xi h) = f(x) + \eta\sigma, \quad \varphi(x \pm \xi h) = \varphi(x) + \zeta\sigma,$$

so ist

$$abs\,[F(x \pm \xi h) - F(x)] < 2\sigma, \quad abs\,[\Phi(x \pm \xi h) - \Phi(x)] = abs\,\sigma[\eta\varphi(x) + \zeta f(x) + \eta\zeta\sigma],$$

und beide Ausdrücke können, da $\varphi(x)$, $f(x)$ nothwendig endliche Grössen sind, durch Annahme hinlänglich kleiner Werthe von h beliebig klein gemacht werden. Ist ferner $\Phi(x) = f(x) : \varphi(x)$, so ist

$$\Phi(x \pm \xi h) - \Phi(x) = \frac{f(x \pm \xi h)}{\varphi(x \pm \xi h)} - \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \sigma \frac{\eta\varphi(x) - \zeta f(x)}{\varphi(x \pm \xi h)\ \varphi(x)}.$$

Dieser Ausdruck kann dem absoluten Betrage nach offenbar allemal dann beliebig klein gemacht werden durch Verminderung der Zahl h, wenn $\varphi(x)$ von Null verschieden ist. Demnach ist der Quotient zweier stetigen Functionen im Allgemeinen nur da stetig, wo der Nenner nicht verschwindet.

Für Functionen zweier Veränderlichen bestehen die gleichen Sätze, die ebenso leicht zu erweisen sind, sobald die Stetigkeit solcher Functionen definirt ist.

§ 32. Stetigkeit in einem Intervalle. Ist eine Function $f(x)$ in dem Intervalle $a\,..\,b$ in jedem Puncte stetig, so sagt man, sie sei in diesem Intervalle stetig. In den Endpuncten ab kommt natürlich nur die Vorwärts- bez. Rückwärtsstetigkeit in Betracht. — Eine zwischen $a\,..\,b$ überall stetige Function hat die Eigenschaft, dass man eine Grösse δ angeben kann, unter welche die Grösse eines Intervalles $x'\,..\,x''$ nicht herab zu sinken braucht, damit die grösste Schwankung in diesem Intervalle kleiner als eine beliebig klein vorgegebene Zahl σ werde, wo das Intervall $x'\,..\,x''$ zwischen ab auch liegen mag, oder was auf dasselbe hinauskommt, das Intervall $a\,..\,b$ lässt sich in so viele gleiche Theile zerlegen, dass in jedem Theilintervalle die grösste Schwankung kleiner als σ wird.

Beweis. Vom Puncte a aus, — a sei der Bequemlichkeit halber kleiner als b — giebt es ein solches Intervall δ_1, dass die grösste Schwankung darin kleiner als $\frac{1}{2}\sigma$ ist, wenn σ beliebig klein vorgegeben wird, an dieses anstossend giebt es, weil nach der Voraussetzung die Function in jedem Puncte stetig ist, ein Intervall δ_2, in welchem wiederum die grösste Schwankung kleiner als $\frac{1}{2}\sigma$ ist, dann ein Intervall δ_3, δ_4 u. s. w. Die Zahlen a, $a + \delta_1$, $a + \delta_1 + \delta_2$, $a + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$, .. bilden eine zunehmende Folge, deren Terme kleiner als b sind, und deren letzter, wenn ihre Anzahl endlich ist, b selbst ist. In diesem Falle giebt es eine bestimmte Zahl $(b - a) : N = \delta$, die kleiner als die Zahlen δ_1, δ_2, .. δ_n ist, wenn N eine ganze Zahl ist. Theilen wir das Intervall in N Theile, so wird jedes Intervall von der Grösse δ entweder ganz in eins der Intervalle δ_1, δ_2, .. δ_n hineinfallen, oder einen Theil von zwei benachbarten dieser Intervalle bilden. In jedem dieser beiden Fälle ist die grösste Schwankung der Function in diesem Intervalle kleiner als σ, und die obige Forderung ist erfüllt. — Bilden aber die Zahlen a, $a + \delta_1$, $a + \delta_1 + \delta_2$, $a + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$, .. eine unendliche Folge, so nähern sich ihre Terme einer bestimmten Zahl $c \leq b$, und es müssen daher die Zahlen δ_1, δ_2, .. δ_n, .. von einer bestimmten ab unter jede noch so klein vorgegebene Zahl ε herabsinken. Die Function ist der Voraussetzung nach im Puncte c stetig, und es giebt deshalb eine bestimmte Zahl ε von der

Beschaffenheit, dass $f(x - \xi\varepsilon) - f(x)$ dem absoluten Betrage nach kleiner als $\frac{1}{2}\sigma$ ist, für jede Zahl ξ zwischen 0 und 1. Die Zahlenfolge a, $a + \delta_1$, $a + \delta_1 + \delta_2, \ldots$ muss nun mit einem bestimmten Terme, etwa mit $a + \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n$ den Werth $c - \varepsilon$ überschreiten, weil sie sich c nähert. Hieraus folgt, dass die erste Annahme, nach dem Intervall δ_n müsse man unendlich viel kleinere und kleinere Intervalle folgen lassen, damit darin die Schwankungen kleiner als $\frac{1}{2}\sigma$ seien, eine irrthümliche war, denn dieser Bedingung genügt das eine Intervall δ_{n+1} von $a + \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n$ bis c. Es muss demnach immer der erste Fall eintreten, es muss die Anzahl der Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$, endlich sein.

Dieser Lehrsatz setzt voraus, dass die Function im Innern des Intervalles in jedem Puncte sowohl rückwärts als vorwärts stetig sei, im andern Falle ist er falsch, wie das Beispiel der früher definirten Function $E(x)$ illustrirt.

Mit diesem Satze ist ein anderer nahe verwandt, der in der Integralrechnung von Wichtigkeit ist. Existirt in einem Intervall $a \ldots b$ überall $f(x + 0)$ und $f(x - 0)$, so ist die Anzahl der Stellen, in denen die Differenz $f(x) - f(x \pm 0) > \tau$ oder $f(x + 0) - f(x - 0) > \tau$ ist, wie klein auch τ sein mag, eine (natürlich durch τ) bestimmte endliche. Denn ist die Anzahl der Stellen $x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_n \ldots$, an denen $f(x + 0) - f(x - 0) > \tau$ ist, unendlich gross, so giebt es unter diesen Stellen eine Grenzstelle x_0. Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, dürfen wir annehmen, dass die angeschriebenen Zahlen $x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots$ eine monotone reguläre Folge bilden, zu der die Zahl x_0 gehört. Ist nun $f(x_n + 0) - f(x_n - 0)$ für jedes n grösser als τ, so lassen sich die Zahlen $x'_1\, x'_2 \ldots x'_n \ldots$, $x''_1\, x''_2\, x''_3 \ldots x''_n$ so bestimmen, dass $f(x'_n)$ von $f(x'_n + 0)$, $f(x''_n)$ von $f(x''_n - 0)$ für jedes n beliebig wenig verschieden ist. Die beiden Folgen

$$[f(x'_1)\, f(x'_2) \ldots f(x'_n) \ldots], \quad [fx''_1)\, f(x''_2) \ldots\ldots f(x''_n) \ldots]$$

müssen, wenn $(f(x_0 \pm 0)$ existiren soll, reguläre sein und dieselbe Zahl definiren. Dies ist aber nicht möglich, wenn $\lim f(x'_n) - f(x''_n) \geqq \tau$ ist, also können, wenn $f(x \pm 0)$ überall vorhanden sein soll, nicht unendlich viele Stellen vorkommen, in denen $f(x + 0)$ von $f(x - 0)$ um mehr als τ verschieden ist. Ebenso schliesst man, dass nicht unendlich viele der Differenzen $f(x) - f(x \pm 0) > \tau$ sein können.

Dass man, wenn $f(x \pm 0)$ überall existirt, und wenn $f(x \pm 0) - f(x)$ niemals grösser als τ ist, das Intervall $a \ldots b$ in so viele Theile zerlegen kann, dass in keinem die grösste Schwankung grösser als $2\tau + \sigma$ ist, wie klein auch σ vorgegeben sei, wird ganz wie oben der fundamentale Satz über Intervallstetigkeit erwiesen.

§ 33. Stetigkeit einer Function zweier Veränderlichen. Eine reelle Function von zwei reellen Veränderlichen $f(x, y)$ ist stetig im Puncte xy, wenn eine Grösse h angegeben werden kann, so dass absolut genommen

$$f(x + \xi h,\ y + \eta h) - f(x, y) < \sigma$$

wird, wie klein auch σ vorgegeben sein mag, während ξ und η jedwede Werthe annehmen können, welche der Bedingung

$$\xi\xi + \eta\eta \leqq 1$$

genügen. Nimmt man die graphische Darstellung zu Hilfe, so ist $f(x, y)$ im Puncte xy stetig, wenn sich um den Punct xy ein kleiner Kreis von angebbarem Radius so zeichnen lässt, dass die Werthe von $f(x, y)$ im Innern und auf dem Rande des Kreises sich von dem Werthe im Mittelpuncte um weniger unterscheiden, als die beliebig klein vorgegebene Zahl σ und die grösste Schwankung kleiner als 2σ ist. — Statt des Kreises kann auch jede andere Begrenzung, z. B. ein Quadrat, eine Ellipse u. s. w. eintreten, sofern sich in dieselbe ein Kreis mit dem Centrum xy einschreiben lässt, weil dann von diesem Kreise um so mehr gilt, was von jener Begrenzung gilt. Wäre die Begrenzung ein Quadrat, so würde die Bedingung analytisch ausgedrückt nur so modificirt werden müssen, dass $\xi\xi \leqq 1$, $\eta\eta \leqq 1$ wäre.

Man verfällt leicht in den Fehler, (worauf E. Heine aufmerksam gemacht hat), eine Function im Puncte xy für stetig zu halten, wenn $f(x+\xi h, y) - f(x, y)$ sowohl, als auch $f(x, y+\eta h) - f(x, y)$ dem absoluten Betrage nach durch hinlänglich kleine h beliebig klein gemacht werden können. Es genügt nicht einmal zur Stetigkeit, dass die Function sich ihrem Werthe im Puncte $x_0 y_0$ stetig nähere, wenn man den Punct xy in jeder beliebigen Richtung dieser Stelle $x_0 y_0$ nähert, wie folgendes Beispiel zeigt. Man schlage um den Punct $x = 0$, $y = 0$ mit dem Radius 1 einen Kreis. Auf der Peripherie dieses Kreises nehmen wir eine Function an, die für $x = -1$, $y = 0$ den Werth 0 hat, und deren Werthe stetig sich ändern, sowohl wenn man von jener Stelle aus rechts um den Punct 0 herum, als auch wenn man links um den Punct 0 herum sich auf der Peripherie des Kreises der Stelle $x = 1$, $y = 0$ nähert. Bei der ersten Art der Annäherung aber (rechts herum) sollen die Werthe stetig abnehmen und über alle Grenzen in negativer Richtung hinausgehen; bei der zweiten Art der Annäherung sollen sie positiv über alle Grenzen wachsen. Für $x = 1$, $y = 0$ aber soll die Function den Werth 0 haben. Nehmen wir nun an, dass die Function, die wir mit $\varphi(x, y)$ bezeichnen, für alle Puncte im Innern des Kreises allemal denselben Werth besitzt, wenn $arc\,(x, y)$ einen festen Werth hat und für $x = 0$, $y = 0$ gleich 0 sei, so ist sie überall im Kreise wohlbestimmt. Die Function $f(x, y) = (xx + yy) \,.\, \varphi(x, y)$ nähert sich nun auf jedem bestimmbaren Radius des Kreises dem Werthe 0 stetig, ist aber keineswegs im Puncte $x = 0$, $y = 0$ stetig. Denn zieht man einen beliebig kleinen Kreis mit dem Radius δ, so giebt es auf diesem Kreise, wie klein auch δ sein mag, Werthe der Function $f(x, y)$, welche jede beliebig gross vorgegebene Zahl M dem absoluten Betrage nach übersteigen.

§ 34. **Stetigkeit einer Function zweier Veränderlichen in einem Gebiete.** Zerlegt man die xy-Ebene durch zwei Schaaren gerader Linien, die der x- bez. y-Achse parallel sind, in kleine Quadrate, deren Seiten die Länge $1:n$ haben mögen, so wird ein Theil dieser Quadrate ins Innere des Gebietes T fallen, in dem $f(x, y)$ gegeben ist, ein anderer Theil wird durch die Begrenzung des Gebietes in Stücke zerlegt werden. Die Function $f(x, y)$ heisst nun im Gebiete T stetig, wenn die Zahl n so gross, oder die Quadrate so klein gemacht werden können, dass die grösste Schwankung der Function f in jedem derselben oder (am Rande von T) wenigstens in den Theilen derselben, die T angehören, — dass die grösste Schwankung kleiner als σ wird, wie klein auch σ vorgegeben sein mag.

Lehrsatz. *Ist die Function $f(x, y)$ in einem Gebiete T in jedem Puncte stetig, so ist sie in T stetig.*[1])

Ist σ eine beliebig klein vorgegebene Zahl, und construiren wir ein Quadrat, dessen Mittelpunct der Punct xy ist, dessen Seiten die Länge 2δ haben und der x- bez. y-Achse parallel sind, und ist δ so klein gewählt, dass die grösste Schwankung der Function $f(x, y)$ für das durch das Innere und den Rand des Quadrates bestimmte Gebiet kleiner als $\frac{1}{2}\sigma$ ist, so wollen wir in diesem Paragraphen ein solches Quadrat mit $\square_\delta$ bezeichnen, und wenn die Angabe des Mittelpunctes nöthig wird, mit $\square_\delta(x, y)$. Fällt von einem solchen Quadrate nur ein Theil in das Gebiet T, in dem f gegeben ist, so wird die grösste Schwankung nur für diesen Theil bestimmt. Fällt es ganz aus T heraus, oder hat es mit T nur einen Punct gemein, so wird die grösste Schwankung gleich Null angenommen.

Da f im Puncte xy stetig ist, so lässt sich um diesen Punct ein Quadrat $\square_\delta$ so construiren, dass die Werthe von f am Rande und im Innern desselben vom Werthe im Mittelpuncte um weniger als $\frac{1}{4}\sigma$ verschieden sind, woraus dann folgt, dass die grösste Schwankung kleiner als $\frac{1}{2}\sigma$ ist, und dass also um jeden Punct xy, wenn f in jedem Puncte stetig ist, ein Quadrat $\square_\delta$ von der verlangten Eigenschaft construirt werden kann.

---

[1]) Der von mir in der „Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale" Seite 32 § 49 gegebene Beweis dieses Satzes enthält einen Zirkel.

Wird ein Parallelstreifen von den Linien $y = y_0 + \delta, y = y_0 - \delta$ begrenzt, und ist jedes Quadrat, welches aus diesem Streifen durch zwei parallele Gerade $x = x_0 - \delta$, $x = x_0 + \delta$ herausgeschnitten werden kann, was auch x_0 sei, ein Quadrat $\square_\delta$, so bezeichnen wir einen solchen Streifen mit $=_\delta$ und wenn seine Mitte (die Linie $y = y_0$) angegeben werden muss mit $=_\delta(y_0)$.

Nun ziehen wir der x-Achse parallel eine Linie $y = y_0$, welche irgendwo, etwa für $x = x_0$ in das Gebiet T, welches als endlich vorausgesetzt wird, eintritt. So giebt es ein Quadrat $\square_{\delta_1}(x_0, y_0)$ und es ist δ_1 eine Zahl, die nicht unter jede noch so kleine Zahl herabsinkt, die also von Null verschieden ist. Ebenso giebt es, weil f als stetig vorausgesetzt ist, ein Quadrat $\square_{\delta_2}(x_1, y_0)$, wenn $x_1 = x_0 + \delta$ ist. Ebenso ein Quadrat $\square_{\delta_3}(x_2, y_0)$, ein Quadrat $\square_{\delta_4}(x_3, y_0)$ u. s. w., wenn $x_2 = x_1 + \delta_2$, $x_3 = x_2 + \delta_3$ ist u. s. w. Tritt die Linie $y = y_0$ bei $x = x'$ (zum letzten Male, wenn sie mehrere Male ein- und austritt) aus T heraus, so mag zunächst $x_n \geqq x'$ sein, für ein bestimmtes (endliches) n. Alsdann giebt es unter den Zahlen $\delta_1, \delta_2, .. \delta_n$, eine kleinste, etwa δ, und der Streifen zwischen $y = y_0 + \delta$ und $y = y_0 - \delta$ ist ein Streifen $=_\delta$.

Es könnte aber sein, dass die Zahlen $x_1, x_2, .. x_n, ..$ über eine bestimmte endliche Zahl $x'' \leqq x'$ nicht hinausgingen, wie weit man auch die Construction der Quadrate fortsetzt, was nur dann geschehen kann, wenn die Zahlen $\delta_1, \delta_2, .. \delta_n, ..$ mit wachsendem n unter jeden beliebigen Grad von Kleinheit herabsinken. Es mögen sich also die Zahlen $x_0, x_1, x_2, ..$ der Zahl $x'' \leqq x'$ nähern, so dass x'' die Grenze derselben ist. Zum Puncte $x'' y_0$ gehört ein Quadrat $\square_\varepsilon$, wie zu jedem Puncte, weil f stetig ist. Da sich die Zahlen $x_1, x_2, .. x_n, ..$ der Zahl x'' unaufhörlich nähern, so geht eine bestimmte unter ihnen über $x'' - \frac{1}{2}\varepsilon$ hinaus, etwa x_m. Zu diesem Puncte x_m, y_0 gehört aber ein Quadrat $\square_\delta$, dessen δ mindestens $\frac{1}{2}\varepsilon$ ist, weil dieses ganz in das Quadrat $\square_\varepsilon(x'' y_0)$ hineinfällt, und es liegt der Punct $x'' y_0$ im Innern oder am Rande jenes Quadrates $\square_\delta$. Wenn demnach die vorher angenommene Construction nach x_m noch unendlich viel Puncte (oder Quadrate) einschaltete, um zu x'' zu gelangen, so that sie etwas unnöthiges, denn die Zahl δ_{m+1} kann gleich $\frac{1}{2}\varepsilon$ genommen werden, und dann ist $x_{m+1} = x''$. Man gelangt also immer durch eine e n d l i c h e Anzahl von Puncten $x_0, x_1, .. x_m$ zum Werthe x'', und also zum Werthe x', und es giebt daher stets einen Streifen $=_\delta(y_0)$.

Ebenso giebt es Streifen $=_{\delta'}(y_1)$, $=_{\delta''}(y_2)$, $=_{\delta'''}(y_3)$, .., wenn $y_1 = y_0 + \delta$, $y_2 = y_1 + \delta'$, $y_3 = y_2 + \delta''$, .. ist. Giebt es in T keinen Werth von y, der grösser als y' wäre, so kann es sein, dass die Zahlen $y_1, y_2, .. y_n, ..$ mit einer bestimmten etwa mit y_m über y' hinausgehen oder diese Zahl erreichen. Dann giebt es eine Zahl h, welche kleiner als $\delta, \delta' \delta'', .. \delta^{(m)}$ ist, und wenn wir in einem beliebigen Puncte xy des Theiles von T, der zwischen y_0 und y' liegt, ein Quadrat $\square_h$ construiren, so ist die grösste Schwankung darin, weil es aus Theilen von höchstens zwei benachbarten Streifen $=_{\delta(\nu)}$, $=_{\delta(\nu+1)}$ bestehen kann, und aus höchstens vier benachbarten Quadraten, kleiner als σ und die Function f ist demnach in diesem Theile von T eine stetige Function.

Nun könnten aber die Zahlen $\delta, \delta', \delta''$ .. kleiner und kleiner werden, und es könnte y_1, y_2, .. y_n, .. sich einer Zahl $y'' \leqq y'$ unaufhörlich nähern, ohne sie zu erreichen. Dies ist nicht möglich. Da es nämlich zu der Linie $y = y''$ einen Streifen $=_\varepsilon$ giebt, und die Zahlen $y_1, y_2, .. y_n, ..$ mit einer bestimmten etwa y_m die Zahl $y'' - \frac{1}{2}\varepsilon$ überschreiten, so lässt sich in y_m ein Streifen $=_{\frac{1}{2}\varepsilon}$ construiren, der mindestens bis zu y'' reicht, und (ähnlich wie vorhin bei den Quadraten) die Einschaltung unendlich vieler Zahlen $y_{m+1}, y_{m+2}, ..$ ist überflüssig. Die Function f ist demnach jedes Mal in dem Theile von T zwischen y_0 und y', und nach analoger Schlussweise in dem Theile von T, der zwischen y_0 und $y_{,}$, wenn y in T nicht unter $y_{,}$ herabsinken kann, liegt, eine stetige Function, wenn sie in jedem Puncte stetig ist, w. z. b. w.

Erstreckt sich das Gebiet T ins Unendliche, so ist f im Innern von T stetig, wenn diese Function in jedem endlichen Theile von T stetig ist.

§ 35. Maxima und Minima. Eine in dem Intervall von a bis b stetige Function besitzt mindestens ein Maximum und mindestens ein Minimum, d. h. es giebt mindestens einen Werth von x, für welchen sie ihre obere Grenze erreicht, und einen Werth von x, für welchen sie ihre untere Grenze erreicht.

Nach § 30 giebt es mindestens eine Stelle x_0, in deren Umgebung, wie klein sie auch sei, $f(x)$ dem Werthe G beliebig nahe kommt. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit kann deshalb $f(x_0)$ von G nicht verschieden sein. Der Beweis für die untere Grenze ist ebenso zu führen.

Auch für eine Function von zwei Veränderlichen xy gilt derselbe Satz. Denn es giebt eine Stelle $x_0 y_0$, in deren Umgebung, wie klein sie auch sei, unendlich viel Werthe von f sich vorfinden, die von G bez. von g sich beliebig wenig unterscheiden. Die Function f kann deshalb nicht stetig sein, wenn nicht $f(x_0 y_0) = G$ bez. g ist.

§ 36. Mittelwerthsatz. Eine zwischen a und b stetige Function nimmt jeden Mittelwerth M zwischen ihrer obern Grenze G und ihrer untern Grenze g mindestens ein Mal wirklich an.

Theilt man das Intervall ab in zwei Theile, so ist die obere und untere Grenze von $f(x) - M$ entweder in dem einen oder in dem andern Intervalle von entgegengesetztem Zeichen, oder es ist eine der beiden Grenzen Null, in welchem Falle dieser Werth nach dem Vorigen für einen bestimmten Werth von x von der stetigen Function $f(x) - M$ angenommen wird. Wäre nämlich die obere und untere Grenze in einem Theile positiv, in dem andern negativ, so würde $f(x) - M$ an der Theilungsstelle, welche zu beiden Intervallen gehört, sowohl positiv als auch negativ sein, was gegen die Voraussetzung der Eindeutigkeit ist.

Das Intervall, in welchem obere und untere Grenze von $f - M$ entgegengesetzte Zeichen haben, theilen wir in zwei etwa einander gleiche Theilintervalle und suchen dasjenige, in welchem die obere und untere Grenze entgegengesetzte Zeichen haben u. s. w. Dies Verfahren findet ein Ende, wenn einmal eine obere oder untere Grenze Null ist, in welchem Falle der Werth Null von der Function $f(x) - M$ wirklich einmal angenommen wird. Das Verfahren braucht aber auch zu keinem Ende zu führen, sondern kann ins Unendliche fortgehen. Beginnt nun das zuerst bestimmte Intervall bei x_1 (wo x_1 auch gleich a sein kann) und endet bei x'_1, das zweite bei x_2 und endet bei x'_2 u. s. w. $x_3, x_4, \ldots x'_3, x'_4, \ldots$ so bilden die Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine niemals abnehmende Folge und $x'_1, x'_2, x'_3, \ldots$ eine niemals zunehmende Folge, zu denen, da ihre Terme endlich sind, bestimmte Zahlen x bez. x' gehören. Da aber die Terme x_n und x'_n sich beliebig wenig unterscheiden, wenn n gross genug genommen wird, so muss $x = x'$ sein. Für diese Zahl x ist $f(x) - M = 0$ oder $f(x) = M$. Denn zwischen x_n und x'_n sind die obere und untere Grenze von $f(x) - M$ von entgegengesetzten Zeichen, können aber, weil dies Intervall mit wachsendem n beliebig klein wird, sich wegen der vorausgesetzten Stetigkeit nicht um mehr als σ unterscheiden, wenn σ beliebig klein vorgegeben wird, also können sich die Werthe auch von Null nicht um mehr als σ unterscheiden. An der Stelle x, die immer zwischen x_n und x'_n liegt, wie gross auch n genommen wird, ist $f(x) - M$ von Null um weniger als jede noch so kleine Zahl verschieden, ist also Null.

Es giebt, wenn $f(x)$ stetig und nicht Null ist, stets eine Umgebung von x, in der $f(x)$ sein Zeichen nicht wechselt.

§ 37. Functionen einer complexen Veränderlichen. Ist eine complexe Zahl $z = x + yi$ gegeben, so ist sowohl der reelle Theil x, als auch der imaginäre Theil y dieser Zahl gegeben. Deshalb kann jede Function $f(x, y)$ von x und y als Function der complexen Veränderlichen z angesehen werden, indem zu jedem Werthe von z ein bestimmter Werth von f gehört. Eine solche Definition einer Function der complexen Veränderlichen z erweist sich jedoch nicht als vortheilhaft. Vielmehr werden von den Mathematikern nur solche Functionen von x und y als Functionen von z angesehen, deren Werth aus der Zahl z mittels der vier Species zu erhalten ist. Sollten solche Operationen unendlich oft vorzunehmen sein, so muss man die Definition noch weiter beschränken. Wir verstehen unter Functionen einer complexen Veränderlichen nur Functionen, die durch Potenzreihen, die wir in einem spätern Abschnitt behandeln, dargestellt werden. Manche häufiger vorkommende Potenzreihen haben bestimmte Bezeichnungen erhalten. Bei Functionen, die durch die vier Species in endlicher Weise darstellbar sind, bei den rationalen Functionen, lässt sich leicht nachweisen, dass sie durch Potenzreihen dargestellt werden können.

Die Functionen einer complexen Veränderlichen sind complexe Functionen, sie sind stetig, wenn der reelle Theil sowohl als der imaginäre stetige Functionen von x und y sind. Ist ζ jede Zahl, deren absoluter Betrag kleiner oder gleich Eins ist, ist also $\zeta = \xi + \eta i$, $\xi\xi + \eta\eta \leqq 1$, so kann die Bedingung für die Stetigkeit einer Function der complexen Veränderlichen z im Puncte z dahin ausgesprochen werden, dass für jedes noch so kleine σ eine Zahl h gefunden werden könne, für welche

$$abs\,[f(z+\zeta h) - f(z)] \leqq \sigma$$

wird. Ist nämlich der reelle Theil von f gleich $\varphi(x, y)$, der imaginäre $i\psi(x, y)$, so kann der Ausdruck

$$abs\,[f(z+\zeta h) - f(z)] =$$
$$\sqrt{[\varphi(x+\xi h, y+\eta h)-\varphi(x,y)][\varphi(x+\xi h, y+\eta h)-\varphi(x,y)]+[\psi(x+\xi h, y+\eta h)-\psi(x,y)][\psi(x+\xi h, y+\eta h)-\psi(x,y)]}$$

nur dann beliebig klein sein, wenn es die Ausdrücke

$$\varphi(x+\xi h,\ y+\eta h) - \varphi(x, y), \quad \psi(x+\xi h,\ y+\eta h) - \psi(x y)$$

sind. Der absolute Betrag von $f(z)$, also die Function $abs\,f(z)$ ist dann ebenfalls eine stetige Function von x und y.

Die ganze Potenz, der binomische Lehrsatz, die ganzen und die rationalen Functionen.

§ 38. Die ganze Potenz. Das Product von n einander gleichen Zahlen $z.z.z\ldots z$ wird mit z^n bezeichnet, die n^{te} Potenz von z genannt und z hoch n gelesen. Die Zahl n heisst Exponent. Für positive ganze n und m ist $z^n . z^m = z^{n+m}$. Die ganze Potenz — später werden für n allgemeine Zahlen eingeführt — ist eine überall eindeutige wohlbestimmte Function von z. Eine Summe solcher Potenzen, die noch mit beliebigen Zahlen (Coëfficienten) multiplicirt sein können, und zu denen noch eine beliebige Zahl, eine Constante, hinzugefügt werden kann, die also die Form hat

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots + A_m z^m + \ldots + A_n z^n$$

heisst eine ganze, genauer ganze rationale Function von z, sie ist in jedem noch so grossem Gebiete eine wohl bestimmte Function von z. Von den Zahlen $A_0\ A_1\ A_2 \ldots A_n$ können beliebig viele Null sein, nur dürfen sie nicht alle verschwinden. Der höchste vorkommende Exponent heisst der Grad der Function. Ist $n > m$, so findet die Gleichung statt

$$z^n : z^m = z^{n-m}.$$

Lässt man dieselbe auch für $n \leqq m$ bestehen, so findet man

$$z^0 = 1 \quad z^{-n} = 1 : z^n,$$

wodurch die ganzen negativen Potenzen eingeführt werden. Das Gesetz $z^n : z^m = z^{n-m}$ bleibt, wie man leicht sieht, in Kraft, wenn man für n und m beliebige ganze positive oder negative Zahlen oder Null setzt. Die 0^{te} Potenz ist eine Constante, Eins, die als eine stetige wohlbestimmte Function von z zu gelten hat. Die ganze negative Potenz von z ist überall eine wohlbestimmte Function von z, ausgenommen für $z = 0$. Setzt man darin für z Zahlen, deren absoluter Betrag abnimmt, so wächst der absolute Betrag von z^{-n} über alle Grenzen, man sagt deshalb, diese Function werde im Puncte Null unendlich. Die Ausdrucksweise, die Function z^{-n} ist im Puncte Null unendlich, ist im Grunde nicht correct, weil ∞ keine Zahl ist; diese Redeweise läuft jedoch zuweilen unter und muss dann eben so verstanden werden, dass der absolute Betrag der Function über alle Grenzen wächst, wenn sich z dem Puncte Null unbegrenzt nähert. Die Gleichung $z^n : z^m = z^{n-m}$ findet, streng zu reden, im Puncte Null nicht statt. Bei stetigen Functionen ist man jedoch gewöhnt, an Stellen, wo dieselben genau genommen unbestimmt sind, den an die Umgebung sich stetig anschliessenden Werth zu setzen, wenn ein solcher vorhanden ist, so dass in der Regel die Division $z^n : z^m$, wenn $n \geq m$ ist, ohne Weiteres auch für $z = 0$ als giltig angenommen wird. Streng genommen müsste der Quotient für $z = 0$ besonders definirt werden, selbst wenn $n > m > 0$ ist.

Ist $abs\, a < abs\, b$, so ist $abs\, a^n = (abs\, a)^n < abs\, b^n$, wenn n eine ganze positive Zahl ist und $abs\, a^n > abs\, b^n$, wenn n eine ganze negative Zahl ist.

Die Functionalgleichung $(z \,.\, t)^n = z^n \,.\, t^n$ gilt für jedes t und z, ausgenommen etwa für z oder t gleich Null, wenn n negativ ist. Setzt man $z^n = f(z)$, so schreibt sich die Functionalgleichung mit Unterdrückung des Malzeichens $f(zt) = f(z) f(t)$.

§ 39. Stetigkeit der ganzen positiven und negativen Potenzen. Die ganze Potenz ist eine stetige Function. Es besteht nämlich für ganze positive n die Identität

$$t^n - z^n = (t^{n-1} + t^{n-2}z + t^{n-3}z^2 + \ldots + t^{n-m}z^{m-1} + \ldots + z^{n-1})\ (t - z).$$

Setzt man $z + \zeta h$ für t, $abs\, \zeta \leq 1$, h positiv, so folgt

$$(z + \zeta h)^n - z^n = \zeta h\, [(z + \zeta h)^{n-1} + (z + \zeta h)^{n-2} z + (z + \zeta h)^{n-3} z^2 + \ldots + z^{n-1}].$$

Ist nun $h + abs\, z < M$, so ist der absolute Betrag der letzten Klammer kleiner als nM^{n-1}, welche Zahl von h unabhängig gedacht werden kann, wenn $h < 1$ ist. Es ist demnach $abs\, [(z + \zeta h)^n - z^n] < hnM^{n-1}$, und es kann diese Grösse dadurch beliebig klein gemacht werden, dass h klein genug genommen wird, das heisst, die Potenz ist eine stetige Function ihres Argumentes.

Nach den Principien des § 31 folgt sogleich, dass auch jede ganze Function von z überall eine stetige Function der complexen Veränderlichen z sei, und da der Quotient stetiger Functionen auch stetig ist bis auf die Stellen, in denen der Nenner verschwindet, so muss auch $1 : z^n = z^{-n}$ überall eine stetige Function ihres Argumentes z sein, ausgenommen an der Stelle $z = 0$. Der Punct $z = 0$ ist eine singuläre Stelle für die negative Potenz. Diese Singularität ist die einfachste, die man kennt, die Function ist bis in jede beliebige Nähe der Stelle wohlbestimmt (eindeutig), und wie man sich auch der Stelle nähern mag, ihr absoluter Betrag wächst über alle Grenzen. Diese Singularität wird deshalb auch wohl eine ausserwesentliche, die Stelle ein Pol, und zwar ein n-facher Pol genannt. Für die Function $f(z) = (z - a)^{-n}$, wenn n eine positive ganze Zahl ist, ist a der Pol oder die ausserwesentlich singuläre Stelle. Dass $(z - a)^n$ für positive n überall stetig ist, erfordert keine andern Betrachtungen als die obigen.

§ 40. Grad einer Function, Wurzeln einer Gleichung. Den grössten Exponenten, der in einer ganzen Function vorkommt, oder den Exponenten der höchsten Potenz nennt man, wie schon gesagt, den Grad der Function. Einen Werth von z, für welchen die Function verschwindet, nennt man eine Wurzel dieser Function, oder richtiger eine Wurzel der algebraischen Gleichung, welche entsteht, wenn man diese Function der Null gleich setzt. Ob immer solche Wurzeln existiren, ist eine erst später zu entscheidende Frage. Ist die Gleichung speciell von der Form $z^n - a = 0$, eine binomische Gleichung, so schreibt man für die Lösung $z = \sqrt[n]{a}$ oder $a^{1:n}$. Ist a eine positive Zahl, so ist immer eine und nur eine positiv reelle Wurzel vorhanden. — Für reelle Werthe von z nämlich ist die Function $z^n - a$ reell, für $z = 0$ ist sie gleich $-a$, also negativ, und für $z = 1$, $a < 1$ ist sie positiv; ist aber $a > 1$, so ist sie für $z = a$ positiv, da sie aber stetig ist, und ihre untere Grenze zwischen 0 und 1, bez. zwischen 0 und a, negativ, ihre obere positiv ist, so muss sie den Werth Null nach § 36 mindestens einmal annehmen. Wäre $a = 1$, so wäre $z^n - 1$ für $z = 1$ Null. Es giebt aber auch nur einen positiven reellen Werth von z, welcher gleich $\sqrt[n]{a}$ ist. Denn wären z und t zwei solche Werthe und wäre $z < t$, so müsste auch $z^n < t^n$ sein, es könnten also nicht die letzten Zahlen beide gleich a sein.

Ist $z = \sqrt[n]{a}$, $t = \sqrt[n]{b}$, und sind a b $\sqrt[n]{a}$ $\sqrt[n]{b}$ positiv reelle Zahlen, so folgt aus der Gleichung

$$z^n \,.\, t^n = (z\,.\,t)^n = ab, \quad zt = \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}.$$

Ist $a \gtreqless b$, so ist auch $\sqrt[n]{a} \gtreqless \sqrt[n]{b}$, wo sich die Zeichen $>$, $<$ entsprechen.

§ 41. Höchste Zahl der Wurzeln einer Gleichung. Wenn auch hier noch nicht festgestellt zu werden vermag, wie viele Wurzeln eine Gleichung vom n^{ten} Grade haben muss, so lässt sich doch leicht zeigen, dass sie nicht mehr als n Wurzeln, n Lösungen besitzen kann.

Wir benutzten schon oben einmal die Identität

$$(z^n - t^n) = (z - t)\,.\,\varphi_{n-1}(z) = (z - t)\,(z^{n-1} + z^{n-2}t + z^{n-3}t^2 + \ldots + t^{n-1}).$$

$\varphi_{n-1}(z)$ ist hierbei eine ganze Function von z vom $(n-1)^{ten}$ Grade und der Coëfficient der höchsten Potenz, also der Coëfficient von z^{n-1} ist Eins. Nun sei

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_n z^n,$$

und es sei $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = 0$, $f(z_3) = 0$, .., $f(z_n) = 0$, und die Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ seien von einander verschieden. Dann ist

$$f(z) = f(z) - f(z_1) = (z - z_1)\,[A_1 + A_2\varphi_1(z) + A_3\varphi_2(z) \ldots + A_n\varphi_{n-1}(z)] = (z - z_1)\,f_{n-1}(z),$$

wo $f_{n-1}(z)$ die Eigenschaft hat, eine ganze Function vom Grade $n - 1$ zu sein, in der die höchste Potenz, also z^{n-1} mit A_n multiplicirt ist. Da nun weiter $f(z_2) = (z_2 - z_1)\,f_{n-1}(z_2) = 0$ ist, und $z_2 - z_1$ von Null verschieden ist, so muss $f_{n-1}(z_2)$ Null sein. (Diese Nothwendigkeit würde nicht bestehen, wenn wir für z nicht die gewöhnlichen Zahlen, sondern andere etwa die Quaternionen setzten.) Man wird also die ganze Function $f_{n-1}(z)$ in die Form $(z - z_2)\,f_{n-2}(z)$ bringen können, worin $f_{n-2}(z)$ eine ganze Function vom Grade $n - 2$ ist, und z^{n-2} wieder den Coëfficienten A_n hat. Indem man ebenso den Factor $z - z_3$ aus $f_{n-3}(z)$ aussondert, und dasselbe Verfahren n-mal anwendet, wodurch man auf eine ganze Function $f_0(z)$ gelangt, welche vom Grade 0, und mithin gleich A_n ist, findet man schliesslich

$$f(z) = (z - z_1)\,(z - z_2)\,(z - z_3) \ldots (z - z_n)\,.\,A_n.$$

Gäbe es nun noch einen Werth z_{n+1}, für welchen $f(z)$ verschwände, so müsste, da $z_{n+1} - z_1$, $z_{n+1} - z_2$, .. $z_{n+1} - z_n$ nicht verschwinden, A_n Null sein. Wendet man dieselbe Schlussweise auf die Function $A_0 + A_1 z + \ldots + A_{n-1}z^{n-1}$ an, so folgt ebenso, dass A_{n-1} Null sein müsste u. s. w. Es kann also $f(z)$ nur dann für $n + 1$ Werthe verschwinden, wenn in dieser Function alle Coëfficienten verschwinden, wenn sie für jeden Werth von z verschwindet, wenn sie identisch Null ist.

Dieser Satz wird sich als fruchtbar erweisen. Es geschieht nämlich zuweilen, dass man einer Function, obschon sie nicht geordnet ist, in der vielmehr noch verschiedene Producte und Summen von Producten enthalten sind, ansieht, dass sie eine ganze Function von z ist, deren höchster Grad nicht grösser als n ist. Findet sich nun, dass diese Function für $n + 1$ Werthe von z verschwindet, so braucht man nicht erst weiter zu ordnen, sondern man weiss im Voraus, dass sie identisch verschwindet, dass beim Ordnen nach Potenzen von z alles sich fortheben muss, dass die Coëfficienten aller Potenzen Null sein müssen.

Von diesem Satze lassen sich interessante geometrische Anwendungen machen. Projicirt man die Puncte eines Kegelschnittes K von einem seiner Puncte auf eine Gerade, die wir als x-Achse bezeichnen wollen, so bestimmen die Abscissen x die zweiten Schnittpuncte der Projectionsstrahlen auf K eindeutig, durch die Zahl x ist ein Punct auf K eindeutig bestimmt, man kann x die Coordinate des Punctes auf K nennen. Ziehen wir von einem Puncte x auf K eine Tangente an einen anderen Kegelschnitt Γ, und nennen den zweiten Schnittpunct derselben mit K x_1, so besteht zwischen x und x_1 eine (in $x\,x_1$ symmetrische) quadratische Gleichung, weil es zwei Tangenten giebt. Ziehen wir nun wieder von x_1 eine Tangente an Γ, die K in x_2 trifft, und so fort bis wir nach n-maliger Tangentenziehung zu einem Puncte $x_{n+1} = y$ gelangen, so besteht zwischen x und y eine in beiden Grössen (symmetrische) quadratische Gleichung $f(x, y) = 0$, denn zu jedem x gehören zwei Werthe von y und nur zwei, und die Beziehung ist eine algebraische.[1]) Setzen wir $y = x$, lassen wir den Punct $x_{n+1} \equiv y$ mit x zusammenfallen, so erhalten wir ein geschlossenes, K eingeschriebenes und Γ umschriebenes n-Eck, und für das Eintreten dieses Falles eine algebraische Gleichung $f(x, x) = \varphi(x) = 0$ vom vierten Grade in x, die vier Lösungen hat. Eine eingehendere Untersuchung lehrt, dass die ihnen entsprechenden Polygone uneigentliche sind. Beschränken wir uns aber auf den Fall $n \geqq 5$, so ist diese Untersuchung nicht nöthig. Sind $x\,x_1\,x_2\,..\,x_n\,x$ die Ecken eines K eingeschriebenen und Γ umschriebenen eigentlichen Polygones, so müssen $x\,x_1\,x_2\,..\,x_n$ Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ sein, und da diese vom vierten Grade ist, so muss sie identisch, d. h. für jedes x verschwinden[2]), wenn $n \gtreqless 5$ ist, so dass x willkürlich gewählt werden kann.

Giebt es also ein eigentliches n-Eck, das K eingeschrieben und Γ umschrieben ist, so giebt es deren unendlich viele, und eine Ecke kann auf K willkürlich gewählt werden. Das ist ein Poncelet'scher Schliessungssatz. Uebrigens müssen $x\,x_1\,..\,x_n$ doppelte Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ sein, von denen aber hier noch nicht die Rede gewesen ist. Herr Hurwitz beweist auf dieselbe Art (Leipziger Annalen Bd. 15) noch verschiedene andere Schliessungssätze.

§ 42. Bestimmung einer ganzen Function aus gegebenen Werthen. Ist eine ganze Function von z vom n^{ten} Grade für $n+1$ von einander verschiedene Werthe von z, für $z_1, z_2, .., z_{n+1}$, willkürlich gegeben, so ist dadurch die Function völlig bestimmt. Sind die $n+1$ gegebenen Werthe Null, so ist die Function nach § 41 identisch Null. — Es sei $f(z)$ die gesuchte Function, und

$$f(z_1) = Z_1, \quad f(z_2) = Z_2, \quad .., \quad f(z_{n+1}) = Z_{n+1},$$
$$(z - z_1)\,(z - z_2)\,(z - z_3)\,..\,(z - z_{n+1}) = \Delta(z), \quad \Delta(z) : (z - z_\mu) = \Delta_\mu(z),$$

so dient zur Bestimmung von f die sogenannte Lagrange'sche Interpolationsformel:

$$f(z) = \frac{Z_1\,\Delta_1(z)}{\Delta_1(z_1)} + \frac{Z_2\,\Delta_2(z)}{\Delta_2(z_2)} + .. + \frac{Z_n\,\Delta_n(z)}{\Delta_n(z_n)} + \frac{Z_{n+1}\,\Delta_{n+1}(z)}{\Delta_{n+1}(z_{n+1})}.$$

In der That verschwinden $\Delta_1(z)$, $\Delta_2(z)$, .. $\Delta_{\mu-1}(z)$, $\Delta_{\mu+1}(z)$, .. $\Delta_{n+1}(z)$ für $z = z_\mu$, so dass in obiger Summe für $z = z_\mu$ nur das μ^{te} Glied stehen bleibt, welches offenbar den Werth Z_μ hat.

Gäbe es nun noch eine zweite ganze Function von z vom n^{ten} Grade, etwa $\varphi(z)$, so würde $f(z) - \varphi(z)$ für die $n+1$ verschiedenen Werthe $z_1, z_2, .., z_{n+1}$ verschwinden, und müsste daher identisch verschwinden. Es muss also identisch $f(z) = \varphi(z)$ sein.

---

[1]) Ganz streng vollenden lässt sich die Sache hier freilich nicht, es wäre mittels der Eliminationstheorie nachzuweisen, dass $f(x, y)$ wirklich vom zweiten Grade ist.

[2]) Vergl. Seite 2 Zeile 8.

§ 43. Sehr grosse Werthe der Veränderlichen. In einer ganzen Function kann man die Werthe der Veränderlichen z so gross annehmen, dass der absolute Betrag des Termes, welcher die höchste Potenz von z enthält, den absoluten Betrag der Summe aller übrigen Terme übertrifft.

Es sei

$$f(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0,$$

und $abs\,(A_\mu : A_n) \leqq M$ für jedes μ. Dann ist $abs\,[(f(z) : A_n) - z^n] =$

$$abs\left(\frac{A_{n-1}}{A_n} z^{n-1} + \frac{A_{n-2}}{A_n} z^{n-2} + \ldots + \frac{A_0}{A_n}\right) \leqq M \,.\, (abs\, z^{n-1} + abs\, z^{n-2} + \ldots + 1) = M \frac{abs\, z^n - 1}{abs\, z - 1}.$$

Nimmt man also den absoluten Betrag von z grösser oder gleich $M + 1$ an, so ist $abs\,[(f(z) : A_n) - z^n]$ kleiner oder gleich $abs\, z^n - 1$, also ist $abs\, z^n$ grösser als die Summe der absoluten Beträge der übrigen Glieder, und also auch grösser als der absolute Betrag der Summe, und wenn man mit $abs\, A_n$ multiplicirt, so folgt, was zu beweisen war, $abs\, A_n z^n \geqq abs\,(A_0 + A_1 z + \ldots + A_{n-1} z^{n-1})$. Setzt man $abs\, z = PM + 1$, $P > 1$, so ist das höchste Glied mindestens P-mal so gross als die Summe der übrigen.

Corollar. Hieraus folgt ohne Weiteres, dass sämmtliche Wurzeln einer Gleichung

$$A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0,$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als die grösste um Eins vermehrte unter den Zahlen $abs\,(A_{n-1} : A_n)$, $abs\,(A_{n-2} : A_n)$, .., $abs\,(A_0 : A_n)$ sind.

Weiter ergiebt sich leicht, dass eine Gleichung $f(z) = 0$ von ungeradem Grade mit reellen Coëfficienten gewiss eine Wurzel habe. Denn für reelle z ist die Function $f(z)$ reell und für hinlänglich grosse negative z negativ, (wenn A_n positiv vorausgesetzt wird, was die Allgemeinheit offenbar nicht beschränkt) weil $A_n(-z)^n$ negativ ist, und an Grösse alle übrigen Terme übertrifft, also das Vorzeichen von $f(z)$ bestimmt. Für hinlänglich grosse positive z ist $f(z)$ positiv aus gleichem Grunde. Da nun die Function f stetig ist, so muss sie (§ 36) den Werth Null mindestens einmal annehmen.

§ 44. Sehr kleine Werthe von z. Für die Veränderliche einer ganzen Function kann man eine Zahl mit so kleinem absoluten Betrage setzen, dass das Glied mit dem kleinsten Exponenten die Summe aller übrigen dem absoluten Betrage nach beliebig vielmal übersteigt. — Es sei

$$f(z) = A_m z^m + A_{m+1} z^{m+1} + A_{m+2} z^{m+2} + \ldots + A_n z^n = A_m z^m + z^{m+1} \Sigma.$$

Es ist zu beweisen, dass $abs\, A_m z^m > P\ (abs\, z^{m+1} \Sigma)$ wird, wenn man z klein genug nimmt, wie gross die positive Zahl P auch gewählt werden mag. Ist $abs\, A_{m+1} \leqq M$, $abs\, A_{m+2} \leqq M$, .. $abs\, A_n \leqq M$, so ist $abs\, \Sigma = abs\,(A_{m+1} + z A_{m+2} + \ldots + z^{n-m-1} A_n) < (n - m) M$ und folglich

$$abs\,(z^{m+1} \Sigma : A_m z^m) = abs\,(z \Sigma : A_m) \leqq (n - m) M\ abs\, z : abs\, A_m \leqq 1 : P,$$

wie gross auch P sein mag, wenn $abs\, z$ klein genug genommen wird. Und folglich ist, w. z. b. w.,

$$abs\, z^{m+1} \Sigma : abs\, A^m z^m < 1 : P, \quad abs\, A_m z^m : abs\,(z^{m+1} \Sigma) > P.$$

§ 45. Binomischer Lehrsatz für ganze Exponenten. Für viele Untersuchungen ist es wichtig, die Function $f(z)$ durch eine Substitution $z = a + t$ zu transformiren. Soll die ganze Function $f(a + t)$ nach Potenzen von t geordnet werden, so ist zunächst nöthig, $(a + t)^n$ nach Potenzen von t zu ordnen, der Potenz dieses Binom's die gewöhnliche Form einer ganzen Function von t zu geben. Da $(a + t)^n = a^n (1 + z)^n$ ist, wenn $t : a = z$ gesetzt wird, so genügt es, die Entwickelung von $(1 + z)^n$ nach Potenzen von z zu haben, um die von $(a + t)^n$ nach Potenzen von t daraus abzuleiten. Nun ist aber

$$(1+z)^1 = 1+z, \quad (1+z)^2 = 1+2z+z^2, \quad (1+z)^3 = 1+3z+3z^2+z^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(1+z)^n = n_0 + n_1 z + n_2 z^2 + \ldots + n_k z^k + \ldots + n_n z^n.$$

Hierin ist $n_0 = 1$, wie $z = 0$ ergiebt, und $n_1\, n_2 \ldots$ sind ganze Zahlen. Multipliciren wir die Gleichung nochmals mit $1+z$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(1+z)^{n+1} &= n_0 + (n_0+n_1)z + (n_1+n_2)z^2 + \ldots + (n_k+n_{k-1})z^k \ldots + (n_n+n_{n-1})z^n + n_n z^{n+1} \\ &= (n+1)_0 + (n+1)_1 z + (n+1)_2 z^2 + \ldots + (n+1)_k z^k + \ldots + (n+1)_n z^n + (n+1)_{n+1} z^{n+1}.\end{aligned}$$

Daraus fliesst zunächst $(n+1)_{n+1} = n_n = \ldots 2_2 = 1_1 = 1$. Sonst aber ist

$$(n+1)_k = n_k + n_{k-1}.$$

Die Grössen $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k \ldots$ heissen Binomialcoëfficienten. Durch Induction erräth man leicht die Form der Zahlen n_k als durch die Gleichung bestimmt

$$n_k = \frac{n(n-1)\;(n-2)\;\ldots\;(n-k+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\;\ldots\;\;k},$$

und beweist deren Richtigkeit durch den Schluss von n auf $n+1$. Ist die Formel nämlich für jedes $k \leqq n$ und ein bestimmtes n richtig, so ist sie auch richtig für jedes $k \leqq n+1$ und für $n+1$ statt n, weil

$$(n+1)_k = \frac{n(n-1)\;(n-2)\;\ldots\;(n-k+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\;\ldots\;\;k} + \frac{n(n-1)\;(n-2)\;\ldots\;(n-k+2)\;.\;k}{1\;.\;2\;.\;3\;\;\ldots\;\;k-1\;\;\;k}$$
$$= \frac{n(n-1)\;\ldots\;(n-k+2)}{1\;.\;2\;\;\ldots\;\;(k-1)}\left(\frac{n-k+1}{k} + \frac{k}{k}\right) = \frac{(n+1)}{1}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{(n-1)}{3}\cdots\frac{(n-k+2)}{k}$$

ist, so lange $k \leqq n$ ist. Dass aber

$$(n+1)_{n+1} = \frac{(n+1)}{1}\cdot\frac{n}{2}\cdots\frac{2\;.\;1}{n\;.\;(n+1)} = 1$$

ist, ergiebt sich von selbst. Uebrigens kann die Formel $(n+1)_k = n_k + n_{k-1}$ für jedes positive k als giltig angesehen werden, wenn man n_k gleich Null setzt, sobald $k > n$ ist, wie es auch sachgemäss ist.

Schreibt man nun wieder $t:a$ für z und bildet den Ausdruck $a^n(1+t:a)^n$, so ergiebt sich

$$(a+t)^n = a^n + n_1 a^{n-1} t + n_2 a^{n-2} t^2 + \ldots + n_k a^{n-k} t^k + \ldots + n_{n-1} a t^{n-1} + t^n.$$

Da die linke Seite in Bezug auf a und t symmetrisch ist, so muss es auch die rechte sein, woraus sich auf Grund des § 41 die Beziehung

$$n_k = n_{n-k}$$

ergiebt, die jedoch ebenso leicht auch direct zu beweisen ist.

Wendet man den binomischen Lehrsatz auf den Ausdruck $(x+yi)^n$ an, so folgt

$$(x+yi)^n = X + Yi,$$
$$X = x^n - n_2 x^{n-2} y^2 + n_4 x^{n-4} y^4 - . + \ldots, \quad Y = n_1 x^{n-1} y - n_3 x^{n-3} y^3 + n_5 x^{n-5} y^5 - . + \ldots,$$

welche Reihen wegen des Verschwindens der Binomialcoëfficienten mit einem Index $> n$ von selbst abbrechen. Ist $x+yi$ ein Richtungscoëfficient, $abs\,(x+yi) = 1$, so ist $X+Yi$ auch ein solcher, $abs\,(X+Yi) = 1$, $Y = \pm\sqrt{1-XX}$.

§ 46. Die Gleichung $z^n = a$ besitzt stets eine Wurzel, was auch a sein mag. Ist ϱ die nach § 40 stets vorhandene Wurzel der Gleichung $\varrho^n = abs\;a$, $\varrho = \sqrt[n]{abs\;a}$ und ist n zunächst ungerade, so setzen wir $z : \varrho = \zeta$, $a = abs\, a \,.\, (\varkappa + \varkappa' i)$, $\varkappa\varkappa + \varkappa'\varkappa' = 1$, so folgt $\varrho^n \zeta^n = abs\, a \,.\, (\varkappa + \varkappa' i)$, $\zeta^n = \varkappa + \varkappa' i$. Setzen wir

$$\zeta = \xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}, \quad \xi^n - n_2 \xi^{n-2}(1-\xi^2) + n_4 \xi^{n-4}(1-\xi^2)^2 - n_6 \xi^{n-6}(1-\xi^2)^3 + \ldots - \varkappa = \varphi(\xi),$$

so ist $\varphi(\xi)$ eine ganze Function der reellen Veränderlichen ξ höchstens vom Grade n. Giebt es nun einen Werth von ξ zwischen -1 und $+1$, für welchen $\varphi(\xi)$ verschwindet, so lässt sich in $\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}$ das Vorzeichen der Quadratwurzel so wählen, dass die n^{te} Potenz dieses Ausdruckes gleich $\varkappa + \varkappa' i$ wird, weil diese Zahl ein Richtungscoëfficient ist. Nun ist $\varphi(-1) = -1 - \varkappa < 0$, $\varphi(1) = 1 - \varkappa > 0$, wenn n ungerade ist, und wenn wir die Fälle $\varkappa = \pm 1$ als triviale ausschliessen. Die untere Grenze der Function $\varphi(\xi)$ im Intervalle $-1 \ldots 1$ ist deshalb negativ, die obere positiv, sie nimmt daher den Werth Null nach § 36 wirklich in dem Intervalle an, die Gleichung $\varphi(\xi)$ hat eine Wurzel zwischen -1 und $+1$, und folglich hat die Gleichung $\zeta^n = \varkappa + \varkappa' i$ eine Lösung, und mithin auch die Gleichung $z^n = a$.

Ist n gerade, gleich $2n'$, so ist $z^n - a = (z^{n'} - \sqrt{a})\,(z^{n'} + \sqrt{a})$. Da die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ stets vorhanden ist, so ist eine der Gleichungen aufzulösen $z^{n'} - \sqrt{a} = 0$, $z^{n'} + \sqrt{a} = 0$. Ist n' ungerade, so haben beide, und also auch die ursprüngliche, eine Lösung. Ist n' gerade, so kann man diese Gleichungen wieder in zwei Factoren zerfällen von der Form $z^{n''} - \beta = 0$, wenn $n'' = 2n'$ ist, und so fort, bis man auf eine Gleichung von ungeradem Grade kommt. Da diese eine Wurzel hat, so folgt, dass die Gleichung $z^n - a = 0$ stets mindestens eine Lösung hat. Man übersieht sofort, dass wenn $n = 2^m$ ist, die Gleichung n Wurzeln hat, die man durch successive Quadratwurzelberechnung finden kann.

§ 47. Einige nahe liegende Eigenschaften der Binomialcoëfficienten. Die Eigenschaften der Binomialcoëfficienten

$$n_k + n_{k-1} = (n+1)_k, \quad n_k = n_{n-k}$$

fanden schon im § 45 Platz. Aus der ersteren finden wir durch wiederholte Anwendung eine neue Eigenschaft. Es ist nämlich

$$(n+2)_k = (n+1)_k + (n+1)_{k-1} = n_k + 2n_{k-1} + n_{k-2}, \quad (n+3)_k = n_k + 3n_{k-1} + 3n_{k-2} + n_{k-3}.$$

Durch Induction gelangt man zu der Gleichung

$$(n+m)_k = n_k m_0 + n_{k-1} m_1 + n_{k-2} m_2 + \ldots + n_{k-\mu} m_\mu + \ldots + n_{k-m} m_m.$$

Setzt man in ihr $m = n$ und $k = n$, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Beziehung $n_k = n_{n-k}$ die merkwürdige Gleichung

$$(2n)_n = n_n n_0 + n_{n-1} n_1 + n_{n-2} n_2 + \ldots + n_n n_0 = (n_0)^2 + (n_1)^2 + (n_2)^2 + \ldots + (n_n)^2.$$

Vergleicht man in den Ausdrücken für $(1+z)^{m+n} = (1+z)^n (1+z)^m$

$$1 + (n+m)_1 z + (n+m)_2 z + \ldots + (n+m)_k z^k + \ldots = (1 + n_1 z + n_2 z^2 + \ldots)\,(1 + m_1 z + m_2 z^2 + \ldots),$$

was mit z^k multiplicirt ist, so findet man

$$(n+m)_k = n_k m_0 + n_{k-1} m_1 + n_{k-2} m_2 + \ldots + n_0 m_k,$$

und diese Gleichung bleibt auf Grund des § 41 für beliebige auch complexe m und n richtig.

Noch zwei Relationen zwischen Binomialcoëfficienten leiten wir aus der Entwickelung von $(1+z)^n$ ab, indem wir einmal $z = 1$, ein ander Mal $z = -1$ setzen, so ergiebt sich

$$2^n = 1 + n + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} + \ldots,$$

$$0 = 1 - n + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} - \ldots + \ldots,$$

oder die Summe der Binomialcoëfficienten mit geraden Indices ist ebenso gross als die der Coëfficienten mit ungeraden.

Setzt man in n_k für n die beliebige complexe Zahl z, so erkennt man sogleich, dass diese Grösse eine ganze Function von z ist, die für $z = 0, 1, 2, .., k-1$ verschwindet, und für $z = -1$ den Werth $(-1)^k$ annimmt, wodurch sie völlig bestimmt ist. Auch ist $(z+1)_k = z_k + z_{k-1}$.

Für das Product der Zahlen $1 . 2 . 3 \ldots n$ schreibt man abkürzend $n!$, gelesen n-Facultät, ich ziehe jedoch vor dafür $fac\, n$, gelesen Facultät n, zu schreiben. Es ist in dieser Bezeichnung $n_k = fac\, n : fac\, k\; fac\,(n-k)$. Von der Verallgemeinerung der Facultät wird später die Rede sein.

§ 48. Die Ableitungen ganzer Functionen. Transformation. Entwickelt man $f(z) = A_n(z+h)^n$ nach dem binomischen Lehrsatz und schreibt

$$f(z+h) = f(z) + h f'(z) + \frac{h^2}{1.2} f''(z) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(z) + .. + \frac{h^m}{fac\, m} f^{(m)}(z) + .. + \frac{h^n f^{(n)}(z)}{fac\, n},$$

so nennt man den Coëfficienten von h, also den Ausdruck $f'(z) = n A_n z^{n-1}$, die (erste) Ableitung von $A_n z^n$, die Coëfficienten von

$$\frac{h^2}{1\,2},\quad \frac{h^3}{1\,2\,3},\quad ..,\quad \frac{h^m}{fac\, m},\quad ..,\quad \frac{h^n}{fac\, n},$$

bez. die zweite, dritte, .., m^{te}, .. n^{te} Ableitnng von $A_n z^n$, und pflegt diese mit Lagrange durch $f''(z)$, $f'''(z), \ldots, f^{(m)}(z), \ldots, f^{(n)}(z)$ zu bezeichnen. Offenbar ist, wenn $f(z) = A_n z^n$ ist, $f''(z) = [f'(z)]'$, $f'''(z) = [f'(z)]'' = [f''(z)]'$ u. s. w., und $f^{(m)}(z) = (A_n z^n)^{(m)} = n(n-1)(n-2)..(n-m+1) A_n z^{n-m}$. Ist der Ableitungsexponent höher als der Exponent der Potenz, so ist die Ableitung gleich Null.

Ist $f(z)$ die ganze Function $A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + .. + A_n z^n$, und nennt man wieder das, was in der Entwickelung von $f(z+h)$ nach Potenzen von h, die mit dem binomischen Lehrsatz ausgeführt wird, mit $h^m : fac\, m$ multiplicirt ist, die m^{te} Ableitung, geschrieben $f^{(m)}(z)$, so ist

$$\begin{aligned}
f'(z) &= A_1 + 2A_2 z + 3A_3 z^2 + .. + m A_m z^{m-1} + .. n A_n z^{n-1},\\
f''(z) &= 2A_2 + 3.2 A_3 z + \ldots + m(m-1) A_m z^{m-2} + .. + n(n-1) A_n z^{n-2},\\
\ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f^{(m)}(z) &= m(m-1)(m-2)..2.1\, A_m + (m+1)m(m-1)..2.A_{m+1} z + .. + .\, n(n-1)..(n-m+1) A_n z^{n-m}\\
\ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f^{(n)}(z) &= n(n-1)(n-2)..2.1.A_n,\quad f^{(n+1)}(z) = f^{(n+2)}(z) = \ldots = 0,
\end{aligned}$$

und es ist auch hier wieder

$$f^{(m+r)}(z) = [f^{(m)}(z)]^{(r)}.$$

Ferner ist offenbar die Ableitung einer Summe von ganzen Functionen gleich der Summe der Ableitungen der Functionen, und aus der Darstellung durch die binomische Reihe schliesst man $f^{(m)}(z) = n.(n-1)..(n-m+1) A_n(z \pm a)^{n-m}$, wenn $f(z) = A_n(z \pm a)^n$ ist.

Die Ableitungen, die im Grunde nur Abkürzungen, aber äusserst nützliche Abkürzungen für eine durch einen bestimmten Algorithmus aus einer gegebenen Function, der Mutterfunction, hergestellte oder abgeleitete Functionen sind, treten z. B. auf, wenn man eine nach ganzen Potenzen von z geordnete Function in eine nach Potenzen eines Binoms geordnete Function transformiren will. Ist $z - z_0$ dieses Binom, so geschieht dies durch die evidente Formel

$$f(z) = f(z_0 + z - z_0) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + \frac{(z-z_0)^2}{1.2} f''(z_0) + .. + \frac{(z-z_0)^n}{fac\, n} f^{(n)}(z_0).$$

Soll eine ganze Function den Factor $z - z_0$ m-mal enthalten, soll z_0 eine m-fache Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ sein, wie man sich ausdrückt, so muss $f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = .. = f^{(m-1)}(z_0) = 0$

sein, es muss die Function sammt ihren $m-1$ ersten Ableitungen für $z = z_0$ verschwinden. Die Gleichung $f(z) = z^n - a = 0$ kann daher, wenn a nicht Null ist, keine mehrfache Wurzel besitzen, weil die Ableitung $f'(z) = nz^{n-1}$ nur für $z = 0$ verschwindet, während dort $f(z)$ nicht verschwindet.

§ 49. Der absolute Betrag einer ganzen Function kann nicht an einer Stelle z_0 ein Minimum sein, wo die Function nicht verschwindet. Da $f(z_0)$ nicht Null ist, so kann man die Gleichung ansetzen

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)} &= 1 + \frac{h^m f^{(m)}(z_0)}{fac\,m\,f(z_0)} + \frac{h^{m+1} f^{(m+1)}(z_0)}{fac\,(m+1)\,f(z_0)} + \ldots + \frac{h^n f^{(n)}(z_0)}{fac\,n\,f(z_0)}\\ &= 1 + h^m g(1 + hk_1 + h^2 k_2 + \ldots + h^{n-m} k_{n-m}),\end{aligned}$$

worin $g k_1 k_2 \ldots k_{n-m}$ complexe von h unabhängige Zahlen sind, und m eine ganze Zahl $\geqq 1$ ist. Ist nun $g = (\alpha + \beta i)\ abs\ g$, $1 : g = (\alpha - \beta i) : abs\ g$ und ist $\varkappa + \varkappa' i$ ein Richtungscoëfficient, der die Gleichung befriedigt $(\varkappa + \varkappa' i)^m = -(\alpha - \beta i)$ — ein solcher ist nach § 46 stets vorhanden — und setzen wir $h = s(\varkappa + \varkappa' i) : \sqrt[m]{abs\ g}$, wo $\sqrt[m]{abs\ g}$ eine positive Zahl ist, so folgt

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)} = 1 - s^m(1 + sk'_1 + s^2 k'_2 + \ldots + s^{n-m} k'_{n-m})$$

und es sind $k'_1 k'_2 \ldots k'_{n-m}$ wieder bestimmte von s unabhängige Zahlen. Setzen wir weiter $k'_1 + k'_2 s + \ldots k'_{n-m} s^{n-m} = \gamma + \delta i$, so sind $\gamma\ \delta$ Zahlen, die für Werthe von s zwischen Null und Eins $(0 \leqq s \leqq 1)$ in bestimmten (endlichen) Grenzen liegen, die von s unabhängig gewählt werden können. Alsdann ergiebt sich

$$abs\ f\left(z_0 + \frac{s(\varkappa + \varkappa' i)}{\sqrt[m]{abs\ g}}\right) : abs\ f(z_0) = abs\,[1 - s^m - s^{m+1}(\gamma + \delta i)] = \sqrt{[1 - s^m(1+\gamma s)]^2 + s^{2m+2}\delta^2}$$

$$= \sqrt{1 - 2s^m(1+s\gamma) + s^{2m}(1+s\gamma)^2 + s^{2m+2}\delta^2} = \sqrt{1 - 2s^m[1 + s\gamma - \tfrac{1}{2}s^m - s^{m+1}\gamma - \tfrac{1}{2}s^{m+2}(\gamma^2+\delta^2)]}.$$

Nun kann man nach § 44 s so klein nehmen, dass $1 + s\gamma - \frac{1}{2}s^m - s^{m+1}\gamma - \frac{1}{2}s^{m+2}(\gamma^2+\delta^2) > \frac{1}{2}$ ist und für kleinere s bleibt. Für alle so bestimmten Werthe von s ist, wenn $h = s(\varkappa + \varkappa' i) : \sqrt[m]{abs\ g}$ gesetzt wird

$$abs\ f(z_0 + h) : abs\ f(z_0) < \sqrt{1 - s^m} < 1, \quad abs\ f(z_0 + h) < abs\ f(z_0)$$

und es kann $abs\ f(z_0)$ an der Stelle $f(z_0)$ kein Minimum sein.

In ganz gleicher Weise schliesst man, dass $abs\ f(z)$ nirgend ein Maximum haben kann.

§ 50. Hauptsatz der Algebra: Eine ganze Function $f(z)$ von z muss für einen bestimmten Werth von z verschwinden. In einer[1]) ganzen Function vom Grade n lässt sich $abs\ z$ so gross, etwa gleich R, annehmen, dass $abs\ f[R(\xi + \eta i)] > M$ ist, wenn $\xi + \eta i$ ein Richtungscoëfficient ist, während M beliebig gross, insbesondere grösser als $abs\ A_0$ genommen werden kann. Dann giebt es Werthe von z, für die $abs\ z < R$ und für die $abs\ f(z) < M$ ist, oder um in der aus der graphischen Darstellung der complexen Zahlen entspringenden Terminologie zu reden, im Innern des Kreises, der um den Nullpunct der z-Ebene mit dem Radius R geschlagen ist, giebt es Puncte, für die $abs\ f(z) < M$ ist. Da nun $abs\ f(z)$ im Kreise R, den Rand eingeschlossen, eine stetige Function von x und y ist, so muss sie ihre untere Grenze, die jedenfalls kleiner als M ist, und daher

[1]) In der ersten Auflage befand sich dieser Satz hinter den ganzen transcendenten Functionen, und war die Theorie der rationalen Functionen dadurch in zwei Theile zerrissen. Diesem Uebelstande habe ich in meinen Vorlesungen schon seit einer längeren Reihe von Jahren wie oben im Text abhelfen können.

nicht auf dem Rande von R liegen kann, wirklich ein Mal annehmen (§ 35), sie besitzt ein Minimum und dies muss nach dem vorigen Paragraphen Null sein. — Könnte das Minimum auf den Rand fallen, was ausgeschlossen ist, so würde der Satz des § 35 nicht anwendbar sein. — Es giebt demnach einen bestimmten Werth $z = z_1$ für den $abs\, f(z)$ und also $f(z)$ verschwindet. Folglich kann $f(z)$ in die Form gesetzt werden $f(z) = (z - z_1) f_{n-1}(z)$, wo $f_{n-1}(z)$ vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist. Die Gleichung $f_{n-1}(z) = 0$ muss wieder eine Wurzel haben, etwa $z = z_2$, wo z_2 auch gleich z_1 sein kann, und es lässt sich $f_{n-1}(z)$ in die Form $(z - z_2) f_{n-2}(z)$ setzen, wo $f_{n-2}(z)$ von $n - 2^{\text{ten}}$ Grade ist u. s. f. Hieraus entspringt der Satz: *Eine ganze Function $f(z)$ vom n^{ten} Grade lässt sich in n lineare Factoren zerlegen.* Von diesen Factoren können mehrere unter einander gleich sein, so dass die ganze Function $f(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n$ jedes Mal in der Form enthalten sein muss

$$f(z) = A_n (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \ldots (z - z_\mu)^{m_\mu}, \quad m_1 + m_2 + \ldots + m_\mu = n.$$

Dass diese Zerlegung nur auf eine Weise möglich ist, ist leicht zu beweisen, und es müsste $f(z)$ identisch verschwinden, wenn $m_1 + m_2 + \ldots + m_\mu > n$ wäre.

