Philip Earl Stanhope.

ELEMENTA SECTIONUM CONICARUM

Conscripta ad usum

FAUSTINÆ PIGNATELLI

Principis Colubranensis, & Tolvensis Ducatus Hæredis

Edita vero in gratiam

STUDIOSÆ JUVENTUTIS

AUCTORE

NICOLAO DE MARTINO

Regio Mathematum Professore

TOM. II.

Excudebat FELIX MOSCA sumptibus CAJETANI ELIÆ Superioribus annuentibus NEAPOLI

MDCCXXXIV.

LIBER V.

De Tangentibus, & Secantibus Sectionum Conicarum.

DOctrina diametrorum, quibus pollent conicæ sectiones, ad exitum perducta; sequitur modo, ut eam aggrediamur, quæ respicit tangentes, & secantes earundem curvarum. Et tangentem quidem conicæ sectionis eam vocamus rectam lineam, quæ conicæ sectioni subinde occurrit, ut producta tota cadat extra eam. Per contrarium vero secantem appellamus illam, quæ, quum producitur, cadit intra conicam sectionem. Quæ igitur proprietates competant rectis istis, hoc libro breviter ostendemus.

C A P. I.

Proprietates, quæ ellipsis tangentibus competunt, ostenduntur.

I. CIrca tangentes ellipsis, jam illud superius ostensum est, quod *si ex vertice alicujus diametri recta linea ducatur*, I. Proprietates duæ principales, quæ ellipsi tan-

genti compe- tunt *ordinatis ejus parallela, ea tangat ellipsim in*
FIG. I. *solo illo vertice*. Nunc autem subjungemus, quod *in locum, tangente, & ellipsi contentum, nulla alia cadat recta linea.*

Sit enim ellipsis AMB, cujus AB sit diameter aliqua, AD parameter ejus, & DAH recta, ordinatis ejusdem diametri parallela. Dico, quod sicuti recta DAH contingit ellipsim in solo vertice A, ita in locum, contentum tangente, & eadem ellipsi, nulla alia recta linea duci possit ex eodem vertice A.

Si fieri potest, ducatur recta alia AI, in qua sumpto puncto quovis P, agatur per illud recta PN, ipsi DH parallela, conveniens cum recta BD in puncto O. Et quoniam, propter ellipsim, MN quadratum est æquale rectangulo ANO; erit PN quadratum majus illo rectangulo. Quare, si extendatur NO usque in S, ita ut PN quadratum sit æquale rectangulo ANS, & jungatur AS; hæc secabit rectam BD in puncto aliquo Q.

Ducatur ergo per punctum istud Q recta QI, eidem AH parallela. Et quoniam PN quadratum est æquale rectangulo ANS; erit, ut PN quadratum ad AN quadratum, ita rectangulum ANS ad idem AN quadratum; sive etiam, ita NS ad AN. Sed PN quadratum est ad AN quadratum, ut IK quadratum ad AK quadratum. Et NS est ad AN, ut KQ ad AK; sive etiam, ut rectangulum AKQ ad AK quadratum; sive demum, ut LK quadratum ad AK quadratum. Quare erit IK quadratum æquale quadrato, quod fit ex LK. Quod fieri non potest.

II. Quæ-

II. Quælibet ergo recta linea, quæ ex puncto contactus ducitur infra tangentem, necesse est, ut primo secet ellipsim, tum cadat in locum, tangente, & ellipsi contentum. Hinc autem duo consequuntur, quæ aditum nobis aperient ad ostendendas proprietates omnes, quæ ellipsis tangentibus competunt. II. *Corollaria, quæ ex duabus præcedentibus proprietatibus consequuntur.*

Primum est, quod *ad unum, idemque punctum ellipsis nonnisi unica tangens duci possit*. Nam, si duci possent tangentes duæ; jam una caderet in locum, ellipsi, & tangente altera comprehensum. Quod quidem ostensum est fieri non posse.

Alterum est, quod *si recta linea contingat ellipsim in puncto aliquo, ea debeat esse parallela ordinatis illius diametri, quæ pertinet ad illud punctum*. Nam aliter, ducta ex eo puncto recta alia, ordinatis iis parallela, foret ista quoque tangens ellipsis; atque adeo ad unum, idemque punctum ellipsis duæ tangentes duci possent. Quod fieri nequit.

III. His jactis principiis, facile modo erit, *eas primum tangentis proprietates ostendere, quæ ei competunt, ubi alicui diametro occurrit*. Tangens igitur ET, ducta ad punctum E, verticem diametri EF, conveniat cum diametro altera AB in puncto T. Et ducatur, tam ad diametrum AB ordinata EG, quam ad diametrum EF ordinata AO. III. *Proprietates, quæ pertinent ad tangentem ellipsis, alicui diametro occurrentem.* FIG. 2.

Primo itaque erit, ut CT ad CA, ita CA ad CG. Nam, ex superius ostensis, BG est ad AG, ut FO ad EO; & componendo, AB est ad AG, ut EF ad EO; & capiendo antecedentium dimidia, CA est ad AG, ut CE ad

EO; & convertendo, CA est ad CG; ut CE ad CO. Sed, propter parallelas AO, ET, ut est CE ad CO, ita est CT ad CA. Quare erit ex æquali, ut CT ad CA, ita CA ad CG.

Secundo erit, rectangulum AGB æquale rectangulo CGT: adeo, ut AG erit ad CG, ut est TG ad BG. Quum enim CT sit ad CA, ut est CA ad CG; erit CA quadratum æquale rectangulo TCG. Sed CA quadratum est æquale rectangulo AGB una cum CG quadrato. Et rectangulum TCG est æquale rectangulo CGT una cum eodem CG quadrato. Quare, dempto communi quadrato ex CG, remanebit rectangulum AGB æquale rectangulo CGT.

Tertio, si AD sit parameter ipsius diametri AB, erit, ut EG quadratum ad rectangulum CGT, ita parameter AD ad diametrum AB. Jam enim, propter ellipsim, in hac ratione est EG quadratum ad rectangulum AGB. Sed rectangulum AGB ostensum est æquale rectangulo CGT. Quare in eadem pariter ratione erit quadratum ordinatæ EG ad rectangulum aliud CGT.

Denique erit rectangulum ATB æquale rectangulo CTG: adeo, ut erit AT ad GT, ut est CT ad BT. Nam idem CT quadratum est æquale, tam duobus rectangulis CTG, TCG, quam rectangulo ATB una cum CA quadrato. Quare duo rectangula CTG, TCG æqualia erunt rectangulo ATB una cum CA quadrato. Sed, ob rectas continue proportionales CT, CA, CG, quadratum ex CA est æquale rectangulo TCG. Quare etiam rectangulum

ATB

ATB æquale erit rectangulo CTG.

IV. Sed facile quoque erit, *conversas harum proprietatum ostendere*. Nimirum primo, quod recta ET sit tangens ellipsis, si utique CT sit ad CA, ut est CA ad CG. Nam, ex superius ostensis, BG est ad AG, ut FO ad EO; & componendo, AB est ad AG, ut EF ad EO; & capiendo antecedentium dimidia, CA est ad AG, ut CE ad EO; & convertendo, CA est ad CG, ut CE ad CO. Sed, ex hypothesi, CA est ad CG, ut CT ad CA. Quare erit ex æquali, ut CT ad CA, ita CE ad CO: & propterea recta ET, velut ipsi AO parallela, tangens erit ellipsis.

IV. *Praecedentium proprietatum conversa demonstrantur.* FIG. 2.

Secundo, quod recta ET tangat ellipsim in puncto E, si fuerit rectangulum AGB æquale rectangulo CGT; atque adeo, ut AG ad CG, ita TG ad BG. Nam, semper ac rectangulum AGB est æquale rectangulo CGT; addito communi quadrato ex CG, erit quoque CA quadratum æquale rectangulo TCG: proindeque erit, ut CT ad CA, ita CA ad CG; & consequenter ET tangens erit ellipsis.

Tertio, quod recta ET contingat ellipsim in puncto E, si fuerit, ut parameter AD ad diametrum AB, ita quadratum ordinatæ EG ad rectangulum CGT. Jam enim quadratum ordinatæ EG est ad rectangulum AGB in illa ratione. Quare, semper ac idem quadratum supponitur habere eandem rationem ad rectangulum CGT; erit rectangulum AGB æquale rectangulo CGT: proindeque recta ET tangens erit ellipsis.

Deniqua, quod recta ET sit tangens ellipsis,

lipsis, si fuerit rectangulum ATB æquale rectangulo CTG; & consequenter, ut AT ad GT, ita CT ad BT. Nam, quum idem CT quadratum sit æquale, tam duobus rectangulis CTG, TCG, quam rectangulo ATB una cum CA quadrato; erunt duo rectangula CTG, TCG æqualia rectangulo ATB una cum CA quadrato. Unde, semper ac ponitur rectangulum ATB æquale rectangulo CTG; erit quoque CA quadratum æquale rectangulo TCG: & propterea, quum sit, ut CT ad CA, ita CA ad CG; erit recta ET tangens ellipsis.

V. *Tangentium sibi mutuo occurrentium proprietas prima.* FIG. 2.

V. Nunc *eas quidem proprietates ostendemus, quæ tangentibus ellipsis sibi mutuo occurrentibus, competunt.* Hunc in finem ad duo quælibet ellipsis puncta A, & E ducantur tangentes duæ AX, EX, quæ sibi mutuo occurrant in X. Extendantur eædem usque donec conveniant cum diametris AB, EF in punctis L, & T. Et erit primo, ut AX ad LX, ita EX ad TX.

Ducantur enim ad diametros AB, EF ordinatæ EG, AO. Et, per superius ostensa, erit, ut CG ad CA, ita CO ad CE. Sed, propter tangentem ET, CG est ad CA, ut est CA ad CT. Itemque, propter tangentem AL, CO est ad CE, ut est CE ad CL. Quare erit ex æquali, ut CA ad CT, ita CE ad CL: & propterea, quum duo triangula ACL, ECT habeant circa angulum communem C latera reciproce proportionalia, erit triangulum ACL æquale triangulo ECT.

Hinc, dempto communi trapetio ACEX

erit,

erit quoque triangulum ELX æquale triangulo ATX. Unde, quum duo ista triangula habeant angulum EXL æqualem angulo AXT; habebunt quoque latera circum æquales istos angulos reciproce proportionalia; proindeque erit, ut AX ad LX, ita EX ad TX; hoc est tangentes duæ AL, ET in eadem ratione sese mutuo secabunt in puncto X, in quo sibi invicem occurrunt.

VI. Hinc autem *sequitur secundo*, tangentes duas AX, EX eandem cum ordinatis EG, AO rationem habere; adeoque esse, ut AX ad EX, ita EG ad AO. *VI. Secunda proprietas tangentium sibi invicem occurrentium.*

Est enim, ex superius ostensis, ut CO ad CE, ita CG ad CA. Sed, propter triangula æquiangula COA, CET, CO est ad CE, ut AO ad ET. Pariterque, ob triangula æquiangula CGE, CAL, CG est ad CA, ut EG ad AL. Quare erit ex æquali, ut EG ad AL, ita AO ad ET; & permutando erit etiam, ut EG ad AO, ita AL ad ET. FIG. 2.

Quia autem ostensum est, AX esse ad LX, ut est EX ad TX; addendo antecedentes consequentibus, erit quoque, ut AX ad AL, ita EX ad ET; & permutando erit pariter, ut AX ad EX, ita AL ad ET. Unde, quum in eadem ratione rectarum AL, ET sit, tam AX ad EX, quam EG ad AO; erit ex æquali, ut AX ad EX, ita EG ad AO.

VII. Atque hinc modo *sequitur ulterius*, easdem tangentes AX, EX eandem rationem habere cum conjugatis diametrorum AB, EF, quæ pertinent ad puncta contactus A, & E. *VII. Tertia proprietas tangentium, qua inter se mutuo conveniunt.*

Nam, per superius ostensa, ordinatæ EG, FIG. 2.

EG, AO sunt, ut conjugatæ diametrorum AB, EF. Sed tangentes AX, EX sunt inter se, ut ordinatæ EG, AO. Quare erit ex æquali, ut AX ad EX, ita conjugata diametri AB ad conjugatam diametri EF.

Quemadmodum autem tangentes AX, EX sunt, ut conjugatæ diametrorum AB, EF; ita quadrata tangentium AX, EX erunt, ut quadrata earundem conjugatarum; atque adeo, ut figuræ ipsarum diametrorum AB, EF, quibus suarum conjugatarum quadrata sunt æqualia.

Unde modo, sicuti figuræ diametrorum AB, EF rationem habent compositam ex ipsis diametris, & parametris earundem; ita quoque quadratum tangentis AX ad quadratum tangentis EX rationem habebit compositam ex diametro AB ad diametrum EF, & ex parametro diametri AB ad parametrum diametri EF.

VIII. *Quarta proprietas tangentium, quâ sibi invicem occurrunt.* FIG. 2.

VIII. Pertinet huc quoque *hæc alia proprietas*, quod si AX, EX sint duæ tangentes ellipsis, & ducta ex puncto contactus A diametro AB, agatur per aliud contactus punctum E recta BE, conveniens cum tangente AX in puncto I; quod, inquam, AI sit dupla ipsius AX.

Protrahatur enim tangens EX, usque donec conveniat cum diametro AB in puncto T. Tum ducatur ad eandem diametrum ordinata EG. Et quoniam, propter tangentem ET, ut est BT ad CT, ita est GT ad AT; erit permutando, ut BT ad GT, ita CT ad AT. Sed, dividendo, BG est ad GT, ut GA ad

AT.

AT. Quare erit rursus permutando, ut BG ad CA, ita GT ad AT.

Jam AI ad AX rationem habet compositam ex AI ad EG, & ex EG ad AX. Sed, ob triangula æquiangula BAI, BGE, AI est ad EG, ut AB ad BG. Itemque, ob triangula æquiangula TGE, TAX, EG est ad AX, ut GT ad AT, sive etiam, ut BG ad CA. Quare AI ad AX rationem habebit compositam ex AB ad BG, & ex BG ad CA.

Patet autem, duas istas rationes componere pariter rationem, quam habet AB ad CA. Quare erit ex æquali, ut AI ad AX, ita AB ad CA; proindeque, sicuti AB dupla est ipsius CA; ita etiam AI dupla erit ipsius AX.

IX. Sed facile est etiam *conversam hujus ostendere*: nimirum, quod si AI sit dupla ipsius AX, & AX sit tangens ellipsis; etiam EX contingere debeat ellipsim in puncto E.

IX. *Praecedentis proprietatis conversa demonstratur.* FIG. 2.

Quemadmodum enim AI dupla ponitur ipsius AX, ita AB dupla est ipsius CA. Quare erit, ut AB ad CA, ita AI ad AX. Sed AI ad AX rationem habet compositam ex AI ad EG, & ex EG ad AX; sive etiam ex AB ad BG, & ex GT ad AT. Itaque AB ad CA habebit pariter rationem compositam ex AB ad BG, & ex GT ad AT.

Jam AB ad CA habet quoque rationem compositam ex AB ad BG, & ex BG ad CA. Quare erit, ut BG ad CA, ita GT ad AT; & permutando, ut BG ad GT, ita CA ad AT. Sed componendo BT est ad GT, ut CT ad AT. Itaque rursus permutando erit, ut BT ad CT, ita GT ad AT; & propterea, ex superius

rius ostensis, recta ET tangens erit ellipsis.

X. *Quinta proprietas tangentium sibi mutùo occurrentium.* FIG. 3.

X. Præterea, *ut alias tangentium ellipsis proprietates prosequamur*, sint adhuc AX, EX duæ tangentes ellipsis. Et, ducta diametro AB, sit BZ tangens tertia, quæ conveniat cum EX in puncto Z. Sitque demum KL conjugata ipsius AB. Dico, rectangulum ex AX in BZ æquale esse quadrato, quod fit ex CK.

Conveniat namque tangens EX cum diametro AB in puncto T, & cum ejus conjugata KL in puncto V. Ducaturque ex puncto contactus E, tum recta EG ordinata ad diametrum AB, cum recta EH ordinata ad diametrum KL.

Quia igitur ET est tangens ellipsis; erit, ut BT ad CT, ita GT ad AT. Sed, propter triangula æquiangula TBZ, TCV, BT est ad CT, ut BZ ad CV. Itemque, propter triangula æquiangula TGE, TAX, GT est ad AT, ut EG, sive CH ad AX. Quare erit ex æquali, ut BZ ad CV, ita CH ad AX: & propterea rectangulum ex AX in BZ æquale erit rectangulo HCV.

Et quoniam eadem tangens ET occurrit quoque alteri diametro KL in puncto V; erit, ex superius ostensis, ut CH ad CK, ita CK ad CV. Quare rectangulum HCV æquale erit quadrato ex CK. Sed rectangulo HCV ostensum est æquale rectangulum ex AX in BZ. Igitur erit rectangulum ex AX in BZ æquale quadrato, quod fit ex CK.

XI. *Theorema de rectangulo sub portionibus tan-*

XI. Ulterius, quemadmodum AB, KL sunt duæ ellipsis conjugatæ diametri, ita sint MR, PS binæ aliæ diametri similiter conjugatæ, quæ conveniant cum tangente AX in punctis X, & Y. Et *nullo item negotio ostendemus*, quod eidem CK quadrato æquale sit etiam rectangulum ex AX in AY. *gentis, punctis duas conjugatas abscissas.* FIG. 4.

Ductis siquidem, tum ordinatis MN, PQ ad diametrum AB, cum ordinatis AO, AI, ad diametros MR, PS; erit rectangulum ex MN in PQ ad CK quadratum in ratione composita ex MN ad CK, & ex PQ ad CK. Sed, per ea, quæ superius ostensa sunt, MN est ad CK, ut AO, seu CI ad CP. Itemque PQ est ad CK, ut AI, seu CO ad CM. Itaque rectangulum ex MN in PQ ad CK quadratum rationem habebit compositam ex CI ad CP, & ex CO ad CM.

Jam, propter tangentem AY, diametro PS occurrentem in Y, CI est ad CP, ut CP ad CY; sive etiam, ut PQ ad AY. Pariterque, ob tangentem AX, diametro MR occurrentem in X, CO est ad CM, ut CM ad CX; sive etiam, ut MN ad AX. Quare rectangulum ex MN in PQ ad CK quadratum habebit quoque rationem compositam ex PQ ad AY, & ex MN ad AX.

Quoniam autem duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum ex MN in PQ ad rectangulum ex AX in AY; erit ex æquali, ut rectangulum ex MN in PQ ad rectangulum ex AX in AY, ita idem rectangulum ex MN in PQ ad CK quadratum: & propterea rectangulum ex AX in AY æquale erit quadrato, quod fit ex CK.

XII. Sed *conversum hujus theorematis* *XII. Quod præ-*

faci-

ordinatio theorematis conversum sit pariter verum. FIG. 4.

facile quoque erit ostendere. Nimirum, quod si AB, KL sint duæ ellipsis diametri conjugatæ, & rectangulum XAY, contentum sub portionibus tangentis XY, æquale sit quadrato, quod fit ex CK; aliæ binæ diametri MR, PS sint etiam conjugatæ.

Si enim PS non sit conjugata ipsius MR, sit ejus conjugata diameter alia TV, quæ occurrat tangenti XY in puncto W. Et quoniam MR, TV sunt duæ ellipsis conjugatæ diametri, quæ conveniunt cum tangente XY in punctis X, & W; erit rectangulum ex AX in AW æquale quadrato, quod fit ex CK.

Quia autem eidem CK quadrato positum est æquale rectangulum ex AX in AY; erit rectangulum ex AX in AW æquale rectangulo ex AX in AY: proindeque portiones duæ AW, AY æquales erunt inter se. Quod quum fieri nequeat, consequens est, ut PS sit conjugata ipsius MR.

XIII. *Theorema pro determinatione diametrorum conjugatarum ellipsis.* FIG. 3.

XIII. Atque hinc modo *colligi ulterius potest*, quod, si ex extremitatibus diametri AB, ducantur tangentes duæ AX, BZ, convenientes cum tangente tertia ET in punctis X, & Z, junganturque rectæ CX, CZ; istæ, ad ellipsim usque productæ, exhibebunt nobis binas ejus diametros conjugatas.

Si enim CZ producatur, usque donec conveniat cum tangente AX in puncto Y; ob triangula æquiangula CBZ, CAY, erit, ut CB ad BZ, ita CA ad AY. Unde, quemadmodum æquales sunt duæ CB, CA; ita æquales erunt pariter duæ BZ, AY: proindeque rectangulum ex AX in BZ æquale erit

re-

rectangulo ex AX in AY.

Quum autem ostensum sit rectangulum ex AX in BZ æquale quadrato ex CK; erit eidem CK quadrato æquale pariter rectangulum ex AX in AY. Unde, quum duæ diametri MR, PS abscindant ex tangente XY portiones duas AX, AY, quæ rectangulum continent, æquale quadrato, quod fit ex CK: per ea, quæ modo ostensa sunt, omnino necesse est, ut MR, PS sint duæ ellipsis conjugatæ diametri.