Die Gleichung $z^n - a = 0$ hat n und zwar n verschiedene Wurzeln, weil die Ableitung von $f(z) = z^n - a$, $f'(z) = n z^{n-1}$ nur für $z = 0$ verschwindet, welcher Werth keine Wurzel von $f(z) = 0$ ist. Der Ausdruck $\sqrt[n]{a}$ insbesondere $\sqrt[n]{1}$ hat demnach n verschiedene Werthe, um ihn zu einem bestimmten zu machen, bedarf es eines Imperatives.

Eine ganze Function $f(z)$ nimmt jeden Werth A gleich oft an. Denn $f(z) - A = 0$ ist eine Gleichung vom n^{ten} Grade, die n Wurzeln hat. Hat aber diese Gleichung für $z = z_0$ eine doppelte oder mehrfache Wurzel, so müssen wir sagen, dass $f(z)$ den Werth A an der Stelle z_0 zwei Mal bez. mehrmal annimmt, wenn wir den ausgesprochenen Satz aufrecht erhalten wollen. Dies geschieht. Aehnlich sagt man in der Geometrie, eine Gerade habe mit einer Curve zwei (oder mehr) Puncte gemein, wenn sie sie berührt, oder wenn sie durch einen sogenannten mehrfachen Punct der Curve geht.

Hat eine Gleichung $f(z) = 0$ mit reellen Coëfficienten eine Wurzel $x + yi$, so ist auch $x - yi$ eine Wurzel derselben nach § 12.

§ 51. **Beziehungen zwischen den Wurzeln und Coëfficienten einer algebraischen Gleichung Die symmetrischen Grundfunctionen. Die Newtonschen Formeln.** Setzt man $f(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n$ in die Form $A_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$, so findet man durch Ausführung der Multiplicationen

$$- A_{n-1} : A_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n, \quad A_{n-2} : A_n = z_1 z_2 + z_1 z_3 + \ldots + z_1 z_n + z_2 z_3 + \ldots + z_{n-1} z_n$$
$$- A_{n-3} : A_n = z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \ldots + z_1 z_2 z_n + z_2 z_3 z_4 + \ldots + z_{n-2} z_{n-1} z_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-1)^n A_0 : A_n = z_1 z_2 z_3 \ldots z_{n-1} z_n.$$

Die Ausdrücke in $z_1 z_2 \ldots z_n$ bleiben unverändert, sind einwerthig bei jeder möglichen Vertauschung der Zahlen $z_1 z_2 \ldots z_n$, sie heissen deshalb symmetrische Functionen von $z_1 z_2 \ldots z_n$.

Die Coëfficienten einer algebraischen Gleichung sind ganze symmetrische mit dem Coëfficienten A_n der höchsten Potenz multiplicirte Functionen der Wurzeln der Gleichung. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{S} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \ldots z_n^{\alpha_n}$ diejenige symmetrische ganze Function, die wir erhalten, wenn wir in dem hinter $\mathfrak{S}$ stehenden Ausdrucke $z_1 z_2 \ldots z_n$ auf alle möglichen Weisen vertauschen und dann die Summe aller dieser Ausdrücke bilden, dabei aber etwa mehrere Male vorkommende Glieder nur ein Mal nehmen. Die Functionen

$$C_1 = z_1 + z_2 + \ldots + z_n = \mathfrak{S} z_1, \quad C_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + \ldots + z_{n-1} z_n = \mathfrak{S} z_1 z_2, \quad C_3 = \mathfrak{S} z_1 z_2 z_3,$$
$$C_4 = \mathfrak{S} z_1 z_2 z_3 z_4, \ldots, \qquad C_m = \mathfrak{S} z_1 z_2 z_3 \ldots z_m, \ldots, \qquad C_n = z_1 z_2 z_3 \ldots z_n$$

nennt man die symmetrischen Grundfunctionen.

Nach den Grundfunctionen sind die Potenzsummen der Zahlen $z_1 z_2 \,.\,.\, z_n$ die einfachsten symmetrischen Functionen. Wir führen die Bezeichnung ein

$$s_m = z_1{}^m + z_2{}^m + z_3{}^m + \,.\,.\, + z_n{}^m = \mathfrak{S} z_1{}^m.$$

Alle ganzen symmetrischen Functionen lassen sich als ganze Functionen der n Grundfunctionen darstellen, und wenn die Coëfficienten in einer ganzen symmetrischen Function ganze Zahlen sind, so kommen auch in ihrer Darstellung durch $C_1 C_2 \,.\,.\, C_n$ nur ganze Zahlen vor, was wir nachher nach Waring erweisen. Für die Potenzsummen kann man zu diesem Resultate durch die Newtonschen Formeln gelangen, welche Beziehungen zwischen den Potenzsummen und den Grundfunctionen bedeuten. Unter verschiedenen möglichen Ableitungen derselben wählen wir die folgende. — Ist $\mu < n$ und $\nu > 1$, so ergiebt sich

$$C_\mu s_\nu = \mathfrak{S} z_1 z_2 \,.\,.\, z_\mu \,.\, \mathfrak{S} z_1{}^\nu = \mathfrak{S} z_1 z_2 \,.\,.\, z_{\mu-1} z_\mu^{\nu+1} + \mathfrak{S} z_1 z_2 z_3 \,.\,.\, z_\mu z_{\mu+1}^\nu,$$

für $\nu = 1$ aber ist

$$C_\mu s_1 = \mathfrak{S} z_1 z_2 \,.\,.\, z_{\mu-1} z^2{}_\mu + (\mu+1) \mathfrak{S} z_1 z_2 \,.\,.\, z_\mu z_{\mu+1} = \mathfrak{S} z_1 z_2 \,.\,.\, z_{\mu-1} z^2{}_\mu + (\mu+1) C_{\mu+1}.$$

und hieraus folgt weiter ($s_0 = n$)

$$\begin{aligned} & s_\mu - C_1 s_{\mu-1} + C_2 s_{\mu-2} - C_3 s_{\mu-3} + \,.\, - \,.\,.\, + (-1)^\mu C_\mu s_0 \\ &= \mathfrak{S} z_1{}^\mu - (\mathfrak{S} z_1{}^\mu + \mathfrak{S} z_1 z_2{}^{\mu-1}) + (\mathfrak{S} z_1 z_2{}^{\mu-1} + \mathfrak{S} z_1 z_2 z_3{}^{\mu-2}) - \,.\, + \,.\,. \\ &\quad + (-1)^{\mu-1} (\mathfrak{S} z_1 z_2 \,.\,.\, z_{\mu-z} z^2{}_{\mu-1} + \mu C_\mu) + (-1)^\mu n C_\mu \\ &= (-1)^\mu (n-\mu) C_\mu, \end{aligned}$$

oder wenn man die $C_1 C_2 \,.\,.$ durch die Coëfficienten der Gleichung $f(z) = 0$ ausdrückt

$$A_n s_\mu + A_{n-1} s_{\mu-1} + A_{n-2} s_{\mu-2} + \,.\,.\, + A_{n-\mu} s_0 = (n-\mu) A_{n-\mu}.$$

Löst man die Gleichungen

$$\begin{aligned} & s_1 - C_1 = 0, \quad s_2 - C_1 s_1 + 2 C_2 = 0, \qquad s_3 - C_1 s_2 + C_2 s_3 - 3 C_3 = 0 \\ & s_4 - C_1 s_3 + C_2 s_2 - C_3 s_1 + 4 C_n = 0, \quad s_5 - C_1 s_4 + C_2 s_3 - C_3 s_2 + C_4 s_1 - 5 C_5 = 0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

auf, so findet man

$$s_1 = C_1, \quad s_2 = C_1{}^2 - 2C_2, \quad s_3 = C_1{}^3 - 3 C_1 C_2 + 3 C_3, \quad s_4 = C_1{}^4 - 4 C_1{}^2 C_2 + 4 C_1 C_3 + 2 C_2{}^2 - 4 C_4, \,.\,.$$

Die Potenzsummen sind ganze Functionen der Grundfunctionen mit ganzzahligen Coëfficienten. Giebt man den Zeichen $A_{-1} A_{-2} \,.\,.$ den Werth Null, so bleiben die Newtonschen Formeln auch für $\mu > n$ in Kraft. Es folgt dies schon aus der Identität:

$$z_1{}^\lambda f(z_1) + z_2{}^\lambda f(z_2) + z_3{}^\lambda f(z_3) + \,.\,.\, + z_n{}^\lambda f(z_n) = 0.$$

Die Summen negativer Potenzen erhält man am einfachsten, wenn man sie als Summen positiver Potenzen der Wurzeln der Gleichung ansieht

$$\left(\frac{1}{z}\right)^n A_0 + \left(\frac{1}{z}\right)^{n-1} A_1 + \left(\frac{1}{z}\right)^{n-2} A_2 + \,.\,.\, + \frac{1}{z} A_{n-1} + A_n = 0,$$

die in $(1:z)$ vom n^{ten} Grade ist. — Bemerkung. Sind $A_{n-1} A_{n-2} \,.\,.\, A_0\, g$ ganze Zahlen und ist $A_n = 1$, so muss A_0 durch g theilbar sein, wenn die Gleichung die Wurzel g haben soll. Denn in $f(g)$ sind alle Terme, von A_0 abgesehen, durch g theilbar, also muss auch A_0 durch g theilbar sein, wenn $f(g) = 0$ sein soll.

§ 52. Satz von Waring. *Jede ganze symmetrische Function von $z_1 z_2 z_3 \,.\,.\, z_n$ lässt sich als ganze Function der symmetrischen Grundfunctionen $C_1 C_2 \,.\,.\, C_n$ darstellen.* — Um diesen Satz zu erweisen, zerlegen wir eine ganze symmetrische Function in eine Summe einfacher symmetrischer

Functionen, das sind Functionen, die nur Glieder enthalten, welche aus einem durch alle möglichen derartigen Vertauschungen der Indices 1 2 3 . . n entstehen, die verschiedene Ausdrücke liefern. In einer einfachen symmetrischen Function machen wir das Glied $z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \ldots z_n^{\alpha_n}$ zum Anfangsgliede, in welchem $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \ldots \geqq \alpha_n$ ist. Alsdann nennen wir den Zahlencomplex $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ die Klasse jener einfachen symmetrischen Function. Von zwei Klassen $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3 \ldots, \alpha'_n)$ ist die erste die höhere, wenn unter den Differenzen $\alpha_1 - \alpha'_1, \alpha_2 - \alpha'_2, \alpha_3 - \alpha'_3, \ldots \alpha_n - \alpha'_n$ die erste von Null verschiedene eine positive ganze Zahl ist. Z. B. ist von den beiden Klassen (12, 9, 8, 4, 0, 0, 0) (12, 8, 8, 0, 3, 0, 2) die erste die höhere, weil die Differenz der an zweiter Stelle stehenden Zahlen 9 — 8, die erste von Null verschiedene, positiv ist, obschon später noch negative Differenzen vorkommen.

Multiplicirt man zwei einfache symmetrische Functionen mit einander, so erhält man im Allgemeinen nicht wieder eine einfache symmetrische Function, sondern eine Summe solcher. Das Anfangsglied der höchsten im ausgeführten Producte enthaltenen Klasse wird aber erhalten, wenn man die Anfangsglieder der Factoren mit einander multiplicirt. Es mögen die beiden einfachen Functionen $\mathfrak{S} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \ldots z_n^{\alpha_n}$, $\mathfrak{S} z_1^{\alpha'_1} z_2^{\alpha'_2} \ldots z_n^{\alpha'_n}$ mit einander multiplicirt werden und es sei

$$(k) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \quad (k') = (\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n) \quad (k + k') = (\alpha_1 + \alpha'_1, \ \alpha_2 + \alpha'_2, \ldots, \alpha_n + \alpha'_n),$$

so ist $(k + k')$ die höchste im ausgeführten Producte vorkommende Klasse. Das Product wird nämlich erhalten, wenn man in dem Ausdrucke

$$z_1^{\alpha_1 + \alpha'_1} z_2^{\alpha_2 + \alpha'_2} z_3^{\alpha_3 + \alpha'_3} \ldots z_n^{\alpha_n + \alpha'_n}$$

die Exponenten $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ unter sich auf alle möglichen Weisen vertauscht, aber solche Vertauschungen unterlässt, welche (wenn unter den Exponenten unter einander gleiche sich vorfinden) das System $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ nicht ändern, und wenn man in derselben Weise die $\alpha'_1 \alpha'_2 \ldots \alpha'_n$ mit einander vertauscht und die Summe aller auf diese Art aus dem oben angeschriebenen erhaltenen Ausdrücke bildet. Die so entstehende Function wird im Allgemeinen nicht vollständig erhalten, wenn man nur die Exponenten $\alpha_1 + \alpha'_1, \ \alpha_2 + \alpha'_2, \ \ldots, \ \alpha_n + \alpha'_n$ unter einander vertauscht. Die Gesammtheit der durch diese Vertauschungen hervorgehenden Terme würde eine einfache symmetrische Function bilden, hingegen liefert die Vertauschung der $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ und der $\alpha'_1 \alpha'_2 \ldots \alpha'_n$ für sich noch Glieder, die zu anderen Klassen gehören, so liefert z. B. $s_1{}^2 = \mathfrak{S} z_1{}^2 + 2 \mathfrak{S} z_1 z_2$ eine aus zwei einfachen zusammengesetzte symmetrische Function. Aber die Klasse $(k + k')$ ist die höchste im ausgeführten Producte vorkommende Klasse, und sie hat den Coëfficienten Eins, wenn die Factoren diesen Coëfficienten haben. Denn zerlegt man das ausgeführte Product in einfache symmetrische Functionen, so erhält man das Anfangsglied der höchsten vorkommenden Klasse, wenn man mit dem grössten α das grösste α' verbindet, also $\alpha_1 + \alpha'_1$ bildet, von den übrigen Exponenten wieder das grösste α mit dem grössten α' verbindet, also $\alpha_2 + \alpha'_2$ bildet und so fort, und das Glied $z_1^{\alpha_1 + \alpha'_1} z_2^{\alpha_n + \alpha'_n} \ldots z_n^{\alpha_n + \alpha'_n}$ eben als Anfangsglied nimmt. So gewinnen wir den Satz: Sind

$$f^{(k_1)}, f^{(k_2)}, f^{(k_3)}, \ldots, f^{(k_n)}$$

symmetrische einfache Functionen von den Klassen (k_1) (k_2) . . (k_n), so ist

$$f^{(k_1)} \cdot f^{(k_2)} \cdot f^{(k_3)} \ldots f^{(k_n)} = f^{(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n)} + R,$$

wo R eine Summe von einfachen symmetrischen Functionen ist, deren höchste Klasse niedriger ist als $(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)$. Haben die Functionen $f^{(k_1)}, f^{(k_2)}, \ldots$ den Coëfficienten Eins, so hat auch $f^{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)}$, das Glied der höchsten Klasse, den Coëfficienten Eins, und die Coëfficienten der einzelnen Klassen in R sind ganze Zahlen.

Es ist demnach

$$C_1^{\alpha_1 - \alpha_2} C_2^{\alpha_2 - \alpha_3} C_3^{\alpha_3 - \alpha_4} \ldots C_{n-1}^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} C_n^{\alpha_n} = \mathfrak{S} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \ldots z_n^{\alpha_n} + R,$$

wo R aus einer Summe einfacher symmetrischer Functionen besteht, deren Klassen niedriger sind als die Klasse $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$.

Ist nun eine ganze symmetrische Function F gegeben, so setzen wir sie in die Form $Af^{(k)} + R$, wo $f^{(k)}$ die einfache symmetrische Function der höchsten in F vorkommenden Klasse ist, mit dem Coëfficienten Eins. Ist $(k) = (\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n)$, so setzen wir

$$F - AC_1^{\alpha_1-\alpha_2} C_2^{\alpha_2-\alpha_3} \cdot\cdot C_n^{\alpha_n} = F_1, \quad F = AC_1^{\alpha_1-\alpha_2} C_2^{\alpha_2-\alpha_3} \cdot\cdot C_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n} C_n^{\alpha_n} + F_1$$

und die höchste in F_1 vorkommende Klasse einfacher Functionen ist weniger hoch als (k). Indem man nun F_1 derselben Behandlung unterwirft, das Glied der höchsten Klasse durch $C_1 C_2 .. C_n$ ausdrückt, und den Rest wiederum so behandelt und so weiter, so gelingt es, die Function F durch eine Summe der Form

$$F = \sum_{\lambda_1 \lambda_2 .. \lambda_n} M_{\lambda_1 \lambda_2 .. \lambda_n} C_1^{\lambda_1} C_2^{\lambda_2} \cdot\cdot C_n^{\lambda_n}$$

auszudrücken, und es sind die Coëfficienten $M_{\lambda_1 \lambda_2 .. \lambda_n}$ ganze Zahlen, wenn die Coëfficienten der in F vorkommenden Klassen ganze Zahlen waren.

Beispiele. Ist die ganze Function vierten Grades

$$f(z) = az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e, \quad C_1 = -4b : a, \quad C_2 = 6c : a, \quad C_3 = -4d : a, \quad C_4 = e : a$$

gegeben, und sind $z_1 z_2 z_3 z_4$ die Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$, so ist

$$s_1 = C_1 = -\frac{4b}{a}, \quad s_2 = \frac{16b^2 - 12ac}{a^2}, \quad s_3 = \frac{-64b^3 + 72abc - 12a^2d}{a^3}, \quad s_{-2} = \frac{16d^2 - 12ce}{e^2}$$

$$\mathfrak{S} z_1^2 z_2 - C_1 C_2 = -3C_3 \quad a^2 \mathfrak{S} z_1^2 z_2 = -(24bc - 12ad)$$

$$a^2 \mathfrak{S}(z_1 - z_2)^2 = 3a^2 \mathfrak{S} z_1^2 - 2a^2 C_2 = 48(b^2 - ac) \quad [(z_1 - z_2)^2 = (z_2 - z_1)^2] \text{ ist nur einmal zu nehmen}]$$

$$a^2 \mathfrak{S} z_1^2 z_2 z_3 = a^2 C_3 C_1 - 4a^2 C_4 = 16bd - 4ae$$

$$a^3 \mathfrak{S} z_1^3 z_2 z_3 z_4 = a^3 C_4 s_2 = 16b^2 e - 12ace$$

$$a^2 \mathfrak{S} z_1^2 z_2^2 z_3^2 = a^2 \mathfrak{S}(z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2 : z_4^2) = a^2 C_4^2 s_{-2} = 16d^2 - 12ce$$

$$a^3(z_1 z_2 + z_3 z_4)(z_1 z_3 + z_2 z_4)(z_1 z_4 + z_2 z_3) = a^3 \mathfrak{S} z_1^3 z_2 z_3 z_4 + a^3 \mathfrak{S} z_1^2 z_2^2 z_3^2 = 16ad^2 - 24ace + 16eb^2$$

Diese Beispiele sind so gewählt, dass sie uns bei Behandlung der Gleichungen vierten Grades von Werth sind.

Die Aufgabe, eine Gleichung herzustellen, deren Wurzeln die λ^{ten} Potenzen der Wurzeln einer gegebenen Gleichung sind, ist mittels des Waring'schen Satzes leicht zu lösen.

§ 53. Die Gleichungen dritten Grades. Um die Gleichung dritten Grades

$$f(z) = az^3 + 3bz^2 + 3cz + d = 0, \quad f(z_1) = 0, \quad f(z_2) = 0, \quad f(z_3) = 0,$$

aufzulösen, suchen wir mit Lagrange eine nicht symmetrische Function Θ ihrer Wurzeln, welche bei allen möglichen Vertauschungen derselben nur zwei verschiedene Werthe $\Theta_1\ \Theta_2$ annimmt. Die Summe und das Product der beiden verschiedenen Werthe $\Theta_1\ \Theta_2$ bilden in $z_1 z_2 z_3$ symmetrische Ausdrücke und sind durch $a\ b\ c\ d$ darstellbar. Es ergiebt sich deshalb Θ als Wurzel der Gleichung $\Theta^2 - (\Theta_1 + \Theta_2)\Theta + \Theta_1\Theta_2 = (\Theta - \Theta_1)(\Theta - \Theta_2) = 0$. — Zunächst definiren wir α als eine complexe Wurzel der Gleichung $\alpha^3 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$. So ist

$$\alpha = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3} \quad \alpha^2 = \alpha^3 : \alpha = 1 : \alpha = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

Vertauschen wir nun in dem Ausdruck $3t = a(z_1 + \alpha z_2 + \alpha^2 z_3)$ $z_1 z_2 z_3$ cyclisch, d. h. lassen z_1 in z_2, z_2 in z_3, z_3 in z_1 übergehen, so geht er in $a(\alpha^2 z_1 + z_2 + \alpha z_3) = a(z_1 + \alpha z_2 + \alpha^2 z_3)\alpha^2$ über, und die dritte Potenz $27\Theta = 27t^3 = a^3(z_1 + \alpha z_2 + \alpha^2 z_3)^3$ bleibt bei cyclischen Vertauschungen der Grössen $z_1 z_2 z_3$ ungeändert. Die sechs möglichen Vertauschungen der $z_1 z_2 z_3$ kann man in zwei Tripel cyclischer zerlegen, und etwa

$$27\,\Theta_1 = a^3(z_1 + \alpha z_2 + \alpha^2 z_3)^3, \quad 27\,\Theta_2 = a^3(z_1 + \alpha z_3 + \alpha^2 z_2)^3$$

setzen, das sind die beiden verschiedenen Werthe, die Θ bei allen möglichen Vertauschungen annimmt. $3\,t_1$ sei gleich $a(z_1 + \alpha z_2 + \alpha^2 z_3)$, $3\,t_2 = a(z_1 + \alpha^2 z_2 + \alpha z_3)$. — Nun ist

$$\Theta_1 + \Theta_2 = \tfrac{1}{27} a^3 [3(z_1^3 + z_2^3 + z_3^3) + 18\, z_1 z_2 z_3 - (z_1 + z_2 + z_3)^3] = -(2\,b^3 - 3\,abc + aad)$$

$$\Theta_1\,\Theta_2 = (t_1\,t_2)^3 = \tfrac{1}{27\,.\,27} a^6 [z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + (\alpha + \alpha^2)(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)^3] = (b^2 - ac)^3$$

$$(\Theta_1 - \Theta_2)^2 = (a^2 d - 3\,abc + 2\,b^3)^2 = 4\,(b^2 - ac)^3$$

$$= a^2(a^2 d^2 - 6\,abcd + 4\,ac^3 + 4\,b^3 d - 3\,b^2 c^2) = a^2 D(f),$$

wo $D(f)$ eine Abkürzung (die Discriminante) bedeutet.

Es sind also $\Theta_1\;\Theta_2$ die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\Theta^2 + (aad - 3\,abc + 2\,b^3)\,\Theta + (b^2 - ac)^3 = 0,$$

und es ist

$$3\,t_1 = 3\sqrt[3]{\Theta_1} = a(z_1 + \alpha z_2 + \alpha^2 z_3), \quad 3\,t_2 = a(z_1 + \alpha^2 z_2 + \alpha z_3), \quad -3\,b = a(z_1 + z_2 + z_3)$$

$$a z_1 + b = t_1 + t_2 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(aad - 3\,abc + 2\,b^3) + \tfrac{1}{2}\,a\sqrt{D(f)}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(aad - 3\,abc + 2\,b^3) - \tfrac{1}{2}\,a\sqrt{D(f)}}$$

$$a z_2 + b = \alpha t_1 + \alpha^2 t_2, \quad a z_3 + b = \alpha^2 t_1 + \alpha t_2, \quad t_1\,t_2 = b^2 - ac.$$

Eine dritte Wurzel hat drei Werthe, man würde für $az + b$ neun Werthe erhalten, wenn die Combinationen frei wären. Es ist aber, ähnlich wie im § 13, die eine Wurzel durch die andere, durch die Gleichung $t_1\,t_2 = b^2 - ac$ bestimmt, so dass man nur drei Werthe erhält.

Zerlegt man $\Theta_1 - \Theta_2$ in $(t_1 - t_2)\;(t_1 - \alpha\,t_2)\;(t_1 - \alpha^2\,t_2)$, so erhält man

$$27\,(\Theta_1 - \Theta_2) = a^3(\alpha - \alpha^2)\,(z_2 - z_3)\,(1 - \alpha)\,(z_1 - z_2)\,(1 - \alpha^2)\,(z_1 - z_3) = 3\,a^3(\alpha - \alpha^2)\,(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3),$$

und da $(\alpha - \alpha^2)^2 = \alpha + \alpha^2 - 2 = -3$ ist,

$$27\,(\Theta_1 - \Theta_2)^2 = 27\,a^2 D(f) = -a^6 (z_2 - z_1)^2\,(z_3 - z_1)^2\,(z_3 - z_2)^2.$$

Setzen wir $a = 1\;\; b = 0\;\; 3\,c = p\;\; d = q$, so erhalten wir die sogenannte Cardanische Formel

$$z = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\,q + \tfrac{1}{2}\sqrt{q^2 + \tfrac{4}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\,q - \tfrac{1}{2}\sqrt{q^2 + \tfrac{4}{27}p^3}}$$

als Lösung der Gleichung

$$f(z) = z^3 + pz + q = 0.$$

§ 54. Die Gleichungen vierten Grades. Fänden wir eine nicht symmetrische Function der Wurzeln $z_1\,z_2\,z_3\,z_4$ einer Gleichung vierten Grades

$$f(z) = az^4 + 4\,bz^3 + 6\,cz^2 + 4\,dz + e = 0,$$

die bei allen möglichen Vertauschungen der $z_1\,z_2\,z_3\,z_4$ nur drei Werthe annimmt, so würde diese durch eine Gleichung dritten Grades, deren Coëfficienten ganze Functionen von $abcde$ sind, bestimmt werden können, und diese Gleichung könnte eine Resolvente sein, deren Wurzeln uns zu den Wurzeln der gegebenen Gleichung verhelfen möchten. Die lineare Function der Wurzeln $z_1 + z_2 - z_3 - z_4$ hat für vier Combinationen der Indices denselben Werth, nämlich

$$z_1 + z_2 - z_3 - z_4 = z_2 + z_1 - z_3 - z_4 = z_1 + z_2 - z_4 - z_3 = z_2 + z_1 - z_4 - z_1,$$

ist also bei den vierundzwanzig möglichen Vertauschungen der Wurzeln sechswerthig. Da aber $z_3 + z_4 - z_1 - z_2$ sich von $z_1 + z_2 - z_3 - z_4$ nur durch das Vorzeichen unterscheidet, so ist das

Quadrat unserer Function nur dreiwerthig, nimmt bei allen möglichen Vertauschungen der Wurzeln nur drei verschiedene Werthe an, ist also eine Function, wie wir sie wünschen. Wir setzen

$$4t_1 = a(z_1+z_2-z_3-z_4),\ 4t_2 = a(z_1-z_2+z_3-z_4),\ 4t_3 = a(z_1-z_2-z_3+z_4),\ -4b = a(z_1+z_2+z_3+z_4),$$

so folgt

$$az_1+b = t_1+t_2+t_3,\quad az_2+b = t_1-t_2-t_3,\quad az_3+b = -t_1+t_2-t_3,\quad az_4+b = -t_1-t_2+t_3.$$

Sind also die t gefunden, so sind auch $z_1\,z_2\,z_3\,z_4$ gefunden. Es ist bemerkenswerth, dass nicht blos, wie selbstverständlich ist, das Product der Quadrate der t einwerthig d. h. symmetrisch ist, sondern schon das Product der t $t_1t_2t_3$ selber. Es ist nämlich

$$t_1\,t_2\,t_3 = \tfrac{1}{64}a^3(\mathfrak{S}z_1{}^3-\mathfrak{S}z_1{}^2z_2+2\mathfrak{S}z_1z_2z_3) = -\tfrac{1}{2}(a^2d-3abc+2b^3).$$

Ferner ist

$$48\,t_1{}^2 = a^2\mathfrak{S}(z_1-z_2)^2+12a^2\mathfrak{S}z_1z_2z_3-4a^2\mathfrak{S}z_1z_2 = 48(b^2-ac)+12a^2(z_1z_2+z_3z_4)-24ac,$$

woraus folgt, dass auch $z_1z_2+z_3z_4$ eine dreiwerthige Function ist bei allen möglichen Vertauschungen der Wurzeln. Diese führt zu einer etwas einfacheren Resolvente als die Function t^2. Wir setzen

$$\Theta_1 = \tfrac{1}{4}a(z_1z_2+z_3z_4)-\tfrac{1}{2}c,\quad \Theta_2 = \tfrac{1}{4}a(z_1z_3+z_2z_4)-\tfrac{1}{2}c,\quad \Theta_3 = \tfrac{1}{4}a(z_1z_4+z_2z_3)-\tfrac{1}{2}c,$$

so dass

$$\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3 = \tfrac{1}{4}a\mathfrak{S}z_1z_2-\tfrac{1}{2}3c = \tfrac{1}{4}6c-\tfrac{1}{2}3c = 0$$

wird. In diesem Verschwinden einer symmetrischen Function der Θ liegt ihr Vorzug vor der Function t^2. Aus der Gleichung

$$(4\Theta_1+2c)(4\Theta_2+2c)+(4\Theta_2+2c)(4\Theta_3+2c)+(4\Theta_3+2c)(4\Theta_1+2c) = a^2\mathfrak{S}z_1{}^2z_2z_3 = 16bd-4ae$$

folgt

$$\Theta_1\Theta_2+\Theta_2\Theta_3+\Theta_3\Theta_1 = -\tfrac{1}{4}(ae-4bd+3c^2) = -\tfrac{1}{4}g_2,$$

aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}(4\Theta_1+2c)(4\Theta_2+2c)(4\Theta_3+2c) &= 64\,\Theta_1\Theta_2\Theta_3+32c(\Theta_1\Theta_2+\Theta_2\Theta_3+\Theta_3\Theta_1)+8c^3\\ &= a^3(z_1z_2+z_3z_4)(z_1z_3+z_2z_4)(z_1z_4+z_2z_3) = 16\,ad^2-24\,ace+16eb^2\end{aligned}$$

folgt

$$4\,\Theta_1\Theta_2\Theta_3 = -g_3 = ad^2-ace+b^2e-2\,bcd+c^3,$$

wo $g_2\,g_3$ auch sonst gebräuchliche Abkürzungen (Invarianten $g_2 = i$ $g_3 = j$, die Indices deuten die Dimension an) sind. Es sind demnach $\Theta_1\,\Theta_2\,\Theta_3$ Wurzeln der Gleichung (Resolvente)

$$\Theta^3-\tfrac{1}{4}g_2\,\Theta+\tfrac{1}{4}g_3 = 0,$$

und da $t^2 = b^2-ac+a\Theta$ ist, so ergeben sich die Lösungen

$$\begin{aligned}az_1+b &= \sqrt{b^2-ac+a\Theta_1}+\sqrt{b^2-ac+a\Theta_2}+\sqrt{b^2-ac+a\Theta_3} = t_1+t_2+t_3\\ az_2+b &= t_1-t_2-t_3,\quad az_3+b = -t_1+t_2-t_3,\quad az_4+b = -t_1-t_2+t_3.\end{aligned}$$

Die Vorzeichen der Wurzeln, deren acht Combinationen existiren, sind an die Bedingung $t_1\,t_2\,t_3 = -\tfrac{1}{2}(a^2d-3\,abc+2b^3)$ geknüpft, so dass nur vier Combinationen zulässig sind.

Das Product der Wurzeldifferenzen ist bei allen Vertauschungen zweiwerthig, ist aber nicht zur Resolvente geeignet. Das Quadrat des Productes der Wurzeldifferenzen, die Discriminante, ist, von einem Zahlenfactor abgesehen, gleich dem Quadrate des Productes der Wurzeldifferenzen der Resolvente und hat den Werth

$$D(f) = a^6(z_2-z_1)^2(z_3-z_1)^2(z_4-z_1)^2(z_3-z_2)^2(z_4-z_2)^2(z_4-z_3)^2 = g_2{}^3-27\,g_3{}^2.$$

§ 55. Gemeinsame Theiler zweier ganzen Functionen. Wir nennen der Kürze halber von zwei ganzen Functionen diejenige die höhere, die von höherem Grade ist, und eine gebrochene rationale Function eine ächt gebrochene, wenn der Zähler von niederem Grade ist als der Nenner. Jede rationale Function, d. h. jeder Quotient von zwei ganzen (rationalen) Functionen kann in eine Summe zerlegt werden, von der der eine Posten eine ganze Function, der andere eine ächt gebrochene Function ist. Ist nämlich

$$f(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0, \quad g(z) = B_m z^m + B_{m-1} z^{m-1} + \ldots + B_1 z + B_0$$

$n \geqq m$, so besteht die Gleichung

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{B_m f(z) - A_n z^{n-m} g(z)}{B_m g(z)} + \frac{A_n z^{n-m}}{B_m} = \frac{h(z)}{g(z)} + \frac{A_n z^{n-m}}{B_m},$$

worin $h(z)$ von niederem Grade ist als $f(z)$. Ist $h(z)$ von höherem oder gleichem Grade als $g(z)$, so kann man wieder durch dasselbe Verfahren $h(z) : g(z)$ in eine Summe zerlegen, von der der eine Posten eine mit einem constanten Factor versehene ganze Potenz, der zweite eine gebrochene Function ist, deren Zähler von niederem Grade als $h(z)$ ist, und so fort, bis man eine Gleichung der Form erhält

$$f(z) : g(z) = [r(z) : g(z)] + m(z),$$

worin $r(z) : g(z)$ eine ächt gebrochene Function ist. — Man hat die Division mit $g(z)$ ausgeführt. Ist der Rest $r(z)$ identisch Null, so ist die Division aufgegangen, $g(z)$ ist ein Theiler von $f(z)$.

Eine ächt gebrochene Function kann nicht einer ganzen Function identisch, d. h. für alle Werthe von z gleich sein. Denn wäre $r(z) : g(z) = h(z)$, $h(z)$ eine ganze Function, so wäre $r(z) = g(z) h(z)$. Die rechte Seite ist aber sicher von höherem Grade als die linke, und kann ihr daher nicht identisch (§ 41) gleich sein.

Um den grössten gemeinsamen Theiler zweier ganzen Functionen zu finden, bilden wir die Identitätenreihe

$$f(z) = m(z) g(z) + r_1(z), \quad g(z) = m_1(z) r_1(z) + r_2(z), \quad r_1(z) = m_2(z) r_2(z) + r_3(z)$$
$$r_2(z) = m_3(z) r_3(z) + r_4(z), \quad \ldots, \quad r_{\nu-1}(z) = m_\nu(z) r_\nu(z) + r_{\nu+1}$$
$$r_{\mu-2}(z) = m_{\mu-1}(z) r_{\mu-1}(z) + r_\mu(z),$$

worin m_ν die höchste in $r_{\nu-1} : r_\mu$ enthaltene ganze Function ist, und $r_{\nu+1}$ den Rest der Division bedeutet. Da $r_1(z)\, r_2(z)\, r_3(z) \ldots$ sämmtlich ganze Functionen sind, und ihr Grad der Reihe nach um mindestens eine Einheit abnimmt, so muss einmal ein Rest r_μ kommen, der eine Constante oder Null ist Im ersten Falle haben $f(z)$ und $g(z)$ keinen gemeinsamen Theiler. Die Constante nämlich, durch welche jede Function theilbar ist, (wie jede ganze Zahl durch Eins) rechnet man nicht zu den Theilern. Im zweiten Falle ($r_\mu = 0$) ist $r_{\mu-1}$ der grösste gemeinsame Theiler von f und g, und kein gemeinsamer Theiler von f und g ist von höherem Grade als $r_{\mu-1}$. Dies folgt daraus, dass jeder Theiler von f und g auch Theiler von $r_1\, r_2 \ldots r_\mu$ sein muss. Ist nämlich $f(z) = f_1(z) s(z)$, $g(z) = g_1(z) s(z)$, also die ganze Function $s(z)$ ein gemeinsamer Theiler von f und g, so ist

$$f(z) = m(z) g(z) + r_1(z), \quad f_1(z) = m(z) g_1(z) + [r_1(z) : s(z)].$$

Setzt man noch $r_1 : s = p + (q : s)$, wo p ganz und $q : s$ ächt gebrochen ist, so folgt

$$f = m g_1 + p + (q : s), \quad f - m_1 g_1 - p = q : s,$$

da aber eine ganze Function nicht einer ächt gebrochenen identisch gleich sein kann, so muss $q = 0$ sein, r_1 muss den Theiler s haben. Ebenso müssen nun auch $r_2, r_3 \ldots r_\mu$ den Theiler s haben, so dass, wenn r_μ constant ist, f und g keinen gemeinsamen Theiler haben, wenn aber $r_\mu = 0$ ist, so muss $r_{\mu-1}$ jeden Theiler von f und g als Factor enthalten, $r_{\mu-1}$ ist der grösste gemeinsame Theiler.

Haben Zähler und Nenner des Quotienten $f(z):g(z)$ keinen gemeinsamen Theiler, so sagen wir, der Bruch sei auf die kleinste Benennung gebracht. — Es ist zu bemerken, dass die Sätze dieser Paragraphen die Kenntniss des Fundamentalsatzes der Algebra von der Existenz der Wurzeln einer Gleichung nicht voraussetzen.

§ 56. Beispiel. Resultante. Es sei $f(z) = A_2 z^2 + A_1 z + A_0$, $g(z) = B_2 z^2 + B_1 z + B_0$, und es werde zur Abkürzung $D_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu$ gesetzt, so folgt

$$A_2 z^2 + A_1 z + A_0 = \frac{A_2}{B_2}(B_2 z^2 + B_1 z + B_0) + \frac{D_{12}}{B_2} z + \frac{D_{02}}{B_2}$$

$$B_2 z^2 + B_1 z + B_0 = \frac{B_2{}^2 z}{D_{12}}\left(\frac{D_{12}}{B_2} z + \frac{D_{02}}{B_2}\right) + \left(B_1 - B_2 \frac{D_{02}}{D_{12}}\right) z + B_0$$

$$= \frac{B_2{}^2 z}{D_{12}}\left(\frac{D_{12}}{B_2} z + \frac{D_{02}}{B_2}\right) + \frac{B_1 D_{12} - B_2 D_{02}}{D_{12} D_{12} : B_2}\left(\frac{D_{12}}{B_2} z + \frac{D_{02}}{B_2}\right) + B_0 - \frac{D_{02}}{D_{12}}\left(B_1 - B_2 \frac{D_{02}}{D_{12}}\right)$$

$$= \left(\frac{B_2{}^2 z}{D_{12}} + \frac{B_1 D_{12} - B_2 D_{02}}{D_{12} D_{12}} B_2\right)\left(\frac{D_{12}}{B_2} z + \frac{D_{02}}{B_2}\right) + \frac{B_0 D^2{}_{12} - B_1 D_{02} D_{12} + B_2 D^2{}_{02}}{D_{12} D_{12}}.$$

Der erste Rest ist $r_1 = (D_{12} z + D_{02}) : B_2$, der zweite

$$r_2 = (B_0 D^2{}_{12} - B_1 D_{02} D_{12} + B_2 D^2{}_{02}) : D^2{}_{12}$$

ist eine Constante, unser Algorithmus zur Auffindung des gemeinsamen Theilers ist beendet, es ist keiner vorhanden, wenn r_2 nicht verschwindet. Dieser Ausdruck lässt sich noch vereinfachen, denn es ist

$$D_{12}(B_0 A_1 B_2 - B_0 A_2 B_1 - B_1 A_0 B_2 + B_1 A_2 B_0) = -D_{12} D_{01} B_2,$$

so dass man erhält

$$r_2 \,.\, D_{12} D_{12} = B_2 (D_{02} D_{02} - D_{01} D_{12}) = B_2 [(A_0 B_2 - B_0 A_2)^2 - (A_0 B_1 - B_0 A_1)(A_1 B_2 - B_1 A_2)].$$

Wird nun das Verschwinden dieses Restes an sich das Vorhandensein eines gemeinsamen Factors bedeuten? Verschwindet B_2, so ist dies nicht nöthig, denn dann wird unser Divisionsverfahren hinfällig. Verschwindet aber der die Resultante der beiden Gleichungen genannte Ausdruck

$$(A_0 B_2 - A_2 B_0)^2 - (A_0 B_1 - A_1 B_0)(A_1 B_2 - A_2 B_1),$$

so haben die beiden Gleichungen einen linearen Factor gemein. Würden D_{02} und D_{12} gleichzeitig Null, so würde die Resultante verschwinden, aber, da D_{12} als Nenner auftritt, unser Verfahren hinfällig. Allein in diesem Falle unterscheiden sich $f(z)$ und $g(z)$ nur durch einen constanten Factor, haben also alle Theiler gemein.

Versteht man allgemein unter der Resultante zweier ganzen Functionen f und g diejenige ganze Function der Coëfficienten, die verschwinden muss, wenn f und g einen gemeinsamen Theiler (eine gemeinsame Wurzel) haben, so kann man durch den im vorigen Paragraphen aufgestellten Algorithmus zu ihr gelangen. Der letzte Rest enthält die Resultante, es treten jedoch in ihm Factoren auf, die genauer untersucht werden müssen, wie oben der Factor B_2, die der Resultante nicht angehören, weil sie bei unserm Verfahren als Divisoren vorgekommen sind. Dieses von Herrn Nöther zur Vollendung ausgebildete Verfahren kann jedoch des Instrumentes der Determinanten schwer entbehren, weshalb wir hier nicht weiter darauf eingehen können.

Die Resultante einer ganzen Function und ihrer Ableitung wird die Discriminante der Function genannt. Wir wissen, dass eine ganze Function eine doppelte Wurzel besitzt, wenn sie mit ihrer Ableitung einen Theiler gemein hat (§ 40), und es ist demnach die Discriminante diejenige ganze Function der Coëfficienten einer Gleichung, deren Verschwinden die Bedingung für das Vorhandensein einer doppelten oder mehrfachen Wurzel der Gleichung ist. Ist

$$f(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \,.\,. + A_1 z + A_0, \quad f'(z) = n A_n z^{n-1} + (n-1) A_{n-1} z^{n-1} + \,.\,. + A_1,$$

so ist der gemeinsame Theiler von f und f' aufzusuchen. Er ist auch gemeinsamer Theiler von $f'(z)$ und $g(z) = nf(z) - zf'(z) = A_{n-1}z^{n-1} + 2A_{n-2}z^{n-2} + \ldots + nA_0$. Um die Discriminante von f zu finden, suchen wir die Resultante von $f'(z)$ und $g(z)$, welche Functionen von gleich hohem Grade sind.

Ist $f(z) = az^2 + 2bz + c$, $f' = 2az + 2b$, $g = 2f - zf' = 2bz + 2c$, so ist die Resultante $b^2 - ac$ das, was unter dem Quadratwurzelzeichen steht, wenn man die Gleichung $f = 0$ auflöst.

Ist $f(z) = az^3 + 3bz^2 + 3cz + d$, $f' = 3(az^2 + 2bz + c)$, so ist die Resultante zwischen den Ausdrücken

$$az^2 + 2bz + c = 0, \quad bz^2 + 2cz + d = 0$$

zu suchen. Sie wurde oben allgemeiner gefunden, und es sind hier nur die speciellen Werthe

$$A_0 = c, \quad A_1 = 2b, \quad A_2 = a, \quad B_0 = d, \quad B_1 = 2c, \quad B_2 = b$$

zu setzen, so dass sich ergiebt

$$D(f) = (bc - ad)^2 - 4(c^2 - bd)(b^2 - ac) = ad^2 - 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d - 3b^2c^2,$$

was mit dem im § 53 gefundenen Ausdrucke übereinstimmt. Die Discriminante der Function $f(z) = az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e$ ist

$$(ae - 4bd + 3c^2)^3 - 27(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3)^2$$

oder, wenn man die Bezeichnung des § 54 wieder aufnimmt $g_2^3 - 27g_3^2$. Man kann zur Discriminante auch gelangen, wenn man sie als eine symmetrische Function der Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ ansieht, nämlich als das Quadrat aller Wurzeldifferenzen. Durch Multiplication mit einer Potenz des Coëfficienten der höchsten Potenz kann man sie zu einer ganzen Function der Coëfficienten machen. In Determinanten kann die Discriminante ganz allgemein leicht angeschrieben werden, um aber die sehr vielgliedrige Determinante in eine einigermaassen handliche Form zu bringen, wendet man wieder besondere Kunstgriffe an.

Hat die Gleichung $f = 0$ mehrfache Wurzeln, so hat $f' = 0$ mit f einen gemeinsamen Theiler, den man durch den Algorithmus des § 55 finden kann.

§ 57. Der Sturm'sche Satz. Obschon hier auf die Theorie der algebraischen Gleichungen nicht näher eingegangen werden kann, so mag doch ein Satz, der bei einer Gleichung mit reellen Coëfficienten angiebt, wie viele Wurzeln derselben zwischen zwei reellen Zahlen α und β liegen, Platz finden, der Sturm'sche Satz. Die Ableitung von f werde jetzt mit f_1 bezeichnet. Wir zerlegen $f : f_1$ in eine ganze Function m_1 und eine ächt gebrochene Function. Der Zähler der letzteren wird mit $-f_2$ bezeichnet, so dass $f = m_1 f - f_2$ wird. Ebenso sei $f_1 = m_2 f_2 - f_3$, $f_2 = m_3 f_3 - f_4$ u. s. w., so dass wir zu folgendem Schema gelangen

$$(A) \quad f(z) = m_1(z) f_1(z) - f_2(z), \quad f_1(z) = m_2(z) f_2(z) - f_3(z), \quad f_2(z) = m_3(z) f_3(z) - f_4(z),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad f_{\nu-1}(z) = m_\nu(z) f_\nu(z) - f_{\nu+1}(z), \ldots \quad f_{\mu-2} = m_{\mu-1}(z) f_{\mu-1}(z) - f_\mu.$$

Beschränken wir uns auf den Fall, dass f keine mehrfachen Wurzeln besitzt, was die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt, weil man nach der am Ende des vorigen Paragraphen stehenden Bemerkung f von mehrfachen Wurzeln befreien kann, so dürfen wir annehmen, dass f_μ eine von Null verschiedene Constante ist. Man sieht ein, dass in der Reihe $f f_1 f_2 f_3 \ldots f_\mu$ nicht zwei auf einander folgende Functionen gleichzeitig für denselben Werth von z verschwinden können. Geschähe dies für $z = \gamma$ mit den Functionen $f_{\nu-1}$ und f_ν, so folgt aus dem Schema (A), dass auch $f_{\nu+1} f_{\nu+2} \ldots f_\mu$ für $z = \gamma$ verschwinden müssten, und dass also die Constante f_μ Null wäre, was gegen die Voraussetzung ist. — Wenn für einen reellen Werth $z = \gamma$ eine Function f_ν der Reihe $f_1 f_2 \ldots f_{\mu-1}$ verschwindet, so haben $f_{\nu-1}(\gamma)$ und $f_{\nu+1}(\gamma)$ entgegengesetzte Zeichen, denn es folgt aus (A) $f_{\nu-1}(\gamma) = -f_{\nu+1}(\gamma)$.

Lassen wir nun z stetig von dem reellen Werthe α bis zu dem reellen Werthe β zunehmen, so können die Werthe $f, f_1, f_2 \,.\,., f_{\mu-1}$ nur ihr Vorzeichen wechseln, wenn z durch einen Werth γ hindurchgeht, der eine oder mehrere der Functionen f_ν zum Verschwinden bringt. Verschwindet $f_\nu(\gamma)$, so kann man h so klein annehmen, dass $f_{\nu-1}$ und $f_{\nu+1}$ zwischen $\gamma - h$ und $\gamma + h$ nicht verschwinden, und folglich behält der Werth jeder der beiden Functionen $f_{\nu-1}\ f_{\nu+1}$ sein Vorzeichen, wenn z von $\gamma - h$ bis $\gamma + h$ wächst, und es ist $sgn\, f_{\nu-1} = -sgn\, f_{\nu+1}$ für alle z zwischen $\gamma - h$ und $\gamma + h$. — Sagt man, die Reihe $ABCD\,.\,.$ enthalte so viele Zeichenfolgen als auf eine positive Grösse eine positive, oder auf eine negative Grösse eine negative folgt, und so viele Zeichenwechsel als auf eine positive eine negative oder umgekehrt folgt, so ist die Anzahl der Zeichenwechsel der drei Grössen $f_{\nu-1}\ f_\nu\ f_{\nu+1}$ in dem Intervalle $\gamma - h$ bis $\gamma + h$ stets dieselbe, nämlich Eins. Dasselbe gilt für jedes Tripel von auf einander folgenden Gliedern der Reihe $f\, f_1\, f_2 \,.\,.\, f_\mu$. Wenn demnach z von $\gamma - h$ bis $\gamma + h$ wächst, wenn für $z = \gamma$ eine oder einige der Functionen f_ν verschwinden, so bleibt dabei die Anzahl der Zeichenwechsel in der Functionenreihe $f\, f_1\, f_2 \,.\,.\, f_\mu$ ungeändert. Geht aber z durch einen Werth γ hindurch, für welchen $f(z)$ selbst verschwindet (und für welchen auch einige der Werthe $f_2\, f_3 \,.\,.\, f_{\mu-1}$ verschwinden können), so wechselt, wenn z von $\gamma - h$ bis $\gamma + h$ wächst, das Verhältniss $f(z) : f_1(z)$ sein Zeichen, weil es den Factor $z - \gamma$ einfach enthält, und zwar geht es vom negativen zum positiven über[1]), so dass aus einem Zeichenwechsel eine Zeichenfolge wird. Wird demnach z von $z = \alpha$ bis $z = \beta$ auf reellem Wege geführt, so geht in der Reihe $f, f_1, f_2 \,.\,., f_\mu$ jedesmal dann, aber auch nur dann ein Zeichenwechsel verloren, wenn z durch einen Werth hindurchgeht, in welchem f verschwindet. Hieraus fliesst der Sturm'sche Satz: Bildet man nach dem oben beschriebenen Verfahren aus f die Reihe Sturm'scher Functionen $f(z)\, f_1(z)\, f_2(z) \,.\,.\, f_{\mu-1}(z)\, f_\mu$ und aus ihnen die Werthe

$$\text{I)}\quad f(\alpha)\ f_1(\alpha)\ f_2(\alpha)\ \cdot\cdot\ f_{\mu-1}(\alpha)\, f_\mu, \qquad \text{II)}\quad f(\beta)\ f_1(\beta)\ f_2(\beta)\ \cdot\cdot\ f_{\mu-1}(\beta)\ f_\mu,$$

und ist die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe I gleich a, der in der Reihe II gleich b, so ist $a - b$ die Anzahl der zwischen α und β gelegenen (also reellen) Wurzeln der Gleichung $f = o$.

Will man wissen, wie viele reelle Wurzeln $f(z)$ überhaupt hat, so braucht man nur α sehr gross negativ, β sehr gross positiv anzunehmen. Ohne weiteren Beweis merken wir an, dass der Sturm'sche Satz die Anzahl der verschiedenen zwischen α und β gelegenen Wurzeln auch richtig angiebt, wenn mehrfache vorkommen. Ueber deren Multiplicität giebt er aber keine Auskunft.

Bei Bildung der Reihe $f_1\, f_2 \,.\,.$ kann man positiv constante Factoren ohne Weiteres, auch mitten im Bildungsalgorithmus, unterdrücken, weil sie auf die Vorzeichen ohne Einfluss sind. — Ist z. B.

$$f = x^3 + px + q,$$

so ist

$$f_1 = 3x^2 + p, \quad f_2 = -2px - 3q, \quad f_3 = -(4p^3 + 27q^2).$$

Bezeichnen wir nun einen sehr grossen negativen Werth von α mit $-\omega$, einen positiven von β mit $+\omega$, so ist

$$\begin{array}{lllll} \text{I} & sgn\, f(-\omega) = -, & sgn\, f_1(-\omega) = +, & sgn\, f_2(-\omega) = sgn\, p, & sgn\, f_3(-\omega) = -sgn\,(4p^3 + 27q^2) \\ \text{II} & sgn\, f(\omega) = +, & sgn\, f_1(\omega) = +, & sgn\, f_2(\omega) = -sgn\, p, & sgn\, f_3(\omega) = -sgn\,(4p^3 + 27q^2). \end{array}$$

Soll die Reihe I nur Zeichenwechsel haben, so muss $p < 0$, $4p^3 + 27q^2 < 0$ sein, dann hat die letzte nur Folgen, und die Gleichung hat drei reelle Wurzeln (irreducibler Fall). Da aus $4p^3 + 27q^2 < 0$ von selbst $p < 0$ folgt, so bedeutet

$$4p^3 + 27q^2 < 0,$$

dass die vorgelegte Gleichung dritten Grades drei reelle Wurzeln hat.

---

[1]) $f(z) : f'(z) = [f'(\gamma)(z-\gamma) + \frac{1}{2}f''(\gamma)(z-\gamma)^2 \,.\,.] : [f'(\gamma) + f(\gamma)(z-\gamma) + \,.\,.] = (z-\gamma)\,[1 + C_1(z-\gamma) + C_2(z-\gamma)^2 \,.\,.]$. Von dem Factor von $z - \gamma$ im letzten Gliede braucht man nur zu wissen, dass er eine stetige Function von z ist, die für $z = \gamma$ einen positiven Werth hat.

§ 58. Partialbrüche. Eine rationale Function lässt sich in eine Summe einfacherer Functionen zerlegen, nämlich in eiue Summe positiver und negativer Potenzen von Binomen, und es ist diese Zerlegung besonders für die Integralrechnung wichtig. Zunächst kann man den Quotienten $f(z):g(z)$ der ganzen Functionen f und g — in dieser Form ist jede rationale Function enthalten — in eine ganze Function und eine ächt gebrochene Function zerlegen. Wir können deshalb, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, annehmen, dass wir es mit einer ächt gebrochenen Function $f(z):g(z)$ zu thun haben. Nun möge $g(z)$ den Factor $z-z_1$ α-mal enthalten, so dass $g(z)=(z-z_1)^\alpha g_1(z)$ gesetzt werden kann, und $g_1(z_1)$ nicht verschwindet. Setzen wir dann

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f(z)}{(z-z_1)^\alpha g_1(z)}=\frac{f(z)-A_{10}g_1(z)}{(z-z_1)^\alpha g_1(z)}+\frac{A_{10}}{(z-z_1)^\alpha},\ A_{10}=\frac{f(z_1)}{g_1(z_1)},$$

so fehlt, wenn man die ganze Function $f(z)-A_{10}g_1(z)$ nach Potenzen von $z-z_1$ entwickelt, das von $z-z_1$ freie Glied, und der Factor $z-z_1$, oder eine Potenz desselben, etwa die λ^{te} lässt sich fortheben, so dass man erhält

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{h(z)}{(z-z_1)^{\alpha-\lambda}g_1(z)}+\frac{A_{10}}{(z-z_1)^\alpha},\ \lambda\geqq 1,$$

worin $h(z):(z-z_1)^{\alpha-\lambda}g_1(z)$ eine ächt gebrochene Function ist, deren Nenner den Factor $z-z_1$ weniger oft enthält als der ursprüngliche Nenner $g(z)$. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens auf $h(z):(z-z_1)^{\alpha-\lambda}g_1(z)$ gelangt man zu einem Ausdruck von der Form

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A_{10}}{(z-z_1)^\alpha}+\frac{A_{11}}{(z-z_1)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{1\,\alpha-1}}{z-z_1}+\frac{f_1(z)}{g_1(z)},$$

wo $f_1(z):g_1(z)$ eine ächt gebrochene Function ist. In Bezug auf die übrigen Factoren von $g(z)$ kann man ebenso verfahren. Wenn demnach

$$g(z)=\text{Const.}\ (z-z_1)^\alpha(z-z_2)^\beta\ldots(z-z_m)^\mu$$

ist, so lässt sich $f(z):g(z)$ in der Form darstellen

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A_{10}}{(z-z_1)^\alpha}+\frac{A_{11}}{(z-z_1)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{1\alpha-1}}{z-z_1}+\frac{A_{20}}{(z-z_2)^\beta}+\ldots+\frac{A_{2\beta-1}}{(z-z_2)}+\ldots+\frac{A_{m0}}{(z-z_m)^\mu}+\ldots+\frac{A_{m\mu-1}}{z-z_m}.$$

Dazu kommt noch eine ganze Function, wenn f von höherem Grade als g ist. Die Zahlen $A_{1\alpha-1}\ A_{1\beta-1}\ldots A_{m\mu-1}$ nennt man die Residuen der Function $f(z):g(z)$ bezw. in den Puncten $z_1\ z_2\ldots z_m$. Manchmal ist es bequem, auch für $A_{1\alpha-2}$, $A_{1\alpha-3}\ldots$ Namen zu haben, man kann sie zweites, drittes .. Residuum im Puncte z_1 nennen.

Das Verfahren der Zerlegung in Partialbrüche, wie man die gegebene Darstellung nennt, ist ein vollkommen eindeutiges, und die Darstellung durch Partialbrüche ist deshalb nur auf eine Weise möglich.

Sind die Factoren von $g(z)$ alle von einander verschieden, so ist die Partialbruchzerlegung besonders einfach. Es sei $f(z):g(z)$ ächt gebrochen, ferner sei $g(z)=A(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$, und $(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{\mu-1})(z-z_{\mu+1})\ldots(z-z_n)=\Delta_\mu(z)$, so ist, wenn $f(z):g(z)=\Sigma A_\mu:(z-z_\mu)$ gesetzt wird,

$$\lim_{z=z_\mu}\frac{f(z)(z-z_\mu)}{g(z)}=\lim_{z=z_\mu}\frac{f(z)}{A\Delta_\mu(z)}=\frac{f(z_\mu)}{A\Delta_\mu(z_\mu)}$$

$$=\lim_{z=z_\mu}\left(\frac{A_1(z-z_\mu)}{z-z_1}+\ldots+\frac{A_{\mu-1}(z-z_\mu)}{z-z_{\mu-1}}+A_\mu+\frac{A_{\mu+1}(z-z_\mu)}{z-z_{\mu+1}}+\ldots\right),\quad A_\mu=\frac{f(z_\mu)}{A\Delta_\mu(z_\mu)}.$$

Es lässt sich aber $A\varDelta_\mu(z_\mu)$ noch einfacher ausdrücken. Da nämlich

$$g(z) = g(z_\mu) + g'(z_\mu)(z-z_\mu) + g''(z_\mu)\frac{(z-z_\mu)^2}{1.2} + \ldots$$

ist und $g(z_\mu)$ verschwindet, so ist

$$g(z):(z-z_\mu) = A\varDelta_\mu(z) = g'(z_\mu) + g''(z_\mu)\frac{(z-z_\mu)}{1.2} + \ldots,$$

$$A\varDelta_\mu(z_\mu) = g'(z_\mu).$$

Also ist

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_1)}{g'(z_1)(z-z_1)} + \frac{f(z_2)}{g'(z_2)(z-z_2)} + \frac{f(z_3)}{g'(z_3)(z-z_3)} + \ldots + \frac{f(z_n)}{g'(z_n)(z-z_n)}.$$

Besitzt $g(z)$ einen mehrfachen Factor, ist jedoch $z-z_0$ ein einfach vorkommender Factor, so ist der diesem Factor entsprechende Partialbruch immer noch in der Form $f(z_0):g'(z_0)\,(z-z_0)$ enthalten. —

Ein anderer einfacher Fall ist der, in welchem $f(z) = g'(z)$ die Ableitung von $g(z)$ ist. Dann ist, wenn $g(z)$ den Factor $(z-z_0)^m$ hat

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{g'(z_0) + g''(z_0)(z-z_0) + \ldots + g^{(m-1)}(z_0)\dfrac{(z-z_0)^{m-2}}{fac\,(m-2)} + g^{(m)}(z_0)\dfrac{(z-z_0)^{m-1}}{fac\,(m-1)} + g^{(m+1)}(z_0)\dfrac{(z-z_0)^m}{fac\,m} + \ldots}{g(z_0) + g'(z_0)(z-z_0) + g''(z_0)\dfrac{(z-z_0)}{1.2} + \ldots + g^{(m)}(z_0)\dfrac{(z-z_0)^m}{fac\,m} + \ldots}$$

$$= \frac{g^{(m)}(z_0)\dfrac{(z-z_0)^{m-1}}{fac\,(m-1)} + g^{(m+1)}(z_0)\dfrac{(z-z_0)^m}{fac\,m} + \ldots}{g^{(m)}(z_0)\dfrac{(z-z_0)^m}{fac\,m} + g^{m+1}(z_0)\dfrac{(z-z_0)^{m+1}}{fac\,(m+1)} + \ldots} = \frac{m}{z-z_0}\cdot\frac{g^{(m)}(z_0) + g^{(m+1)}(z_0)(z-z_0) + \ldots}{g^{(m)}(z_0) + g^{(m+1)}(z_0)\dfrac{z-z_0}{m+1} + \ldots},$$

weil $g(z_0) = g'(z_0) = \ldots = g^{(m-1)}(z_0) = 0$ ist. Diese rationale Function besitzt also, wenn $m \geqq 1$ ist, im Zähler und Nenner den gemeinsamen Factor $(z-z_0)^{m-1}$, und es tritt daher, nach Fortschaffung solcher gleichen Factoren der soeben behandelte Fall ein, dass der Nenner nur verschiedene lineare Factoren enthält. Das Residuum von $g'(z):g(z)$ im Puncte z_0 ist m, wodurch die Zerlegung erhalten wird

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{m_1}{z-z_1} + \frac{m_2}{z-z_2} + \ldots + \frac{m_\mu}{z-z_\mu},\quad g(z) = A(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\ldots(z-z_\mu)^{m_\mu}.$$

Der Lernende mag als Uebungsbeispiel einer Partialbruchzerlegung das folgende wählen

$$\frac{z^6-3z^5+5z^4-6z^3+8z^2-3z+2}{z^5-z^4+2z^3-2z^2+z-1} = z-2+\frac{1}{z-1} - \frac{\frac{1}{4}(1+i)}{(z-i)^2} - \frac{\frac{1}{4}i}{z-i} - \frac{\frac{1}{4}(1-i)}{(z+i)^2} + \frac{\frac{1}{4}i}{z+i}.$$

So sind die rationalen Functionen durch eine Summe von Potenzreihen von unbeschränkter Convergenz dargestellt. Singulär sind nur einzelne Puncte, z. B. der Punct z_0, wenn eine der Reihen nach (negativen) Potenzen von $z-z_0$ fortschreitet. Wegen der Einfachheit dieser Singularität wird sie eine ausserwesentliche und die Stelle z_0 ein Pol der Function genannt, der ein mehrfacher ist, wenn $z-z_0$ in einer höheren negativen Potenz auftritt, als der ersten.

Die oben Residuen genannten Grössen sind eindeutig bestimmt, wollte man dieses Wort auch noch auf Coëfficienten des ganzen Theiles der Partialbruchzerlegung anwenden, die Coëfficienten etwa die Residuen im Unendlichen nennen, so ist dies nicht möglich ohne Hineintragung eines willkürlichen Elementes, weil die Coëfficienten, von höchsten abgesehen, verschieden ausfallen, wenn man den ganzen Theil nach Potenzen von $z-a$ entwickelt, und wenn man a auf verschiedene Werthe fallen lässt. In meinem „Abriss einer Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen und der Thetafunctionen" habe ich die Coëfficienten des ganzen Theiles Residuen genannt, wenn er nach Potenzen des Monoms z fortschreitet.

§ 59. Eine rationale Function nimmt jeden Werth gleich oft an. Es sei $f(z):g(z)=A$, so hat die Gleichung $f-Ag=0$, was auch A sein mag, dieselbe Anzahl von Wurzeln, nämlich so viel als der Grad von $f-Ag$ beträgt. Sind mehrfache darunter, so sagen wir $f(z):g(z)$ nehme den Werth A an einer Stelle mehrmals an. Sind f und g von verschieden hohem Grade, so macht nur der Werth $A=0$ eine Ausnahme, wenn f von niederem Grade ist als g. Ist f vom Grade m, g vom Grade n, und ist $m<n$, so sagen wir, es nehme $f:g$ den Werth Null im Unendlichen $(n-m)$-mal an, dann bleibt der Satz auch für diesen Fall bestehen. Da $fz^{n-m}:g$ sich mit wachsenden z einer bestimmten von Null verschiedenen Zahl M nähert, so wird für wachsende z $f:g$ immer näher $M:z^{n-m}$. $M:z$ nähert sich der Null für $lim\ z=\infty$ in der ersten Ordnung, wie man sagt, $M:z^{n-m}$ in der $(n-m)^{ten}$, oder es nimmt $f:g$ den Werth Null im Unendlichen $(n-m)$-mal an. Was das zu bedeuten hat, geht aus dem Gesagten klar genug hervor; wir kommen aber noch darauf zurück. Sind f und g von gleichem Grade, so ist im Allgemeinen $f-Ag$ von demselben Grade. Für einen speciellen Werth von A kann sich aber die höchste, oder es können sich die ν höchsten Potenzen fortheben. Wir sagen dann ebenfalls $f:g$ nehme den Werth A im Unendlichen ν-mal an, wie man in der Geometrie sagt, ein Asymptote habe im Unendlichen mit einer Curve zwei (oder mehr) Puncte gemein. Obschon ∞ kein Werth ist, so sagt man doch $f:g$ nehme auch den Werth ∞ ebenso oft an als den Werth A, weil, wenn sich z einer Wurzel von $g(z)$ nähert, $f:g$ über alle Grenzen wächst. Ist die Wurzel eine mehrfache, so sagen wir $f:g$ werde dort mehrmals oder in höherer Ordnung unendlich gross Ist der Grad von f höher als der von g, so wird der Quotient im Unendlichen unendlich in erster oder in höherer Ordnung. Mit diesen Nebenbestimmungen bleibt der Satz am Kopfe dieses Paragraphen unter allen Umständen richtig.

§ 60. Die rationalen Functionen im Unendlichen. Setzt man $\zeta=1:z$ $z=1:\zeta$, so nähert sich ζ dem Werthe Null, wenn *abs* z über alle Grenzen wächst. Man spricht deshalb von einem Puncte Unendlich der z Ebene, weil man durch die Beziehung $\zeta=1:z$ zu einem einzelnen Puncte der ζ Ebene gelangt, wenn z auf irgend eine Weise in irgend einer Richtung über alle Grenzen wächst. In der Geometrie stellt man sich bekanntlich die Ebene als von einer Geraden begrenzt vor, weil die unendlich fernen Puncte durch Collineation auf eine Gerade bezogen werden können. Nimmt man für die Analysis ebenfalls die lineare Beziehung $z=1:\zeta$ oder $z=a:b(\zeta-c)$ als die Terminologie bestimmend an, so gelangt man mit Nothwendigkeit dazu, von einem unendlich fernen Puncte der Ebene zu reden, weil durch die lineare Beziehung das unendlich Ferne (über alle Grenzen Ferne) eben auf einen Punct abgebildet wird. Man stellt sich etwa die Ebene als unendlich grosse Kugel vor, die eine in sich geschlossene, eine nicht begrenzte Fläche ist. Eine solche Vorstellung ist natürlich nur ein nebenhergehendes äusseres Hülfsmittel. Man sagt[1]) eben, eine Function $f(z)$ habe im Unendlichen dies oder jenes Verhalten, wenn die Function $f(1:\zeta)$ dieses Verhalten im Puncte $\zeta=0$ besitzt. So hat eine ganze Function $f(z)$ vom n^{ten} Grade im Unendlichen einen n-fachen Pol, weil $f(1:\zeta)$ einen solchen im Puncte Null hat. Der Quotient $f(z):g(z)$ verschwindet im Unendlichen ν-mal, wenn der Grad von g um die Zahl ν höher ist als der von f, sie hat dort einen ν-fachen Pol, wenn der Grad von f um ν höher ist als der von g, sie hat im Unendlichen einen bestimmten, endlichen Werth, wenn der Grad von f und g derselbe ist. Eine rationale Function besitzt nur ausserwesentlich singuläre Stellen in bestimmter Anzahl, nämlich da, wo $g(z)$ verschwindet und eventuell im Puncte Unendlich.

[1]) Wir kommen überein eine complexe Zahl z sehr gross oder sehr klein zu nennen, wenn *abs* z sehr gross oder sehr klein ist.

Die Potenzreihen und die regulären Functionen.

§ 61. Functionen vom Charakter einer ganzen Function. Bei der Erweiterung des Zahlensystems von den gemeinen zu den irrationalen Zahlen spielte der Begriff „Unendlich" eine hervorragende Rolle, der durch die Folgentheorie in unanfechtbarer Weise der mathematischen Behandlung zugänglich gemacht wurde. Die ganzen und rationalen Functionen sind im Voraufgehenden durch eine Summe von Potenzen dargestellt worden. Es ist demnach naheliegend, dem Uebergange vom Rationalen zum Irrationalen einigermaassen analog, eine Erweiterung des Begriffes der ganzen und rationalen Functionen, die durch Potenzsummen dargestellt wurden, durch unendliche Potenzreihen zu erstreben. Diese Erweiterung, zu der die Mittel in den §§ 16—21 bereit liegen, gelingt in vollkommen befriedigender Weise, nur werden durch unendliche Potenzreihen im Allgemeinen Functionen nicht unmittelbar für alle Werthe der Veränderlichen definirt, sondern in einem beschränkten Gebiete, dem Convergenzgebiete. Die Erweiterung dieses Gebietes durch Fortsetzung mittels Potenzreihen ist wiederum eine wohlbestimmte. Eine solche, eine Function nur in einem beschränkten Gebiete darstellende Potenzreihe heisst ein Functionselement, die Auffindung einer hinreichenden Anzahl möglichst einfacher Functionselemente, die eine Function in ihrem ganzen Verlaufe darstellen, gehört zu den Erfordernissen einer vollkommenen Erkenntniss einer Function. Ja es ist ein wesentlicher Theil des Inhaltes der elementaren Functionentheorie, die Darstellung derjenigen Functionen durch Potenzreihen, durch Functionselemente zu erbringen, die historisch sowohl als auch aus inneren Gründen zuerst Gegenstand der analytischen Forschung geworden sind, der elementaren Functionen. Unter diesen müssen als die einfachsten diejenigen angesehen werden, welche durch ein einziges Element überall dargestellt werden, die sogenannten ganzen transcendenten Functionen.

Eine Potenzreihe ist eine Reihe von der Form

$$f(z) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \,.\,.\, + A_n(z-a)^n + \,.\,.,$$

und eine Function, welche durch eine solche Potenzreihe in einem Gebiete, in dem sie convergirt, dargestellt ist, heisst in diesem Gebiete eine Function der complexen Veränderlichen z. Wir nennen diese Darstellung eine Darstellung im Puncte a oder in der Umgebung des Punctes a, und schreiben der Function im Gebiete der absoluten Convergenz den Charakter einer ganzen Function zu, oder wir nennen sie kürzer dort regulär. Es wäre wohl zulässig, von vorn herein Reihen als Darstellungselemente anzusehen und zu benutzen, welche neben ganzen positiven Potenzen von $z-a$ auch noch einige, ja sogar unendlich viele negative Potenzen von $z-a$ enthielten (absteigende Potenzreihen); doch empfiehlt es sich der Diction halber wenigstens zunächst unter einer Potenzreihe schlechthin eine solche zu verstehen, welche nach ganzen (aufsteigenden) Potenzen eines Binoms oder von z selbst fortschreitet, und das Vorkommen negativer Potenzen besonders zu kennzeichnen.

Uebereinkommen. Um die Bezeichnung zu vereinfachen, soll eine Reihe von der Form $\varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \,.\,.\, + \varphi(n) + \,.\,.$ kurz durch $\Sigma\varphi(m)$ bezeichnet werden, so dass Σ typisch eine unendliche Summation bedeutet und m ohne Weiteres den Summationsbuchstaben, der der Reihe nach die Zahlen $0\;1\;2\,.\,.\,n\,.\,.$ ohne Ende durchläuft. Kommen mehrere Summationen hinter einander vor, so soll für m auch $m'\,m''\,.\,.$ oder $m_1\,m_2\,.\,.$ eintreten dürfen.

§ 62. Convergenzgebiet. Convergirt die Reihe $\Sigma A_m(z-a)^m$ für $z = Z$, so ist dieselbe absolut convergent, so lange $abs\,(z-a) < abs\,(Z-a)$ ist, oder in graphischer Terminologie im Innern eines Kreises, dessen Mittelpunct a ist, und auf dessen Rande Z liegt. — Da nach der Voraussetzung $\Sigma A_m(Z-a)^m$ convergirt, so müssen die Zahlen $B_m = A_m(Z-a)^m$ dem absoluten

Betrage nach mit wachsenden n gegen Null convergiren, und es giebt daher eine obere Grenze für den absoluten Betrag der Zahlen der complexen Folge $B_0, B_1, B_2, \ldots$, die G sein mag. Die Terme der Reihe

$$A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots + A_n(z-a)^n + \ldots = B_0 + B_1\frac{z-a}{Z-a} + B_2\left(\frac{z-a}{Z-a}\right)^2 + \ldots + B_n\left(\frac{z-a}{Z-a}\right)^n + \ldots$$

sind aber, so lange $abs\,(z-a) < abs\,(Z-a)$ ist, kleiner als die entsprechenden Terme der Reihe

$$G + G\frac{z-a}{Z-a} + G\left(\frac{z-a}{Z-a}\right)^2 + G\left(\frac{z-a}{Z-a}\right)^3 + \ldots = \Sigma G\left(\frac{z-a}{Z-a}\right)^m.$$

Dies ist aber die geometrische Reihe mit dem Factor G, sie convergirt gegen den Werth $G(Z-a) : (Z-z)$, so lange $abs\,(z-a) < abs\,(Z-a)$ ist. Nach dem im § 18 ausgesprochenen Princip der Reihenvergleichung ist demnach $\Sigma A_m(z-a)^m$ im Innern des Kreises, dessen Radius $abs\,(Z-a)$, dessen Mittelpunct a ist, absolut convergent, w. z. b. w. Man muss sich hüten, diesen Schluss auf den Rand des Convergenzgebietes, den Convergenzkreis, ohne Weiteres auszudehnen. Dort braucht die Reihe weder absolut noch überhaupt convergent zu sein.

Das im § 18 (Seite 24 unten) gewonnene Convergenzkriterium, das den Grenzwerth zweier auf einander folgender Glieder untersucht, ist bei Potenzreihen in der Regel sehr bequem anzuwenden. Ist $lim\ abs\,(z-a)A_{n+1} : abs\,A_n$ für wachsende n angebbar kleiner als Eins, so convergirt die Reihe. Sind $A_0 A_1 \ldots A_n \ldots$ unter einer bestimmten Zahl M ihrem absoluten Betrage nach bleibende Zahlen, so ist die Reihe absolut convergent, so lange $abs\,(z-a) < 1$ ist.

Ist die Reihe $\Sigma A_m(z-a)^m$ im Innern und auf dem Rande eines um a mit dem Radius r geschlagenen Kreises absolut convergent, so giebt es eine Zahl G, über die $abs\,\Sigma A_m(z-a)^m$ nicht hinausgeht, wenn z in diesem Kreise oder auf seinem Rande beliebige Lagen einnimmt. Eine solche Zahl ist $\Sigma\ abs\,A_m r^m$.

Stellt die Reihe $\Sigma A_m(z-a)^m$ die Function $f(z)$ in einer Umgebung des Punctes a dar, d. h. ist die Reihe in irgend einem Kreise um a convergent, so kann man für $abs\,(z-a)$ so kleine Werthe annehmen, dass das Anfangsglied der Reihe die Summe der übrigen beliebig vielmal übertrifft (vgl. § 44). — Aus den im § 21 in Bezug auf die Multiplication convergenter Reihen aufgestellten Sätzen folgt, dass auch geschrieben werden kann

$$f(z) = (z-a)^\mu A_\mu + (z-a)^{\mu+1}[A_{\mu+1} + (z-a)A_{\mu+2} + \ldots (z-a)^{n-\mu-1}A_n + \ldots],$$

wenn etwa $A_0 A_1 \ldots A_{\mu-1}$ Null sind, A_μ aber nicht 0 ist, wo $\mu = 0$ sein kann. Im Innern und auf dem Rande eines Kreises um a mit dem Radius r sei die Reihe absolut convergent, und es sei $abs\,[A_{\mu+1} + (z-a)A_{\mu+2} + \ldots] \leqq G$, so kann $f(z) = A_\mu(z-a)^\mu + \varepsilon(z-a)^{\mu+1}G$ gesetzt werden, wo $abs\,\varepsilon \leqq 1$ ist. Offenbar aber kann man in dem Ausdrucke $abs\,(z-a)^\mu A_\mu : abs\,(z-a)^{\mu+1}\varepsilon G = abs\,A_{\mu+1} : G\ abs\,\varepsilon\,(z-a)$ die Veränderliche $z-a$ absolut so klein machen, dass dieser Ausdruck über jede noch so grosse Zahl P hinausgeht, so dass $abs\,(z-a)^\mu A_\mu > P\ abs\,(z-a)^{\mu+1}G > P\ abs\,[A_{\mu+1}(z-a)^{\mu+1} + A_{\mu+2}(z-a)^{\mu+2} + \ldots]$ wird, w. z. b. w. — Hieraus folgt ganz wie in § 49, dass $abs\,f(z)$ im Innern des Convergenzkreises kein Maximum oder Minimum haben kann.

§ 63. Stetigkeit der durch Potenzreihen dargestellten Functionen. Hat die Function $f(z)$ in der Umgebung des Punctes a den Charakter einer ganzen Function, lässt sie sich also in eine nach ganzen Potenzen von $z-a$ fortschreitende Reihe entwickeln, die in einem bestimmten, wenn auch kleinem Gebiete convergirt, so ist sie in diesem Kreise eine stetige Function von z. — Die Reihe $\Sigma A_m(z-a)^m$ convergire, so lange $abs\,(z-a) < R$ ist. Es liege z im Innern dieses Gebietes, und h sei eine so kleine Zahl, dass $abs\,(z-a) + abs\,h < R$ ist. Dann ist mit Anwendung des binomischen Lehrsatzes

$$\begin{array}{rl} f(z+h) = & \Sigma A_n(z-a+h)^m \\ = & A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \,.\,.+\,.\,.\, + A_n(z-a)^n + \,.\,. \\ & + A_1 h \quad + 2A_2(z-a)h + \,.\,.+\,.\,.\, + nA_n(z-a)^{n-1}h + \,.\,. \\ & + A_2 h^2 \quad + \,.\,.+ \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}A_n(z-a)^{n-2}h^2 + \,.\,. \\ & + \,.\,.+ \ldots\ldots\ldots + \,.\,. \\ & + \quad A_n h^n \quad + \,.\,. \\ & + \,.\,. \end{array}$$

Da nun wegen der vorausgesetzten absoluten Convergenz auch noch die Reihe

$$\Sigma \, abs \, A_m [abs\,(z-a) + abs\, h]^m$$

convergent ist, so ist auch die entstandene Doppelreihe, weil bei vertikaler Summation, bei welcher die unter einander stehenden Glieder sich wieder zu einem Binom vereinigen lassen, so auch bei jeder Summation absolut convergent (§ 19). Es kann daher

$$f(z+h) = f(z) + hf'(z) + \frac{h^2}{1\,.\,2}f''(z) + \,.\,.+ \frac{h^n}{fac\, n}f^{(n)}(z) + \,.\,.$$

geschrieben werden, worin zur Abkürzung

$$\begin{array}{rl} f'(z) = & A_1 + 2A_2(z-a) + 3A_3(z-a)^2 + \,.\,.+ nA_n(z-a)^{n-1} + \,.\,., \\ f''(z) = & 2A_2 + 3\,.\,2A_3(z-a) + \,.\,.+ n\,.\,(n-1)A_n(z-a)^{n-2} + \,.\,., \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ f^{(k)}(z) = & fac\, k\, A_k + (k+1)k\,.\,(k-1)\,.\,.\,2\,.\,A_{k+1}(z-a) + \,.\,.+ n\,.\,(n-1)\,.\,.\,(n-k+1)A_n(z-a)^{n-k} + \,.\,., \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

gesetzt wird. Nun kann man aber (§ 62) den absoluten Betrag von h so klein annehmen, dass sich der Werth der Reihe $\Sigma f^{(m)}(z)\,(z-a)^m : fac\, m$ von ihrem ersten Gliede, also von $f(z)$ dem absoluten Betrage nach beliebig wenig unterscheidet, oder es kann, wenn σ beliebig klein vorgegeben wird, und $abs\, \zeta \leqq 1$ ist,

$$abs\,[f(z+\zeta h) - f(z)] < \sigma$$

gemacht werden, womit die Stetigkeit erwiesen ist.

Die Functionen $f'(z), f''(z), \,.\,.$ heissen bez. die erste, zweite, .. Ableitung von $f(z)$, und sie besitzen denselben Convergenzkreis als die Mutterfunction $f(z)$, d. h. im Innern des Kreises, in dem die Reihe $f(z)$ convergirt, convergiren auch ihre Ableitungen, und haben also eben da den Charakter einer ganzen Function. Auf den Rand dieses Kreises darf dieser Satz aber nicht ausgedehnt werden.

Da die Ableitung[1]) ganz formal definirt ist, so erkennt man unmittelbar, dass die Ableitung einer Potenzreihe eine aus den Ableitungen ihrer Terme gebildete Reihe ist. Ebenso dass die μ^{te} Ableitung der ν^{ten} Ableitung die $(\mu+\nu)^{te}$ Ableitung ist. Die Ableitung einer Summe von Functionen, die nach Potenzen desselben Binoms entwickelbar sind, ist die Summe der Ableitungen der einzelnen Functionen, und ist A eine Constante, so ist $[A\,f(z)]' = A\,f'(z)$.

§ 64. Methode der unbestimmten Coëfficienten. Ist $z_1, z_2, z_3, \,.\,., z_n \,.\,.$ eine reguläre Folge verschiedener Zahlen, die gegen a convergiren ($lim\, z_n = a$), und stimmen zwei nach Potenzen

---

[1]) Der wesentliche Unterschied zwischen Ableitung und Differentialquotient besteht darin, dass letzterer unendlich oft da vorhanden ist, wo von einer Ableitung, wie sie hier definirt ist, nicht die Rede sein kann. Die Ableitung hat zu ihrer Voraussetzung eine Function, die durch eine Potenzreihe darstellbar ist. — Die Ableitung ist unabhängig von h, also auch von $arc\ h$.

von $z-a$ entwickelte Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$ für $z=z_1, z_2, .., z_n, ..$ überein, wobei natürlich die Convergenz dieser Reihen für jede dieser Zahlen vorausgesetzt wird, die dann von selbst (§ 62) von einer bestimmten ab für jede folgende eine absolute Convergenz ist, so sind $f(z)$ und $\varphi(z)$ im ganzen Convergenzgebiete identisch gleich. — Es sei

$$f(z)=A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+.., \quad \varphi(z)=B_0+B_1(z-a)+B_2(z-a)^2+..,$$

so ist zu beweisen, dass $A_0=B_0$, $A_1=B_1$, $A_2=B_2$, .. ist. — Es ist $f(z_n)=\varphi(z_n)$, dabei können wir n so gross, oder $abs\,(z_n-a)$ so klein annehmen, dass nach § 62 $f(z_n)=A_0+\varepsilon_n$, $\varphi(z_n)=B_0+\eta_n$ wird, wo ε_n, η_n absolut genommen beliebig klein werden, wenn n gross genug genommen wird, $A_0\,B_0$ unterscheiden sich demnach von einander um weniger als eine Zahl, deren absoluter Betrag beliebig klein angenommen werden kann, also sind sie gleich, $A_0=B_0$. Wird nun angenommen, dass $A_1=B_1$, $A_2=B_2, .., A_{m-1}=B_{m-1}$ sei, so muss auch $A_m=B_m$ sein. Da nämlich unter dieser Voraussetzung für $z=z_1, z_2, z_3, .., z_n, ..$

$$(z-a)^m(A_m+A_{m+1}(z-a)+..)=(z-a)^m(B_m+B_{m+1}(z-a)+..)$$

ist, und die in Klammern stehenden Reihen für diese Werthe von z absolut convergent sind, so kann man für $z-a$ wieder eine (von Null verschiedene) Zahl z_n-a setzen, die absolut genommen so klein ist, dass die in Klammern stehenden Reihen sich von A_m bez. B_m beliebig wenig unterscheiden, woraus dann nach Division mit $(z_n-a)^m$ folgt, $A_m=B_m$, w. z. b. w. Hieraus folgt nachträglich, dass die in Klammern stehenden Reihen auch für $z=a$ einander gleich sind. A priori konnte man das nicht wissen, weil für $z=a$ der Factor $(z-a)^m$ verschwindet, und aus der Gleichung $0.P=0.Q$ nicht $P=Q$ geschlossen werden darf. — Verschwindet $f(z)=\Sigma A_m(z-a)^m$ in der Zahlenfolge $z_1\,z_2\,..\,z_n\,..$, $lim\,z_n=a$, so ist $A_0=A_1=..A_m=..=0$, dies ist ein specieller Fall der Methode der unbestimmten Coëfficienten, aus dem der allgemeine leicht hergeleitet werden kann.

§ 65. Verallgemeinerung der Methode der unbestimmten Coëfficienten auf Doppelreihen. Ist

$$f(z,\zeta)=A_{00}+A_{10}z+A_{01}\zeta+A_{20}z^2+A_{11}z\zeta+A_{02}\zeta^2+..+A_{n,m}z^n\zeta^m+..,$$

und verschwindet $f(z,\zeta)$, wenn die Werthe z und ζ aus den regulären Folgen $z_1, z_2, z_3, .., z_n, ..$, $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, .., \zeta_n, ..$, $lim\,z_n=0$, $lim\,\zeta_n=0$, beliebig herausgegriffen werden, z. B. für $z=z_\mu$, $\zeta=\zeta_\nu$, $z=z_{\mu'}$, $\zeta=\zeta_{\nu'}$, .. so ist $A_{00}=0$, $A_{01}=0$, .., $A_{n,m}=0$, ...

Ordnen wir die Reihe, die für alle $z_\mu\,\zeta_\nu$ als absolut convergent vorausgesetzt wird, nach Potenzen von z, so sind die Coefficienten von $z^0, z^1, z^2, .., z^n, ..$ Potenzreihen in ζ, die für $\zeta=\zeta_1, \zeta_2, ..$ convergiren. Die Reihe nehme dadurch die Form an

$$\varphi_0(\zeta)+\varphi_1(\zeta)z+\varphi_2(\zeta)z^2+..+\varphi_n(\zeta)z^n+..=w(z),$$

worin $\varphi_0(\zeta), \varphi_1(\zeta), .., \varphi_n(\zeta), ..$ Potenzreihen sind, und deshalb für $\zeta=\zeta_1, \zeta_2, ..$ wohlbestimmte Werthe annehmen. Da nun die Reihe $w(z)$ für $z=z_1, z_2, .. z_n, ..$ verschwindet, und da diese Folge eine reguläre ist, deren Terme gegen Null convergiren, so müssen $\varphi_0(\zeta_\mu), \varphi_1(\zeta_\mu), \varphi_2(\zeta_\mu), .., \varphi_n(\zeta_\mu), ..$ sämmtlich Null sein. Die Reihe $\varphi_m(\zeta)$ ist gleich

$$A_{m,0}+A_{m,1}\zeta+A_{m,2}\zeta^2+..+A_{m,n}\zeta^n+..$$

und sie verschwindet für die Zahlen der Folge $\zeta_1, \zeta_2, .., \zeta_n, ..$, die eine reguläre ist, und deren Terme gegen Null convergiren. Demnach muss

$$A_{m0}=0,\ A_{m1}=0, .., A_{m,n}=0, ..$$

sein, und dies gilt für jedes m, womit der Satz erwiesen ist.

Stände in der Doppelreihe $z-a$ an Stelle von z und $\zeta-\alpha$ an Stelle von ζ, so müssten natürlich die Folgen $z_1, z_2, .., z_n, .., \zeta_1, \zeta_2, .., \zeta_n, ..$ bezw. gegen a und α convergiren. — Sind zwei solche Potenzreihen in jenen Folgen einander gleich, so sind sie identisch gleich.

Diese Sätze lassen sich auf mehrfache Potenzreihen ausdehnen. Sind $z_1 z_2 .. z_n$ die Veränderlichen, so sagt man, der Term

$$A_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \ldots z_n^{\alpha_n}$$

sei von der $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+..+\alpha_n^{ten}$ Dimension.

§ 66. Transformation der Potenzreihen. Ist b ein Werth von z im Gebiete der absoluten Convergenz der Reihe

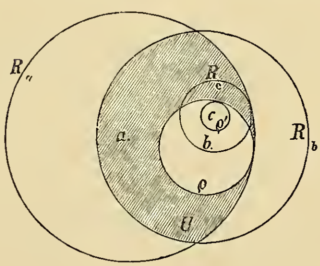
$$\Sigma A_m (z-a)^m,$$

also im Innern des Convergenzkreises dieser Reihe, dessen Radius R_a sein mag, so ist, wie aus § 63 hervorgeht, wenn man dort z durch b, h durch $z-b$ ersetzt

$$f(z) = f(b+\overline{z-b}) = f(b) + (z-b)f'(b) + \frac{(z-b)^2}{1.2} f''(b) + .. + \frac{(z-b)^n}{fac\, n} f^{(n)}(b) + ..,$$

so lange eine identische Umformung von $f(z)$, (die wir mit $f(z)_b$ der Kürze halber bezeichnen), als $abs\,(z-b) + abs\,(b-a) < R_a$ ist, oder so lange z sowohl im Innern des Kreises R_a liegt, als auch im Innern des Kreises ϱ, der b zum Mittelpunct hat und R_a von Innen berührt.

Wenn nun, wie es häufig geschieht, die Convergenz von $f(z)_b$ sich weiter erstreckt, wenn sie etwa durch den Kreis R_b bestimmt wird, dessen Radius $R_b > \varrho$ ist, so fragt es sich, ob $f(z)_b$ mit $f(z)$ auch in dem Gebiete übereinstimmt, welches von ϱ, R_b, R_a begrenzt wird, und welches in beistehender Figur mit U bezeichnet ist. Diese Frage ist zu bejahen. — Es sei c ein Punct im Innern der Kreise R_a und ϱ. Um diesen Punct ziehen wir zwei Kreise, erstens ϱ', welcher ϱ von Innen berührt, und R_c, welcher entweder R_a oder R_b von Innen berührt, aber keinen dieser Kreise schneidet. Dann wird, abgesehen von ganz speciellen Lagen von c, der Kreis R_c zum Theil aus dem Kreise ϱ heraustreten. In diesem ganzen Kreise ist



$$f(z)_c = f(c) + (z-c)f'(c) + \ldots + \frac{(z-c)^n}{fac\, n} f^{(n)}(c) + ..$$

eine identische Transformation (§ 63) von $f(z)$. Im Innern desselben Kreises ist ebenso

$$f(z)_{b,c} = f(c)_b + f'(c)_b (z-c) + .. + f^{(n)}(c)_b \frac{(z-c)^n}{fac\, n} + ..$$

eine identische Transformation von $f(z)_b$. Im Innern des Kreises ϱ' ist nun $f(z)_b$ eine identische Transformation von $f(z)$, $f(z)_{b,c}$ eine identische Transformation von $f(z)_b$, also ist dort auch $f(z)_{b,c}$ eine identische Transformation von $f(z)$. Im Innern des Kreises ϱ' ist also

$$f(c)_b + f'(c)_b(z-c) + .. + f^{(n)}(c)_b \frac{(z-c)^n}{fac\, n} + .. = f(c) + f'(c)(z-c) + .. + f^{(n)}(c) \frac{(z-c)^n}{fac\, n} + ..,$$

und hieraus ergiebt die Methode der unbestimmten Coëfficienten

$$f(c)_b = f(c),\ f'(c)_b = f'(c),\ ..\ f^{(n)}(c)_b = f^{(n)}(c),\ ..$$

Mithin ist auch ausserhalb dieses Kreises, so lange die Reihe convergirt, jedenfalls im Kreise R_c, identisch

$$f(z)_{b,c} = f(z)_c = f(z),$$

und da dort auch $f(z)_{b,c}$ eine identische Transformation von $f(z)_b$ war, so besteht im Kreise R_c die identische Gleichung $f(z)_b = f(z)$. Das Gebiet der Uebereinstimmung dieser Functionen, ursprünglich nur für das Innere des Kreises ϱ erwiesen, ist somit erweitert auf den Theil von R_c, der ausserhalb ϱ liegt.

Der Punct c kann nun in dem erweiterten Gebiete eine beliebige Lage einnehmen, man kann dieselbe Schlussfolge wiederholen, und so das Gebiet noch mehr erweitern, bis die Identität für das ganze Innere des Gebietes U erwiesen ist, was wir nicht weiter auszuführen brauchen.

In dem Theile von R_b, der aus R_a heraustritt, nennt man die Function oder die Reihe $f(z)_b$ die analytische Fortsetzung von $f(z)$. In Bezug auf die Fortsetzung erwachsen eine Reihe allgemeiner Fragen, die sich für die elementaren Functionen so zu sagen von selbst erledigen, weshalb wir sie ans Ende unserer Untersuchungen verweisen. Soviel aber erkennt man unmittelbar, dass eine Function, die in irgend einem Gebiete überall Null ist, auch ausserhalb desselben Null sein muss, wenn sie analytisch, d. h. durch Potenzreihen fortgesetzt wird.

§ 67. Unendlich oft verschwindende Functionen. Besitzt eine Function von z in einem Gebiete T und am Rande desselben überall den Charakter einer ganzen Function, und verschwindet sie in unendlich vielen verschiedenen Puncten von T, so ist sie überall in T, oder so weit sie überhaupt als Function der complexen Veränderlichen z analytisch fortgesetzt werden kann, Null.

Im § 15 haben wir gefunden, dass immer, wenn in einem endlichen Gebiete T unendlich viele verschiedene Puncte gegeben sind, unter diesen wenigstens ein sogenannter Grenzpunct vorhanden ist, von der Beschaffenheit, dass in jeder noch so kleinen Umgebung desselben, unendlich viele der gegebenen Puncte liegen. Ein solcher Punct sei a. Da nun die Function $f(z)$ im Puncte a den Charakter einer ganzen Function hat, also in eine Reihe $\Sigma A_m(z-a)^m$ entwickelbar sein muss, und da ferner die Function in unendlich vielen Puncten einer regulären Folge (die man aus den gegebenen Puncten bilden kann) $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ die zu a gehört, verschwindet, so folgt aus der Methode der unbestimmten Coëfficienten, dass in einem Kreise um a, dessen Radius klein, aber nicht Null sein kann, $f(z)$ identisch Null ist, und so muss $f(z)$ identisch Null sein, soweit diese Function überhaupt durch Potenzreihen fortsetzbar ist, was nach der Voraussetzung im Gebiete T wenigstens statt hat.

Zusatz. Hat eine Function $f(z)$ in T und am Rande von T den Charakter einer ganzen Function, und ist sie in unendlich vielen Puncten, z. B. in einem noch so kleinen Stücke einer Linie gleich der Function $\varphi(z)$ von demselben Charakter, so ist in T identisch $\varphi(z) = f(z)$. Denn ihre Differenz ist identisch Null.

Bemerkung. Hat $f(z)$ den Charakter einer ganzen Function im Innern von T, nicht aber auch am Rande, so kann $f(z)$ sehr wohl unendlich oft verschwinden, ohne identisch Null zu sein, nämlich dann, wenn die zu den unendlich vielen Puncten gehörenden Grenzpuncte (es braucht auch nur einer vorhanden zu sein) am Rande von T liegen. Unsere Schlussweise wird in diesem Falle aus dem Grunde hinfällig, weil dann die Function $f(z)$ in jenen Grenzpuncten nicht nach ganzen Potenzen entwickelbar zu sein braucht. Beispiele werden später beigebracht werden.

Ableitungen der transformirten Function. Transformirt man die Function $\Sigma A_m(z-a)^m$ in die Reihe $\Sigma f^{(m)}(b)\,(z-b)^m : fac\, m$ und bildet man die Ableitungen beider Reihen an einer Stelle c, in deren Umgebung $f(z)_b$ identisch gleich $f(z)$ ist, so sind diese Ableitungen $f'(c) = \Sigma m A_m(c-a)^{m-1}$ und $\Sigma f^{(m)}(b)\,(c-b)^{m-1} : fac\,(m-1)$, wo in der zweiten Summe das $m=0$ entsprechende Glied Null ist. Entwickelt man aber die Function $f'(z)$ nach Potenzen von $z-b$, so erhält man die Reihe $f'(z)_b = \Sigma f^{(m)}(b)\,(z-b)^{m-1} : fac\,(m-1)$ und erkennt aus ihr die Identität $f'(c) = f'(c)_b$. Die Ableitungen der ursprünglichen und der transformirten Functionen sind demnach gleich. — Die Ableitung einer analytischen Fortsetzung ist gleich der analytischen Fortsetzung der Ableitung.

§ 68. Die rationalen Functionen sind reguläre Functionen. Der binomische Lehrsatz für negative Exponenten. Die rationalen Functionen lernten wir durch Partialbrüche darstellen, also im Grunde durch eine Summe von Potenzreihen, die überall Giltigkeit haben, einzelne

Puncte, die Pole ausgenommen. Da aber nun einmal die analytischen Functionen durch Reihen definirt wurden, die nach aufsteigenden Potenzen fortschreiten und negative nicht enthalten, so ist es doch nothwendig zu zeigen, dass die rationalen Functionen ausser in den Polen überall reguläre Functionen, also durch aufsteigende Potenzreihen mit nur positiven Exponenten darstellbar sind. Es genügt dies für einen Partialbruch, also für eine negative Potenz $A:(z-a)^n$ eines Binoms zu erweisen, weil eine Summe regulärer Functionen eine eben solche ist.

Die Reihe $S_1 = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + \ldots = \Sigma(-1)^m z^m$ hat den Werth $1:(1+z)$ so lange $abs\, z < 1$ ist. Bilden wir Ausdrücke $(-n)_1, (-n)_2, \ldots (-n)_m$ ganz in der Weise der Binomialcoëfficienten, wie sie im § 45 für ganze positive Werthe von $-n$ gebildet wurden

$$(-n)_m = (-n)\,.\,(-n-1)\,.\,(-n-2)\ldots(-n-m+1): fac\; m,$$

so gilt der im Grunde für beliebige Werthe von $-n$ im § 45 bewiesene Satz

$$(-n)_m + (-n)_{m-1} = (-n+1)_m = [-(n-1)]_m.$$

Setzen wir nun $S_n = 1 + (-n)_1 z + (-n)_2 z^2 + \ldots = \Sigma(-n)_m z^m$, welche Reihe absolut convergent ist, so lange $abs\, z < 1$ ist, und die für $n=1$ mit S_1 übereinstimmt, so folgt

$$\begin{aligned} S_n\,.\,(1+z) &= 1 + [(-n)_1 + 1]z + [(-n)_2 + (-n)_1]z^2 + \ldots + [(-n)_m + (-n)_{m-1}]z^m + \ldots \\ &= 1 - [-(n-1)]_1 z + [-(n-1)]_2 z^2 + \ldots + [-(n-1)]_m z^m + \ldots = S_{n-1}, \end{aligned}$$

$$S_n = S_{n-1}:(1+z) = S_{n-2}:(1+z)^2 = S_{n-3}:(1+z)^3 = \ldots = S_1:(1+z)^{n-1},$$

$$S_n = (1+z)^{-n}.$$

Hieraus folgt, wenn b eine beliebige von a verschiedene Zahl ist

$$\frac{A}{(z-a)^n} = \frac{A}{[z-b-(a-b)]^n} = \frac{(-1)^n A}{(a-b)^n\left(1-\dfrac{z-b}{a-b}\right)^n} = \frac{A}{(b-a)^n}\,\Sigma(-n)_m\left(\frac{z-b}{b-a}\right)^m.$$

Es ist also $A:(z-a)^n = A(z-a)^{-n}$ durch eine nach ganzen Potenzen von $z-b$ fortschreitende Reihe dargestellt, die so lange convergirt, als $abs\,(z-b) <$ als $(a-b)$ ist, also in einem Kreise, der um den Mittelpunct b mit dem Radius $abs\; a-b$ zu schlagen ist, auf dessen Rande a liegt. In diesem Kreise hat $A(z-a)^{-n}$ den Charakter einer ganzen Function, also, da b willkürlich gewählt werden kann, überall, ausser im Punct a, der immer auf dem Rande des Convergenzengebietes liegt, an dem sich der Giltigkeitsbereich der Reihenentwickelung gewissermaassen stösst. Dass hier die verschiedenen Fortsetzungen einer Reihe, eines Darstellungselementes, da wo sich die Fortsetzungen überdecken, über einander greifen, identisch gleich sind, folgt aus der überall giltigen und allen Functionselementen in ihrem Geltungsbereiche gleichen Darstellung eben durch $A(z-a)^{-n}$, welcher Ausdruck eine völlig eindeutige Function darstellt.

Hieraus schliesst man, dass die rationalen Functionen, die Pole ausgenommen, überall reguläre Functionen sind, ihr Verhalten im Unendlichen haben wir bereits weiter oben kennen gelernt. — Aus der Darstellung von $A_n(z-a)^{-n}$ durch eine Potenzreihe schliesst man, dass die Ableitung $-nA_n(z-a)^{-n-1}$ sei, und dass also die Ableitungsregel des § 48 für Potenzen auch mit negativen Exponenten in Kraft bleibt.

§ 69. Summen und Reihen regulärer Functionen. Sind zwei Functionen $f_1(z)$ $f_2(z)$ der complexen Veränderlichen z in einem Gebiete T regulär, so dass sie in jedem Puncte des Gebietes T durch Potenzreihen darstellbar sind, so ist es selbstverständlich, dass auch ihre Summe (oder Differenz) in demselben Gebiet regulär ist, wovon wir oben schon Anwendung gemacht haben. Hat man aber unendlich viele solche Functionen zu addiren, liegt eine unendliche Reihe vor, deren Terme reguläre Functionen in T sind, so ist zu untersuchen, ob der Satz auch noch statt hat. Die Convergenz der Reihe für alle in Betracht kommenden Werthe von z muss natürlich vorausgesetzt werden, reicht jedoch zur Gültigkeit des Satzes nicht hin. — Es sei ΣA_m eine absolut convergente Reihe und $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ rein reguläre Functionen, deren absoluter Betrag in T eine gewisse Zahl M nirgends übersteigt, so ist $\Sigma A_m f_m(z)$ eine in T reguläre Function. Ist a ein Punct in T, und $f_n(z) = \Sigma B_{nm}(z-a)^m$, so giebt es für die Convergenzradien der verschiedenen n entsprechenden Reihen eine untere Grenze ϱ, die von Null verschieden angenommen werden muss. Im Innern des Kreises ϱ convergiren alle Reihen absolut. Es ist demnach

$$\begin{aligned}\Sigma A_m f_m(z) = \;& A_0 B_{00} + A_0 B_{01}(z-a) + \ldots + A_0 B_{0n}(z-a)^n + \ldots \\ & + A_1 B_{10} + A_1 B_{11}(z-a) + \ldots + A_1 B_{1n}(z-a)^n + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + A_m B_{m0} + A_m B_{m1}(z-a) + \ldots + A_m B_{mn}(z-a)^n + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und diese Doppelreihe ist absolut convergent im Kreise ϱ, also kann geschrieben werden

$$\Sigma A_m B_{m0} + (z-a)\Sigma A_m B_{m1} + \ldots + (z-a)^n \Sigma A_m B_{mn} + \ldots$$

Diese Reihe convergirt sicher im Kreise ϱ, und es ist also dort $\Sigma A_m f_m(z)$ eine reguläre Function von z. Es ist zu bemerken, dass, wenn das Gebiet T aus getrennten Theilen besteht, der Satz zwar für jeden dieser Theile besteht, dass aber, selbst wenn die f rationale Functionen sind, die Reihe $\Sigma A_m f_m(z)$ in den verschiedenen Gebieten nicht die analytische Fortsetzung eines und desselben Functionselementes zu sein braucht.

Convergirt die Reihe $\Sigma A_m z^{-m}$ ausserhalb eines Kreises R' um 0, so ist $\Sigma A_m R^{-m}$ absolut convergent, wenn $R > R'$ ist. Ist nun $abs\, b > R$, so ist $z^{-n} = b^{-n}\Sigma[(-n)_m(b-z)^m : b^m]$ in einer Umgebung von b eine reguläre Function, und die oben aufgestellten Bedingungen für eine reguläre Function, die aus einer unendlichen Reihe von regulären Functionen zu bilden ist, sind erfüllt. Demnach ist die Reihe $\Sigma A_m z^{-m}$ in dem Gebiete $abs\, z > R'$ überall eine reguläre Function, und es lassen sich demnach absteigende Reihen (und natürlich auch auf- und absteigende) genau so gut in ihren Convergenzgebieten zur Darstellung regulärer Functionen verwenden, als Functionselemente ansehen, als aufsteigende, wovon wir Gebrauch machen werden.

§ 70. Das Product zweier regulären Functionen ist eine reguläre Function. Sind $\Sigma A_m(z-a)^m$, $\Sigma B_m(z-a)^m$ Darstellungselemente zweier in einem Gebiete T regulären Functionen, und ist a ein Punct im Innern von T, so haben die beiden Reihen ein gemeinsames Convergenzgebiet, etwa den Kreis ϱ. Dann convergirt das Product

$$\Sigma A_m(z-a)^m \,.\, \Sigma B_m(z-a)^m = A_0 B_0 + (A_0 B_1 + A_1 B_0)(z-a) + (A_0 B_2 + A_1 B_1 + A_2 B_0)(z-a)^2 + \ldots,$$

welches wieder eine Potenzreihe im Puncte a ist, im Kreise ϱ absolut, ist also eine reguläre Function. — Daraus folgt von selbst, dass $[\Sigma A_m(z-a)^m]^n$ eine Potenzreihe ist, die in demselben Umfange absolut convergent ist als $\Sigma A_m(z-a)^m$. — Wir haben also den Satz: Das Product zweier Functionen $f(z)$, $\varphi(z)$, vom Charakter ganzer Functionen in einem gemeinsamen Gebiete T, ist dort ebenfalls eine Function mit dem Charakter einer ganzen Function.

§ 71. Charakter einer Function von einer Function. *Hat eine Function $f(\zeta)$ in der Umgebung des Punctes $\zeta = c$ den Charakter einer ganzen Function als Function von ζ, und ist $\zeta = \varphi(z)$ eine Function von z, die für $z = b$ den Werth c und in der Umgebung von b den Charakter einer ganzen Function hat, so dass sie nach ganzen Potenzen von $z - b$ entwickelbar ist, so ist auch $f(\zeta) = f[\varphi(z)] = F(z)$ eine Function von z, die in einer Umgebung von b den Charakter einer ganzen Function hat.*

Es sei $f(\zeta) = \Sigma A_m(\zeta - a)^m$ mit der Convergenz $abs\,(\zeta - a) < R$, in diesem Gebiete liege c. Ferner sei $\varphi(z) = c + B_1(z-b) + B_2(z-b)^2 + \ldots + B_n(z-b)^n + \ldots = c + \psi(z)$ mit der Convergenzbedingung $abs\,(z-b) < R_b$. Dann ist, so lange $abs\,\psi(z) < R - abs\,(c-a)$,

$$f(\zeta) = f[\varphi(z)] = F(z) = f(c) + f'(c)\,\psi(z) + \frac{f''(c)}{fac\,2}[\psi(z)]^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{fac\,n}[\psi(z)]^n + \ldots$$

Stellen wir nun $[\psi(z)]^n$ durch eine Potenzreihe

$$[\psi(z)]^n = (z-b)^n B_{n,0} + (z-b)^{n+1} B_{n,1} + (z-b)^{n+2} B_{n,2} + \ldots + (z-b)^{n+m} B_{n,m} + \ldots$$

dar, die convergirt so lange $abs\,(z-b) < R_b$ ist, so gewinnen wir für $f(\zeta) = F(z)$ die Doppelreihe

$$\begin{aligned} f[\varphi(z)] = f(c) &+ (z-b)f'(c)B_1 + (z-b)^2 f'(c)B_2 + (z-b)^3 f'(c)B_3 + (z-b)^4 f'(c)\,B_4 + \ldots \\ &+ \frac{(z-b)^2}{fac\,2} f''(c)\,B_{20} + \frac{(z-b)^3}{fac\,2} f''(c)\,B_{21} + \frac{(z-b)^4}{fac\,2} f''(c)\,B_{22} + \ldots \\ &+ \frac{(z-b)^3}{fac\,3} f'''(c)B_{32} + \frac{(z-b)^4}{fac\,3} f'''(c)B_{32} + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

die convergirt, so lange $abs\,\psi(z) < R - abs\,(c-a)$ ist, wenn man die Horizontalreihen für sich summirt. Aber es fragt sich, ob man dieselbe auch umordnen kann, ob man das zusammennehmen kann, was mit $(z-b)$, dann was mit $(z-b)^2$ u. s. w. multiplicirt ist, kurz ob man sie als eine nach Potenzen von $z-b$ fortschreitende Reihe schreiben darf.

Ersetzt man in $\psi(z)$ jedes Glied durch seinen absoluten Betrag, setzt

$$\chi = abs\,B_1(z-b) + abs\,B_2(z-b)^2 + abs\,B_3(z-b)^3 + \ldots$$

und ordnet die Potenzen von χ nach Potenzen von $abs\,(z-b)$, ersetzt auch $f^{(n)}(c)$ durch $abs\,f^{(n)}(c)$ und bezeichnet das hierdurch aus $f[\varphi(z)]$ hervorgehende Resultat mit $(f[\psi(z)])$, so besteht die Doppelreihe aus lauter positiven Gliedern und convergirt bei einer Art der Summation sicher, nämlich wenn man horizontalreihenweise summirt, sie convergirt deshalb (§ 19) bei jeder Anordnung, und demnach ist auch die Doppelreihe für $f[\varphi(z)]$ von der Anordnung unabhängig, kann als eine nach Potenzen von $(z-b)$ fortschreitende Reihe geschrieben werden, so lange $\chi < R - abs\,(c-a)$ ist.

Die Bedingung für das Bestehen des an die Spitze dieses Paragraphen gestellten Satzes ist also die, dass c in das Convergenzgebiet R der Reihe für $f(\zeta)$ fällt, und dass $\chi = abs\,B_1(z-b) + abs\,B_2(z-b)^2 + \ldots + abs\,B_n(z-b)^n + \ldots < R - abs\,(c-a)$ ist. Da aber die nach Potenzen von $abs\,(z-b)$ fortschreitende Reihe χ sogleich mit der ersten Potenz beginnt (nicht mit der 0^{ten}), so giebt es eine bestimmte Zahl τ von der Beschaffenheit (§ 62), dass $\chi < R - abs\,(c-a)$ ist, so lange $abs\,(z-b) < \tau$ ist, es giebt eine bestimmte Umgebung des Punctes b, in der $f[\varphi(z)]$ den Charakter einer ganzen Function hat. Damit ist unser Satz erwiesen.

Hier kann auch die Frage der Division mit regulären Functionen erledigt werden. Ist $f(z) = \Sigma A_m(z-a)^m$, $\psi(z) = -\Sigma A_{m+1}(z-a)^{m+1} : A_0$ und ist A_0 von Null verschieden, so ist

$$1 : f(z) = \frac{1}{A_0}(1 + \psi(z) + [\psi(z)]^2 + \ldots + [\psi(z)]^m + \ldots),$$

und die Function hat in einer Umgebung des Punctes a den Charakter einer ganzen Function. Dies hat nicht statt, wenn A_0 Null ist.

Setzt man in einer Potenzreihe $f(z) = \Sigma A_m(z-a)^m$, in der $a\ A_0 A_1 A_2 \ldots$ reelle Zahlen sind, für z conjugirte Werthe, so nimmt auch $f(z)$ conjugirte Werthe an.

Bemerkung. In den durch Potenzreihen definirten Functionen kommen nur die vier Species, Addition, Subtraction, Multiplication, Division zur Anwendung, man kann deshalb keine neue Rechnungsart auf eine solche Function gründen, wenigstens würde man da etwas Ueberflüssiges thun. Die gesammte Mathematik kennt bis auf heute nur diese vier Grundoperationen.

§ 72. Die Seidel'schen Reihen. Dadurch, dass die Functionen einer complexen Veränderlichen z durch eine Potenzreihe und deren analytische Fortsetzungen, d. h. eben durch Fortsetzung mittelst Potenzreihen definirt werden, wird den Functionen von z ein ganz bestimmter Charakter verliehen, der sich ändert, wenn man zur Darstellung andere Elemente als die Potenz heranzieht. Zuerst ist bemerkt worden, dass man durch die sogenannten trigonometrischen oder Fourier'schen Reihen in einem Linienstücke willkürliche Functionen darstellen könne, während eine analytische Function schon bestimmt ist, wenn sie in einem noch so kleinen Theile dieses Linienstückes bestimmt ist. Die so gewonnenen Ausdrücke verlieren aber im Allgemeinen überhaupt ihren Sinn, wenn man darin für die reelle Veränderliche complexe Werthe einsetzt. Aus diesem Grunde sind diese Reihen, abgesehen davon, dass sie einen nicht elementaren Charakter haben, nicht geeignet, unseren Satz ins Klare zu setzen. Es hat aber zuerst Seidel im 73. Bande des Crelle'schen Journals gezeigt, wie Reihen, die nach rationalen Functionen fortschreiten, in verschiedenen Gebieten analytisch nicht in einander fortsetzbare Functionen darstellen können. Es sei

$$g_n(z) = \frac{z^n(1-z)}{(1+z^n)(1+z^{n+1})} = \frac{1}{1+z^{n+1}} - \frac{1}{1+z^n},\; f(z) = \Sigma g_{m+1}(z).$$

Die Summe der ersten n Glieder dieser Reihe ist

$$\frac{1}{1+z^2} - \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+z^3} - \frac{1}{1+z^2} + . - \ldots + \frac{1}{1+z^n} - \frac{1}{1+z^{n-1}} = \frac{1}{1+z^n} - \frac{1}{1+z}.$$

Die Reihe convergirt daher für jeden Werth von z, wenn nicht $abs\, z = 1$ ist, und zwar convergirt sie, wenn $abs\, z < 1$, ist gegen

$$1 - \frac{1}{1+z} = \frac{z}{1+z} = z - z^2 + z^3 - z^4 + . - .. = \Sigma(-1)^m z^{m+1},$$

das ist eine analytische Function der complexen Veränderlichen z. Ist aber $abs\, z > 1$, so convergirt sie gegen

$$-\frac{1}{1+z} = -1 + z - z^2 + z^3 - . + .. = \Sigma(-1)^{m+1} z^m,$$

das ist eine andere analytische Function von z. Die z-Ebene zerfällt also in zwei Gebiete. Die Reihe stellt in dem einen Theile, dem Inneren des Einheitskreises eine analytische Function dar, in dem anderen Theile, dem Aeusseren des Einheits-Kreises stellt sie wieder eine analytische Function dar, die aber nicht die analytische Fortsetzung der ersteren ist. Getrennt sind die beiden Gebiete durch eine Linie, den Einheitskreis, auf dem die Reihe keinen Sinn hat, nicht convergirt. — Andere lehrreiche Beispiele hat Herr Appell (Acta mathematica Bd. I, pag. 145) gegeben.

§. 73. Der Abel-Dirichlet'sche Satz. Sind $a_0, a_1, a_2, .., a_n, ..$ reelle Zahlen und ist $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + .. + a_n$, und $lim\, s_n = s$ eine endliche[1] Zahl, d. h., ist $s = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + .. + a_n + .. = \Sigma a_m$ eine convergente Reihe, so ist auch

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + .. + a_n x^n + .. = \Sigma a_m x^m$$

eine convergente Reihe für alle reellen x zwischen 0 und 1 und somit eine wohlbestimmte Function von x in diesem Intervalle. Der Abel-Dirichlet'sche Satz sagt aus, dass $f(1-0) = s$ sei, dass $f(x)$ stetig sei bis einschliesslich $x = 1$. Die Reihe Σa_m braucht nicht absolut convergent zu sein, $\Sigma a_m x^m$ darf aber, wenn Σa_m nicht absolut convergirt, nicht umgeordnet werden.

Zum Beweise brauchen wir den Hülfssatz. Ist n die grösste in $1:\sqrt{\varepsilon}$ enthaltene ganze Zahl, so kann man ε so klein, oder n so gross machen, dass $(1-\varepsilon)^n - 1$ beliebig klein wird. Es ist nämlich (vgl. § 23)

[1]) Liouville's Journal II. Serie, Bd. III, 1862.

$$1 > (1-\varepsilon)^2 > 1-2\varepsilon,\ 1 > (1-\varepsilon)^3 > (1-2\varepsilon)(1-\varepsilon) > 1-3\varepsilon,\ ..,\ 1 > (1-\varepsilon)^n > 1-n\varepsilon,$$

oder $0 < 1-(1-\varepsilon)^n < n\varepsilon$, $n\varepsilon \leqq \varepsilon : \sqrt{\varepsilon}$; $n\varepsilon \leqq \sqrt{\varepsilon}$, es wird also $1-(1-\varepsilon)^n$ mit ε beliebig klein, womit das Lemma erwiesen ist.

Es ist, so lange $x < 1$ ist, identisch

$$f(x) = s_0 + (s_1 - s_0)x + (s_2 - s_1)x^2 + .. + (s_n - s_{n-1})x^n + ..$$
$$= (1-x)(s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + .. + s_n x^n + ..).$$

Nehmen wir nun n so gross, dass $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, ..$ sämmtlich von s um weniger als σ verschieden sind, und setzen dann $\varepsilon \leqq 1 : nn$, so ist

$$f(1-\varepsilon) = \varepsilon[s_0 + s_1(1-\varepsilon) + .. + s_{n-1}(1-\varepsilon)^{n-1}] + (1-\varepsilon)^n \varepsilon(s_n + s_{n+1}(1-\varepsilon) + s_{n+2}(1-\varepsilon)^2 + ..),$$

und da sämmtliche Potenzen von $1-\varepsilon$ positiv sind, so finden wir (§ 17) weiter

$$f(1-\varepsilon) = \varepsilon n K + (1-\varepsilon)^n \varepsilon(s \pm \xi\sigma)(1 + (1-\varepsilon) + (1-\varepsilon)^2 + ..) = \varepsilon n K + (s \pm \xi\sigma)(1-\varepsilon)^n,$$

wenn K ein Mittelwerth zwischen $s_0, s_1, .., s_{n-1}$, also endlich ist, und $s \pm \xi\sigma$ ein Mittelwerth zwischen der obern und untern Grenze der Zahlen $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, .., s_{n+m}, ..$, also ξ ein echter Bruch ist Nun ist $\varepsilon n \leqq \sqrt{\varepsilon}$, $\varepsilon n = \eta\sqrt{\varepsilon}$, $(1-\varepsilon)^n = 1 - \zeta\sqrt{\varepsilon}$, wenn η und ζ ächte Brüche sind, und so folgt

$$f(1-\varepsilon) = s \pm \xi\sigma - s\zeta\sqrt{\varepsilon} \pm \xi\zeta\sigma\sqrt{\varepsilon} + \eta\sqrt{\varepsilon}K = s + \tau.$$

Die Zahl τ aber wird, wenn n gross genug und ε klein genug genommen werden, beliebig klein, so dass $f(1-0) = s$ sich ergiebt, w. z. b. w.

Der Satz bleibt offenbar auch bestehen, wenn $a_0, a_1, .., a_n ..$ complexe Zahlen sind, man braucht dann nur die Reihe in ihre zwei Bestandtheile, in eine reelle und eine rein imaginäre Reihe zu zerlegen.

Liefert die Reihe $a_\alpha + a_\beta + a_\gamma + .. + a_\nu + ..$, welche aus denselben, aber umgeordneten Termen besteht als $a_0 + a_1 + .. + a_n + ..$, einen von s verschiedenen Werth s', so definirt die Reihe

$$a_\alpha x^\alpha + a_\beta x^\beta + a_\gamma x^\gamma + .. + a_\nu x^\nu + .. = \varphi(x)$$

zwischen 0 und 1 eine Function $\varphi(x)$ vollständig. Diese ist an der Stelle 1 unstetig. Denn $\varphi(x)$ stimmt mit der zwischen 0 und 1 stetigen Function $f(x)$, so lange $x < 1$ ist, völlig überein (§ 19), für $x = 1$ ist sie aber von $f(x)$ verschieden. Hiervon werden wir bei Gelegenheit der logarithmischen Reihen Anwendung machen können, wobei wir auf eine eigenthümliche Convergenzerscheinung, die unendlich verzögerte Convergenz kommen werden.

Dass auch die Function $f(z)$, die durch eine Potenzreihe dargestellt ist, sich dem Werthe in einem Puncte des Convergenzkreises, in dem die Reihe convergirt, stetig nähere, wenn man z unter einem von Null verschiedenen Winkel an den Convergenzkreis heranführt, hat Herr A. Pringsheim (Berichte der k. bayer. Acad. 1897) erwiesen. Er giebt übrigens dort dem ursprünglichen Abel'schen Beweise den Vorzug vor dem hier gegebenen Dirichlet'schen.

Die Exponentialfunction und die trigonometrischen Functionen.

Winkeltreue Abbildung.

§ 74. Functionalgleichung der Exponentialfunction, die Exponentialreihe. Sind m und n ganze positive oder negative Zahlen, so besteht die Gleichung $a^n . a^m = a^{n+m}$ oder wenn man $a^z = f(z)$ setzt, so besteht die Functionalgleichung

$$f(z) . f(t) = f(z+t)$$

für ganze z und t. Die Frage liegt nahe zu untersuchen, ob es möglich ist, eine Function der complexen Veränderlichen z anzugeben, die diese Functionalgleichung befriedigt, und die also die ganze Potenz als einen speciellen Fall des Werthes der Veränderlichen einer allgemeinern Function enthält.

Wir fragen, ob in der Umgebung des Punctes Null eine analytische Function existirt, die also in der Form $f(z) = \Sigma A_m z^m$ darstellbar ist, und die dort der Functionalgleichung $f(z) \,.\, f(t) = f(z+t)$ genügt. Es ist nicht schwer mit Hülfe der Sätze über Multiplication absolut convergenter Reihen nachzuweisen, dass die Reihe für jeden Werth von z convergiren muss, wenn sie der Functionalgleichung genügt und in irgend einem noch so kleinen Kreise convergirt. Da dies Resultat sich später von selbst ergiebt, so kann man auf den Beweis a priori verzichten.

Dass $f(z)$ nicht für irgend einen Werth z_0 verschwinden kann, folgt aus der Gleichung $f(z) = f(z_0) \,.\, f(z-z_0)$, die Function muss dann, soweit die Functionalgleichung besteht, überall verschwinden.

Da aus $f(z) \,.\, f(0) = f(z)$ folgt $f(0) = 1$, so kann man setzen

$$f(z) = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_n z^n \ldots$$

Die Exponentialreihe. Zur Bestimmung der Coëfficienten muss die Functionalgleichung dienen. Liegen z und t und $abs\, z + abs\, t$ im Convergenzgebiete der Reihe, so folgt

$$f(z) \,.\, f(t) = (1 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_n z^n + \ldots)(1 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots + A_n t^n + \ldots)$$
$$= 1 + A_1 z + A_1 t + A_2 z^2 + A_1 A_1 zt + A_2 t^2 + \ldots + A_n z^n + A_{n-1} A_1 z^{n-1} t + \ldots + A_{n-k} A_k z^{n-k} t^k + \ldots + A_n t^n \ldots,$$

und

$$f(z) \,.\, f(t) = f(z+t) = 1 + A_1(z+t) + A_2(z+t)^2 + \ldots + A_n(z+t)^n + \ldots$$
$$= 1 + A_1 z + A_1 t + A_2 z^2 + 2 A_2 zt + A_2 t^2 \ldots + A_n z^n + A_n n z^{n-1} t + \ldots + A_n n_k z^{n-k} t^k + \ldots + A_n t^n + \ldots,$$

wenn $n_k = n(n-1) \ldots (n-k+1) : fac\, k$ ist. Die Methode der unbestimmten Coëfficienten giebt die Gleichungen

$$A_n n_k = A_{n-k} A_k,$$

also $A_1 A_1 = 2 A_2, A_2 A_1 = 3 A_3, A_3 A_1 = 4 A_4, \ldots A_{n-1} A_1 = n A_n$, woraus durch Multiplication folgt

$$A_n = A_1^n : fac\, n = a^n : fac\, n$$

wenn wir $A_1 = a$ setzen. Tragen wir diesen Werth von A_n in die Gleichung $A_n n_k = A_{n-k} A_k$ ein, so ergiebt sich

$$\frac{a^n n(n-1) \ldots (n-k+1)}{fac\, n \qquad\qquad fac\, k} = \frac{a^{n-k}}{fac\,(n-k)} \cdot \frac{a^k}{fac\, k},$$

was offenbar eine Identität ist, so dass also die aus der Methode der unbestimmten Coëfficienten sich ergebenden Gleichungen sämmtlich miteinander verträglich sind, einander nicht widersprechen, vielmehr eine Grösse A_1 unbestimmt lassen, wofür wir den Buchstaben a einführten. Die gesuchte Function hat also die Form

$$f(z) = 1 + az + \frac{(az)^2}{1 \,.\, 2} + \frac{(az)^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \ldots + \frac{(az)^n}{fac\, n} + \ldots,$$

und diese Reihe ist für jeden Werth von z absolut convergent, so dass die Function in der ganzen z-Ebene den Charakter einer ganzen Function hat, und es ist $f(z)$ durch eine einzige Reihenentwickelung, ein einziges Functionselement, überall dargestellt. Die Function heisst deshalb eine ganze transcendente Function. Die Function $f(z)$ mit den verlangten Eigenschaften existirt, der Parameter a, den sie enthält, geht so in die Function ein, dass dieselbe ungeändert bleibt, wenn sich az nicht ändert, worauf bei der Bezeichnung dieser Function Rücksicht genommen werden kann. Man setzt dafür e^{az}, so dass also die Gleichung statt hat

$$e^{az} = 1 + \frac{az}{1} + \frac{a^2 z^2}{1 \,.\, 2} + \ldots + \frac{a^n z^n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n} + \ldots$$

Die Anlehnung dieser Bezeichnung an die der Potenzen empfiehlt sich deshalb, weil für ganze z in der That

$$e^{az} = (e^a)^z, \quad f(z) = [f(1)]^z$$

ist, wie aus der Functionalgleichung unmittelbar hervorgeht.

Die Eigenschaft $e^{a(z+t)} = e^{az} \cdot e^{at}$, also die definirende Functionalgleichung in anderer Schreibweise, nennt man das Additionstheorem der Exponentialfunction. Spricht man von der Exponentialfunction schlechthin, so ist der Parameter a gleich Eins zu setzen. Um die Reihe für e^{az} in eine nach Potenzen von $z - z_0$ fortschreitende zu transformiren, schreibt man

$$e^{az} = e^{a(z_0 + z - z_0)} = e^{az_0} e^{a(z-z_0)} = e^{az_0} + \frac{e^{az_0}(z-z_0)}{1} + \frac{e^{az_0}(z-z_0)^2}{1.2} + \frac{e^{az_0}(z-z_0)^3}{1.2.3} + \ldots$$

Ersetzt man $z - z_0$ durch h, dann z_0 durch z, so findet man, dass die Ableitungen dieser Function mit ihr selbst sehr einfach zusammenhängen, indem

$$(e^{az})' = ae^{az}, \quad (e^{az})^{(\mu)} = a^\mu e^{az}, \quad (e^z)' = e^z, \quad (e^z)^{(\mu)} = e^z$$

ist.

§ 75. Irrationalität der Zahl e. Da die Function e^{az} eine Function des Productes az ist, so wird man für die weitere Untersuchung für az einen Buchstaben setzen können, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, oder was dasselbe ist, man kann zunächst Eins für a annehmen, die Exponentialfunction e^z untersuchen. — Es ist

$$e^z \cdot e^t = e^{z+t}, \quad e^{-z} = 1 : e^z$$

für jedes z und t. Für $z = 1$ ist

$$e^1 = e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{fac\, n} + \ldots$$

und es ist diese Zahl irrational. Wäre nämlich $e = p : q$, und wären p und q ganze theilerfremde Zahlen, so wäre $e \cdot fac\, q = p \cdot fac\,(q-1)$ gleich

$$fac\, q \cdot \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{fac\, q}\right) + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots$$

Nun ist aber $fac\, q\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{fac\, q}\right) = G$ eine ganze Zahl und

$$\frac{1}{q+1}\left(1 + \frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+2)(q+3)} + \ldots\right) < \frac{1}{q+1}\left(1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \ldots\right),$$

also kleiner als $1 : q$. Es müsste demnach die ganze Zahl $p \cdot fac\,(q-1)$ einer ganzen Zahl plus einem ächten Bruche gleich sein. Der Werth von e liegt zwischen 2 und 3 und die Zahl

$$e = 2{,}718\,281\,828\,459 \ldots$$

ist ein Näherungswerth, der sie für 12 Decimalen richtig angiebt. Herrn Hermite ist es gelungen, nachzuweisen, dass diese Zahl keiner algebraischen Gleichung von beliebig hohem Grade mit ganzzahligen Coëfficienten Genüge leisten kann, dass sie also eine transcendente Zahl ist. Gleiches von der Ludolph'schen Zahl π zu beweisen, ist erst Herrn Lindemann 1882 gelungen. Die ursprünglich recht complicirten Beweise sind durch verschiedene Gelehrte immer mehr vereinfacht, und im 43. Bande der Leipziger mathematischen Annalen finden sich Darstellungen der Beweise, die man wohl als elementare bezeichnen kann.

§ 76. Verlauf von e^z für reelle z. Die Function e^z ist für reelle Werthe von z stets reell, und nimmt mit z stetig zu. Lässt man die reelle Zahl x von $x = 0$ an zunehmen, so nimmt die Function e^x jeden Werth zwischen 1 und ∞ (d. h. zwischen Eins und jeder noch so grossen positiven Zahl) einmal und nur einmal an. Dass die Function jeden Werth annimmt, folgt, weil sie wie jede durch eine Potenzreihe definirte Function stetig ist, aus § 36, dass sie ihn nur einmal annimmt, folgt daraus, dass

$$e^x > e^{x'}$$

ist, wenn $x > x'$ ist. Denn es ist jeder einzelne Term der Exponentialreihe $x^n : fac\, n > x'^n : fac\, n$, wenn $x > x'$ ist.

Für negative Werthe des Exponenten folgt aus der Gleichung $e^{-x} = 1 : e^x$, dass die Function mit wachsenden x stetig abnimmt und sich der Null mehr und mehr nähert, $lim\; e^{-x} = 0\; (x = -\infty)$.[1]) Demnach nimmt e^x für negative x jeden Werth zwischen 0 und 1 (0 im Grunde ausgeschlossen) einmal und nur einmal an. Es nimmt mithin e^x für reelle x jeden Werth zwischen 0 und ∞ einmal und nur einmal an. Die Gleichung $e^x = A$, wenn A eine positive reelle Zahl ist, lässt eine und nur eine reelle Lösung zu, diese Zahl x nennt man den Logarithmus von A, mit dem wir uns im folgenden Kapitel ausführlich beschäftigen. Hier hat man schon den Satz, dass jede positive reelle Zahl einen und nur einen reellen Logarithmus besitzt.

Ist m eine ganze positive Zahl, so wächst der Quotient $e^x : x^m$ mit zunehmenden x über alle Grenzen, wie gross m auch sein mag. Denn es ist

$$\frac{e^x}{x^m} = \frac{1}{x^m} + \frac{1}{x^{m-1}} + \frac{1}{2 \,.\, x^{m-2}} + \cdots + \frac{1}{fac\,(m-1)x} + \frac{1}{fac\; m} + \frac{x}{fac\,(m+1)} + \frac{x^2}{fac\,(m+2)} + \cdots,$$

welcher Ausdruck aus zwei Theilen besteht. Der erste bis $1 : fac\; m$ hin nähert sich für wachsende x dem Werthe $1 : fac\, m$, der zweite Theil aber wächst offenbar über alle Grenzen. Ebenso ist $lim\; x^m e^{-x} = 0$, $lim\; x = +\infty$.

§ 77. **Der absolute Betrag von e^z.** Ist die complexe Zahl z gleich $x + yi$, so ist nach dem Additionstheorem

$$e^z = e^{x+yi} = e^x \,.\, e^{yi}, \quad abs\; e^z = e^x \,.\, abs\; e^{yi}.$$

Um also den absoluten Betrag von e^z zu finden, müssen wir noch den von e^{yi} aufsuchen. Nun ist

$$i^2 = -1,\; i^3 = -i,\; i^4 = 1,\; i^5 = i,\; i^6 = -1,\; i^7 = -i,\; i^8 = 1,\; \ldots$$
$$\ldots,\; i^{4n} = 1,\; i^{4n+1} = i,\; i^{4n+2} = -1,\; i^{4n+3} = -i,\; i^{4n+4} = 1,\; \ldots,$$

und also

$$e^{yi} = 1 + yi - \frac{y^2}{1 \,.\, 2} - \frac{y^3 i}{fac\; 3} + \frac{y^4}{fac\; 4} + \cdots + \frac{y^{4n}}{fac\,(4n)} + \frac{y^{4n+1}i}{fac\,(4n+1)} - \frac{y^{4n+2}}{fac\,(4n+2)} - \frac{y^{4n+3}i}{fac\,(4n+3)} + \frac{y^{4n+4}}{fac\,(4n+4)} + \cdots,$$

oder wenn wir zur Abkürzung

$$cos\; y = 1 - \frac{y^2}{fac\; 2} + \frac{y^4}{fac\; 4} - \frac{y^6}{fac\; 6} + \frac{y^8}{fac\; 8} - \frac{y^{10}}{fac\, 10} + \cdots$$

$$sin\; y = y - \frac{y^3}{fac\; 3} + \frac{y^5}{fac\; 5} - \frac{y^7}{fac\; 7} + \frac{y^9}{fac\; 9} \,.\, + \cdots$$

(gelesen *cosinus y, sinus y*) setzen,

$$e^{yi} = cos\; y + i\; sin\; y, \quad cos\; y = \frac{1}{2}(e^{yi} + e^{-yi}), \quad sin\; y = \frac{1}{2i}(e^{yi} - e^{-yi}) = -\frac{1}{2} i\,(e^{yi} - e^{-yi}).$$

Der absolute Betrag von e^{yi} ist demnach

$$abs\; e^{yi} = \sqrt{cos^2 y + sin^2 y} = \sqrt{\tfrac{1}{4}[(e^{yi}+e^{-yi})^2 - (e^{yi} - e^{-yi})^2]} = \sqrt{\tfrac{1}{4}[(e^{2yi}+2+e^{-2yi}) - (e^{2yi} - 2 + e^{-2yi})]} = 1,$$

und der absolute Betrag von e^z

$$abs\; e^z = abs\; e^{x+yi} = e^x.$$

[1]) Setzt man vor ∞ das Zeichen +, so soll ∞ eine Zahl bedeuten, die über alle Grenzen gross positiv reell zu machen ist, ebenso bedeutet $-\infty$ eine Zahl, die über alle Grenzen gross negativ zu machen ist.

§ 78. Die Functionen sinus und cosinus und ihre Ableitungen. Die im vorigen Paragraphen zur Abkürzung eingeführten Zeichen sinus und cosinus gewinnen durch ihr häufiges Vorkommen in der angewandten Mathematik eine solche Bedeutung, dass es nützlich ist, sie als selbstständige Functionen der complexen Veränderlichen z anzusehen, die durch die überall convergenten Potenzreihen

$$sin\, z = z - \frac{z^3}{fac\, 3} + \frac{z^5}{fac\, 5} - \frac{z^7}{fac\, 7} + \ldots, \quad cos\, z = 1 - \frac{z^2}{fac\, 2} + \frac{z^4}{fac\, 4} - \frac{z^6}{fac\, 6} + \ldots$$

definirt werden. Aus diesen Reihen ergeben sich für die Ableitungen unserer Function die Gleichungen

$$sin'\, z = cos\, z, \quad sin''\, z = -sin\, z, \quad sin'''\, z = -cos\, z, \quad cos'\, z = -sin\, z, \quad cos''\, z = -cos\, z, \quad \ldots$$

Da die Gleichungen

$$cos\, z = \frac{1}{2}(e^{zi} + e^{-zi}), \quad sin\, z = \frac{1}{2i}(e^{zi} - e^{-zi}),$$

auch für complexe z bestehen, so findet auch die Gleichung[1])

$$sin^2\, z + cos^2\, z = 1$$

allgemein statt.

Die Specialwerthe

$$cos\, 0 = 1, \quad sin\, 0 = 0$$

fliessen unmittelbar aus der Ansicht der definirenden Reihen. Auch lehren diese Reihen, dass diese beiden Functionen überall den Charakter ganzer Functionen haben und überall stetig sind. Ist x eine reelle Zahl, und setzt man

$$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{fac\, 4}\left(1 - \frac{x^2}{5.6}\right) + \frac{x^8}{fac\, 8}\left(1 - \frac{x^2}{9.10}\right) + \ldots,$$

so erkennt man leicht, dass diese Function jedenfalls positiv ist, so lange $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ ist, während die Cosinusreihe für $x = 2$ den Werth

$$-1 + \frac{16}{24}\left(1 - \frac{4}{5.6} + \frac{4^2}{5.6.7.8} - \frac{4^3}{5.6.7.8.9.10} + \ldots\right)$$

hat, der negativ ist. Es muss demnach $cos\, x$ (§ 36) den Werth Null mindestens für einen reellen Werth von x zwischen $\sqrt{2}$ und 2 annehmen. Dieser Werth, oder einer von ihnen, wenn mehrere vorhanden sein sollten, werde mit $\frac{1}{2}\pi$ bezeichnet, so dass $cos\, \frac{1}{2}\pi = 0$ ist. Wegen $cos^2\, \frac{1}{2}\pi + sin^2\, \frac{1}{2}\pi = 1$ muss $sin\, \frac{1}{2}\pi = \pm 1$ sein. Das Vorzeichen ist noch zu bestimmen. Schreiben wir

$$sin\, x = x\left(1 - \frac{x^2}{fac\, 3}\right) + \frac{x^5}{fac\, 5}\left(1 - \frac{x^2}{6.7}\right) + \frac{x^9}{fac\, 9}\left(1 - \frac{x^2}{10.11}\right) + \ldots,$$

so erkennen wir, dass $sin\, x$ für positive reelle x positiv ist, so lange $x \leq \sqrt{6}$ ist, welche Zahl > 2 ist, weshalb $sin\, \frac{1}{2}\pi = 1$ sein muss.

Da noch

$$\begin{aligned} cos\, z &= cos\,(-z) && \text{eine sogenannte gerade Function} \\ sin\, z &= -sin\,(-z) && \text{eine sogenannte ungerade Function} \end{aligned}$$

von z ist, so haben wir jetzt

$$cos\, \tfrac{1}{2}\pi = 0, \quad cos\,(-\tfrac{1}{2}\pi) = 0, \quad sin\, \tfrac{1}{2}\pi = 1, \quad sin\,(-\tfrac{1}{2}\pi) = -1.$$

---

[1]) Trotz Gauss's Protest hat sich die Schreibweise $sin^2\, z$ für $(sin\, z)^2$ immer mehr eingebürgert.

§ 79. Das Additionstheorem der ganzen trigonometrischen Functionen. Die Functionen sinus und cosinus wollen wir als ganze trigonometrische Functionen bezeichnen, weil sie überall den Charakter einer ganzen Function haben. Aus der Gleichung

$$e^{ti} \,.\, e^{zi} = e^{(t+z)i}$$

ergiebt sich

$$(\cos t + i \sin t)(\cos z + i \sin z) = (\cos t \cos z - \sin t \sin z) + i(\sin t \cos z + \cos t \sin z) = \cos(t+z) + i \sin(t+z).$$

Sind z und t reelle Zahlen, so sind $\cos t$, $\sin t$, $\cos z$, $\sin z$ ebenfalls reell, und die letzte Gleichung zerfällt in zwei Gleichungen, weil die reellen Theile für sich und die imaginären Theile für sich gleich sein müssen, so dass also

$$\cos(t+z) = \cos t \cos z - \sin t \sin z, \quad \sin(t+z) = \sin t \cos z + \cos t \sin z$$

sein muss. Diese Gleichungen sind aber Beziehungen zwischen Potenzreihen, die sich nach Potenzen von t und z ordnen lassen. Nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten müssen daher diese Beziehungen, wenn sie für alle reellen t und z gelten, auch für alle complexen t und z richtig sein. Diese Gleichungen lehren, wie man $f(t+z)$ durch $f(t)$ und $f(z)$ ausdrückt, wenn f entweder der sinus oder der cosinus ist. Eine Gleichung, welche dies für irgend eine Function leistet, heisst das Additionstheorem dieser Function. Für die trigonometrischen Functionen sind diese Additionstheoreme in den Gleichungen

$$\cos(t+z) = \cos t \cos z - \sqrt{1-\cos^2 t} \,.\, \sqrt{1-\cos^2 z}, \quad \sin(t+z) = \sin t \sqrt{1-\sin^2 z} + \sin z \sqrt{1-\sin^2 t}$$

enthalten, wofür jedoch in der Regel die obige Schreibweise eintritt, in der $\sqrt{1-\cos^2 t}$ durch $\sin t$, $\sqrt{1-\sin^2 t}$ durch $\cos t$ ersetzt ist, was noch den Vortheil hat, dass die Doppeldeutigkeit der Wurzel nicht darin enthalten ist. Das Additionstheorem ist ein algebraisches, d. h. $f(z+t)$ stellt sich durch $f(z)$ und $f(t)$ in algebraischen Ausdrücken dar.