XIV. Cæterum nolim hic silentio præterire, quod si AB sit axis ellipsis, AD parameter ejus, & ET aliqua tangens; ducanturque ex puncto contactus E rectæ duæ EG, EH, una perpendicularis ad axem, & altera perpendicularis ad tangentem; quod, inquam, AB sit ad AD, ut est CG ad GH. XIV. *Tangentis cum axe convenientis proprietas specialis.* FIG. 2.

Si enim tangens ET conveniat cum axe AB in puncto T; erit, ex superius ostensis, ut AB ad AD, ita rectangulum CGT ad EG quadratum. Sed, ob triangulum TEH, rectangulum in E, quadratum ex EG est æquale rectangulo HGT. Quare erit quoque, ut AB ad AD, ita rectangulum CGT ad rectangulum HGT: & propterea, quia duo ista rectangula sunt inter se, ut CG ad GH; erit, ex æquali, ut AB ad AD, ita CG ad GH.

Hinc, si AB sit axis major ellipsis, quemadmodum AB major est, quam AD; ita erit CG major, quam GH; proindeque punctum H cadet semper inter punctum G, & centrum ellipsis. Vicissim autem, si AB sit axis minor ellipsis, quemadmodum AB

mi-

minor est, quam AD; ita erit etiam CG minor, quam GH: & propterea punctum H cadet semper ad alteram centri partem relate ad punctum G.

CAP. II.

Proprietates, quæ secantibus ellipsis competunt, ostenduntur.

I. *De ratione, quam habent rectangula, sub secantium segmentis contenta. Primus casus, quum secantes sunt diametri ellipsis.*

I. PRæcedenti capite ostensæ sunt proprietates, quæ competunt tangentibus ellipsis; nunc eas prosequemur, quæ pertinent ad secantes ejusdem, ostendemusque, *quam rationem habeant inter se rectangula, contenta sub segmentis duarum rectarum, quæ sibi mutuo occurrentes, utrinque ad ellipsim terminantur.*

Hic autem varii sunt casus distinguendi, pro diversa qualitate rectarum, quæ sibi mutuo occurrunt, & utrinque terminantur ad ellipsim. Primo igitur supponemus, rectas illas esse *binas diametros ellipsis*, & ostendemus, *rectangulum sub segmentis unius esse ad rectangulum sub segmentis alterius in duplicata ratione ipsarum diametrorum.*

FIG. 5. Sint enim AB, KL duæ quævis ellipsis diametri, quæ sibi mutuo occurrunt in ipso centro C. Dico, rectangulum sub segmentis unius AC, BC, esse ad rectangulum sub segmentis alterius KC, LC, ut est quadratum dia-

diametri AB ad quadratum diametri KL.

Nam, quum utraque diameter secta sit bifariam in centro C; erit in ratione ipsarum AB, KL, tam AC ad KC, quam BC ad LC. Sed rectangulum ACB est ad rectangulum KCL in ratione composita ex AC ad KC, & ex BC ad LC. Quare ratio eorundem rectangulorum ACB, KCL duplicata erit diametrorum AB, KL.

II. Supponemus secundo, *ex rectis, sibi mutuo occurrentibus, unam quidem esse diametrum, alteram ordinatam ipsius. Et in isto casu rectangulum sub segmentis prioris rectæ erit ad rectangulum sub segmentis alterius rectæ in duplicata ratione ejus, quam habet diameter ad suam conjugatam.* II. *Secundus casus, quum ex secantibus una quidem est diameter, altera est ejus ordinata.*

Sit enim AB diameter aliqua ellipsis, cujus KL sit conjugata; sitque etiam MO una ex ordinatis ejus diametri, quæ ipsi diametro occurrens in puncto N, utrinque ad ellipsim terminetur. Dico, rectangulum ANB esse ad rectangulum MNO, ut est AB quadratum ad KL quadratum. FIG. 5.

Nam recta MO, velut ordinata ipsius AB, bifariam secta est in puncto N. Quare erit MN quadratum æquale rectangulo MNO: & propterea erit, ut rectangulum ANB ad rectangulum MNO, ita idem rectangulum ANB ad MN quadratum. Sed rectangulum ANB est ad MN quadratum, ut AB quadratum ad KL quadratum. Igitur in hac eadem ratione erit pariter rectangulum ANB ad rectangulum MNO.

III. Supponemus tertio, *rectas sibi mutuo* oc- III. *Tertius ca-*

fus, quum duæ secantes sunt ordinatæ, quæ ad duas diametros conjugatas referuntur. *occurrentes esse ordinatas, quæ ad duas diametros conjugatas referuntur; ostendemusque, rectangulum sub segmentis unius esse ad rectangulum sub segmentis alterius in ratione duplicata reciproca ipsarum diametrorum.*

Sint namque AB, KL duæ ellipsis diametri conjugatæ; sitque etiam MQ ordinata diametri AB, & EF ordinata diametri KL, quæ utrinque ad ellipsim terminatæ, sibi mutuo occurrant in puncto H. Dico, rectangulum MHO esse ad rectangulum EHF, ut est KL quadratum ad AB quadratum.

FIG. 5.

Ex puncto E ducatur ad diametrum AB ordinata EG. Et quoniam, propter ellipsim, KL quadratum est ad AB quadratum, tam ut MN quadratum ad rectangulum ANB, quam ut EG quadratum ad rectangulum AGB; erit quoque, ut KL quadratum ad AB quadratum, ita differentia quadratorum MN, EG ad differentiam rectangulorum ANB, AGB.

Jam, propter æquales EG, NH, differentia quadratorum MN, EG est æqualis rectangulo MHO. Itemque, quum rectangulum ANB æquale sit differentiæ quadratorum CA, CN, & rectangulum AGB æquale differentiæ quadratorum CA, CG; erit differentia rectangulorum ANB, AGB æqualis differentiæ quadratorum CG, CN, quæ tantundem valet, ac rectangulum EHF. Unde erit, ut KL quadratum ad AB quadratum, ita rectangulum MHO ad rectangulum EHF.

IV. *Quartus casus, quum* IV. Supponemus quarto, *ex rectis, sibi invicem occurrentibus, unam esse diametrum,*

aliam

aliam verò ordinatam alterius diametri . Et quum id contingit, erit rectangulum sub segmentis illius ad rectangulum sub segmentis istius, ut est quadratum prioris diametri ad quadratum conjugatæ alterius diametri. *Duarum secantium una est diameter, & alia ordinata alterius diametri.*

Sit enim AB aliqua ellipsis diameter, cujus conjugata sit KL, & MO una ex ejus ordinatis, utrinque ad ellipsim terminata. Sit porro EF diameter alia, quæ conveniat cum ordinata prioris MO in puncto H. Dico, rectangulum EHF esse ad rectangulum MHO, ut est EF quadratum ad KL quadratum. FIG. 6.

Ducantur namque ex punctis E, H, M rectæ EG, HI, MR, ipsi AB parallelæ, quæ conveniant cum KL in punctis G, I, R. Et, ob triangula æquiangula CEG, CHI, erit, ut CG quadratum ad CI quadratum, ita EG quadratum ad HI, seu MR quadratum. Sed, propter ellipsim, EG quadratum est ad MR quadratum, ut rectangulum KGL ad rectangulum KRL. Itaque erit ex æquali, ut CG quadratum ad CI quadratum, ita rectangulum KGL ad rectangulum KRL.

Hinc, conjungendo terminos prioris rationis cum terminis secundæ, erit quoque, ut CG quadratum ad CI quadratum, ita CK quadratum ad rectangulum KRL una cum CI quadrato. Quumque CG quadratum sit ad CI quadratum, ut est CE quadratum ad CH quadratum; erit rursus ex æquali, ut CE quadratum ad CH quadratum, ita CK quadratum ad rectangulum KRL una cum CI quadrato.

Atque hinc, convertendo, erit ulterius, ut CE quadratum ad differentiam quadratorum CE, CH, ita CK quadratum ad differentiam quadratorum CR, CI. Sed differentia quadratorum CE, CH est æqualis rectangulo EHF; & differentia quadratorum CR, CI, sive MN, NH est æqualis rectangulo MHO. Itaque erit, ut CE quadratum ad rectangulum EHF, ita CK quadratum ad rectangulum MHO; & permutando, ut CE quadratum ad CK quadratum, sive etiam, ut EF quadratum ad KL quadratum, ita rectangulum EHF ad rectangulum MHO.

V. *Postremus casus, quum secantes sunt ordinatæ duarumquarumvis diametrorum.* Fig. 7.

V. Supponemus denique, *rectas duas, sibi mutuo occurrentes, ordinatas esse duarum diametrorum, quæ inter se nequaquam sunt conjugatæ*. Et in isto casu rectangula, contenta sub segmentis ipsarum, erunt, ut quadrata, quæ fiunt ex conjugatis earum diametrorum.

Sint enim AB, RS duæ quævis ellipsis diametri; sitque MO una ex ordinatis diametri AB, & PQ una ex ordinatis diametri RS. Conveniant autem inter se duæ istæ ordinatæ in puncto H. Dico, rectangulum MHO esse ad rectangulum PHQ, ut est quadratum, quod fit ex conjugata diametri AB, ad quadratum, quod fit ex conjugata diametri RS.

Ducatur namque per punctum H diameter tertia EF. Et quoniam diameter ista EF secat MO, ordinatam diametri AB, in puncto H; erit, ex ostensis, ut rectangulum EHF ad rectangulum MHO, ita EF quadratum ad quadratum conjugatæ diametri AB. Quumque eadem EF secat pariter PQ, ordinatam diametri RS, in puncto H; erit quoque, ut rectangulum EHF ad rectangulum PHQ, ita EF quadra-

dra-

dratum ad quadratum conjugatæ diametri RS. Quare ordinando erit, ut rectangulum MHO ad rectangulum PHQ, ita quadratum ex conjugata diametri AB ad quadratum ex conjugata diametri RS.

VI. Et quidem universale theorema, quod hac in re locum habet, hujusmodi est, quod *si intra ellipsim binæ ducantur rectæ lineæ, quæ sese mutuo secent; rectangula, quæ fiunt ex segmentis ipsarum, sint, ut quadrata ex conjugatis earum diametrorum, ad quas rectæ illæ velut ordinatæ referuntur.* Et omnia alia theoremata, superius ostensa, sunt tantum casus speciales istius.

VI. Theorema generale, quod hac in re locum habet, in medium affertur.

Nam primo, si ductæ rectæ lineæ transeant per centrum, & sint ellipsis diametri; erunt ipsæmet conjugatæ earum diametrorum, ad quas eædem velut ordinatæ referuntur. Unde, vi ejus theorematis generalis, omnino necesse est, ut rectangula sub segmentis ipsarum sint, ut quadrata earundem.

Secundo, si una ex iis rectis sit diameter, & altera ejus ordinata: quemadmodum prior est conjugata illius diametri, ad quam ipsa velut ordinata refertur; sic conjugata ejus diametri, quæ secundam agnoscit tamquam suam ordinatam, est conjugata diametri prioris. Quare, per theorema generale, rectangulum sub segmentis diametri ad rectangulum sub segmentis ordinatæ erit, ut quadratum diametri ad quadratum suæ conjugatæ.

Tertio, si rectæ, sese invicem secantes, sint ordinatæ duarum ellipsis diametrorum conjugatarum; non aliæ erunt conjugatæ diametrorum, ad quas rectæ illæ velut ordinatæ referuntur, quam eædem diametri, inverso ordine sumptæ. Unde, per theorema generale, rectangula, contenta sub segmentis earum ordinatarum, erunt in ratione reciproca duplicata suarum diametrorum.

Denique, si una ex iis rectis sit diameter, & altera sit ordinata alterius diametri; erit ipsa prior recta conjugata illius diametri, ad quam eadem velut ordinata refertur. Unde, ob theorema generale, rectangulum sub segmentis prioris diametri erit ad rectangulum sub segmentis ordinatæ alterius diametri, ut est quadratum diametri prioris ad quadratum conjugatæ alterius diametri.

VII. *Quod idem theorema sit verum, etiam si una ex secantibus vertatur in tangentem.*

VII. Fieri autem potest, ut *una ex secantibus tangens evadat*: nimirum, quum puncta duo sectionis coeunt in unum. In isto casu rectangulum sub ejus segmentis vertetur in quadratum ipsius tangentis. Unde inter quadratum istud, & rectangulum, sub alterius secantis portionibus contentum, eadem adhuc ratio obtinebit.

Quin etiam *verti potest in tangentem utraque secans*. Et quum id contingit, ambo quidem rectangula, sub secantium portionibus contenta, abibunt in quadrata ipsarum tangentium. Ex quo fit, ut inter quadrata, quæ ex tangentibus fiunt, eadem pariter ratio debeat locum habere.

FIG. 2. Et istud quidem jam præcedenti capite speciatim a nobis ostensum fuit. Vidimus enim, quod si fuerint tangentes duæ AX, EX, sibi mutuo occurrentes in X; quadrata ipsarum

rum eandem habeant rationem inter se, quam quadrata, quæ fiunt ex conjugatis diametrorum AB, EF.

Ad illud verò quod attinet, nec etiam difficile erit, veritatem ejus speciatim ostendere. Sed distinguendi sunt tamen duo casus. Primus est, quum secans est parallela diametro, quæ pertinet ad punctum contactus. Alter est, quum eadem secans ei diametro nequaquam est parallela.

VIII. Ponamus itaque primò, *secantem parallelam esse diametro, quæ pertinet ad punctum contactus*: adeo nempe, ut existente EH tangente, secans sit recta HO, parallela diametro EF. Jamque in hoc casu diameter, ad quam recta MO velut ordinata refertur, erit illa eadem, quæ est conjugata ipsius EF. VIII. *Primus casus, quum secans est parallela diametro, quæ pertinet ad punctum contactus.* FIG. 6.

Sit igitur AB conjugata diametri EF. Quumque vicissim EF sit conjugata ipsius AB; jam illud ostendendum nobis erit, ut EH quadratum sit ad rectangulum MHO, veluti est AB quadratum ad EF quadratum. Istud autem nullo negotio ostendemus sequenti ratione.

Ex puncto M ducatur ad diametrum EF ordinata MR. Et quoniam duæ CE, HN inter se sunt æquales; erit etiam CE quadratum æquale quadrato, quod fit ex HN. Sed CE quadratum est æquale rectangulo ERF una cum CR quadrato. Et HN quadratum est æquale rectangulo MHO una cum MN, sive eodem CR quadrato. Quare, dempto communi quadrato ex CR, remanebit rectangulum ERF æquale rectangulo MHO.

Quia autem æqualia sunt quoque qua-

 dra-

drata, quæ fiunt ex ipsis MR, EH; erit, ut MR quadratum ad rectangulum ERF, ita EH quadratum ad rectangulum MHO. Sed MR quadratum est ad rectangulum ERF, ut AB quadratum ad EF quadratum. Et igitur ex æquali in eadem ratione, quam habet AB quadratum ad EF quadratum, erit quoque EH quadratum ad rectangulum MHO.

IX. *Alter casus, quum secans non est parallela diametro, quæ transit per punctum contactus.* FIG. 8.

IX. Ponamus secundo, *secantem haud quidem parallelam esse diametro, quæ pertinet ad punctum contactus*: adeo nempe, ut existente EH tangente, secans sit recta HS, quæ occurrit diametro EF. Jamque, si KL sit diameter, ad quam recta TS velut ordinata refertur; ostendendum erit, EH quadratum esse ad rectangulum THS, ut est quadratum conjugatæ diametri EF ad quadratum conjugatæ diametri KL.

Ducatur ex puncto H secans alia HO, quæ ipsi EF sit parallela; sitque AB diameter, quæ ipsam MO velut suam ordinatam agnoscit. Itaque, quum secans HO parallela sit diametro EF, quæ pertinet ad punctum contactus E; erit EH quadratum ad rectangulum MHO, ut est quadratum conjugatæ diametri EF ad quadratum conjugatæ diametri AB.

Quoniam autem HO, HS sunt secantes duæ, quæ velut ordinatæ referuntur ad diametros AB, KL; erit, ex superius ostensis, rectangulum MHO ad rectangulum THS, ut est quadratum conjugatæ diametri AB ad quadratum conjugatæ diametri KL: Quare ordinando erit, ut EH quadratum ad rectangulum THS, ita quadratum ex conjuga-

ta

ta diametri EF ad quadratum ex conjugata diametri KL.

X. Fatendum est tamen, *demonstrationem istam haud quidem generalem esse*. Nam fieri potest, ut recta HO, ipsi EF parallela, ellipsim minime secet. Quum id contingit, duci potest recta HO per centrum ellipsis. Jamque obtinebit eadem demonstratio, si, reliquis ut supra manentibus, ostendi possit, EH quadratum esse ad rectangulum MHO, ut est quadratum ex conjugata diametri EF ad quadratum diametri MO. Id vero ostendemus in hunc modum.

X. *Demonstratio specialis, quando secans est diameter.* FIG. 9.

Sit GI conjugata ipsius EF, ducaturque ex puncto M ad eandem EF ordinata MR. Et quoniam CH quadratum est ad CM quadratum, ut CE quadratum ad CR quadratum; erit convertendo, ut CH quadratum ad rectangulum MHO, ita CE quadratum ad rectangulum ERF. Sed, ob ellipsim, CE quadratum est ad rectangulum ERF, ut est CG quadratum ad MR quadratum. Itaque erit ex æquali, ut CG quadratum ad MR quadratum, ita CH quadratum ad rectangulum MHO.

Quoniam vero MR quadratum est ad EH quadratum, ut CM quadratum ad CH quadratum; erit ex æquo perturbando, ut CG quadratum ad EH quadratum, ita CM quadratum ad rectangulum MHO; & permutando, ut CG quadratum ad CM quadratum, ita EH quadratum ad rectangulum MHO. Sed CG quadratum est ad CM quadratum, ut GI quadratum ad MO quadratum. Itaque erit ex æquali, ut EH quadratum ad rectangulum MHO, ita GI quadratum ad MO quadratum.

XI. *Theorema de ratione, quam habent duæ ellipsis tangentes, rursus ostenditur.*

XI. Atque hinc modo nullo negotio ostendi potest, quod *si duæ ellipsis tangentes sibi mutuo occurrant; eæ sint inter se, veluti conjugatæ diametrorum, quæ pertinent ad puncta contactus.*

Sint enim AH, EH duæ ellipsis tangentes, quæ sibi invicem occurrant in puncto H.

FIG. 9.

Ducantur ex punctis contactus A, & E diametri AB, EF. Dico esse, ut AH ad EH, ita conjugata diametri AB ad conjugatam diametri EF.

Ducatur namque diameter alia MO, quæ transeat per punctum H. Et quoniam AH est tangens, & HO est secans, transiens per centrum; erit, ut AH quadratum ad rectangulum MHO, ita quadratum ex conjugata diametri AB ad quadratum ipsius MO.

Similiter, quia EH est tangens, & HO est secans, transiens per centrum; erit, ut rectangulum MHO ad EH quadratum, ita MO quadratum ad quadratum, quod fit ex conjugata diametri EF.

Hinc ex æquo ordinando erit, ut AH quadratum ad EH quadratum, ita quadratum ex conjugata diametri AB ad quadratum ex conjugata diametri EF: & propterea tangentes duæ AH, EH erunt, ut conjugatæ diametrorum AB, EF.

XII. *Alia duo theoremata ex hactenus ostensis deducuntur.*

XII. Cæterum ex iis, quæ hactenus ostensa sunt, prono alveo fluunt sequentia duo theoremata.

Primum theorema est, quod *si duabus elli-*

ellipsis tangentibus parallelæ fuerint duæ secantes, & conveniant inter se; tum tangentes, cum secantes; rectangula, sub secantium segmentis contenta, sint proportionalia quadratis, quæ ex tangentibus fiunt.

Nam diametri, ad quas duæ secantes velut ordinatæ referuntur, sunt illæ eædem, quæ pertinent ad puncta contactus. Quare in eadem illa ratione, quam habent inter se quadrata tangentium, erunt quoque rectangula, quæ sub secantium segmentis continentur.

Alterum theorema est, quod *si duabus secantibus ellipsis parallelæ fuerint binæ aliæ secantes, & conveniant inter se, tam illæ, quam istæ; rectangula sub segmentis illarum sint proportionalia rectangulis, quæ sub segmentis istarum continentur.*

Nam diametri, ad quas duæ posteriores secantes velut ordinatæ referuntur, sunt illæ eædem, quæ agnoscunt velut suas ordinatas secantes priores. Quare in eadem illa ratione, quam habent inter se rectangula sub segmentis primarum secantium, erunt quoque rectangula sub segmentis aliarum.

CAP. III.

Demonstrantur proprietates, quæ competunt tangentibus hyperbolæ.

I. Circa tangentes hyperbolæ, jam illud quoque superius ostensum est, quod *Proprietates duæ primi.* I.

palos, quæ hyperbolæ tangenti competunt.

quod *si ex vertice alicujus diametri recta ducatur, ordinatis ejus parallela, ea tangat hyperbolam in solo illo vertice.* Nunc autem subjungemus, quod *in locum, tangente, & hyperbola contentum, nulla alia cadat recta linea.*

FIG. 10. Sit enim hyperbola AM, cujus AB sit diameter aliqua, AD parameter ejus, & DAH recta, ordinatis ejusdem diametri parallela. Dico, quod sicuti recta DAH contingit hyperbolam in solo vertice A, ita in locum, contentum tangente, & eadem hyperbola, nulla alia recta linea duci possit ex eodem vertice A.

Si fieri potest, ducatur recta alia AI, in qua sumpto puncto quovis P, agatur per illud recta PN, ipsi DH parallela, conveniens cum recta BD in puncto O. Et quoniam, propter hyperbolam, MN quadratum est æquale rectangulo ANO; erit PN quadratum majus illo rectangulo. Quare, si extendatur NO usque in S, ita ut PN quadratum sit æquale rectangulo ANS, & jungatur AS; hæc secabit rectam BD in puncto aliquo Q.

Ducatur ergo per punctum istud Q recta QI, eidem AH parallela. Et quoniam PN quadratum est æquale rectangulo ANS; erit, ut PN quadratum ad AN quadratum, ita rectangulum ANS ad idem AN quadratum; sive etiam, ita NS ad AN. Sed PN quadratum est ad AN quadratum, ut IK quadratum ad AK quadratum. Et NS est ad AN, ut KQ ad AK; sive etiam, ut rectangulum AKQ ad AK quadratum; sive demum, ut LK quadratum ad AK quadratum. Quare erit IK quadratum æquale quadrato, quod fit ex LK.

Quod

Quod fieri non poteſt.

II. Quælibet ergo recta linea, quæ ex puncto contactus ducitur infra tangentem, neceſſe eſt, ut primo ſecet hyperbolam, tum cadat in locum, tangente, & hyperbola contentum. Hinc autem duo conſequuntur, quæ aditum nobis aperient ad oſtendendas proprietates omnes, quæ hyperbolæ tangentibus competunt. II. *Corollaria, quæ ex duobus præcedentibus proprietatibus conſequuntur.* FIG. II.

Primum eſt, quod *ad unum, idemque punctum hyperbolæ nonniſi unica tangens duci poſſit*. Nam, ſi duci poſſent tangentes duæ; jam una caderet in locum, hyperbola, & tangente altera comprehenſum. Quod quidem oſtenſum eſt fieri non poſſe.

Alterum eſt, quod *ſi recta linea contingat hyperbolam in puncto aliquo, ea debeat eſſe parallela ordinatis illius diametri, quæ pertinet ad illud punctum*. Nam aliter, ducta ex eo puncto recta alia, ordinatis iis parallela, foret iſta quoque tangens hyperbolæ; atque adeo ad unum, idemque punctum hyperbolæ duæ tangentes duci poſſent. Quod fieri nequit.

III. His jactis principiis, facile modo erit, *eas primum tangentis proprietates oſtendere, quæ ei competunt, ubi alicui diametro occurrit*. Tangens igitur ET, ducta ad punctum E, verticem diametri EF, conveniat cum diametro altera AB in puncto T. Et ducatur, tam ad diametrum AB ordinata EG, quam ad diametrum EF ordinata AO. III. *Proprietates, quæ pertinent ad tangentem hyperbolæ, alicui diametro occurrentem.* FIG. II.

Primo itaque erit, ut CT ad CA, ita CA ad CG. Nam, ex ſuperius oſtenſis, BG eſt ad AG, ut FO ad EO; & dividendo, AB

eſt

eſt ad AG, ut EF ad EO ; & capiendo antecedentium dimidia, CA eſt ad AG, ut CE ad EO ; & addendo antecedentes conſequentibus, CA eſt ad CG, ut CE ad CO. Sed, propter parallelas AO, ET, ut eſt CE ad CO, ita eſt CT ad CA. Quare erit ex æquali, ut CT ad CA, ita CA ad CG.

Secundo erit, rectangulum AGB æquale rectangulo CGT; adeo, ut AG erit ad CG, ut eſt TG ad BG. Quum enim idem CG quadratum æquale ſit, tam rectangulo AGB una cum CA quadrato, quam duobus rectangulis CGT, TCG ; erit rectangulum AGB una cum CA quadrato æquale duobus rectangulis CGT, TCG. Sed, ob rectas continue proportionales CT, CA, CG, quadratum ex CA eſt æquale rectangulo TCG. Quare etiam rectangulum AGB æquale erit rectangulo CGT.

Tertio, ſi AD ſit parameter ipſius diametri AB, erit, ut EG quadratum ad rectangulum CGT, ita parameter AD ad diametrum AB. Jam enim, propter hyperbolam, in hac ratione eſt EG quadratum ad rectangulum AGB. Sed rectangulum AGB oſtenſum eſt æquale rectangulo CGT. Quare in eadem pariter ratione erit quadratum ordinatæ EG ad rectangulum aliud CGT.

Quarto erit rectangulum ATB æquale rectangulo CTG; adeo, ut erit AT ad GT, ut eſt CT ad BT. Nam, ob rectas continue proportionales CT, CA, CG, quadratum ex CA eſt æquale rectangulo TCG. Sed quadratum ex CA eſt æquale rectangulo ATB una cum CT quadrato; & rectangulum TCG eſt æquale

le

le rectangulo CTG una cum eodem CT quadrato. Quare, dempto communi quadrato ex CT, remanebit rectangulum ATB æquale rectangulo CTG.

Denique, si KL sit conjugata ipsius AB, cum qua tangens ET conveniat in puncto V, & ducatur ad eam ordinata EH; erit, ut CV ad CK, ita CK ad CH. Nam, propter hyperbolam, CK quadratum est ad EG, seu CH quadratum, ut CA quadratum ad rectangulum AGB; sive etiam, ut rectangulum TCG ad rectangulum CGT; sive demum, ut CT ad GT. Sed CT est ad GT, ut CV ad EG, seu CH. Itaque erit ex æquali, ut CK quadratum ad CH quadratum, ita CV ad CH: & proptetea tres rectæ CV, CK, CH continue proportionales erunt.

IV. *Praecedentium proprietatum conversa demonstrantur.*

IV. Sed facile quoque erit, *conversas harum proprietatum ostendere*. Nimirum primo, quod recta ET sit tangens hyperbolæ, si utique CT sit ad CA, ut est CA ad CG. Nam, ex superius ostensis, BG est ad AG, ut FO ad EO; & dividendo, AB est ad AG, ut EF ad EO; & capiendo antecedentium dimidia, CA est ad AG, ut CE ad EO; & addendo antecedentes consequentibus, CA est ad CG, ut CE ad CO. Sed, ex hypothesi, CA est ad CG, ut CT ad CA. Quare, erit ex æquali, ut CT ad CA, ita CE ad CO: & propterea recta ET, velut ipsi AO parallela, tangens erit hyperbolæ. FIG. 11.

Secundo, quod recta ET tangat hyperbolam in puncto E, si fuerit rectangulum AGB æquale rectangulo CGT; atque adeo, ut AG ad CG, ita TG ad BG. Nam, semper ac rectangulum AGB est æquale rectangulo CGT; si utrumque seorsim auferatur ex eodem CG quadrato, erit quoque CA quadratum æquale rectangulo TCG: proindeque erit, ut CT ad CA, ita CA ad CG; & consequenter ET tangens erit hyperbolæ.

Tertio, quod recta ET contingat hyperbolam in puncto E, si fuerit, ut parameter AD ad diametrum AB, ita quadratum ordinatæ EG ad rectangulum CGT. Jam enim quadratum ordinatæ EG est ad rectangulum AGB in illa ratione. Quare, semper ac idem quadratum supponitur habere eandem rationem ad rectangulum CGT; erit rectangulum AGB æquale rectangulo CGT: proindeque recta ET tangens erit hyperbolæ.

Quarto, quod recta ET sit tangens hyperbolæ, si fuerit rectangulum ATB æquale rectangulo CTG; & consequenter, ut AT ad GT, ita CT ad BT: Nam, semper ac ponitur rectangulum ATB æquale rectangulo CTG; addito communi quadrato ex CT, erit quoque CA quadratum æquale rectangulo TCG: & propterea, quum sit, ut CT ad CA, ita CA ad CG; erit recta ET tangens hyperbolæ.

Denique, quod recta ET hyperbolam contingat in puncto E, si fuerit, ut CV ad CK; ita CK ad CH. Nam semper ac CV est ad CK, ut CK ad CH; erit quoque ut CV ad CH, ita CK quadratum ad CH, sive EG quadratum: Sed, propter hyperbolam, CK quadratum est ad EG quadratum, ut CA quadratum ad rectangulum AGB. Quare erit ex æquali, ut

CA

CA quadratum ad rectangulum AGB; ita CV ad CH.

Hinc, addendo antecedentes consequentibus, erit etiam, ut CA quadratum ad CG quadratum, ita CV ad VH. Unde, quia CV est ad VH, ut CT ad EH, seu CG; erit rursus ex æquali, ut CA quadratum ad CG quadratum, ita CT ad CG; adeoque, quum sit, ut CT ad CA, ita CA ad CG, erit recta ET tangens hyperbolæ.

V. Nunc *eas quidem proprietates ostendemus, quæ tangentibus hyperbolæ sibi mutuo occurrentibus, competunt*. Hunc in finem ad duo quælibet hyperbolæ puncta A, & E ducantur tangentes duæ AX, EX, quæ sibi mutuo occurrant in X. Extendantur eædem usque donec conveniant cum diametris AB, EF in punctis L, & T. Et erit primo, ut AX ad LX, ita EX ad TX.

V. *Tangentium sibi mutuo occurrentium proprietas prima.* FIG. 11.

Ducantur enim ad diametros AB, EF ordinatæ EG, AO. Et, per superius ostensa, erit, ut CG ad CA, ita CO ad CE. Sed, propter tangentem ET, CG est ad CA, ut est CA ad CT. Itemque, propter tangentem AL, CO est ad CE, ut est CE ad CL. Quare erit ex æquali, ut CA ad CT, ita CE ad CL: & propterea, quum duo triangula ACL, ECT habeant circa angulum communem C latera reciproce proportionalia, erit triangulum ACL æquale triangulo ECT.

Hinc, dempto communi trapetio CTXL, erit quoque triangulum ELX æquale triangulo ATX. Unde, quum duo ista triangula habeant angulum EXL æqualem angulo AXT;

AXT; habebunt quoque latera circum æquales istos angulos reciproce proportionalia; proindeque erit, ut AX ad LX, ita EX ad TX; hoc est tangentes duæ AL, ET in eadem ratione sese mutuo secabunt in puncto X, in quo sibi invicem occurrunt.

VI. *Secunda proprietas tangentium sibi invicem occurrentium.* FIG. 11.

VI. Hinc autem *sequitur secundo*, tangentes duas AX, EX eandem cum ordinatis EG, AO rationem habere; adeoque esse, ut AX ad EX, ita EG ad AO.

Est enim, ex superius ostensis, ut CO ad CE, ita CG ad CA. Sed, propter triangula æquiangula COA, CET, CO est ad CE, ut AO ad ET. Pariterque, ob triangula æquiangula CGE, CAL, CG est ad CA, ut EG ad AL. Quare erit ex æquali, ut EG ad AL, ita AO ad ET; & permutando erit etiam, ut EG ad AO, ita AL ad ET.

Quia autem ostensum est, AX esse ad LX, ut est EX ad TX; addendo antecedentes consequentibus, erit quoque, ut AX ad AL, ita EX ad ET; & permutando erit pariter, ut AX ad EX, ita AL ad ET. Unde, quum in eadem ratione rectarum AL, ET sit, tam AX ad EX, quam EG ad AO; erit ex æquali, ut AX ad EX, ita EG ad AO.

VII. *Tertia proprietas tangentium, quæ inter se mutuo conveniunt.* FIG. 11.

VII. Atque hinc modo *sequitur ulterius*, easdem tangentes AX, EX eandem rationem habere cum conjugatis diametrorum AB, EF, quæ pertinent ad puncta contactus A, & E.

Nam, per superius ostensa, ordinatæ EG, AO sunt, ut conjugatæ diametrorum AB, EF. Sed tangentes AX, EX sunt inter se, ut ordinatæ EG, AO. Quare erit ex æquali, ut

AX

AX ad EX, ita conjugata diametri AB ad conjugatam diametri EF.

Quemadmodum autem tangentes AX, EX sunt, ut conjugatæ diametrorum AB, EF; ita quadrata tangentium AX, EX erunt, ut quadrata earundem conjugatarum; atque adeo, ut figuræ ipsarum diametrorum AB, EF, quibus suarum conjugatarum quadrata sunt æqualia.

Unde modo, sicuti figuræ diametrorum AB, EF rationem habent compositam ex ipsis diametris, & parametris earundem; ita quoque quadratum tangentis AX ad quadratum tangentis EX rationem habebit compositam ex diametro AB ad diametrum EF, & ex parametro diametri AB ad parametrum diametri EF.

VIII. Pertinet huc quoque *hæc alia proprietas*, quod si AX, EX sint duæ tangentes hyperbolæ, & ducta ex puncto contactus A diametro AB, agatur per aliud contactus punctum E recta BE, conveniens cum tangente AX in puncto I; quod, inquam, AI sit dupla ipsius AX.

VIII. *Quarta proprietas tangentium, quæ sibi invicem occurrunt.*

FIG. 11.

Protrahatur enim tangens EX, usque donec conveniat cum diametro AB in puncto T. Tum ducatur ad eandem diametrum ordinata EG. Et quoniam, propter tangentem ET, ut est BT ad CT, ita est GT ad AT; erit permutando, ut BT ad GT, ita CT ad AT. Sed, componendo, BG est ad GT, ut CA ad AT. Quare erit rursus permutando, ut BG ad CA, ita GT ad AT.

Jam AI ad AX rationem habet compositam ex AI ad EG, & ex EG ad AX. Sed, ob triangula æquiangula BAI, BGE, AI est ad EG, ut AB ad BG. Itemque, ob triangula æquiangula TGE, TAX, EG est ad AX, ut GT ad AT, sive etiam, ut BG ad CA. Quare AI ad AX rationem habebit compositam ex AB ad BG, & ex BG ad CA.

Patet autem, duas istas rationes componere pariter rationem, quam habet AB ad CA. Quare erit ex æquali, ut AI ad AX, ita AB ad CA: proindeque, sicuti AB dupla est ipsius CA; ita etiam AI dupla erit ipsius AX.

IX. *Præcedentis proprietatis conversa demonstratur.* FIG. 11.

IX. Sed facile est etiam *conversam hujus ostendere*: nimirum, quod si AI sit dupla ipsius AX, & AX sit tangens hyperbolæ; etiam EX contingere debeat hyperbolam in puncto E.

Quemadmodum enim AI dupla ponitur ipsius AX, ita AB dupla est ipsius CA. Quare erit, ut AB ad CA, ita AI ad AX. Sed AI ad AX rationem habet compositam ex AI ad EG, & ex EG ad AX; sive etiam ex AB ad BG, & ex GT ad AT. Itaque AB ad CA habebit pariter rationem compositam ex AB ad BG, & ex GT ad AT.

Jam AB ad CA habet quoque rationem compositam ex AB ad BG, & ex BG ad CA. Quare erit, ut BG ad CA, ita GT ad AT; & permutando, ut BG ad GT, ita CA ad AT. Sed dividendo BT est ad GT, ut CT ad AT. Itaque rursus permutando erit, ut BT ad CT, ita GT ad AT: & propterea, ex superius ostensis, recta ET tangens erit ellipsis.

X. *Quinta*

X. Præterea, *ut alias tangentium hyperbolæ*

bolæ proprietates prosequamur, sint adhuc AX, EX duæ tangentes hyperbolæ. Et, ducta diametro AB, sit BZ tangens tertia, quæ conveniat cum EX in puncto Z. Sitque demum KL conjugata ipsius AB. Dico, rectangulum ex AX in BZ æquale esse quadrato, quod fit ex CK. *proprietas tangentium sibi mutuo occurrentium.* FIG. 12.

Conveniat namque tangens EX cum diametro AB in puncto T, & cum ejus conjugata KL in puncto V. Ducaturque ex puncto contactus E, tum recta EG ordinata ad diametrum AB, cum recta EH ordinata ad diametrum KL.

Quia igitur ET est tangens hyperbolæ erit, ut BT ad CT, ita GT ad AT. Sed, propter triangula æquiangula TBZ, TCV, BT est ad CT, ut BZ ad CV. Itemque, propter triangula æquiangula TGE, TAX, GT est ad AT, ut EG, sive CH ad AX. Quare erit ex æquali, ut BZ ad CV, ita CH ad AX: & propterea rectangulum ex AX in BZ æquale erit rectangulo HCV.

Et quoniam eadem tangens ET occurrit quoque conjugatæ diametro KL in puncto V; erit, ex superius ostensis, ut CH ad CK, ita CK ad CV. Quare rectangulum HCV æquale erit quadrato ex CK. Sed rectangulo HCV ostensum est æquale rectangulum ex AX in BZ. Igitur erit rectangulum ex AX in BZ æquale quadrato, quod fit ex CK.

XI. Ulterius, quemadmodum AB, KL sunt duæ hyperbolæ conjugatæ diametri, ita sint MR, PS binæ aliæ diametri similiter conjugatæ, quæ conveniant cum tangente AX in XI. *Theorema de rectangulo sub portionibus tangentis.*

per duas conjugatas abscissis. punctis X, & Y. Et nullo item negotio ostendemus, quod eidem CK quadrato æquale sit
FIG. 13. etiam rectangulum ex AX in AY.

Ductis siquidem, tum ordinatis MN, PQ ad diametrum AB, cum ordinatis AO, AI, ad diametros MR, PS; erit rectangulum ex MN in PQ ad CK quadratum in ratione composita ex MN ad CK, & ex PQ ad CK. Sed, per ea, quæ superius ostensa sunt, MN est ad CK, ut AO, seu CI ad CP. Itemque PQ est ad CK, ut CN ad CA; sive etiam, ut CO ad CM. Itaque rectangulum ex MN in PQ ad CK quadratum rationem habebit compositam ex CI ad CP, & ex CO ad CM.

Jam, propter tangentem AY, diametro PS occurrentem in Y, CI est ad CP, ut CP ad CY; sive etiam, ut PQ ad AY. Pariterque, ob tangentem AX, diametro MR occurrentem in X, CO est ad CM, ut CM ad CX; sive etiam, ut MN ad AX. Quare rectangulum ex MN in PQ ad CK quadratum habebit quoque rationem compositam ex PQ ad AY, & ex MN ad AX.

Quoniam autem duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum ex MN in PQ ad rectangulum ex AX in AY; erit ex æquali, ut rectangulum ex MN in PQ ad rectangulum ex AX in AY, ita idem rectangulum ex MN in PQ ad CK quadratum: & propterea rectangulum ex AX in AY æquale erit quadrato, quod fit ex CK.

XII. *Quod præcedentis* XII. Sed *conversum hujus theorematis facile quoque erit ostendere*. Nimirum, quod

si AB,

si AB, KL sint duæ hyperbolæ diametri conjugatæ, & rectangulum XAY, contentum sub portionibus tangentis AX, æquale sit quadrato, quod fit ex CK; aliæ binæ diametri MR PS sint etiam conjugatæ. *theorematis conversum sit pariter verum.* FIG. 13.

Si enim PS non sit conjugata ipsius MR, sit ejus conjugata diameter alia TV, quæ occurrat tangenti XY in puncto W. Et quoniam MR, TV sunt duæ hyperbolæ conjugatæ diametri, quæ conveniunt cum tangente XY in punctis X, & W; erit rectangulum ex AX in AW æquale quadrato, quod fit ex CK.

Quia autem eidem CK quadrato positum est æquale rectangulum ex AX in AY; erit rectangulum ex AX in AW æquale rectangulo ex AX in AY: proindeque portiones duæ AW, AY æquales erunt inter se. Quod quum fieri nequeat, consequens est, ut PS sit conjugata ipsius MR.

XIII. Atque hinc modo *colligi ulterius potest*, quod, si ex extremitatibus diametri AB, ducantur tangentes duæ AX, BZ, convenientes cum tangente tertia ET in punctis X, & Z, junganturque rectæ CX, CZ; istæ, ad hyperbolas usque productæ, exhibebunt nobis binas carum diametros conjugatas. XIII. *Theorema pro determinatione diametrorum conjugatarum hyperbolæ.* FIG. 12.

Si enim CZ producatur, usque donec conveniat cum tangente AX in puncto Y; ob triangula æquiangula CBZ, CAY, erit, ut CB ad BZ, ita CA ad AY. Unde, quemadmodum æquales sunt duæ CB, CA; ita æquales erunt pariter duæ BZ, AY: proindeque rectangulum ex AX in BZ æquale erit rectangulo ex AX in AY.

Quum autem ostensum sit rectangulum ex AX in BZ æquale quadrato ex CK; erit eidem CK quadrato æquale pariter rectangulum ex AX in AY. Unde, quum duæ diametri MR, PS abscindant ex tangente AX portiones duas AX, AY, quæ rectangulum continent, æquale quadrato, quod fit ex CK: per ea, quæ modo ostensa sunt, omnino necesse est, ut MR, PS sint duæ hyperbolarum conjugatæ diametri.