Durch Specialisirung der Werthe t und z im Additionstheorem erhalten wir wichtige Formeln. Setzt man darin zuerst $-z$ für z, so gewinnt man noch die allgemeinen Formeln

$$\cos(t-z) = \cos t \cos z + \sin t \sin z, \quad \sin(t-z) = \sin t \cos z - \cos t \sin z.$$

Wird t durch $\frac{1}{2}\pi$ und z einmal durch $-z$ ersetzt, ein andermal gleich z gelassen, so folgt

$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi - z) = \sin z, \quad \sin(\tfrac{1}{2}\pi - z) = \cos z, \quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi + z) = -\sin z, \quad \sin(\tfrac{1}{2}\pi + z) = \cos z.$$

Wird im Additionstheoreme t durch z ersetzt, so erhalten wir

$$\cos^2 z - \sin^2 z = \cos 2z, \quad 2 \sin z \cos z = \sin 2z, \quad 1 + \cos z = 2\cos^2 \tfrac{1}{2}z, \quad 1 - \cos z = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}z.$$

Und setzt man hierin $\frac{1}{2}\pi$ für z, so ergiebt sich

$$\cos \pi = \cos^2 \tfrac{1}{2}\pi - \sin^2 \tfrac{1}{2}\pi = -1, \quad \sin \pi = 2 \sin \tfrac{1}{2}\pi \cos \tfrac{1}{2}\pi = 0.$$

Setzen wir $\frac{1}{4}\pi$ für z in der Gleichung $\cos(\frac{1}{2}\pi - z) = \sin z$, so finden wir

$$\cos \tfrac{1}{4}\pi = \sin \tfrac{1}{4}\pi, \quad \cos^2 \tfrac{1}{4}\pi + \sin^2 \tfrac{1}{4}\pi = 1, \quad \cos \tfrac{1}{4}\pi = \sin \tfrac{1}{4}\pi = \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

wo die Wurzel positiv zu nehmen ist.

§ 80. Periodicität der trigonometrischen Functionen. Setzen wir im Additionstheorem $n\pi$ für t und π für z, so erhalten wir

$$\cos(n+1)\pi = \cos n\pi \cos \pi = -\cos n\pi, \quad \sin(n+1)\pi = \sin n\pi \cos \pi = -\sin n\pi,$$

woraus mittels des Schlusses von n auf $n+1$, wenn n eine ganze Zahl ist, folgt

$$\cos n\pi = (-1)^n, \quad \sin n\pi = 0, \quad \cos(-n\pi) = (-1)^n, \quad \sin(-n\pi) = 0.$$

Setzen wir ebenso $t = n\pi$, $z = \frac{1}{2}\pi$, so folgt

$$\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = 0, \quad \sin\frac{2n+1}{2}\pi = (-1)^n,$$

wobei n positiv oder negativ sein kann. Setzen wir ferner $\pm n\pi$ für t, während z eine beliebige Zahl ist, so haben wir

$$\cos(z \pm n\pi) = (-1)^n \cos z, \quad \sin(z \pm n\pi) = (-1)^n \sin z,$$

woraus der Satz entspringt: die Functionen sinus z und cosinus z bleiben ungeändert, wenn man die Veränderliche z um ein ganzes Multiplum von 2π vermehrt oder vermindert. Die Zahl 2π wird Modul der Periodicität, oder kürzer die Periode genannt. Endlich liefert das Additionstheorem noch die wichtigen Gleichungen

$$\cos[(2n+1)\pi - z] = \cos(\pi - z) = -\cos z, \quad \sin[(2n+1)\pi - z] = \sin(\pi - z) = \sin z.$$

§ 81. Verlauf der ganzen trigonometrischen Functionen für reelle Veränderliche. Wir bestimmten π dadurch, dass $\frac{1}{2}\pi$ die kleinste positive reelle Wurzel der Gleichung $\cos z = 0$ sein sollte. Die Zahl $\frac{1}{2}\pi$ lag zwischen $\sqrt{2}$ und 2. Es fragt sich, ob es zwischen $\sqrt{2}$ und 2 noch eine zweite Wurzel dieser Gleichung etwa $\frac{1}{2}\pi'$, $(\pi' > \pi)$ giebt. Nein! Denn wäre $\cos\frac{1}{2}\pi' = 0$, so wäre auch $\sin\frac{1}{2}\pi' = 1$, $\sin\pi' = 0$, in Folge der nämlichen Schlüsse, welche lehrten, dass $\sin\frac{1}{2}\pi = 1$, $\sin\pi = 0$ sei. Nun würde

$$\sin(\pi' - \pi) = \sin\pi' \cos\pi - \cos\pi' \sin\pi = 0$$

sein. Da π' ebenso wie π zwischen $2\sqrt{2}$ und 4 liegt, so ist $\pi' - \pi < 4 - 2\sqrt{2}$, $\pi' - \pi < 2$. Für einen solchen Werth von x ist aber, wie wir sahen, $\sin x$ positiv und von Null verschieden. Demnach giebt es nur eine Lösung der Gleichung $\cos x = 0$ zwischen $\sqrt{2}$ und 2. Dass $\cos x$, $\sin x$ nicht > 1 und < -1 werden können, folgt aus der Beziehung $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ und der Realität.

Da man es mit stetigen Functionen zu thun hat, die für reelle Werthe der Veränderlichen reell sind, so findet man jetzt leicht, dass

zwischen	0 und $\frac{1}{2}\pi$,	$\frac{1}{2}\pi$ und π,	π und $\frac{3}{2}\pi$,	$\frac{3}{2}\pi$ und 2π,
$\cos x$	positiv,	negativ,	negativ,	positiv,
$\sin x$	positiv,	positiv,	negativ,	negativ

ist. Für alle übrigen reellen Werthe von x ergiebt sich das Vorzeichen dieser Functionen aus ihrer Periodicität. Die Maxima und Minima derselben sind $+1$ und -1. Das Intervall von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ nennt man den ersten, von $\frac{1}{2}\pi$ bis π den zweiten, von π bis $\frac{3}{2}\pi$ den dritten und von $\frac{3}{2}\pi$ bis 2π den vierten Quadranten der Periode 2π.

Setzt man $\cos x = a$, und ist a reell und absolut genommen < 1, so giebt es zwischen 0 und π nur einen Werth von x, für welchen diese Gleichung erfüllt ist. — Um dies zu beweisen, leiten wir aus dem Additionstheoreme erst noch ein paar sehr brauchbare Formeln ab. Die Additionstheoreme liefern die Gleichungen

$$\cos(u+v) + \cos(u-v) = 2\cos u \cos v, \quad \cos(u+v) - \cos(u-v) = -2\sin u \sin v,$$
$$\sin(u+v) + \sin(u-v) = 2\sin u \cos v, \quad \sin(u+v) - \sin(u-v) = 2\sin v \cos u.$$

Schreibt man hierin t für $u+v$, z für $u-v$, woraus

$$u = \tfrac{1}{2}(t+z), \quad v = \tfrac{1}{2}(t-z)$$

folgt, so erhält man die Beziehungen

$$\cos t + \cos z = 2\cos\tfrac{1}{2}(t+z)\cos\tfrac{1}{2}(t-z), \quad \cos t - \cos z = 2\sin\tfrac{1}{2}(t+z)\sin\tfrac{1}{2}(z-t),$$
$$\sin t + \sin z = 2\sin\tfrac{1}{2}(t+z)\cos\tfrac{1}{2}(t-z), \quad \sin t - \sin z = 2\sin\tfrac{1}{2}(t-z)\cos\tfrac{1}{2}(t+z).$$

Nun seien x' und x zwei zwischen 0 und π liegende Werthe, für welche der cosinus gleich a wäre, und es sei $x' > x$. Dann würde

$$\cos x' - \cos x = -2 \sin \tfrac{1}{2}(x' + x) \sin \tfrac{1}{2}(x' - x) = 0$$

sein. Es ist aber $\frac{1}{2}(x' - x)$ sowohl als auch $\frac{1}{2}(x' + x)$ unter der gemachten Voraussetzung kleiner als π und von Null verschieden, mithin ist sowohl $\sin \frac{1}{2}(x + x')$ als auch $\sin \frac{1}{2}(x' - x)$ positiv, und es kann $\cos x' - \cos x$ nicht 0, $\cos x'$ nicht gleich $\cos x$ sein. Es ist vielmehr $\cos x' - \cos x$ negativ, wenn $0 < x < x' < \pi$ ist, positiv, wenn $\pi < x < x' < 2\pi$ ist. Die Functionen $\cos x$ $\sin x$ sind zwischen ihren Maximis und Minimis eine halbe Periode hindurch monotone Functionen. Es kann nur eine Wurzel der Gleichung $\cos x = a$ zwischen 0 und π geben. — Die nützliche Uebung, die Functionen $y = \cos x$, $y = \sin x$ graphisch darzustellen (x Abscisse, y Ordinate), kann dem Leser überlassen werden.

Da $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$, $\cos \pi = -1$ ist, so folgt nebenbei aus dem Umstande, dass jeder Werth nur einmal angenommen wird, dass mit wachsenden x der cosinus in den beiden ersten Quadranten von 1 bis -1 stets (und stetig) abnimmt. Der sinus aber nimmt im ersten Quadranten stets (und stetig) von 0 bis 1 zu, im zweiten von 1 bis 0 ab. Die Eigenschaften des Zu- und Abnehmens im weiteren Verlauf dieser Functionen werden durch ihre Periodicität völlig bestimmt.

§ 82. Periodicität der Exponentialfunction. Werthe für complexe Veränderliche. Die Function e^z ist periodisch und hat den Periodicitätsmodul $2i\pi$, d. h. sie bleibt ungeändert, wenn z um ein ganzes Multiplum von $2i\pi$ vermehrt oder vermindert wird. Es ist nämlich

$$e^{z \pm 2ni\pi} = e^z \cdot e^{\pm 2ni\pi} = e^z(\cos 2n\pi \pm i \sin 2n\pi) = e^z.$$

(Die Vorzeichen entsprechen sich.) Damit ist die Periodicität erwiesen. Man erkennt ebenso leicht die Richtigkeit der Gleichungeu

$$e^{z \pm n\pi i} = (-1)^n e^z, \quad e^{z + \frac{1}{2}n\pi i} = i^n \cdot e^z.$$

Die Gleichung $e^z = a$, wenn a eine beliebige complexe von Null verschiedene Zahl ist, hat unendlich viele Lösungen, die alle um ganze Multipla von $2i\pi$ von einander verschieden sind. In der That ist z_0 ein Werth von z, welcher die Gleichung $e^{z_0} = a = \alpha + \beta i$ erfüllt, so erfüllt auch jeder Werth von der Form $z_0 + 2ni\pi$ dieselbe Gleichung. Es ist aber zu zeigen, dass überhaupt ein solcher Werth z_0 existirt. — Soll $e^z = a$ sein, und ist $z = x + yi$, so muss $abs\, e^z = e^x = abs\, a$ sein, und diese Gleichung hat, so lange a von Null verschieden ist, stets (§ 76) eine und nur eine Lösung. Es sei $e^{x_0} = abs\, a$, so ist noch y so zu bestimmen, dass

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y = a : abs\, a = (\alpha : abs\, a) + i(\beta : abs\, a)$$

wird. Ist nun y_0 eine Zahl zwischen 0 und π, und es giebt immer eine und nur eine solche, weil $\alpha : abs\, a$ absolut genommen kleiner als Eins ist, für welche $\cos y_0 = \alpha : abs\, a$ ist, so ist $\sin \pm y_0 = \pm \sin y_0 = \beta : abs\, a$, wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem β positiv oder negativ ist. Der Gleichung

$$e^{yi} = (\alpha + \beta i) : abs\, a$$

genügt also, da $\cos y_0 + i \sin y_0 = e^{y_0 i}$, $\cos y_0 - i \sin y_0 = e^{-y_0 i}$ ist, wenn β positiv ist eine positive, wenn β negativ ist eine negative Zahl y_0, die absolut genommen kleiner oder gleich π ist, und es ist $z_0 = x_0 + iy_0$ eine Zahl, welche für z gesetzt die Gleichung $e^z = a$ befriedigt. Die Lösung dieser Gleichung, bei welcher der imaginäre Theil von z zwischen $-\pi i$ und $+\pi i$ liegt, soll eine oder die Hauptlösung genannt werden. Es giebt nur eine solche. Wäre nämlich z'_0 neben z_0 eine zweite, so wäre ihr reeller Theil x_0, wie schon gezeigt wurde. Ist der imaginäre y'_0, so wäre weiter

$$e^{y_0 i} : e^{y'_0 i} = e^{(y_0 - y'_0)i} = 1 = \cos(y_0 - y'_0) + i \sin(y_0 - y'_0), \quad \cos(y_0 - y'_0) = 1, \quad \sin(y_0 - y'_0) = 0.$$

Diese Gleichungen werden aber für reelle Werthe von $y_0 - y'_0$ nur erfüllt, wenn $y_0 - y'_0$ Null oder ein gerades Multiplum von π ist. Im ersten Falle ist $z'_0 = z_0$, im zweiten sind $z_0 z'_0$ um ein Multiplum von $2i\pi$ verschieden, und können daher nicht beide Hauptlösungen sein.

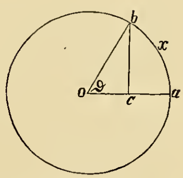
Da also die Gleichung $e^z = a$, wenn a nicht Null ist, stets lösbar ist, so kann jede Zahl a in die Form gebracht werden

$$a = \varrho \,.\, (cos\ \vartheta + i\ sin\ \vartheta) = abs\ a \,.\, (cos\ arc\ a + i\ sin\ arc\ a)$$

auf unendlich viele Arten, die sich aber nur in ϑ unterscheiden, und zwar um Multipla von 2π. Ist $-\pi < \vartheta \leqq \pi$, so wollen wir diese Darstellung die Hauptdarstellung von a durch ihren absoluten Betrag (ϱ) und ihren arcus (ϑ) nennen.

In der Function $e^z = e^{x+yi}$ kann man z so über alle Grenzen wachsen lassen, dass sich die Function einer beliebig gegebenen Zahl a beliebig nähert oder ihr gleich wird. Denn man setze $e^x = abs\ a$ und $y = arc\ a + 2n\pi$ und lasse die ganze Zahl n positiv oder negativ über alle Grenzen wachsen. Den Werthen $a = 0$ oder $lim\ a = \infty$ kann man sich nur beliebig nähern. Der unendlich ferne Punct der z Ebene ist für e^z eine wesentlich singuläre Stelle. Dasselbe gilt für die Functionen $cos\ z$, $sin\ z$ und, wie sich später zeigen wird, für jede ganze transcendente Function.

§ 83. Einige Sätze aus der Maassgeometrie. In dem Theile der Maassgeometrie, welcher Trigonometrie heisst, wird das Loth, welches man von einem Puncte b einer Kreisperipherie, deren Radius Eins ist, auf einen Durchmesser fällt, der sinus des Centriwinkels genannt, welcher durch das Kreisbogenstück, das zwischen a, dem Endpuncte des Durchmessers, und b liegt, gemessen wird. Das Linienstück zwischen dem Mittelpunct 0 des Kreises und dem Fusspuncte c des Lothes ist der cosinus desselben Winkels, und die Summe der Quadrate dieser Linien ist Eins. Wir wollen für den Augenblick diese Linien mit $Sin\ \vartheta$ und $Cos\ \vartheta$ bezeichnen. In der Trigonometrie wird in der Regel, und die Logarithmentafeln sind darauf eingerichtet, ϑ in sogenannten Graden, Minuten u. s. w. angegeben. Die Kreisperipherie wird 360 Graden gleichgesetzt, diese werden weiter getheilt, und ϑ wird in diesen Maassen ausgedrückt. Hier ist es aber bequemer, den Kreisumfang durch den Radius zu messen, und die Maasszahl desselben, die wir 2ω nennen wollen, statt der 360^0 einzuführen. Der ϑ zugehörende Winkel wird dann durch die Länge des Kreisbogens $ab = x$ direct gemessen (immer unter der Voraussetzung, dass der Radius gleich Eins ist) und man verwandelt die Zahlen der einen Messung (ϑ) in die der andern (x) durch die Proportion



$$\vartheta^0 : 360^0 = x : 2\omega.$$

Wir wollen zum Buchstaben ϑ zurückgreifen, aber mit demselben immer die Kreisbogenlänge, durch den Radius gemessen, bezeichnen. Mit dieser Zahl bezeichnen wir also zugleich den Winkel $b0c$ und den Bogen (*arcus*) ab. In der Trigonometrie werden nun für reelle ϑ und φ die Sätze bewiesen:

$$Cos\ (\vartheta + \varphi) = Cos\ \vartheta\ Cos\ \varphi - Sin\ \vartheta\ Sin\ \varphi, \quad Sin\ (\vartheta + \varphi) = Sin\ \vartheta\ Cos\ \varphi + Cos\ \vartheta\ Sin\ \varphi,$$

$$Sin\ \tfrac{1}{2}\omega = 1, \quad Cos\ \tfrac{1}{2}\omega = 0, \quad Sin\ \omega = 0, \quad Cos\ \omega = -1, \quad lim\ Sin\ \vartheta : \vartheta = 1, \quad (lim\ \vartheta = 0).$$

Aus den hierdurch gegebenen Additionstheoremen des Sinus und des Cosinus folgen die Sätze:

$$Cos\ (\vartheta + \varphi) + i\, Sin\ (\vartheta + \varphi) = (Cos\ \vartheta + i\, Sin\ \vartheta)\ (Cos\ \varphi + i\, Sin\ \varphi), \quad Cos\ n\vartheta + i\, Sin\ n\vartheta = (Cos\ \vartheta + i\, Sin\ \vartheta)^n.$$

Zwischen 0 und $\frac{1}{2}\omega$ ist $Sin\ \vartheta$ positiv, und ebenso $Cos\ \vartheta$ positiv.

Die Functionen $Cos\ \vartheta$ und $Sin\ \vartheta$ sind stetige Functionen der reellen Veränderlichen ϑ.

§ 84. Die Functionen $cos\,\vartheta$, $sin\,\vartheta$, und $Cos\,\vartheta$, $Sin\,\vartheta$ sind bez. dieselben. Setzen wir in den Gleichungen

$$Cos\,2\vartheta + i\,Sin\,2\vartheta = (Cos\,\vartheta + i\,Sin\,\vartheta)^2, \quad cos\,2\vartheta + i\,sin\,2\vartheta = (cos\,\vartheta + i\,sin\,\vartheta)^2,$$

$\frac{1}{2}\vartheta$ für ϑ, so erhalten wir

$$\sqrt{Cos\,\vartheta + i\,Sin\,\vartheta} = Cos\,\tfrac{1}{2}\vartheta + i\,Sin\,\tfrac{1}{2}\vartheta, \quad \sqrt{cos\,\vartheta + i\,sin\,\vartheta} = cos\,\tfrac{1}{2}\vartheta + i\,sin\,\tfrac{1}{2}\vartheta,$$

wo allerdings im Grunde beide Male rechts noch der entgegengesetzte Werth zulässig ist. Wir wollen jedoch hier für ϑ so kleine positive Werthe wählen, dass $cos\,\vartheta$ positiv oder Null ist und für abnehmende ϑ positiv bleibt, was erreicht wird, wenn links $\vartheta \leq \frac{1}{2}\omega$, rechts $\vartheta \leq \frac{1}{2}\pi$ genommen wird. Dann wollen wir die Quadratwurzeln so bestimmen, dass ihr reeller Theil positiv ist, wodurch die beiden Gleichungen zu völlig bestimmten werden. Nun ist

$$Cos\,\tfrac{1}{2}\omega + i\,Sin\,\tfrac{1}{2}\omega = cos\,\tfrac{1}{2}\pi + i\,sin\,\tfrac{1}{2}\pi \;(= i).$$

Nimmt man beiderseits die Quadratwurzel, und zwar so, dass ihr reeller Theil positiv ist, so folgt

$$Cos\,\tfrac{1}{4}\omega + i\,Sin\,\tfrac{1}{4}\omega = cos\,\tfrac{1}{4}\pi + i\,sin\,\tfrac{1}{4}\pi, \quad (= \sqrt{i} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}}).$$

Nimmt man hiervon wieder und wieder die Quadratwurzel, deren reeller Theil positiv ist, so gelangt man zu der Gleichung

$$Cos\,\frac{1}{2^n}\omega + i\,Sin\,\frac{1}{2^n}\omega = cos\,\frac{1}{2^n}\pi + i\,sin\,\frac{1}{2^n}\pi,$$

und wenn man zur m^{ten} Potenz erhebt, zu den Gleichungen

$$Cos\,\frac{m}{2^n}\omega + i\,Sin\,\frac{m}{2^n}\omega = cos\,\frac{m}{2^n}\pi + i\,sin\,\frac{m}{2^n}\pi, \quad Cos\,\frac{m}{2^n}\omega = cos\,\frac{m}{2^n}\pi, \quad Sin\,\frac{m}{2^n}\omega = sin\,\frac{m}{2^n}\pi,$$

welche für jedes ganze m und n gelten. Setzen wir x für $m : 2^n$, so folgt hieraus zunächst zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, dann aber wegen $(cos\,\vartheta + i\,sin\,\vartheta)^2 = cos\,2\vartheta + i\,sin\,2\vartheta$ auch weiter, dass die Gleichungen

$$Cos\,x\omega = cos\,x\pi, \quad Sin\,x\omega = sin\,x\pi$$

für reelle x in jedem noch so kleinen Intervalle beliebig oft (unendlich oft) erfüllt sind, und dass sie demnach (§ 31) wegen der Stetigkeit für alle reellen x erfüllt sind.

Um noch das Verhältniss zwischen ω und π zu bestimmen, braucht man die Gleichung

$$Sin\,x\omega = sin\,x\pi$$

nur durch x zu dividiren und mit x zur Grenze Null überzugehen. Dann ist

$$lim\,\frac{Sin\,x\omega}{x} = lim\,\frac{Sin\,(x\omega)}{(x\omega)}\omega = \omega = lim\,\frac{sin\,x\pi}{x} = \pi, \quad \omega = \pi$$

und es ist π die Ludolph'sche Zahl 3,14159265 . ., $1 : \pi = 0{,}31831\ldots$

Damit ist für reelle ϑ, und für solche sind die Functionen der Trigonometrie nur definirt, die völlige Gleichheit von $Sin\,\vartheta$ und $sin\,\vartheta$, und von $Cos\,\vartheta$ und $cos\,\vartheta$ erwiesen, wodurch die grossen Buchstaben überflüssig werden. Lassen sich die für reelle ϑ definirten Functionen $Sin\,\vartheta$, $Cos\,\vartheta$ als Functionen der complexen Veränderlichen ϑ analytisch fortsetzen, so müssen (§ 64) auch diese Fortsetzungen $sin\,\vartheta$ $cos\,\vartheta$ sein. Mittel zur Berechnung von π werden später gegeben.

§ 85. Darstellung der complexen Zahlen durch ihren absoluten Betrag und arcus. Wir sind nun im Stande, die Beziehung zwischen dem arcus einer Zahl und ihrem absoluten Betrage einerseits, und ihrem reellen und imaginären Theile andererseits, welche im § 14 unerörtert blieb, hier aufzustellen. Ist nämlich $a = \varrho e^{\vartheta i} = \varrho\,(cos\,\vartheta + i\,sin\,\vartheta)$, so ist ϱ der absolute Betrag, und ϑ der arcus der Zahl a, d. h. zieht man um den Punct Null in der Ebene, welche die complexen Zahlen darstellt, mit dem Radius Eins einen Kreis, so schneiden der Radiusvector des Trägers der Zahl a und die reelle Achse ein Stück von der Länge ϑ aus diesem Kreise, welches den arcus der Zahl misst. Ferner ist, $a = \alpha + \beta i$ vorausgesetzt,

$$\varrho \cos \vartheta = \alpha, \quad \varrho \sin \vartheta = \beta, \quad \varrho = \sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}.$$

Das Product zweier Zahlen $a = \varrho(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$, $a' = \varrho'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta')$ hat das Product der absoluten Beträge zum absoluten Betrage und die Summe der arcus zum arcus. Der Quotient hat die Differenz der arcus zum arcus. In Zeichen

$$a \,.\, a' = \varrho \,.\, \varrho'[\cos(\vartheta + \vartheta') + i \sin(\vartheta + \vartheta')], \quad a : a' = (\varrho : \varrho')[\cos(\vartheta - \vartheta') + i\sin(\vartheta - \vartheta')],$$
$$abs\, a^m = (abs\, a)^m, \quad arc\, a^m = m \,.\, arc\, a, \quad abs\,(a \,.\, a') = abs\, a \,.\, abs\, a', \quad arc\,(a \,.\, a') = arc\, a + arc\, a',$$
$$abs\,(a : a') = abs\, a : abs\, a', \quad arc\,(a : a') = arc\, a - arc\, a'.$$

In den Gleichungen, die den arcus enthalten, würde genauer $\equiv$ (congruent) statt $=$ zu schreiben sein, weil die arcus nur bis auf ein Multiplum von 2π bestimmt sind. Weiter ist:

$$abs(a+b) = \sqrt{[abs^2 a + abs^2 b + 2\, abs(ab) \cos arc(a:b)]} = \sqrt{(abs\, a - abs\, b)^2 + 4\, abs\,(ab) \,.\, \cos^2 \tfrac{1}{2} arc\,(a:b)}$$
$$= (abs\, a + abs\, b) \sqrt{1 - \frac{4\, abs\,(ab) \sin^2 \frac{1}{2} arc\,(a:b)}{(abs\, a + abs\, b)^2}}.$$

§ 86. Stetigkeit des absoluten Betrages und des arcus einer Zahl. Eine Zahl ist eine stetige Function ihres arcus und ihres absoluten Betrages. Aendert sich umgekehrt die Zahl z so, dass sie in $z + h$ übergeht, und ist h sehr klein,[1] so ändert sich im Allgemeinen ihr absoluter Betrag und ihr arcus in der Hauptdarstellung sehr wenig. Der arcus ändert sich allein unstetig längs der reellen Achse der Zahlenebene von 0 bis $-\infty$, dort ist er auf dem negativen (obern) Ufer um 2π grösser als auf dem positiven (untern). Aus dem Anblick der graphischen Darstellung einer Zahl ist dieser Satz evident, allein wir dürfen uns hier wegen der nicht überall völlig durchsichtigen Correspondenz zwischen dem graphischen Augenschein und den analytischen Verhältnissen nicht mit dieser Art des Beweises begnügen, sondern müssen den Satz streng analytisch herleiten. — Hierzu bedürfen wir des Hülfssatzes, dass die Gleichung

$$\sin \varphi = \varepsilon$$

für kleine Werthe von $\varepsilon\, (-\frac{1}{2} < \varepsilon < \frac{1}{2})$ durch kleine Werthe von φ gelöst wird. Ist ε positiv und kleiner als $\frac{1}{2}$, so ist

$$\sin 2\varepsilon = 2\varepsilon - \varepsilon\left(\frac{8\varepsilon^2}{fac\, 3} - \frac{2^5 \varepsilon^4}{fac\, 5} + \frac{2^7 \varepsilon^6}{fac\, 6} - . + . .\right) = 2\varepsilon - \varepsilon\lambda,$$

worin λ ein ächter positiver Bruch ist. Demnach ist $\sin 2\varepsilon > \varepsilon$, und es muss $\sin\varphi$ den Werth ε einmal für einen Werth von φ zwischen 0 und 2ε (§ 36) annehmen, woraus, da zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ nur ein solcher Werth existirt, folgt $\varphi < 2\varepsilon$. Ist ε negativ, so ist φ negativ aber absolut genommen wieder kleiner als $2\, abs\, \varepsilon$. Die übrigen reellen Lösungen der Gleichung $\sin\varphi = \varepsilon$ sind (§ 87) sämmtlich in den Formen enthalten

$$\varphi \pm 2n\pi, \quad \pi - \varphi \pm 2n\pi.$$

Für die erste Reihe dieser Werthe ist der cosinus positiv, für die andere negativ.

Was nun zuerst den absoluten Betrag von z betrifft, so ändert er sich überall stetig mit z. Denn ist $\varrho' = abs\,(z+h)$, so ist $\varrho' - \varrho = (\varrho'\varrho' - \varrho\varrho) : (\varrho + \varrho') = \xi(2x + \xi) + \eta(2y + \eta) : (\varrho + \varrho')$, wenn $z = x + yi$, $h = \xi + \eta i$ ist, und es wird demnach, wenn ϱ nicht 0 ist, $\varrho' - \varrho$ mit ξ und η beliebig

---

[1]) Wir wollen eine complexe Zahl $z = x + yi$ sehr klein nennen, wenn $abs\, z$, also sowohl x als auch y sehr klein ist. Sehr gross nennen wir die Zahl z, wenn $abs\, z$ sehr gross ist, vergl. die Anmerkung auf Seite 63.

klein. Ist aber $\varrho = 0$, so ist $\varrho' - \varrho = \sqrt{\xi\xi + \eta\eta}$, welcher Ausdruck offenbar mit ξ und η beliebig klein wird. Es bleibt der arcus zu untersuchen. Es sei $arc\, z = \vartheta$, $arc\, z' = arc(z+h) = \vartheta + \varphi$, so ist

$$z' : z = (\varrho' : \varrho)\,(\cos\varphi + i \sin\varphi), \quad [(x+\xi)x + (y+\eta)y] : \varrho\varrho' = \cos\varphi, \quad (x\eta - y\xi) : \varrho\varrho' = \sin\varphi.$$

Daraus folgt, dass der absolut genommen kleinste Werth von φ, der diesen Gleichungen genügt, mit ξ und η, wenn ϱ von Null verschieden ist, beliebig klein wird, und da der cosinus positiv ist, so sind die übrigen Lösungen von der kleinsten um ein Multiplum von 2π verschieden. Nun wurde behauptet, die Hauptdarstellung von z sei stetig, es ist also ϑ und $\vartheta + \varphi$ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ zu nehmen. Sei zuerst ϑ von $-\pi$ und $+\pi$ verschieden, so kann man durch hinlänglich kleine Annahme von ξ und η φ so klein machen, dass auch $\vartheta + \varphi$ von $-\pi$ und $+\pi$ verschieden ist, und zwischen diesen beiden Grössen liegt. Wollte man einen um ein Multiplum von 2π verschiedenen Werth für φ setzen, so würde $\vartheta + \varphi \pm 2n\pi$, wenn $\vartheta + \varphi$ zur Hauptdarstellung gehört, nicht zur Hauptdarstellung gehören, nicht zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen, es ist für φ nur der absolut genommene kleinste Werth zulässig, und es ändert sich ϑ mit z stetig. Ist aber $\vartheta = \pi$, und ist für gegebene kleine ξ und η der Winkel φ positiv, so gehört $\vartheta + \varphi$ nicht zur Hauptdarstellung, sondern $\vartheta + \varphi - 2\pi$ gehört dazu, und es ist also in der Hauptdarstellung $arc\,\vartheta$ an der Stelle π unstetig, er ist in einem Puncte, welcher unendlich nahe dem obern Ufer der Linie $0 \,..\, -\infty$ liegt um 2π grösser, als in einem unendlich nahe benachbarten Puncte auf dem untern Ufer (welche symbolische Ausdrucksweise nicht misszuverstehen ist). Es ist dabei zu beachten, dass $arc\,\vartheta$ mit der Zahl z auch längs jener Linie stetig geändert werden kann, nur erhält man, wenn z jene Linie überschreitet, nicht mehr die Hauptdarstellung, wenn man ϑ stetig ändert.

Im Puncte 0 ist der arcus der Zahl z völlig unbestimmt, denn es ist $0 = 0\,.(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$, was auch ϑ sein mag. Diese Unbestimmtheit ist in jedem Falle als eine Unstetigkeit anzusehen, wenn auch wie hier der arcus der Zahl $z = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, wenn ihr absoluter Betrag ϱ stetig abnimmt, immer einen bestimmten Werth hat, wenn z auf einer gegebenen Linie in den Punct Null geführt wird. Weil man aber bei verschiedener Art der Annäherung der Zahl z an 0 zu verschiedenen arcus gelangt, so ist derselbe dort unbestimmt und unstetig.

Es kann dem Leser nicht entgehen, dass der Begriff der Hauptdarstellung eine gewisse Willkür enthält. Man könnte ebenso gut die Hauptdarstellung dadurch bestimmen, dass man festsetzte $0 \leq arc\, z < 2\pi$, und noch auf mannigfache andere Weise; die hier gewählte Bestimmung ist aber die bequemste und gebräuchlichste.

§ 87. Das Verschwinden der trigonometrischen Functionen. Da $\cos z = \sin(\frac{1}{2}\pi - z)$ ist, und $\sin z = \cos(\frac{1}{2}\pi - z)$, so genügt es, eine der Functionen sinus oder cosinus zu untersuchen, wie oft und wo sie einen bestimmten Werth a annimmt. Ist $a = 0$, so fanden wir, dass $\sin x$ für $x = \pm n\pi$ verschwindet, für andere reelle Werthe von x nicht Null wird. Es fragt sich, ob es noch complexe Zahlen z giebt, für welche $\sin z = 0$ ist. Für diesen Werth müsste

$$e^{zi} - e^{-zi} = 0, \quad e^{zi} = e^{-zi}, \quad e^{2zi} = e^{-2y+2xi} = 1$$

sein. Diese Gleichung erfordert (§ 76), dass $y = 0$ sei. Das besagt, für complexe Werthe von z verschwindet $\sin z$ nicht, nur für reelle, und diese sind sämmtlich gefunden. Aehnliches gilt von $\cos z$.

Ist aber $\sin z = a$, und a eine beliebige complexe Zahl, so ist

$$e^{zi} - e^{-zi} = 2ia, \quad e^{2zi} - 2ia\,e^{zi} - 1 = (e^{zi} - ia)^2 - 1 + a^2 = 0, \quad e^{iz} = ia \pm \sqrt{1 - a^2}.$$

Ist nun $e^{z_0 i} = ia + \sqrt{1 - aa}$, so ist auch $e^{(z_0 \pm 2n\pi)i} = ia + \sqrt{(1 - aa)}$ für jedes ganze n, und nur für diese Werthe des Exponenten (§ 82). Ist ferner $e^{z_0' i} = ia - \sqrt{1 - aa}$, so ist auch $e^{(z'_0 \pm 2n\pi)i} = ia - \sqrt{1 - aa}$, und nur für diese Werthe des Exponenten. Weiter ist

$$e^{(z_0 + z_0')i} = -a^2 - 1 + a^2 = -1, \quad z_0 + z'_0 = \pi \pm 2n\pi,$$

woraus sich ergiebt, dass sämmtliche Lösungen der Gleichung $\sin z = a$ in den Formen enthalten sind

$$z = z_0 \pm 2n\pi, \quad z = \pi - z_0 \pm 2n\pi,$$

wenn $\sin z_0 = a$, z_0 eine, etwa die erste Hauptlösung ist, deren reeller Theil zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. Wir entschliessen uns von einer ersten und zweiten Hauptlösung zu reden; der reelle Theil der zweiten Hauptlösung liegt zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π oder $-\frac{1}{2}\pi$ und $-\pi$, und die Summe der zusammengehörigen ersten und zweiten Hauptlösung hat den Werth π. Andere Lösungen als die vorhin gefundenen dieser Gleichung giebt es nicht.

Die sämmtlichen Lösungen von $\cos z = a$ sind in den Formen enthalten

$$z_0 \pm 2n\pi, \quad -z_0 \pm 2n\pi,$$

wenn z_0 irgend eine, etwa die in ihrem reellen Theile zwischen 0 und π liegende Hauptlösung ist. Sie heisse die erste Hauptlösung, in der zweiten Hauptlösung liege der reelle Theil von z_0 zwischen $-\pi$ und 0.

§ 88. Die trigonometrischen Functionen für unendlich grosse z. Die trigonometrischen Functionen sind ganze transcendente Functionen. Jede Function $f(z)$ hat, wie sich später zeigen wird, die Eigenschaft, dass man die Veränderliche z derselben auf eine solche Weise dem absoluten Betrage nach über alle Grenzen wachsen lassen kann, dass die Function rascher als jede Potenz von z wächst, d. h. dass $f(z) : z^n$ für jedes positive n mit z (bei jener Art des Wachsthums) über alle Grenzen wächst. Bei der Exponentialfunction hat dies für solche z statt, deren reeller Theil positiv über alle Grenzen wächst. Für rein imaginäre z hingegen bleibt der absolute Betrag der Exponentialfunction immer gleich Eins, wie gross z auch sein mag. Die trigonometrischen Functionen, welche durch die Gleichungen

$$2\cos z = e^{zi} + e^{-zi}, \quad 2i \sin z = e^{zi} - e^{-zi}$$

mit der Exponentialfunction verbunden sind, wachsen rascher als jede Potenz von z über alle Grenzen, wenn z rein imaginär über alle Grenzen wächst, oder wenn der imaginäre Theil von z positiv oder negativ über alle Grenzen wächst, während sie für reelle z immer zwischen -1 und $+1$ hin- und herschwanken, und so unendlich viele Maxima und Minima haben. Betrachtet man die Function $\sin(1:z)$, und lässt z reell gegen 0 abnehmen, so ist

$$\sin\frac{1}{z} = 1 \quad \text{für } z = \frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \ldots \frac{2}{(4n+1)\pi}, \ldots -\frac{2}{3\pi}, \ldots -\frac{2}{(4n+3)\pi}, \ldots$$

$$\sin\frac{1}{z} = 0 \quad \text{für } z = \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \ldots \frac{1}{n\pi}, \ldots -\frac{1}{\pi}, \ldots -\frac{1}{n\pi}, \ldots$$

$$\sin\frac{1}{z} = -1 \quad \text{für } z = \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{11\pi}, \ldots \frac{2}{(4n+3)\pi}, \ldots -\frac{2}{\pi}, \ldots -\frac{2}{(4n+1)\pi}, \ldots,$$

die Function hat in einem endlichen Gebiete (zwischen 0 und 1) unendlich viele Maxima und Minima und ist für $z = 0$ völlig unbestimmt.

Zur Klasse der ganzen transcendenten Functionen gehören offenbar alle Functionen, welche als Summe von Producten aus e^z, $\cos z$, $\sin z$, e^{az}, $\cos bz$, .. bestehen, aber auch die Functionen (§ 71)

$$e^{f(z)}, \ e^{\cos z}, \ \sin e^z, \ \sin f(z), \ \cos\sin z, \ \cos\cos\cos z, \ldots,$$

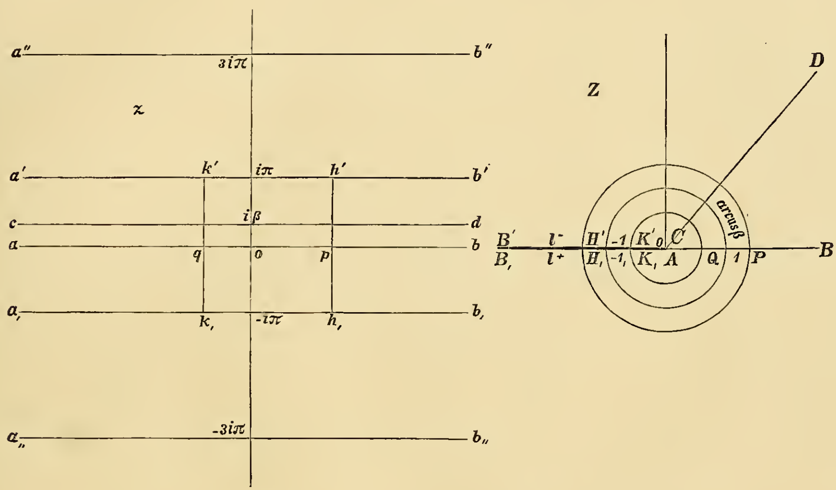
wenn $f(z)$ eine ganze Function oder eine ganze transcendente Function ist. Die Functionen $\frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, $\frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ werden wohl cosinus hyperbolicus und sinus hyperbolicus genannt. — Die Ableitungen ganzer transcendenter Functionen sind ganze transcendente Functionen.

§ 89. Graphische Beziehungen zwischen e^z und z. Unsere Vorstellung über den Verlauf einer Function wird nicht unwesentlich unterstützt durch das Princip der Abbildung. Wir stellen die Zahl $z = x + yi$ in einer Ebene, der z-Ebene nach § 14 dar, die entsprechenden Zahlen

$Z = X + Yi = f(z)$ in einer andern Ebene, der Z-Ebene, und untersuchen sodann den geometrischen Ort der Träger der Zahlen Z, wenn z einfache geometrische Oerter durchläuft. Betrachten wir zuerst die Correspondenz

$$Z = e^z, \quad X + Yi = e^{x+yi}, \quad X = e^x \cos y, \quad Y = e^x \sin y.$$

Durchläuft die Zahl z die reellen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$, oder (ihr Träger in der z-Ebene) die reelle Achse $(a\,..\,b)$ von links nach rechts, so durchläuft der Punct Z fortwährend wachsend von links nach rechts die positiv reelle Achse der Z-Ebene $(A\,..\,B)$. Durchläuft z die Linie $a'\,..\,b'$, welche der reellen Achse (der x-Achse) in der Entfernung π parallel gezogen ist, so dass auf ihr $z = x + \pi i$ ist, so ist $e^{x+\pi i} = -e^x$, $Z = -X$, und es durchläuft Z die negativ reelle Achse von 0 bis $-\infty$ $(A\,..\,B')$ von rechts nach links. Ebenso entsprechen sich die Linien $a_,\,..\,b_,$ und $A\,..\,B_,$, wenn dort $z = x - i\pi$,



(Der Maassstab der Figur links ist etwa dreimal so klein als der der Figur rechts).

$Z = -X$ ist. Ziehen wir aber eine gerade Linie der reellen Achse der z-Ebene parallel in der Entfernung β, so dass auf ihr $z = x + \beta i$ ist $(c\,..\,d)$, so ist $Z = e^{x+\beta i} = e^x(\cos\beta + i\sin\beta)$. Die Zahlen Z haben alle denselben arcus β, ihr Träger durchläuft monoton eine Gerade ($C\,..\,D$, C und A sind dieselben Puncte) von Null bis ins Unendliche, welche mit der positiv reellen Achse der Z-Ebene den Winkel β einschliesst. Dabei kann β auch negativ sein.

Dem Theile der imaginären Achse der z-Ebene zwischen $-i\pi$ und $+i\pi$ entspricht in der Z-Ebene der Einheitskreis. Den Puncten $-i\pi$, 0, $i\pi$ entsprechen bez. die Puncte $-1_,$, 1, -1, wobei $-1_,$ und -1 dieselben Puncte sind, aber gewissermaassen auf verschiedenen Ufern der Linie $0\,..\,-\infty$ liegen. Es ist auf dieser Linie $z = yi$, $Z = \cos y + i \sin y$. Durchläuft z die imaginäre Achse von $-i\pi$ bis $+i\pi$, von unten nach oben, so durchläuft Z den Einheitskreis von $-1_,$ bis -1 positiv herum (entgegengesetzt dem Zeiger einer Uhr). Die Linie $h_,$, h', welche in der Entfernung p der imaginären Achse der z-Ebene parallel gezogen ist, auf welcher $z = p + yi$, $-\pi \leq y \leq \pi$ ist, wird ebenfalls durch einen Kreis in der Z-Ebene abgebildet, dessen Radius $e^p = P$ ist, und der in der positiven Richtung von $H_,$ bis H' durchlaufen wird; dem Puncte $z = p$ entspricht der Punct $Z = P$, der auf der reellen Achse liegt, und Träger einer grösseren Zahl als Eins ist, wenn $p > 0$ ist. Durchläuft z die Linie $k_, k'$, deren Träger die Zahlen $z = q + yi$, $q < 0$, $-\pi \leq y \leq \pi$ sind, so durchläuft Z einen Kreis positiv herum, dessen Radius $Q = e^q$ kleiner als Eins ist, von $K_,$ bis K'. Dem Puncte q entspricht der Punct Q. So entspricht nun das Rechteck $k_, h_, h', k'$ einer Figur $K_, H_, H' K'$, deren Seiten die Bögen zweier Kreise sind und gewissermaassen die beiden Ufer eines Stückes der Linie l, der negativ reellen Achse zwischen $K_,$ und $H_,$ und zwischen H' und K'. — Die Seiten dieser Figur stehen ebenfalls rechtwinklig auf einander. Das Innere der einen Figur entspricht dem Innern der andern. Nähert sich der Punct z der Linie $k_, h_,$, ist also der imaginäre Theil von z negativ nahe $-\pi i$, so nähert sich Z dem Ufer $K_, H_,$ von unten her, von der Seite her, in welcher die negativ imaginären Zahlen Z liegen. Nähert sich z der Linie $k'h'$, ist also der imaginäre Theil von z nahe $i\pi$, so nähert sich Z dem Ufer $K'H'$ von oben her, wo die positiv imaginäre Achse liegt. Entfernt man die Puncte p und q immer weiter vom Puncte Null, so werden die entsprechenden Kreise bez. grösser und kleiner, und man erkennt hieraus, dass den Zahlen zwischen den beiden Parallelen $z = x + \pi i$, $z = x - \pi i$ ($a_, \ldots b_,$ und $a' \ldots b'$) alle Zahlen der ganzen Z-Ebene entsprechen, und zwar jeder Zahl des Streifens eine Zahl und nur eine Zahl der Z-Ebene, verschiedenen Puncten z verschiedene Puncte Z, und nur die Puncte der begrenzenden Linien $a_, \ldots b_,$ und $a' \ldots b'$ entsprechen denselben Puncten der Linie l in der Z-Ebene. Aus diesem Grunde sagen wir, dass die Zahlen der Linie $a_, \ldots b_,$ dem unteren positiven Ufer der Linie $l\,(l^+)$, die Zahlen der Linie $a' \ldots b'$ dem oberen Ufer dieser Linie (l^-) entsprechen. Nähert sich z der oberen oder unteren Parallele, so nähert sich Z bez. dem oberen oder unteren Ufer von l. Dem Parallelstreifen zwischen $a \ldots b$ und $a' \ldots b'$ entspricht die obere Hälfte der Z-Ebene, dem Streifen zwischen $a \ldots b$ und $a_, . b_,$ die untere Hälfte. Will man für einen anderen Punct der z-Ebene das zugehörige Z bestimmen, so kann man $e^z = e^{z \pm 2n\pi i} = Z$ setzen, und nun die ganze Zahl $\pm n$ so bestimmen, dass $z \pm 2ni\pi$ in den Streifen $a_, \ldots b_,$, $a' \ldots b'$ zu liegen kommt. Für diese Zahl ist aber die Lage von Z bestimmt, und sie ist für jenes z dieselbe. Um den Streifen $a' \ldots b'$, $a'' \ldots b''$ abzubilden, verschiebe man ihn parallel mit sich selbst, so dass die reellen Theile aller Zahlen beim Verschieben ungeändert bleiben, bis dieser Streifen den Streifen $a_, \ldots b_,$, $a' \ldots b'$ deckt. Dann kommt jeder Punct des ersten Streifens auf einen bestimmten Punct des zweiten zu liegen, zu diesen beiden Puncten gehört dasselbe Z. Aehnlich kann man mit dem Streifen $a_{,,} \ldots b_{,,}$, $a_, \ldots b_,$ verfahren. Theilt man die ganze z-Ebene durch weitere Parallelen $a''' \ldots b'''$, .., $a_{,,,} \ldots b_{,,,}$, .. in unendlich viele Parallelstreifen von der Breite 2π, und nennt man solche Puncte dieser Streifen nach $2i\pi$ congruente, deren zugehörige Zahlen denselben reellen Theil, und um $2ni\pi$ verschiedene imaginäre Theile haben, so entspricht allen diesen congruenten Puncten z ein und dasselbe Z. Congruente Figuren, die durch Verschiebung der Puncte parallel zur imaginären Achse zur Deckung gebracht werden können, werden durch dieselbe Figur der Z-Ebene abgebildet. Die Bilder der Puncte der z-Ebene füllen die Z-Ebene unendlich oft aus. Man kann aber jedem Streifen der z-Ebene eine Z-Ebene für sich entsprechen lassen, und aus diesen Ebenen (Blättern) eine Riemann'sche Fläche bilden, die die Eigenschaft hat, dass jedem Puncte der z-Ebene ein und nur ein Punct der Riemann'schen Fläche entspricht und umgekehrt. Doch hierauf wollen wir erst bei der Umkehrung der Exponentialfunction, beim Logarithmus eingehen.

§ 90. Graphische Beziehungen zwischen $\sin z$ und z. Setzen wir $\sin z = Z = X + Yi = \sin(x + yi) = \sin x \cos yi + \sin yi \cos x$ und beachten, dass

$$\cos yi = 1 + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \frac{y^6}{fac\,6} + \ldots + \frac{y^{2n}}{fac\,n} + \ldots$$

positiv reell ist, und von 1 bis ∞ wächst, wenn y von 0 bis ∞ zunimmt, dass

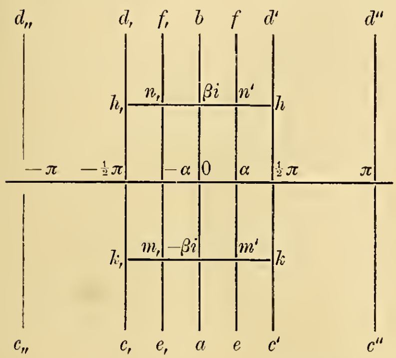
$$\sin yi = i\left(y + \frac{y^3}{fac\,5} + \frac{y^5}{fac\,7} + \ldots + \frac{y^{2n+1}}{fac\,2n+1} + \ldots\right)$$

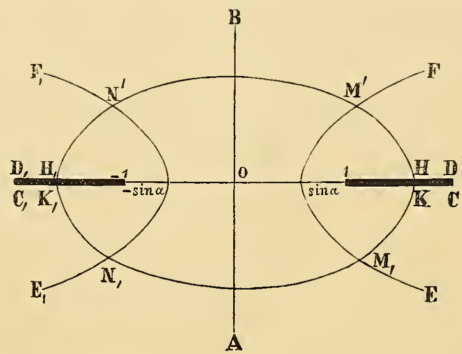
rein imaginär, und zwar mit y positiv oder negativ ist, und mit $\pm y$ von 0 bis $\pm i\infty$ wächst, bez. abnimmt, so ergiebt sich zuerst $X = \sin x \cos yi$, $Y = -i \sin yi \cos x$.

Für reelle Werthe von z ist $\sin z = Z$ reell, und wächst von -1 bis $+1$ stetig, wenn z von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{1}{2}\pi$ zunimmt. Setzen wir $x = 0$, $z = yi$ und lassen y die Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so dass die Träger dieser Zahlen die imaginäre Achse der z-Ebene $(a \,..\, b)$ durchlaufen, so durchläuft $Z = Yi$ ebenfalls die imaginäre Achse in der Richtung $A \,..\, B$. Der Punct 0 der z-Ebene entspricht dem Puncte 0 der Z-Ebene. Setzen wir $z = \alpha + yi$ und nehmen $\alpha < \frac{1}{2}\pi$ an, durchläuft also z die Linie $e \,..\, f$, die parallel der imaginären Achse in der Entfernung α von ihr gezogen ist, von unten nach oben, so durchläuft Z den Hyperbelzweig EF, welcher zu einer Hyperbel mit den Brennpuncten ± 1 und den Halbachsen $\sin \alpha$, $i \cos \alpha$ gehört, dem Puncte α entspricht der Punct $\sin \alpha$. Es ist nämlich

$$X = \sin \alpha \cos yi, \quad Y = -i \cos \alpha \sin yi, \quad \frac{XX}{\sin \alpha \sin \alpha} - \frac{YY}{\cos \alpha \cos \alpha} = 1,$$

dabei ist aber X stets positiv, weshalb der Linie $e \,..\, f$ eben nur der eine Hyperbelzweig $E \,..\, F$ entspricht. Der Geraden $z = -\alpha + yi$ $(e_, \,..\, f_,)$ entspricht der andere Zweig derselben Hyperbel $(E_, \,..\, F_,)$, dem Puncte $-\alpha$ entspricht der Punct $-\sin \alpha$. Man bemerke, dass diese Hyperbelzweige





Auch hier ist der Maassstab links kleiner als rechts.

ebenso auf der reellen Achse der Z-Ebene senkrecht stehen, wie die ihnen entsprechenden Linien auf der reellen Achse der z-Ebene. Dem halben unendlichen Streifen $f_, \,..\, -\alpha \,..\, +\alpha \,..\, f$ entspricht das unendliche Ebenenstück $F_, \,..\, -\sin \alpha \,..\, \sin \alpha \,..\, F$. Lässt man α wachsen, so wird die Hyperbel immer flacher, ihre Scheitel nähern sich mehr und mehr den Puncten ± 1, und für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ fallen die Zweige der Hyperbel bez. mit den Ufern der Linien $1 \,..\, \infty$ und $-1 \,..\, -\infty$ zusammen. Es ist dort $Z = \sin(+\frac{1}{2}\pi + yi) = \cos yi$ und $Z = \sin(-\frac{1}{2}\pi + yi) = -\cos yi$, und es ist also beide Male Z reell, einmal ≥ 1, das andere Mal ≤ -1.

Ziehen wir in der z-Ebene eine Gerade parallel zur reellen Achse in der Entfernung β von ihr, so ist dort $z = x + \beta i$, dabei mag $-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ sein. Alsdann entspricht dieser Linie in der Z-Ebene die Hälfte einer Ellipse, deren Brennpuncte ± 1 sind, und deren Halbachsen $\cos \beta$, $-i \sin \beta i$ sind. Es ist nämlich dort

$$Z = \sin(x + \beta i) = \sin x \cos \beta i + \cos x \sin \beta i, \quad X = \sin x \cos \beta i, \quad Y = -i \cos x \sin \beta i,$$

$$\frac{XX}{\cos \beta i \cos \beta i} + \frac{YY}{ii \sin \beta i \sin \beta i} = 1.$$

Für ein positives β ist aber $Y = -i \cos x \sin \beta i$ positiv, so lange x zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. Deshalb entspricht die Linie $hh_,$ dem halben Ellipsenbogen $HH_,$ der oberhalb der reellen Achse in der Z-Ebene liegt. Der Geraden $z = x - \beta i$ ($k_, \ldots k$, $-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$) entspricht die andere Hälfte ($K_, \ldots K$) dieser Ellipse. Durchläuft z die ganze Begrenzung der Figur $h_, \ldots -\frac{1}{2}\pi \ldots k_, \ldots k \ldots \frac{1}{2}\pi \ldots h \ldots h_,$, so durchläuft Z die reelle Achse von $H_,$ bis -1 (das obere Ufer), von da die reelle Achse nach $K_,$ (das untere Ufer) zurück, sodann die Ellipsenhälfte $K_, \ldots K$, von da die reelle Achse von K bis 1 (das untere Ufer), von da rückwärts wieder die reelle Achse (das obere Ufer) von 1 bis H, und von da die Ellipsenhälfte $H \ldots H_,$. Die Seiten dieser Bild-Figur stossen bei $HH_,KK_,$ rechtwinklig an einander, gerade wie im Original. Ebenso entspricht der rechtwinkligen Figur $n_,m_,m'n'$ der z-Ebene das von confocalen, also sich rechtwinklig schneidenden Hyperbel- und Ellipsenbogen begrenzte Stück der Z-Ebene $N_,M_,M'N'$. Puncten im Innern dieser Figuren entsprechen Puncte im Innern. Lassen wir β grösser und grösser werden, so wird die Ellipse grösser und grösser, und man findet so, dass dem unendlichen Parallelstreifen zwischen $c_, \ldots d_,$, $c' \ldots d'$ der z-Ebene die ganze Z-Ebene einmal und nur einmal entspricht. Nur den Puncten der Begrenzung $c_, \ldots d_,$, $c' \ldots d'$ entsprechen in ihrer obern und untern Hälfte dieselben Puncte. Nämlich die Puncte von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $d_,$ entsprechen den Puncten der reellen Achse von -1 bis $-\infty$, den Puncten von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $c_,$ dieselben Puncte. Wir lassen deshalb die Puncte der ersten Hälfte dem oberen Ufer dieser Linie entsprechen, die der zweiten Hälfte dem unteren Ufer, so ist auch in Bezug auf sie die Eindeutigkeit hergestellt, wenn wir jedem Puncte der reellen Linie $-1 \ldots -\infty$ noch beifügen, ob er auf dem oberen oder unteren Ufer dieser Linie liegen soll. Aehnliches gilt von der Begrenzung $c' \ldots d'$.

Unter dem positiven Ufer einer Linie $a \ldots b$ wollen wir dasjenige verstehen, welches für die Richtung $a \ldots b$ zur Linken liegt. Dann ist das positive Ufer von $a \ldots b$ das negative von $b \ldots a$.

Wir notiren hier noch die Gleichungen

$$abs \sin z = \sqrt{\sin(x+yi) \, . \, \sin(x-yi)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\cos 2yi - \cos 2x)}$$
$$abs \cos z = \sqrt{\cos(x+yi) \, . \, \cos(x-yi)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\cos 2yi + \cos 2x)}.$$

§ 91. Winkeltreue. Setzen wir $Z = f(z) = Z(z)$ und ist Z in der Umgebung eines Punctes z eine reguläre Function von z, und bilden wir die Umgebung dieses Punctes der z-Ebene in der Weise der vorhergehenden Paragraphen auf die Z-Ebene ab, so entspricht einer continuirlichen Werthfolge, einer Curve der z-Ebene, so lange $Z = f(z)$ regulär ist, wegen der Stetigkeit eine continuirliche Werthfolge der Z, eine Curve in der Z-Ebene. Man muss dabei sogleich die Möglichkeit berücksichtigen, dass einer knotenlosen Linie der z-Ebene sehr wohl eine Linie mit Knoten oder Doppelpuncten in der Z-Ebene entsprechen kann. Wird z. B. in der durch die Gleichung $Z = e^z$ vermittelten Abbildung des § 89 in der z-Ebene eine Curve gezeichnet, die durch zwei oder mehrere der dort besprochenen Parallelstreifen von der Breite $2i\pi$ hindurchgeht, und die nach $2i\pi$ congruente Puncte enthält, so wird diesen verschiedenen Puncten der z-Ebene nur ein Punct der Z-Ebene entsprechen, das Bild der Curve wird Knoten enthalten. In einem solchen Knoten verzweigt sich die Bildcurve, es macht aber keine Schwierigkeiten, den Zweig zu bestimmen, in den die Bildcurve fortgesetzt werden muss, wenn man auf der Originalcurve von einem bestimmten Puncte zu einem andern fortschreitet. Für diese Zweige gelten die hier aufzustellenden Sätze.

Das Gebiet, in dem z regulär ist, sei T. Zieht man im Innern von T von einem Puncte z aus nach den benachbarten Puncten $z+\zeta_1$ und $z+\zeta_2$ gerade Linien, g_1, g_2, und ist $Z(z+\zeta_1) = Z + Z_1$, $Z(z+\zeta_2) = Z + Z_2$, so ist der Winkel, den $g_1 g_2$ einschliessen, gleich $arc(\zeta_2 : \zeta_1)$. Diesen Geraden entsprechen in der Z-Ebene Curven, für die die Geraden γ_1, γ_2, die bez. durch ZZ_1, ZZ_2 gehen, Secanten sind. Nähern sich $\zeta_1 \zeta_2$ der Null so, dass $z+\zeta_1$, $z+\zeta_2$ auf $g_1 g_2$ bleiben, so ändern sich $\gamma_1 \gamma_2$ stetig und gehen in die Tangenten der Bildcurven von $g_1 g_2$ über. Der Winkel aber, den zwei Curven an einer Schnittstelle bilden, wird durch den Winkel der Tangenten gemessen, und dieser Winkel ist der Grenzwerth von $arc(Z_2 : Z_1)$ für abnehmende $\zeta_1 \zeta_2$. Nun ist (§ 63)

$$arc\,\frac{Z_2}{Z_1} = arc\,\frac{f(z+\zeta_2)-f(z)}{f(z+\zeta_1)-f(z)} = arc\,\frac{\zeta_2 f'(z)+\frac{1}{2}\zeta_2^2 f''(z)+\frac{1}{6}\zeta_2^3 f'''(z)+\ldots}{\zeta_1 f'(z)+\frac{1}{2}\zeta_1^2 f''(z)+\frac{1}{6}\zeta_1^3 f'''(z)+\ldots}$$

$$= arc\,\frac{\zeta_2}{\zeta_1} + arc\,\frac{f'(z)+\frac{1}{2}\zeta_2 f''(z)+\frac{1}{6}\zeta_2^2 f'''(z)+\ldots}{f'(z)+\frac{1}{2}\zeta_1 f''(z)+\frac{1}{6}\zeta_1^2 f'''(z)+\ldots} = arc\,\frac{\zeta_2}{\zeta_1} + arc\,P.$$

Ist nun an der Stelle z $f'(z)$ nicht Null, so nähert sich P mit abnehmenden $\zeta_1\,\zeta_2$ der Zahl Eins, und $arc\,P$ der Null beliebig, so dass $lim\,arc\,(Z_2:Z_1) = arc\,(\zeta_2:\zeta_1)$ ist. Damit gewinnen wir den Satz:

Ist $Z = Z(z)$ in einem Gebiete T der z-Ebene eine reguläre Function von z, so wird T auf die Z-Ebene so abgebildet, dass der Winkel, unter dem sich zwei Curven in T in einem Puncte schneiden, derselbe ist als der, unter dem sich die Bildcurven treffen, wofern nur die Ableitung von $Z(z)$ im Puncte z nicht Null ist.

Aus diesem Grunde wird die Abbildung am treffendsten eine winkeltreue genannt, obschon noch die Namen conforme oder in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung im Gebrauch sind.

Die Winkeltreue wird neben den Stellen $Z'(z) = 0$ natürlich auch in allen singulären Puncten nicht vorhanden sein. — Verschwinden im Puncte z die ersten $m-1$ Ableitungen, so ist der Bildwinkel m-mal so gross als der Originalwinkel. — Es ist klar, dass die Aehnlichkeit sehr kleiner Dreiecke, die aus der Gleichheit der Winkel von selbst folgt, eine directe ist, d. h. liegen im Original die Ecken $m_1 m_2 m_3$ so, dass ein Umlauf um das Dreieck in der Richtung $m_1 m_2 m_3$ ein positiver ist oder, was dasselbe ist, dass das Dreieck bei diesem Umlauf zur Linken liegt, und in jeder Ecke eine positive, der Bewegung des Zeigers einer Uhr entgegengesetzte Drehung gemacht wird, so haben die Ecken $M_1 M_2 M_3$ des Bilddreieckes dieselbe Eigenschaft.

Der Ausdruck $abs\,Z'(z)$ giebt die lineare, und der Ausdruck $abs\,Z'(z)^2$ oder, wenn conjugirten Werthen von z conjugirte von Z entsprechen, $Z'(x+yi)\,Z'(x-yi)$ giebt die Flächenvergrösserung des Bildes gegen das Original an. Da die lineare Vergrösserung von der Richtung unabhängig und nur durch den Ort bedingt ist, so kann man sie die locale Vergrösserung nennen. Es ist nämlich, wenn $Z = f(z)$ ist

$$abs\,[Z(z+\zeta)-Z(z)] = abs\,[\zeta f'(z)+\tfrac{1}{2}\zeta^2 f''(z)+\tfrac{1}{6}\zeta^3 f'''(z)+\ldots],$$

$$\frac{abs\,[Z(z+\zeta)-Z(z)]}{abs\,\zeta} = abs\,f'(z)\,.\,abs\left(1+\tfrac{1}{2}\zeta\frac{f''(z)}{f'(z)}+\tfrac{1}{6}\zeta^2\frac{f'''(z)}{f'(z)}+\ldots\right),$$

und für abnehmende ζ

$$lim\,(abs\,[Z(z+\zeta)-Z(z)]:abs\,\zeta) = abs\,f'(z) = abs\,Z'(z).$$

Zeichnet man in die Figur auf Seite 87 eine beliebige Gerade in die z-Ebene ein, so entspricht ihr in der Z-Ebene eine Spirale, die die Geraden eines Büschels unter gleichen Winkeln schneidet.

§ 92. Die Abbildung durch eine lineare Function. Die einfachste Beziehung zwischen der z und Z-Ebene ist die lineare, und auf die durch sie vermittelte Abbildung wenigstens in Etwas einzugehen, ist sehr nützlich und lehrreich. — Es sei

$$z = (aZ+b):(cZ+d),\quad Z = (-dz+b):(cz-a),\quad czZ-aZ+dz-b = 0.$$

Ersetzt man Z durch $(a'\zeta+b'):(c'\zeta+d')$, so folgt $z = (a''\zeta+b''):(c''\zeta+d'')$, und es ist

$$a'' = aa'+bc',\quad b'' = ab'+bd',\quad c'' = ca'+dc',\quad d'' = cb'+dd'.$$

Es besteht also zwischen z und ζ wieder eine lineare Beziehung, die man die zusammengesetzte aus den beiden Beziehungen zwischen z und Z und zwischen Z und ζ nennt. Die Grösse $ad-bc$, die man als von Null verschieden annehmen muss, heisst die Determinante der Beziehung zwischen z und Z. Da man häufig in eine Function durch die Gleichung $z = (aZ+b):(cZ+d)$ eine neue Veränderliche einführt, so ist es üblich, diese Beziehung eine lineare Substitution zu nennen. Durch Zusammensetzung linearer Substitutionen erhält man wieder eine lineare Substitution, deshalb sagt man, die linearen Substitutionen bilden eine Gruppe. Sind $abcd$, $a'b'c'd'$, .. reelle Zahlen, so sind auch die Coëfficienten der durch Zusammensetzung der zu ihnen gehörenden Substitutionen reell, deshalb bilden die reellen Substitutionen ebenfalls eine Gruppe. Jede lineare Substitution aber kann aus drei speciellen, den Grundsubstitutionen

$$z = Z - e, \quad z = f \,.\, Z, \quad z = 1 : Z$$

zusammengesetzt werden, und es wird demnach eine Untersuchung dieser speciellen Substitutionen ein genügendes Licht über die allgemeinen linearen Substitutionen verbreiten. Setzt man nämlich

$$z = \frac{aZ + b}{cZ + d} = \frac{a(cZ + d) - (ad - bc)}{c(cZ + d)} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cZ + d)},$$

so ergiebt sich, dass man zu dieser Substitution gelangen kann durch Zusammensetzung der Substitutionen

$$z = z' + \frac{a}{c}, \quad z' = -\frac{ad - bc}{c^2} z'', \quad z'' = \frac{1}{z'''}, \quad z''' = Z + \frac{d}{c}.$$

Sind $z_1\, z_2\, z_3\, z_4$ vier verschiedene Zahlen, die man als Puncte der z-Ebene deutet, und sind $Z_1\, Z_2\, Z_3\, Z_4$ die ihnen in der Z-Ebene entsprechenden Puncte, so ändert der Ausdruck

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_3 - z_4},$$

den man das Doppelverhältniss der vier Puncte oder Zahlen $z_1\, z_2\, z_3\, z_4$ nennt, seinen Werth nicht, wenn man $z_1\, z_2\, z_3\, z_4$ durch $Z_1\, Z_2\, Z_3\, Z_4$ ersetzt, wenn man zunächst zwischen z und Z eine der drei Grundsubstitutionen annimmt; er ändert mithin auch seinen Werth nicht, wenn man z und Z durch die allgemeinste lineare Beziehung verbindet, weil sie durch successive Zusammensetzung aus den Grundsubstitutionen erhalten wird. Es ist also

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$$

den linearen Substitutionen gegenüber eine Invariante.

Die einfachste geometrische Deutung besitzt die Substitution $z = Z - e$. Denkt man sich die Z-Ebene so auf die z-Ebene gelegt, dass die Coordinatenkreuze zusammenfallen, und ist $e = \gamma + \delta i$, so entspricht einem Puncte xy der z-Ebene ein Punct der Z-Ebene mit den Coordinaten $x - \gamma$, $y - \delta$, also ein Punct, der aus der Ursprungslage in die neue durch zwei den Coordinatenachsen parallele Verschiebungen gebracht werden kann. Jeder Figur der z-Ebene entspricht eine Figur der Z-Ebene, die durch eine für alle Theile der Figur gleich grosse Parallelverschiebung erhalten wird, die ihr also vollkommen congruent ist und in der zugleich entsprechende Richtungen gleich sind. Rechnet man hier (was noch weiter motivirt wird) die geraden Linien zu den Kreisen, so entspricht jedem Kreise ein Kreis.

Fast ebenso einfach ist die geometrische Deutung der Substitution $z = f \,.\, Z$, wo $f = \lambda(\cos\mu + i \sin\mu)$ sein mag. Legen wir wie vorhin die Z-Ebene auf die z-Ebene, so wird der Radiusvector eines Punctes der Z-Ebene erhalten, wenn man den Radiusvector des entsprechenden Punctes der z-Ebene mit $abs\, f = \lambda$ dividirt. Der Winkel aber, den der Radiusvector mit dem des Originals macht, ist μ. Bild und Original sind einander ähnlich, der Coordinatenanfang ist der Aehnlichkeitspunct. Durch eine Drehung um ihn können die Bilder in ähnlich liegende verwandelt werden. Auch hier entspricht ein Kreis einem Kreise.

Eine etwas complicirtere geometrische Deutung findet die Substitution $z = 1 : Z$, sie führt auf die sogenannte Abbildung durch reciproke radii vectores oder auf die geometrische (Möbius'sche) Kreisverwandtschaft. Man lege wieder die Z-Ebene auf die z-Ebene mit den Coordinatenkreuzen auf einander. Durchläuft z den Einheitskreis, so durchläuft ihn Z in entgegengesetzter Richtung; die Puncte ± 1 entsprechen sich selbst und heissen deshalb Doppelpuncte der Abbildung. Alle Puncte z ausserhalb dieses Kreises werden auf Punct Z innerhalb desselben Kreises abgebildet, und einer Geraden durch den Coordinatenanfang entspricht eine durch den Coordinatenanfang gehende Gerade, die zur ersten in Bezug auf die Achse des Reellen symmetrisch liegt. Eine andere Gerade g der z-Ebene habe die Gleichung $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$. Die entsprechende Curve der Z-Ebene erhält man durch die Substitution $x = X:(X^2+Y^2)$, $y = -Y:(X^2+Y^2)$, so dass sich ergiebt $p(X^2+Y^2) - X \cos \alpha + Y \sin \alpha = 0$. Dies ist die Gleichung eines Kreises durch den Coordinatenanfang, dessen Mittelpunct die Coordinaten $\frac{1}{2} \cos \alpha : p$, $-\frac{1}{2} \sin \alpha : p$ hat, und dessen Durchmesser der reciproke Werth von p, der Entfernung des Punctes Null von der Geraden ist. Zwei gerade Linien der z-Ebene schneiden sich unter demselben Winkel als die entsprechenden Kreise der Z-Ebene. Die Halbebene, welche auf der den Coordinatenanfang enthaltenden Seite der Geraden g liegt, entspricht dem Aeusseren des Bildkreises, die auf der anderen Seite dem Innern. Ein Kreis der z-Ebene habe die Gleichung $x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+p = 0$, so hat die Bildcurve die Gleichung $(X^2+Y^2)p - 2x_0X + 2y_0Y + 1 = 0$. Ist $p = 0$, so ist dies eine Gerade, ist p nicht Null, so ist es ein Kreis. Rechnen wir die Geraden zu den Kreisen, so haben wir auch hier wieder den Satz, dass einem Kreise ein Kreis entspricht. Aus der Möglichkeit der Zusammensetzung einer beliebigen linearen Substitution aus den drei Grundsubstitutionen folgt nun:

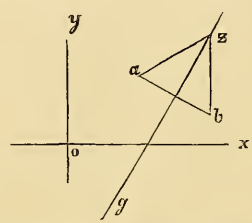
Die Figur des Kreises ist für jede lineare Abbildung $z = (aZ+b):(cZ+d)$ eine Invariante.