XIV. *Tangentis relate ad axem hyperbolæ proprietas specialis.* Fig. 14.

XIV. Cæterum *nolim hic silentio prætere*, quod si AB sit axis hyperbolæ, AD parameter ejus, & ET aliqua tangens; ducanturque ex puncto contactus E rectæ duæ EG, EH, una perpendicularis ad axem, & altera perpendicularis ad tangentem: quod, inquam, AB sit ad AD, ut est CG ad GH.

Si enim tangens ET conveniat cum axe AB in puncto T; erit, ex superius ostensis, ut AB ad AD, ita rectangulum CGT ad EG quadratum. Sed, ob triangulum TEH, rectangulum in E, quadratum ex EG est æquale rectangulo HGT. Quare erit quoque, ut AB ad AD, ita rectangulum CGT ad rectangulum HGT: & propterea, quia duo ista rectangula sunt inter se, ut CG ad GH; erit, ex æquali, ut AB ad AD, ita CG ad GH.

Quin etiam, si KL sit axis conjugatus, & KI parameter ejus; cumque eo conveniat perpendicularis EH in puncto R, eidemque ordinata demittatur EF; erit ut KL ad KI, ita CF ad FR.

Jam enim AB est ad AD, ut CG ad GH. Sed AB est ad AD, ut KI ad KL; & CG est

ad

ad GH, ut ER ad EH; sive etiam, ut FR ad GF. Quare erit ex æquali, ut KI ad KL, ita FR ad GF; & invertendo, KL erit ad KI, ut GF ad FR.

CAP. IV.

Demonstrantur proprietates, quæ competunt secantibus hyperbolæ.

I. OStensis proprietatibus, quæ pertinent ad tangentes hyperbolæ; sequitur modo, ut eas ostendamus, quæ ejusdem secantibus competunt. Res autem eo redit, ut inquiramus, *quam rationem habeant inter se rectangula, contenta sub segmentis duarum rectarum, quæ sibi mutuo occurrentes, utrinque, vel ad eandem hyperbolam, vel etiam ad hyperbolas oppositas terminantur.*

I. *De ratione, quam habent rectangula, sub secantium segmentis contenta. Primus casus, quum secantes sunt diametri.*

Atque hic quoque, non secus ac in ellipsi, varii sunt casus distinguendi, pro diversa qualitate rectarum, quæ sibi mutuo occurrunt, & utrinque ad curvam terminantur. Primo igitur supponemus, rectas illas esse *binas diametros*, & *ostendemus, rectangulum sub segmentis unius esse ad rectangulum sub segmentis alterius in duplicata ratione ipsarum diametrorum.*

Sint enim AB, KL duæ quævis hyperbolæ diametri, quæ sibi mutuo occurrunt in ipso centro C. Dico, rectangulum sub segmentis FIG. 15.

unius

utriusque AC, BC, esse ad rectangulum sub segmentis alterius KC, LC, ut est quadratum diametri AB ad quadratum diametri KL.

Nam, quum utraque diameter secta sit bifariam in centro C; erit in ratione ipsarum AB, KL, tam AC ad KC, quam BC ad LC. Sed rectangulum ACB est ad rectangulum KCL in ratione composita ex AC ad KC, & ex BC ad LC. Quare ratio eorundem rectangulorum ACB, KCL duplicata erit diametrorum AB, KL.

41. *Secundus casus, quum ex secantibus una quidem est diameter, altera est ejus ordinata.* II. Supponemus secundo, *ex rectis, sibi mutuo occurrentibus, unam quidem esse diametrum, alteram ordinatam ipsius. Et in isto casu rectangulum sub segmentis prioris rectae erit ad rectangulum sub segmentis alterius rectae in duplicata ratione ejus, quam habet diameter ad suam conjugatam.*

Fig. 15. Sit enim AB diameter aliqua hyperbolae, cujus KL sit conjugata; sitque etiam MO una ex ordinatis ejus diametri, quae ipsi diametro occurrens in puncto N, utrinque ad hyperbolam terminetur. Dico, rectangulum ANB esse ad rectangulum MNO, ut est AB quadratum ad KL quadratum.

Nam recta MO, velut ordinata ipsius AB, bifariam secta est in puncto N. Quare erit MN quadratum aequale rectangulo MNO: & propterea erit, ut rectangulum ANB ad rectangulum MNO, ita idem rectangulum ANB ad MN quadratum. Sed rectangulum ANB est ad MN quadratum, ut AB quadratum ad KL quadratum. Igitur in hac eadem ratione erit pariter rectangulum

ANB

ANB ad rectangulum MNO.

III. Supponemus tertio, *rectas sibi mutuo occurrentes esse ordinatas, quæ ad duas diametros conjugatas referuntur; ostendemusque, rectangulum sub segmentis unius esse ad rectangulum sub segmentis alterius in ratione duplicata reciproca ipsarum diametrorum.* III. *Tertius casus, quum duæ secantes sunt ordinatæ, quæ ad duas diametros conjugatas referuntur.*

Sint namque AB, KL duæ hyperbolæ diametri conjugatæ; sitque etiam MO ordinata diametri AB, & EF ordinata diametri KL, quæ utrinque ad curvam terminatæ, sibi mutuo occurrant in puncto H. Dico, rectangulum MHO esse ad rectangulum EHF, ut est KL quadratum ad AB quadratum. Fig. 15.

Ex puncto E ducatur ad diametrum AB ordinata EG. Et quoniam, propter hyperbolam, KL quadratum est ad AB quadratum, tam ut MN quadratum ad rectangulum ANB, quam ut EG quadratum ad rectangulum AGB; erit quoque, ut KL quadratum ad AB quadratum, ita differentia quadratorum MN, EG ad differentiam rectangulorum ANB, AGB.

Jam, propter æquales EG, NH, differentia quadratorum MN, EG est æqualis rectangulo MHO. Itemque, quum rectangulum ANB æquale sit differentiæ quadratorum CA, CN, & rectangulum AGB æquale differentiæ quadratorum CA, CG; erit differentia rectangulorum ANB, AGB æqualis differentiæ quadratorum CG, CN, quæ tantumdem valet, ac rectangulum EHF. Unde erit, ut KL quadratum ad AB quadratum, ita rectangulum MHO ad rectangulum EHF.

IV. Sup-

IV. IV. Supponemus quarto, *ex rectis, sibi invicem occurrentibus, unam esse diametrum, aliam vero ordinatam alterius diametri*. Et quum id contingit, erit rectangulum sub segmentis illius ad rectangulum sub segmentis istius, ut est quadratum prioris diametri ad quadratum conjugatæ alterius diametri.

Quartus casus, quum linearum secantium una est diameter, & alia ordinata alterius diametri.

Fig. 16. 17. Sit enim AB aliqua hyperbolæ diameter, cujus conjugata sit KL, & MO una ex ejus ordinatis, utrinque ad hyperbolam terminata. Sit porro EF diameter alia, quæ conveniat cum ordinata prioris MO in puncto H. Dico, rectangulum EHF esse ad rectangulum MHO, ut est EF quadratum ad KL quadratum.

Patet autem, duo hic contingere posse. Primo, ut ordinata MO, quæ refertur ad diametrum AB, suos terminos habeat in eadem hyperbola. Et secundo, ut terminetur ad hyperbolas oppositas. In utroque casu ducantur ex punctis E, H, M rectæ EG, HI, MR, ipsi AB parallelæ, quæ conveniant cum KL in punctis G, I, R. Et, ob triangula æquiangula CEG, CHI, erit, ut CG quadratum ad CI quadratum, ita EG quadratum ad HI, seu MR quadratum.

V. V. Ponamus itaque primo, *ordinatam suos terminos habere in eadem hyperbola*. Et quoniam, propter hyperbolam, EG quadratum est ad MR quadratum, ut summa quadratorum CK, CG ad summam quadratorum CK, CR; erit ex æquali, ut CG quadratum ad CI quadratum, ita summa quadratorum CK, CG ad summam quadratorum CK, CR.

Demonstratio hujus casus, quando ordinata ad eandem hyperbolam terminatur.

Fig. 16.

Hinc

Hinc, subducendo terminos prioris rationis ex terminis secundæ, erit quoque, ut CG quadratum ad CI quadratum, ita CK quadratum ad differentiam inter summam quadratorum CK, CR, & CI quadratum. Quumque CG quadratum sit ad CI quadratum, ut est CE quadratum ad CH quadratum; erit rursus ex æquali, ut CE quadratum ad CH quadratum, ita CK quadratum ad differentiam inter summam quadratorum CK, CR, & CI quadratum.

Atque hinc, subducendo antecedentes ex consequentibus, erit ulterius, ut CE quadratum ad differentiam quadratorum CE, CH, ita CK quadratum ad differentiam quadratorum CR, CI. Sed differentia quadratorum CE, CH est æqualis rectangulo EHF; & differentia quadratorum CR, CI, sive MN, NH est æqualis rectangulo MHO. Itaque erit, ut CE quadratum ad rectangulum EHF, ita CK quadratum ad rectangulum MHO; & permutando, ut CE quadratum ad CK quadratum, sive etiam, ut EF quadratum ad KL quadratum, ita rectangulum EHF ad rectangulum MHO.

VI. Ponamus secundo, *ordinatam terminari ad hyperbolas oppositas*. Et similiter, quia propter hyperbolam EG quadratum est ad MR quadratum, ut rectangulum KGL ad rectangulum KRL; erit ex æquali, ut CG quadratum ad CI quadratum, ita rectangulum KGL ad rectangulum KRL.

VI. Demonstratio ejusdem casus, quando ordinata terminatur ad hyperbolas oppositas. Fig. 17.

Hinc, ex terminis prioris rationis subducendo terminos secundæ, erit quoque, ut CG

qua-

quadratum ad CI quadratum, ita CK quadratum ad differentiam inter CI quadratum, & rectangulum KRL. Cumque CG quadratum sit ad CI quadratum, ut est CE quadratum ad CH quadratum; erit rursus ex æquali, ut CE quadratum ad CH quodratum, ita CK quadratum ad differentiam inter CI quadratum, & rectangulum KRL.

Atque hinc, capiendo differentias antecedentium, & consequentium, erit ulterius, ut CE quadratum ad differentiam quadratorum CE, CH, ita CK quadratum ad differentiam quadratorum CR, CI. Sed differentia quadratorum CE, CH est æqualis rectangulo EHF; & differentia quadratorum CR, CI est æqualis rectangulo MHO. Itaque erit, ut CE quadratum ad rectangulum EHF, ita CK quadratum ad rectangulum MHO; & permutando, ut CE quadratum ad CK quadratum, sive etiam, ut EF quadratum ad KL quadratum, ita rectangulum EHF ad rectangulum MHO.

VII. *Postremus casus, quum secantes sunt ordinatæ duarum quarumvis diametrorum.*

FIG. 18. 19.

VII. Supponemus denique, *rectas duas, sibi mutuo occurrentes, ordinatas esse duarum diametrorum, quæ inter se nequaquam sunt conjugatæ*. Et in isto casu rectangula, contenta sub segmentis ipsarum, erunt, ut quadrata, quæ fiunt ex conjugatis earum diametrorum.

Sint enim AB, RS duæ quævis diametri, inter se nequaquam conjugatæ; sitque MO una ex ordinatis diametri AB, & PQ una ex ordinatis diametri RS. Conveniant autem inter se duæ istæ ordinatæ in puncto H. Dico, rectangulum MHO esse ad rectangulum PHQ, ut est quadratum, quod fit ex conjugajugata diametri AB, ad quadratum, quod fit ex conjugata diametri RS.

Ducatur namque per punctum H diameter tertia EF. Et quoniam diameter ista EF secat MO, ordinatam diametri AB, in puncto H; erit, ex ostensis, ut rectangulum EHF ad rectangulum MHO, ita EF quadratum ad quadratum conjugatæ diametri AB. Quumque eadem EF secat pariter PQ, ordinatam diametri RS, in puncto H; erit quoque, ut rectangulum EHF ad rectangulum PHQ, ita EF quadratum ad quadratum conjugatæ diametri RS. Quare ordinando erit, ut rectangulum MHO ad rectangulum PHQ, ita quadratum ex conjugata diametri AB ad quadratum ex conjugata diametri RS.

VIII. Et quidem universale theorema, quod hac in re locum habet, hujusmodi est, quod *si intra hyperbolas oppositas bina ducantur rectæ lineæ, quæ sese mutuo secent; rectangula, quæ fiunt ex segmentis ipsarum, sint, ut quadrata ex conjugatis earum diametrorum, ad quas rectæ illæ velut ordinatæ referuntur*. Et omnia alia theoremata, superius ostensa, sunt tantum casus speciales istius.

VIII. Theorema generale, quod hac in re locum habet, in medium affertur.

Nam primo, si ductæ rectæ lineæ transeant per centrum, & sint hyperbolarum diametri; erunt ipsæmet conjugatæ earum diametrorum, ad quas eædem velut ordinatæ referuntur. Unde, vi ejus theorematis generalis, omnino necesse est, ut rectangula sub segmentis ipsarum sint, ut quadrata earundem.

Secundo, si una ex iis rectis sit diameter, & altera ejus ordinata: quemadmodum prior

est

est conjugata illius diametri, ad quam ipsa velut ordinata refertur; sic conjugata ejus diametri, quæ secundam agnoscit tamquam suam ordinatam, est conjugata diametri prioris. Quare, per theorema generale, rectangulum sub segmentis diametri ad rectangulum sub segmentis ordinatæ erit, ut quadratum diametri ad quadratum suæ conjugatæ.

Tertio, si rectæ, sese invicem secantes, sint ordinatæ duarum hyperbolæ diametrorum conjugatarum; non aliæ erunt conjugatæ diametrorum, ad quas rectæ illæ velut ordinatæ referuntur, quam eædem diametri, inverso ordine sumptæ. Unde, per theorema generale, rectangula, contenta sub segmentis earum ordinatarum, erunt in ratione reciproca duplicata suarum diametrorum.

Denique, si una ex iis rectis sit diameter, & altera sit ordinata alterius diametri; erit ipsa prior recta conjugata illius diametri, ad quam eadem velut ordinata refertur. Unde, ob theorema generale, rectangulum sub segmentis prioris diametri erit ad rectangulum sub segmentis ordinatæ alterius diametri, ut est quadratum diametri prioris ad quadratum conjugatæ alterius diametri.

IX. *Quod idem theorema sit verum, etiamsi una ex secantibus vertitur in tangentem.*

IX. Fieri autem potest, ut *una ex secantibus tangens evadat*: nimirum, quum puncta duo sectionis coeunt in unum. In isto casu rectangulum sub ejus segmentis vertetur in quadratum ipsius tangentis. Unde inter quadratum istud, & rectangulum, sub alterius secantis portionibus contentum, eadem adhuc ratio obtinebit.

Quin

Quin etiam *verti potest in tangentem utraque secans*. Et quum id contingit, ambo quidem rectangula, sub secantium portionibus contenta, abibunt in quadrata ipsarum tangentium. Ex quo fit, ut inter quadrata, quæ ex tangentibus fiunt, eadem pariter ratio debeat locum habere.

Et istud quidem jam præcedenti capite speciatim a nobis ostensum fuit. Vidimus enim, quod si fuerint tangentes duæ AX, EX, sibi mutuo occurrentes in X; quadrata ipsarum eandem habeant rationem inter se, quam quadrata, quæ fiunt ex conjugatis diametrorum AB, EF. FIG. 11.

Ad illud vero quod attinet, nec etiam difficile erit, veritatem ejus speciatim ostendere. Sed distinguendi sunt tamen duo casus. Primus est, quum secans est parallela diametro, quæ pertinet ad punctum contactus. Alter est, quum eadem secans ei diametro nequaquam est parallela.

X. Ponamus itaque primo, *secantem parallelam esse diametro, quæ pertinet ad punctum contactus*; adeo nempe, ut existente EH tangente, secans sit recta HO, parallela diametro EF. Jamque in hoc casu diameter, ad quam recta MO velut ordinata refertur, erit illa eadem, quæ est conjugata ipsius EF.

X. *Primus casus, quum secans est parallela diametro, quæ pertinet ad punctum contactus.* FIG. 20.

Sit igitur AB conjugata diametri EF. Quumque vicissim EF sit conjugata ipsius AB; jam illud ostendendum nobis erit, ut EH quadratum sit ad rectangulum MHO, veluti est AB quadratum ad EF quadratum. Istud autem nullo negotio ostendemus sequenti ratione.

Ex puncto M ducatur ad diametrum EF ordinata MR. Et quoniam duæ CR, MN inter se sunt æquales; erit etiam CR quadratum æquale quadrato, quod fit ex NM. Sed CR quadratum est æquale rectangulo ERF una cum CE quadrato. Et NM quadratum est æquale rectangulo MHO una cum NH, sive eodem CE quadrato. Quare, dempto communi quadrato ex CE, remanebit rectangulum ERF æquale rectangulo MHO.

Quia autem æqualia sunt quoque quadrata, quæ fiunt ex ipsis MR, EH; erit, ut MR quadratum ad rectangulum ERF, ita EH quadratum ad rectangulum MHO. Sed MR quadratum est ad rectangulum ERF, ut AB quadratum ad EF quadratum. Et igitur ex æquali in eadem ratione, quam habet AB quadratum ad EF quadratum, erit quoque EH quadratum ad rectangulum MHO.

XI. *Alter casus, quum secans non est parallela diametro, quæ transit per punctum contactus.* FIG. 21.

XI. Ponamus secundo, *secantem haud quidem parallelam esse diametro, quæ pertinet ad punctum contactus*: adeo nempe, ut existente EH tangente, secans sit recta HS, quæ occurrit diametro EF. Jamque, si KL sit diameter, ad quam recta TS velut ordinata refertur; ostendendum erit, EH quadratum esse ad rectangulum THS, ut est quadratum conjugatæ diametri EF ad quadratum conjugatæ diametri KL.

Ducatur ex puncto H secans alia HO, quæ ipsi EF sit parallela; sitque AB diameter, quæ ipsam MO velut suam ordinatam agnoscit. Itaque, quum secans HO parallela sit diametro EF, quæ pertinet ad punctum conta-

ctus

ctus E; erit EH quadratum ad rectangulum MHO, ut est quadratum conjugatæ diametri EF ad quadratum conjugatæ diametri AB.

Quoniam autem HO, HS sunt secantes duæ, quæ velut ordinatæ referuntur ad diametros AB, KL; erit, ex superius ostensis, rectangulum MHO ad rectangulum THS, ut est quadratum conjugatæ diametri AB ad quadratum conjugatæ diametri KL. Quare ordinando erit, ut EH quadratum ad rectangulum THS, ita quadratum ex conjugata diametri EF ad quadratum ex conjugata diametri KL.

XII. Speciatim, *quum secans est diameter hyperbolæ*, veritas ejus, de quo agitur, ostendi potest hoc pacto. Manentibus omnibus, ut supra, transeat secans HO per centrum hyperbolæ. Dico, EH quadratum esse ad rectangulum MHO, ut est quadratum ex conjugata diametri EF ad quadratum diametri MO. Id vero ostendemus in hunc modum.

XII. *Demonstratio specialis, quando secans est diameter.*

FIG. 22.

Sit GI conjugata ipsius EF, ducaturque ex puncto M ad eandem EF ordinata MR. Et quoniam CH quadratum est ad CM quadratum, ut CE quadratum ad CR quadratum; subducendo antecedentes ex consequentibus, erit ut CH quadratum ad rectangulum MHO, ita CE quadratum ad rectangulum ERF. Sed, ob hyperbolam, CE quadratum est ad rectangulum ERF, ut est CG quadratum ad MR quadratum. Itaque erit ex æquali, ut CG quadratum ad MR quadratum, ita CH quadratum ad rectangulum MHO.

Quoniam vero MR quadratum est ad EH quadratum, ut CM quadratum ad CH quadratum; erit ex æquo perturbando, ut CG quadratum ad EH quadratum, ita CM quadratum ad rectangulum MHO; & permutando, ut CG quadratum ad CM quadratum, ita EH quadratum ad rectangulum MHO. Sed CG quadratum est ad CM quadratum, ut GI quadratum ad MO quadratum. Jtaque erit ex æquali, ut EH quadratum ad rectangulum MHO, ita GI quadratum ad MO quadratum.

XIII. *Theorema de ratione, quam habent duæ hyperbolæ tangentes, rursus ostenditur.*

XIII. Atque hinc modo nullo negotio ostendi potest, quod *si duæ hyperbolæ tangentes sibi mutuo occurrant, eæ sint inter se, veluti conjugatæ diametrorum, quæ pertinent ad puncta contactus.*

FIG. 23.

Sint enim AH, EH duæ hyperbolæ tangentes, quæ sibi invicem occurrant in puncto H. Ducantur ex punctis contactus A, & E diametri AB, EF. Dico esse, ut AH ad EH, ita conjugata diametri AB ad conjugatam diametri EF.