Der Satz wäre etwas complicirter auszusprechen, wenn die Geraden nicht zu den Kreisen gerechnet würden, wodurch diese Redeweise gerechtfertigt erscheint.

Man löst leicht die Aufgabe: Eine durch eine gerade Linie begrenzte Halbebene auf das Innere eines beliebigen Kreises winkeltreu so abzubilden, dass dem Mittelpunct des Kreises ein beliebiger, nicht auf der Begrenzung liegender Punct der Halbebene entspricht.

Sind nämlich abc complexe Zahlen und setzt man $z = c(Z-b):(Z-a)$ und lässt Z diejenige Gerade g durchlaufen, welche auf der Strecke ab senkrecht steht und sie hälftet, so ist

$$abs\, Z - b : abs\, Z - a = 1,$$



weil die Strecke bZ der absolute Betrag des Zählers, die Strecke aZ der des Nenners ist, also ist auf g

$$abs\, z = abs\, c \,.\, abs(Z-b):(Z-a) = abs\, c,$$

mithin durchläuft z einen um den Punct Null mit dem Radius $abs\, c$ geschlagenen Kreis. Dem Puncte $Z = b$ entspricht der Mittelpunct ($z = 0$) und den mit b auf derselben Seite der Geraden g gelegenen Puncten entsprechen die Puncte im Innern des Kreises. Durchläuft Z die Gerade g ohne umzukehren, so durchläuft z die Kreislinie ohne umzukehren. Durch passende Wahl von $arc\, c$ kann man noch einem beliebigen Puncte der Geraden einen beliebigen Punct der Kreislinie entsprechen lassen.

Die Lösungen der Aufgaben, die unendliche Fläche eines Winkels oder eines Parallelstreifens winkeltreu auf die Fläche eines Kreisbogenzweiecks abzubilden, sind leicht. — Man darf sich nicht irre machen lassen durch den Umstand, dass einer Drehung um den Coordinatenanfang im Bilde eine entgegengesetzte Drehung entspricht, und darf deswegen nicht glauben, die Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen sei eine indirecte. Man muss beachten, dass dem Coordinatenanfange im Bilde der unendlich ferne Punct entspricht, und erkennt dann leicht, dass einer positiven Drehung um einen beliebigen Punct eine positive Drehung um den entsprechenden Bildpunct entspricht.

Liegen vier Puncte auf einem Kreise, so ist ihr Doppelverhältniss reell. Denn nimmt man einen Punct e dieses Kreises zum Abbildungspol, ich meine setzt man $Z = (z-e'):(z-e)$, so bildet sich der Kreis auf eine Gerade ab. Nimmt man e' auch auf demselben Kreise liegend an, so geht die Bildgerade durch den Coordinatenanfang. Die den Puncten $z_1\, z_2\, z_3\, z_4$ entsprechenden Puncte $Z_1\, Z_2\, Z_3\, Z_4$ haben dann alle denselben oder um π verschiedene arcus, woraus die Realität des Doppelverhältnisses fliesst. Der Satz ist umkehrbar und auch leicht direct geometrisch zu erweisen.

Eingehendere Untersuchungen über die lineare Abbildung findet man in einer Abhandlung von Herrn Poincaré, Acta Mathem. Bd. I pag. 7.

Die Abbildung durch die Substitution $z = 1 : Z$ lässt die folgende geometrische Deutung zu. Wir legen durch den Aequator einer Kugel eine Ebene, deren obere dem Nordpol zugewandte Seite Träger der Zahlen $z = x + yi$ ist. Die positive y-Achse wird, vom Nordpol aus gesehen, durch eine positive Drehung aus der positiven x-Achse auf kürzestem Wege erhalten. Die untere Seite sei Träger der Zahlen Z, sie wird vom Südpol aus betrachtet. Die reelle Achse fällt der Lage und dem Sinne nach mit der reellen Achse der z-Ebene zusammen, die Achsen des Imaginären aber fallen nur der Lage nach zusammen. Der Punct Null der z und Z-Ebene ist zugleich als Mittelpunct der Kugel gedacht. Projicirt man nun vom Nordpol aus den Punct z der z-Ebene auf die Kugel, so erhält man einen Punct, dessen geographische Länge l und Polhöhe p durch die Gleichungen bestimmt sind, ($tg\, \varphi = sin\, \varphi : cos\, \varphi$)

$$x = tg\,(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}p)\, cos\, l, \quad y = tg\,(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}p)\, sin\, l, \quad z = tg\,(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}p)\, e^{il},$$

und projicirt man wieder diesen Punct vom Südpol aus in die Z-Ebene, so wird die Beziehung zwischen z und Z genau $z = 1 : Z$.

Diese Abbildung der Kugel auf die z oder Z-Ebene (die stereographische Projection) ist, wie leicht zu zeigen ist, eine winkeltreue und wird in der Geographie häufig angewandt.

§ 93. **Automorphe Functionen. Fundamentalbereich.** Die Function $sin\, z$ bleibt ungeändert, wenn man für z die in z linearen Ausdrücke $z + 2\pi$ oder $\pi - z$ setzt, man sagt, sie lasse (zwei) lineare Transformationen in sich zu. Solche Functionen werden automorphe Functionen genannt. Die Function $f(z) = z^{\pm n}$, wenn n ganz ist, bleibt ungeändert, wenn man z durch αz ersetzt, wo α eine von Eins verschiedene n^{te} Wurzel der Einheit bedeutet, $z^{\pm n}$ ist eine automorphe Function. Die Function $f(z) = z + (1 : z)$ bleibt ungeändert, wenn man z durch $1 : z$ ersetzt, sie ist automorph. Eine automorphe Function nimmt ihre sämmtlichen Werthe schon in einem Theile der z-Ebene an. Die Function $sin\, z$ nimmt alle ihre Werthe an in einem Parallelstreifen zur imaginären Achse von der Breite π (vergl. die Figur auf Seite 89), wobei die eine Begrenzungsgerade zum Gebiete hinzu zu nehmen ist, die andere nicht. Die Function z^n wird vollständig studirt, wenn man sie in einem Winkel studirt, dessen Scheitel der Punct Null, und dessen Oeffnung $arc\, \alpha$ ist, ein Schenkel gehört zum Gebiete, der andere nicht. Die Function $z + \overline{1 : z}$ nimmt alle ihre Werthe im Einheitskreise an, zu dem die eine Hälfte der Peripherie zu rechnen ist, die andere nicht. Das Gebiet, in dem eine automorphe Function alle ihre Werthe annimmt, so dass ihr weiteres Verhalten aus ihrer Periodicität (so wollen wir die Eigenschaft der Transformation in sich nennen) hervorgeht, wird ein Fundamentalbereich der automorphen Function genannt. Dieser unterliegt einer gewissen Willkür. Man braucht die parallelen Linien, die den Fundamentalbereich von $sin\, z$ begrenzen, nicht geradlinig anzunehmen. Scheidet man aus dem Einheitskreis, dem Fundamentalbereich der Function $z + (1 : z)$ ein beliebiges Stück σ aus, und nimmt zu dem Reste das dem Stück in der Abbildung $z = 1 : Z$ entsprechende Stück Σ hinzu, so würde das neue Gebiet ebenfalls ein Fundamentalbereich der Function $z + (1 : z)$ sein. Für die Wahl der Begrenzung ist meist das allerdings etwas subjective Moment der Einfachheit, das der Symmetrie u. s. w. maassgebend. Insbesondere wird man den Fundamentalbereich immer zusammenhängend, nicht aus getrennten Stücken bestehend wählen. Bei den doppelperiodischen Functionen, die die linearen Transformationen z in $z + a$ und z in $z + b$ zulassen (manchmal allerdings noch eine Transformation, wie die geraden Functionen und alle Functionen zweiter Ordnung), nimmt man ein geradlinig begrenztes Parallelogramm, das Periodenparallelogramm zum Elementarparallelogramm. Fällt aber eine Singularität auf die Begrenzung, so entschliesst man sich, von der Geradlinigkeit für einzelne Theile der Begrenzung abzusehen. — Für das Studium der automorphen Functionen ist die schon oben erwähnte Abhandlung des Herrn Poincaré im ersten Bande der Acta Mathematica grundlegend.

Der Logarithmus und die logarithmische Reihe.

§ 94. Hauptwerth oder Hauptzweig des Logarithmus. Ist ζ eine Zahl, welche die Gleichung befriedigt

$$e^{\zeta} = z,$$

so nennt man ζ den oder richtiger einen Logarithmus von z, denn es giebt deren unendlich viele, die von einander (§ 82) um ganze Multipla von $2i\pi$ verschieden sind. Wir wollen aber denjenigen Werth von ζ den Hauptwerth von $lg\,z$ (Logarithmus z) nennen, dessen imaginärer Theil zwischen $-i\pi$ und zwischen $+i\pi$ liegt. Dadurch ist dieser Hauptwerth eindeutig bestimmt. Der Hauptwerth des Logarithmus positiv reeller Zahlen ist nach dieser Definition reell, positiv wenn $z > 1$, negativ wenn $z < 1$ ist. Der Hauptwerth des Logarithmus der negativ reellen Zahlen ist reell $+i\pi$. Der Hauptwerth des Logarithmus einer Zahl $a = abs\,a\,.\,(cos\,\vartheta + i\,sin\,\vartheta)$ ist $lg\,(abs\,a) + \vartheta i = lg\,abs\,a + i\,arc\,a$, wenn a in der Hauptform (§ 86) dargestellt und $lg\,abs\,a$ reell genommen ist. Der Hauptzweig ist für alle z ausser $z = 0$ und $z = \infty$ eine wohlbestimmte Function. Für jeden Logarithmus von z ist identisch

$$e^{lg\,z} = z,$$

nach der Definition des Logarithmus. Die sämmtlichen Logarithmen von a sind in der Form enthalten

$$lg\,a = lg\,(abs\,a) + \vartheta i \pm 2ni\pi,$$

wo n eine ganze Zahl ist. Hat n hierin einen bestimmten Werth, so wollen wir diesen Logarithmus den $\pm n^{ten}$ Zweigwerth des Logarithmus nennen und das System aller Werthe, wenn z jeder Zahl gleich gesetzt wird, den $\pm n^{ten}$ Zweig des Logarithmus. Ist $n = 0$, so erhalten wir den Inbegriff aller Hauptwerthe, und wir können diesen Inbegriff den 0^{ten} Zweig oder den Hauptzweig des Logarithmus nennen. Jeder Zweig ist eine in der ganzen z-Ebene wohlbestimmte Function von z, ob aber auch in dem im § 61 festgestellten Sinne, nach welchem sie durch Potenzreihen darzustellen ist, wird sich erst in einem späteren Paragraphen feststellen lassen.

Wächst der reelle Theil von ζ von $-\infty$ bis $+\infty$, während der imaginäre Theil fest bleibt, so wächst der absolute Betrag von e^{ζ} von 0 bis ∞ fortwährend, und es nimmt deshalb der reelle Theil des Logarithmus einer Zahl z mit dem absoluten Betrage dieser Zahl fortwährend zu, es wächst $lg\,z$ mit z über alle Grenzen, und zwar so, dass der reelle Theil von $lg\,z$ positiv bleibt. Es wächst auch $lg\,z$ über alle Grenzen, wenn sich z der Null nähert, aber so, dass der reelle Theil von $lg\,z$ negativ bleibt. Ist x eine positive reelle Zahl, so ist jeder Zweig von $lg\,x$ für sich eine stetige Function der reellen Veränderlichen x, ausgenommen im Puncte Null. Gilt dies vom Hauptzweig, so gilt dies auch vom n^{ten} Zweige, der sich davon nur um eine Constante, um $2ni\pi$ unterscheidet. Deshalb ist der Satz nur vom Hauptzweige, der für reelle positive x reell ist, zu beweisen. Es sei für den Hauptzweig

$$lg\,x = \xi,\quad lg\,(x+h) = \xi + k,\quad x = e^{\xi},\quad x + h = e^{\xi + k},\quad 1 + \frac{h}{x} = e^{k},$$

worin offenbar h und k gleichzeitig positiv oder negativ sind, weil die Exponentialfunction mit x beständig wächst. Sei zuerst h, also auch k positiv, so ist

$$1 + \frac{h}{x} = 1 + k + \frac{k^2}{fac\,2} + \frac{k^3}{fac\,3} + \ldots + \frac{k^n}{fac\,n} + \ldots,\quad \frac{h}{x} = k\left(1 + \frac{k}{fac\,2} + \frac{k^2}{fac\,3} + \ldots + \frac{k^{n-1}}{fac\,n} + \ldots\right) = k + \lambda,$$

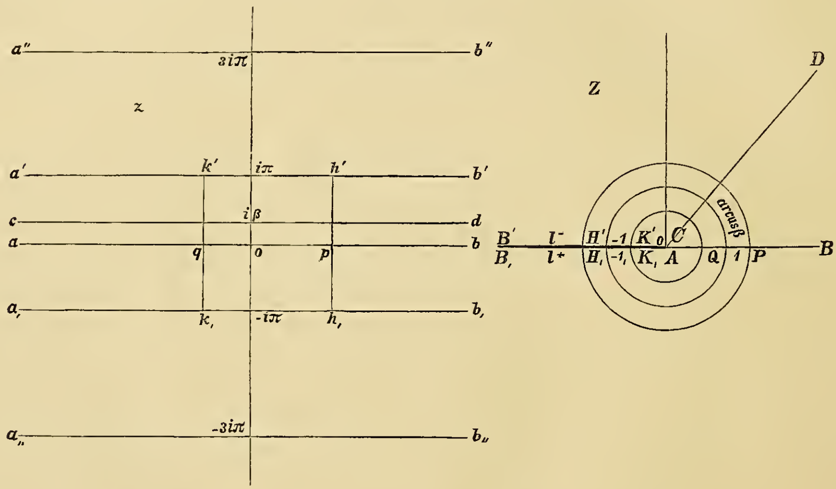
wo λ positiv ist. Mithin ist k kleiner als $h : x$ und kann, wenn x von Null verschieden ist, dadurch beliebig klein gemacht werden, dass h klein genug genommen wird. Deshalb ist $lg\,x$, wenn x wächst, stetig. Nimmt x ab, so ist absolut genommen

$$lg\,(x-h) - lg\,x = lg\,(x-h) - lg\,[(x-h)+h] < h : (x-h)$$

und wird mit h beliebig klein. Lässt man x näher und näher an 0 rücken, so verzögert sich so zu sagen die Stetigkeit mehr und mehr, indem h kleiner genommen werden muss, wenn k gegeben ist, bis sie für $x = 0$ gänzlich aufhört. Wir notiren noch die Specialwerthe des Hauptzweiges

$$lg\,1 = 0,\quad lg\,e = 1,\quad lg\,e^z = z,\quad lg\,e^n = n,\quad lg\,i = \tfrac{1}{2} i\pi,\quad lg\,(-i) = -\tfrac{1}{2} i\pi,\quad lg\,(-1) = i\pi.$$

§ 95. Stetigkeit des Logarithmus. Der Hauptzweig und wie daraus von selbst folgt, jeder Zweig der Function $lg\,z$ ist eine stetige Function von z in der ganzen z-Ebene, ausgenommen längs der negativ reellen Achse von 0 bis $-\infty$, welche Linie mit l bezeichnet werden mag, und die den Hauptzweig so zu sagen begrenzt. Ist nämlich $z = \varrho\,.\,(cos\,\vartheta + i\,sin\,\vartheta)$ und diese Darstellung die Hauptdarstellung (§ 86), so ist $lg\,z = lg\,\varrho + \vartheta i$ und $lg\,\varrho$ ist mit ϱ und also mit z stetig, so lange z



(Der Maassstab der Figur links ist etwa dreimal so klein als der der Figur rechts.)

von Null verschieden ist, ϑ ist aber stetig (§ 86), so lange z nicht negativ reell ist. Ist $z = -x$ und x positiv reell, so kann man die Zahl $-x$ auf dem oberen (negativen) Ufer der Linie l liegend denken und auch auf dem unteren (positiven) Ufer. Diese Ufer sind in der Figur mit l^- und l^+ bezeichnet. Im ersten Falle ist $lg\,z = lg\,x + i\pi$, im zweiten gleich $lg\,x - i\pi$, und es ist also der Logarithmus auf dem negativen Ufer von l um $2i\pi$ grösser als auf dem positiven, sowohl wenn der Hauptzweig als auch wenn ein anderer Zweig betrachtet wird. Zieht man eine beliebige Linie von $-x$ auf dem unteren Ufer von $l\,(l^+)$ zum Puncte $-x$ auf dem negativen Ufer von l so, dass sie l nirgend schneidet, und um den Punct Null sich herumzieht, und ändert man z von dem Werthe $-x$ an, indem man successive Zahlen einsetzt, welche auf dieser Linie in sehr kleinen Entfernungen von einander liegen, kurz stetig, so ändert sich auch $lg\,z$ stetig, und zwar wächst hierbei $lg\,z$ im Ganzen um $2i\pi$. War die Linie ein in Null centrischer Kreis, so blieb hierbei der reelle Theil von $lg\,z$ immerfort ungeändert, der imaginäre wuchs fortwährend von $2ni\pi - i\pi$ bis $2ni\pi + i\pi$, wenn der n^{te} Zweigwerth von $lg\,z$ gewählt wurde. Ersetzt man die Kreislinie durch eine andere Linie, so ist auf ihr der reelle Theil von $lg\,z$ veränderlich, nimmt ab und zu, je nachdem sich die Curve dem

Puncte Null nähert oder von ihm entfernt, hat aber schliesslich im Puncte $-x$ bei l^- denselben Werth als im Ausgangspuncte $-x$ bei l^+. Um die Figur, die auf Seite 87 steht, noch einmal verwenden zu können, wollen wir Z für z schreiben und $z = lg\,Z$ setzen.

Durchläuft Z den Kreis $H, .. P .. H'$ mit dem Radius $P = e^p$ positiv herum, so durchläuft z die Gerade $h, .. h'$ von unten nach oben. Dabei ist $h,$ der Träger der Zahl $p - i\pi$, h' Träger der Zahl $p + i\pi$. Durchläuft z den Kreis $K, .. K'$ mit dem Radius $Q = e^q$, und ist $Q < 1$, so ist q negativ, und z durchläuft die Gerade $k, .. k'$. Nähert sich Z dem oberen Ufer der Linie l, ist also $Z = -X + \varepsilon i$, wo X positiv und ε sehr klein positiv ist, so nähert sich z der Linie $a' .. b'$, welche in der Entfernung π der reellen Achse parallel gezogen ist. Ist aber ε negativ, nähert sich Z dem Ufer l^+, so nähert sich z der Linie $a, .. b,$, welche der reellen Achse parallel ist, und sich in der Entfernung $-\pi$ von ihr befindet, die also Träger der Zahlen $x - i\pi$ ist.

§ 96. Die Riemann'sche Fläche. Nimmt man einen anderen Zweig des Logarithmus, z. B. den ersten, $lg\,Z = z + 2i\pi = lg\,R + (\Theta + 2\pi)i$, wenn $R = abs\,Z$, $\Theta = arc\,Z$ ist, und $lg\,R$ reell genommen wird, so erhält man der Gestalt nach dasselbe Bild als das, welches durch Abbildung des Hauptzweiges entstand, nämlich einen unendlichen, der reellen Achse parallelen Streifen von der Breite 2π, einen Fundamentalbereich der Function e^z. Beschreibt Z eine bestimmte Figur, so beschreiben der Hauptzweig $lg_0\,Z$ und der erste Zweig $lg_1\,Z = lg_0\,Z + 2i\pi$ congruente Figuren, die durch Verschiebung um $2i\pi$ zur Deckung gebracht werden können. Auch dieser Zweig ist längs der negativ reellen Achse, längs l, unstetig auf dem Ufer l^- um $2i\pi$ grösser als auf l^+. Ebenso bilden sich der 2te, 3te, .., $n$te, -1te, -2t, .., $-n$te Zweig, die wir bez. mit $lg_2\,Z$, $lg_3\,Z$, .., $lg_n\,Z$, .., $lg_{-1}\,Z$, .., $lg_{-n}\,Z$, .. bezeichnen wollen, auf congruente Parallelstreifen ab, deren Gesammtheit die ganze z-Ebene bedecken, wenn n alle ganzen Zahlen durchläuft, und die sich lückenlos an einander schliessen. Jedem Zweige von $lg\,Z$ kann man nun eine Z-Ebene für sich zuweisen, die man den Zweigen entsprechend numerirt. Dann entspricht jedem Parallelstreifen der z-Ebene zwischen $(2n+1)i\pi$ und $(2n+3)i\pi$ eine bestimmte Ebene. Jedes Mal, wenn z an den Rand eines solchen Streifens gelangt und ihn überschreitet, springt Z aus einer Ebene in eine andere. Riemann fügt deshalb, um ein continuirliches Gebiet, in dem $lg\,z$ eindeutig ist, zu erhalten, die Ebenen längs der Linie l an einander. Er legt die verschiedenen Z-Ebenen so auf einander, dass sich die Achsen decken. Die Linie l mag im n^{ten} Blatte mit l_n bezeichnet werden. Nun denkt er sich das Ufer l^- an das Ufer l_1^+ continuirlich anschliessend, so dass dort die beiden Blätter, so kann man die verschiedenen Ebenen nennen, zusammen hängen[1]), sich continuirlich in einander fortsetzen. Ebenso werden l_1^{-1} und l_2^+ an einander gefügt, .. l_n^- und l_{n+1}^+. Weiter werden l^+ und l_{-1}^- zusammengefügt, l_{-1}^+ und l_{-2}^- u. s. w. Auf diese Weise erhält man eine continuirliche Fläche, welche sich um den Punct Null der Z-Ebene unendlich oft schraubenförmig herumwindet. Die Höhe eines Schraubenganges kann man sich unendlich (beliebig) klein denken. Eine Kreislinie, die den Punct Null zum Mittelpunct hat, ist in dieser Fläche keine geschlossene Linie, sie kann rückwärts und vorwärts weiter und weiter fortgesetzt werden, so dass sie den Punct 0 beliebig oft umkreist. Die Linien l sind für diese Fläche im Grunde garnicht mehr

---

[1]) In meinen Vorlesungen pflege ich einige (etwa fünf) kreisförmige Papierstücke mitzubringen. Sie sind sämmtlich längs einer geraden vom Mittelpunct an den Rand laufenden Linie mit der Scheere eingeschnitten. Auf einem Blatte steht Hauptblatt, auf dem andern 1tes, 2tes, .., $-$1tes, $-$2tes, .. Blatt. Die Schnitte in diesen Blättern seien $l\ l_1\ l_2, ..\ l_{-1}\ l_{-2}$ .., und ihre Ufer werden mit $l^+\ l^-\ l_1^+\ l_1^-$ .. bezeichnet, mit l^+ das Ufer, welches für die Richtung vom Mittelpuncte zum Rand zur Linken liegt. Nun lege ich unter l^- des Hauptblattes und l_1^+ des ersten Nebenblattes einen schmalen gummirten Streifen und klebe durch ihn das Hauptblatt und das erste Blatt an einander. Ein zweiter Gummistreifen verbindet das Ufer l_1^- und l_2^+, ein anderer l^+ mit l_{-1}^-, ein anderer l_{-1}^+ mit l_{-2}^-. Damit ist ein Theil der Riemann'schen Fläche hergestellt, der hinreichend ist, eine richtige Vorstellung von diesem Gebilde zu erzeugen. Die Linien $l\ l_1\ l_{-1}$ .. sind für das Fortschreiten in der Fläche kein Hinderniss, sie bilden nur die Erkennungsmarken für die Zählung der Blätter der Fläche. Um diese leichter kenntlich zu machen, wähle ich für die verschiedenen Blätter verschieden gefärbtes Papier.

vorhanden. Da aber das Bedürfniss vorliegt, die Blätter von einander zu unterscheiden, zu zählen, so kann man sich dieser Linien als Marken bedienen, welche die Ordnungszahl der Blätter bestimmen. So wie die entstandene Fläche ein continuirliches geometrisches Gebilde ist, die nur im Puncte Null eine singuläre Stelle besitzt, ebenso ist $lg\,Z$ eine continuirliche Function (des Ortes in dieser Fläche), die nur im Puncte 0 singulär und unstetig ist. Denn wenn auch jeder einzelne Zweig von $lg\,Z$ unstetig ist, weil er längs l zu beiden Seiten um $2i\pi$ verschiedene Werthe besitzt, so giebt es doch dort einen Werth von $lg\,Z$, der sich stetig an diesen Zweig anschliesst. Ueberschreitet Z im n^{ten} Blatte die Linie l_n in der Richtung von oben nach unten, wir denken l horizontal, so bildet offenbar der $(n+1)^{te}$ Zweig die stetige Fortsetzung des n^{ten} Zweiges, was auch n sein mag. Der Logarithmus an sich ist längs l ebenso stetig als sonst, ausser für $Z=0$, nur seine Zweige sind unstetig. Die Riemann'sche Fläche, die sich überall continuirlich fortsetzt, ist in vorzüglicher Weise geeignet, die Function $lg\,Z$ zu charakterisiren. Für jeden Punct dieser Fläche ist $lg\,Z$ eindeutig bestimmt, ist eine wohlbestimmte Function des Ortes, die (im Endlichen) nur eine singuläre Stelle hat, denn durch die Lage eines Punctes der Fläche über der Z-Ebene ist die zugehörige Zahl Z bestimmt, und durch seine Lage in der Fläche ist das Blatt der Fläche, der Zweig der Function völlig bestimmt. Zu jedem Puncte der z-Ebene gehört ein und nur ein Punct der Riemann'schen Fläche und umgekehrt. Die Differenz der Werthe von $lg\,Z$ in entsprechenden Puncten des n^{ten} und m^{ten} Blattes ist $2(n-m)i\pi$. — Aendert man $lg\,Z$ mit Z continuirlich, so wächst $lg\,Z$ bei jedem positiven Umgange der Zahl Z um den Nullpunct um $2i\pi$ und nimmt bei jedem negativen Umgange um $2i\pi$ ab, von welchem Puncte man auch ausgehen mag.

Die Begrenzung eines Zweiges ist bis zu einem gewissen Grade willkürlich, man könnte für die Linie l eine beliebige knotenlose Linie wählen, die von Null aus ins Unendliche verläuft. Man vergleiche hierüber das, was über die Willkürlichkeit des Fundamentalbereiches, der die Abbildung eines Zweiges ist, im § 93 gesagt ist.

Aus der Beziehung, die wir nachher erweisen, $lg(1:Z) = -lg\,Z$, geht hervor, dass die Singularität der Function $lg\,Z$ im Puncte Unendlich eine der im Puncte Null gleichartige ist.

Durch die Bezeichnung $lg\,z$ (wir kehren zur Variabeln z zurück) ist im Grunde keine wohlbestimmte Function gekennzeichnet. Man hat, um in $lg\,z$ den Begriff der Function zu einem vollkommen gesättigten zu machen, noch durch einen Imperativ aus den möglichen $lg\,z$ zugehörenden Werthen einen auszuwählen; in der Riemann'schen Fläche hingegen ist $lg\,z$ wohlbestimmt. Derartige Functionen nennt man mehrdeutige. Dieses Beiwort widerspricht genau genommen dem Functionsbegriffe, und es wäre deshalb vielleicht besser, solche Functionen mit Riemann mehrändrige zu nennen, wir wollen uns jedoch gegen den üblichen Sprachgebrauch nicht auflehnen.

§ 97. Die Functionalgleichung. Sind z, z' von Null verschiedene Zahlen, so ist

$$e^{lg\,z} = z, \quad e^{lg\,z'} = z', \quad e^{lg\,z} \,.\, e^{lg\,z'} = e^{lg\,z + lg\,z'} = z\,.\,z' = e^{lg\,zz'}$$

$$lg\,z + lg\,z' = lg\,zz', \quad lg\,z - lg\,z' = lg(z:z'), \quad lg\,z^n = n\,lg\,z, \quad lg(1:z) = -lg\,z.$$

In den Gleichungen der letzten Zeile ist die Vieldeutigkeit des Logarithmus zu berücksichtigen. Stehen auf den linken Seiten derselben bestimmte Zweige des Logarithmus (wir behalten die Bezeichnung des vorigen Paragraphen für die verschiedenen Zweige bei), so sind die Zweige auf der rechten Seite bestimmte, durch eine Nebenbetrachtung zu ermittelnde. Selbst wenn man links die Hauptzweige nimmt, so brauchen rechts nicht die Hauptzweige zu stehen. Es ist $lg_0\,z + lg_0\,z'$ entweder $lg_0(zz')$ oder $lg_1(zz')$ oder $lg_{-1}(zz')$, je nachdem in der Hauptdarstellung $arc\,z + arc\,z'$ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, oder grösser als π oder kleiner $-\pi$ ist. Man kann deshalb die Functionalgleichung auch so schreiben

$$lg\,z + lg\,z' \equiv lg(zz') \text{ (modulo } 2i\pi),$$

womit man ausdrückt, dass die rechte Seite von der linken um ein Multiplum von $2i\pi$ verschieden sein kann.[1]) Beim Gebrauch der Logarithmentafeln, wo für $z\,z'$ nur positiv reelle Werthe und reelle (Haupt-)Logarithmen vorkommen, sind unsere Gleichungen immer nicht blos Congruenzen, sondern völlig richtig.

Hülfssatz. Ist $f(z)$ eine in einer Umgebung des Punctes 1, wo sie verschwindet, reguläre Function, und gilt für alle Zahlen $z, z', z.z'$, die zugleich in dieser Umgebung liegen, die Gleichung $f(z)+f(z') = f(z.z')$, so stimmt $f(z)$ mit dem Hauptwerth von $lg\,z$ in einer abnehmend monotonen unendlichen Folge verschiedener reeller Zahlen $1+x_1,\ 1+x_2,\ 1+x_3, \ldots, 1+x_n, \ldots$, die 1 zur Grenzzahl hat, überein, wenn sie für die Zahl $1+x$ übereinstimmen.

Beweis. Da $f(z)+f(z) = 2f(z) = f(z^2)$ ist, so muss auch $f(z) = 2f(\sqrt{z})$ jedenfalls für diejenige Wurzel sein, die in der Umgebung des Punctes 1 liegt, für die die Functionalgleichung gilt, und die Reihe $f(z)$ convergirt. Nun soll $f(1+x) = lg(1+x)$ sein. Demnach ist auch $f(\sqrt{1+x}) = f(1+x_1) = lg\sqrt{1+x} = lg(1+x_1)$. Setzen wir $\sqrt{1+x_1} = 1+x_2$, $\sqrt{1+x_2} = 1+x_3, \ldots$, $\sqrt{1+x_{n-1}} = 1+x_n, \ldots$, so folgt

$$f(1+x_1) = lg(1+x_1),\quad f(1+x_2) = lg(1+x_2),\quad \ldots,\quad f(1+x_n) = lg(1+x_n),\quad \ldots$$

w. z. b. w. Nun ist aber, wenn x positiv reell angenommen wird,

$$(1+\tfrac{1}{2}x)^2 > 1+x,\quad 1+\tfrac{1}{2}x > \sqrt{1+x},\quad 1 < 1+x_1 < 1+\tfrac{1}{2}x,\quad 0 < x_1 < \tfrac{1}{2}x,$$
$$0 < x_2 < \tfrac{1}{2}x_1,\ x_2 < \tfrac{1}{4}x,\quad 0 < x_3 < \tfrac{1}{2}x_2,\ x_3 < \tfrac{1}{8}x,\ \ldots,\quad 0 < x_n < \tfrac{1}{2}x_{n-1},\ x_n < x:2^n,\ \ldots,$$

und es bilden mithin die Zahlen $x_1\,x_2\,x_3 \ldots x_n \ldots$ eine reguläre Folge, für die $lim\,x_n = 0$, und $lim\,(1+x_n) = 1$ ist, wie oben gefordert wurde.

§ 98. Die logarithmische Reihe. Wir fragen, ob in der Umgebung des Punctes Eins (die Wahl gerade dieses Punctes ist unschwer zu motiviren) eine reguläre Function $f(z)$ existirt, $f(z) = \Sigma A_m(z-1)^m$, die der Functionalgleichung $f(z)+f(z') = f(z\,z')$ genügt, wenn z, z', zz' im Convergenzgebiete liegen. Aus der Annahme $z'=1$ folgt unmittelbar, dass $f(1) = 0$, und dass also auch A_0 gleich Null sein muss. Es ist dann $f(1+z) = \Sigma A_{m+1} z^{m+1}$, wenn $abs\,z$ klein genug genommen wird, und es convergirt diese Reihe in einer Umgebung, in einem Kreise, um den Punct $z=0$. Wählen wir z und t so, dass $z,\ t,\ z+t,\ t:(1+z)$ in diesem Gebiete liegen, so ist

$$f(1+z+t) = f(1+z) + f\left(1+\frac{t}{1+z}\right) = A_1(z+t) + A_2(z+t)^2 + \ldots + A_n(z+t)^n + \ldots$$
$$= A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_n z^n + \ldots + A_1 t(1+z)^{-1} + A_2 t^2(1+z)^{-2} + \ldots + A_n t^n (1+z)^{-n} + \ldots$$

Die erste der beiden Reihen verwandeln wir unter Anwendung des Binomialtheorems in eine nach Potenzen von t fortschreitende Reihe und vergleichen sie mit der zweiten nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten, so folgt, wenn $\mu \geqq 1$ ist

$$\Sigma A_{\mu+m}(\mu+m)_m z^m = A_\mu (1+z)^{-\mu} = A_\mu \Sigma(-\mu)_m z^m,$$

und durch nochmalige Anwendung der Methode der unbestimmten Coëfficienten

$$A_{n+\mu}(n+\mu)_n = A_\mu(-\mu)_n,\quad A_{n+\mu} = A_\mu(-1)^n \mu : (n+\mu).$$

Für $\mu = 1$ folgt hieraus $A_{n+1} = (-1)^n A_1 : (n+1) = (-1)^n a : (n+1)$, wenn a für die unbestimmt bleibende Zahl A_1 geschrieben wird. Setzt man dieses Resultat in die allgemeinen Gleichungen, in

[1]) Es ist als ein Missstand anzusehen, dass das Zeichen $\equiv$ manchmal die Identität, manchmal nur die Congruenz nach einem Modul bedeutet. Wird der Modul wie oben mit angeschrieben, was freilich nicht immer geschieht, so ist eine Verwechselung ausgeschlossen.

denen μ beliebig ist, ein, so werden sie identisch erfüllt, so dass also diese Gleichungen nicht nur mit einander verträglich sind, sondern auch noch eine Grösse a unbestimmt lassen. So ergiebt sich nun

$$f(1+z) = a\Sigma(-1)^m z^{m+1}:(m+1), \quad f(z) = a\Sigma(-1)^m (z-1)^{m+1}:(m+1),$$

und der Radius des Convergenzkreises dieser Reihen ist Eins, und die Reihe $f(z)$ genügt der Functionalgleichung $f(z)+f(t) = f(zt)$, wenn z, t, zt im Convergenzgebiete liegen, was auch a sein mag. In dieser Function lässt sich a noch so bestimmen, dass sie mit $lg\, z$ völlig übereinstimmt. Es ist nämlich nach § 71

$$e^{f(1+z)} = e^{a(z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\,.\,+\,.\,.)} = 1+az+P_2z^2+\,.\,.+P_nz^n+\,.\,.$$

eine Potenzreihe, die jedenfalls convergirt, so lange $abs\, z<1$ ist, was auch a sein mag. Wir bezeichnen die Reihe der Kürze halber mit $P(z)$, und setzen für einen positiv reellen Werth x von z, der <1 ist, $\Sigma(-1)^m x^{m+1}:(m+1) = X$, dann ist X reell. Alsdann giebt es einen reellen Werth von a, der die Gleichung befriedigt

$$e^{aX} = 1+x = e^{f(1+x)} = P(x) = e^{lg(1+x)}.$$

Ist a dieser Bedingung gemäss bestimmt, so ist nach dem Hülfssatz des vorigen Paragraphen

$$f(1+x) = lg(1+x), \quad f(1+x_1) = lg(1+x_1), \quad .., \quad f(1+x_n) = lg(1+x_n), \quad ..,$$

wenn $\sqrt{1+x} = 1+x_1$, $\sqrt{1+x_1} = 1+x_2$, .. gesetzt wird, und für $lg(1+x)$, $lg(1+x_1)$, .. immer der Hauptwerth genommen wird. Es folgt daraus, dass $P(x) = 1+x$ sei für die gegen Null convergirenden Zahlen $x = x, x_1, x_2, .., x_n, ..$, und es muss daher (§ 64) $P(z)$ identisch gleich $1+z$, $a=1$, $P_2 = P_3 = .. = P_n = .. = 0$ sein. Für den Hauptwerth des Logarithmus ist demnach

$$lg(1+z) = z-\tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{1}{3}z^3-.+.. = \Sigma(-1)^m z^{m+1}:(m+1), \quad -lg(1-z) = z+\tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{1}{3}z^3+.. = \Sigma z^{m+1}:(m+1).$$

Dass die Reihe den Hauptwerth darstelle, folgt für reelle x aus der Realität, und weiter aus der Stetigkeit. Ist n eine ganze Zahl, so folgt aus den Reihen nebenbei

$$lg\frac{n+1}{n} = lg\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}, \quad lg\frac{n+1}{n} = -lg\frac{n}{n+1} = -lg\frac{n+1-1}{n+1} = -lg\left(1-\frac{1}{n+1}\right)>\frac{1}{n+1}.$$

Aus den Reihen ergeben sich auch unmittelbar die Ableitungen des Logarithmus

$$lg'(z) = 1:z, \quad lg''z = -1:z^2, \quad .., \quad lg^{(m)}(z) = (-1)^{m-1}\,1.2..(m-1):z^m, \quad lg'(1+z) = 1:(1+z).$$

Zur Herstellung von Logarithmentafeln, also zur numerischen Berechnung ist die Reihe sehr nützlich

$$\tfrac{1}{2}lg\,1+z-\tfrac{1}{2}lg\,1-z = \tfrac{1}{2}lg\frac{1+z}{1-z} = z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+..+\frac{z^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

§ 99. Die Functionselemente des Logarithmus. Es ist nun leicht, einen beliebigen Zweig des Logarithmus in der Umgebung einer beliebigen von Null verschiedenen[1]) Stelle z_0 durch eine Potenzreihe darzustellen, und ihn so als eine dort reguläre Function von z zu charakterisiren. Denn aus der Functionalgleichung folgt

$$lg\,z = lg\,z_0+lg\left(1+\frac{z-z_0}{z_0}\right) = lg\,z_0+\Sigma(-1)^m(z-z_0)^{m+1}:(m+1)\,z_0^{m+1},$$

und es convergirt diese Reihe, so lange $abs(z-z_0)<abs\,z_0$ ist, also in einem Kreise um z_0, der durch den Punct Null geht. Da der Theil hinter Σ für $z=z_0$ verschwindet, so braucht man nur für das

[1]) Aus der Functionalgleichung $f(z)+f(t) = f(zt)$ folgt $f(z)+f(0) = f(0)$, und hieraus fliesst von selbst, dass der Punct Null ein singulärer sein muss.

Anfangsglied der Reihe für $lg\, z_0$ den n^{ten} Zweigwerth zu wählen, um den Zweig $lg_n z$ durch die Reihe in der Umgebung des Punctes z_0 darzustellen. Es stellt aber unsere Reihe eine stetige Function im ganzen Convergenzgebiete dar, während der Zweig $lg_n z$ längs der Linie l (Figur auf Seite 96) eine unstetige Function ist. Greift deshalb der Convergenzkreis unserer Reihe über die Linie l hinweg, so stellt die Reihe nur in dem Theile des Convergenzkreises den Zweig $lg_n z$ dar, der z_0 enthält. Im anderen vom Kreise durch l abgeschnittenen Theile stellt die Reihe entweder den Zweig $lg_{n+1} z$ oder den Zweig $lg_{n-1} z$ dar, der die stetige Fortsetzung von $lg_n z$ längs l bildet.

Es wurde früher als eine der Aufgaben der elementaren Functionentheorie hingestellt, eine Function durch möglichst wenig Functionselemente in ihrem ganzen Verlaufe darzustellen. Diese Forderung kann aber beim Logarithmus nicht erfüllt werden, weil er nicht durch eine endliche Anzahl von Functionselementen darstellbar ist. Dafür sind aber die sämmtlichen Darstellungselemente von ein und derselben Form, nämlich in der durch die am Anfange dieses Paragraphen aufgestellten Reihe enthalten, so dass eine Unbequemlichkeit aus der Nichtendlichkeit der Anzahl der $lg\, z$ darstellenden Functionselemente nirgends entsteht.

Transformirt man die Reihe $\Sigma(-1)^m z^{m+1} : (m+1)$ nach der Methode des § 66 in eine nach Potenzen von $z - z_0$ fortschreitende Reihe, um zur Fortsetzung dieses Functionselementes zu gelangen, so ergiebt sich mit Heranziehung der schon oben gefundenen Ableitungen wieder $lg\, z = lg\, z_0 + \Sigma(-1)^m (z-z_0)^{m+1} : (m+1) z_0^{m+1}$ und hieraus die Ableitung $lg'(z-z_0) = 1 : (z-z_0)$. Man kann also auch durch analytische Fortsetzung von einem Functionselemente zu jedem anderen gelangen, was nicht weiter durchgeführt zu werden braucht.

§ 100. Die singulären Stellen $z = 0$ und $z = \infty$. Dass das Verhalten von $lg\, z$ im Unendlichen vermöge der Beziehung $lg(1:z) = -lg\, z$ dem Verhalten im Puncte Null ganz analog ist, wurde schon erwähnt. Der imaginäre Theil des Logarithmus einer unbegrenzt abnehmenden, oder einer unbegrenzt zunehmenden Zahl ist ganz unbestimmt, und hieraus allein geht schon hervor, dass diese Puncte niemals im Innern des Convergenzbereiches eines darstellenden Functionselementes liegen können. Wir wollen hier aber die Art untersuchen, wie der reelle Theil von $lg\, z$ sich für abnehmende oder zunehmende z verhält. Dieser ist gleich $lg\, abs\, z$, und wir wollen $abs\, z$ durch ϱ ersetzen, wo ϱ eine positiv reelle Zahl ist. Für kleine positive h ist $lg(\varrho + h) > lg\, \varrho$, es ist also $lg\, \varrho$ eine monoton zunehmende Function, und da ϱ grösser als 2^n genommen werden kann, wenn ϱ über alle Grenzen wachsen soll, so wird $lg\, \varrho > n\, lg\, 2$, also mit wachsendem ϱ über alle Grenzen gross, was übrigens aus dem Voraufgehenden schon bekannt ist. Dieses Anwachsen ins Unendliche ist aber so schwach, dass das Verhältniss $lg^m \varrho : \varrho$, was auch m für eine ganze positive Zahl sein mag, $[lg^m \varrho = (lg\, \varrho)^m]$ gegen Null convergirt. Setzen wir $lg\, \varrho = \tau$, so ist $\varrho = e^\tau$ und $lg^m \varrho : \varrho = \tau^m : e^\tau$, und da τ mit ϱ über alle Grenzen positiv wächst, so ist das Verhältniss für wachsende ϱ (τ) nach § 76 Null. Für abnehmende ϱ wird $\varrho\, lg^m \varrho$ Null, wie gross auch m sein mag, weil der Ausdruck gleich $(-1)^m lg^m \frac{1}{\varrho} : \frac{1}{\varrho}$ ist. Es wird also $lg\, \varrho$ für abnehmende ϱ negativ Unendlich, aber so schwach, dass jede ganze Potenz von $lg\, \varrho$, multiplicirt mit ϱ, für abnehmende ϱ gegen Null convergirt.

§ 101. Der cosinus und der sinus eines Multiplums von ϑ lässt sich durch $cos\, \vartheta$ bez. $sin\, \vartheta$ ausdrücken. Wir benutzen die logarithmische Reihe, um den gesperrt gedruckten Satz zu erweisen. So lange $abs\, z < 1$ und $abs\, z(2\cos\vartheta - z) < 1$ ist, gelten die Entwickelungen

$$-lg(1 - e^{\vartheta i} z) - lg(1 - e^{-\vartheta i} z) = 2 z \cos\vartheta + z^2 \cos 2\vartheta + \frac{2}{3} z^3 \cos 3\vartheta + \ldots + \frac{2}{n} z^n \cos n\vartheta + \ldots$$

$$= -lg[1 - z(2\cos\vartheta - z)] = z(2\cos\vartheta - z) + \tfrac{1}{2} z^2 (2\cos\vartheta - z)^2 + \tfrac{1}{3} z^3 (2\cos\vartheta - z)^3 + \ldots$$

Vergleicht man, nachdem die letzte Reihe mittels des binomischen Satzes umgeordnet ist, was mit z^n beiderseits multiplicirt ist, so findet man

$$\frac{2\cos n\vartheta}{n} = \frac{(2\cos\vartheta)^n}{n} - \frac{n-1}{1}\frac{(2\cos\vartheta)^{n-2}}{n-1} + \frac{n-2}{1}\frac{n-3}{2}\frac{(2\cos\vartheta)^{n-4}}{n-2} - \frac{n-3}{1}\frac{n-4}{2}\frac{n-5}{3}\frac{(2\cos\vartheta)^{n-6}}{n-3} + . - . .,$$

und wenn n ungerade ist, auf welchen Fall wir uns beschränken, so erhalten wir durch Umordnung

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\cos n\vartheta = n\cos\vartheta - \frac{n+1}{1}\frac{n}{2}\frac{n-1}{3}(\cos\vartheta)^3 + \frac{(n+3)}{1}\frac{(n+1)}{2}\frac{n}{3}\frac{(n-1)}{4}\frac{(n-3)}{5}(\cos\vartheta)^5 - . + . .,$$

und hieraus, wenn wir $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$ für ϑ setzen

$$\sin n\vartheta = n\sin\vartheta - \frac{n+1}{1}\frac{n}{2}\frac{n-1}{3}(\sin\vartheta)^3 + \frac{n+3}{1}\frac{n+1}{2}\frac{n}{3}\frac{n-1}{4}\frac{n-3}{5}(\sin\vartheta)^5 - . + . . .$$

Diese Gleichung ist erwiesen für ganze ungerade n. Für $n = 0$ und ungerade negative n ist ihre Richtigkeit ohne Weiteres ersichtlich, wir werden jedoch später zeigen, dass sie für jedes beliebige complexe n gilt, so lange ϑ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ liegt. Dabei wird der hier gegebene Specialfall mit Nutzen angewandt werden.

§ 102. Convergenz einiger Potenzreihen auf dem Convergenzkreise. Sind $a_0, a_1, a_2, .., a_n, ..$ von einem bestimmten n ab niemals zunehmende positiv reelle Zahlen, und ist $\lim a_n = 0$ für wachsende n, so sind die Reihen

$$S = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos\vartheta + a_2\cos 2\vartheta + . . + a_n\cos n\vartheta + . .$$
$$T = a_1\sin\vartheta + a_2\sin 2\vartheta + . . + a_n\sin n\vartheta + . .$$

convergente (wenn auch nicht absolut convergente) Reihen. Die Summe der ersten Terme dieser Reihen bis $a_n\cos n\vartheta$ bez. $a_n\sin n\vartheta$ einschliesslich sei S_n bez. T_n. Dann ist

$$2S_n\sin\tfrac{1}{2}\vartheta = a_0\sin\tfrac{1}{2}\vartheta + a_1(\sin\tfrac{3}{2}\vartheta - \sin\tfrac{1}{2}\vartheta) + . . + a_n(\sin\frac{2n+1}{2}\vartheta - \sin\frac{2n-1}{2}\vartheta)$$

$$= (a_0 - a_1)\sin\tfrac{1}{2}\vartheta + (a_1 - a_2)\sin\tfrac{3}{2}\vartheta + . . + (a_{n-1} - a_n)\sin\frac{2n-1}{2}\vartheta + a_n\sin\frac{2n+1}{2}\vartheta$$

$$2T_n\sin\tfrac{1}{2}\vartheta = a_1(\cos\tfrac{1}{2}\vartheta - \cos\tfrac{3}{2}\vartheta) + a_2(\cos\tfrac{3}{2}\vartheta - \cos\tfrac{5}{2}\vartheta) + . . + a_n(\cos\frac{2n-1}{2}\vartheta - \cos\frac{2n+1}{2}\vartheta$$

$$= a_1\cos\tfrac{1}{2}\vartheta - (a_1 - a_2)\cos\tfrac{3}{2}\vartheta - (a_2 - a_3)\cos\tfrac{5}{2}\vartheta - . . - (a_{n-1} - a_n)\cos\frac{2n-1}{2}\vartheta - a_n\cos\frac{2n+1}{2}\vartheta.$$

Lässt man hierin n wachsen, so convergirt a_n gegen 0 und da

$$(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + . . + (a_{n-1} - a_n) + . .$$

eine absolut convergente Reihe ist, so streben S_n, T_n mit wachsenden n einem bestimmten Grenzwerthe zu, so lange ϑ von 0, 2π, -2π, 4π, -4π u. s. w. verschieden ist. Die Reihen S und T sind also jedenfalls convergent, so lange ϑ nicht 0 oder ein Multiplum von 2π ist. Im letzten Falle reducirt sich T auf Null, T ist also überall convergent. S aber kann divergent sein.

Schreibt man $\vartheta + \pi$ statt ϑ, so findet man, dass auch die Reihen

$$\tfrac{1}{2}a_0 - a_1\cos\vartheta + a_2\cos 2\vartheta - a_3\cos 3\vartheta + a_4\cos 4\vartheta - . + . .$$
$$a_1\sin\vartheta - a_2\sin 2\vartheta + a_3\sin 2\vartheta - a_4\sin 4\vartheta + . - . .$$

unter denselben Voraussetzungen über die reellen Zahlen a wie vorhin convergiren. Die Möglichkeit der Divergenz tritt dann für die erste Reihe ein, wenn ϑ ein ungerades Multiplum von $\pm\pi$ ist.

Sind $a_0, a_1, .., a_n, ..$ complexe Zahlen, so convergiren die Reihen S und T, wenn die reellen und imaginären Theile für sich die obigen Bedingungen erfüllen. Uebrigens sind diese Bedingungen wohl ausreichende aber nicht nothwendige.

§ 103. Die logarithmische Reihe auf dem Convergenzkreise. Nach dem vorigen Paragraphen ist die logarithmische Reihe auf dem Convergenzkreise, d. h. für $z = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$ convergent, ausgenommen im Puncte $z = -1$, wo $\vartheta = \pm\pi$ ist. Setzen wir $z = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, so ist

$$lg(1+\varrho\cos\vartheta + i\varrho\sin\vartheta) = \tfrac{1}{2}lg(1+2\varrho\cos\vartheta+\varrho^2) + lg\left(\frac{1+\varrho\cos\vartheta}{\sqrt{1+2\varrho\cos\vartheta+\varrho^2}} + i\frac{\varrho\sin\vartheta}{\sqrt{1+2\varrho\cos\vartheta+\varrho^2}}\right)$$

$$= \varrho\cos\vartheta - \tfrac{1}{2}\varrho^2\cos 2\vartheta + \tfrac{1}{3}\varrho^3\cos 3\vartheta - \tfrac{1}{4}\varrho^4\cos 4\vartheta + . - ..$$

$$+ i(\varrho\sin\vartheta - \tfrac{1}{2}\varrho^2\sin 2\vartheta + \tfrac{1}{3}\varrho^3\sin 3\vartheta - \tfrac{1}{4}\varrho^4\sin 4\vartheta + . - ..).$$

Für $\varrho = 1$ genügen der reelle und imaginäre Theil dieser Reihe den Bedingungen des vorigen Paragraphen, woraus die Convergenz folgt. Ausserdem sind die Logarithmen, den Hauptwerth vorausgesetzt den die Reihe darstellt, $\vartheta = \pm\pi$ ausgenommen, stetige Functionen von ϱ, es müssen deshalb nach dem Abel-Dirichlet'schen Satze (§ 73) linke und rechte Seite unserer Gleichung auch noch auf dem Convergenzkreise übereinstimmen. Dort ist aber

$$lg(1+\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = lg\, 2\cos\tfrac{1}{2}\vartheta(\cos\tfrac{1}{2}\vartheta + i\sin\tfrac{1}{2}\vartheta) = lg(2\cos\tfrac{1}{2}\vartheta) + i\,\tfrac{1}{2}\vartheta,$$

woraus für $-\pi < \vartheta < \pi$ folgt

$$lg\, 2\cos\tfrac{1}{2}\vartheta = \cos\vartheta - \tfrac{1}{2}\cos 2\vartheta + \tfrac{1}{3}\cos 3\vartheta - \tfrac{1}{4}\cos 4\vartheta + \tfrac{1}{5}\cos 5\vartheta - . + ..$$

$$\tfrac{1}{2}\vartheta = \sin\vartheta - \tfrac{1}{2}\sin 2\vartheta + \tfrac{1}{3}\sin 3\vartheta - \tfrac{1}{4}\sin 4\vartheta + \tfrac{1}{5}\sin 5\vartheta - . + ...$$

Diese letztere Reihe convergirt auch noch für $\vartheta = \pm\pi$ und ist dort $= 0$, während sie für $\pi - 0$ und für $-\pi + 0$ bez. die Werthe $\frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$ hat. Für Werthe von ϑ, die ausser den Grenzen $-\pi$, $+\pi$ liegen, gelten die Gleichungen, namentlich die zweite, nicht. Dass diese Reihe an der Stelle $\pm\pi$ das von Seidel entdeckte Phänomen der unendlich verzögerten Convergenz zeigen muss, ist leicht nachzuweisen. Wir betrachten jedoch nachher einen in Bezug auf dieses Phänomen noch einfacheren Fall, bei welchem das Princip der Untersuchung dasselbe ist wie hier.

Einen etwas allgemeineren Satz schliessen wir hier an. Ist die Potenzreihe

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + .. + A_n z^n + ..$$

auf dem Convergenzkreise mit dem Radius R convergent, wovon auch einzelne Puncte ausgenommen sein können, und wird durch die Reihe eine Function $f(z)$ dargestellt, die sich stetig einem bestimmten Werthe nähert, wenn in $f[\varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)] = f(\varrho e^{\vartheta i})$ sich ϱ dem Werthe R stetig nähert, so stimmen die Werthe der Reihe $\Sigma A_m R^m(\cos m\vartheta + i\sin m\vartheta)$ und des $\lim f(\varrho e^{\vartheta i})$, $\lim \varrho = R$ überein. Ist $f(z)$ in der Umgebung des Punctes $Re^{\vartheta i}$ in und auf dem Convergenzkreise stetig, so ist $\lim f(\varrho e^{\vartheta i})$ gleich $f(Re^{\vartheta i})$. Dieser Satz bedarf nach den voraufgegangenen Untersuchungen (§ 73) keines Beweises mehr.

§ 104. Umordnung der logarithmischen Reihe. Die Gleichung

$$lg(1+z) = z + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{9}z^9 + \frac{1}{11}z^{11} - \frac{1}{6}z^6 + . + . - ..$$

ist eine identische (§ 19), so lange $abs\, z < 1$ ist. Anders verhält es sich auf dem Convergenzkreise. Wir beschränken die Untersuchung auf den Fall $z = 1$. Die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}lg\frac{1+z}{1-z} + \tfrac{1}{2}lg(1-z^4) = \tfrac{1}{2}lg[(1+z)\ (1+z+z^2+z^3)]$$

$$= z + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 - \frac{1}{4}z^8 + \frac{1}{9}z^9 + \frac{1}{11}z^{11} - \frac{1}{6}z^{12} + . + . - . + ..$$

besteht nicht blos für $abs\, z < 1$, sondern nach § 73 auch für $z = 1$ und liefert die Gleichung

$$\tfrac{3}{2}\,lg\,2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + . + . - . + ..,$$

während

$$lg\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + . - . + ..$$

ist. Nehmen wir daher für x positiv reelle Werthe zwischen 0 und 1 einschliesslich, so ist die Function

$$f(x) = x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{6}x^6 + . + . - . + ..$$

eine unstetige Function. Denn es ist, wie klein auch ε sei, $f(1-\varepsilon) = lg(2-\varepsilon)$, also $f(1-0) = lg\,2$ und $f(1) = \frac{3}{2}\,lg\,2$, also um $\frac{1}{2}\,lg\,2$ grösser. Auch diese Reihe muss bei Annäherung von x an Eins das Phänomen der unendlich verzögerten Convergenz bieten. Denn ist N eine beliebig grosse Zahl, so kann man offenbar ε so klein machen, dass die Summe der ersten N Glieder der Reihe $f(1-\varepsilon)$ sich von $\frac{3}{2}\,lg\,2$ beliebig wenig unterscheidet. Da aber der Werth der Reihe nahe $lg\,2$ ist, so müssen die Glieder, die nach dem N^{ten} kommen, noch einen Einfluss auf die Summe ausüben, der beinahe $\frac{1}{2}\,lg\,2$ ist. Man kann demnach keine Zahl N so gross angeben, dass für jeden Werth von x zwischen 0 und 1 sich der Werth der ersten N Glieder der Reihe von $f(x)$ um weniger als eine kleine Zahl σ (die nur $< \frac{1}{2}\,lg\,2$ zu sein braucht) unterscheide. Lässt sich eine Zahl N angeben, so dass die Summe einer Reihe für alle Werthe einer Veränderlichen z, von der ihre Terme Functionen sind, sich von der Summe ihrer ersten N Glieder absolut um weniger als eine beliebig klein vorgegebene Zahl σ unterscheidet, so heisst die Reihe in diesem Gebiete gleichmässig convergent. Convergirt eine Potenzreihe $\Sigma A_m(z-a)^m$ absolut so lange $abs(z-a) \leq R$ ist, so giebt es eine Zahl N, für die $\Sigma\, abs\, A_m R^m$ sich von der Summe ihrer ersten N Glieder um weniger als σ unterscheidet. Dies gilt a fortiori für den ganzen Bereich $abs(z-a) \leq R$. Die Convergenz kann sich in diesem Bereiche nicht unendlich verzögern, sie ist eine gleichmässige.

§ 105. Die Mascheroni'sche Constante. Die Summe der ersten n Glieder der Reihe $\Sigma z^{m+1} : (m+1)$ wächst über alle Grenzen, wenn für z Eins gesetzt wird. Es kann aber bemerkt werden, dass diese Summe endlich bleibt, wenn $lg(n+1)$ oder $lg(n+z)$ von ihr abgezogen wird. Es sei

$$M_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + .. + \frac{1}{n} - lg(n+z),$$

so kann dafür geschrieben werden

$$M_n = lg\frac{n+1}{n+z} + 1 - lg\frac{2}{1} + \frac{1}{2} - lg\frac{3}{2} + .. + \frac{1}{\mu} - lg\frac{1+\mu}{\mu} + .. + . - lg\frac{n}{n-1} + \frac{1}{n} - lg\frac{n+1}{n}.$$

Die Terme dieser Reihe nehmen, absolut genommen, monoton ab, die Reihe ist deshalb nach § 16 convergent. Mithin nähert sich $lim\, M_n = M$ einer bestimmten Zahl, welche zuerst von Mascheroni auf eine grössere Zahl von Stellen berechnet ist. In Gauss Werken III, pag. 154 ist ihr Werth

$$M = 0{,}57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082\ 40243\ 10421$$

angegeben. Sie spielt bei mehreren analytischen Functionen eine Rolle, wofür sich auch hier ein Beispiel ergeben wird.

§ 106. Die künstlichen Logarithmen. Die Functionalgleichung $f(z) + f(z') = f(z\,.\,z')$ definirt eine Function bis auf einen willkürlichen Factor nämlich als $a\,lg\,z$. Dieser Factor a kann für practische Zwecke so eingerichtet werden, dass $f(z)$ für $z = z_0$ einen bestimmten Werth etwa 1 annimmt. Ist $f(z_0) = 1$, so sagt man $f(z)$ sei der Logarithmus von z für die Basis z_0. Es ist also

$$lg\,z\ (\text{Basis } z_0) = lg\,z : lg\,z_0,$$

und $1 : lg\, z_0$ heisst der Modul des Logarithmensystems, welches zu einer bestimmten Basis z_0 gehört. Für das practische Rechnen ist es vortheilhaft, für z_0 die Zahl 10 zu wählen, so dass

$$lg\, z \text{ (Basis 10)} = lg\, z : lg\, 10 = lgv\, z$$

ist. Die Logarithmen mit der Basis 10 werden daher beim Rechnen, der natürliche Logarithmus in der Analysis meistens angewandt, was wegen der Bezeichnung zu beachten ist. Da die ersteren auch vulgäre Logarithmen genannt werden, so kann man sie vielleicht nicht unpassend mit $lgv\, z$ (logarithmus vulgaris z) bezeichnen.

§ 107. Die allgemeine Exponentialfunction. Die Functionalgleichung der Exponentialfunction $f(z) \,.\, f(t) = f(z+t)$, bestimmt dieselbe bis auf eine willkürliche Constante. Es war $f(z) = e^{\alpha z}$, wo α constant ist. Setzt man nun $\alpha = lg\, a$, so hat man

$$f(z) = 1 + \frac{z\, lg\, a}{1} + \frac{(z\, lg\, a)^2}{1\,.\,2} + \ldots + \frac{(z\, lg\, a)^n}{fac\, n} + \ldots = e^{z\, lg\, a}.$$

Ist z eine ganze Zahl, so kann man dafür $(e^{lg\, a})^z = a^z$ schreiben. Diese Schreibweise

$$f(z) = a^z \text{ für } e^{z\, lg\, a}$$

behält man für beliebige z bei, und nennt diese Function auch noch Exponentialfunction mit der Basis a. Dabei ist zu beachten, dass diese Function, wenn a gegeben ist, nicht völlig bestimmt ist, sondern erst, wenn $lg\, a$ gegeben ist. Wird nichts Näheres über diesen Logarithmus angegeben, so pflegt man für denselben den Hauptwerth anzunehmen. — Die Ableitung von a^z ist $a^z\, lg\, a$.

§ 108. Arcus tangens z. Der Quotient $sin\, z : cos\, z$ wird mit $tg\, z$ (tangens z) bezeichnet, und der reciproke Werth davon mit $ctg\, z$ (cotangens z), $tg\, z$ und $ctg\, z$ sind periodische Functionen mit der Periode π, so dass ein der imaginären Achse paralleler Streifen von der Breite π als ihr Fundamentalbereich anzusehen ist. Ihre Umkehrungen sind die einfachsten cyclometrischen Functionen. Setzt man nämlich $tg\, \zeta = z$, so sagt man, ζ sei der Bogen, dessen trigonometrische Tangente gleich z ist, daraus ist die Bezeichnung $arc\, tg\, z$ (arcus tangens z) und $arc\, ctg\, z$ entstanden. Es ist

$$tg\, \zeta = \frac{sin\, \zeta}{cos\, \zeta} = i\frac{e^{-i\zeta} - e^{i\zeta}}{e^{-i\zeta} + e^{i\zeta}} = i\frac{1 - e^{2i\zeta}}{1 + e^{2i\zeta}}, \quad e^{2i\zeta} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

$$2i\zeta = lg\frac{1+iz}{1-iz} = 2i\, arc\, tg\, z, \quad arc\, tg\, z = \tfrac{1}{2}i\, lg\frac{1-iz}{1+iz} = z - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 - . + ..,$$

woraus für die Ableitung sich $arc\, tg'\, z = 1 : (1+z^2)$ ergiebt. Die unendlich vielen Werthe von $arc\, tg\, z$ sind von einander um ein Multiplum von π verschieden, und man kann den Werth als Hauptwerth bezeichnen, dessen reeller Theil zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt, er wird durch die obige Reihe in ihrem Convergenzgebiete dargestellt. Ein zweites Functionselement erhält man in der Form

$$arc\, tg\, z = \tfrac{1}{2}i\, lg\left[\left(\frac{1}{iz} - 1\right) : \left(\frac{1}{iz} + 1\right)\right] = \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}i\, lg\left[\left(1 + \frac{i}{z}\right) : \left(1 - \frac{i}{z}\right)\right] = \tfrac{1}{2}\pi - \left(\frac{1}{z} - \tfrac{1}{3}\frac{1}{z^3} + \tfrac{1}{5}\frac{1}{z^5} - ..\right),$$

woraus hervorgeht, dass die Function im Unendlichen den Charakter einer ganzen Function hat. Fügt man zu den beiden Darstellungselementen (von denen beiläufig das letzte nicht überall den Hauptwerth darstellt), $\pm n\pi$, so hat man, da die Reihen auch auf dem Convergenzkreise convergiren, die Function für alle Werthe von z dargestellt. Singulär ist sie allein an den Stellen $\pm i$, wie ihre Darstellung durch den Logarithmus lehrt. Der Beweis der folgenden Formeln kann dem Leser überlassen bleiben.

$$arc\,ctg\,z = \tfrac{1}{2}\pi - arc\,tg\,z, \quad arc\,tg\,z + arc\,tg\,t = arc\,tg[(z+t):(1-zt)]$$

$$lg(x+yi) = \tfrac{1}{2}lg(x^2+y^2) + i\,arc\,tg\frac{y}{x}, \quad arc\,tg(x+yi) = \tfrac{1}{2}arc\,tg\frac{2x}{1-x^2-y^2} + \tfrac{1}{4}i\,lg\frac{x^2+(1+y)^2}{x^2+(1-y)^2},$$

wobei auf die Mehrdeutigkeit der vorkommenden Ausdrücke Rücksicht zu nehmen ist. — Für $z = 1$ ist $arc\,tg\,z = \tfrac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + . - \ldots$

Die allgemeine Potenz. Die Einheitswurzeln. Wahrer Convergenzkreis.

§ 109. Die Functionalgleichung der Potenz. Die Potenz erweiterten wir zur Exponentialfunction, indem wir die Functionalgleichung $a^m . a^n = a^{m+n}$, die für ganze positive oder negative Zahlen m, n bestand, für allgemeine Zahlen gelten liessen. Eine andere der Verallgemeinerung fähige Eigenschaft der Potenz ist aber die, dass

$$t^m . z^m = (t . z)^m$$

ist, für jede ganze positive oder negative Zahl m. Man kann nämlich nach der allgemeinsten Function fragen, welche der Functionalgleichung der Potenz Genüge leistet

$$f(t) . f(z) = f(t . z).$$

Aus dieser Gleichung zieht man sogleich einige Folgerungen. Setzt man zuerst $t = 1$, so folgt $f(z)\,f(1) = f(z)$, $f(1) = 1$, setzt man weiter in den unmittelbar aus ihr folgenden Beziehungen

$$f(z_1) . f(z_2) . f(z_3) \ldots . f(z_n) = f(z_1 . z_2 . z_3 \ldots z_n), \quad f\left(\frac{1}{z}\right) f(z) = f(1), \quad f\left(\frac{1}{z}\right) = 1 : f(z),$$

$z_1 = z_2 = .. = z_n$, so fliesst daraus

$$[f(z)]^n = f(z^n), \quad [f(z)]^{-n} = f\left(\frac{1}{z^n}\right) = f(z^{-n}).$$

Aus der Gleichung

$$f(z) . f(0) = f(0)$$

folgt $f(0) = 0$, wenn die Gleichung einen Sinn hat, was nicht nothwendig der Fall ist. In der That wird sich zeigen, dass unter den durch die obige Functionalgleichung definirten Functionen solche sind, für welche $f(z)$ mit abnehmendem z über alle Grenzen wächst, oder sich keinem bestimmten Werthe nähert. Verschwände f für $z = z_0$, so wäre $f(z) = f(z : z_0) . f(z_0)$ auch Null. Ausser für $z = 0$ oder $z = \infty$ kann demnach $f(z)$ nicht verschwinden.

§ 110. Die Lösung der Functionalgleichung. Die Lösung der Functionalgleichung ist leicht, weil sie sich auf die des Logarithmus sogleich zurückführen lässt. Setzen wir nämlich die unbekannte Function gleich $f(z)$ und $lg\,f(z) = \varphi(z)$, so hat $lg\,f(z)$ den Charakter einer ganzen Function da, wo ihn $f(z)$ hat, ausser wo $f(z)$ Null oder Unendlich wird, was nur für $z = 0$ oder $z = \infty$ statthaben kann, und es ist

$$lg\,f(z) + lg\,f(t) = lg\,f(z . t), \quad \varphi(z) + \varphi(t) = \varphi(z . t),$$

mithin ist (§ 97), wenn a eine willkürliche Constante bedeutet,

$$\varphi(z) = a\,lg\,z, \quad f(z) = e^{a\,lg\,z}.$$

Ist a eine beliebige ganze positive oder negative Zahl, gleich $\pm n$, so ist

$$e^{\pm n\, lg\, z} = (e^{lg\, z})^{\pm n} = z^{\pm n}.$$

Diese Schreibweise behält man für jedes a bei, und nennt diese Function die a^{te} Potenz von z (z^a, gelesen z hoch a oder z zur Potenz a), und es ist also diese Potenz durch die Gleichung

$$z^a = e^{a\, lg\, z}$$

definirt. Aus dieser Gleichung ergiebt sich sogleich

$$\left(z^a\right)^b = e^{b\, lg\, z^a} = e^{b\, lg\left(e^{a\, lg\, z}\right)} = e^{ba\, lg\, z} = e^{ab\, lg\, z} = z^{ab} = \left(z^b\right)^a.$$

Hierbei ist jedoch zu beachten, dass wenn z und a gegeben sind, im Grunde z^a im Allgemeinen und um so mehr $(z^a)^b$ noch gar nicht einen völlig bestimmten Sinn haben, weil $lg\, z$ und $lg\, z^a$ vieldeutige Functionen sind. So ist z. B. $(z^3)^{\frac{1}{3}}$ ein dreiwerthiger, $(z^{\frac{1}{3}})^3 = z$ ein einwerthiger Ausdruck. Dadurch wird man genöthigt, sich so auszudrücken. Einer der Werthe von $(z^a)^b$ kann einem der Werthe von $(z^b)^a$ gleich sein. Die Formel $(z^a)^b = (z^b)^a$ ist daher im Allgemeinen zu vermeiden.