Ducatur namque diameter alia MO, quæ transeat per punctum H. Et quoniam AH est tangens, & HO est secans, transiens per centrum; erit, ut AH quadratum ad rectangulum MHO, ita quadratum ex conjugata diametri AB ad quadratum ipsius MO.

Similiter, quia EH est tangens, & HQ est secans, transiens per centrum; erit, ut rectangulum MHO ad EH quadratum, ita MO quadratum ad quadratum, quod fit ex conjugata diametri EF.

Hinc ex æquo ordinando erit, ut AH

qua-

quadratum ad EH quadratum, ita quadratum ex conjugata diametri AB ad quadratum ex conjugata diametri EF: & propterea tangentes duæ AH, EH erunt, ut conjugatæ diametrorum AB, EF.

XIV. Cæterum ex iis, quæ hactenus ostensa sunt, prono alveo fluunt sequentia duo theoremata. XIV. *Alia duo theoremata ex hactenus ostensis deducuntur.*

Primum theorema est, quod *si duabus hyperbolæ tangentibus parallelæ fuerint duæ secantes, & conveniant inter se, tum tangentes, cum secantes; rectangula, sub secantium segmentis contenta, sint proportionalia quadratis, quæ ex tangentibus fiunt.*

Nam diametri, ad quas duæ secantes velut ordinatæ referuntur, sunt illæ eædem, quæ pertinent ad puncta contactus. Quare in eadem illa ratione, quam habent inter se quadrata tangentium, erunt quoque rectangula, quæ sub secantium segmentis continentur.

Alterum theorema est, quod *si duabus secantibus hyperbolæ parallelæ fuerint binæ aliæ secantes, & conveniant inter se, tam illæ, quam istæ; rectangula sub segmentis illarum sint proportionalia rectangulis, quæ sub segmentis istarum continentur.*

Nam diametri, ad quas duæ posteriores secantes velut ordinatæ referuntur, sunt illæ eædem, quæ agnoscunt velut suas ordinatas secantes priores. Quare in eadem illa ratione, quam habent inter se rectangula sub segmentis primarum secantium, erunt quoque rectangula sub segmentis aliarum.

CAP. V.

Proprietates, quæ hyperbolæ asymptotis competunt, in medium afferuntur.

I. *Quæ sint hyperbolæ asymptoti, & quod numquam cum ea conveniant.*

I. PErtinet ad hunc locum *doctrina asymptotorum hyperbolæ, ut quæ sunt rectæ, quæ hyperbolam contingunt in punctis extremis, sive infinite a centro distantibus*. Primo igitur ostendemus, qua ratione definiantur rectæ istæ, quæ hyperbolæ asymptoti dicuntur. Tum proprietates, quæ eis competunt, more nostro prosequemur.

Fig. 24. Hunc in finem referat AB axem hyperbolæ, sitque KL ejus conjugatus. Describatur circa duos istos axes AB, KL parallelogrammum EFGH. Et diagonales hujus parallelogrammi EG, FH, transeuntes per centrum C, hyperbolæ asymptotos nobis exhibebunt.

Sortitæ sunt autem diagonales istæ tale nomen, quia productæ in infinitum, etsi continuo ad hyperbolam accedant, numquam tamen cum ea conveniunt. Nec difficile id erit ostendere. Nam, ducta ex puncto quovis hyperbolæ M ad axem AB ordinata MN; erit, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita CK, sive AE quadratum ad CA quadratum.

Jam vero, si eadem ordinata MN conve-

niat

niat cum EG in O, AE quadratum erit ad CA quadratum, ut est NO quadratum ad CN quadratum. Quare erit ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita NO quadratum ad CN quadratum: & propterea, quemadmodum rectangulum ANB minus est CN quadrato, ita quoque MN quadratum minus erit quadrato, quod fit ex NO: adeoque punctum O erit ultra punctum M.

II. Quod autem *asymptoti continuo ad hyperbolam accedant*, demonstratur hoc pacto. Extendatur eadem ordinata MN, usque donec conveniat cum asymptoto altera FH in puncto R. Et quemadmodum EH secta est bifariam in A, ita quoque OR bisecta erit in N: proindeque differentia quadratorum MN, NO erit æqualis rectangulo OMR. *II. Quod asymptoti continuo ad hyperbolam accedant.* FIG. 24.

Et quoniam in eadem ratione, quam habet AE quadratum ad CA quadratum, est, tam MN quadratum ad rectangulum ANB, quam NO quadratum ad CN quadratum; erit quoque, ut AE quadratum ad CA quadratum, ita rectangulum OMR ad idem CA quadratum. Unde rectangulum OMR æquale erit quadrato, quod fit ex AE.

Hinc, quocumque in loco capiatur ordinata MN, si ea producatur usque donec secet asymptotos in punctis O, & R, erit rectangulum OMR ejusdem ubique magnitudinis. Unde per recessum ipsius ordinatæ a vertice A, quemadmodum augetur latus unum MR, ita necesse est, ut minuatur latus alterum MO: & propterea asymptoti ad hyperbolam continuo accedant.

III. *Quod distantia inter asymptotum, & hyperbolam evadit tandem inassignabilis.* **III.** Non igitur in dubium verti potest, quod *distantia inter asymptotum, & hyperbolam minor semper, ac minor evadat*. Sed ostendi quoque potest, quod *eadem distantia consque minuatur, ut tandem evadat inassignabilis, sive minor quacumque data recta linea.*

FIG. 24. Capiatur enim super EH portio EI, quæ sit minor recta linea data. Tum extendatur eadem versus S, ita ut EI sit ad AE, ut est AE ad IS. Ducatur porro per punctum S recta SR, ipsi GE parallela, quæ conveniat cum CH in puncto R. Ac denique compleatur parallelogrammum SO.

Quia igitur EI est ad AE, ut AE ad IS; erit rectangulum EIS æquale quadrato, quod fit ex AE. Sed eidem AE quadrato est etiam æquale rectangulum OMR. Quare duo rectangula EIS, OMR æqualia erunt inter se.

Ulterius, quemadmodum OR secta est bifariam in N, ita ES bisecetur in T. Et, ob æquales ES, OR, erunt etiam æquales duæ TE, NO: Unde erit, ut TE quadratum ad rectangulum EIS, ita NO quadratum ad rectangulum OMR; & convertendo, ut TE quadratum ad TI quadratum, ita NO quadratum ad MN quadratum.

Hinc, quum sit, ut TE ad TI, ita NO ad MN; erit rursus convertendo, ut TE ad EI, ita NO ad MO. Sed duæ TE, NO sunt æquales inter se. Quare etiam EI ipsi MO æqualis erit: & propterea, quemadmodum EI est minor recta linea data, ita quoque eadem data recta linea minor erit ipsa MO.

IV. *Asymptoto-* **IV.** Ostendemus modo proprietates, quæ

hy-

hyperbolæ asymptotis competunt. Et primã quidem proprietas hæc est, quod *si per aliquod hyperbolæ punctum recta ducatur, uni ex axibus parallela, quæ cum utraque asymptoto conveniat; rectangulum sub ejus segmentis sit æquale quadrato, quod fit ex dimidio axis prædicti.*

rum hyperbolæ proprietas principalis ostenditur.

FIG. 24.

Sint enim AB, KL duo axes hyperbolæ, sintque etiam EG, FH binæ ejus asymptoti. Jamque, si per aliquod hyperbolæ punctum M ducatur recta OR, parallela axi KL, quæ cum utraque asymptoto conveniat in punctis O, & R; erit, ex superius ostensis, rectangulum OMR æquale quadrato ex AE; & consequenter æquale etiam quadrato, quod fit ex CK.

Ducatur porro per idem punctum M recta PQ, parallela axi AB, quæ conveniat cum utraque asymptoto in punctis P, & Q. Ostendendum est, rectangulum PMQ esse etiam æquale quadrato, quod fit ex CA. Id vero nullo negotio ostendemus sequenti ratione.

Rectangulum OMR ad rectangulum PMQ est in ratione composita ex MO ad MP, & ex MR ad MQ. Sed MO est ad MP, ut AE, sive CK ad CA. Et MR est ad MQ, ut AH, sive CK ad CA. Quare ratio rectanguli OMR ad rectangulum PMQ duplicata erit ejus, quam habet CK ad CA.

Hinc erit, ut CK quadratum ad CA quadratum, ita rectangulum OMR ad rectangulum PMQ. Sed rectangulum OMR ostensum est æquale quadrato, quod fit ex CK. Quare etiam rectangulum PMQ erit æquale quadrato, quod fit ex CA.

V. At-

V. *Consectaria, quæ fluunt ex ostensa proprietate.* FIG. 25. V. Atque hinc modo *plura nobis derivantur*. Nimirum primo, quod si uni ex axibus, veluti KL, ducantur duæ parallelæ OR, PQ, convenientes cum asymptotis, & hyperbola; rectangulum sub segmentis unius OMR æquale sit rectangulo sub segmentis alterius PSQ; quum utrumque sit æquale quadrato, quod fit ex CK.

FIG. 25. Secundo, quod si per eadem hyperbolæ puncta M, & S ducantur duæ quævis aliæ parallelæ TV, XZ, ad utramque asymptotum pariter terminatæ, rectangulum TMV sit etiam æquale rectangulo XSZ. Nam rectangulum OMR ad rectangulum TMV rationem habet compositam ex MO ad MT, & ex MR ad MV; sive etiam ex SP ad SX, & ex SQ ad SZ; quum æquiangula sint, tam triangula OMT, PSX, quam triangula RMV, QSZ. Sed duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum PSQ ad rectangulum XSZ. Quare erit ex æquali, ut rectangulum OMR ad rectangulum TMV, ita rectangulum PSQ ad rectangulum XSZ: & propterea, sicuti rectangulum OMR est æquale rectangulo PSQ, ita quoque rectangulum TMV æquale erit rectangulo XSZ.

FIG. 26. Tertio, quod etsi rectæ MV, SZ non sint in directum cum rectis MT, SX, modo tamen parallelæ sint inter se, tam istæ, quam illæ, semper rectangulum TMV sit æquale rectangulo XSZ. Quum enim adhuc æquiangula sint, tam triangula OMT, PSX, quam triangula RMV, QSZ; semper quidem erit, ut rectangulum OMR ad rectangulum

TMV,

TMV, ita rectangulum PSQ ad rectangulum XSZ. Unde, sicuti rectangulum OMR ostensum est æquale rectangulo PSQ, ita quoque rectangulum TMV æquale erit rectangulo XSZ.

Et quarto demum, quod, si rectæ MT, SX, ad unam asymptotum ductæ, sint parallelæ alteri asymptoto, rectangulum CTM sit æquale rectangulo CXS. Nam, completis parallelogrammis CM, CS, erit rectangulum TMV æquale rectangulo XSZ. Sed, ob æquales MV, CT, rectangulum TMV est æquale rectangulo CTM. Pariterque, ob æquales SZ, CX, rectangulum XSZ est æquale rectangulo CXS. Quare erit etiam rectangulum CTM æquale rectangulo CXS. FIG. 26.

VI. Asymptotis hyperbolæ competit etiam hæc alia proprietas, quod *portiones cujusvis rectæ, hyperbola, & asymptotis interceptæ, inter se sint æquales.* VI. *Alia proprietas asymptotorum hyperbolæ demonstratur.*

Maneant enim omnia, ut supra, & ducatur utcumque recta OR, quæ tum curvam, tum asymptotos secet. Dico portiones duas MO, SR, hyperbola, & asymptotis interceptas, æquales esse inter se. FIG. 27.

Jam enim, ex ostensis, rectangulum OMR est æquale rectangulo OSR. Sed, secta OR bifariam in puncto N, æqualia sunt quoque quadrata, quæ fiunt ex ipsis NO, NR. Quare erit, ut NO quadratum ad rectangulum OMR, ita NR quadratum ad rectangulum OSR; & convertendo erit etiam, ut NO quadratum ad MN quadratum, ita NR quadratum ad SN quadratum.

Hinc,

Hinc, quum sit, ut NO ad MN, ita NR ad SN; erit rursus convertendo, ut NO ad MO, ita NR ad SR. Sed duæ NO, NR inter se sunt æquales; quum ex constructione tota OR bisecta sit in puncto N. Quare etiam æquales erunt duæ MO, SR.

VII. *Præcedentis proprietatis consectarium, definiens tangentis relate ad asymptotos positionem.*

VII. Ex hac autem proprietate prono alveo fluit, quod *si recta, ad asymptotum terminata, bifariam secta sit in puncto, in quo hyperbolæ occurrit, ea sit tangens ipsius hyperbolæ.*

FIG. 27.

Recta etenim PQ, terminata ad utramque asymptotum, secetur bifariam in puncto T, in quo occurrit hyperbolæ. Dico, eandem rectam PQ contingere hyperbolam in solo puncto T.

Si enim fieri potest, eadem recta PQ occurrat etiam hyperbolæ in puncto V. Itaque, per ostensam proprietatem, duæ PT, QV æquales erunt inter se. Sed ex hypothesi PT est æqualis ipsi QT. Quare duæ QV, QT inter se erunt æquales. Quod fieri non potest.

VIII. *Quod conversum præcedentis consectarii sit pariter verum.*

VIII. Ejusdem proprietatis ope, licebit etiam, *conversum hujus ostendere*. Nimirum quod si recta PQ, hyperbolam contingens in T, ad utramque asymptotum terminetur; portiones ejus PT, QT inter se sint æquales.

FIG. 27.

Ducatur enim recta alia OR, ipsi PQ parallela, quæ secans hyperbolam in punctis M, & S, cum utraque asymptoto similiter conveniat. Jamque, si per punctum contactus T diameter ducatur, erit ejus ordinata recta MS; adeoque eadem MS a diametro illa bifariam secabitur in N.

Quum

Quum igitur æquales sint inter se, tam duæ MO, SR, quam duæ MN, SN; erit tota NO toti NR pariter æqualis. Sed NO est ad NR, ut PT ad QT. Quare duæ PT, QT etiam æquales erunt: & propterea tangens PQ bifariam secta erit in puncto contactus T.

IX. Atque hinc modo, *determinatis hyperbolæ asymptotis, nullo negotio ducetur tangens ad aliquod ejus punctum*. Maneant enim omnia, ut supra. Et oporteat, tangentem ducere ad punctum hyperbolæ T.

IX. *Quomodo, determinatis hyperbolæ asymptotis, duci possit tangens ad punctum datum.*

Ducatur ex puncto T recta TX, parallela asymptoto CH, quæ conveniat cum asymptoto altera CE in puncto X. Capiatur postea super eadem asymptoto CE portio PX æqualis ipsi CX. Et recta PQ, ducta per punctum T, erit tangens quæsita. FIG. 27.

Quum enim ex constructione parallelæ sint rectæ TX, CQ; erit, ut PX ad CX, ita PT ad QT. Sed PX posita est æqualis ipsi CX. Quare etiam PT ipsi QT æqualis erit: & propterea per ea, quæ mox ostensa sunt, recta PT tangens erit hyperbolæ.

X. Ex ostensa tangentis proprietate illud etiam consequitur, quod *si duæ hyperbolæ tangentes, ad utramque asymptotum terminentur, eæ in eadem ratione sectæ sint in puncto, in quo sibi mutuo occurrunt.*

X. *Quod duæ hyperbolæ tangentes, ad utramque asymptotum terminatæ, secantur in eadem ratione.*

Manentibus namque omnibus, ut supra, sint PQ, EH duæ hyperbolæ tangentes, ad utramque asymptotum terminatæ. Conveniant autem tangentes istæ inter se in puncto V. Dico, fore, ut PV ad QV, ita HV ad EV. FIG. 28.

Ducantur enim ex punctis contactus T,

& A rectæ TX, AZ asymptoto CH parallelæ, quæ conveniant cum asymptoto altera CE in punctis X, & Z. Et quoniam, ex superius ostensis, rectangulum CXT est æquale rectangulo CZA; erit ut CX ad CZ, ita AZ ad TX.

Quia autem, ob tangentes PQ, EH bisectas in punctis contactus T, & A, rectæ CP, CE sunt duplæ ipsarum CX, CZ; erit, ut CX ad CZ, ita CP ad CE. Et similiter, quia, ob easdem tangentes, rectæ CH, CQ sunt duplæ ipsarum AZ, TX; erit, ut AZ ad TX, ita CH ad CQ. Unde erit ex æquali, ut CP ad CE, ita CH ad CQ.

Hinc triangula duo PCQ, ECH æqualia erunt inter se: proindeque, ablato communi trapetio CEVQ, erit quoque triangulum PEV æquale triangulo QHV. Quumque duo ista triangula habeant unum angulum uni angulo æqualem; habebunt quoque latera circum æquales istos angulos reciproce proportionalia: & propterea erit, ut PV ad QV, ita HV ad EV.

XI. *Tangens hyperbolæ, ad utramque asymptotum terminata, est æqualis conjugatæ diametri, ad punctum contactus pertinentis.*

XI. Exinde vero consequitur ulterius, *tangentem hyperbolæ, ad utramque asymptotum terminatam, æqualem esse conjugatæ illius diametri, quæ transit per punctum contactus.*

FIG. 28.

Jam enim ostensum est, PV esse ad QV, ut est HV ad EV. Quare, addendo antecedentes consequentibus, erit, ut PV ad PQ, ita HV ad EH; &, capiendo consequentium dimidia, erit quoque, ut PV ad PT, ita HV ad HA.

Quoniam autem, dividendo, TV est ad PT, ut AV ad HV; capiendo rursus consequentium dupla, erit, ut TV ad PQ, ita AV

ad

ad EH; & permutando erit etiam, ut TV ad AV, ita PQ ad EH.

Jam per ea, quæ superius ostensa sunt, TV est ad AV, ut est conjugata diametri, quæ transit per punctum T, ad conjugatam diametri, quæ transit per punctum A. Quare ex æquali in hac eadem ratione erit pariter tangens PQ ad tangentem EH.

Atque hoc quidem generaliter verum est, ubicumque capiantur puncta contactus T, & A. Quare verum etiam erit, quum punctum A est vertex axis hyperbolæ. Sed in isto casu tangens EH æqualis est axi conjugato. Et igitur etiam tangens altera PQ æqualis erit conjugatæ diametri, quæ transit per punctum contactus T.

XII. *Quod asymptoti sint diagonales omnium parallelogrammorum, quæ circa conjugatas diametros describuntur.*

XII. Ex quibus modo prono alveo fluit, *asymptotos esse diagonales, non modo ejus parallelogrammi, quod describitur circa axes conjugatos hyperbolæ, verum etiam cujuslibet alterius parallelogrammi, circa duas quascumque diametros conjugatas descripti.*

Quod quum ita sit, liquet etiam asymptotos hyperbolæ determinari posse adhibitis, non solum axibus, verum etiam duabus quibusvis aliis diametris conjugatis; quum diagonales parallelogrammi, descripti circa diametros, sint etiam diagonales parallelogrammi, quod describitur circa axes.

Unde sequitur quoque, quod si per aliquod hyperbolæ punctum recta ducatur, alicui diametro parallela, quæ cum utraque asymptoto conveniat; rectangulum, quod sub ejus segmentis continetur, sit æquale

qua-

quadrato, quod fit ex dimidio diametri prædictæ.

XIII. *Cujusmodi sit angulus, quem hyperbolæ asymptoti occursu mutuo in centro constituunt.*

XIII. Illud quoque nolim hic silentio præterire, quod *angulus, sub asymptotis comprehensus, sit rectus, obtusus, vel acutus, prout axis ipsius hyperbolæ est æqualis, minor, vel major suo conjugato.*

Sint enim AB, KL duo axes hyperbolæ, sintque etiam EG, FH binæ ejus asymptoti.

Fig. 24. Dico, angulum ECH, contentum sub asymptotis, esse rectum, obtusum, vel acutum, prout axis AB est æqualis, minor, vel major conjugato suo KL.

Ponamus primo, axes AB, KL æquales esse inter se. Et quoniam recta EH, quæ hyperbolam contingit in A, est æqualis ipsi KL; erunt AB, EH pariter æquales; & consequenter, tam AE, quam AH ipsi CA æqualis erit. Unde angulus ECH æqualis erit duobus angulis CEH, CHE; atque adeo rectus erit.

Ponamus secundo, axem AB minorem esse conjugato suo KL. Et quoniam tangens EH est æqualis ipsi KL; erit AB minor quoque, quam EH; & consequenter CA minor itidem erit unaquaque ipsarum AE, AH. Unde angulus ECH major erit duobus angulis CEH, CHE: & propterea erit obtusus.

Ponamus denique, axem AB majorem esse suo conjugato KL. Et rursus, quia tangens EH est æqualis ipsi KL; erit AB major quoque, quam EH; & consequenter CA major itidem erit unaquaque ipsarum AE, AH. Unde angulus ECH minor erit duobus angulis CEH, CHE; atque adeo erit acutus.