§ 111. Das allgemeine Binomialtheorem. Die Function $f(z) = z^a = e^{a\, lg\, z}$ hat in der Umgebung jedes von 0 verschiedenen Punctes den Charakter einer ganzen Function. Denn $lg\, z$ ist in eine Reihe $\Sigma(z - z_0)^m B_m$ entwickelbar, die so lange convergirt als $abs(z - z_0) \leq abs\, z_0$ ist. Mithin (§ 71) convergirt die Entwickelung (in der $fac\ 0 = 1$ zu setzen ist)

$$z^a = e^{a\, lg\, z} = \Sigma \frac{a^{m'}}{fac\, m'} \left[\Sigma(z - z_0)^m B_m\right]^{m'},$$

wenn sie nach Potenzen von $z - z_0$ geordnet wird, ebenfalls so lange $abs(z - z_0) < abs\, z_0$ ist, absolut. Die einfachste Entwickelung des Logarithmus war die im Puncte Eins, oder die Entwickelung von $lg(1 + z)$ nach Potenzen von z, deshalb mag auch hier $1 + z$ für z gesetzt und die Entwickelung von $(1 + z)^a$ nach Potenzen von z zunächst untersucht werden. Der allgemeine Fall ist daraus leicht abzuleiten. Wir sind also berechtigt zu schreiben

$$(1 + z)^a = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \,.\,. + A_n z^n + \,.\,.,$$

und wir wissen a priori, dass die Reihe jedenfalls convergirt, so lange $abs\, z < 1$ ist. Zu dieser Reihe gelangen wir, wenn wir in

$$e^{a\, lg(1+z)} = 1 + \frac{a}{1} lg(1 + z) + \frac{a^2}{1\,.\,2}[lg(1 + z)]^2 + \,.\,. + \frac{a^n}{fac\, n}[lg(1 + z)]^n + \,.\,.$$

$z(1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{4}z^4 + . - . .)$ für $lg(1 + z)$ einsetzen, woraus sofort $A_0 = 1$, $A_1 = a$ fliesst. Was die übrigen Grössen A_2, A_3, . . betrifft, so sehen wir sogleich ein, dass A_n eine ganze Function von a vom n^{ten} Grade ist. Da nämlich die Entwickelung von $lg(1 + z)$ mit z, die von $[lg(1 + z)]^n$ mit z^n beginnt, so liefert zum Coëfficienten A_μ die Entwickelung von $a^n[lg(1 + z)]^n$ nur dann einen Beitrag, wenn $n \leq \mu$ ist, und dieser Beitrag ist a^n multiplicirt mit einem rein numerischen Factor. Mithin ist $A_\mu = g_\mu(a)$ eine ganze Function von a vom μ^{ten} Grade. Eine solche Function ist aber durch $\mu + 1$ Werthe, die sie für $\mu + 1$ verschiedene a annimmt, vollständig bestimmt. Ist nun a eine ganze Zahl m, so wissen wir, dass

$$e^{m\, lg(1+z)} = (e^{lg(1+z)})^m = (1 + z)^m = 1 + m_1 z + m_2 z^2 + \,.\,. + m_\mu z^\mu + \,.\,. + z^m$$

ist, wo $m_\mu = m\,.\,(m - 1)\,.\,.\,(m - \mu + 1) : fac\, \mu$, und m_μ Null ist, wenn $m < \mu$ ist. Daraus folgt, dass $g_\mu(a)$ Null ist für $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$, . ., $a = \mu - 1$, aber gleich Eins für $a = \mu$, und somit muss (§ 41)

$$g_\mu(a) = A_\mu = \frac{a}{1} \cdot \frac{(a - 1)}{2} \cdot \frac{(a - 2)}{3} \cdot\cdot \frac{(a - \mu + 1)}{\mu} = a_\mu$$

für jedes beliebige a sein. Auch diese Binomialcoëfficienten $a_0, a_1, .., a_\mu, ..$ genügen der Eigenschaft

$$a_{\mu-1} + a_\mu = (a+1)_\mu.$$

Damit haben wir also die allgemeine binomische Entwickelung gewonnen

$$(1+z)^a = 1 + az + \frac{a}{1} \cdot \frac{a-1}{2} z^2 + \frac{a}{1} \cdot \frac{a-1}{2} \cdot \frac{a-2}{3} z^3 + \frac{a}{1} \cdot \frac{a-1}{2} \cdot \frac{a-2}{3} \cdot \frac{a-3}{4} z^4 + ..,$$

oder

$$z^a = 1 + a_1(z-1) + a_2(z-1)^2 + a_3(z-1)^3 + .. + a_n(z-1)^n + ..,$$

$$a_n = a(a-1)(a-2)..(a-n+1) : fac\, n.$$

Soll z^a nach Potenzen von $(z-z_0)$ entwickelt werden, so schreibt man

$$z^a = (z_0 + \overline{z-z_0})^a = z_0{}^a \cdot \left(1 + \frac{z-z_0}{z_0}\right)^a = z_0{}^a \Sigma a_m \left(\frac{z-z_0}{z_0}\right)^m,$$

welche Reihe convergirt, so lange $abs(z-z_0) < abs\, z_0$ ist. Es hat also, abgesehen vom Puncte Null, z^a überall den Charakter einer ganzen Function, und ist daher auch überall stetig und endlich.

Aus der Reihe ergiebt sich für die Ableitung, dass $(z^a)' = az^{a-1}$ ist, dass sie sich der Regel des § 48 für ganze Potenzen unterwirft.

Bei diesen Entwickelungen haben wir für die Darstellung des Logarithmus den Hauptwerth zu Grunde gelegt, deshalb wollen wir auch die Entwickelung von z^a nach Potenzen von $z-1$, wie sie hier steht, als den Hauptwerth dieser Function gelten lassen. Nur die zuletzt gegebene Entwickelung kann, wegen der Vieldeutigkeit von $z_0{}^a$, auch andere Zweigwerthe als den Hauptwerth darstellen, worüber wir erst später sprechen.

§ 112. Die singuläre Stelle Null. Im Puncte Null hat z^a, ausgenommen, wenn a eine ganze positive Zahl oder Null ist, niemals den Charakter einer ganzen Function. Wir können drei Fälle für die Untersuchung dieses Punctes unterscheiden, indem wir einmal annehmen, der reelle Theil von a sei positiv, sodann er sei negativ, endlich er sei Null. Im ersten Falle verschwindet z^a im Allgemeinen mit z. Es ist nämlich, $z = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, $a = \alpha + \beta i$ gesetzt,

$$z^a = e^{a(\vartheta i + lg\,\varrho)} = e^{(\alpha\vartheta + \beta\, lg\,\varrho)i + \alpha\, lg\,\varrho - \beta\vartheta} = e^{\alpha\, lg\,\varrho - \beta\vartheta} \cdot [\cos(\alpha\vartheta + \beta\, lg\,\varrho) + i\sin(\alpha\vartheta + \beta\, lg\,\varrho)],$$

und da $lg\,\varrho$ mit abnehmenden ϱ, also auch mit (absolut genommen) abnehmenden z, negativ über alle Grenzen wächst, so verschwindet, weil α positiv ist, $e^{\alpha\, lg\,\varrho - \beta\vartheta}$, vorausgesetzt, dass ϑ endlich bleibt.

Wenn aber ϑ bei abnehmenden z positiv oder negativ unendlich gross wird, wenn also der Punct z sich dem Puncte Null spiralförmig, den Punct unendlich oft positiv oder negativ umkreisend, nähert, so kann ϑ, wenn β von Null verschieden ist, für jedes noch so kleine ϱ so gross genommen werden, dass $\beta\vartheta$ die Grösse $\alpha\, lg\,\varrho$ um beliebig viel übertrifft, und es kann dann $e^{\alpha\, lg\,\varrho - \beta\vartheta}$ jedweden reellen Werth annehmen, selbst über alle Grenzen wachsen. Ist aber $\beta = 0$, so verschwindet z^α bei positivem α immer mit z.

Ist zweitens $a = -\alpha + \beta i$, so ist

$$z^{-\alpha+\beta i} = 1 : z^{\alpha - \beta i},$$

und es wird demnach, weil der Nenner mit abnehmenden z namentlich dann, wenn bei dieser Abnahme der Winkel von z endlich, vielleicht constant bleibt, verschwindet, dieser Ausdruck über alle Grenzen gross. Es lassen sich aber, wenn β von Null verschieden ist, spiralige Annäherungen aussinnen, bei denen er jedweden Werth annimmt.

Ist drittens a rein imaginär, also gleich βi, so ist zuerst z^a constant, wenn β Null ist. — Da

$$z^{\beta i} = e^{i\beta\, lg\, z} = e^{i\beta\, lg\,\varrho - \beta\vartheta} = e^{-\beta\vartheta}[\cos(\beta\, lg\,\varrho) + i\sin(\beta\, lg\,\varrho)]$$

ist, so bleibt der Ausdruck endlich, wenn ϑ endlich bleibt, kann aber durch passende Bestimmung von ϑ absolut jedweden, und wenn passend über ϱ verfügt wird überhaupt jeden Werth annehmen, und kann bei spiraliger Annäherung über alle Grenzen wachsen oder Null werden.

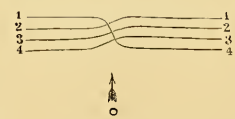
Ist ε eine beliebig kleine positive Zahl, so verschwindet mit abnehmenden z der Hauptwerth von $z^{\varepsilon}\, lg\, z = e^{\varepsilon\, lg\, z}\, lg\, z$. Man setze $lg\, z = -\zeta$, so wächst ζ für abnehmende z über alle Grenzen, und zwar positiv in seinem reellen Theil. Daraus ergiebt sich die Richtigkeit dieses Satzes aus § 76.

Lässt man jedem Zweige von $lg\, z$ einen Zweig von z^a entsprechen, so wird z^a mit abnehmenden z allemal Null, Unendlich oder Endlich und unbestimmt, wenn der reelle Theil von a bez. > 0, < 0, $= 0$ ist, und wenn z beim Abnehmen immer in demselben oder in einigen Zweigen verläuft.

§ 113. Die Wurzeln. Ist a eine rationale Zahl gleich $p : q$, so hat die Function z^a also $z^{\frac{p}{q}}$ nur eine endliche Anzahl von Zweigen, nämlich q Zweige, wenn p und q keinen Theiler gemein haben. Denn führt man die Variabele z des Ausdruckes

$$z^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q} lg\, z}$$

um den Punct Null m-mal positiv herum, wodurch $lg\, z$ um $2 m i \pi$ wächst, so gewinnt $z^{\frac{p}{q}}$ den Factor $e^{\frac{2pmi\pi}{q}}$. Dieser Factor ist aber jedesmal derselbe, wenn m einen der Werthe m, $m+q$, $m+2q$, .., $m-q$, $m-2q$, .., $m-nq$, .. annimmt, oder für alle ganzen Zahlen m, die einander nach dem Modul q congruent sind. Somit nimmt die Function $z^{\frac{p}{q}}$ für einen gegebenen Werth von z nur q verschiedene Werthe an, und wenn $p = m . p'$, $q = m . q'$ ist, wenn also p und q den gemeinsamen Theiler m haben, so nimmt die Function nur $q' = q : m$ Werthe an. Um die Function in eindeutige Zweige zu zerlegen, verfahren wir ganz wie im § 96 beim Logarithmus. Wir ziehen in der z-Ebene eine Linie l von 0 nach $-\infty$ längs der reellen Achse. In der so begrenzten Ebene ist jeder Zweig von $lg\, z$ völlig bestimmt. Dadurch ist auch jeder Zweig von $z^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q} lg\, z}$ völlig bestimmt, und er ist auf dem negativen Ufer von l (dem oberen) $e^{\frac{2p\pi i}{q}} = \left(\cos\frac{2p\pi}{q} + i\, \sin\frac{2p\pi}{q}\right)$-mal so gross als auf dem positiven. Der Hauptzweig ist für positiv reelle Werthe von z positiv reell. Es ist aber nicht nöthig, wie beim Logarithmus, unendlich viele Zweige zu bilden. Denn der q^{te} Zweig dieser Function stimmt genau mit dem 0^{ten} überein, ebenso der $2q^{te}$, $3q^{te}$, $-q^{te}$, $-2q^{te}$, ...



Weist man jedem Zweige der Function $z^{\frac{p}{q}}$ ein besonderes Ebenenblatt an, und fügt sie wie im § 96 zu einer Riemann'schen Fläche zusammen, so hat man für dieselbe nicht mehr unendlich viele Blätter nöthig, sondern nur q Blätter. Führen wir eine insofern veränderte Zählung ein, als wir, wie es hier üblich ist, den Hauptzweig den ersten Zweig nennen, so hängt längs l das obere Ufer dieser Linie im ersten Blatte mit dem unteren im zweiten Blatte zusammen u. s. w. Das obere Ufer von l im q^{ten} Blatte kann man nun durch die übrigen Blätter hindurch fortgesetzt denken ins untere Ufer von l des ersten Blattes zurück. So entsteht ein geschlossenes Blättersystem, das sich um den Punct 0 q-mal herumwindet, so dass bei jedem Umgange um Null das μ^{te} Blatt ins $\mu + 1^{te}$, und das q^{te} ins erste continuirlich sich fortsetzt. Es ist gleichgültig, ob man das 2^{te} Blatt ans erste so ansetzt, dass es über diesem liegt, oder so, dass es unter diesem liegt. Letztere Vorstellung ist die gebräuchlichere. Dies vorausgesetzt legen wir senkrecht zur negativ reellen Achse einen Schnitt, so dass das Flächen- (oder Ebenen-) System aufgeschnitten wird, dann versinnlicht nebenstehende Figur, in der die Blätter mit ihrer Ordnungszahl versehen sind, diesen Aufschnitt vom Puncte 0 aus gesehen, wenn $q = 4$ und $p = 1$ oder 3 ist. Nennt man die Riemann'sche Fläche T, in der $f(z)$ eine eindeutige Function ist, wie $f(z)$ verzweigt, so ist $z^{\frac{p}{q}}$ wie $z^{\frac{1}{q}}$ verzweigt, wenn p und q keinen gemeinsamen Theiler haben. Für $z^{\frac{1}{q}}$ schreibt man zuweilen auch $\sqrt[q]{z}$, gelesen q^{te} Wurzel aus z, namentlich wird die Lösung der Gleichung $z^q = a$ mit $\sqrt[q]{a}$ bezeichnet. Auch schreibt man $\sqrt[\frac{q}{p}]{z}$ für $z^{\frac{p}{q}}$, woraus dann auch noch die Gleichung fliesst $\sqrt[\frac{q}{p}]{z} = \sqrt[q]{(z^p)}$. Man muss jedoch bei diesen Ausdrücken wegen ihrer Vieldeutigkeit darauf achten, mit welchem Functionszweige man es zu thun hat. So hat z. B. der Ausdruck $\sqrt[4]{(z^2)}$ vier, $\sqrt[\frac{4}{2}]{z} = \sqrt{z}$ nur zwei Werthe, und die in ihrer Bezeichnung wenig glückliche Gleichung $\sqrt[4]{z^2} = \sqrt[\frac{4}{2}]{z} = \sqrt{z}$ ist nicht immer richtig. Vielmehr muss es heissen $\sqrt[4]{z^2} = \sqrt{\pm z}$. Wir werden Wurzelzeichen mit gebrochenen Wurzelexponenten überhaupt vermeiden. Ist aber eine q^{te} Wurzel aus einer p^{ten} Potenz zu ziehen $\left(\sqrt[q]{z^p}\right)$, so schreibt man dafür wohl auch $(z^p)^{\frac{1}{q}}$, aber nicht ohne Weiteres $z^{\frac{p}{q}}$, weil der erste Ausdruck mehr Werthe als der zweite haben kann. Wohl aber ist dies zulässig, wenn p und q theilerfremd sind.

Dass die Gleichung $z^q = a$ immer lösbar ist, und q Lösungen hat, nämlich

$$\sqrt[q]{a} = e^{\frac{1}{q} lg\, a}, \quad e^{\frac{1}{q} lg\, a + \frac{2i\pi}{q}}, \quad e^{\frac{1}{q} lg\, a + \frac{4i\pi}{q}}, \quad .., \quad e^{\frac{1}{q} lg\, a + \frac{2(q-1)i\pi}{q}}$$

ist evident, denn die q^{ten} Potenzen dieser Ausdrücke geben eben a. Dass aber andere Lösungen nicht vorhanden sind, folgt aus § 41, weil die gefundenen Lösungen von einander verschieden sind.

§ 114. **Die Wurzeln der Einheit.** Die Gleichung $z^n = 1$ hat n verschiedene Lösungen (Wurzeln), nämlich, wenn k eine ganze Zahl ist

$$1, \; \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \quad \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}, \quad .., \quad \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad .., \quad \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n},$$

von denen je zwei und zwei conjugirt sind bis auf eine oder, wenn n gerade ist, zwei unter ihnen, nämlich 1 und bez. 1 und -1. Die conjugirten Wurzeln sind

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad \cos\frac{2(n-k)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-k)\pi}{n} = \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Das Product von solchen conjugirten Wurzeln ist Eins, ihre Summe $2\cos\frac{2k\pi}{n}$. Ist k relativ prim (theilerfremd) zu n, so heisst $\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ eine Primitivwurzel. Setzen wir sie gleich α_k, so sind die Potenzen

$$\alpha_k^0, \; \alpha_k^1, \; \alpha_k^2, \; .., \; \alpha_k^{n-1}$$

wieder die n verschiedenen Wurzeln 1, $\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, .. in veränderter Reihenfolge. Es ist nämlich $\alpha_k{}^m = \cos\frac{2km\pi}{n} + i\sin\frac{2km\pi}{n}$ offenbar wieder eine Einheitswurzel, nimmt man von km ein passendes Multiplum von n fort, wodurch die Einheitswurzel ungeändert bleibt $\left(\cos\frac{2(km \pm pn)\pi}{n} + i\sin\frac{2(km \pm pn)\pi}{n} = \cos\frac{2km\pi}{n} + i\sin\frac{2km\pi}{n},\; p \text{ ganz}\right)$, so ist α_k^m auch genau wieder in die Form der oben aufgestellten Einheitswurzeln zu bringen. Ist aber $m \gtreqless m'$, und sind $m, m' < n$, so ist auch $\alpha_k^m \gtreqless \alpha_k^{m'}$. Denn es ist $\alpha_k^m : \alpha_k^{m'} = \alpha_k^{m-m'} = \cos\frac{2(m-m')k\pi}{n} + i\sin\frac{2(m-m')k\pi}{n}$ von Eins verschieden, wenn k mit n

keinen Theiler gemein hat, weil $m - m'$ von 0 und jedem Multiplum von n verschieden ist. Es sind demnach die Grössen

$$\alpha_k^0,\ \alpha_k^1,\ \alpha_k^2, \ldots, \alpha_k^{n-1} = 1,\ \alpha_k,\ \alpha_{2k}, \ldots, \alpha_{(n-1)k} = 1,\ \alpha_1^k,\ \alpha_1^{2k}, \ldots, \alpha_1^{(n-1)k}$$

n^{te} Einheitswurzeln und alle von einander verschieden, und daher wieder die sämmtlichen n^{ten} Einheitswurzeln. Da ferner, wenn auch k mit n einen Theiler hat, die Gleichung stattfindet,

$$\alpha_k^0 + \alpha_k^1 + \alpha_k^2 + \ldots + \alpha_k^{n-1} = (\alpha_k^n - 1) : (\alpha_k - 1)$$

so ist, wenn α_k nicht Eins ist, diese Summe gleich Null ($\alpha_k^n - 1 = 0$). Für $k = 1$ ergiebt sich: Die Summe der verschiedenen n^{ten} Einheitswurzeln ist Null. Ist k nicht 0 oder ein Multiplum von n, aber sonst eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, so ergiebt sich auch für die Summe der k^{ten} Potenzen der n^{ten} Einheitswurzeln der Werth Null. Ist k ein Multiplum von n, so ist $\alpha_k^m = 1$ und also die Summe n. Es ist $\alpha_h^k = \alpha_k^h$, und wenn α eine n^{te} Wurzel aus Eins ist, so muss auch $1 : \alpha$ eine, und zwar die ihr conjugirte sein.

Die (engere) Zahlentheorie widmet den Einheitswurzeln grössere Kapitel. Aber auch in der Functionentheorie werden wir noch vielfach Gewinn von ihnen haben. Um hiervon sogleich ein Beispiel zu haben, beweisen wir den schon früher (§ 88) ausgesprochenen Satz.

§ 115. In einer ganzen transcendenten Function $f(z)$ kann man die Veränderliche z so wachsen lassen, dass $f(z)$ über alle Grenzen wächst, sogar so, dass auch noch $f(z) : z^n$ für jedes noch so grosse n über alle Grenzen wächst. — Es sei

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots$$

Da die Reihe nach der Definition ganzer transcendenter Functionen für jeden Werth von z absolut convergent ist, so können wir, wie gross die absolute Zahl R auch sein mag, n so gross nehmen, dass der Ausdruck

$$R^n \, abs\, a_n + R^{n+1} \, abs\, a_{n+1} + R^{n+2} \, abs\, a_{n+2} + \ldots = F_n(R)$$

kleiner als jede noch so kleine vorgegebene Zahl wird. Dies findet umsomehr mit $F_n(R) : R_m$ statt. — Angenommen nun $abs\, f(z)$ sei für jeden Werth von $z = R\,(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$, wie gross auch R sein mag, absolut genommen kleiner, höchstens gleich G, so ist, weil der absolute Betrag einer Summe kleiner als die Summe der absoluten Beträge ist,

$$abs\, \frac{1}{n}\left(\frac{f(R)}{R^m} + \frac{f(Re^{\varepsilon i})}{R^m e^{\varepsilon m i}} + \frac{f(Re^{2\varepsilon i})}{R^m e^{2\varepsilon m i}} + \ldots + \frac{f(Re^{(n-1)\varepsilon i})}{R^m e^{(n-1)\varepsilon m i}}\right) \leqq \frac{G}{R^m},$$

wie gross auch n und R, und welche reelle Zahl ε auch sein mag. Setzen wir nun $\varepsilon = 2\pi : n$ und nehmen n sehr gross, jedenfalls grösser als m an, und führen zur Abkürzung das Zeichen $\mathfrak{S}_{\nu,n}$ als Summenzeichen mit der Bestimmung ein, dass ν der Summationsbuchstabe sein, und dass er die Werthe $0\ 1\ 2 \ldots (n-1)$ durchlaufen soll, so ist

$$\frac{1}{n}\left(\frac{f(R)}{R^m} + \frac{f(Re^{\varepsilon i})}{R^m e^{m\varepsilon i}} + \frac{f(Re^{2\varepsilon i})}{R^m e^{2m\varepsilon i}} + \ldots + \frac{f(Re^{(n-1)\varepsilon i})}{R^m e^{(n-1)m\varepsilon i}}\right) = \frac{1}{n}\mathfrak{S}_{\nu,n} \frac{f(Re^{\nu\varepsilon i})}{R^m e^{\nu m \varepsilon i}}$$

$$= \frac{1}{n}\mathfrak{S}_{\nu,n}\left(\frac{a_0 e^{-\nu m \varepsilon i}}{R^m} + \frac{a_1 e^{-\nu(m-1)\varepsilon i}}{R^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{m-1}\, e^{-\nu\varepsilon i}}{R} + a_m + a_{m+1} Re^{\nu\varepsilon i} + \ldots + a_{m+\mu} R^\mu e^{\nu\mu\varepsilon i} + \ldots\right).$$

Da nach der über n gemachten Annahme $-m$, $-(m-1)$, $-(m-2), \ldots$ grösser als $-n$ und $e^{-m\varepsilon i}$ eine n^{te} Wurzel der Einheit ist, so ist nach dem vorigen Paragraphen

$$\mathfrak{S}_{\nu,n} \frac{a_0 e^{-\nu m\varepsilon i}}{R^m} = 0, \quad \mathfrak{S}_{\nu,n} \frac{a_1 e^{-\nu(m-1)\varepsilon i}}{R^{m-1}} = 0, \ldots, \quad \mathfrak{S}_{\nu,n}\, a_{m-1} e^{-\nu\varepsilon i} = 0, \quad \frac{1}{n}\mathfrak{S}_{\nu,n}\, a_m = a_m.$$

Ferner ist aus denselben Gründen

$$\frac{1}{n}\mathfrak{S}_{\nu,n}\, a_{m+\mu} R^m e^{\nu\mu\varepsilon i} = 0,\quad \frac{1}{n}\mathfrak{S}_{\nu,n}\, a_{m+pn} R^{pn} e^{pn\nu\varepsilon i} = a_{m+np} R^{pn},$$

wenn μ kein Multiplum von n ist. Daraus folgt, dass

$$\frac{1}{n}\mathfrak{S}_{\nu,n}\frac{f(Re^{\varepsilon\nu i})}{R^m e^{\nu m\varepsilon i}} = a_m + a_{m+n}R^n + a_{m+2n}R^{2n} + a_{m+3n}R^{3n} + \ldots$$

ist. Nehmen wir nun R so gross an, dass die linke Seite, die kleiner als $G : R^m$ ist, gleich $\frac{1}{2}\sigma'$, absolut genommen kleiner als $\frac{1}{2}\sigma$ wird, wo σ beliebig klein vorgegeben ist, was immer geschehen kann, wenn $m > 0$ ist, so können wir dann weiter n so gross annehmen, dass auch

$$abs\,(a_{m+n}R^n + a_{m+2n}R^{2n} + a_{m+3n}R^{3n} + \ldots) = \tfrac{1}{2}\sigma'' < F_{n+m}(R) : R^m < \tfrac{1}{2}\sigma \text{ ist,}$$

so erhalten wir die Gleichung $a_m = \frac{1}{2}(\sigma' - \sigma'') < \sigma$, und es ist a_m absolut genommen kleiner als jede noch so klein vorgegebene Zahl σ, also Null, wo nur $m = 0$ ausgenommen ist. Damit ist der Satz gewonnen: *Ist eine ganze transcendente Function $f(z)$ für jeden Werth $z = Re^{\vartheta i}$ endlich, d. h. dem absoluten Betrage nach kleiner als eine bestimmte Zahl G, so bricht ihre Entwickelung nach Potenzen von z mit dem Anfangsgliede ab; die Function ist eine Constante.*

Eine ganze transcendente Function $f(z) = \Sigma a_m z^m$ muss also, wenn sie nicht constant ist, Werthe annehmen, die grösser als jede noch so grosse vorgegebene Zahl sind, wenn man $abs\, z$ über alle Grenzen wachsen lässt, und $arc\, z$ passend bestimmt. Die Function $f(z) : z^n$, wie gross auch n sein mag, zerfällt in zwei Theile $\varphi(z) + \psi(z)$

$$\varphi(z) = \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \ldots \frac{a_0}{z^n},\quad \psi(z) = \Sigma a_{n+m} z^m.$$

Der letzte Theil $\psi(z)$ ist wieder eine ganze transcendente Function. Während der erste Theil $\varphi(z)$ für wachsende $abs\, z$ stets zu Null herabsinkt, so muss es solche $arc\, z$ geben, für die der zweite Theil, für die also $f(z) : z^n$ für wachsende $abs\, z$ über alle Grenzen gross wird, w. z. b. w.

Ist $f(z)$ eine nach auf- und absteigenden Potenzen von z fortschreitende Reihe $f(z) = \Sigma a_m z^m + \Sigma a_{-m-1} z^{-m-1}$, die für $abs\, z = r$ absolut convergent ist, so ergeben die hier verwendeten Beweismittel den Satz, dass für unbegrenzt wachsende n ($lim\, n = \infty$), für positive oder negative ganze m

$$lim\, \frac{1}{n}\mathfrak{S}_{\nu,n}\frac{f(re^{\nu\varepsilon i})}{r^m e^{m\nu\varepsilon i}} = \mathfrak{M}_r \frac{f(z)}{z^m} = a_m$$

sei. Der Ausdruck $\mathfrak{M}_r\, \varphi(z)$ mag der Mittelwerth der Function $\varphi(z)$ auf der Kreislinie r genannt werden. Ist die Reihe zwischen R_0 und R absolut convergent, und ist $R_0 < r < R$, so ist der Mittelwerth $\mathfrak{M}_r(f(z) : z^m)$ von r in den gegebenen Grenzen unabhängig, nämlich stets gleich a_m.

§ 116. Die Verzweigung der allgemeinen Potenz. Ist a keine rationale, sondern eine irrationale oder complexe Zahl, so hat die Function $z^a = e^{a\, lg\, z}$ unendlich viele Zweige. Sie ist ganz so wie der Logarithmus verzweigt, und daher in der im § 96 beschriebenen Riemann'schen Fläche eindeutig, so dass jedem Punct der Fläche ein Zweigwerth von z^a und jedem Werthe von z^a, wenn z gegeben ist, ein Punct der Fläche entspricht. Der Werth des n^{ten} Zweiges $e^{a\, lg_0 z + 2an\pi i}$ unterscheidet sich von dem des m^{ten} Zweiges $e^{a\, lg_0 z + 2am\pi i}$ durch den Factor $e^{2a(n-m)\pi i}$. Hier tritt nun, wenn a eine reelle irrationale Zahl ist, der merkwürdige Umstand ein, dass für einen beliebig gegebenen Werth von z verschiedene Zweige so bestimmt werden können, dass die zugehörigen Zweigwerthe sich von einander um weniger als jede noch so kleine Zahl unterscheiden. Man kann in diesem Falle nämlich die ganze Zahl $n - m$ so bestimmen, dass $e^{2a(n-m)\pi i}$ beliebig wenig von Eins verschieden ist. Hierzu ist nur nöthig, dass $a(n - m)$ nahe eine ganze Zahl ist. Wir nehmen die ganze Zahl N so gross an, dass $1 : N < \sigma$ ist. Dann zerlegen wir das Intervall von 0 bis 1 in N gleiche Theile mit den Theilpuncten $0, 1:N, 2:N, 3:N, \ldots (N-1):N, 1$, ebenso das Intervall von 1 bis 2 mit den Theilpuncten $(N+1):N, (N+2):N, \ldots (2N-1):N, 2$, ebenso das Intervall von 2 bis 3 und so weiter. Dann nennen wir, wenn g eine beliebige ganze Zahl ist, das Intervall von $g+[(\mu-1):N]$ bis $g+(\mu:N)$ ein „μ^{tes} Intervall". Darauf bilden wir die Reihe von Zahlen

$$a \quad 2a \quad 3a \quad \ldots \quad Na \quad (N+1)a,$$

so müssen von den $(N+1)$ Zahlen dieser Reihe wenigstens in ein gleichbenanntes Intervall, etwa in das μ^{te}, zwei hineinfallen, weil $N+1$ Zahlen und nur N Intervalle vorliegen. Es mögen am und an in das μ^{te} Intervall fallen, so ist

$$am = m' + \frac{\mu}{N} - \varepsilon, \quad an = n' + \frac{\mu}{N} - \varepsilon',$$

wo $m'n'$ ganze Zahlen, $\varepsilon\varepsilon'$ kleiner als σ sind. Durch Subtraction folgt

$$(n-m)a = n' - m' + \varepsilon - \varepsilon'$$

d. h. multiplicirt man a mit der ganzen Zahl $n-m$, so ist das Product um weniger als σ von einer ganzen Zahl verschieden, weil $abs\,(\varepsilon-\varepsilon') < \sigma$ ist. Dabei ist σ beliebig klein. — Ist a reell, so haben die verschiedenen Zweige von z^a denselben absoluten Betrag.

Da $z^a = e^{a\,lg\,z}$ definirt wurde, so kann man schreiben $lg\,z^a = a\,lg\,z$. Es ist aber $lg\,z^a$ nur bis auf ein Multiplum von $2i\pi$, $a\,lg\,z$ bis auf ein Multiplum von $2ai\pi$ bestimmt, es braucht in der Gleichung $lg\,z^a = a\,lg\,z$ dem Hauptwerthe des Logarithmus links nicht der Hauptwerth des Logarithmus rechts zu entsprechen. Man wird daher gut thun, von dieser Formel nur für positiv reelle z und reelle a Gebrauch zu machen, in welchem Falle sie unbedingt richtig ist, wenn rechts und links der Hauptwerth, also der reelle Logarithmus genommen wird.

§ 117. Uebergang von der Potenz zur Exponentialfunction. Ist ω eine complexe Zahl mit beliebigem arcus, und wächst absolut ω über alle Grenzen, was durch das Zeichen lim angedeutet werden soll, so folgt aus der für den Hauptwerth, und sobald $abs\,\omega > abs\,z$ ist, bestehenden Identität

$$\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^{\omega} = e^{\omega\,lg\left(1+\frac{z}{\omega}\right)} = e^{z - \frac{1}{2}\frac{z^2}{\omega}(1-\varepsilon)}, \quad abs\,\varepsilon \leqq 1$$

$$lim\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^{\omega} = e^z$$

für jedes beliebige z.

Beliebt es, diesen Grenzübergang an der binomischen Reihe $(fac\,0 = 1)$

$$\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^{\omega} = \Sigma\,\omega_m \frac{z^m}{\omega^m} = \Sigma \frac{1-\frac{1}{\omega}}{1}\cdot\frac{1-\frac{2}{\omega}}{2}\cdot\frac{1-\frac{m-1}{\omega}}{m}\,z^m$$

auszuführen, was möglich ist,[1]) so beachte man, dass eine gewisse Schwierigkeit aus dem Umstande erwächst, dass der Grenzübergang ein doppelter ist, indem einerseits die Summe der ersten n Glieder der Reihe zu nehmen, und dann sowohl n als auch $abs\,\omega$ über alle Grenzen gross zu machen ist.

§ 118. Ist eine Function längs einer Linie regulär, so ist sie in einem die Linie ganz im Innern enthaltenden Gebiete regulär. — Die Puncte der Linie seien durch einen Parameter, z. B. durch die Länge der Linie s, von einem festen Puncte an gemessen, auf ihr bestimmt. So giebt es für jeden Punct z' derselben (für jeden Werth s' von s, welcher einem Puncte der Linie angehört,) einen bestimmten Kreis ϱ', in welchem die Entwickelung von $f(z)$ nach Potenzen von $z-z'$

[1]) In der ersten Auflage war der Doppelgrenzübergang durchgeführt.

convergirt. Es ist zu beweisen, dass der Radius ϱ' nicht unter jede noch so kleine vorgegebene Zahl σ herabsinken kann, wenn z' sich einem gewissen Puncte z_0 auf s, s' dem Werthe s_0 nähert. — Im Puncte z_1, $s = s_1$, ist ein Convergenzradius der Entwickelung von $f(z)$ nach $z - z_1$ vorhanden, er sei ϱ_1, der zugehörige Kreis schneide, nach der Seite der wachsenden s hin, s im Puncte $z_2, s = s_2$, so giebt es dort einen Convergenzradius für die Entwickelung nach Potenzen von $z - z_2$ von der Grösse ϱ_2, der zugehörige Kreis schneide s im Puncte z_3, $s = s_3$, so giebt es dort einen Convergenzkreis ϱ_3 u. s. w. Nun können die Puncte $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ mit einem bestimmten Werthe von n auf das Ende von s fallen, oder wenn s geschlossen ist, auf den Anfangspunct z_1 zurückführen, so giebt es unter den Grössen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ (deren Zahl endlich ist,) eine kleinste, und diese ist von Null verschieden. Es bilden dann die Theile der zu $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ gehörenden Kreislinien, welche nicht im Innern eines dieser Kreise liegen, einen Rand, der überall um ein bestimmtes endliches Stück von s absteht, und in dessen Innerm $f(z)$ überall den Charakter einer ganzen Function hat, weil jeder Punct des Innern dieses Gebietes im Innern eines Convergenzkreises liegt, und also auch in ihnen eine Potenzentwickelung vorhanden ist. Nun könnten aber die Grössen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots$ kleiner und kleiner werden, und es könnte sich die zugehörige Folge $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ einem Grenzpuncte z_0, die Parameter $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ einem Grenzwerthe s_0 unaufhörlich nähern, ohne ihn zu erreichen. Wir weisen nach, dass dies nicht möglich ist. Im Puncte z_0 existirt nach der Voraussetzung eine Entwickelung nach Potenzen von $z - z_0$, ihr Radius sei ϱ_0, und ϱ_0 ist eine bestimmte von Null verschiedene Zahl. Der zugehörige Kreis treffe, nach der Seite der abnehmenden s hin, s im Puncte z^0 und s habe dort den Werth s^0. So liegt, weil sich die Zahlen $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ der Zahl s_0 beliebig nähern, eine bestimmte unter den Zahlen s_n etwa s_m so nahe an s_0, dass die Strecke $(s_0, s_m) < \frac{1}{2}(s_0, s^0)$ ist. Der zu dieser Zahl gehörende Convergenzkreis ist aber, weil der Punct im Innern des Kreises ϱ_0 liegt, mindestens so gross, dass er diesen Kreis berührt, also sein Radius $> \frac{1}{2}(s_0, s^0)$, während er, wenn die Zahlen $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ die Zahl s_0 nie erreichten, kleiner als diese Grösse sein müsste. Diese Möglichkeit ist daher ausgeschlossen. Dieser Satz wird hier für den Fall zur Anwendung kommen, dass s eine Kreislinie ist. Hat $f(z)$ auf dem Rande eines Kreises R in jedem Puncte den Charakter einer ganzen Function, so giebt es ein ringförmiges, durch zwei dem Kreise R concentrische Kreise begrenztes Gebiet, in dessen Innerm R liegt, und $f(z)$ überall den Charakter einer ganzen Function hat.

§ 119. Ist $f(z)$ regulär in einem von zwei im Puncte Null centrischen Kreisen R_0, R begrenzten Gebiete, so ist der Mittelwerth $\mathfrak{M}_r f(z)$ von der Wahl des Kreises r unabhängig, sofern derselbe Null zum Centrum hat und zwischen R_0 und R liegt. Wir erweisen zuerst einen Hülfssatz. Für jede Stelle z des Bereiches $R_0 \leqq abs\, z \leqq R$ soll eine Darstellung von $f(z)$ der Form existiren $f(z+h) = \Sigma f^{(m)}(z)\, h^m : fac\, m$, dann fliesst aus den Beweismitteln des vorigen Paragraphen, dass der Convergenzkreis dieser Darstellung, wenn z das Gebiet durchläuft, nicht unter eine gewisse positive Zahl δ' herabsinken kann. In demselben Gebiete und unter denselben Bedingungen besteht daher die Beziehung $f''(z+h) = \Sigma f^{(m+2)}(z)\, h^m : fac\, m$, und die Reihe $\Sigma\, abs\, f^{(m+2)}(z)\, h^m : fac\, m$ ist absolut convergent, so lange $R_0 \leqq abs\, z \leqq R$ und $abs\, h < \delta'$ ist. Daher giebt es, wenn $abs\, h \leqq \delta < \delta'$ angenommen wird, für diese absoluten Reihen eine obere Grenze G, woraus folgt

$$abs\, f^{(m+2)}(z)\, h^m : fac\, m \leqq G, \text{ wenn } R_0 \leqq abs\, z \leqq R,\ abs\, h < \delta.$$

Durch Anwendung dieser Ungleichung auf die Identität

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) = h\, \Sigma f^{(m+2)}(z)\, h^m : fac\,(m+2)$$

folgt $(abs\, h \leqq \delta)$

$$abs\left(\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z)\right) \leqq abs\, h \,.\, G\, \Sigma \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$

und daher, wenn auch $abs\, h' \leqq \delta$ angenommen wird

$$abs\left(\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-\frac{f(z+h')-f(z)}{h'}\right) \leqq G(abs\, h + abs\, h') \leqq 2G\delta,$$

und es sinkt dieser Ausdruck unter σ herab, wenn $\delta < \sigma : 2G$ angenommen wird.

Angenommen nun, man habe $r' - r > 0$ beliebig fest gewählt ($R_0 \leqq r < r' \leqq R$), so bestimme man zunächst eine positive ganze Zahl p so gross, dass $(r'-r):p = \delta$, und dass

$$abs\left(\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-\frac{f(z+h')-f(z)}{h'}\right) < \sigma$$

so lange wird, als $abs\, h < \delta$, $abs\, h' < \delta$ ist. Wählt man hierauf die positive ganze Zahl n so gross, dass absolut $r'(1-\alpha) < \delta$, $r(1-\alpha) < \delta$ wird, wo

$$\alpha = cos\frac{2\pi}{n} + i\, sin\frac{2\pi}{n} = 1 - 2\, sin\frac{\pi}{n}\left(sin\frac{\pi}{n} - i\, cos\frac{\pi}{n}\right), \quad 1-\alpha = 2\, sin\frac{\pi}{n}\left(sin\frac{\pi}{n} - i\, cos\frac{\pi}{n}\right)$$

ist, so hat man

$$abs\left(\frac{f[\alpha^\nu(r+\delta)] - f(\alpha^\nu r)}{\alpha^\nu \delta} - \frac{f(\alpha^{\nu+1} r) - f(\alpha^\nu r)}{\alpha^\nu(\alpha-1)\, r}\right) < \sigma,$$

oder nach Multiplication mit δ und mit Rücksicht auf die Gleichung $abs\, \alpha^\nu = 1$,

$$abs\left(f[\alpha^\nu(r+\delta)] - f(\alpha^\nu r) - \delta \cdot \frac{f(\alpha^{\nu+1} r) - f(\alpha^\nu r)}{(\alpha-1)\, r}\right) \leqq \delta\sigma.$$

Da nun offenbar $\mathfrak{S}_{\nu,n} f(\alpha^{\nu+1} r) = \mathfrak{S}_{\nu,n} f(\alpha^\nu r)$ ist, so folgt

$$abs\left(\mathfrak{S}_{\nu,n} f[\alpha^\nu(r+\delta)] - \mathfrak{S}_{\nu,n} f[\alpha^\nu r]\right) \leqq n\delta \,.\, \sigma,$$

und wenn man mit n dividirt, und n über alle Grenzen wachsen lässt

$$abs\,[\mathfrak{M}_{r+\delta} f(z) - \mathfrak{M}_r f(z)] \leqq \delta\sigma, \quad \mathfrak{M}_{r+\delta} f(z) = \mathfrak{M}_r f(z),$$

weil σ beliebig klein vorgegeben werden kann. Hieraus folgt weiter

$$\mathfrak{M}_{r+\mu\delta} f(z) = \mathfrak{M}_{r+\overline{\mu-1}\delta} f(z)$$

und wenn man diese Gleichungen für $\mu = 1, 2, \ldots p$ bildet und addirt,

$$\mathfrak{M}_{r'} f(z) = \mathfrak{M}_r f(z).$$

Damit ist der Kopfsatz dieses Paragraphen erwiesen.

§ 120. Die Laurent'sche Reihe. Der wahre Convergenzkreis.[1]) Ist $f(z)$ eine eindeutige reguläre Function in dem Gebiete $R_0 \leqq abs\, z \leqq R$, so gilt für dieses Gebiet die Entwickelung

$$f(z) = \sum_{(m)\,-\infty}^{\infty} a_m z^m, \quad a_m = \mathfrak{M}_r f(z) : z^m.$$

Ist R_0 gleich Null, so reducirt sich die Entwickelung auf die Reihe $\Sigma a_m z^m$.

Beweis. Es sei $R_0 < abs\, z < R$ und

$$\varphi(z) = z\,\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = z\left(f'(z_0) + \frac{(z-z_0)}{1\,.\,2} f''(z_0) + \frac{(z-z_0)^2}{1\,.\,2\,.\,3} f'''(z_0) + \ldots\right),$$

---

[1]) Diese Sätze waren in der ersten Auflage weniger allgemein gegeben. Die hier gebrachten Beweise sind einer Abhandlung des Herrn A. Pringsheim in den Berichten der k. bayer. Acad. d. Wiss., Bd. XXV, 1895 entnommen. Herr Pringsheim vermeidet übrigens dadurch, dass er $n = 2^p$ annimmt, die Verwendung der trigonometrischen Functionen. Sollten die Sätze bis zum Ende dieses Kapitels dem Lernenden schwerer verständlich sein, so mag er sich zunächst damit begnügen, von ihnen Kenntniss zu nehmen.

so ist $\varphi(z)$ in demselben Gebiete eine reguläre analytische Function als $f(z)$, im Puncte z_0 lehrt dies die letzte Reihendarstellung. Folglich ist

$$\mathfrak{M}_{R_0} z \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \mathfrak{M}_R z \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0},$$

und da offenbar der Mittelwerth einer Summe von Functionen gleich der Summe der Mittelwerthe dieser Functionen ist,

$$f(z_0)\,\mathfrak{M}_R \frac{z}{z-z_0} - f(z_0)\,\mathfrak{M}_{R_0} \frac{z}{z-z_0} = \mathfrak{M}_R \frac{zf(z)}{z-z_0} - \mathfrak{M}_{R_0} \frac{zf(z)}{z-z_0}.$$

Nun ist

$$\frac{z}{z-z_0} = 1 + \frac{z_0}{z} + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z_0}{z}\right)^{n-1} + \left(\frac{z_0}{z}\right)^n \frac{1}{1-(z_0:z)},$$

$$\frac{z}{z_0-z} = \frac{z}{z_0} + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z}{z_0}\right)^{n-1} + \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \frac{1}{1-(z:z_0)},$$

und daher

$$\mathfrak{M}_R \frac{zf(z)}{z-z_0} = 1 + \mathfrak{M}_R \frac{z_0 f(z)}{z} + \ldots + \mathfrak{M}_R \frac{z_0^{n-1} f(z)}{z^{n-1}} + z_0^n \mathfrak{M}_R \frac{f(z)}{z^{n-1}(z-z_0)}.$$

Ist $F(R)$ die obere Grenze von $f(z)$ auf der Kreislinie R, so ist

$$abs\,\mathfrak{M}_R \frac{z_0^n f(z)}{z^{n-1}(z-z_0)} < \frac{abs\,z_0^n}{R^{n-1}} \frac{F(R)}{abs\,z - abs\,z_0},$$

weil nach § 13 $abs\,(z-z_0) > abs\,z - abs\,z_0$ ist. Dieser Ausdruck convergirt für wachsende n gegen Null. Demnach ist $(r<R)$

$$\mathfrak{M}_R \frac{zf(z)}{z-z_0} = \Sigma z_0^m \mathfrak{M}_R \frac{f(z)}{z^m} = \Sigma z_0^m \mathfrak{M}_r f(z)\, z^{-m},$$

und da die Reihe bis in jede beliebige Nähe des Kreises R, d. h. so lange convergirt, als $abs\,z_0 < R$ ist, so ist sie (§ 62) in demselben Gebiet absolut convergent.

Ganz auf dieselbe Weise findet man $(r > R_0)$, dass

$$\mathfrak{M}_{R_0} \frac{zf(z)}{z-z_0} = -\Sigma z_0^{-m-1} \mathfrak{M}_{R_0} z^{m+1} f(z) = -\Sigma z_0^{-m-1} \mathfrak{M}_r z^{m+1} f(z)$$

absolut convergent ist, so lange $abs\,z_0 > R_0$ bleibt. Für $R_0 = 0$ verschwindet offenbar dieser Ausdruck, wenn $f(0)$ endlich ist.

Setzt man $f(z)=1$ und beachtet, dass $\mathfrak{M}_r z^{\pm n} = 0$ ist, wenn n nicht verschwindet, so folgt für $R_0 < abs\,z_0 < R$

$$\mathfrak{M}_R \frac{z}{z-z_0} = \Sigma z_0^m \mathfrak{M}_r z^{-m} = 1, \quad \mathfrak{M}_{R_0} \frac{z}{z-z_0} = -\Sigma z_0^{-m-1} \mathfrak{M}_r z^{m+1} = 0.$$

Dies in die oben gewonnene Gleichung

$$f(z_0)\,\mathfrak{M}_R \frac{z}{z-z_0} - f(z_0)\,\mathfrak{M}_{R_0} \frac{z}{z-z_0} = \mathfrak{M}_R \frac{zf(z)}{z-z_0} - \mathfrak{M}_{R_0} \frac{zf(z)}{z-z_0}$$

eingesetzt, ergiebt, wenn man z_0 durch z ersetzt und r zwischen R_0 und R willkürlich annimmt,

$$f(z) = \Sigma z^m \mathfrak{M}_r z^{-m} f(z) + \Sigma z^{-m-1} \mathfrak{M}_r z^{m+1} f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}^{(m)} z^m \mathfrak{M}_r z^{-m} f(z),$$

und wenn $f(0)$ endlich und R_0 Null ist $(r \leq R)$

$$f(z) = \Sigma z^m \mathfrak{M}_r z^{-m} f(z).$$

Die wahren Convergenzkreise. Ist die Function $f(z)$ zwischen den beiden um Null geschlagenen Kreisen $R_0\ R$ überall eine eindeutige reguläre analytische, so giebt es eine Darstellung derselben von der Form

$$f(z) = \Sigma a_m z^m + \Sigma a_{-m-1} z^{-m-1},$$

die man die Laurent'sche Reihe nennt, und die absolut convergent ist, so lange $R_0 < abs\, z < R$ ist. Die Begrenzung des Convergenzgebietes kann demnach nicht aus Kreislinien $R_0\ R$ bestehen, auf denen $f(z)$ regulär ist, weil dann nach § 118 sich noch zwei Kreise $R_0' < R_0$, $R' > R$ finden lassen, so dass $f(z)$ zwischen R_0' und R' analytisch ist. Die Convergenzkreise müssen daher nothwendig durch einen **singulären** Punct, der Function $f(z)$ hindurchgehen. Ist $R_0 = 0$, so ist $f(z) = \Sigma a_m z^m$, und R muss durch einen singulären Punct gehen.

Dass Analoges statthat für eine Entwickelung, die nach Potenzen von $z - a$ fortschreitet, bedarf keiner weiteren Erörterung. — Ist $f(z)$ im Puncte Null singulär, so kann möglicher Weise R_0 beliebig klein werden, aber doch nicht Null sein, und die Reihe mit negativen Exponenten fällt nicht fort, wie in dem Falle

$$e^{1:z} = \Sigma z^{-m} : fac\, m.$$

§ 121. Nun ist noch der wichtige Satz zu beweisen, dass eine Function $f(z)$, wenn sie durch eine auf- und absteigende Reihe darstellbar ist, sich nur auf eine Weise in diese Form bringen lässt. Es sei in einem Ringgebiete

$$\begin{aligned} f(z) &= \ldots + A_{-n} z^{-n} + \ldots + A_{-1} z^{-1} + A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n + \ldots \\ &= \ldots + B_{-n} z^{-n} + \ldots + B_{-1} z^{-1} + B_0 + B_1 z + \ldots + B_n z^n + \ldots \end{aligned}$$

oder es sei, was dasselbe ist, in diesem Gebiete

$$\ldots + C_{-n} z^{-n} + C_{-n+1} z^{-n+1} + \ldots + C_{-1} z^{-1} + C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots + C_n z^n + \ldots = \varphi(z)$$

identisch Null, wenn $C_0 = A_0 - B_0$, $C_1 = A_1 - B_1$, .., $C_n = A_n - B_n$, .., $C_{-n} = A_{-n} - B_{-n}$, .. gesetzt wird. — Wir multipliciren die letzte Reihe mit z^n, worin n positiv oder negativ sein kann, und bilden den Ausdruck $\mathfrak{M}_r\, z^{-n} \varphi(z)$, der Null sein muss, weil $\varphi(z)$ identisch verschwindet, während die Kreislinie r im Convergenzgebiete liegt. Aus der Reihe aber finden wir, dass dieser Mittelwerth C_n ist, und es muss demnach C_n für jedes n Null, $A_n = B_n$ sein, w. z. b. w.

§ 122. Einige Sätze über ganze und gebrochene transcendente Functionen. Nach den oben erbrachten Sätzen kann man nun eine ganze transcendente Function dahin definiren, dass sie in der ganzen z-Ebene, ausgenommen natürlich im unendlich fernen Puncte derselben, regulär sei. Und wenn eine überall reguläre analytische Function $f(z)$ überall endlich bleibt, d. h. wenn für $abs\, f(z)$ eine obere Grenze angegeben werden kann, die für keinen Werth von z überstiegen wird, so ist $f(z)$ eine Constante. Verschwände die ganze Function $A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n = g(z)$ für keinen Werth von z, so wäre $1 : g(z)$ überall regulär und endlich, also constant. Da dies nicht möglich ist, so fliesst daraus noch einmal der Hauptsatz der Algebra, dass eine Gleichung $g(z) = 0$ Lösungen haben muss.

Ein Product ganzer transcendenter Functionen ist im Allgemeinen eine eben solche Function, zuweilen kann es auch eine gemeine ganze Function sein, z. B. $e^z . e^{-z} = 1$. Eine Summe ganzer transcendenter Functionen ist ebenso eine ganze transcendente Function. Beide Sätze gewinnt man aus der Definition dieser Functionen durch überall convergente Reihen. Eine gebrochene transcendente Function, ein Quotient zweier ganzen transcendenten Functionen, hat nur ausserwesentlich singuläre Stellen, Pole, und ist nur im Unendlichen wesentlich singulär.

Wird eine gebrochene transcendente Function für keinen endlichen Werth von z unendlich gross, so ist sie eine ganze transcendente Function. Wird sie nur in einer endlichen Anzahl von Puncten unendlich gross, so ist sie der Quotient aus einer ganzen transcendenten Function und einer ganzen Function.

Lässt man absolut z über alle Grenzen wachsen, so lässt sich $arc\, z$ stets so bestimmen und der absolute Betrag in solcher Art ins Unbegrenzte vermehren, dass die Function den beliebig gegebenen Werth A annimmt. Es sei $f(z)$ die Function, so verschwindet die ganze transcendente Function $f(z)-A$ entweder in einer Folge $z=a_1, a_2, a_3, \ldots$, deren Terme über alle Grenzen wachsen, und man braucht dann nur für z die wachsenden Werthe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ zu setzen, um den Werth $f(z)=A$ zu erhalten, oder $f(z)-A$ verschwindet nur in einer endlichen Anzahl von Puncten, etwa so und da, wo die ganze Function $F(z)$ verschwindet. Dann ist $[f(z)-A]:F(z)$ und ebenso $F(z):[f(z)-A]$ eine ganze transcendente Function, und es muss (§ 115) $F(z):[f(z)-A]$ bei einer bestimmten Art des Anwachsens von z, über alle Grenzen wachsen, und zwar in viel stärkerem Maasse als $F(z)$. Mithin muss $f(z)-A$ bei einer gewissen Art des Anwachsens von z verschwinden, $f(z)$ gleich A werden. Eine ganze transcendente Function nimmt also im Unendlichen jedweden Werth an, und besitzt dort eine wesentlich singuläre Stelle.

Lägen von den Puncten $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, in denen $f(z)-A$ verschwindet, unendlich viele in einem endlichen Gebiete, so wäre eine Grenzzahl a vorhanden, in deren Umgebung $f(z)-A$ unendlich oft verschwände. Die Function müsste dann, da sie in a analytisch ist, identisch verschwinden.

Die Facultät. Unendliche Partialbruchreihen. Unendliche Producte.

Der Ausdruck $1.2.3\ldots(n-1).n = fac\, n$ ist bei der Behandlung der elementaren Functionen häufig vorgekommen. Man hat deshalb schon frühzeitig versucht, die Facultät so zu verallgemeinern, dass für n beliebige complexe Zahlen z gesetzt werden dürfen, und die Theorie der Euler'schen Integrale gab dazu noch weitere Veranlassung. Man glaubte in der Eigenschaft der Facultät $fac(n+1) = (n+1)\, fac\, n$ eine bestimmende Functionalgleichung gefunden zu haben. Da aber diese Eigenschaft zur völligen Bestimmung der Facultät nicht ausreicht, so sind bei älteren Untersuchungen dieser Function manche Irrthümer untergelaufen, bis Weierstrass im 51. Bande des Crelle'schen Journals seine strengen Untersuchungen über diesen Gegenstand gab, die auch sonst von principieller Bedeutung waren, weil sie eben die Meinung, die schon Lagrange hegte, dass die analytischen Functionen durch Potenzreihen zu definiren seien, zum durchschlagenden Princip erhoben.

§ 123. Darstellung der Facultät durch ein unendliches Product. Wir definiren die Facultät durch eine Functionalgleichung und zwei Nebenbestimmungen

$$\text{I)}\quad fac(z+1) = (z+1)\, fac\, z, \qquad \text{II)}\quad lim\, fac(z+\omega):\omega^z fac\, \omega = 1, \quad fac\, 0 = 1,$$

wo sich das limes-Zeichen auf positiv über alle Grenzen wachsende ω bezieht, und für ω^z der Hauptwerth zu nehmen ist. Ist z eine ganze positive Zahl und ω ebenfalls, so ist

$$\frac{f(z+\omega)}{\omega^z fac\, \omega} = \frac{1.2.3\ldots\omega.\omega+1\ldots\omega+z}{1.2.3\ldots\omega.\omega^z} = 1+\frac{1}{\omega}\cdot 1+\frac{2}{\omega}\cdot 1+\frac{3}{\omega}\cdots 1+\frac{z}{\omega},$$

und dieser Ausdruck nähert sich für wachsende ω dem Werthe Eins. Ist n eine ganze positive Zahl, so ergeben sich aus I) unmittelbar die Gleichungen

$$\frac{fac(z+n)}{fac\, z} = 1+z\cdot 2+z\cdot 3+z\cdots n+z, \qquad \frac{fac(z+n)\,.\,fac\,0}{fac\, n\; fac\, z} = 1+z\cdot 1+\tfrac{1}{2}z\cdot 1+\tfrac{1}{3}z\cdots 1+\frac{z}{n},$$

$$\frac{fac(z+n)n^{-z}}{fac\,z\,fac\,n} = e^{zM_n}\cdot(1+z)e^{-z}\cdot(1+\tfrac{1}{2}z)e^{-\frac{1}{2}z}\cdot(1+\tfrac{1}{3}z)e^{-\frac{1}{3}z}\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}},$$

worin

$$M_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-lg\,n$$

ist. Lässt man n über alle Grenzen wachsen, so geht M_n in die Mascheroni'sche Constante über und aus II) folgt

$$\frac{1}{fac\,z} = e^{Mz}\cdot(1+z)e^{-z}\cdot(1+\tfrac{1}{2}z)e^{-\frac{1}{2}z}\cdot(1+\tfrac{1}{3}z)e^{-\frac{1}{3}z}\cdots\left(1+\frac{1}{\mu}z\right)e^{-\frac{1}{\mu}z}\cdots$$

und da das unendliche Product für jeden Werth von z absolut convergent ist, so ist, was wir noch näher erweisen, $1:fac\,z$ eine ganze transcendente Function. Um die Convergenz zu erweisen, setzen wir den μ^{ten} Factor in die Form

$$\left(1+\frac{1}{\mu}z\right)e^{-\frac{z}{\mu}} = \left(1+\frac{1}{\mu}z\right)\left(1-\frac{z}{\mu}+\frac{1}{fac\,2}\frac{z^2}{\mu^2}-\frac{1}{fac\,3}\frac{z^3}{\mu^3}+\frac{1}{fac\,4}\frac{z^4}{\mu^4}-.+..\right)$$

$$= 1-\tfrac{1}{2}\frac{z^2}{\mu^2}+\frac{1}{fac\,2}\tfrac{2}{3}\frac{z^3}{\mu^3}-\frac{1}{fac\,3}\tfrac{3}{4}\frac{z^4}{\mu^4}+\frac{1}{fac\,4}\tfrac{4}{5}\frac{z^5}{\mu^5}-.+..,$$

was eine für jedes z absolut convergente Reihe ist, die in die Form geschrieben werden kann

$$1-\tfrac{1}{2}\frac{z^2}{\mu^2}(1+\zeta_\mu),$$

worin ζ_μ für wachsende μ gegen Null convergirt. Aus dieser Form des μ^{ten} Factors folgt, dass das Product für jedes z absolut convergent ist (vergl. § 25).

Um nun nachzuweisen, dass das Product eine ganze transcendente Function von z ist, scheint es das Bequemste zu sein, die Theorie des Logarithmus zu Hülfe zu nehmen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
-lg\,fac\,z &= Mz+[lg(1+z)-z]+[lg(1+\tfrac{1}{2}z)-\tfrac{1}{2}z]+\ldots+\left[lg\left(1+\frac{1}{n}z\right)-\frac{1}{n}z\right]+\ldots\\
&= Mz+[lg(1+z)-z]+\ldots+\left[lg\left(1+\frac{1}{\mu}z\right)-\frac{1}{\mu}z\right]\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\mu+1}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{\mu+1}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{z}{\mu+1}\right)^4+\frac{1}{5}\left(\frac{z}{\mu+1}\right)^5-.+..\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\mu+2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{\mu+2}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{z}{\mu+2}\right)^4+\frac{1}{5}\left(\frac{z}{\mu+2}\right)^5-.+..\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\mu+3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{\mu+3}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{z}{\mu+3}\right)^4+\frac{1}{5}\left(\frac{z}{\mu+3}\right)^5-.+..\\
&\quad-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

So lange nun $abs\,z<\mu+1$, und nicht gerade gleich $-1, -2, .., -\mu$ ist, (wo die Logarithmen unendlich werden,) convergirt diese Doppelreihe, wenn zuerst horizontal und dann vertical summirt wird, auch noch dann, wenn für jeden ihrer Terme der absolute Betrag gesetzt wird, sie ist absolut convergent, und man kann sie beliebig umordnen, in eine einfache Potenzreihe umformen, so dass also

$$\begin{aligned}
-lg\,fac\,z &= Mz+[lg(1+z)-z]+[lg(1+\tfrac{1}{2}z)-\tfrac{1}{2}z]+\ldots+\left[lg\left(1+\frac{1}{\mu}z\right)-\frac{1}{\mu}z\right]\\
&\quad+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\ldots+a_mz^m+\ldots
\end{aligned}$$

ist, worin die Reihe $a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ so lange absolut convergirt, als $abs\, z < \mu + 1$ ist. Mithin ist

$$e^{a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \ldots} = A_0 + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots$$

so lange convergent (§ 71), als $abs\, z < \mu + 1$ ist. Andererseits ist

$$e^{Mz}(1+z)e^{-z} \cdot (1 + \tfrac{1}{2}z)e^{-\frac{1}{2}z} \ldots \left(1 + \frac{1}{\mu}z\right) e^{-\frac{z}{\mu}} = B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots$$

als Product überall convergenter Reihen (§ 70) überall convergent, und somit endlich ist

$$\frac{1}{fac\, z} = (A_0 + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots)(B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \ldots$$

convergent, so lange $abs\, z < \mu + 1$ ist, d. h. da μ beliebig gross genommen werden kann, überall convergent[1]); die Function ist eine ganze transcendente, w. z. b. w.

Gauss hatte schon $1 : fac\, z$ durch den Grenzwerth eines Productes gegeben, nämlich in der Form

$$\frac{1}{fac\, z} = \lim_{n=\infty} \frac{z+1}{1} \cdot \frac{z+2}{2} \cdots \frac{z+n}{n} \cdot n^{-z},$$

und es ist diese Form für manche Untersuchungen recht bequem. Weierstrass verwandelte diesen Grenzwerth dadurch in ein unendliches Product, dass er den Factor $n^{-z} = e^{-z\, lg\, n}$ in

$$e^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n} - lg\, n\right) z - \frac{z}{2} - \frac{z}{3} \cdots - \frac{z}{n}} = e^{M_n z} \cdot e^{-z} \cdot e^{-\frac{1}{2}z} \cdot e^{-\frac{1}{3}z} \cdots e^{-\frac{1}{n}z}$$

zerlegte und die Ausdrücke $\left(1 + \frac{1}{\mu}z\right)$ und $e^{-\frac{z}{\mu}}$ zu einem Factor (Primfactor) vereinigte. Das Principielle in dieser Umformung wird später noch besprochen werden.

Wir notiren noch die für ein ganzes positives m gültigen Gleichungen

$$fac(z+m) = (z+m)(z+m-1)(z+m-2)\ldots(z+1) fac\, z, \quad fac(z-m) = fac\, z : z(z-1)\ldots(z-m+1)$$

$$\lim_{z=0} z\, fac(z-m) = \lim_{z=-m} (z+m) fac\, z = (-1)^{m-1} : 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-2)(m-1).$$

Die Binomialcoëfficienten lassen sich ganz allgemein durch Facultäten darstellen

$$z_m = fac\, z : fac(z-m)\, fac\, m.$$

§ 124. Die Function $\Psi(z)$. Gauss definirt eine Function $\Psi(z)$ durch folgende unendliche Partialbruchreihe

$$\Psi(z) - \Psi(o) = \Psi(z) + M = \Sigma\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{z+m+1}\right) = z\Sigma\frac{1}{(m+1)(z+m+1)},$$

die, abgesehen von ihren Polen $z = -1, -2, -3, \ldots -n, \ldots$ überall absolut convergent ist. Die Convergenz verzögert sich für wachsende z und hört für $\lim z = \infty$ ganz auf. Will man das Verhalten der Function $\Psi(z)$ für wachsende z kennen lernen, so muss man einige Transformationen vornehmen. Man setze

$$\begin{aligned}
\Psi(z) &= -M + lg\, z + \Sigma\left[\frac{1}{m+1} - lg\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)\right] - \Sigma\left[\frac{1}{z+m+1} + lg\left(1 - \frac{1}{z+m+1}\right)\right] \\
&= lg\, z - \Sigma\left[\frac{1}{z+m+1} + lg\left(1 - \frac{1}{z+m+1}\right)\right] \\
&= lg\, z + \Sigma\left(\frac{1}{2}\frac{1}{(z+m+1)^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(z+m+1)^3} + \frac{1}{4}\frac{1}{(z+m+1)^4} + \ldots\right).
\end{aligned}$$

[1]) Die von E. Heine wirklich aufgestellte Reihe enthält bestimmte Integrale in den Coëfficienten, weshalb sie hier nicht gebracht werden kann. Für das Functionselement muss hier eben das überall convergente unendliche Product eintreten.

Die letzte Summe nähert sich, wenn z nicht auf einen Pol fällt, für wachsende z der Null beliebig. Wir schneiden von der z-Ebene ein Stück T dadurch ab, das wir durch einen Punct $-Q$ ($z = -Q$) der negativ-reellen Achse eine Parallele zur imaginären Achse ziehen, und unter T das Stück der Ebene verstehen, welches die positiv-reelle Achse enthält, von der eben gezogenen Parallele, und endlich von dem Stücke der negativ-reellen Achse, das zwischen 0 und $-Q$ liegt, begrenzt ist. Das letzte Stück fügen wir der Begrenzung hinzu, damit der Hauptwerth von $lg\,z$ oder von $z^a = e^{a\,lg\,z}$ in T eine einändrige Function sei. Wächst z in diesem Gebiet T über alle Grenzen, so ist

$$lim\,[\Psi(z) - lg(z)] = 0. \quad \Psi(z) = lg(z) + H(z), \; lim\, H(z) = 0.$$

Es ist leicht, $H(z)$ noch näher zu bestimmen, z. B. wenn man nur das erste Glied der obigen Reihe $\Sigma 1 : 2(z+m+1)^2$ weiter behandelt, die Formel zu finden

$$\Psi(z) = lg\,z + \frac{1}{2z} + \frac{\Theta(z)}{z},$$

in der $\Theta(z)$ in T für wachsende z verschwindet (semiconvergente Reihen), es ist dies aber für unsere Zwecke nicht nöthig.

§ 125. Der Grenzwerth $fac(z+t) : z^t\, fac\,z$ für wachsende z. Dieser Grenzwerth wurde für positiv reell wachsende z mit zur Definition von $fac\,t$ benutzt. Wir beweisen jetzt a posteriori, dass er Eins sei, wenn z in dem im vorigen Paragraphen bestimmten Gebiete T beliebig über alle Grenzen wächst. Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{z^t\, fac\,z}{fac(z+t)} &= e^{t\,lg\,z + Mt} \cdot \frac{(1+z+t)e^{-(z+t)}}{(1+z)e^{-z}} \cdot \frac{[1+\frac{1}{2}(z+t)]e^{-\frac{1}{2}(z+t)}}{(1+\frac{1}{2}z)e^{-\frac{1}{2}z}} \cdot \frac{[1+\frac{1}{3}(z+t)]e^{-\frac{1}{3}(z+t)}}{(1+\frac{1}{3}z)e^{-\frac{1}{3}z}} \cdots \\
&= e^{t\,lg\,z + tM} \cdot \left(1 + \frac{t}{z+1}\right)e^{-t} \cdot \left(1 + \frac{t}{z+2}\right)e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \left(1 + \frac{t}{z+3}\right)e^{-\frac{1}{3}t} \cdots \\
&= e^{t\,lg\,z + tM} \cdot \left(1 + \frac{t}{z+1}\right)e^{-\frac{t}{z+1} + t\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{1}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t}{z+2}\right)e^{-\frac{t}{z+2} + t\left(\frac{1}{z+2} - \frac{1}{2}\right)} \cdots \\
&= e^{t\,lg\,z - t\Psi(z)} \cdot \left(1 + \frac{t}{z+1}\right)e^{-\frac{t}{z+1}} \cdot \left(1 + \frac{t}{z+2}\right)e^{-\frac{t}{z+2}} \cdot \left(1 + \frac{t}{z+3}\right)e^{-\frac{t}{z+3}} \cdots
\end{aligned}$$

Das unendliche Product ist absolut convergent, und nähert sich deshalb, wenn z in T über alle Grenzen wächst, dem Werthe Eins, der Factor $e^{t[lg\,z - \Psi(z)]} = e^{t\,H(z)}$ nähert sich nach dem vorigen Paragraphen $[lim\, H(z) = 0]$ ebenfalls dem Werthe Eins, womit unser Satz erwiesen ist.