XIV. Cæ-

XIV. Cæterum, quod *asymptoti sint recta, quæ hyperbolam contingunt in punctis extremis, sive infinite a centro distantibus*, facile quidem erit ostendere. XIV. *Quod asymptoti contingant hyperbolam in punctis extremis, seu infinite a centro distantibus.*

Contingat enim hyperbolam in puncto quovis E recta ET, quæ conveniat cum axe AB in puncto T. Sitque etiam AX recta, quæ eandem hyperbolam contingit in A. Ostendendum est, tangentem ET asymptotum fieri, ubi punctum contactus E abit in infinitum. FIG. 29

Ut tangens ET asymptotus fiat, duo quidem requiruntur. Primum est, ut punctum T accedat ad centum ipsius hyperbolæ C. Alterum, ut AX æqualis fiat dimidio axis conjugati CK. Unde eo res redit, ut ostendamus, duo ista obtineri, quotiescumque abit in infinitum punctum contactus E.

Ducatur itaque ad axem AB ordinata EG. Et, propter tangentem ET, erit, ut CT ad CA, ita CA ad CG. Sed, abeunte in infinitum puncto E, CA fit infinite minor respectu ipsius CG. Quare etiam CT infinite minor erit relate ad CA: & propterea punctum T ad centrum accedet.

Deinde, quum punctum E abit in infinitum, rectangulum AGB non differt sensibiliter a quadrato, quod fit ex CG, sive TG; quum differentia sit quadratum ex CA, sive TA, quod evanescit relate ad quadratum ex CG, sive TG. Unde erit, ut EG quadratum ad rectangulum AGB, ita idem EG quadratum ad TG quadratum.

Jam, propter hyperbolam, EG quadratum est ad rectangulum AGB, ut CK quadratum ad CA quadratum. Et, ob triangula æquiangula TGE, TAX, EG quadratum est ad TG quadratum, ut AX quadratum ad TA, sive CA quadratum. Quare erit ex æquali, ut CK quadratum ad CA quadratum, ita AX quadratum ad idem CA quadratum: & propterea duæ AX, CK æquales erunt inter se.

XV. *Quod asymptoti sint ultimæ hyperbolæ diametri, atque adeo correspondeant ellipsis diametris æqualibus.* Fig. 30

XV. Nolim autem hoc loco reticere, *quod eadem asymptoti considerari quoque possint veluti ultimæ hyperbolæ diametri: quæ ratione iis ellipsis diametris correspondent, quæ inter se sunt æquales.*

Sint enim AB, KL axes ellipsis, circa quos describatur parallelogrammum EFGH. Ducantur in parallelogrammo isto diagonales EG, FH. Et quoniam hujusmodi diagonales dividunt bifariam latera opposita alterius parallelogrammi AKBL; per superius ostensa, eæ erunt diametri ellipsis æquales.

Verum quidem est, quod diametris hisce non competit illa eadem proprietas, quæ in hyperbolæ asymptotis obtinet. Ibi enim ostensum est, quod si uni ex axibus, veluti KL, parallela agatur OR, quæ tum hyperbolam, cum asymptotos secet, rectangulum OMR sit æquale quadrato ex CK. Quod tamen in ellipsi minime locum habet.

Interim, si consideremus, quod rectangulum OMR sit æquale differentiæ quadratorum MN, NO; simile quidpiam etiam in ellipsi comperiemus. Nam ducta hic quoque recta OR, ipsi KL parallela, quæ secet tam ellipsim, quam diametros æquales; erit summa quadratorum MN, NO æqualis quadrato, quod fit ex CK.

In

In eadem etenim ratione, quam habet CK, sive AE quadratum ad CA quadratum est, tam MN quadratum ad rectangulum ANB, quam NO quadratum ad CN quadratum. Quare in eadem illa ratione erit quoque summa quadratorum MN, NO ad CA quadratum: & propterea duo quadrata MN, NO æqualia erunt quadrato, quod fit ex CK.

CAP. VI.

Proprietates, quæ parabolæ tangentibus, & secantibus competunt, ostenduntur.

I. COmplectemur eodem capite proprietates, quæ competunt tangentibus, & secantibus parabolæ; quia numero pauciores sunt, nec adeo longius nos ducent. Ac primo quidem circa tangentes parabolæ jam illud superius ostensum est, quod *si ex vertice alicujus diametri recta ducatur ordinatis ejus parallela, ea tangat parabolam in solo illo vertice*. Nunc autem subjungemus, quod *in locum, tangente, & parabola contentum, nulla alia cadat recta linea.* I. *Tangentis parabolæ proprietates duæ principales afferuntur.*

Sit enim parabola AM, cujus AB sit diameter aliqua, AD parameter ejus, & DAH recta ordinatis ejusdem diametri parallela. Dico, quod sicuti recta DAH contingit parabolam in solo vertice A; ita in locum, contentum tangente, & eadem parabola, nulla alia recta FIG. 31.

linea duci possit ex eodem vertice A.

Si fieri potest, ducatur recta alia AI, in qua sumpto puncto quovis P, agatur per illud recta PN, ipsi AH parallela, conveniens cum parabola in puncto M. Et quoniam PN quadratum majus est MN quadrato; habebit PN quadratum ad AN quadratum majorem rationem, quam MN quadratum ad idem AN quadratum. Sed, propter parabolam, MN quadratum est æquale rectangulo DAN. Et rectangulum DAN est ad AN quadratum, ut AD ad AN. Quare PN quadratum ad AN quadratum habebit quoque majorem rationem, quam AD ad AN.

Fiat ergo, ut PN quadratum ad AN quadratum, ita AD ad AK, quæ minor erit, quam AN. Tum per punctum K ducatur recta KI, eidem AH parallela, conveniens cum parabola in puncto L. Et quoniam PN quadratum est ad AN quadratum, ut IK quadratum ad AK quadratum; erit ex æquali, ut AD ad AK, ita IK quadratum ad AK quadratum. Sed AD est ad AK, ut rectangulum DAK ad AK quadratum; sive etiam, ut LK quadratum ad AK quadratum. Quare erit rursus ex æquali, ut LK quadratum ad AK quadratum, ita IK quadratum ad idem AK quadratum: & propterea erit LK quadratum æquale quadrato ex IK. Quod fieri non potest.

II. *Corollaria, quæ ex duabus præcedentibus proprietatibus consequuntur.*

II. Quælibet ergo recta linea, quæ ex puncto contactus ducitur infra tangentem, necesse est, ut primo secet parabolam, tum cadat in locum, tangente, & parabola contentum. Hinc autem duo consequuntur, quæ

adi-

aditum nobis aperient ad ostendendas proprietates omnes, quæ parabolæ tangentibus competunt.

Primum est, quod *ad unum, idemque punctum parabolæ nonnisi unica tangens duci possit*. Nam, si duci possent tangentes duæ; jam una caderet in locum, parabola, & tangente altera comprehensum. Quod quidem ostensum est fieri non posse.

Alterum est, quod *si recta linea contingat parabolam in puncto aliquo, ea debeat esse parallela ordinatis illius diametri, quæ pertinet ad illud punctum*. Nam aliter, ducta ex eo puncto recta alia, ordinatis iis parallela, foret ista quoque tangens parabolæ; atque adeo ad unum, idemque punctum parabolæ duæ tangentes duci possent. Quod fieri nequit.

III. His jactis principiis, facile modo erit *eam primum tangentis proprietatem ostendere, quæ ei competit, ubi alicui diametro occurrit.* III. *Proprietas tangentis parabolæ, alicui diametro occurrentis.*

Tangens igitur ET, ducta ad punctum E, verticem diametri EF, conveniat cum diametro altera AB in puncto T. Demittatur ad diametrum AB ordinata EG. Et dico, portiones duas AT, AG æquales esse inter se. Fig. 32

Ducatur enim ad diametrum alteram EF ordinata AO. Et quoniam recta ET contingit parabolam in puncto E, vertice diametri EF; erit ET ipsi AO parallela. Sed diametri AB, EF sunt itidem æquidistantes. Quare TO parallelogrammum erit.

Quum ergo TO parallelogrammum sit; latera ejus opposita AT, EO æqualia erunt inter se. Sed, ex superius ostensis, EO est æqualis ipsi

AG. Quare duæ AT, AG inter se æquales erunt; adeoque tota TG dupla erit ipsius AG.

IV. *Præcedentis proprietatis conversa demonstratur.* IV. Sed facile quoque erit *conversam hujus proprietatis ostendere*. Nimirum, quod recta ET sit tangens parabolæ, si demissa ad diametrum AB ordinata EG, æquales fuerint
Fig. 32 portiones duæ AT, AG.

Ducatur enim ad diametrum EF ordinata AO. Et, ex superius ostensis, erit AG æqualis EO. Sed ipsi AG æqualis ponitur AT. Quare etiam AT eidem EO æqualis erit.

Quum igitur duæ AT, EO sint æquales, & parallelæ; erunt etiam æquales, & parallelæ duæ ET, AO, quæ illas ad easdem partes conjungunt. Unde, quum AO sit ordinata diametri EF, erit ET tangens parabolæ.

V. *Proprietates tangentium parabolæ sibi mutuo occurrentium ostenduntur.* V. Nunc *eas quidem proprietates ostendemus, quæ tangentibus parabolæ, sibi mutuo occurrentibus, competunt*. Hunc in finem ad duo quælibet parabolæ puncta A, & E ducantur tangentes duæ AX, EX, quæ sibi mutuo occurrant in X; & extendantur eædem, usque donec conveniant cum diametris
Fig. 32 AB, EF in punctis L, & T.

Primo igitur utraque tangens bifariam secabitur in puncto X. Ducta siquidem ad diametrum AB ordinata EG, erunt duæ AT, AG æquales inter se. Sed, propter parallelogrammum GL, æquales quoque sunt duæ AG, EL. Quare erit AT ipsi EL pariter æqualis; & consequenter æquales erunt, tam duæ AX, LX, quam duæ TX, EX.

Secundo tangentes duæ AX, EX eandem rationem habebunt cum ordinatis EG,

AO,

AO. Sunt enim AX, EX semisses ipsarum AL, ET. Quare erit, ut AX ad EX, ita AL ad ET. Sed AL est ad ET, ut EG ad AO. Igitur erit ex æquali, ut AX ad EX, ita EG ad AO.

Denique tangentes duæ AX, EX erunt in subduplicata ratione parametrorum, quæ referuntur ad diametros AB, EF. Jam enim, per superius ostensa, in hac ratione sunt ordinatæ EG, AO. Sed AX est ad EX, ut EG ad AO. Quare in eadem subduplicata ratione earum parametrorum erunt etiam tangentes duæ AX, EX.

VI. Speciatim *relate ad axem competit tangenti parabolæ sequens proprietas*. Nimirum, quod si AB sit axis parabolæ, AD parameter ejus, & ET aliqua tangens; ducanturque ex puncto contactus E rectæ duæ EG, EH, una perpendicularis ad axem, & altera perpendicularis ad tangentem; quod, inquam, portio axis GH sit æqualis dimidio parametri AD.

VI. Tangentis parabolæ relate ad axem proprietas quædam specialis demonstratur. FIG. 33

Si enim tangens ET conveniat cum axe AB in puncto T; erit, ex superius ostensis, AG æqualis ipsi AT, atque adeo semissis totius TG. Jam vero EG quadratum est æquale; tam rectangulo DAG, propter parabolam; quam rectangulo TGH, ob triangulum TEH, rectangulum in E. Quare, quum duo rectangula DAG, TGH inter se sint æqualia; erit, ut AG ad TG, ita GH ad AD; & consequenter GH semissis erit ipsius AD.

VII. Perlustratis proprietatibus, quæ parabolæ tangentibus competunt; reliquum

VII. Theorema fundamen-

tali, pro ostendenda proprietate secantium parabola. modo est, ut quid parabolæ secantibus accidat, ostendamus. Hunc in finem *præmittendum est sequens theorema*, quod si AB sit aliqua parabolæ diameter, cujus AD sit parameter, & MO una ex ejus ordinatis, utrinque ad parabolam terminata, ducaturque recta EF, diametro parallela, quæ conveniat cum MO in puncto H; quod, inquam, rectangulum MHO sit æquale rectangulo, quod fit ex AD in EH.

FIG. 34.

Neque vero difficile erit theorema istud ostendere. Nam, demissa ad diametrum AB ordinata EG; erit, tam MN quadratum æquale rectangulo DAN, quam EG, sive NH quadratum æquale rectangulo DAG. Unde erit quoque differentia quadratorum MN, NH æqualis differentiæ rectangulorum DAN, DAG. Sed differentia quadratorum MN, NH est æqualis rectangulo MHO; & differentia rectangulorum DAN, DAG est æqualis rectangulo, quod fit ex AD in GN, sive EH. Quare erit rectangulum MHO æquale rectangulo, quod sub ipsis AD, EH continetur.

VIII. *Ostenditur proprietas, quæ parabolæ secantibus competit.* FIG. 34

VIII. Hinc autem sequitur, quod *si intra parabolam binæ ducantur rectæ lineæ, quæ sese mutuo secent; rectangula, quæ fiunt ex segmentis ipsarum, sint, ut parametri earum diametrorum, ad quas rectæ illæ velut ordinata referuntur.*

Sint enim AB, RS duæ quævis parabolæ diametri; sitque MO una ex ordinatis diametri AB, & PQ una ex ordinatis diametri RS. Conveniant autem inter se duæ istæ ordinatæ in puncto H; & sit AD parameter diame-

tri

tri AB,& RK parameter diametri RS. Dico, rectangulum MHO esse ad rectangulum PHQ, ut est parameter AD ad parametrum RK.

Ducatur namque per punctum H diameter tertia EF, quæ utrique ipsarum AB, RS parallela erit. Et quoniam diameter ista EF secat MO, ordinatam diametri AB, in puncto H; erit, ex ostensis, rectangulum MHO æquale rectangulo ex AD in EH. Quumque eadem EF secet pariter PQ, ordinatam diametri RS, in puncto H; erit quoque rectangulum PHQ æquale rectangulo ex RK in EH.

Hinc erit, ut rectangulum MHO ad rectangulum PHQ, ita rectangulum ex AD in EH ad rectangulum ex RK in EH. Sed, ob communem altitudinem EH, rectangulum ex AD in EH est ad rectangulum ex RK in EH, veluti est AD ad RK. Quare erit ex æquali, ut AD ad RK, ita rectangulum MHO ad rectangulum PHQ.

IX. Fieri vero potest, ut *una ex secantibus tangens evadat*: nimirum, quum puncta duo sectionis coeunt in unum. In isto casu rectangulum sub ejus segmentis vertetur in quadratum ipsius tangentis. Unde inter quadratum istud, & rectangulum, sub alterius secantis portionibus contentum, eadem adhuc ratio obtinebit. IX. *Quod eadem proprietas locum habeat, etiamsi, vel una, vel utraque secans vertatur in tangentem*

Quin etiam *verti potest in tangentem utraque secans*. Et quum id contingit, ambo quidem rectangula, sub secantium portionibus contenta, abibunt in quadrata ipsarum tangentium. Ex quo fit, ut inter quadrata, quæ ex tangentibus fiunt, eadem pariter ratio

tio debeat locum habere.

Et istud quidem jam paulo ante specialiter a nobis ostensum est. Vidimus enim, quod si fuerint tangentes duæ AX, EX, sibi mutuo occurrentes in X; quadrata ipsarum eandem habeant rationem inter se, quam parametri diametrorum AB, EF. Ad illud vero quod attinet, nec etiam difficile erit, veritatem ejus speciatim ostendere.

FIG. 32.

X. *Demonstratio, quando duarum rectarum una est tangens, altera secans.* FIG. 35

X. Sit enim EH tangens, & HO secans; sitque etiam EF diameter, quæ pertinet ad punctum contactus E, & RS diameter, ad quam recta MO velut ordinata refertur. *Ostendendum est*, EH quadratum esse ad rectangulum MHO, ut est parameter diametri EF ad parametrum diametri RS.

Ducatur ex puncto H recta HL, diametris parallela, quæ parabolæ occurrat in L. Tum ex puncto L demittatur ad diametrum EF ordinata LK. Et quoniam HL secat MO, ordinatam diametri AB, in puncto H; erit, ex ostensis, rectangulum MHO æquale rectangulo ex HL, sive EK in parametrum diametri RS.

Jam vero, propter parabolam, LK, sive EH quadratum est æquale rectangulo, quod fit ex eadem EK in parametrum diametri EF. Quare erit, ut EH quadratum ad rectangulum MHO, ita parameter diametri EF ad parametrum diametri RS.

XI. *Demonstratio, quando utraque rectarum est tangens.*

XI. Atque hinc modo alia ratione ostendi potest, quod *si duæ parabolæ tangentes sibi mutuo occurrant, eæ sint inter se in subduplicata ratione parametrorum, pertinentium*

tium ad diametros, quæ transeunt per puncta contactus.

Sint enim AH, EH duæ parabolæ tangentes, quæ sibi invicem occurrant in puncto H. Ducantur ex punctis contactus A, & E diametri AB, EF. Dico, esse AH ad EH in subduplicata ratione parametrorum, quæ referuntur ad diametros AB, EF. FIG. 35.

Ducatur namque secans quævis MO, quæ transeat per punctum H, sitque RS diameter, ad quam ipsa MO velut ordinata refertur. Et quoniam AH est tangens, & HO est secans; erit AH quadratum ad rectangulum MHO, ut est parameter diametri AB ad parametrum diametri RS.

Similiter, quia EH est tangens, & HO est secans; erit rectangulum MHO ad EH quadratum, ut est parameter diametri RS ad parametrum diametri EF. Quare ex æquo ordinando erit, ut AH quadratum ad EH quadratum, ita parameter diametri AB ad parametrum diametri EF: & propterea tangentes duæ AH, EH erunt in subduplicata ratione earum parametrorum.

XII. Ex iis autem, quæ hactenus ostensa sunt, prono alveo fluunt sequentia duo theoremata. XII. *Theoremata duo, quæ ex hactenus ostensis deducuntur.*

Primum theorema est, quod *si duabus parabolæ tangentibus parallelæ fuerint duæ secantes, & conveniant inter se, tum tangentes, cum secantes; rectangula, sub secantium segmentis contenta, sint proportionalia quadratis, quæ ex tangentibus fiunt.*

Nam

Nam diametri, ad quas duæ secantes velut ordinatæ referuntur, sunt illæ eædem, quæ pertinent ad puncta contactus. Quare in eadem illa ratione, quam habent inter se quadrata tangentium, erunt quoque rectangula, quæ sub secantium segmentis continentur.

Alterum theorema est, quod *si duabus secantibus parabolæ parallelæ fuerint binæ aliæ secantes, & conveniant inter se, tam illæ, quam istæ; rectangula sub segmentis illarum sint proportionalia rectangulis, quæ sub segmentis istarum continentur.*

Nam diametri, ad quas duæ posteriores secantes velut ordinatæ referuntur, sunt illæ eædem, quæ agnoscunt velut suas ordinatas secantes priores. Quare in eadem illa ratione, quam habent inter se rectangula sub segmentis primarum secantium, erunt quoque rectangula sub segmentis aliarum.

XIII. *Proprietates tangentium, & secantium parabolæ, ex iis, quæ obtinent in ellipsi, & hyperbola deducuntur.*

XIII. Cæterum ostendendum modo esset, *qua ratione proprietates, quæ pertinent ad tangentes, & secantes, tum hyperbolæ, cum ellipsis, vertantur in eas, quæ parabolæ tangentibus, & secantibus competunt*. Sed satis erit, transmutationem istam in iis tantum ostendere, quæ reliquarum omnium sunt basis, & fundamentum.

FIG. 2. 11.

Nimirum primo, tam in ellipsi, quam in hyperbola ostensum est, quod si ET sit tangens, conveniens cum diametro AB in puncto T, & EG sit diametri ejus ordinata, CG sit ad CA, ut est CA ad CT. Jam, capiendo differentias antecedentium, & consequentium,

tium, erit quoque, ut AG ad CA, ita AT ad CT: & propterea, abeunte in infinitum centro C, quemadmodum æquales fiunt duæ CA, CT, ita quoque æquales erunt duæ AG, AT.

Deinde, si duæ rectæ sese mutuo secent, sive in ellipsi, sive in hyperbola; erunt rectangula sub segmentis ipsarum, ut quadrata ex conjugatis earum diametrorum, ad quas rectæ illæ velut ordinatæ referuntur; & consequenter in ratione composita ex iisdem diametris, & parametris earundem.

Jam, abeunte in infinitum centro, sive ellipsis, sive hyperbolæ, ratio earum diametrorum evadit æqualitatis, quum ipsæ diametri fiant infinitæ longitudinis, ac differentes inter se mutuo per differentiam finitam. Quare rectangula, contenta sub segmentis earum rectarum, erunt in sola ratione parametrorum, pertinentium ad diametros, ad quas eædem illæ rectæ velut ordinatæ referuntur.

LIBER VI.

De Focis, seu Umbilicis Sectionum Conicarum.

Intra conicas sectiones dantur puncta nonnulla, ad quæ puncta ipsarum sectionum quum referuntur, plures alias, easque non contemnendas proprietates sortiuntur. Puncta ista vocavit Apollonius puncta comparationum. Sed, ob speciale ipsorum accidens, quod conicas sectiones usibus opticis inservientes nobis ostendit, eadem puncta foci, sive umbilici a Recentioribus dicuntur. Proprietates ergo, quæ conicis sectionibus competunt, relate ad focos, seu umbilicos, hoc libro ostendendæ nobis erunt.

CAP. I.

Focorum ellipsis proprietates generales ostenduntur.

I. *Definitio focorum ellipsis, & quod æqualiter distent, tum a centro, cum a verticibus.*

I. Ellipsis foci, sive umbilici dicuntur *duo illa puncta axis majoris, quibus ordinatæ correspondentes semissem parametri ejusdem axis adæquant.*

FIG. 36 Ita, si AB sit axis major ellipsis, & AD parameter ejus, capianturque in axe illo AB duo puncta G, & H adeo quidem, ut ordinatæ ta EG, FH, punctis illis correspondentes, adæquent semissem ipsius AD; dicentur puncta G, & H foci, sive umbilici ipsius ellipsis.

Unde liquet focos G, & H æqualiter distare, tam a centro ellipsis C, quam ab axis verticibus A, & B. Nam, quemadmodum æqualia sunt quadrata EG, FH; ita quoque æqualia erunt rectangula AGB, AHB, quæ iis quadratis proportione correspondent.

Hinc, subducendo æqualia ista rectangula AGB, AHB ex æqualibus quadratis CA, CB, remanebit quadratum ex CG æquale quadrato ex CH: & propterea æquales erunt inter se, tam duæ CG, CH, quam duæ AG, BH.

II. Ex ipsa autem focorum definitione liquet, *rectangulum sub axis portionibus, per focorum alterum abscissis, quadrantem figuræ ejusdem axis adæquare.* Maneant enim omnia, ut supra. Dico, tam rectangulum AGB, quam rectangulum AHB æquale esse quartæ parti figuræ axis AB, quæ constituitur per rectangulum DAB.

II. *Focorum ellipsis proprietas prima generalis.*

FIG. 36.

Nam, propter ellipsim, EG quadratum est ad rectangulum AGB, ut AD ad AB; sive etiam, ut AD quadratum ad rectangulum DAB. Sed EG quadratum est quarta pars quadrati, quod fit ex AD; quum ex constructione EG semissem adæquet ipsius AD. Quare etiam rectangulum AGB quarta pars erit rectanguli DAB.

Eadem ratione, propter ellipsim, FH quadratum est ad rectangulum AHB, ut AD ad AB; sive etiam, ut AD quadratum ad rectangulum DAB. Sed FH quadratum est

quar-

per duas conjugatas abscissas. punctis X, & Y. *Ex nullo item negotio ostendemus*, quod eidem CK quadrato æquale sit FIG. 13. etiam rectangulum ex AX in AY.

Ductis siquidem, tum ordinatis MN, PQ ad diametrum AB, cum ordinatis AO, AI, ad diametros MR, PS; erit rectangulum ex MN in PQ ad CK quadratum in ratione composita ex MN ad CK, & ex PQ ad CK. Sed, per ea, quæ superius ostensa sunt, MN est ad CK, ut AO, seu CI ad CP. Itemque PQ est ad CK, ut CN ad CA; sive etiam, ut CO ad CM. Itaque rectangulum ex MN in PQ ad CK quadratum rationem habebit compositam ex CI ad CP, & ex CO ad CM.

Jam, propter tangentem AY, diametro PS occurrentem in Y, CI est ad CP, ut CP ad CY; sive etiam, ut PQ ad AY. Pariterque, ob tangentem AX, diametro MR occurrentem in X, CO est ad CM, ut CM ad CX; sive etiam, ut MN ad AX. Quare rectangulum ex MN in PQ ad CK quadratum habebit quoque rationem compositam ex PQ ad AY, & ex MN ad AX.

Quoniam autem duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum ex MN in PQ ad rectangulum ex AX in AY; erit ex æquali, ut rectangulum ex MN in PQ ad rectangulum ex AX in AY, ita idem rectangulum ex MN in PQ ad CK quadratum: & propterea rectangulum ex AX in AY æquale erit quadrato, quod fit ex CK.

XII. *Quod præcedentis* XII. Sed *conversum hujus theorematis facile quoque erit ostendere*. Nimirum, quod

si AB,

si AB, KL sint duæ hyperbolæ diametri conjugatæ, & rectangulum XAY, contentum sub portionibus tangentis AX, æquale sit quadrato, quod fit ex CK; aliæ binæ diametri MR PS sint etiam conjugatæ. *theorematis conversum, sit pariter verum.* FIG. 13.

Si enim PS non sit conjugata ipsius MR, sit ejus conjugata diameter alia TV, quæ occurrat tangenti XY in puncto W. Et quoniam MR, TV sunt duæ hyperbolæ conjugatæ diametri, quæ conveniunt cum tangente XY in punctis X, & W; erit rectangulum ex AX in AW æquale quadrato, quod fit ex CK.

Quia autem eidem CK quadrato positum est æquale rectangulum ex AX in AY; erit rectangulum ex AX in AW æquale rectangulo ex AX in AY: proindeque portiones duæ AW, AY æquales erunt inter se. Quod quum fieri nequeat, consequens est, ut PS sit conjugata ipsius MR.

XIII. Atque hinc modo *colligi ulterius potest*, quod, si ex extremitatibus diametri AB, ducantur tangentes duæ AX, BZ, convenientes cum tangente tertia ET in punctis X, & Z, junganturque rectæ CX, CZ; istæ, ad hyperbolas usque productæ, exhibebunt nobis binas easum diametros conjugatas. XIII. *Theorema pro determinatione diametrorum conjugatarum hyperbolæ.* FIG. 12.

Si enim CZ producatur, usque donec conveniat cum tangente AX in puncto Y; ob triangula æquiangula CBZ, CAY, erit, ut CB ad BZ, ita CA ad AY. Unde, quemadmodum æquales sunt duæ CB, CA; ita æquales erunt pariter duæ BZ, AY: proindeque rectangulum ex AX in BZ æquale erit rectangulo ex AX in AY.

Quum autem ostensum sit rectangulum ex AX in BZ æquale quadrato ex CK; erit eidem CK quadrato æquale pariter rectangulum ex AX in AY. Unde, quum duæ diametri MR, PS abscindant ex tangente AX portiones duas AX, AY, quæ rectangulum continent, æquale quadrato, quod fit ex CK: per ea, quæ modo ostensa sunt, omnino necesse est, ut MR, PS sint duæ hyperbolarum conjugatæ diametri.

XIV. *Tangentis relate ad axem hyperbolæ proprietas specialis.* Fig. 14.

XIV. Cæterum *nolim hic silentio prætere rire*, quod si AB sit axis hyperbolæ, AD parameter ejus, & ET aliqua tangens; ducanturque ex puncto contactus E rectæ duæ EG, EH, una perpendicularis ad axem, & altera perpendicularis ad tangentem; quod, inquam, AB sit ad AD, ut est CG ad GH.

Si enim tangens ET conveniat cum axe AB in puncto T; erit, ex superius ostensis, ut AB ad AD, ita rectangulum CGT ad EG quadratum. Sed, ob triangulum TEH, rectangulum in E, quadratum ex EG est æquale rectangulo HGT. Quare erit quoque, ut AB ad AD, ita rectangulum CGT ad rectangulum HGT: & propterea, quia duo ista rectangula sunt inter se, ut CG ad GH; erit, ex æquali, ut AB ad AD, ita CG ad GH.

Quin etiam, si KL sit axis conjugatus, & KI parameter ejus; cumque eo conveniat perpendicularis EH in puncto R, eidemque ordinata demittatur EF; erit ut KL ad KI, ita CF ad FR.

Jam enim AB est ad AD, ut CG ad GH. Sed AB est ad AD, ut KI ad KL; & CG est

ad

ad GH, ut ER ad EH; sive etiam, ut FR ad GF. Quare erit ex æquali, ut KI ad KL, ita FR ad GF; & invertendo, KL erit ad KI, ut GF ad FR.

CAP. IV.

Demonstrantur proprietates, quæ competunt secantibus hyperbolæ.

I. Ostensis proprietatibus, quæ pertinent ad tangentes hyperbolæ; sequitur modo, ut eas ostendamus, quæ ejusdem secantibus competunt. Res autem eo redit, ut inquiramus, *quam rationem habeant inter se rectangula, contenta sub segmentis duarum rectarum, quæ sibi mutuo occurrentes, utrinque, vel ad eandem hyperbolam, vel etiam ad hyperbolas oppositas terminantur.* I. *De ratione, quam habent rectangula, sub secantium segmentis contenta. Primus casus, quum secantes sunt diametri.*

Atque hic quoque, non secus ac in ellipsi, varii sunt casus distinguendi, pro diversa qualitate rectarum, quæ sibi mutuo occurrunt, & utrinque ad curvam terminantur. Primo igitur supponemus, rectas illas esse *binas diametros, & ostendemus, rectangulum sub segmentis unius esse ad rectangulum sub segmentis alterius in duplicata ratione ipsarum diametrorum.*

Sint enim AB, KL duæ quævis hyperbolæ diametri, quæ sibi mutuo occurrunt in ipso centro C. Dico, rectangulum sub segmentis FIG. 15.

unius AC, BC, esse ad rectangulum sub segmentis alterius KC, LC, ut est quadratum diametri AB ad quadratum diametri KL.

Nam, quum utraque diameter secta sit bifariam in centro C; erit in ratione ipsarum AB, KL, tam AC ad KC, quam BC ad LC. Sed rectangulum ACB est ad rectangulum KCL in ratione composita ex AC ad KC, & ex BC ad LC. Quare ratio eorundem rectangulorum ACB, KCL duplicata erit diametrorum AB, KL.

41. *Secundus casus, quum ex secantibus una quidem est diameter, altera est ejus ordinata.*

II. Supponemus secundo, *ex rectis, sibi mutuo occurrentibus, unam quidem esse diametrum, alteram ordinatam ipsius. Et in isto casu rectangulum sub segmentis prioris rectae erit ad rectangulum sub segmentis alterius rectae in duplicata ratione ejus, quam habet diameter ad suam conjugatam.*

Fig. 15. Sit enim AB diameter aliqua hyperbolae, cujus KL sit conjugata; sitque etiam MO una ex ordinatis ejus diametri, quae ipsi diametro occurrens in puncto N, utrinque ad hyperbolam terminetur. Dico, rectangulum ANB esse ad rectangulum MNO, ut est AB quadratum ad KL quadratum.

Nam recta MO, velut ordinata ipsius AB, bifariam secta est in puncto N. Quare erit MN quadratum aequale rectangulo MNO: & propterea erit, ut rectangulum ANB ad rectangulum MNO, ita idem rectangulum ANB ad MN quadratum. Sed rectangulum ANB est ad MN quadratum, ut AB quadratum ad KL quadratum. Igitur in hac eadem ratione erit pariter rectangulum

ANB

ANB ad rectangulum MNO.

III. Supponemus tertio, *rectas sibi mutuo occurrentes esse ordinatas, quae ad duas diametros conjugatas referuntur; ostendemusque, rectangulum sub segmentis unius esse ad rectangulum sub segmentis alterius in ratione duplicata reciproca ipsarum diametrorum.* III. *Tertius casus, quum duae secantes sunt ordinatae, quae ad duas diametros conjugatas referuntur.*

Sint namque AB, KL duae hyperbolae diametri conjugatae; sitque etiam MO ordinata diametri AB, & EF ordinata diametri KL, quae utrinque ad curvam terminatae, sibi mutuo occurrant in puncto H. Dico, rectangulum MHO esse ad rectangulum EHF, ut est KL quadratum ad AB quadratum. FIG. 15.

Ex puncto E ducatur ad diametrum AB ordinata EG. Et quoniam, propter hyperbolam, KL quadratum est ad AB quadratum, tam ut MN quadratum ad rectangulum ANB, quam ut EG quadratum ad rectangulum AGB; erit quoque, ut KL quadratum ad AB quadratum, ita differentia quadratorum MN, EG ad differentiam rectangulorum ANB, AGB.

Jam, propter aequales EG, NH, differentia quadratorum MN, EG est aequalis rectangulo MHO. Itemque, quum rectangulum ANB aequale sit differentiae quadratorum CA, CN, & rectangulum AGB aequale differentiae quadratorum CA, CG; erit differentia rectangulorum ANB, AGB aequalis differentiae quadratorum CG, CN, quae tantumdem valet, ac rectangulum EHF. Unde erit, ut KL quadratum ad AB quadratum, ita rectangulum MHO ad rectangulum EHF.

IV. Sup-

IV. *Quartus casus, quum linearum secantium una est diameter, & alia ordinata alterius diametri.* Fig. 16. 17.

IV. Supponemus quarto, *ex rectis, sibi invicem occurrentibus, unam esse diametrum, aliam vero ordinatam alterius diametri*. Et quum id contingit, erit rectangulum sub segmentis illius ad rectangulum sub segmentis istius, ut est quadratum prioris diametri ad quadratum conjugatæ alterius diametri.

Sit enim AB aliqua hyperbolæ diameter, cujus conjugata sit KL, & MO una ex ejus ordinatis, utrinque ad hyperbolam terminata. Sit porro EF diameter alia, quæ conveniat cum ordinata prioris MO in puncto H. Dico, rectangulum EHF esse ad rectangulum MHO, ut est EF quadratum ad KL quadratum.

Patet autem, duo hic contingere posse. Primo, ut ordinata MO, quæ refertur ad diametrum AB, suos terminos habeat in eadem hyperbola. Et secundo, ut terminetur ad hyperbolas oppositas. In utroque casu ducantur ex punctis E, H, M rectæ EG, HI, MR, ipsi AB parallelæ, quæ conveniant cum KL in punctis G, I, R. Et, ob triangula æquiangula CEG, CHI, erit, ut CG quadratum ad CI quadratum, ita EG quadratum ad HI, seu MR quadratum.

V. *Demonstratio hujus casus, quando ordinata ad eandem hyperbolam terminatur.* Fig. 16.

V. Ponamus itaque primo; *ordinatam suos terminos habere in eadem hyperbola*. Et quoniam, propter hyperbolam, EG quadratum est ad MR quadratum, ut summa quadratorum CK, CG ad summam quadratorum CK, CR; erit ex æquali, ut CG quadratum ad CI quadratum, ita summa quadratorum CK, CG ad summam quadratorum CK, CR.

Hinc

Hinc, subducendo terminos prioris rationis ex terminis secundæ, erit quoque, ut CG quadratum ad CI quadratum, ita CK quadratum ad differentiam inter summam quadratorum CK, CR, & CI quadratum. Quumque CG quadratum sit ad CI quadratum, ut est CE quadratum ad CH quadratum; erit rursus ex æquali, ut CE quadratum ad CH quadratum, ita CK quadratum ad differentiam inter summam quadratorum CK, CR, & CI quadratum.

Atque hinc, subducendo antecedentes ex consequentibus, erit ulterius, ut CE quadratum ad differentiam quadratorum CE, CH, ita CK quadratum ad differentiam quadratorum CR, CI. Sed differentia quadratorum CE, CH est æqualis rectangulo EHF; & differentia quadratorum CR, CI, sive MN, NH est æqualis rectangulo MHO. Itaque erit, ut CE quadratum ad rectangulum EHF, ita CK quadratum ad rectangulum MHO; & permutando, ut CE quadratum ad CK quadratum, sive etiam, ut EF quadratum ad KL quadratum, ita rectangulum EHF ad rectangulum MHO.

VI. Ponamus secundo, *ordinatam terminari ad hyperbolas oppositas*. Et similiter, quia propter hyperbolam EG quadratum est ad MR quadratum, ut rectangulum KGL ad rectangulum KRL; erit ex æquali, ut CG quadratum ad CI quadratum, ita rectangulum KGL ad rectangulum KRL. VI. *Demonstratio ejusdem casus, quando ordinata terminatur ad hyperbolas oppositas.* Fig. 17.

Hinc, ex terminis prioris rationis subducendo terminos secundæ, erit quoque, ut CG

qua-

quadratum ad CI quadratum, ita CK quadratum ad differentiam inter CI quadratum, & rectangulum KRL. Cumque CG quadratum sit ad CI quadratum, ut est CE quadratum ad CH quadratum; erit rursus ex æquali, ut CE quadratum ad CH quodratum, ita CK quadratum ad differentiam inter CI quadratum, & rectangulum KRL.

Atque hinc, capiendo differentias antecedentium, & consequentium, erit ulterius, ut CE quadratum ad differentiam quadratorum CE, CH, ita CK quadratum ad differentiam quadratorum CR, CI. Sed differentia quadratorum CE, CH est æqualis rectangulo EHF; & differentia quadratorum CR, CI est æqualis rectangulo MHO. Itaque erit, ut CE quadratum ad rectangulum EHF, ita CK quadratum ad rectangulum MHO; & permutando, ut CE quadratum ad CK quadratum, sive etiam, ut EF quadratum ad KL quadratum, ita rectangulum EHF ad rectangulum MHO.

VII. *Postremus casus, quum secantes sunt ordinatæ duarum quarumvis diametrorum.*

VII. Supponemus denique, *rectas duas, sibi mutuo occurrentes, ordinatas esse duarum diametrorum, quæ inter se nequaquam sunt conjugatæ*. Et in isto casu rectangula, contenta sub segmentis ipsarum, erunt, ut quadrata, quæ fiunt ex conjugatis earum diametrorum.

Fig. 18. 19.

Sint enim AB, RS duæ quævis diametri, inter se nequaquam conjugatæ; sitque MO una ex ordinatis diametri AB, & PQ una ex ordinatis diametri RS. Conveniant autem inter se duæ istæ ordinatæ in puncto H. Dico, rectangulum MHO esse ad rectangulum PHQ, ut est quadratum, quod fit ex conjugajugata diametri AB, ad quadratum, quod fit ex conjugata diametri RS.

Ducatur namque per punctum H diameter tertia EF. Et quoniam diameter ista EF secat MO, ordinatam diametri AB, in puncto H; erit, ex ostensis, ut rectangulum EHF ad rectangulum MHO, ita EF quadratum ad quadratum conjugatæ diametri AB. Quumque eadem EF secat pariter PQ, ordinatam diametri RS, in puncto H; erit quoque, ut rectangulum EHF ad rectangulum PHQ, ita EF quadratum ad quadratum conjugatæ diametri RS. Quare ordinando erit, ut rectangulum MHO ad rectangulum PHQ, ita quadratum ex conjugata diametri AB ad quadratum ex conjugata diametri RS.

VIII. Et quidem universale theorema, quod hac in re locum habet, hujusmodi est, quod *si intra hyperbolas oppositas bina ducantur rectæ lineæ, quæ sese mutuo secent; rectangula, quæ fiunt ex segmentis ipsarum, sint, ut quadrata ex conjugatis earum diametrorum, ad quas rectæ illæ velut ordinatæ referuntur*. Et omnia alia theoremata, superius ostensa, sunt tantum casus speciales istius.

VIII. *Theorema generale, quod hac in re locum habet, in medium affertur.*

Nam primo, si ductæ rectæ lineæ transeant per centrum, & sint hyperbolarum diametri; erunt ipsæmet conjugatæ earum diametrorum, ad quas eædem velut ordinatæ referuntur. Unde, vi ejus theorematis generalis, omnino necesse est, ut rectangula sub segmentis ipsarum sint, ut quadrata earundem.

Secundo, si una ex iis rectis sit diameter, & altera ejus ordinata: quemadmodum prior

est

est conjugata illius diametri, ad quam ipsa velut ordinata refertur; sic conjugata ejus diametri, quæ secundam agnoscit tamquam suam ordinatam, est conjugata diametri prioris. Quare, per theorema generale, rectangulum sub segmentis diametri ad rectangulum sub segmentis ordinatæ erit, ut quadratum diametri ad quadratum suæ conjugatæ.

Tertio, si rectæ, sese invicem secantes, sint ordinatæ duarum hyperbolæ diametrorum conjugatarum; non aliæ erunt conjugatæ diametrorum, ad quas rectæ illæ velut ordinatæ referuntur, quam eædem diametri, inverso ordine sumptæ. Unde, per theorema generale, rectangula, contenta sub segmentis earum ordinatarum, erunt in ratione reciproca duplicata suarum diametrorum.

Denique, si una ex iis rectis sit diameter, & altera sit ordinata alterius diametri; erit ipsa prior recta conjugata illius diametri, ad quam eadem velut ordinata refertur. Unde, ob theorema generale, rectangulum sub segmentis prioris diametri erit ad rectangulum sub segmentis ordinatæ alterius diametri, ut est quadratum diametri prioris ad quadratum conjugatæ alterius diametri.

IX. *Quod idem theorema sit verum, etiamsi una ex secantibus vertitur in tangentem.*

IX. Fieri autem potest, ut *una ex secantibus tangens evadat*: nimirum, quum puncta duo sectionis coeunt in unum. In isto casu rectangulum sub ejus segmentis vertetur in quadratum ipsius tangentis. Unde inter quadratum istud, & rectangulum, sub alterius secantis portionibus contentum, eadem adhuc ratio obtinebit.