§ 126. Die Stirling'sche Formel. Um die Stirling'sche Formel zu erweisen, die das Verhalten von $fac\,z$ für unendliche z in T bestimmt, gehen wir von der Identität aus, in der die vieldeutigen Functionen, den Hauptwerth vorausgesetzt, auf T beschränkt, also einändrig sind:

$$\begin{aligned}
& lg\left(\frac{z}{z+1}\right)^{z+1} + lg\left(\frac{z+1}{z+2}\right)^{z+2} + lg\left(\frac{z+2}{z+3}\right)^{z+3} + \ldots + lg\left(\frac{z+n-1}{z+n}\right)^{z+n} \\
&= (z+1)\,lg\left(1 - \frac{1}{z+1}\right) + (z+2)\,lg\left(1 - \frac{1}{z+2}\right) + \ldots + (z+n)\,lg\left(1 - \frac{1}{z+n}\right) \\
&= (z+1)\,lg\,z - (z+n)\,lg(z+n) + lg(z+1) + lg(z+2) + lg(z+3) + \ldots + lg(z+n-1).
\end{aligned}$$

Um die Richtigkeit der Gleichung $lg\,a^b = b\,lg\,a$ zu sichern, wollen wir uns zunächst auf positiv reelle z beschränken. Hieraus folgt, wenn wir die Formel für $z = \zeta$ noch einmal bilden und dann subtrahiren,

$$lg\frac{z+1}{\zeta+1}-(z-\zeta)+lg\frac{1+\frac{1}{2}z}{1+\frac{1}{2}\zeta}-\tfrac{1}{2}(z-\zeta)+..+lg\left(\frac{1+\frac{z}{n-1}}{1+\frac{\zeta}{n-1}}\right)-\frac{z-\zeta}{n-1}$$

$$=(\zeta+1)lg\,\zeta-(z+1)lg\,z-(\zeta+n)lg(\zeta+n)+(z+n)lg(z+n)$$

$$+\sum_{\varrho=1}^{\varrho=n}\left[(z+\varrho)lg\left(1-\frac{1}{z+\varrho}\right)-(\zeta+\varrho)lg\left(1-\frac{1}{\zeta+\varrho}\right)-\frac{z-\zeta}{\varrho}\right]$$

$$=(\zeta+1)lg\,\zeta-(z+1)lg\,z-\zeta\left[lg(\zeta+n)-1-\frac{1}{2}-..-\frac{1}{n-1}\right]+z\left[lg(z+n)-1-\frac{1}{2}-..-\frac{1}{n-1}\right]$$

$$+lg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n-lg\left(1+\frac{\zeta}{n}\right)^n+\sum_{\varrho=1}^{\varrho=n}\left[(z+\varrho)lg\left(1-\frac{1}{z+\varrho}\right)-(\zeta+\varrho)lg\left(1-\frac{1}{\zeta+\varrho}\right)\right].$$

Setzen wir $\Omega(z)=\Sigma\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(z+m)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{(z+m)^3}+\frac{1}{6}\frac{1}{(z+m)^4}+..\right]$ und lassen n zur Grenze $+\infty$ übergehen, so erhalten wir nach Entwickelung von $lg\left(1-\frac{1}{z+\varrho}\right)$, $lg\left(1-\frac{1}{\zeta+\varrho}\right)$ in Reihen, die nach Potenzen von $1:(z+\varrho)$ bez. $1:(\zeta+\varrho)$ fortschreiten, und mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$-lg\,fac\,z=Mz+lg(1+z)-z+lg(1+\tfrac{1}{2}z)-\tfrac{1}{2}z+lg(1+\tfrac{1}{3}z)-\tfrac{1}{3}z+.-..,$$

$$lim\,lg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=z,\quad lim\,n=\infty,$$

die Beziehung

$$lg\,fac\,\zeta-lg\,fac\,z=(\zeta+1)lg\,\zeta-(z+1)lg\,z+z-\zeta+\Sigma\left[(z+m)lg\left(1-\frac{1}{z+m}\right)-(\zeta+m)lg\left(1-\frac{1}{\zeta+m}\right)\right]$$

$$=(\zeta+1)\,lg\,\zeta-(z+1)\,lg\,z+z-\zeta-\tfrac{1}{2}\,\Psi(\zeta)+\tfrac{1}{2}\,\Psi(z)-\Omega(z)+\Omega(\zeta).$$

Der Ausdruck zerfällt in zwei Theile, von denen der eine nur von z, der andere nur von ζ abhängt. Man kann deshalb alles, was von ζ abhängt in einer (von z unabhängigen) additiven Constanten zusammenfassen und schreiben

$$-lg\,fac\,z=-(z+1)\,lg\,z+z+\tfrac{1}{2}\,\Psi(z)-\Omega(z)-lg\,c.$$

In dieser Gleichung darf nun z, da alle vorkommenden Ausdrücke in T eindeutige analytische Functionen sind, auf jeden in T liegenden Punct fallen. Mit Rücksicht auf die im vorigen Paragraphen gewonnenen Resultate dürfen wir weiter schreiben

$$-lg\,fac\,z=-(z+\tfrac{1}{2})lg\,z+z+\tfrac{1}{2}H(z)-\Omega(z)-lg\,c,$$

worin $H(z)$ $\Omega(z)$ Functionen sind, die für wachsende z verschwinden. Daraus fliesst die in T gültige Stirling'sche Formel

$$fac\,z=cz^z\sqrt{z}\,e^{-z}.e^{\Omega(z)-\frac{1}{2}H(z)},\quad lim\,\Omega(z)=lim\,H(z)=0.$$

Die Constanten c werden wir, immer den Hauptwerth der vieldeutigen Functionen voraussetzend, im nächsten Paragraphen als gleich $\sqrt{2\pi}$ ermitteln, und das Gültigkeitsgebiet dieser und einer früheren Formel erweitern.

§ 127. Zusammenhang zwischen der Facultät und dem Sinus. Die Function

$$\varphi(z)=\frac{1}{fac(-z)\,fac(z-1)}=\frac{z}{fac(-z)\,fac\,z},\quad\varphi(-z)=-\varphi(z)$$

ist eine ungerade, ganze transcendente Function. Da

$$\varphi(z+1) = 1 : fac\,(-1-z)\; fac\,z = \varphi(-z) = -\varphi(z)$$

ist, so ist für ein ganzzahliges m $\varphi(z \pm 2m) = \varphi(z)$, und also $\varphi(z)$ eine periodische Function mit dem Periodicitätsmodul 2. Sie verschwindet für $z = \pm m$ und zwar so, dass $\varphi(z) : (z-m)$ für $lim\,z = m$ sich einem bestimmten von Null verschiedenen Werthe nähert, oder wie man sagt, in der ersten Ordnung, und wie aus der Darstellung durch ein unendliches convergentes Produkt folgt (§ 23), nur für diese Werthe. Dieselben Eigenschaften hat die Function $sin\,z\pi$, so dass

$$\psi(z) = 1 : sin\,z\pi\; fac\,(-z)\; fac\,(z-1) = \varphi(z) : sin\,z\pi$$

eine in der ganzen z-Ebene reguläre, also (§ 122) eine ganze transcendente periodische Function mit der Periode 1 ist. Wir erweisen, dass sie eine Constante ist. Der absolute Betrag einer ganzen transcendenten Function kann nicht für alle z unter einer endlichen bestimmten Grenze bleiben, wenn sie nicht eine Constante ist (§ 115). Nun werde $\alpha + yi$ für z gesetzt, wo $-\frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$ ist, y aber lassen wir positiv über alle Grenzen wachsen. Dann darf in dem Ausdrucke

$$\varphi(z) = z : fac(-z)\; fac\,z$$

die Stirling'sche Formel sowohl für $fac\,(-z)$ als auch für $fac\,z$ angewandt werden, weil nur der imaginäre Theil von z über alle Grenzen wachsen soll. Es ist deshalb, wenn wir zur Abkürzung $\frac{1}{2}\Pi(z) - \Omega(z) + \frac{1}{2}\Pi(-z) - \Omega(-z) = Z(z)$ setzen

$$\varphi(z) = \frac{z}{fac\,z\; fac(-z)} = \frac{i}{c^2}\, e^{z\,[lg\,(-z) - lg\,z] - Z(z)} = \frac{i}{c^2}\, e^{-i\pi z - Z(z)}$$

$$\psi(z) = \frac{1 : sin\,z\pi}{fac\,z\; fac\,z-1} = \frac{-2}{c^2}\,\frac{e^{-i\pi z}\,.\,e^{-Z(z)}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = -\frac{2}{c^2}\,\frac{e^{-Z(z)}}{e^{2i\pi z}-1}.$$

Lassen wir in $z = \alpha + yi$ y positiv über alle Grenzen wachsen, so erhalten wir

$$lim\,\psi(z) = 2 : c^2.$$

Für endliche Werthe von $abs\,z$ ist $abs\,\psi(z)$ seiner Natur nach endlich, bleibt unterhalb einer bestimmten Grenze, und in dem Periodenstreifen, dessen zur imaginären Achse parallele gerade Begrenzungslinien durch die Puncte $z = -\frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$ gehen, nähert sich $\psi(z)$, wenn der imaginäre Theil von z positiv über alle Grenzen wächst, und, da $\psi(z)$ gerade ist, ebenso wenn der imaginäre Theil von z negativ über alle Grenzen wächst, einem festen Werthe $2 : c^2$ beliebig, bleibt also im Periodenstreifen, und mithin wegen der Periodicität überall unter einer bestimmten Grenze. Mithin ist $\psi(z)$ eine Constante $2 : c^2$.

Wir gewinnen aus der Darstellung von $fac\,z$ durch ein unendliches Product die Formel

$$\frac{2}{c^2}\, sin\,z\pi = \frac{z}{fac\,z\; fac(-z)} = z(1-z^2)\,(1-\frac{1}{2^2}z^2)\left(1-\frac{1}{3^2}z^2\right)\left(1-\frac{1}{4^2}z^2\right)\ldots,$$

woraus nach Division mit z für $z = 0$ folgt

$$2\pi : c^2 = 1, \quad c = \sqrt{2\pi}$$

$$\frac{1}{fac(-z)\, fac(z-1)} = \frac{z}{fac(-z)\; fac(z)} = \frac{sin\,z\pi}{\pi}.$$

Dass in der Stirling'schen Formel $c = \sqrt{2\pi}$ positiv zu nehmen ist, wird leicht erkannt. Damit ist zugleich die Darstellung von $sin\,z\pi$ durch ein überall absolut convergentes Product gefunden.

Es mag noch ein zweiter Weg (der in der ersten Auflage betreten war,) angedeutet werden, wie man zu dieser Productdarstellung und damit zu dem Zusammenhang zwischen der Facultät und dem Sinus gelangen kann. Im § 101 wurde gefunden, dass $\sin z\pi$ eine ganze Function n^{ten} Grades von $\sin(z\pi : n)$ sei. Die Nullstellen dieser Function sind bekannt. Setzt man zur Abkürzung $\pi : n = \omega$, so ist für ein ungerades n

$$\sin z\pi = n \sin z\omega \left(1 - \frac{\sin^2 z\omega}{\sin^2 \omega}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 z\omega}{\sin^2 2\omega}\right) \cdots \left(1 - \frac{\sin^2 z\omega}{\sin^2 \frac{1}{2}(n-1)\omega}\right).$$

Lässt man hierin n über alle Grenzen wachsen, wodurch ω gegen Null convergirt, so gelangt man zu obigem Producte. Die strenge Durchführung des Grenzüberganges erfordert einige Aufmerksamkeit. Es kann aber bemerkt werden, dass dieser Satz zum Ziele führt ohne Kenntnisse des Satzes über ganze transcendente Functionen im § 122, der oben benutzt wurde. Aus der Facultät-Sinus-Beziehung folgt für $z = \frac{1}{2}$

$$\pi = fac\left(-\frac{1}{2}\right) fac\left(-\frac{1}{2}\right), \quad fac\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

worin die Wurzel positiv zu nehmen ist, weil $fac\left(-\frac{1}{2}\right)$ aus lauter positiven Factoren besteht.

Man beweist leicht das Theorem von Gauss, in welchem n eine ganze Zahl ist,

$$\frac{n^{nz} fac\, z \,.\, fac\left(z - \frac{1}{n}\right) . fac\left(z - \frac{2}{n}\right) \cdots fac\left(z - \frac{n-1}{n}\right)}{fac\,(nz)}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{n}} \cdots \frac{\pi}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}} = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\sqrt{n}}.$$

§ 128. Das unendliche Product für $\cos(z-h)\pi$. Die Darstellung von $\cos z\pi$ durch ein Product erhält man am einfachsten aus der Gleichung $\frac{1}{2}\sin 2z\pi : \sin z\pi = \cos z\pi$, welche liefert

$$\cos z\pi = \left(1 - \frac{4z^2}{1.1}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{3.3}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{5.5}\right) \cdots \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right) \cdots$$

Schreibt man hierfür

$$\lim_{n=\infty} \prod_{m=-n}^{m=n+1} \left(1 - \frac{2z}{2m-1}\right) = \lim_{n=\infty} \prod_{m=-n}^{m=n+1} \frac{2m-1-2z}{2m-1} = \lim_{n=\infty} \prod_{m=-n}^{m=n+1} \frac{2m-1+2z}{2m-1},$$

und setzt $z - h$ für z, so ergiebt sich

$$\cos(z-h)\pi = \lim_{n=\infty} \prod_{m=-n}^{m=n+1} \frac{2m-1+2h-2z}{2m-1} = \lim_{n=\infty} \prod_{m=-n}^{m=n+1} \frac{2m-1+2h}{2m-1} \cdot \left(1 - \frac{2z}{2m-1+2h}\right)$$

$$\frac{\cos(z-h)\pi}{\cos h\pi} = \lim_{n=\infty} \prod_{m=-n}^{m=n+1} \left(1 - \frac{2z}{2m-1+2h}\right).$$

Diese Producte mit linearen Factoren in z sind nur bedingt convergent, es muss jedem Factor $1 - \frac{2z}{2m-1+2h}$ ein Factor $1 - \frac{2z}{1-2m+2h}$ zugesellt sein, weshalb diese Producte in Form von Grenzwerthen geschrieben sind. Geht die Zahl m in negativer Richtung in anderer Weise zur Grenze ∞ über, als in positiver, so kann der Grenzwerth, wenn es sich nicht nur um eine endliche Anzahl Factoren handelt, ein ganz anderer sein. Betrachten wir z. B. $h = 0$ annehmend, das Product

$$P(z) = \lim_{n=\infty} \prod_{m=-n}^{m=(n+1)(p+1)} \left(1 - \frac{2z}{2m-1}\right) = \lim_{n=\infty} \prod_{m=-n}^{m=n+1} \left(1 - \frac{2z}{2m-1}\right) \cdot \prod_{m=n+2}^{m=(n+1)(p+1)} \left(1 - \frac{2z}{2m-1}\right)$$

$$= \cos z\pi \,.\, \lim_{n=\infty} \prod_{m=1}^{m=pn} \left(1 - \frac{2z}{2m+1+2n}\right)$$

$$= \cos z\pi \lim_{n=\infty} e^{-2z \sum\limits_{m=1}^{m=pn} \frac{1}{2m+1+2n}} \prod_{m=1}^{m=pn} \left(1 - \frac{2z}{2m+1+2n}\right) e^{\frac{2z}{2m+1+2n}}.$$

Das Product nun ist (vergl. § 123) absolut convergent, und daher der Grenzwerth Eins für wachsende n, so dass sich ergiebt

$$P(z) = \cos z\pi \lim_{n=\infty} e^{-2z \sum\limits_{m=1}^{m=pn} \frac{1}{2m+1+2n}} = \cos z\pi \; e^{-z\,lg\,(p+1)}.$$

Es ist nämlich

$$\sum_{m=1}^{m=np} \frac{1}{2m+1+2n} = \tfrac{1}{2} \sum_{m=1}^{m=np} \frac{1}{m+n} + \sum_{m=1}^{m=np} \left(\frac{1}{2m+2n+1} - \frac{1}{2m+2n}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{1}^{np} \frac{1}{m+n} - \sum_{1}^{np} \frac{1}{(2m+2n)(2m+2n+1)}.$$

Die letzte Summe nähert sich für wachsende n (§ 18) der Null beliebig, die erste aber ergiebt

$$\sum_{1}^{pn} \frac{1}{m+n} = \left(\sum_{1}^{(p+1)n} \frac{1}{m} - lg\,n\,[p+1]\right) - \left(\sum_{1}^{n} \frac{1}{m} - lg\,n\right) + lg\,(p+1).$$

Die beiden geklammerten Ausdrücke nähern sich für wachsende n jeder der Mascheroni'schen Constanten, das Ganze nähert sich $lg\,(p+1)$. Daraus folgt

$$\lim_{n=\infty} 2 \sum_{m=1}^{m=pn} \frac{1}{2m+2n+1} = lg\,(p+1),$$

wovon in der letzten Gleichung für $P(z)$ Gebrauch gemacht wurde.

§ 129. Einige allgemeine Sätze über unendliche Producte. Wenn eine ganze transcendente Function[1]) unendlich oft verschwindet, so können die Puncte $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ so geordnet werden, dass sie eine in Bezug auf die absoluten Beträge niemals abnehmende Folge bilden, deren Terme über alle Grenzen wachsen. (Verschwindet die Function in einem Puncte μ mal, so wird in der Folge $a_1, a_2, \ldots$ diese Zahl μ mal enthalten sein). Wenn nämlich die Terme dem absoluten Betrage nach nicht über eine gewisse Zahl M hinausgingen, so müsste unter ihnen (§ 15) eine sogenannte Grenzzahl a vorhanden sein, so dass entweder unendlich viele Terme der Folge ihr gleich wären, oder dass in jeder beliebigen Nähe dieser Zahl sich unendlich viele Zahlen der Folge befänden. Da nun eine ganze transcendente Function für alle endlichen z den Charakter einer ganzen Function hat, so muss sich die Function nach ganzen Potenzen von $z - a$ entwickeln lassen.

[1]) Man vergl. Weierstrass, Abhandlungen der mathem. Klasse der Königl. Academie der Wissenschaften zu Berlin 1876.

Dies ist aber, falls der Factor $z-a$ unendlich oft in ihr vorhanden ist, nicht möglich, oder, wenn die Function in jeder beliebigen Nähe von a verschwindet, so ist die Entwickelung (§ 64) identisch Null.

Wenn aber die Terme der Folge über alle Grenzen dem absoluten Betrage nach wachsen, so kann man nach Weierstrass jedesmal eine ganze transcendente Function bilden, welche in diesen Puncten verschwindet, und nur in diesen Puncten verschwindet. Dabei wollen wir drei Fälle unterscheiden:

I. Die Reihe

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}+\ldots$$

ist absolut convergent.

II. Es giebt eine bestimmte ganze Zahl m, von der Beschaffenheit, dass die Reihe

$$\left(\frac{1}{a_1}\right)^m+\left(\frac{1}{a_2}\right)^m+\left(\frac{1}{a_3}\right)^m+\ldots+\left(\frac{1}{a_n}\right)^m+\ldots$$

absolut convergent ist.

III. Die Reihe

$$\left(\frac{1}{a_1}\right)^m+\left(\frac{1}{a_2}\right)^m+\left(\frac{1}{a_3}\right)^m+\ldots+\left(\frac{1}{a_n}\right)^m+\ldots$$

ist für jedes noch so grosse m divergent, obschon $lim\ 1:a_n$ für wachsende n Null ist.

Im ersten Falle ist das Product

$$\left(1-\frac{z}{a_1}\right)\left(1-\frac{z}{a_2}\right)\left(1-\frac{z}{a_3}\right)\left(1-\frac{z}{a_4}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\ldots$$

ein absolut convergentes und eine Function von z, welche die Stellen a_1, a_2, .. zu Nullpuncten hat.

Im zweiten Falle sei $f_n(z)=\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{a_n^2}+\frac{1}{3}\frac{z^3}{a_n^3}+\ldots+\frac{1}{m-1}\frac{z^{m-1}}{a_n^{m-1}}$, dann ist das unendliche Product

$$\left[\left(1-\frac{z}{a_1}\right)e^{f_1(z)}\right].\left[\left(1-\frac{z}{a_2}\right)e^{f_2(z)}\right].\left[\left(1-\frac{z}{a_3}\right)e^{f_3(z)}\right]\ldots\left[\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{f_n(z)}\right]\ldots$$

ein absolut convergentes und eine Function, welche die Puncte a zu Nullpuncten hat. Entwickelt man nämlich das n^{te} Glied nach Potenzen von z, so findet man (vergl. § 123)

$$\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{f_n(z)}=1-\frac{1}{m}\frac{z^m}{a_n^m}(1+\Theta),$$

worin Θ eine endliche, mit wachsenden n dem absoluten Betrage nach abnehmende Zahl bedeutet, und ein unendliches Product aus Factoren dieser Art ist absolut convergent.

Im dritten Falle sei $F_n(z)=\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{a_n^2}+\frac{1}{3}\frac{z^3}{a_n^3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\frac{z^{n-1}}{a_n^{n-1}}$, so ist das unendliche Product

$$\left[1-\frac{z}{a_1}\right]\left[\left(1-\frac{z}{a_2}\right)e^{F_2(z)}\right]\left[\left(1-\frac{z}{a_3}\right)e^{F_3(z)}\right]\ldots\left[\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{F_n(z)}\right]\ldots$$

ein absolut convergentes Product und eine Function von z, welche die Puncte a zu Nullpuncten hat. Da nämlich für ein hinlänglich grosses n

$$lg\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{F_n(z)}=lg\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+F_n(z)=-\frac{1}{n}\frac{z^n}{a_n^n}-\frac{1}{n+1}\frac{z^{n+1}}{a_n^{n+1}}-\ldots=-\frac{1}{n}\frac{z^n}{a_n^n}(1+\Theta_n)$$

ist, (wo Θ_n eine Grösse ist, die mit wachsendem n gegen Null convergirt, weil $z:a_n$ von einem bestimmten n ab dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins ist,) und also

$$\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{F_n(z)} = 1-\frac{1}{n}\frac{z^n}{a_n^n}(1+\Theta_n)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\frac{z^n}{a_n^n}(1+\Theta_n)\right)^2 - . + .. = 1-\frac{1}{n}\frac{z^n}{a_n^n}(1+\zeta_n)$$

wird, worin ζ_n ebenfalls mit wachsenden n gegen Null convergirt, so haben die Factoren des unendlichen Productes die Form $\left(1-\frac{1}{n}\frac{z^n}{a_n^n}(1+\zeta_n)\right)$, und das Product ist absolut convergent, weil es die Reihe ist

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n(1+\zeta_n),$$

denn $abs\,(z:a_n)$ ist von einem bestimmten n ab ein ächter Bruch.

Nun wäre noch der Beweis zu erbringen, dass diese Producte in überall convergente Potenzreihen entwickelbar seien, dass sie ganze transcendente Functionen seien. Dieser Beweis unterscheidet sich dem Wesen nach nicht von dem für einen speciellen Fall im § 123 gegebenen, weshalb wir hier denselben nicht reproduciren wollen.

§ 130. Zerlegung von $tg\,z$ in eine endliche Reihe von Partialbrüchen. Grenzübergang. Wenden wir den binomischen Satz für ein ganzes n auf die Identität an $\cos nz + i \sin nz = (\cos z + i \sin z)^n$ und vergleichen Reelles mit Reellem, Imaginäres mit Imaginärem, so erhalten wir die Relationen

$$\cos nz = \cos^n z - n_2 \cos^{n-2} z \sin^2 z + n_4 \cos^{n-4} z \sin^4 z - . + ..,$$
$$\sin nz = n_1 \cos^{n-1} z \sin z - n_3 \cos^{n-3} z \sin^3 z + n_5 \cos^{n-5} z \sin^5 z - . + ..,$$

welche Relationen, obschon für reelle z hergeleitet, nach der im § 64 gegebenen Beweismethode allgemein gelten. Durch Division mit $\cos^n z$ und Anordnung nach aufsteigenden Potenzen von $tg\,z$ fliessen hieraus (unter $n_1, n_2, ..$ Binomialcoëfficienten verstanden,) die Gleichungen

$$\frac{\cos nz}{\cos^n z} = 1 - n_2\, tg^2 z + n_4\, tg^4 z - n_6\, tg^6 z + . - ..,$$
$$\frac{\sin nz}{\cos^n z} = n_1\, tg\, z - n_3\, tg^3 z + n_5\, tg^5 z - . + ...$$

Für ein gerades n ist die rechte Seite der ersteren in Bezug auf $tg\,z$ vom n^{ten} Grade, die der zweiten vom $n-1^{ten}$ Grade. Der Quotient $\sin nz : \cos nz = tg\,nz$ ist demnach für ein gerades n eine ächt gebrochene Function von $tg\,z$, deren Nenner vom n^{ten} Grade ist, und für $tg\,z = \pm tg\frac{\pi}{2n}, \pm tg\frac{3\pi}{2n}, \pm tg\frac{5\pi}{2n}, .., \pm tg\frac{2n-1}{2n}\pi$ verschwindet, man kann deshalb die rationale Function in Partialbrüche zerlegen und die Gleichung ansetzen

$$tg\,nz = \sum_{\nu=-\frac{1}{2}n+1}^{\nu=\frac{1}{2}n}\frac{A_\nu}{tg\,z - tg\frac{2\nu-1}{2n}\pi}.$$

Um A_ν zu bestimmen, multipliciren wir mit $tg\,z - tg\frac{2\nu-1}{2n}\pi$ und setzen $z=\frac{2\nu-1}{2n}\pi$, wo ν zwischen $-\frac{1}{2}n+1$ und $\frac{1}{2}n$ liegt. So ergiebt sich, wenn $z' = z - \frac{2\nu-1}{2n}\pi$ gesetzt wird,

$$A_\nu = \lim_{z=\frac{1}{2}(2\nu-1)\pi:n} tg\,nz.\left(tg\,z - tg\frac{2\nu-1}{2n}\pi\right) = \lim \frac{\sin nz}{\cos nz}\,\frac{\sin\left(z-\frac{(2\nu-1)}{2n}\pi\right)}{\cos z\,\cos\frac{2\nu-1}{2n}\pi}$$
$$= \lim_{z'=0}\frac{-\cos z' n}{\sin z' n}\,\frac{\sin z'}{\cos\left(z'+\frac{(2\nu-1)}{2n}\pi\right)\cos\frac{(2\nu-1)}{2n}\pi} = \frac{-1}{n\cos^2\frac{2\nu-1}{2n}\pi}.$$

Zieht man die Terme, die dem Werthe ν gleich ν und ν gleich $-\nu+1$ entsprechen, zusammen, so ist

$$\frac{-\dfrac{1}{n\cos^2\dfrac{2\nu-1}{2n}\pi}}{tg\,z-tg\dfrac{2\nu-1}{2n}\pi}+\frac{-\dfrac{1}{n\cos^2\dfrac{2\nu-1}{2n}\pi}}{tg\,z+tg\dfrac{2\nu-1}{2\nu}\pi}=\frac{-2\,tg\,z}{n\cos^2\dfrac{2\nu-1}{2\nu}\pi}\cdot\frac{1}{tg^2 z-tg^2\dfrac{2\nu-1}{2n}\pi},$$

und somit, wenn nz durch z ersetzt wird

$$tg\,z=\sum_{\nu=1}^{\nu=\frac{1}{2}n}\frac{-2\,tg\dfrac{z}{n}}{n\cos^2\dfrac{2\nu-1}{2n}\pi}\,\frac{1}{tg^2\dfrac{z}{n}-tg^2\dfrac{2\nu-1}{2n}\pi}.$$

Lässt man hierin die gerade Zahl n grösser und grösser werden, über alle Grenzen wachsen, so findet sich

$$tg\,z=\lim_{n=\infty}\sum_{\nu=-n}^{\nu=n-1}\frac{1}{\frac{1}{2}(2\nu+1)\pi-z}=\Sigma\frac{2z}{\frac{1}{4}(2m+1)^2\pi^2-z^2},$$

worin die unendliche Reihe absolut convergent ist, für jedes z, ausser solchen Werthen, für welche $tg\,z$ unendlich wird, hingegen in dem als Grenzwerth geschriebenen Ausdrucke die Anzahl der negativen Werthen von ν entsprechenden Terme nur um eine endliche Zahl von der der positiven Terme verschieden sein darf. Dieser Grenzwerth hat aber den Vorzug, dass man ihm unmittelbar ansieht, dass die durch ihn dargestellte Function die Periode π besitzt. Aus der Reihe ergiebt sich für $z=0$ der zur Berechnung von π allerdings kaum brauchbare Ausdruck

$$\frac{\pi\pi}{8}=1+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5.5}+\frac{1}{7.7}+\frac{1}{9.9}+\cdots$$

Dieser Grenzübergang ist nun freilich weit davon entfernt, ein strenger genannt werden zu dürfen, und es ist auch nicht ganz ohne Mühe, ihn völlig streng durchzuführen. Wir wollen deshalb analog wie im § 127 die Richtigkeit der Partialbruchzerlegung a posteriori nachweisen. Wir setzen die Partialbruchreihe gleich $f(z)$, so ist $tg\,z-f(z)$ für jedes endliche z endlich und hat die Periode π, die Differenz ist eine ganze transcendente Function. Sie wird völlig studirt, wenn man sie in dem Parallelstreifen zwischen zwei zur imaginären Achse parallelen Geraden durch $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genau studirt, weil sie sich eben periodisch wiederholt. Zudem ist sie ungerade, und es ist auch $[tg\,z-f(z)]:z$ eine ganze transcendente Function.

Setzen wir nun $z=\alpha+yi$, wo α zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt, und lassen y positiv oder negativ über alle Grenzen wachsen, so nähert sich

$$\frac{tg(z)-f(z)}{z}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}\cdot\frac{1}{iz}-\Sigma\frac{2}{\frac{1}{4}(2m+1)^2-z^2}$$

der Null beliebig, und es ist dieser Ausdruck zunächst in dem Parallelstreifen, dann aber, weil $tg\,z-f(z)$ eine periodische Function mit der Periode π ist, überall eine endlich bleibende Function, also eine Constante C, und $tg\,z-f(z)=Cz$. Da aber die linke Seite eine periodische Function ist, so muss C gleich Null sein, womit die Richtigkeit der Partialbruchentwickelung erwiesen ist.

§ 131. Hat eine sonst überall reguläre Function unendlich viele Pole $a_1\,a_2\,..\,a_n\,..$, die keinen Grenzpunct im Endlichen besitzen, so lässt sich diese Function in eine Partialbruchreihe und eine ganze transcendente Function zerlegen. Erstreckt man die Summe $\Sigma A_m:(z-a_m)$ über alle Pole $a_1\,a_2\,..$, deren Residuen $A_1\,A_2\,..$ sein mögen, so erhält man nur ausnahmsweise eine (gleichmässig) convergente Reihe. Z. B. ist die Partialbruchreihe $\Sigma 1:(z-m)$ überhaupt nicht convergent. Fügt man aber jedem Partialbruch ein Ergänzungsglied hinzu, bildet man die Reihe

$$\Sigma\left(\frac{1}{z-m}+\frac{1}{m}\right)=\Sigma\frac{z}{m(z-m)},$$

so ist diese überall (die Pole natürlich ausgenommen) convergent, und zwar so, dass man in einem Kreise $abs\, z \leq R$ immer eine Zahl n angeben kann, so dass sich die Summe der ersten n Glieder der Reihe von dem Werthe der Reihe absolut um weniger als σ unterscheidet; sie ist also gleichmässig convergent. Untersuchungen darüber, wie das Ergänzungsglied einzurichten ist, sind denen des § 129 über Darstellungen durch unendliche Producte an die Seite zu stellen. Diese Untersuchungen sind von Herrn Mittag-Leffler durchgeführt. Ist es gelungen, eine gleichmässig convergente, und deshalb eine analytische Function darstellende Partialbruchreihe herzustellen, die dieselben Pole mit denselben Residuen hat als eine gegebene analytische Function, so folgt daraus natürlich nicht die Uebereinstimmung der Reihe und der Function, ihre Differenz ist vielmehr im Allgemeinen eine ganze transcendente Function.

Algebraische Functionen, cyklometrische Functionen. Umkehrung der Reihen.

§ 132. Definition der algebraischen Functionen. Besteht zwischen s und z der Zusammenhang, dass s durch z gefunden wird mittels der algebraischen Gleichung

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0 = F(s, z) = 0,$$

worin $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ganze Functionen von z sind, so sagt man, s sei eine algebraische Function von z. Da für jeden Werth von z im Allgemeinen n Werthe von s vorhanden sind, so ist s eine mehrdeutige Function von z, und muss, damit sie der gewöhnlichen Behandlung der Functionen fähig werde, in eindeutige Zweige zerlegt werden. Die Hauptfrage aber, die zu erledigen ist, bleibt immer die, ob ein solcher Zweig, und wo er den Charakter einer ganzen Function besitzt, wo er durch eine nach ganzen Potenzen von $z - a$ fortschreitende Reihe entwickelt werden kann. Diese Frage würde wohl leicht zu erledigen sein, wenn sich die Gleichung $F(s, z) = 0$ nach s auflösen liesse, d. h. wenn sich s als explicite Function von z durch eine endliche Anzahl von Rechnungsoperationen, die schon bestimmte Bezeichnungen erhalten haben, und deren analytischer Charakter bereits bekannt ist, darstellen liesse. Geht F in s nicht über den vierten Grad hinaus, so ist dies in der That möglich, und die Darstellung besteht, wenn die Gleichung eine sogenannte (im engern Sinne) auflösbare ist, aus einem Complex von Wurzelzeichen etwa in folgender Form

$$\varphi = \psi_0 + \sqrt[n_1]{\psi_1} + \sqrt[n_2]{\psi_2} + \sqrt[n_3]{\psi_3} + \ldots + \sqrt[n_m]{\psi_m},$$

worin $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ wieder ähnlich zusammengesetzt sein können als φ, so jedoch, dass die Anzahl der überhaupt vorkommenden Wurzelzeichen eine bestimmte endliche ist. Einen solchen Ausdruck wollen wir, zum Unterschied von den allgemeineren algebraischen Functionen, die diese Klasse mit umfassen, eine Wurzelfunction nennen. Ist der Grad von F höher als vier, so ist im Allgemeinen s eine algebraische, und nur in speciellen Fällen eine Wurzelfunction.

Uebersteigt keiner der Coëfficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ als ganze Functionen von z den m^{ten} Grad, erreicht aber wenigstens einer von ihnen denselben, so ist umgekehrt z eine algebraische, im speciellen Falle eine m-deutige Wurzelfunction von s. — Die Untersuchung einer speciellen Wurzelfunction der Function $s = \sqrt{1 - z^2}$ folgt zunächst.

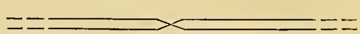
§ 133. Die Wurzelfunction $\sqrt{1 - z^2}$. Nehmen wir immer für $lg\, abs\, A$ den reellen Logarithmus, so ist der Hauptwerth von $lg\, abs\,(z - a) + i\, arc\,(z - a)$, wenn $-\pi < arc\,(z - a) \leq \pi$ genommen wird. Dieser arcus ist der Winkel, den die von a nach z gerichtete Strecke $abs\,(z - a)$ mit der positiv reellen Achse bildet. Der Hauptzweig von $lg(z-a)$ wird deshalb durch eine Gerade l_a normirt, die von a der reellen Achse im negativen Sinne parallel ins Unendliche gezogen wird. Der Hauptwerth von $lg(b-z)$ ist $lg\,abs(z-b)+i\,arc(b-z)$, wo $arc(b-z)$ der zwischen $-\pi$ und π genommene Winkel ist, den die von z nach b gerichtete Strecke $abs(b-z)$ mit der positiv reellen Achse einschliesst. Dieser arcus ist positiv gleich π, wenn z auf dem unteren Ufer einer geraden Linie l_b liegt, die von b der reellen Achse im positiven Sinne parallel ins Unendliche gezogen wird, und die den Hauptzweig von $lg(b-z)$ normirt. Auf dem oberen Ufer derselben Linie ist $arc(b-z)$ gleich $-\pi$. Die Function $lg(z-a)(b-z) = lg(z-a)+lg(b-z)$ ist einändrig in der z-Ebene, wenn diese durch eine Gerade $l = l_a + l_b$ begrenzt oder aufgeschnitten wird, die der reellen Achse parallel von a im negativen Sinne nach ∞ und von da zu b hingezogen wird, so dass das Stück $l_b = b\,..\,\infty$ der reellen Achse im positiven Sinne parallel ist. Auf dem oberen Ufer dieser Linie l ist $lg(z-a)+lg(b-z)$ überall um $2i\pi$ grösser als auf dem unteren. Nehmen wir $a=-1$, $b=1$ an, so ist jeder Zweig, insbesondere der Hauptzweig von $lg(1-z^2) = lg(z+1)+lg(1-z)$ in der z-Ebene einändrig und wohlbestimmt, wenn diese Ebene durch den Theil l der reellen Achse, der in -1 beginnt, in negativer Richtung ins Unendliche läuft, und von da nach $+1$ zurückgeht, — wir wollen die Linie l von -1 nach ∞ nach $+1$ ziehen, so dass das obere Ufer das negative l^-, ihr unteres das positive l^+ ist, — und es gilt dasselbe auch von der Function

$$s = \sqrt{1-z^2} = e^{\frac{1}{2}lg(1-z)+\frac{1}{2}lg(1+z)},$$

die in den auf verschiedenen Ufern der Linie l einander gegenüberliegenden — geometrisch identischen — Puncten Werthe besitzt, die sich durch den Factor -1 unterscheiden. Die Function s ist in der z-Ebene eine zweiwerthige oder zweiändrige Function, die ihren entgegengesetzten Werth annimmt, wenn man die Veränderliche z von einem Puncte in einem Zuge in die Anfangslage zurückführt, s stetig mit z ändernd, wenn dieser Zug den Punct $+1$, oder den Punct -1, oder beide zusammen eine ungerade Anzahl von Malen umkreist, aber den ursprünglichen Werth wieder erhält, wenn die Anzahl der Umwindungen gerade ist.

Nehmen wir zwei Ebenen als z-Ebenen an, legen sie so auf einander, dass sich die Coordinatenkreuze decken, und schneiden sie beide längs der oben definirten Linie l auf, lassen aber das untere Ufer der Linie l des unteren (zweiten) Blattes mit dem oberen Ufer der Linie l des oberen (ersten) Blattes zusammenwachsen, und ebenso das untere Ufer des oberen Blattes mit dem oberen des unteren Blattes, so erhalten wir eine Riemann'sche Fläche T, in der s eine einändrige eindeutige, wohlbestimmte Function ist, die nur im Unendlichen Pole hat.

Die Linie l wird eine Durchsetzungslinie genannt, weil eben je ein Flächenast der Fläche T den anderen längs l durchsetzt. Ein zu l senkrechter Schnitt der Fläche T gewährt das Ansehen der Figur



Die Puncte ± 1 heissen Windungspuncte[1]) der Fläche T, weil sie sich wie eine Schraubenfläche mit (unendlich) kleiner Höhe des Schraubenganges um sie herumwindet, so dass eine einmalige Umkreisung dieses Punctes aus einem Blatte ins andere, eine zweite ins erste zurückführt.

Der erste Zweig der Function s soll der sein, der durch die Hauptwerthe von $lg(1+z)$ und $lg(1-z)$ definirt ist, für ihn ist $s=1$, für $z=0$. Wir weisen ihm das erste (das obere) Blatt der Riemann'schen Fläche zu, für das die Durchsetzungslinie Erkennungsort oder Trennungsort ist. Der andere Zweig entsteht, wenn man für $lg(1-z)$ den Hauptzweig, für $lg(1+z)$ den ersten Nebenzweig oder umgekehrt nimmt, für ihn ist $s=-1$, für $z=0$. Die Zweige von s sind längs l unstetige Functionen, in T aber ist s ($z=\infty$ ausgenommen) endlich und überall stetig. Setzt man für $lg(1-z)$

[1]) Modelle solcher Windungspuncte sind in der Brill'schen Buchhandlung in Darmstadt erhältlich.

$lg(1+z)$ andere und andere Zweige, so erhält man doch immer nur zwei verschiedene Zweige von s, weil $e^{\frac{1}{2}2ni\pi+\frac{1}{2}2mi\pi} = \pm 1$ ist; s hat eben nur zwei Zweige. Im Folgenden wird die Durchsetzungslinie nicht mit l, sondern mit q bezeichnet, weil der Buchstabe l eine andere Verwendung finden soll.

§ 134. Der Bereich (s, z). Von einer rationalen Function von s und z sagen wir, dass sie dem Bereiche (s, z) angehöre, in dem eine Stelle nicht allein durch z, sondern erst noch durch den zugehörigen Werth von s festgelegt wird. Alle solche Functionen sind einändrige Functionen in der Riemann'schen Fläche T. Denkt man sich Zähler und Nenner einer solchen Function nach Potenzen von s geordnet, und alle geraden Potenzen mittels der Gleichung $s^{2m} = (1-z^2)^m$ als ganze Functionen von z, alle ungeraden Potenzen mittels der Gleichung $s^{2m+1} = s(1-z^2)^m$ durch das Product einer ganzen Function von z in s ausgedrückt, so gewinnt man als allgemeinste Darstellungsform einer rationalen Function von s, z die Form

$$f(s, z) = \frac{a+bs}{c+ds} = \frac{(a+bs)(c-ds)}{(c+ds)(c-ds)} = \frac{(ac-bds^2)+s(bc-ad)}{c^2-d^2s^2} = \frac{p+qs}{r},$$

worin $abcd\,pqr$ ganze Functionen von z sind. — Neben den rationalen Functionen des Bereiches (s, z) wird uns hier nur noch der Logarithmus einer eben solchen Function beschäftigen.

§ 135. Regularität im Bereiche (s, z). Die Function s lässt sich durch vier Functionselemente in ihrem ganzen Verlaufe mittels des binomischen Lehrsatzes darstellen. Setzen wir

$$(1-z^2)^{\frac{1}{2}} = \Sigma(-1)^m \left(\frac{1}{2}\right)_m z^{2m} = P_1(z), \quad P_2(z) = -P_1(z)$$

$$(1-z^2)^{\frac{1}{2}} = iz\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = i\Sigma(-1)^m\left(\frac{1}{2}\right)_m z^{-2m+1} = P_3(z), \quad P_4(z) = -P_3(z),$$

so stellen die vier Functionselemente $P_1(z), P_2(z), P_3(z), P_4(z)$, die auch auf dem Convergenzkreise überall convergiren, zusammen die Function s in ihrem ganzen Verlaufe dar, und zwar ist $s = P_1(z)$ die Function s im oberen Blatte, weil $P_1(z) = 1$ ist, $P_2(z)$ ist s im unteren Blatte im Innern des Einheitskreises. Lässt man z rein imaginär positiv oder negativ über alle Grenzen wachsen, so nähert sich s im oberen Blatte beidemal dem Unendlichen positiv reell, im unteren negativ. Das Functionselement $P_3(z)$, das ausserhalb des Einheitskreises convergirt, ist für sehr grosse positiv imaginäre z negativ reell, für negativ imaginäre z positiv reell. Deshalb stellt das Functionselement P_3 also eine stetige Function in der unteren Hälfte des Convergenzkreises, die durch die reelle Achse begrenzt ist, s im oberen Blatte, in der oberen Hälfte stellt es s im unteren Blatte dar. $P_4(z)$ stellt s in der oberen Hälfte des Convergenzkreises im oberen Blatte, in der unteren Hälfte im unteren Blatte dar. Hieraus geht hervor, dass s innerhalb und ausserhalb des Einheitskreises, und zwar jeder Zweig von s, eine analytische Function sei. Dass sie es auch auf dem Einheitskreise mit Ausnahme der Puncte ± 1 sei, geht aus der Darstellung $s = e^{\frac{1}{2}lg\,1-z+\frac{1}{2}lg\,1+z}$ hervor. Im Puncte $z = 1$, $s = 0$ aber ist

$$s = \sqrt{1-z}\sqrt{1+z} = \sqrt{1-z}\sqrt{2+(z-1)} = \sqrt{2}\sqrt{1-z}\sqrt{1+\frac{z-1}{2}} = \sqrt{2}\sqrt{1-z}\,\Sigma\left(\frac{1}{2}\right)_m\left(\frac{1}{2}\right)^m(z-1)^m,$$

also eine nach Potenzen von $\sqrt{1-z}$ fortschreitende Reihe. Sie wechselt ihr Zeichen, wenn man z um 1 herumführt, ist also in der Umgebung des Windungspunctes 1 in T einändrig. Es lässt sich s nach Potenzen von $\sqrt{1-z}$, und ähnlich nach Potenzen von $\sqrt{1+z}$ entwickeln. Wir kommen überein, im Bereiche (s, z) oder in der Riemann'schen Fläche T eine Function eine an den Stellen $s = 0$, $z = 1$; $s = 0$, $z = -1$, analytische Function zu nennen, wenn sie dort nach Potenzen von $\sqrt{1-z}$ bez. $\sqrt{1+z}$ entwickelbar ist. Kommen in der Entwickelung einige negative Potenzen vor, so sagen wir, die Function besitze an jenen Stellen Pole.

Liegt nun eine rationale Function $f(s, z) = (p + qs) : r$ vor, und ist z_0 eine von ± 1 verschiedene Zahl, so ist $f(s, z)$ sowohl im oberen Blatte von T als auch im unteren Blatte nach Potenzen von $z - z_0$ entwickelbar, also in der Umgebung der Stelle (s_0, z_0) eine analytische Function, die dort einen Pol besitzt, wenn r für $z = z_0$ verschwindet. In den Puncten ± 1 aber lässt sich diese Function nach Potenzen von $\sqrt{1 \pm z}$ entwickeln, ist also nach unserem Uebereinkommen im Bereiche (s, z) oder in der Fläche T ebenfalls dort eine analytische Function.

§ 136. Die Function $w = iz + s$. Die Function $w = iz + s$ setzt uns in den Stand, den Bereich (s, z) auf einen gewöhnlichen Rationalitätsbereich eindeutig zu beziehen, die Riemann'sche Fläche T auf eine Ebene, die w-Ebene, ein-eindeutig abzubilden. Aus $(w - iz)^2 = s^2$ folgt nämlich

$$2iz = w - \frac{1}{w}, \quad s = w - iz = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right),$$

und es ist demnach eine rationale Function von s und z

$$f(s, z) = f\left[\frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right), \; -\frac{1}{2}\left(iw - \frac{i}{w}\right)\right]$$

eine rationale Function von w. Es ist lehrreich und nützlich, den Zusammenhang zwischen (s, z) und w mittels der Methode der Abbildung näher zu studiren.

Lassen wir den Punct z im oberen Blatte der Riemann'schen Fläche $[s(0) = +1]$ als reelle Grösse x von -1 über 0 bis $+1$ wachsen, so ist in $w = u + vi = \sqrt{1 - x^2} + ix$ der reelle Theil fortwährend positiv, während der imaginäre stetig von $-i$ zunehmend, bei $x = 0$ den Werth 0, bei $+1$ aber den Werth $+i$ annimmt, wobei $abs\, w$ immer Eins ist. In der w-Ebene durchläuft demnach der Bildpunct von z den halben Einheitskreis, von $-i$ anfangend, über $w = 1$ bis $w = +i$, und zwar mit x monoton (ohne umzukehren). Durchläuft $z = yi$ die positiv imaginäre Achse im oberen Blatte, so durchläuft $w = -y + \sqrt{1 + y^2} = 1 : (y + \sqrt{1 - y^2})$ die reelle Achse der w-Ebene monoton abnehmend von Eins bis Null.

Durchläuft $z = x$ rein reelle Werthe von 1 an auf dem oberen Ufer der Linie q von 1 bis $+\infty$, so ist dort $w = ix - i\sqrt{x^2 - 1}$, weil $\frac{1}{2} lg(1 - z)$ um $-\frac{1}{2}i\pi$ wächst, wenn z den Punct 1 negativ halb umkreist. Aus der Form $w = i : (x + \sqrt{x^2 - 1})$ erkennt man, dass, wenn x monoton wächst, v (der Factor von i in w) stetig und monoton von 1 bis 0 abnimmt, so dass dem Ufer q^- der Linie q zwischen $+1$ und ∞ in der w-Ebene das Stück der imaginären Achse zwischen i und 0 entspricht. Dem Ufer q^- zwischen -1 und ∞ entspricht ebenso der Theil der imaginären Achse der w-Ebene zwischen $-i$ und 0. Bezeichnen wir den unendlich fernen Punct des oberen Blattes der Fläche T auf dem oberen Ufer von q mit a, — er ist zugleich der unendlich ferne Punct des unteren Blattes auf dem unteren Ufer von q und ist dort durch (a) angedeutet, — so entspricht dem Puncte a im oberen Blatte in der oberen, durch die reelle Achse begrenzten Halbebene der Punct Null der w-Ebene, der in nebenstehender Zeichnung mit A bezeichnet ist.

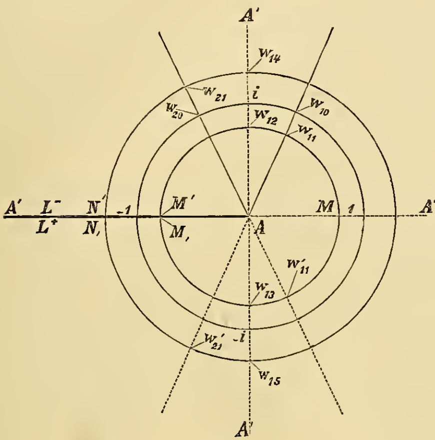
Zeichnen wir jetzt einen Halbkreis mit dem Radius $\varrho < 1$ in der w-Ebene mit A als Mittelpunct, der in w_{12} auf der positiv imaginären Achse beginnt, durch den Punct M $(u = \varrho)$ der positiv reellen Achse geht und in w_{13} mündet, so ist auf ihm

$$w = \varrho\,(cos\,\vartheta + i\,sin\,\vartheta), \quad 2iz = \left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right) cos\,\vartheta + i\left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right) sin\,\vartheta,$$

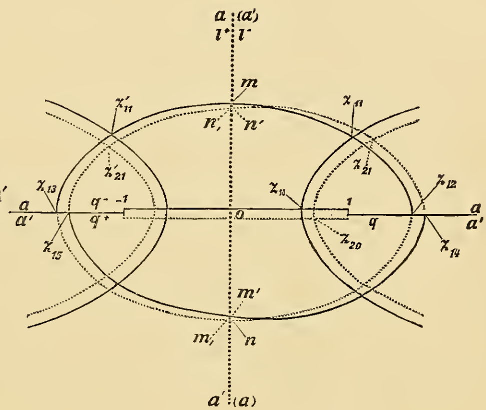
und es bewegt sich ϑ von $\frac{1}{2}\pi$ über 0 bis $-\frac{1}{2}\pi$. Setzt man $z = x + yi$, so folgt hieraus

$$x = \frac{1}{2}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right) sin\,\vartheta, \quad y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} - \varrho\right) cos\,\vartheta, \quad \frac{x^2}{\frac{1}{4}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varrho} - \varrho\right)^2} = 1,$$

und es ergiebt sich, dass z den halben Bogen einer Ellipse mit den Achsen $\frac{1}{2}\left(\varrho+\frac{1}{\varrho}\right)$ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho}-\varrho\right)$ und den Brennpuncten ± 1, von z_{12} beginnend, über m laufend und im Punct z_{13} endend, durchläuft, und wegen der Stetigkeit von $\cos\vartheta$ $\sin\vartheta$ monoton durchläuft. Der Punct m liegt im oberen Blatte von T, und deshalb liegt wegen der Stetigkeit der ganze halbe Ellipsenbogen im oberen Blatte von T. Ist ϱ sehr klein, so ist die Ellipse sehr gross, und lassen wir ϱ stetig bis 1 zunehmen, so wird die Ellipse kleiner und kleiner, bis sie für $\varrho = 1$ in die Gerade zwischen -1 und $+1$ ausartet, welche als eine (halbe) Ellipse angesehen werden kann, deren grosse Achse 1, deren kleine Achse 0 ist. — Aus dieser Betrachtung geht hervor, dass sich die obere von der reellen Achse begrenzte Halbebene des oberen Blattes der Fläche T ein-eindeutig und zusammenhängend auf das Innere des halben Einheitskreises der w-Ebene abbildet, auf die Hälfte, die auf der rechten Seite der imaginären Achse liegt.



w-Ebene.



Riemann'sche (s, z) Fläche T.

Nun wenden wir uns zur unteren Halbebene des oberen Blattes von T. Auf dem unteren Ufer q^+ zwischen $+1\,..\,\infty$ ist $w = ix + i\sqrt{x^2-1}$, weil $\frac{1}{2}\,lg(1-z)$ um $\frac{1}{2}i\pi$ wächst, wenn z den Punct Eins halb positiv umkreist. Durchläuft x dieses Linienstück monoton, so durchläuft w die positiv imaginäre Achse der w-Ebene von i anfangend monoton bis zum Puncte $A'(\infty)$, der dem unendlich fernen Puncte a' der unteren Halbebene von T im oberen Blatte entspricht. Der Linie q^+ von -1 bis $a'(\infty)$ entspricht ebenso die negativ imaginäre Achse von $-i$ bis $A'(\infty)$. Auf der negativ imaginären Achse im oberen Blatte von T $(z = -yi)$ ist $w = y + \sqrt{1+y^2}$, ihr entspricht in der w-Ebene die positiv reelle Achse, die mit y monoton von 1 bis $A'(\infty)$ durchlaufen wird.

Durchläuft jetzt w einen Halbkreis mit dem Radius $\varrho > 1$, der der reciproke Werth des Radius des oben besprochenen Halbkreises sein mag, im Puncte w_{14} der positiv imaginären Achse beginnend, über den Punct $N(u = \varrho)$ der positiv reellen Achse und im Puncte w_{15} der negativ imaginären Achse endend, so ist wieder

$$x = \frac{1}{2}\left(\varrho+\frac{1}{\varrho}\right)\sin\vartheta,\quad y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho}-\varrho\right)\cos\vartheta,\quad \frac{x^2}{\frac{1}{4}\left(\varrho+\frac{1}{\varrho}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varrho}-\varrho\right)^2} = 1,$$

jetzt ist aber y fortwährend negativ. Es durchläuft deshalb z die andere Hälfte der oben beschriebenen Ellipse stetig, im Punct z_{14} beginnend, über n gehend und im Punct z_{15} endend. Dieser Ellipsenbogen ist aber nicht als die Fortsetzung des früheren anzusehen, von dem er durch die Durchsetzungslinie q abgetrennt ist. In der Zeichnung ist er ein wenig nach rechts verschoben, um Platz zu lassen für die Fortsetzung der früheren Ellipse ins untere Blatt. — Der vordere Index an z (z_{11} z_{12} . .) soll die Lage im oberen Blatte andeuten. — Lässt man wieder ϱ sich stetig ändern, so findet man wie oben, dass die untere Hälfte des oberen Blattes von T sich ein-eindeutig und zusammenhängend auf das Aeussere des halben Einheitskreises der w-Ebene, und das ganze obere Blatt von T auf die w-Halbebene abbildet, die von der imaginären Achse begrenzt ist und auf ihrer rechten Seite liegt. Den auf verschiedenen Ufern der Linie q gegenüberliegenden Puncten im oberen Blatte von T entsprechen in der w-Ebene durchaus verschiedene Puncte.

Sind z_{11} z_{21} zwei in T über einander liegende Puncte, denen in der w-Ebene die Puncte w_{11} w_{21} entsprechen mögen, so ist $w_{11} \,.\, w_{21} = -1$, also $abs\, w_{21} = 1 : abs\, w_{11}$ und $arc\, w_{21} + arc\, w_{11} = \pi$, und es bilden die verschiedenen radii vectores dieser Puncte gleiche Winkel mit der positiv imaginären Achse. Daraus schliesst man, dass die obere Hälfte des unteren Blattes von T sich ein-eindeutig auf das Aeussere des halben Einheitskreises der w-Ebene auf der linken Seite der imaginären Achse, die untere Hälfte desselben Blattes sich ein-eindeutig auf das Innere desselben Halbkreises abbildet. Die ganze Riemann'sche Fläche T wird demnach ein-eindeutig auf die w-Ebene abgebildet, jedes Blatt auf eine Halbebene. Geht man in T über die Durchsetzungslinie q stetig, so geht man in der w-Ebene stetig über die imaginäre Achse hinweg, dem Puncte Unendlich im oberen Blatte a auf dem oberen Ufer von q und dem Punct Unendlich (a) im unteren Blatte auf dem unteren Ufer von q entspricht der mit A bezeichnete Punct Null in der w-Ebene. Dem endlich fernen Puncte (a') im unteren Blatte der oberen Halbebene und dem unendlich fernen Punct a' im oberen Blatte auf dem unteren Ufer von q entspricht der unendlich ferne Punct der w-Ebene A'. Die Beziehung zwischen z und w ist eine ein-zweideutige, die Beziehung zwischen dem Bereiche (s, z) hingegen und w ist eine ein-eindeutige. Dem Halbkreis w_{22} $(= w_{12})$ . . M' . . w_{23} $(= w_{13})$ entspricht die halbe (punctirte) Ellipse im unteren Blatte von T z_{22} . . m' . . z_{23}, dem Halbkreise w_{24} $(= w_{14})$ . . N' . . w_{25} $(= w_{15})$ entspricht die (punctirte) halbe Ellipse z_{24} $(= z_{14})$ . . n' . . z_{25} $(= z_{15})$, und es sind diese Ellipsenbögen die stetige Fortsetzung der früher besprochenen Halbellipsen über die Durchsetzungslinie q hinweg aus einem Blatt ins andere, wie die Zeichnung sie darstellt.

Lässt man w eine Gerade $A w_{11}$ w_{10} . . durchlaufen, so ist in $w = \varrho\,(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$ ϑ constant. Es folgt

$$\frac{x}{\sin\vartheta} + \frac{y}{\cos\vartheta} = \frac{1}{\varrho}, \quad \frac{x}{\sin\vartheta} - \frac{y}{\cos\vartheta} = \varrho, \quad \frac{x^2}{\sin^2\vartheta} - \frac{y^2}{\cos^2\vartheta} = 1.$$

Der Punct z durchläuft also eine Hyperbel mit den Brennpuncten ± 1 oder vielmehr einen Zweig derselben. Die Aufdeckung der folgenden Beziehungen kann dem Leser überlassen bleiben. Es sei $\vartheta < \frac{1}{2}\pi$; durchläuft w die Gerade $A w_{11}$ . . zwischen A und w_{10}, so durchläuft z im oberen Blatte von T den Hyperbelzweig $\infty\, z_{11}\, z_{10}$, und durchläuft w die Gerade weiter von w_{10} bis Unendlich, so durchläuft z im oberen Blatte den Theil desselben Hyperbelzweiges, der in der unteren Hälfte des oberen Blattes verläuft. Setzen wir die Gerade über A hinaus rückwärts fort, so entspricht diesem Theile der andere Hyperbelzweig derselben Hyperbel, aber dieser liegt im unteren Blatte und ist punctirt gezeichnet. Durchläuft w die Gerade $A w_{20}$ w_{21} . ., die zur vorigen in Bezug auf die imaginäre Achse symmetrisch liegt, so entspricht ihr im unteren Blatte der (punctirte) Hyperbelzweig, der dem $A w_{11}$ w_{12} . . entsprechenden congruent ist und unter ihm im unteren Blatte liegt. Der Verlängerung dieser Geraden über A hinaus, $A w'_{11}$ . . entspricht der zugehörige zweite Hyperbelzweig, der aber wieder im oberen Blatte liegt. Die den Geraden durch A, die mit den Coordinatenachsen zusammenfallen, entsprechenden Hyperbeln verflachen sich zu geraden Linien.

Da sich die Riemann'sche Fläche T ein-eindeutig auf eine Ebene, die Functionen des Bereiches (s, z) durch die Beziehung

$$2iz = w - \frac{1}{w}, \quad s = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$$

als Functionen des gemeinen Rationalitätsbereiches w darstellen lassen, so sagt man, die Fläche T oder der Bereich (s, z) sei vom Geschlechte Null, und es ergiebt sich, dass eine rationale Function von s, z in dem Bereiche (s, z) oder in der Fläche T jeden Werth gleich oft annimmt, weil dies für gemeine rationale Functionen erwiesen wurde.

§ 137. Die Function $arc\ sin\,(s,z) = -i\,lg\,(iz+s)$. Setzt man $z = sin\,\zeta = \frac{1}{2}i\,(e^{-i\zeta} - e^{i\zeta})$, $(e^{i\zeta})^2 - 2iz\,e^{i\zeta} - 1 = 0$, so folgt $e^{i\zeta} = iz + s$, $s = \sqrt{1-z^2}$, $\zeta = -i\,lg\,(iz+s)$, und es wird diese Function mit $arc\,sin\,z$, gelesen arcus sinus z, oder da sie der Logarithmus einer rationalen Function des Bereiches (s, z) ist, besser mit $arc\ sin\,(s, z)$ bezeichnet. Sie ist einfach gleich $-i\,lg\,w$, wenn man nach dem vorigen Paragraphen den Bereich (s, z) auf die w-Ebene bezieht. Es ist $-i\,lg\,w$ eine unendlich vieldeutige Function, deren Zweige durch eine Linie $L\,(L^-, L^+)$ von einander getrennt werden, die von Null (A) bis zum Puncte Unendlich (A') längs der negativ reellen Achse die w-Ebene aufschneidet. Diese Linie L bildet sich in der Riemann'schen Fläche T, in der der Bereich (s, z) eindeutig ist, auf die ganze imaginäre Achse im unteren Blatte der Fläche von (a) bis (a') ab. Ihr linkes Ufer ist als das positive l^+ bei der gewählten Zugrichtung zu bezeichnen. Auf dem negativen Ufer der Linie l ist $arc\,sin\,(s, z)$ um 2π grösser, als auf dem positiven, so dass diese Function im Punct 0 des unteren Blattes auf dem Ufer l^- den Werth π, auf dem Ufer l^+ den Werth $-\pi$ hat. An jeder Stelle des Bereiches (s, z) ist $arc\ sin\,(s, z)$ bis auf ein Multiplum von 2π völlig bestimmt, und ist in diesem Bereiche (§ 71) überall eine analytische Function, die in den beiden unendlich fernen Puncten der Fläche T allein singuläre Puncte hat. Die Function $arc\ sin\,(s, z)$ besitzt in T, oder im Bereiche (s, z) unendlich viele Zweige, die sich in einander stetig fortsetzen, für sich aber längs der Linie l unstetige Functionen sind. Wollte man nach Analogie des § 96 eine Riemann'sche Fläche construiren, die aus unendlich vielen Systemen T zusammengesetzt wäre, so erhielte man eine zu complicirte Vorstellung; man wird daher besser jedem Zweige von $arc\,sin\,(s, z)$ eine neue Fläche T, die man nach erfolgter Aufschneidung längs l mit T' bezeichnen mag, zuweisen, und bei einem Uebergange über l in einer solchen Fläche T' in eine andere solche Fläche, die der stetigen Fortsetzung des Zweiges entspricht, überspringen.

In übereinander liegenden Puncten der Fläche T, oder, wie wir auch sagen wollen, in conjugirten Puncten des Bereiches (s, z) im Puncte (s, z) und $(-s, z)$ hat w Werthe, deren absolute Beträge einander reciprok, deren arcus die Summe π haben, darum folgt

$$arc\ sin\,(s, z) + arc\ sin\,(-s, z) = \pi,$$

genauer congruent π nach dem Modul 2π. Wird $arc\,sin\,z$ statt $arc\,sin\,(s, z)$ geschrieben, so sind die Werthe von $arc\,sin\,z$ in den Formen enthalten

$$arc\ sin\,z \pm 2n\pi, \quad \pi - arc\ sin\,z \pm 2n\pi,$$

wo $arc\,sin\,z$ den ersten Hauptwerth von $arc\,sin\,z$ bedeutet, d. h. (vergl. § 87) den Werth, dessen reeller Theil zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. Der zweite Hauptwerth hat dann einen reellen Theil zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π oder $-\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$. Die beiden Hauptzweige von $arc\ sin\,z$ zusammen bilden den Hauptzweig von $arc\,sin\,(s, z)$. Bilden wir das obere Blatt von T' auf die halbe w-Ebene ab, dann diese durch die Beziehung $-i\,lg\,w = \zeta$ auf die ζ-Ebene, so erhalten wir (in veränderter Buchstabenbezeichnung) zwischen der z- und ζ-Ebene eine Beziehung, die in der Figur auf Seite 89 enthalten ist, die das obere Blatt der Riemann'schen Fläche T durch den ersten Hauptzweig von $\zeta = arc\,sin\,z$ auf einen Parallelstreifen der ζ-Ebene abbildet.

Die cyklometrische Function $arc\ cos\,z = \frac{1}{2}\pi - arc\ sin\,z$, (gelesen arcus cosinus z) bedarf wegen der einfachen Beziehung zu $arc\ sin\,z$ keiner besonderen Behandlung.

§ 138. Die Addition der Function $arc\ sin\ (s, z)$. Man kann sich die Aufgabe stellen, $arc\ sin\ (s_1, z_1) + arc\ sin\ (s_2, z_2)$ durch einen $arc\ sin\ (s, z)$ auszudrücken. Es ist

$$arc\ sin\ (s_1, z_1) + arc\ sin\ (s_2, z_2) \equiv -i\ lg\ (i z_1 + s_1)(i z_2 + s_2) \equiv -i\ lg\ i\ (z_1\ s_2 + z_2\ s_1) + (s_1\ s_2 - z_1\ z_2)$$
$$\equiv arc\ sin\ (s, z)\ (modulo\ 2\pi), \quad z = z_1\ s_2 + z_2\ s_1, \quad s = s_1\ s_2 - z_1\ z_2,$$

womit die Aufgabe gelöst ist. Hier macht sich die Unzulänglichkeit der Bezeichnungsweise $arc\ sin\ z$ statt $arc\ sin\ (s, z)$ geltend. Wollte man schreiben

$$arc\ sin\ z_1 + arc\ sin\ z_2 = arc\ sin\ (z_1 \sqrt{1 - z_2^2} + z_2 \sqrt{1 - z_1^2}),$$

so würde es fraglich sein, welche Vorzeichen man den Quadratwurzeln zu geben habe, und ob rechts der erste oder zweite Hauptwerth (oder ein ihnen congruenter) zu nehmen wäre. Allerdings sind ja unter allen Umständen Nebenbestimmungen nöthig, die die Zweige festsetzen, in denen die drei arcus sinus zu nehmen sind, allein diese Nebenbestimmungen sind erheblich umständlicher, wenn man den arcus sinus nur als Function von z, als wenn man ihn als Function des Bereiches (s, z) ansieht. Man sollte die Bezeichnungsweise $arc\ sin\ z$ auf den Fall beschränken, in dem diese Function durch das erste der beiden Functionselemente dargestellt wird, die wir im folgenden Paragraphen für $arc\ sin\ z$ aufstellen.

§ 139. Functionselement für $arc\ sin\ z$. Nach § 71 lässt sich $-i\ lg\ (iz + s)$ in eine Reihe von der Form $z \Sigma A_{m+1} z^{m+1} = zP(z)$ entwickeln, und folglich lässt sich auch die Function $sin\ (a\ arc\ sin\ z)$ in eine Reihe derselben Form entwickeln, wie wir a priori wissen. Wir haben also, wenn wir für $arc\ sin\ z$ den ersten Hauptzweig nehmen ($arc\ sin\ 0 = 0$),

$$sin\ (a\ arc\ sin\ z) = az\ P(z) - \frac{a^3 z^3 P^3(z)}{fac\ 3} + \frac{a^5 z^5 P^5(z)}{fac\ 5} - \frac{a^7 z^7 P^7(z)}{fac\ 7} + . - . .,$$

und es lässt sich diese Reihe in eine nach Potenzen von z fortschreitende Reihe umordnen, so lange als $P(z)$ absolut convergent ist. Setzen wir die umgeordnete Reihe gleich $\Sigma \varphi_m(a) z^m$, so ist ohne Weiteres ersichtlich, dass die Functionen $\varphi(a)$ ganze Functionen von a sind, und dass der Grad von $\varphi_n(a)$ die Zahl n nicht übersteigt, denn $P(z)$ ist von a unabhängig. Aus dem Umstande, dass $arc\ sin -z = -arc\ sin\ z$ (den ersten Hauptwerth vorausgesetzt) ist, schliesst man noch, dass $\varphi_0(a)$, $\varphi_2(a)$, $\varphi_4(a)$ . ., $\varphi_{2m}(a)$, . . gleich Null sein müssen. Nun fanden wir, wenn a eine ungerade ganze Zahl war, im § 101 die mit der a^{ten} Potenz von $sin\ \zeta$ abbrechende Reihe

$$sin\ a\zeta = a\ sin\ \zeta - \frac{a(a^2 - 1^2)}{fac\ 3} sin^3 \zeta + \frac{a(a^2 - 1^2)(a^2 - 3^2)}{fac\ 5} sin^5 \zeta - \frac{a(a^2 - 1^2)(a^2 - 3^2)(a^2 - 5^2)}{fac\ 7} sin^7 \zeta + . - . .,$$

die für $\zeta = arc\ sin\ z$ die Reihe liefert

$$sin\ (a\ arc\ sin\ z) = az - \frac{a(a^2 - 1^2)}{fac\ 3} z^3 + \frac{a(a^2 - 1^2)(a^2 - 3^2)}{fac\ 5} z^5 - \frac{a(a^2 - 1^2(a^2 - 3^2)(a^2 - 5^2)}{fac\ 7} z^7 + . - . .,$$

die für jedes ungerade a mit der von uns gesuchten Reihe übereinstimmt. Es ist mithin $\varphi_{2n+1}(a)$ für $a = \pm 1$, $a = \pm 3$, . . $a = \pm (2n - 1)$ der Null gleich, und auch für $a = 0$, weil $sin\ (a\ arc\ sin\ z)$ für $a = 0$ verschwindet, diese Function verschwindet also für $2n + 1$ Werthe, wodurch sie bis auf einen constanten Factor bestimmt ist. Ausser in diesen Werthen stimmt aber $\varphi_{2n+1}(a)$ mit der Function $(-1)^n\ a(a^2 - 1)\ (a^2 - 3^2)\ . .\ [a^2 - (2n - 1)^2] : fac\ (2n + 1)$ auch für $a = 2n + 1$ überein, und muss also mit ihr identisch sein. Die gefundene Reihe gilt für jedes a, sie convergirt absolut, so lange $abs\ z < 1$ ist. Dividiren wir nun $sin\ (a\ arc\ sin\ z)$ mit a und ebenso die darstellende Reihe und gehen mit a zur Grenze Null über, so erhalten wir, da $lim\ \varphi_{2n+1}(a) : a = 1^2 . 3^2 . . (2n - 1)^2 : fac\ (2n + 1)$ ist

$$arc\ sin\ z = z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{z^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{4} \cdot \frac{z^7}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{z^9}{9} + . . = P_1(z)$$

als Functionselement für den ersten Hauptwerth von $arc\,sin\,z$ im Gebiete $abs\,z < 1$. Die Reihe $\pi - P_1(z) = P_2(z)$ ist ein Functionselement, welches in der rechten Hälfte desselben Kreises den zweiten Hauptwerth von $arc\,sin\,z$, in der linken dessen stetige Fortsetzung darstellt.

Diese Reihen ergeben, dass die Ableitung des ersten Hauptwerthes von $arc\,sin\,z$ gleich $1 : s = 1 : \sqrt{1 - z^2}$ ist, während die Ableitung des zweiten Hauptwerthes $-1 : s$ ist.

Da wir aus der Darstellung $arc\,sin\,(s, z) = -i\,lg\,(iz + s)$ wissen, dass jeder Zweig als Function von z eine analytische Function ist, die Puncte $\pm 1, \infty$, die singulär sind, ausgenommen, so können wir auf Erbringung weiterer Functionselemente verzichten.

§ 140. Umkehrung der Reihen. Die Reihe $f(z) = \Sigma a_m z^m$ definirt im Convergenzkreise, dessen Radius R sein mag, eine analytische Function. Aber auch umgekehrt giebt es, wenn man $f(z) - a_0 = \zeta$ setzt, und wenn $f'(z)$ nicht mit z verschwindet, a_1 also nicht Null ist, in der ζ-Ebene um den Punct Null eine Umgebung, in der z eine reguläre Function von ζ ist, und zwar eine Function, die mit ζ verschwindet. Dass die erste Potenz von ζ in dem z darstellenden Functionselemente nicht fehlen kann, wenn $f'(0)$ nicht Null ist, erkennt man ohne Weiteres, wenn man das z darstellende Functionselement in die Gleichung $\zeta = \Sigma a_{m+1} z^{m+1}$ einsetzt.

Ohne die Allgemeinheit zu beschränken kann man annehmen, dass es sich um eine Gleichung der Form

$$\zeta = z - c_2 z^2 - c_3 z^3 - c_4 z^4 - \ldots - c_n z^n - \ldots$$

handelt, in welcher die rechte Seite für $z = 1$ noch convergent ist. Denn um dies zu erreichen, kann man der gegebenen Gleichung durch die Substitutionen αz für z und $\beta\zeta$ für ζ die gewünschte Form geben, wo $abs\,\alpha = R$ ist. Es folgt aus dieser Annahme, dass die c_n mit wachsenden n beliebig klein werden.

Eine ganze Function verschiedener Buchstabengrössen, deren Terme nur durch das $+$ Zeichen mit einander verbunden sind, wollen wir eine formal positive Function nennen. Summen und Producte formal positiver Functionen sind wieder formal positive Functionen. Zudem schicken wir noch die Bemerkung voraus, dass die Function

$$\sqrt{Az^2 + 2Bz + C} = \sqrt{A}\,\sqrt{(z-a)\,.\,(z-b)} = \sqrt{A}\,e^{\frac{1}{2} lg(z-a)}\,.\,e^{\frac{1}{2} lg(z-b)}$$

sich in eine nach ganzen Potenzen von z fortschreitende Reihe entwickeln lässt, deren Convergenzkreis durch den Null nächsten singulären Punct a oder b geht, wie aus § 71 folgt.

Soll nun die Gleichung $\zeta = z - \Sigma c_{m+2} z^{m+2}$ durch einen Ausdruck von der Form

$$z = \zeta\,(1 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \ldots + b_n\zeta^n + \ldots) = \zeta\,P(\zeta)$$

befriedigt werden, so muss identisch

$$(z - \zeta) : \zeta^2 = b_1 + b_2\zeta + b_3\zeta^2 + \,.\, + b_{n+1}\zeta^n + \ldots = c_2 P^2(\zeta) + c_3\zeta P^3(\zeta) + \ldots + c_n \zeta^{n-2} P^n(\zeta) + \ldots$$

sein, und der Coëfficient von ζ^n muss beiderseits derselbe sein, so dass sich die Coëfficienten b durch eine Recursionsformel bestimmen, die b_n aus $b_1\, b_2 \ldots b_{n-1}$ berechnen lehrt. Nun liefern zum Coëfficienten von ζ^n, der links b_{n+1} ist, auf der rechten Seite nur die Reihen $P^2(\zeta)\,P^3(\zeta) \ldots P^{n+2}(\zeta)$ einen Beitrag, und wenn man $P(\zeta) = A_n + \zeta^{n+1} B_n$, $A_n = 1 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \ldots b_n\zeta^n$, $B_n = b_{n+1} + b_{n+2}\zeta + b_{n+3}\zeta^2 + \ldots$ setzt, so liefert von dem Ausdrucke

$$P^{\mu}(\zeta) = A_n^{\mu} + \mu A_n^{\mu-1}\zeta^{n+1} B_n + \tfrac{1}{2}\mu(\mu - 1) A_n^{\mu-2}\zeta^{2n+2} B_n^2 + \ldots$$

nur das erste Glied einen Beitrag, und zwar einen formal positiven Beitrag zu diesem Coëfficienten. Daraus ergiebt sich eine Beziehung $b_{n+1} = G_n(b_1, b_2, \ldots b_n, c_2, c_3 \ldots c_{n+2})$, in welcher G_n eine ganze formal positive Function der Grössen b, c ist, z. B.

$$b_1 = c_2 = H_0, \quad b_2 = 2b_1c_2 + c_3 = 2c_2^2 + c_3 = H_1(c_2c_3), \quad b_3 = c_2(b_1^2 + 2b_2) + 3b_1c_3 + c_4, \ldots$$

Ersetzt man in $b_3 = G_2(b_1, b_2, c_2, c_3, c_4)$ b_1, b_2 durch die schon gefundenen Ausdrücke in c_2, c_3, so dass $b_3 = H_2(c_2, c_3, c_4)$ wird, sodann in $b_4 = G_3(b_1, b_2, b_3, c_2, c_3, c_4)$ die b_1, b_2, b_3 durch H_0, H_1, H_2 u. s. w., in $b_{n+1} = G_n(b_1, b_2 \ldots b_n, c_2, c_3 \ldots c_{n+2})$ b_1 durch H_0, b_2 durch $H_1, \ldots, b_n$ durch H_{n-1}, so folgt $b_{n+1} = H_n(c_2, c_3 \ldots c_{n+2})$ und es ist H_n eine formal positive ganze Function von $c_2, c_3 \ldots c_{n+2}$. Der absolute Betrag einer solchen formal positiven Function wird vergrössert, wenn man darin $c_2, c_3 \ldots c_{n+2}$ durch M ersetzt, wofern $abs\, c_2, abs\, c_3, \ldots, abs\, c_{n+2} \leq M$ ist, so dass $H_n(M, M, \ldots, M) \geq abs\, H_n(c_2 c_3 \ldots c_{n+2})$ ist. Hieraus ergiebt sich leicht die Convergenz der Reihe $b_1 + b_2 \zeta + b_3 \zeta^2 + \ldots$, die ja zunächst, d. h. so lange ihre Convergenz nicht erwiesen ist, nur formal die Umkehrgleichung befriedigt. Kehren wir nämlich die Gleichung

$$\zeta = z - z^2 M - z^3 M - z^4 M - \ldots - z^n M - \ldots = z - z^2 M : (1-z) = (z - (M+1) z^2) : (1-z)$$

nach derselben Methode um, so erhalten wir

$$z = \zeta(1 + \zeta H_0(M) + \zeta^2 H_1(M, M) + \zeta^3 H_2(M, M, M) + \ldots + \zeta^n H_{n-1}(M, M, \ldots, M) + \ldots).$$

Dass aber diese Reihe ein bestimmtes Convergenzgebiet hat, ergiebt sich daraus, dass wir die Coëfficienten derselben nach einer anderen Methode herstellen können, und diese Coëfficienten müssen dieselben wie oben sein, müssen der Recursionsformel für die b Genüge leisten. Die letzte zur Umkehrung vorgelegte Gleichung kann in die Form gebracht werden

$$z^2(M+1) - z(1+\zeta) + \zeta = 0$$

$$z = \frac{1 + \zeta - \sqrt{1 - 2(2M+1)\zeta + \zeta^2}}{2(M+1)} = \frac{\zeta - \Sigma(\tfrac{1}{2})_{m+1} \zeta^{m+1}(\zeta - 4M - 2)^{m+1}}{2(M+1)},$$

worin der Wurzel das negative Zeichen gegeben wurde, weil z mit ζ verschwinden muss, und worin $(\tfrac{1}{2})_{m+1}$ einen Binomialcoëfficienten bedeutet.

Die letzte Reihe lässt sich aber in eine nach ganzen Potenzen von ζ fortschreitende anordnen, die so lange convergirt, als $abs\, \zeta < \varrho$ ist, wenn ϱ der absolute Betrag der kleineren Wurzel der Gleichung $\zeta^2 - 2(2M+1)\zeta + 1 = 0$ ist, also so lange

$$abs\, \zeta < 2M + 1 - \sqrt{(2M+1)^2 - 1} = \frac{1}{(2M+1) + \sqrt{(2M+1)^2 - 1}} < \frac{1}{2(2M+1)}$$

ist. Mithin ist auch die Reihe

$$1 + b_1 \zeta + b_2 \zeta^2 + \ldots + b_{n+1} \zeta^{n+1} + \ldots = 1 + \zeta H_0(c_2) + \zeta^2 H_1(c_2 c_3) + \ldots + \zeta^{n+1} H_n(c_2, c_3, \ldots c_{n+2}) + \ldots$$

eine absolut convergente in einem Kreise mit dem Radius $\varrho = 1 : 2(2M+1)$, wenn M die grösste der Zahlen $abs\, c_2, abs\, c_3, \ldots, abs\, c_n, \ldots$ bedeutet. Das hier gefundene Convergenzgebiet ist in der Regel kleiner als das **wahre Convergenzgebiet** der Reihe. Allein es ist schon ein wesentlicher Gewinn zu wissen, dass überhaupt ein gewisses Convergenzgebiet, ein Gebiet in dem z eine reguläre Function von ζ ist, existirt; diese Function heisst die Umkehrung der Function ζ.

§ 141. **Mehrdeutige Umkehrungen.** Wenn die umzukehrende Potenzreihe die Form hat $f = a_0 + a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \ldots$, so dass $a_1 = a_2 \ldots = a_{m-1} = 0$ oder $f'(0) = f''(0) = \ldots f^{(m-1)}(0) = 0$ ist, $f^{(m)}(0) = a_m$ aber nicht Null ist, so sind die vorigen Schlüsse nicht erlaubt. Man kann aber diesen Fall sofort auf den vorigen zurückführen, indem man schreibt

$$\sqrt[m]{\frac{f - a_0}{a_m}} = z\left(1 + \frac{a_{m+1}}{a_m} z + \frac{a_{m+2}}{a_m} z^2 + \ldots\right)^{\frac{1}{m}} = z(1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots),$$

weil in der Umgebung des Punctes Null, wenn für den Logarithmus der Hauptwerth genommen wird,

$$\left(1 + \frac{a_{m+1}}{a_m} z + \frac{a_{m+2}}{a_m} z^2 + \ldots\right)^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m} lg\left(1 + \frac{a_{m+1}}{a_m} z + \frac{a_{m+2}}{a_m} z^2 + \ldots\right)}$$

eine reguläre Function ist $\left(\text{so lange } abs\,\frac{a_{m+1}}{a_m}z + abs\,\frac{a_{m+2}}{a_m}z^2 + \ldots < 1 \text{ ist}\right)$, und sich durch eine Potenzreihe $1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$ darstellen lässt. Nach den im vorigen Paragraphen gefundenen Sätzen folgt hieraus, dass z in einem bestimmten von $b_1\, b_2 \ldots$, also von $a_m\, a_{m+1}\, a_{m+2} \ldots$ abhängenden Bereiche durch eine nach ganzen positiven Potenzen von $\sqrt[m]{f - a_0}$ fortschreitende Reihe darstellbar ist, die in jedem Punct des Convergenzgebietes m Werthe besitzt, weil die m^{te} Wurzel m-deutig ist.

Ist z. B. $\zeta = \cos z = 1 - \frac{z^2}{fac\,2} + \frac{z^4}{fac\,4} - . + \ldots$ umzukehren, so folgt, dass sich die umgekehrte Function $z = arc\cos\zeta$ durch eine Reihe der Form darstellen lässt

$$z = c_1\sqrt{1-\zeta} + c_2\sqrt{(1-\zeta)^2} + c_3\sqrt{(1-\zeta)^3} + c_4\sqrt{(1-\zeta)^4} + \ldots$$

Um die Coëfficienten c zu berechnen, bilden wir die Ableitung, indem wir die von $arc\cos\zeta$ aus § 139 entnehmen

$$arc\cos'\zeta = \left(\frac{\pi}{2} - arc\sin\zeta\right)' = -arc\sin'\zeta = -\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\zeta}}\cdot(2+\zeta-1)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\zeta}}\left(1 - \frac{1-\zeta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\zeta}}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)_1 \frac{1-\zeta}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)_2\left(\frac{1-\zeta}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)_3\left(\frac{1-\zeta}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)_4\left(\frac{1-\zeta}{2}\right)^4 - . + \ldots\right]$$

$$= -\frac{\frac{1}{2}c_1}{\sqrt{1-\zeta}} - c_2 - \tfrac{3}{2}c_3\sqrt{1-\zeta} - 2c_2(1-\zeta) - \tfrac{5}{2}c_5\sqrt{(1-\zeta)^3} - 3c_6(1-\zeta)^2 - \tfrac{7}{2}c_7\sqrt{(1-\zeta)^5}\ldots$$

Daraus folgt, dass $c_2\, c_4 \ldots c_{2n} \ldots$ gleich Null sein müssen, und dass $\frac{2n+1}{2}c_{2n+1} = (-1)^n\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\right)_n 2^{-n-1}$ sein muss. Es ist demnach

$$arc\cos\zeta = 2\sqrt{\frac{1-\zeta}{2}}\cdot\left[1 - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)_1\frac{1-\zeta}{2} + \frac{1}{5}\left(\frac{-1}{2}\right)_2\left(\frac{1-\zeta}{2}\right)^2 - \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{2}\right)_3\left(\frac{1-\zeta}{2}\right)^3 + . - . .\right].$$

Die Reihe convergirt, so lange $abs(1-\zeta) < 2$ ist, und ist in T als reguläres Functionselement anzusehen.

§ 142. Erweiterung des Umkehrproblems. Wir betrachten jetzt eine unendliche Reihe der Form $a = a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \ldots + a_n s^n + \ldots$, in der a, a_1, a_2, a_3, .. im Puncte Null reguläre Functionen von z sind. Dann nehmen wir noch an, dass a mit z verschwinde, a_1 hingegen mit z nicht verschwinde. Dann sind auch $a : a_1 = c'$, $a_2 : a_1 = -c'_2, \ldots$, $a_n : a_1 = -c'_n, \ldots$ in der Umgebung des Punctes Null durch Potenzreihen darstellbare Functionen. Voraussetzen müssen wir noch, dass der Convergenzkreis der Reihe für a_n für jedes n einen seiner Grösse nach über einer bestimmten Zahl bleibenden Radius habe, woraus dieselbe Eigenschaft für c'_n von selbst fliesst. Es bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, dass die Reihen $c'\, c'_1\, c'_2 \ldots$ den Convergenzradius Eins haben, denn es ist das durch eine Substitution kz für z immer zu erreichen, wenn k der kleinste Convergenzradius ist. Unter dieser Voraussetzung setzen wir $s\beta$ für s, so dass wir die Gleichung erhalten

$$c' : \beta = s - c'_2\beta s^2 - c'_3\beta^2 s^3 - c'_4\beta^3 s^4 \ldots$$

und machen β so klein, dass die constanten Glieder der Reihen $c'_2\beta, c'_3\beta^2, c'_4\beta^3, \ldots$ kleiner oder gleich Eins werden, und dann machen wir eine Substitution $z\alpha$ für z und nehmen α so klein, dass die Coëfficienten sämmtlicher Potenzen von z in den Reihen $c' : \beta, c'_2\beta, c'_3\beta^2, \ldots$ kleiner oder gleich Eins werden. Hierdurch mag die vorgelegte Gleichung die Gestalt gewonnen haben

$$c = s - c_2 s^2 - c_3 s^3 - \ldots - c_n s^n - \ldots,$$

in der die c Potenzreihen von z sind, deren Coëfficienten sämmtlich kleiner oder höchstens gleich den Coëfficienten der Reihe $1 : (1-z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$ sind, während c mit z verschwindet. Ist nun $abs\,z < 1$, so sind die $c_2\, c_3 \ldots$ endliche Grössen $< 1 : (1 - abs\,z)$, und es ist daher (§ 140) $s = c + b_1 c^2 + b_2 c^3 + \ldots + b_n c^{n+1} + \ldots$, worin $b_1, b_2, \ldots b_n \ldots$ formal positive ganze Functionen von $c_2 c_3 c_4 \ldots c_{n+2}, \ldots$ und mithin so lange reguläre Functionen von z sind, als $abs\,z < 1$ ist, und es convergirt diese Reihe jedenfalls so lange, als c den Werth $\frac{1}{2}(1-abs\,z):(3-abs\,z)$ nicht übersteigt. Dies ist für Werthe von z, deren absoluter Betrag eine gewisse von den Coëfficienten in c abhängige, jedoch von Null verschiedene Grösse nicht übersteigt, sicher der Fall, weil c mit z verschwindet.

Die hier nothwendig zu erledigende Frage ist aber die, ob sich diese Reihe nach Potenzen von z ordnen lasse. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Reihe $\sigma = \gamma + \beta_1\gamma^2 + \beta_2\gamma^3 + \ldots + \beta_{n-1}\gamma^n + \ldots$, in der die $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n, \ldots$ aus den $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$ dadurch hervorgegangen sind, dass die $c_1, c_2, \ldots c_n, \ldots$ sämmtlich durch $1 + z + z^2 + \ldots z^n + \ldots = 1:(1-z)$ ersetzt worden sind, und in der $\gamma = z:(1-z) = z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n \ldots$ ist. Es sind dann die Coëfficienten in $\gamma, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n \ldots$ dem absoluten Betrage nach grösser oder mindestens gleich den entsprechenden Coëfficienten in $c, b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$, und es werden also auch, wenn man nach Potenzen von z ordnet, die Coëfficienten der Entwickelung von $\gamma^n\beta_{n-1}$ grösser, mindestens aber gleich den Coëfficienten in der Entwickelung von $c^n b_{n-1}$ sein. Dass aber $\Sigma\gamma^{m+1}\beta_m$ sich in eine nach Potenzen von z fortschreitende Reihe umordnen lasse, ist leicht ersichtlich. Es ist nämlich σ eine Wurzelfunction, die durch die Gleichung

$$z = \sigma(1-z) - \frac{\sigma\sigma}{1-\sigma}, \quad \sigma\sigma(2-z) - \sigma + z = 0$$

bestimmt ist, und lässt sich solange nach Potenzen von z entwickeln, als $abs\,z < (2-\sqrt{3}):2$ ist, d. h. kleiner als die kleinste Wurzel der Gleichung ist

$$1 - 4z(2-z) = 1 - 8z + 4z^2 = 0,$$

der Discriminante der Gleichung für σ. In demselben Umfange muss a fortiori sich die Reihe für s in eine nach Potenzen von z fortschreitende Reihe umordnen lassen, so dass wir zu dem Satze gelangt sind:

Ist $a + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n + \ldots$ *eine in einer bestimmten Umgebung von* $s = 0$, $z = 0$ *convergente Doppelreihe, und sind also* $a, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *Reihen, die nach ganzen Potenzen von* z *fortschreiten, deren erste* a *mit* z *verschwindet, deren zweite* a_1 *hingegen mit* z *nicht verschwindet, so ist* s *eine in einer bestimmten Umgebung des Punctes Null reguläre Function von* z.

§ 143. Die algebraischen Functionen. Einen speciellen Fall der im vorigen Paragraphen behandelten Functionen bilden die algebraischen. Es sei

$$f(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n = 0$$

eine Gleichung zwischen s und z, $a_0, a_1, \ldots a_n$ seien ganze Functionen von z, von denen keine den m^{ten} Grad übersteigt. Ferner nehmen wir an, die Gleichung sei irreduktibel, d. h. sie lasse sich nicht in zwei Factoren zerlegen, die selbst ganze Functionen von s und rationale Functionen von z sind. Die Untersuchung einer solchen Gleichung würde in die Untersuchung zweier anderer, einfacherer zerfallen, und würde auf zwei selbständige nicht mit einander zusammenhängende Functionen s führen. Ist nun für $z = \alpha$ β ein Werth von s, der die Gleichung $f(s, \alpha) = 0$ befriedigt, (es giebt deren im Allgemeinen n,) so können wir durch die Substitution $z = z' + \alpha$, $s = s' + \beta$ die Function $f(s, z)$ in eine andere $\varphi(s', z')$ umformen, in der für $z' = 0$ $s' = 0$ eine Wurzel ist. Es sei alsdann $\varphi = a'_0 + a'_1 s' + a'_2 s'^2 + \ldots + a'_n s'^n = 0$, und es hat, wenn a'_1 mit z' nicht verschwindet, s' und also s den Charakter einer ganzen Function von z' in der Umgebung des Punctes Null, oder von z in der Umgebung des Punctes α, es lässt sich s in eine Reihe entwickeln

$$s = \beta + \beta_1(z-\alpha) + \beta_2(z-\alpha)^2 + \ldots + \beta_n(z-\alpha)^n + \ldots,$$

die einen bestimmten Convergenzkreis R hat; s hat dort den Charakter einer ganzen Function, oder ist dort eine reguläre analytische Function. Da aber für β im Allgemeinen n verschiedene Werthe gewählt werden können, so gelangt man zu n verschiedenen Functionselementen, so dass s dort n Zweige besitzt. Giebt es weniger als n Werthe für β, so verschwindet für einige derselben a'_1 mit z'. Lässt sich eine solche Reihe analytisch fortsetzen, so befriedigt die Fortsetzung in ihrem ganzen Geltungsbereiche die Gleichung $f(s, z) = 0$, auf Grund der Methode der unbestimmten Coëfficienten. Ist s auf dem Convergenzkreise R überall eine analytische Function von z auf Grund derselben Untersuchung, wie sie eben ausgeführt wurde, so ist R nicht der wahre Convergenzkreis, derselbe muss nothwendig durch eine singuläre Stelle oder einen Pol der Function s hindurchgehen.

Nehmen wir an, dass nur eine endliche Anzahl von singulären Stellen und Polen vorhanden sind, was der folgende Paragraph als richtig erweist, so wird es immer gelingen, die algebraische Function s durch eine endliche Anzahl von Functionselementen in ihrem ganzen Verlaufe darzustellen, nur muss man als Functionselemente Reihen zulassen, die nach ganzen Potenzen einer linearen Grundgrösse von der Form $(z-a):(z-b)$ fortschreiten. Solche Reihen wird man mit derselben Berechtigung als die absteigenden Reihen als Functionselemente zulassen dürfen. Man gelangt dann zu dem Satze, dass die algebraische Function s sich in ihren sämmtlichen Zweigen durch eine bestimmte endliche Anzahl von Functionselementen darstellen lässt. Wie sich diese Zweige um die singulären Stellen herum in einander fortsetzen, die Bildung eines Rationalitätsbereiches (s, z), der alle rationalen Functionen von s und z umfasst, die Herstellung einer wie s verzweigten Riemann'schen Fläche, die Bestimmung des Geschlechtes derselben u. s. w. bilden einen Untersuchungsbereich, der von einfacheren Fällen wie dem der §§ 133—136 abgesehen, in der Theorie der sogenannten Abel'schen Functionen fundamental ist. Hier muss es genügen, diese Fragen berührt zu haben; nur über die singulären Stellen der algebraischen Functionen soll im folgenden Paragraphen noch einiges beigebracht werden.

§ 144. Die singulären Stellen der algebraischen Functionen. Unsere Schlüsse werden hinfällig, wenn a'_1 mit z' verschwindet. In diesem Falle ist $f(s, z)$ für $z = \alpha$ nicht blos durch $s-\beta$, sondern durch $(s-\beta)^2$ theilbar, und also haben $f(s, \alpha)$ und $f'(s, \alpha) = a_1 + 2a_2 s + \ldots + n a_n s^{n-1}$, die Ableitung von f als Function von s, den Factor $s-\beta$ gemein. Sucht man nach § 52 den grössten gemeinsamen Theiler zwischen f und f', so erhält man, wenn f irreduktibel ist, die Discriminante als eine ganze Function von z von einem bestimmten Grade, die durch ihr Verschwinden angiebt, in welchen Puncten s eine Singularität besitzt, in welchen $f(s, z)$ und $f'(s, z)$ gleichzeitig verschwinden. Wir schliessen daraus, dass es nur eine bestimmte endliche Anzahl singulärer Puncte giebt, wie im vorigen Paragraphen vorausgesetzt wurde. Pole kann s nur da haben, wo a_n verschwindet, oder, wenn z in a_n den m^{ten} Grad nicht erreicht, im Unendlichen; also kann auch die Zahl der Pole nur eine endliche sein. Wir nehmen nun an, dass nur $f'(s, z)$, nicht aber zugleich die zweite Ableitung $f''(s, z) = 2a_2 + 6a_3 s + \ldots + n(n-1) a_n s^{n-2}$ für $z = \alpha$, $s = \beta$ verschwindet. Setzen wir $f(s, z) = a'_0 + a'_1(s-\beta) + a'_2(s-\beta)^2 + \ldots + a'_n(s-\beta)^n$ und machen die Substitution $z-\alpha = \zeta^2$, $s-\beta = \sigma . \zeta$, $a'_0 = b_0 \zeta^2$, $a'_1 = b_1 \zeta^2$, $a'_2 = b_2$, $a'_3 = b_3$, .. $a'_n = b_n$, wo $b_0 b_1 \ldots b_n$ ganze Functionen von ζ sind, von denen b_2 nicht mit ζ verschwindet, so erhalten wir aus $f(s, z)$ durch Division mit $\zeta\zeta$ die Gleichung

$$0 = b_0 + b_1 \zeta \sigma + b_2 \sigma^2 + b_3 \sigma^3 \zeta^3 + \ldots + b_n \sigma^n \zeta^n.$$

Verschwindet b_0 mit ζ nicht, so wird σ mit ζ nicht Null, sondern nimmt für $\zeta = 0$ den Werth $\pm \sqrt{-b_0(0) : b_2(0)}$ an, wenn $b_0(0)\, b_2(0)$ die Werthe von $b_0 b_2$ für $\zeta = 0$ sind. Wir wollen einen dieser Werthe mit γ bezeichnen. Durch die Substitution $\sigma = \sigma' + \gamma$ verwandelt sich unsere Gleichung in die neue $0 = c_0 + c_1 \sigma' + c_2 \sigma'^2 + \ldots + c_n \sigma'^n$, wo c_0 für $\zeta = 0$ den Werth $b_0(0) + \gamma^2 b_2(0) = 0$, c für $\zeta = 0$ den Werth $2\gamma b_2(0)$, c_2 den Werth $b_2(0)$ annimmt, so dass σ', weil die neue Gleichung den Bedingungen des vorigen Paragraphen genügt, eine nach Potenzen von ζ entwickelbare Function ist. Es ist also

$$\sigma = \gamma + \gamma_1 \zeta + \gamma_2 \zeta^2 + \ldots + \gamma_n \zeta^n + \ldots,$$
$$s = \beta + \gamma \sqrt{z-\alpha} + \gamma_1 \sqrt{(z-\alpha)^2} + \gamma_2 \sqrt{(z-\alpha)^3} + \ldots \gamma_n \sqrt{(z-\alpha)^{n+1}} + \ldots,$$

worin $\gamma_1 \gamma_2 \ldots$ Constanten sind, und es hat s in der Umgebung des Punctes $z = \alpha$ zwei Zweige, die sich ineinander fortsetzen, wenn z den Punct α umkreist. Im Rationalitätsbereiche (s, z) wird man solche nach Potenzen einer Wurzel fortschreitende Reihen wie im § 135 als Functionselemente zulassen können, sie convergiren sicher in einem Kreise, der den nächstliegenden singulären Punct trifft.

Wenn aber b_0 verschwindet, so muss a'_0 den Factor $(z-\alpha)^2$ enthalten. Dann kann man $z-\alpha = z'$, $s-\beta = s'z'$ setzen, und gewinnt so nach Division mit z'^2 eine Gleichung der Form $a''_0 + a''_1 s' + a''_2 s'^2 + a''_3 s'^3 z' + \ldots + a''_n s'^n z'^{n-2} = 0$. Die Function s' ist nun weiter zu untersuchen, und hat jedenfalls dann in der Umgebung des Punctes $z' = 0$ den Charakter einer ganzen Function, wenn nicht für $z' = 0$ wieder Werthe der verschiedenen Zweige von s' zusammenfallen. Hierauf wollen wir nicht weiter eingehen, und nur bemerken, dass diese Untersuchungen mit denen zusammenfallen, auf die in der Geometrie die Betrachtung der mehrfachen Puncte, Rückkehrpuncte u. s. w. führt.

§ 145. Ueber Fortsetzung soll nur noch eine Bemerkung hier Platz finden. Ist $f(z) = \Sigma a_m z^m$ ein Functionselement mit dem Convergenzkreise R, und sind $f_a(z)$ $f_b(z)$ Transformationen dieser Elemente in $\Sigma A_m(z-a)^m$, $\Sigma B_m(z-b)^m$ (§ 66), wo ab im Innern des Kreises R liegen, und R_a bez. R_b seien die Convergenzkreise dieser Reihen, die beide aus R heraustreten, und im Innern von R sich in einem Puncte C, ausserhalb desselben im Puncte C' schneiden mögen. $A = (R, R_a)$ $B = (R, R_b)$ seien die Schnittpuncte der Kreise $R\, R_a\, R_b$, die mit C das den Bezirken $R\, R_a\, R_b$ gemeinsame dreieckige Gebiet ABC bestimmen. Wir wissen aus früheren Untersuchungen, dass in diesem Dreiecke $f(z)$ $f_a(z)$ $f_b(z)$ einander identisch gleich sind. Es sind aber auch $f_a(z)$ $f_b(z)$ in dem Dreiecke ABC' einander identisch gleich. Ist nämlich d der Mittelpunct der Sehne AB, so transformiren wir $f(z)$ nach § 66 in eine Reihe der Form $f_d(z) = \Sigma D_m(z-d)^m$, die nach unseren Sätzen über den wahren Convergenzkreis sicher convergirt in einem Kreise R_d, der durch die beiden Puncte AB hindurchgeht. Dieser Kreis tritt zum Theil aus R heraus und enthält ein Stück des Dreieckes ABC'. In diesem Stücke ist $f_d \equiv f_a \equiv f_b$. Indem man den Punct d weiter in einen Punct dieses Stückes verlegt, beweist man den Satz successive für das ganze Gebiet ABC'.

Lässt sich eine analytische Function über eine geschlossene Linie hinaus nicht fortsetzen, weil diese überall dicht mit singulären Puncten besetzt ist, so sagt man, die Function besitze eine natürliche Begrenzung.

Dafür, dass um einen singulären Punct herum die analytische Fortsetzung zu verschiedenen Zweigen einer Function führen kann, sind der Logarithmus und die algebraischen Functionen das einfachste Beispiel. In der elementaren Functionentheorie können die über diesen Gegenstand hier angestellten Erörterungen genügen.

§ 146. Der Logarithmus einer in einem einfach zusammenhängenden Ebenenstück S eindeutigen analytischen Function von z wächst um so viele Multipla von $2i\pi$, wenn z um die Berandung s dieses Gebietes herumgeführt wird, als die Anzahl der Puncte Null die der Puncte Unendlich darin übertrifft. — Ist zunächst $f(z)$ eine Function $\Sigma a_m z^m$, die im Convergenzkreise R nicht verschwindet, so ist $lg\, f(z)$ in demselben Kreise R eine durch ein einziges Functionselement darstellbare analytische Function. Es ist $lg\, \Sigma a_m z^m = lg\, a_0 + lg\left(1 + \Sigma \frac{a_{m+1}}{a_0} z^{m+1}\right)$ nach § 71 durch eine Potenzreihe darstellbar, die so lange convergirt, als $abs\, z < \varrho$ ist, wenn $\Sigma\, abs\, \varrho^{m+1} a_{m+1} : a_0 = 1$ ist. Dieser Kreis ϱ ist aber nicht der wahre Convergenzkreis. Da nämlich $f(z)$ in keinem Puncte b des Randes von ϱ verschwindet, so ist dort $f(z) = f(b) + f'(b)(z-b) + \frac{1}{2} f''(b)(z-b)^2 + \ldots$ und $lg\, f(z)$ ist in b eine analytische Function mit einem bestimmten Convergenzkreise. Dies gilt für alle Puncte b des Randes von ϱ. Demnach muss die Reihe für $lg\, \Sigma a_m z^m$ weiter convergiren, und ϱ kann nicht kleiner als R sein. Es ist mithin $lg\, f(z)$ eine eindeutige analytische Function im Kreise R, die stets denselben Werth wieder annimmt, wenn man die Variabele z von einem Punct z_0 in einem Zuge in R herum zum Punct z_0 zurückführt, $lg\, f(z)$ dabei mit z stetig ändernd.

Wird die Function $f(z)$ analytisch fortgesetzt durch ein Functionselement, das in einem Kreise R_a convergirt, dessen Mitte a im Innern von R liegt, und verschwindet $f(z)$ auch in diesem Kreise nicht, und ist s ein Zug, der in einem Puncte z_0 beginnt, in R und R_a herum zum Puncte z_0 zurückläuft, so nimmt $lg\, f(z)$ auch bei stetiger Aenderung längs s zuletzt wieder denselben Werth an als zu Anfang.

Denn zieht man die gemeinsame Sehne l von RR_a, so muss diese die Linie l zweimal oder $2n$-mal schneiden, wenn s nicht bloss in einem der Kreise verläuft. Es genügt, ein nur zweimaliges Schneiden zu betrachten, das abgeschnittene Sehnenstück sei l_1, und die Schnittpuncte seien A und B. Führen wir nun z über s von z_0 nach z_0, so können wir den Weg dahin abändern, dass wir in A angekommen über l_1 nach B gehen, von da nach A zurück über s weiter nach B. Dieser Theil von s mag in R_a verlaufen. Wir kommen nach dem erwiesenen Satze zum zweiten Male in B genau mit demselben Werthe von $lg\,f(z)$ an als das erste Mal. Führen wir nun z von B zu z_0 zurück, so kommen wir nach demselben Satze in z_0 mit dem Anfangswerthe an. Das Linienstück l_1 zwischen A und B kann aber offenbar fortgelassen werden, weil $lg\,f(z)$ auf dem Wege von A nach B und von B nach A zurück, in A mit demselben Werthe wieder ankommt. Die weitere Gültigkeit des Satzes für ein Gebiet S, in dem $f(z)$ analytisch ist und nicht verschwindet, leuchtet nun von selbst ein. Nur muss der Zug s nicht blos selbst im Innern von S verlaufen, sondern er muss ein Ebenenstück begrenzen, in dessen Innern überall $f(z)$ analytisch regulär ist und nicht verschwindet. Denn für jedes Ebenenstück, das durch eine im Innern von S verlaufende, zwei Puncte von s verbindende Linie vom Innern von s abgetrennt wird, muss derselbe Satz gelten. Ist s eine knotenlose Linie, so nennen wir ein von ihm begrenztes Ebenenstück ein einfach zusammenhängendes Stück. Es ist dabei angenommen, dass s aus einem Zuge, nicht aus getrennten Stücken besteht, wie die Beweisführung erfordert. Die Linie s kann der Rand von S sein.

Ist nun weiter $f(z)$ eine eindeutige analytische Function in einem einfach zusammenhängenden Gebiete S, die in den Puncten $a_1\, a_2 \,..\, a_n$ bez. in der $\alpha_1, \alpha_2, \,..\, \alpha_n{}^{ten}$ Ordnung verschwindet, in den Puncten $b_1\, b_2 \,..\, b_m$ in der $\beta_1, \beta_2, \,..,\, \beta_m{}^{ten}$ Ordnung unendlich gross wird, so setzen wir

$$(z-b_1)^{\beta_1}\cdot(z-b_2)^{\beta_2}\cdots(z-b_m)^{\beta_m} f(z) : (z-a_1)^{\alpha_1}\cdot(z-a_2)^{\alpha_2}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n} = w(z),$$

so ist dann $w(z)$ eine in S nicht verschwindende reguläre analytische Function, und $lg\,f(z) = lg\,w(z) + \alpha_1\, lg\,(z-a_1) + \alpha_2\, lg\,(z-a_2) + \,..\, + \alpha_n\, lg\,(z-a_n) - \beta_1\, lg\,(z-b_1) - \beta_2\, lg\,(z-b_2) - \,..\, - \beta_m\, lg\,(z-b_m)$, und $lg\,f(z)$ wächst, wenn z um den Rand von S herumgeführt wird um $2(\alpha_1+\alpha_2+\,..\,+\alpha_n-\beta_1-\beta_2-\,..\,-\beta_m)i\pi$, w. z. b. w.

§ 147. Die Umkehrung der regulären Functionen. Es sei $\zeta = f(z)$ in einem einfach zusammenhängenden Stücke S eine reguläre Function, und es werde der Rand s von S in die ζ-Ebene auf den knotenlosen Rand σ eines Ebenenstückes Σ abgebildet. Dann bedecken die Werthe von ζ das Gebiet Σ einfach und überall, ich meine so, dass ζ auf jeden Werth im Innern von Σ einmal und nur einmal fällt. — Ist ζ_0 ein Werth von ζ, der dem Puncte z_0 im Innern von S entspricht, so ist $lg\,(\zeta_2-\zeta_0) - lg\,(\zeta_1-\zeta_0) = lg\,(\zeta_2-\zeta_0):(\zeta_1-\zeta_0)$, der Zuwachs, den $lg\,(\zeta-\zeta_0)$ erfährt, wenn z von einem Puncte z_1 des Randes s zu einem Puncte z_2 desselben Randes geführt wird $[f(z_1) = \zeta_1,\ f(z_2) = \zeta_2)$ in seinem imaginären Theile die mit i multiplicirte, vom Puncte ζ_0 aus gesehene scheinbare Grösse der Strecke $\zeta_1\,\zeta_2$. Lassen wir z auf s in sehr kleinen Schritten von z_1 nach z_2 nach z_3 .. rücken, und zuletzt wieder auf z_1 fallen, so hat sich der reelle Theil von $lg\,(\zeta-\zeta_0)$ nicht geändert, oder vielmehr er nimmt bei der Rückkehr von z im Puncte z_1 genau denselben Werth an als beim Ausgange. Der imaginäre Theil aber ist um $2\pi i$ gewachsen, wenn ζ_0 im Innern von Σ liegt, weil dann die scheinbare Grösse der Randcurve σ gleich 2π ist. Liegt aber ζ_0 ausserhalb Σ, so ist der imaginäre Zuwachs Null. Nach dem vorigen Paragraphen muss nun, da $f(z)$ in S als endlich vorausgesetzt wurde, ζ den Werth ζ_0 im Innern von Σ einmal und nur einmal in S annehmen, denn $lg\,(\zeta-\zeta_0)$ wächst ja um $2i\pi$, wenn ζ_0 in Σ liegt. Liegt aber ζ_0 nicht im Innern von Σ, so nimmt ζ den Werth ζ_0 in S nicht an. Das Bild des Gebietes S ist das überall einfach bedeckte Gebiet Σ.

Hieraus folgt, dass umgekehrt z in Σ eine eindeutige, und zwar nach § 140 eine analytische Function von ζ ist, die jeden Werth in S einmal und nur einmal annimmt. Dies ist etwa eine Erweiterung des Satzes, dass eine monotone Function einer reellen Veränderlichen eindeutig umkehrbar ist.

Die Ordnungen. Ordnungssymbole. Schärfere Convergenzkriterien.

§ 148. Die Ordnungen. Wenn eine stetige Function der reellen Veränderlichen x an der Stelle a den Werth A annimmt, so verschwindet $f(x) - A$ für $x = a$. Nähert sich $[f(a+x) - A] : x$ für abnehmende x einem bestimmten von Null verschiedenen Grenzwerthe, so sagt man $f(x) - A$ verschwinde dort in der ersten Ordnung. Ist μ eine beliebige positive Zahl, und nähert sich $[f(x) - A] : (x-a)^\mu$ für abnehmende $x - a$ einem endlichen Grenzwerthe, so sagt man, $f(x)$ werde für abnehmende $x - a$ an der Stelle a in der μ^{ten} Ordnung Null; man kann diese Zahl μ auch als Maass der Stetigkeit von $f(x)$ an der Stelle a ansehen. Dieses Maass ist um so grösser, je grösser μ ist. Nähert sich für ein negatives μ unser Quotient $[f(z) - A] : (x-a)^\mu$ einem endlichen Werthe, so wird $f(x)$ dort unendlich gross, und man kann $-\mu$ als die Ordnung des Unendlichwerdens ansehen. Nähert sich für reelle (etwa positiv) über alle Grenzen wachsende x $f(x) : x^\mu$ einem bestimmten Werthe, so sagt man, $f(x)$ werde im Unendlichen in μ^{ter} Ordnung unendlich gross. An welchen Stellen man das Unendlichwerden oder Verschwinden einer Function untersucht, ist nicht wesentlich, wenn es nur darauf ankommt, die dabei vorkommenden möglichen Ordnungen zu discutiren und kennen zu lernen. Wir wollen deshalb eine Reihe von Functionen für positiv ins Unendliche wachsende x, also im Unendlichen betrachten.

Sind zwei Functionen von x in Bezug auf die Ordnung ihres Unendlichs im Unendlichen zu vergleichen, so sagen wir, die Ordnung von $f(x)$ sei die höhere oder grössere gegen die von $\varphi(x)$, wenn $f(x) : \varphi(x)$ mit x über alle Grenzen wächst. Dies ist ein ausreichendes und durch die Natur der Sache selbst gegebenes Princip, die Ordnungen der Grösse nach mit einander zu vergleichen. Ist $\nu > \mu$, so ist die Ordnung von x^ν grösser als die von x^μ. Jede reelle Zahl μ ordnet sich einer bestimmten Ordnung des Unendlichwerdens zu, den negativen Zahlen μ kann man solche Functionen entsprechen lassen, deren reciproke im Unendlichen in der $-\mu^{ten}$ Ordnung unendlich gross werden. Das Umgekehrte findet aber nicht statt, dass jeder Ordnung eine bestimmte Zahl zugewiesen werden könne, da es sowohl bestimmte Ordnungen giebt, die über alle Grenzen gross sind, als auch Ordnungen, die kleiner als jede angebbare Zahl und doch von Null verschieden sind. Wir wissen, dass $e^x : x^n$ für jedes noch so grosse n mit wachsenden x über alle Grenzen wächst, so dass der Function eine (actuell) unendlich hohe Ordnung zuzuweisen wäre. Andererseits wächst auch, wie klein positiv auch ε sein mag, $x^\varepsilon : lg\, x$ für wachsende x über alle Grenzen, und die Ordnung von $lg\, x$ ist kleiner als jede noch so kleine Zahl und doch grösser als Null, wenn man 0 als die Ordnung der Constanten (x^0) ansieht. Offenbar ist, wenn $\mu > 1$ ist, die Ordnung von $(lg\, x)^\mu$ grösser als die von $lg\, x$, und zwar μ-mal grösser, d. h. wenn $lg\, x$ als Maasseinheit der Ordnungen angenommen würde, so würde $(lg\, x)^\mu$ die Maasszahl μ zuzuweisen sein. Um Symbole zu erhalten, welchen auch die logarithmischen Ordnungen eindeutig zugewiesen werden können, kann man die Potenzordnungen den gemeinen Zahlen, die logarithmischen Ordnungen Zahlen mit einer neuen Einheit l_1 zuweisen, etwa so, dass die Ordnung der Function $x^\alpha . (lg\, x)^\beta$ einem complexen Symbol von der Form $\alpha + \beta\, l_1$ zugewiesen wird. — Gegen die logarithmischen Ordnungen sind die der Logarithmen von Logarithmen wieder unendlich klein, und um ihnen Zahlen oder Symbole zuzuweisen, muss man wieder eine neue Einheit etwa l_2 einführen, so dass das complexe Symbol $\alpha + \beta l_1 + \gamma l_2$ das Ordnungssymbol der Function $x^\alpha (lg\, x)^\beta\, (lg\, lg\, x)^\gamma$ ist. So kann man fortfahren und der Function $x^\alpha (lg\, x)^\beta\, (lg\, lg\, x)^\gamma\, (lg^{(3)}\, x)^\delta \ldots (lg^{(n)}\, x)^\nu$, $[lg\, lg\, lg\, x = lg^{(3)}(x)$, u. s. w. gesetzt] ein complexes Symbol von der Form $\alpha + \beta\, l_1 + \gamma\, l_2 + \ldots + \nu l_n$ zuweisen.

§ 149. Die Ordnungssymbole. Die eben gebildeten Formen können als complexe zahlenartige Gebilde mit unendlich vielen Einheiten angesehen werden, wobei auch noch rückwärts Einheiten etwa $l_{-1}, l_{-2}, \ldots$ zugefügt werden könnten, welche den Ordnungen von $e^x, e^{e^x}, \ldots$ entsprechen. Dabei tritt aber ein eigenthümlicher Umstand ein, der sie von complexen Zahlen unterscheidet. So viel Einheiten ein complexes Zahlengebiet enthält, so viel Dimensionen hat es. Die hier gebildeten Zahlen aber sind, wenigstens in Riemann's Sinne, Zahlen von einer Ausdehnung, so dass sie unendlich mal unendlich viel dichter als die gemeinen Zahlen sind. Riemann sagt (Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, § 2), „geht man bei einem Begriffe, dessen Bestimmungsweisen eine stetige Mannigfaltigkeit bilden, von einer Bestimmungsweise auf eine bestimmte Art zu einer anderen über, so bilden die durchlaufenen Bestimmungsweisen eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, deren wesentliches Kennzeichen ist, dass in ihr von einem Puncte nur nach zwei Seiten, vorwärts oder rückwärts, ein stetiger Fortgang möglich ist". Dieses wesentliche Kennzeichen ist aber hier vorhanden. Der Begriff, der verschiedene Bestimmungen zulässt, ist bei uns der Begriff der Ordnung. Von jeder Ordnung giebt es nur nach zwei Seiten einen Fortschritt, zu einer grösseren oder zu einer kleineren Ordnung. Es ist ein solcher nur nach zwei Seiten möglich. Die Symbole $\alpha + \beta l_1 + \gamma l_2 + \delta l_3 + \ldots$, $\alpha' + \beta' l_1 + \gamma' l_2 + \delta' l_3 + \ldots$ sind gleich, wenn $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, .. ist, das letztere Symbol aber ist kleiner als die erste, wenn die erste der Differenzen $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\gamma - \gamma'$, $\delta - \delta'$, .., die nicht verschwindet, positiv ist. — Nun lassen sich freilich auch die gemeinen complexen Zahlen durch Imperative in eine Reihe so zu sagen einer Dimension anordnen, indem man zum Beispiel festsetzt, dass von zwei Zahlen $\alpha + \beta i$, $\alpha' + \beta' i$ die erstere die grössere sein soll, wenn von den beiden Differenzen $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$ entweder die erste positiv ist, oder sofern diese Null ist, wenn $\beta - \beta'$ positiv ist. Ein gewisser Unterschied zwischen der eindimensionalen Anordnung der Ordnungssymbole und der gemeinen complexen Zahlen liegt aber jedenfalls darin, dass bei den ersteren die Anordnung eine durch die Natur der Sache gegebene, die der gemeinen complexen Zahlen eine künstlich erzwungene ist. Ergänzt man die Riemann'sche Definition der einfachen Ausdehnung durch eine Bemerkung von Ballauf, dass man in einer einfach ausgedehnten continuirlichen Mannigfaltigkeit eine abzählbar unendliche discrete Mannigfaltigkeit bestimmen könne, die überall dicht ist, d. h. so beschaffen ist, dass in jedem noch so kleinen Intervalle unendlich viele Puncte der abzählbaren Mannigfaltigkeit liegen, so bilden unsere Symbole nicht eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Denn giebt man dem α und dem β in $\alpha + \beta l_1$ discret unendlich viele Werthe, so muss es auch ein α' geben, welches in dieser discreten Mannigfaltigkeit nicht vorkommt. Es fehlen dann alle Gebilde der Form $\alpha' + \beta i$ in dieser Mannigfaltigkeit, wo β eine continuirliche Mannigfaltigkeit durchläuft. Die gegebene discrete Mannigfaltigkeit ist nicht überall dicht in der der Reihe $\alpha + \beta i$. Oder es kommen in der discreten Mannigfaltigkeit alle α vor; dann lässt sich die Menge dieser Zahlen nicht auf die Reihe ganzer Zahlen eindeutig beziehen; die Mannigfaltigkeit ist nicht abzählbar unendlich.

Aber auch als Zahlen darf man nach einer Bemerkung von Herrn Schönflies Gebilde von der Form

$$\ldots + a_n l_{-n} + a_{n-1} l_{-n+1} + \ldots + \alpha + \alpha' l_1 + \alpha'' l_2 + \ldots + \alpha^{(n)} l_n + \ldots$$

nicht einführen, weil das Product zweier solcher Zahlen, wenn man etwa $l_m l_n = l_{m+n}$ als Multiplicationsgesetz annimmt, für die Coëfficienten des Productes im Allgemeinen divergente, also nichts bedeutende Reihen erhalten würde.

§ 150. Die Frage nach dem kleinsten Unendlich. Da $lg\, lg(x)$ mit wachsenden x schwächer als $lg(x)$, $lg^{(n+1)}(x)$ schwächer als $lg^{(n)}(x)$ unendlich wird, und da man n grösser und grösser nehmen kann, so gelangt man offenbar niemals zu einer Ordnung, die die kleinste von 0 verschiedene ist. Merkwürdig aber ist es, dass, wie Herr du Bois-Reymond gezeigt hat (Crelles Journal Band 76, pag. 88), Functionen gebildet werden können, die schwächer über alle Grenzen wachsen als $lg^{(n)}(x)$, wie gross auch n sein mag. Bildet man nämlich eine Function $\psi(x)$ in folgender Weise, dass man ihr den Werth 1 für das x zuertheilt, für welches $lg\, x = 1$ wird, $(x = e)$, den Werth 2 für das x, für welches $lg\, lgx = 2$ wird, den Werth 3 für das x, für welches $lg\, lg\, lgx = 3$ wird u. s. w., den Werth n für das x, für welches $lg^{(n)}(x) = n$ wird u. s. f., so kann man leicht für andere Werthe von $x\, \psi$ so einrichten, dass ψ fortwährend wächst und überall stetig ist, z. B. dadurch, dass man zwischen x_n und x_{n+1}, wenn $\psi(x_n) = n$, $\psi(x_{n+1}) = n+1$ ist, $\psi(x) = x:(x_{n+1} - x_n) + [nx_{n+1} - (n+1)x_n]:(x_{n+1} - x_n)$ setzt, und es wird dann die Function $\psi(x)$ mit wachsenden x unendlich gross. Offenbar aber verschwindet $\psi(x):lg^{(n)}(x)$, was auch n sein mag, weil $\psi(x)$ von $x = x_{n+1}$ an immer kleiner als $lg^{(n+1)}(x)$ bleibt, womit die Behauptung erwiesen ist. $lg\,\psi(x)$ wird offenbar wieder langsamer unendlich gross u. s. w., so dass unendlich viele solcher Functionen existiren. Die Ordnungssymbole $\alpha + \beta l_1 + \gamma l_2 + ..$ reichen demnach keineswegs aus, jeder möglichen Ordnung ein solches Symbol zuzuweisen, sondern es lassen sich dieselben noch unendlich viel dichter machen, und es ist eine Grenze niemals zu erreichen, und wirklich erschöpfende Systeme von Ordnungssymbolen giebt es nicht.

§ 151. Schärfere Convergenzkriterien. Wir fanden im § 18, dass die Reihe $\Sigma 1:(m+1)^2$ absolut convergent sei. Es ist aber leicht zu zeigen, dass auch $\Sigma 1:(m+1)^{1+\sigma}$ convergire, wie klein auch die positive Zahl σ sein mag. Sind a, b positive Zahlen, so ist die Reihe $\Sigma(-1)^m:(am+b)^\sigma$ convergent, wenn σ positiv ist, weil ihre Terme zu Null monoton abnehmen, und die Zeichen wechseln. Wir setzen die Summe derselben gleich $S(\sigma)$, so können wir $S(\sigma)$ durch die Reihen ausdrücken

$$S(\sigma) = \Sigma\left(\frac{1}{(2am+b)^\sigma} - \frac{1}{[(2m+1)a+b]^\sigma}\right) = \frac{1}{b^\sigma} - \Sigma\left(\frac{1}{[(2m+1)a+b]^\sigma} - \frac{1}{[(2m+2)a+b]^\sigma}\right),$$

die absolut convergent sind. Schreiben wir die erste dieser Formen wie folgt

$$S(\sigma) = \Sigma\left[1 - \left(\frac{2ma+b}{(2m+1)a+b}\right)^\sigma\right]:(2ma+b)^\sigma = \Sigma\left\{1 - \left[1 - \frac{a}{2ma+b}\left(1 - \frac{a}{(2m+1)a+b}\right)\right]^\sigma\right\}:(2ma+b)^\sigma,$$

und setzen auf Grund des binomischen Lehrsatzes

$$\left[1 - \frac{a}{2na+b}\left(1 - \frac{a}{[(2n+1)a+b]}\right)\right]^\sigma = 1 - \frac{\sigma a}{2na+b} + \frac{\sigma aa}{(2na+b)\,[(2n+1)a+b]} + \frac{\sigma(\sigma-1)\,aa\Theta_n}{2\,(2na+b)^2},$$

so ist Θ_n eine endliche, mit wachsenden n gegen 1 convergirende Zahl. Setzen wir weiter die Reihe

$$\Sigma\frac{1}{(2ma+b)^{1+\sigma}\,[(m+1)\,a+b]} + \frac{(\sigma-1)\,\Theta_n}{2\,(2ma+b)^{2+\sigma}} = E,$$

die absolut convergent ist, weil ihr n^{ter} Term rascher wie $1:n^2$ abnimmt, so ist

$$S(\sigma) = \Sigma a\sigma:(2am+b)^{1+\sigma} + aa\sigma E.$$

Da nun die Convergenz von $S(\sigma)$ für jedes noch so kleine σ bekannt ist, so folgt, dass $\Sigma 1:(2am+b)^{1+\sigma}$, oder, wenn man $b=0$, $a=\frac{1}{2}$ setzt, die Reihe $\Sigma 1:(m+1)^{1+\sigma}$ convergent ist, was zu beweisen war. Wir können hier aber noch aus der zweiten Form von $S(\sigma)$ ein Resultat erhalten, (vergl. Heine, Crelles Journal B. 31, pag. 133), welches Dirichlet mit der Theorie der bestimmten Integrale gefunden hat, das Resultat, dass $lim\ \Sigma a\sigma:(am+b)^{\sigma+1} = 1$ sei, wenn $\lim \sigma = 0$ ist. Es lässt sich nämlich die zweite Form von $S(\sigma)$, genau so wie die erste transformirt, in die Gestalt schreiben

$$S(\sigma) = 1:b^\sigma - \Sigma a\sigma:[(2m+1)\,a+b]^{1+\sigma} + aa\sigma H,$$

wo H wieder eine endliche Zahl (eine convergente Reihe) ist. Zieht man diesen Ausdruck für $S(\sigma)$ von dem früher gefundenen ab, so erhält man die Gleichung $1:b^\sigma + aa\sigma(H-E) = \Sigma a\sigma:(am+b)^{1+\sigma}$, wie klein auch σ sein mag. Da aber b^σ der Grenze 1 zustrebt, so ist $lim\ \Sigma a\sigma:(am+b)^{1+\sigma} = 1$.

Die Reihe ΣA_m ist nach diesen Untersuchungen convergent, wenn $lim\ A_n n^{1+\sigma}$ für ein beliebig kleines positives σ mit wachsenden n endlich bleibt oder verschwindet. Will man hierfür lieber ein Kriterium haben, in welchem $A_{n+1}:A_n$ den Ausschlag giebt, was manchmal bequemer ist, obgleich ein solches Kriterium immer weniger allgemein ist, weil es durch (endliche) Umordnung der Terme gestört wird, so beachten wir, dass ΣA_m convergirt, wenn (von einem bestimmten Terme an) $abs\,(A_{n+1}:A_n) < (n-1)^{1+\sigma}:n^{1+\sigma}$ ist. Es ist aber, wie der binomische Satz lehrt, für hinlänglich grosse n

$$(n-1)^{1+\sigma} : n^{1+\sigma} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{1+\sigma} > 1-\frac{1}{n}-\frac{\sigma}{n},$$

so dass also ΣA_m convergirt, wenn von einem bestimmten Terme ab $abs\,(A_{n+1} : A_n) < 1 - \frac{1}{n} - \frac{\sigma}{n}$ ist. Hierfür eine Anwendung. Mit Gauss versteht man unter $F(a, b, c, z)$ die hypergeometrische Reihe

$$\frac{fac\,(c-1)}{fac\,(a-1)\,fac\,(b-1)}\,\Sigma\,\frac{fac\,(a+m-1)\;fac\,(b+m-1)}{fac\,m\;\;fac\,(c+m-1)}\,z^m =$$

$$1+\frac{a}{1}\frac{b}{c}\,z+\frac{a}{1}\,\frac{a+1}{2}\,\frac{b}{c}\,\frac{b+1}{c+1}z^2+\frac{a}{1}\,\frac{a+1}{2}\,\frac{a+2}{3}\,\frac{b}{c}\,\frac{b+1}{c+1}\,\frac{b+2}{c+2}z^3+\frac{a}{1}\,\frac{a+1}{2}\,\frac{a+2}{3}\,\frac{a+3}{4}\,\frac{b}{c}\,\frac{b+1}{c+1}\,\frac{b+2}{c+2}\,\frac{b+3}{c+3}z^4+..,$$

welche in jedem Falle so lange absolut convergirt, als $abs\, z < 1$ ist. Wir fragen, in welchen Fällen sie auch noch für $z = 1$ convergirt. Schreiben wir das allgemeine Glied der Reihe für $z = 1$ in die Form

$$\frac{a\left(1+\frac{a}{1}\right)e^{-\frac{a}{1}}.\left(1+\frac{a}{2}\right)e^{-\frac{a}{2}}..\left(1+\frac{a}{n}\right)e^{-\frac{a}{n}}.\,b\left(1+\frac{b}{1}\right)e^{-\frac{b}{1}}.\left(1+\frac{b}{2}\right)e^{-\frac{b}{2}}..\left(1+\frac{b}{n}\right)e^{-\frac{b}{n}}}{\frac{c}{1}\left(1+\frac{c}{1}\right)e^{-\frac{c}{1}}..\left(1+\frac{c}{n}\right)e^{-\frac{c}{n}}.\,e^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+..+\frac{1}{n}-lg\,n\right)(c-a-b)}.\,n^{c-b-a}.\,(n+1)},$$

so nähern sich für wachsende n die Ausdrücke

$$\frac{a}{1}.\left(1+\frac{a}{1}\right)e^{-\frac{a}{1}}..\left(1+\frac{a}{n}\right)e^{-\frac{a}{n}},\; b.\left(1+\frac{b}{1}\right)e^{-\frac{b}{1}}..\left(1+\frac{b}{n}\right)e^{-\frac{b}{n}},\; c\left(1+\frac{c}{1}\right)e^{-\frac{c}{1}}..\left(1+\frac{c}{n}\right)e^{-\frac{c}{n}}$$

bestimmten endlichen Werthen, weil sie absolut convergente Producte sind (§ 123), ebenso nähert sich $e^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+..+\frac{1}{n}-lg\,n\right)c-a-b}$ einem bestimmten Werthe $e^{M(c-a-b)}$, wenn M die Mascheroni'sche Constante bedeutet. Wenn demnach der reelle Theil von $c-a-b$ positiv, etwa gleich σ ist, so bleibt $A_n n^{1+\sigma}$ für wachsende n eine endliche Grösse, und die Reihe ist also convergent, so lange der reelle Theil von c grösser als der von $a+b$ ist.

Gegen Null convergiren die Coëfficienten A_n auch noch, wenn der reelle Theil von $c-a-b$ grösser als -1 ist, woraus man wenigstens für reelle a, b, c mittels der im § 102 angewandten Methode leicht schliesst, dass $F(a, b, c, z)$ auf dem Convergenzkreise, abgesehen vom Puncte $z = 1$, noch convergirt, wenn $c + 1 > a + b$ ist.

§ 152. **Die logarithmischen Convergenzkriterien und ihre Tragweite.** Wir bezeichnen wieder mit $lg^{(m)}z$ die Function von z, die entsteht, wenn der Logarithmus von z, hiervon der Logarithmus, davon wieder der Logarithmus u. s. w. im Ganzen m-mal genommen wird. Dann ist mit Rücksicht auf die logarithmische Reihe

$$lg^{(m+1)}(n+1) = lg^{(m+1)}\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = lg^{(m)}\left[lg\,n + lg\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = lg^{(m)}\left(lg\,n + \frac{1-\delta_n}{n}\right),$$

wenn δ_n eine Zahl bedeutet, die mit wachsenden n verschwindet. Weiter ist

$$lg^{(m+1)}(n+1) = lg^{(m)}\left[lg\,n\left(1+\frac{1-\delta_n}{n\,lg\,n}\right)\right] = lg^{(m-1)}\left[lg\,lg\,n + lg\left(1+\frac{1-\delta_n}{n\,lg\,n}\right)\right] = lg^{(m-1)}\left(lg\,lg\,n + \frac{1-\delta_n-\delta'_n}{n\,lg\,n}\right),$$

wo δ'_n mit wachsendem n wieder gegen Null convergirt. Dies kann man schreiben

$$lg^{(m-1)}\left[lg\,lg\,n\left(1+\frac{1-\delta_n-\delta'_n}{n\,lg\,n\,lg\,lg\,n}\right)\right] = lg^{(m-2)}\left[lg\,lg\,lg\,n + lg\left(1+\frac{1-\delta_n-\delta'_n}{n\,.\,lg\,n\,lg\,lg\,n}\right)\right]$$

u. s. w., so dass man schliesslich erhält

$$lg^{(m+1)}(n+1) = lg^{(m+1)}(n) + \frac{1-\Delta_n}{n\, lg\, n\, lg\, lg\, n \,..\, lg^{(m)} n},$$

worin Δ_n (gleich $\delta_n + \delta'_n + .. + \delta_n^{(n)}$) mit wachsenden n gegen Null convergirt. Mithin kann man n so gross annehmen, dass $1-\Delta_n$, $1-\Delta_{n+1}$, $1-\Delta_{n+2}$, .. die Zahl $\frac{1}{2}$ übersteigen, weil ja diese Grössen der Eins sich beliebig nähern. Ist nun ν ein Werth von n, für welchen dies statthat, so stellen wir die Gleichungen auf

$$lg^{(m+1)}(\nu+1) = lg^{(m+1)}(\nu) + \frac{1-\Delta_\nu}{\nu\, lg\, \nu\, lg\, lg\, \nu \,..\, lg^{(m)}(\nu)},$$

$$lg^{(m+1)}(\nu+2) = lg^{(m+1)}(\nu+1) + \frac{1-\Delta_{\nu+1}}{(\nu+1)\, lg\,(\nu+1)\, lg\, lg\,(\nu+1) \,..\, lg^{n}(\nu+1)},$$

. . . .

$$lg^{(m+1)}(n+1) = lg^{(m+1)}(n) + \frac{1-\Delta_n}{n\, lg\, n \,..\, lg^{(m)}(n)},$$

und bilden ihre Summe, so ergiebt sich

$$lg^{(m+1)}(n+1) - lg^{(m+1)}(\nu) = \sum_{\nu}^{n}{}^{(\mu)} \frac{1-\Delta_\mu}{\mu\, lg\, \mu\, lg\, lg\, \mu \,..\, lg^{(m)}(\mu)}.$$

Wächst n über alle Grenzen, so folgt, dass die erste, und um so mehr die zweite der Reihen

$$\sum_{\nu}^{\infty}{}^{(n)} \frac{1-\Delta_n^m}{n\, lg\, n\, lg\, lg\, n \,..\, lg^{(m)}(n)}, \quad \sum_{\nu}^{\infty}{}^{(n)} \frac{1}{n\, lg\, n\, lg\, lg\, n \,..\, lg^{(m)}(n)}$$

divergirt. Addiren wir aber die Folge von Gleichungen

$$\frac{lg^{(m+1)}(\nu+1)}{[lg^{(m)}(\nu)]^\sigma} - \frac{lg^{(m+1)}(\nu)}{[lg^{(m)}(\nu)]^\sigma} = \frac{1-\Delta_\nu}{\nu\, lg\, \nu\, lg\, lg\, \nu \,..\, lg^{(m-1)}(\nu)\, [lg^{(m)}(\nu)]^{1+\sigma}},$$

$$\frac{lg^{(m+1)}(\nu+2)}{[lg^{(m)}(\nu+1)]^\sigma} - \frac{lg^{(m+1)}(\nu+1)}{[lg^{(m)}(\nu+1)]^\sigma} = \frac{1-\Delta_{\nu+1}}{(\nu+1)\, lg\,(\nu+1) \,..\, lg^{(m-1)}(\nu+1)\, [lg^{(m)}(\nu+1)]^{1+\sigma}},$$

. . . .

in infinitum,

so strebt die Summe der linken Seiten gegen eine bestimmte Grenze und folglich auch die Reihe, welche durch Summation der rechten Seiten erhalten wird. Hierzu ist zu beweisen, dass die auf einander folgenden Terme der Reihe

$$\frac{lg^{(m+1)}(n+1)}{[lg^{(m)}(n)]^\sigma} - \frac{lg^{(m+1)}(n)}{[lg^{(m)}(n)]^\sigma} + \frac{lg^{(m+1)}(n+2)}{[lg^{(m)}(n+1)]^\sigma} - \frac{lg^{(m+1)}(n+1)}{[lg^{(m)}(n+1)]^\sigma} + . - ..$$

von einem bestimmten Terme an monoton zu Null abnehmen, was wegen des Zeichenwechsels zur Convergenz ausreicht. Es muss also von einem bestimmten n ab fortwährend $\frac{lg^{(m+1)}(n)}{[lg^{(m)}(n)]^\sigma} > \frac{lg^{(m+1)}(n+2)}{[lg^{(m)}(n+1)]^\sigma}$ sein. Dies findet wirklich statt, wenn $\left(\frac{lg^{(m)}(n+1)}{lg^{(m)}(n)}\right)^\sigma > \frac{lg^{(m+1)}(n+2)}{lg^{(m+1)}(n)}$, und also wenn

$$\left(1 + \frac{1-\eta_n}{n\, lg\, n\, lg\, lg\, n \,..\, lg^{(m)}(n)}\right)^\sigma > 1 + \frac{2-\varepsilon_n}{n\, lg\, n\, lg\, lg\, n \,..\, lg^{(m+1)}(n)},$$

oder endlich, wenn, unter η_n, ε_n mit wachsenden n verschwindende Grössen verstanden,

$$1 + \sigma \frac{1 - \eta_n}{n\, lg\, n\, ..\, lg^{(m)}(n)} > 1 + \frac{2 - \varepsilon_n}{n\, lg\, n\, ..\, lg^{(m+1)}(n)}$$

ist. Dies ist richtig, denn wie klein auch die positive Zahl σ sein mag, so kann doch n so gross genommen werden, dass

$$\sigma \frac{1 - \eta_n}{n\, lg\, n\, ..\, lg^{(m)}(n)} > \frac{1}{lg^{(m+1)}(n)} \cdot \frac{2 - \varepsilon_n}{n\, lg\, n\, ..\, lg^{(m)}(n)}, \text{ oder } \sigma(1 - \eta_n) > \frac{2 - \varepsilon_n}{lg^{(m+1)}(n)}$$

wird. Folglich ist die Reihe

$$\frac{lg^{(m+1)}(\nu+1)}{[lg^{(m)}(\nu)]^\sigma} - \frac{lg^{(m+1)}(\nu)}{(lg^{(m)}(\nu))^\sigma} + \frac{lg^{(m+1)}(\nu+2)}{[lg^{(m)}(\nu+1)]^\sigma} - \frac{lg^{(m+1)}(\nu+1)}{[lg^{(m)}(\nu+1)]^\sigma} + \, .. \textit{ in infinitum}$$

convergent, und also auch die ihr gleiche Reihe

$$\sum_{\nu}^{\infty}{}_{(n)} \frac{1 - \Delta_n}{n\, lg\, n\, ..\, lg^{(m-1)}(n)\, [lg^{(m)}(n)]^{1+\sigma}},$$

oder es ist mit Rücksicht darauf, dass von einem bestimmten n ab $1 - \Delta_n$ die Zahl $\frac{1}{2}$ übersteigt, die Reihe

$$\sum_{\nu}^{\infty}{}_{(m)} \frac{1}{n\, lg\, n\, lg\, lg\, n\, ..\, lg^{(m-1)}(n)\, [lg^{(m)}(n)]^{1+\sigma}}$$

absolut convergent. Hiernach kann man das allgemeine Theorem aussprechen: Ist eine unendliche Reihe gegeben

$$A_0 + A_1 + A_2 + \, .. + A_\nu + \, .. + A_n + A_{n+1} + \, ..,$$

deren Terme mit wachsendem n so abnehmen, dass von einem bestimmten ab das Product

$$A_n \,.\, n \,.\, lg\, n \,.\, lg\, lg\, n\, ..\, lg^{(m-1)}(n) \,.\, [lg^{(m)}(n)]^{1+\sigma}$$

für ein positives σ endlich bleibt, so ist die Reihe convergent. Muss man aber, damit das Product endlich bleibt, σ der Null gleich annehmen, so ist die Reihe divergent. Man kann die Function $n \,.\, lg\, n \,.\, lg\, lg\, n\, ..\, [lg^{(m)}(n)]^{1+\sigma}$, oder das nach § 149 ihr zugewiesene Zeichen $1 + l_1 + l_2 + \, .. + (1 + \sigma)\, l_n$ das Maass der Reihenconvergenz nennen, weil eine Reihe (im Allgemeinen) um so schlechter convergirt, je mehr in dem Zeichen (dem complexen Symbol) $1 + l_1 + l_2 + \, .. + (1 + \sigma)\, l_n$ complexe Einheiten enthalten sind.

Dieses logarithmische Kriterium, welches man leicht in ein Kriterium umwandelt, in welchem $A_{n+1} : A_n$ entscheidend ist, kann als ein sehr scharfes bezeichnet werden, und seine Tragweite erstreckt sich so weit, dass es bisher in der Analysis für Convergenzbestimmungen wohl immer ausgereicht hat. Gleichwohl giebt es, wie Herr du Bois-Reymond mit Hülfe der im § 150 construirten Function $\psi(n)$ gezeigt hat, Reihen, die convergent sind, wenn schon sie langsamer convergiren, als eine Reihe mit dem Convergenzmaasse $1 + l_1 + l_2 + \, .. + (1 + \sigma)\, l_n$, wie gross auch n sein mag, was wir hier aber nur im Vorübergehen erwähnen.

Bemerkung. Im § 126 wurde versprochen, das Gültigkeitsgebiet der Stirling'schen Formel zu erweitern, was dann versehentlich unterblieben ist, und was hier nachgeholt werden soll. — Aus der Formel

$$\frac{1}{fac\,(-z)\,fac\,(z-1)} = \frac{\sin \pi z}{\pi}$$

und der aus § 130 leicht zu erweisenden Formel

$$\Psi(-z) - \Psi(z-1) = \pi\, ctg\, \pi z$$

findet man leicht, dass die Näherungsformel (die Stirling'sche) Formel für $fac\,z$ und die für $\Psi(z)$ für wachsende $abs\,z$ richtig bleibt, wenn der reelle Theil von z positiv über alle Grenzen wächst, gleichviel ob der imaginäre Theil endlich bleibt oder über alle Grenzen wächst, oder, und dies ist die Erweiterung, wenn der imaginäre Theil über alle Grenzen wächst, gleichviel ob der reelle Theil endlich bleibt, oder negativ über alle Grenzen wächst. Begrenzt man die z-Ebene durch eine Parabel, deren Scheitel in einem beliebigen Puncte der negativ reellen Achse, die zugleich die Parabelachse ist, $z = -Q$ liegt, und die die imaginäre Achse ausschliesst, so sind in dem durch die Parabel begrenzten Theile, der die imaginäre Achse enthält, die für $fac\,z$ und $\Psi(z)$ bei wachsenden $abs\,z$ aufgestellten Näherungsformeln richtig.

Druck von Ehrhardt Karras, Halle a. S.