Quin

Quin etiam *verti potest in tangentem utraque secans*. Et quum id contingit, ambo quidem rectangula, sub secantium portionibus contenta, abibunt in quadrata ipsarum tangentium. Ex quo fit, ut inter quadrata, quæ ex tangentibus fiunt, eadem pariter ratio debeat locum habere.

Et istud quidem jam præcedenti capite speciatim a nobis ostensum fuit. Vidimus enim, quod si fuerint tangentes duæ AX, EX, sibi mutuo occurrentes in X; quadrata ipsarum eandem habeant rationem inter se, quam quadrata, quæ fiunt ex conjugatis diametrorum AB, EF. FIG. 11.

Ad illud vero quod attinet, nec etiam difficile erit, veritatem ejus speciatim ostendere. Sed distinguendi sunt tamen duo casus. Primus est, quum secans est parallela diametro, quæ pertinet ad punctum contactus. Alter est, quum eadem secans ei diametro nequaquam est parallela.

X. *Primus casus, quum secans est parallela diametro, quæ pertinet ad punctum contactus.*

X. Ponamus itaque primo, *secantem parallelam esse diametro, quæ pertinet ad punctum contactus*; adeo nempe, ut existente EH tangente, secans sit recta HO, parallela diametro EF. Jamque in hoc easu diameter, ad quam recta MO velut ordinata refertur, erit illa eadem, quæ est conjugata ipsius EF. FIG. 20.

Sit igitur AB conjugata diametri EF. Quumque vicissim EF sit conjugata ipsius AB; jam illud ostendendum nobis erit, ut EH quadratum sit ad rectangulum MHO, veluti est AB quadratum ad EF quadratum. Istud autem nullo negotio ostendemus sequenti ratione.

Ex puncto M ducatur ad diametrum EF ordinata MR. Et quoniam duæ CR, MN inter se sunt æquales; erit etiam CR quadratum æquale quadrato, quod fit ex NM. Sed CR quadratum est æquale rectangulo ERF una cum CE quadrato. Et NM quadratum est æquale rectangulo MHO una cum NH, sive eodem CE quadrato. Quare, dempto communi quadrato ex CE, remanebit rectangulum ERF æquale rectangulo MHO.

Quia autem æqualia sunt quoque quadrata, quæ fiunt ex ipsis MR, EH; erit, ut MR quadratum ad rectangulum ERF, ita EH quadratum ad rectangulum MHO. Sed MR quadratum est ad rectangulum ERF, ut AB quadratum ad EF quadratum. Et igitur ex æquali in eadem ratione, quam habet AB quadratum ad EF quadratum, erit quoque EH quadratum ad rectangulum MHO.

XI. *Alter casus, quum secans non est parallela diametro, quæ transit per punctum contactus.* FIG. 21.

XI. Ponamus secundo, *secantem haud quidem parallelam esse diametro, quæ pertinet ad punctum contactus*: adeo nempe, ut existente EH tangente, secans sit recta HS, quæ occurrit diametro EF. Jamque, si KL sit diameter, ad quam recta TS velut ordinata refertur; ostendendum erit, EH quadratum esse ad rectangulum THS, ut est quadratum conjugatæ diametri EF ad quadratum conjugatæ diametri KL.

Ducatur ex puncto H secans alia HO, quæ ipsi EF sit parallela; sitque AB diameter, quæ ipsam MO velut suam ordinatam agnoscit. Itaque, quum secans HO parallela sit diametro EF, quæ pertinet ad punctum contactus E; erit EH quadratum ad rectangulum MHO, ut est quadratum conjugatæ diametri EF ad quadratum conjugatæ diametri AB.

Quoniam autem HO, HS sunt secantes duæ, quæ velut ordinatæ referuntur ad diametros AB, KL; erit, ex superius ostensis, rectangulum MHO ad rectangulum THS, ut est quadratum conjugatæ diametri AB ad quadratum conjugatæ diametri KL. Quare ordinando erit, ut EH quadratum ad rectangulum THS, ita quadratum ex conjugata diametri EF ad quadratum ex conjugata diametri KL.

XII. Speciatim, *quum secans est diameter hyperbolæ*, veritas ejus, de quo agitur, ostendi potest hoc pacto. Manentibus omnibus, ut supra, transeat secans HO per centrum hyperbolæ. Dico, EH quadratum esse ad rectangulum MHO, ut est quadratum ex conjugata diametri EF ad quadratum diametri MO. Id vero ostendemus in hunc modum.

XII. *Demonstratio specialis, quando secans est diameter.* FIG. 22.

Sit GI conjugata ipsius EF, ducaturque ex puncto M ad eandem EF ordinata MR. Et quoniam CH quadratum est ad CM quadratum, ut CE quadratum ad CR quadratum; subducendo antecedentes ex consequentibus, erit ut CH quadratum ad rectangulum MHO, ita CE quadratum ad rectangulum ERF. Sed, ob hyperbolam, CE quadratum est ad rectangulum ERF, ut est CG quadratum ad MR quadratum. Itaque erit ex æquali, ut CG quadratum ad MR quadratum, ita CH quadratum ad rectangulum MHO.

Quoniam vero MR quadratum est ad EH quadratum, ut CM quadratum ad CH quadratum; erit ex æquo perturbando, ut CG quadratum ad EH quadratum, ita CM quadratum ad rectangulum MHO; & permutando, ut CG quadratum ad CM quadratum, ita EH quadratum ad rectangulum MHO. Sed CG quadratum est ad CM quadratum, ut GI quadratum ad MO quadratum. Itaque erit ex æquali, ut EH quadratum ad rectangulum MHO, ita GI quadratum ad MO quadratum.

XIII. *Theorema de ratione, quam habent duæ hyperbolæ tangentes, rursus ostenditur.*

XIII. Atque hinc modo nullo negotio ostendi potest, quod *si duæ hyperbolæ tangentes sibi mutuo occurrant, eæ sint inter se, veluti conjugatæ diametrorum, quæ pertinent ad puncta contactus.*

FIG. 23.

Sint enim AH, EH duæ hyperbolæ tangentes, quæ sibi invicem occurrant in puncto H. Ducantur ex punctis contactus A, & E diametri AB, EF. Dico esse, ut AH ad EH, ita conjugata diametri AB ad conjugatam diametri EF.

Ducatur namque diameter alia MO, quæ transeat per punctum H. Et quoniam AH est tangens, & HO est secans, transiens per centrum; erit, ut AH quadratum ad rectangulum MHO, ita quadratum ex conjugata diametri AB ad quadratum ipsius MO.

Similiter, quia EH est tangens, & HO est secans, transiens per centrum; erit, ut rectangulum MHO ad EH quadratum, ita MO quadratum ad quadratum, quod fit ex conjugata diametri EF.

Hinc ex æquo ordinando erit, ut AH

qua-

quadratum ad EH quadratum, ita quadratum ex conjugata diametri AB ad quadratum ex conjugata diametri EF: & propterea tangentes duæ AH, EH erunt, ut conjugatæ diametrorum AB, EF.

XIV. Cæterum ex iis, quæ hactenus ostensa sunt, prono alveo fluunt sequentia duo theoremata. *XIV. Alia duo theoremata ex hactenus ostensis deducuntur.*

Primum theorema est, quod *si duabus hyperbolæ tangentibus parallelæ fuerint duæ secantes, & conveniant inter se, tum tangentes, cum secantes; rectangula, sub secantium segmentis contenta, sint proportionalia quadratis, quæ ex tangentibus fiunt.*

Nam diametri, ad quas duæ secantes velut ordinatæ referuntur, sunt illæ eædem, quæ pertinent ad puncta contactus. Quare in eadem illa ratione, quam habent inter se quadrata tangentium, erunt quoque rectangula, quæ sub secantium segmentis continentur.

Alterum theorema est, quod *si duabus secantibus hyperbolæ parallelæ fuerint binæ aliæ secantes, & conveniant inter se, tam illæ, quam istæ; rectangula sub segmentis illarum sint proportionalia rectangulis, quæ sub segmentis istarum continentur.*

Nam diametri, ad quas duæ posteriores secantes velut ordinatæ referuntur, sunt illæ eædem, quæ agnoscunt velut suas ordinatas secantes priores. Quare in eadem illa ratione, quam habent inter se rectangula sub segmentis primarum secantium, erunt quoque rectangula sub segmentis aliarum.

CAP. V.

Proprietates, quæ hyperbolæ asymptotis competunt, in medium afferuntur.

I. *Quæ sint hyperbolæ asymptoti, & quod numquam cum ea conveniant.*

I. PErtinet ad hunc locum *doctrina asymptotorum hyperbolæ, ut quæ sunt rectæ, quæ hyperbolam contingunt in punctis extremis, sive infinite a centro distantibus*. Primo igitur ostendemus, qua ratione definiantur rectæ istæ, quæ hyperbolæ asymptoti dicuntur. Tum proprietates, quæ eis competunt, more nostro prosequemur.

FIG. 24. Hunc in finem referat AB axem hyperbolæ, sitque KL ejus conjugatus. Describatur circa duos istos axes AB, KL parallelogrammum EFGH. Et diagonales hujus parallelogrammi EG, FH, transeuntes per centrum C, hyperbolæ asymptotos nobis exhibebunt.

Sortitæ sunt autem diagonales istæ tale nomen, quia productæ in infinitum, etsi continuo ad hyperbolam accedant, numquam tamen cum ea conveniunt. Nec difficile id erit ostendere. Nam, ducta ex puncto quovis hyperbolæ M ad axem AB ordinata MN; erit, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita CK, sive AE quadratum ad CA quadratum.

Jam vero, si eadem ordinata MN conveniat cum EG in O, AE quadratum erit ad CA quadratum, ut est NO quadratum ad CN quadratum. Quare erit ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita NO quadratum ad CN quadratum: & propterea, quemadmodum rectangulum ANB minus est CN quadrato, ita quoque MN quadratum minus erit quadrato, quod fit ex NO; adeoque punctum O erit ultra punctum M.

II. Quod autem *asymptoti continuo ad hyperbolam accedant*, demonstratur hoc pacto. Extendatur eadem ordinata MN, usque donec conveniat cum asymptoto altera FH in puncto R. Et quemadmodum EH secta est bifariam in A, ita quoque OR bisecta erit in N: proindeque differentia quadratorum MN, NO erit æqualis rectangulo OMR. II. *Quod asymptoti continuo ad hyperbolam accedant.* FIG. 24.

Et quoniam in eadem ratione, quam habet AE quadratum ad CA quadratum, est, tam MN quadratum ad rectangulum ANB, quam NO quadratum ad CN quadratum; erit quoque, ut AE quadratum ad CA quadratum, ita rectangulum OMR ad idem CA quadratum. Unde rectangulum OMR æquale erit quadrato, quod fit ex AE.

Hinc, quocumque in loco capiatur ordinata MN, si ea producatur usque donec secet asymptotos in punctis O, & R, erit rectangulum OMR ejusdem ubique magnitudinis. Unde per recessum ipsius ordinatæ a vertice A, quemadmodum augetur latus unum MR, ita necesse est, ut minuatur latus alterum MO: & propterea asymptoti ad hyperbolam continuo accedant.

III. *Quod distantia inter asymptotum, & hyperbolam evadit tandem inassignabilis.*

III. Non igitur in dubium verti potest, quod *distantia inter asymptotum, & hyperbolam minor semper, ac minor evadat*. Sed ostendi quoque potest, quod *eadem distantia consque minuatur, ut tandem evadat inassignabilis, sive minor quacumque data recta linea*.

Fig. 24. Capiatur enim super EH portio EI, quæ sit minor recta linea data. Tum extendatur eadem versus S, ita ut EI sit ad AE, ut est AE ad IS. Ducatur porro per punctum S recta SR, ipsi GE parallela, quæ conveniat cum CH in puncto R. Ac denique compleatur parallelogrammum SO.

Quia igitur EI est ad AE, ut AE ad IS; erit rectangulum EIS æquale quadrato, quod fit ex AE. Sed eidem AE quadrato est etiam æquale rectangulum OMR. Quare duo rectangula EIS, OMR æqualia erunt inter se.

Ulterius, quemadmodum OR secta est bifariam in N, ita ES bisecetur in T. Et, ob æquales ES, OR, erunt etiam æquales duæ TE, NO: Unde erit, ut TE quadratum ad rectangulum EIS, ita NO quadratum ad rectangulum OMR; & convertendo, ut TE quadratum ad TI quadratum, ita NO quadratum ad MN quadratum.

Hinc, quum sit, ut TE ad TI, ita NO ad MN; erit rursus convertendo, ut TE ad EI, ita NO ad MO. Sed duæ TE, NO sunt æquales inter se. Quare etiam EI ipsi MO æqualis erit: & propterea, quemadmodum EI est minor recta linea data, ita quoque eadem data recta linea minor erit ipsa MO.

IV. *Asymptoto-*

IV. Ostendemus modo proprietates, quæ hy-

hyperbolæ asymptotis competunt. Et prima quidem proprietas hæc est, quod *si per aliquod hyperbolæ punctum recta ducatur, uni ex axibus parallela, quæ cum utraque asymptoto conveniat; rectangulum sub ejus segmentis sit æquale quadrato, quod fit ex dimidio axis prædicti.* *Prima hyperbolæ proprietas principalis ostenditur.* FIG. 24.

Sint enim AB, KL duo axes hyperbolæ, sintque etiam EG, FH binæ ejus asymptoti. Jamque, si per aliquod hyperbolæ punctum M ducatur recta OR, parallela axi KL, quæ cum utraque asymptoto conveniat in punctis O, & R; erit, ex superius ostensis, rectangulum OMR æquale quadrato ex AE; & consequenter æquale etiam quadrato, quod fit ex CK.

Ducatur porro per idem punctum M recta PQ, parallela axi AB, quæ conveniat cum utraque asymptoto in punctis P, & Q. Ostendendum est, rectangulum PMQ esse etiam æquale quadrato, quod fit ex CA. Id vero nullo negotio ostendemus sequenti ratione.

Rectangulum OMR ad rectangulum PMQ est in ratione composita ex MO ad MP, & ex MR ad MQ. Sed MO est ad MP, ut AE, sive CK ad CA. Et MR est ad MQ, ut AH, sive CK ad CA. Quare ratio rectanguli OMR ad rectangulum PMQ duplicata erit ejus, quam habet CK ad CA.

Hinc erit, ut CK quadratum ad CA quadratum, ita rectangulum OMR ad rectangulum PMQ. Sed rectangulum OMR ostensum est æquale quadrato, quod fit ex CK. Quare etiam rectangulum PMQ erit æquale quadrato, quod fit ex CA.

V. At-

V. *Consectaria, quæ fluunt ex ostensa proprietate.* Fig. 25.

V. Atque hinc modo *plura nobis derivantur*. Nimirum primo, quod si uni ex axibus, veluti KL, ducantur duæ parallelæ OR, PQ, convenientes cum asymptotis, & hyperbola; rectangulum sub segmentis unius OMR æquale sit rectangulo sub segmentis alterius PSQ; quum utrumque sit æquale quadrato, quod fit ex CK.

Fig. 25. Secundo, quod si per eadem hyperbolæ puncta M, & S ducantur duæ quævis aliæ parallelæ TV, XZ, ad utramque asymptotum pariter terminatæ, rectangulum TMV fit etiam æquale rectangulo XSZ. Nam rectangulum OMR ad rectangulum TMV rationem habet compositam ex MO ad MT, & ex MR ad MV; sive etiam ex SP ad SX, & ex SQ ad SZ; quum æquiangula sint, tam triangula OMT, PSX, quam triangula RMV, QSZ. Sed duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum PSQ ad rectangulum XSZ. Quare erit ex æquali, ut rectangulum OMR ad rectangulum TMV, ita rectangulum PSQ ad rectangulum XSZ: & propterea, sicuti rectangulum OMR est æquale rectangulo PSQ, ita quoque rectangulum TMV æquale erit rectangulo XSZ.

Fig. 26. Tertio, quod etsi rectæ MV, SZ non sint in directum cum rectis MT, SX, modo tamen parallelæ sint inter se, tam istæ, quam illæ, semper rectangulum TMV sit æquale rectangulo XSZ. Quum enim adhuc æquiangula sint, tam triangula OMT, PSX, quam triangula RMV, QSZ; semper quidem erit, ut rectangulum OMR ad rectangulum

TMV,

TMV ; ita rectangulum PSQ ad rectangulum XSZ. Unde, sicuti rectangulum OMR ostensum est æquale rectangulo PSQ, ita quoque rectangulum TMV æquale erit rectangulo XSZ.

Et quarto demum, quod, si rectæ MT, SX, ad unam asymptotum ductæ, sint parallelæ alteri asymptoto, rectangulum CTM sit æquale rectangulo CXS. Nam, completis parallelogrammis CM, CS, erit rectangulum TMV æquale rectangulo XSZ. Sed, ob æquales MV, CT, rectangulum TMV est æquale rectangulo CTM. Pariterque, ob æquales SZ, CX, rectangulum XSZ est æquale rectangulo CXS. Quare erit etiam rectangulum CTM æquale rectangulo CXS. FIG. 26.

VI. *Alia proprietas asymptotorum hyperbolæ demonstratur.*

VI. Asymptotis hyperbolæ competit etiam hæc alia proprietas, quod *portiones cujusvis rectæ, hyperbola, & asymptotis interceptæ, inter se sint æquales.*

Maneant enim omnia, ut supra, & ducatur utcumque recta OR, quæ tum curvam, cum asymptotos secet. Dico portiones duas MO, SR, hyperbola, & asymptotis interceptas, æquales esse inter se. FIG. 27.

Jam enim, ex ostensis, rectangulum OMR est æquale rectangulo OSR. Sed, secta OR bifariam in puncto N, æqualia sunt quoque quadrata, quæ fiunt ex ipsis NO, NR. Quare erit, ut NO quadratum ad rectangulum OMR, ita NR quadratum ad rectangulum OSR; & convertendo erit etiam, ut NO quadratum ad MN quadratum, ita NR quadratum ad SN quadratum.

Hinc,

Hinc, quum sit, ut NO ad MN, ita NR ad SN; erit rursus convertendo, ut NO ad MO, ita NR ad SR. Sed duæ NO, NR inter se sunt æquales; quum ex constructione tota OR bisecta sit in puncto N. Quare etiam æquales erunt duæ MO, SR.

VII. *Præcedentis proprietatis consectarium, definiens tangentis relate ad asymptotos positionem.*

VII. Ex hac autem proprietate prono alveo fluit, quod *si recta, ad asymptotum terminata, bifariam secta sit in puncto, in quo hyperbolæ occurrit, ea sit tangens ipsius hyperbolæ.*

FIG. 27.

Recta etenim PQ, terminata ad utramque asymptotum, secetur bifariam in puncto T, in quo occurrit hyperbolæ. Dico, eandem rectam PQ contingere hyperbolam in solo puncto T.

Si enim fieri potest, eadem recta PQ occurrat etiam hyperbolæ in puncto V. Itaque, per ostensam proprietatem, duæ PT, QV æquales erunt inter se. Sed ex hypothesi PT est æqualis ipsi QT. Quare duæ QV, QT inter se erunt æquales. Quod fieri non potest.

VIII. *Quod conversum præcedentis consectarii sit pariter verum.*

VIII. Ejusdem proprietatis ope, licebit etiam, *conversum hujus ostendere*. Nimirum, quod si recta PQ, hyperbolam contingens in T, ad utramque asymptotum terminetur; portiones ejus PT, QT inter se sint æquales.

FIG. 27.

Ducatur enim recta alia OR, ipsi PQ parallela, quæ secans hyperbolam in punctis M, & S, cum utraque asymptoto similiter conveniat. Jamque, si per punctum contactus T diameter ducatur, erit ejus ordinata recta MS; adeoque eadem MS a diametro illa bifariam secabitur in N.

Quum

Quum igitur æquales ſint inter ſe, tam duæ MO, SR, quam duæ MN, SN; erit tota NO toti NR pariter æqualis. Sed NO eſt ad NR, ut PT ad QT. Quare duæ PT, QT etiam æquales erunt: & propterea tangens PQ bifariam ſecta erit in puncto contactus T.

IX. Atque hinc modo, *determinatis hyperbolæ aſymptotis, nullo negotio ducetur tangens ad aliquod ejus punctum*. Maneant enim omnia, ut ſupra. Et oporteat, tangentem ducere ad punctum hyperbolæ T.

IX. Quomodo, determinatis hyperbolæ aſymptotis, duci poſſit tangens ad punctum datum. Fig. 27.

Ducatur ex puncto T recta TX, parallela aſymptoto CH, quæ conveniat cum aſymptoto altera CE in puncto X. Capiatur poſtea ſuper eadem aſymptoto CE portio PX æqualis ipſi CX. Et recta PQ, ducta per punctum T, erit tangens quæſita.

Quum enim ex conſtructione parallelæ ſint rectæ TX, CQ; erit, ut PX ad CX, ita PT ad QT. Sed PX poſita eſt æqualis ipſi CX. Quare etiam PT ipſi QT æqualis erit: & propterea per ea, quæ mox oſtenſa ſunt, recta PT tangens erit hyperbolæ.

X. Ex oſtenſa tangentis proprietate illud etiam conſequitur, quod *ſi duæ hyperbolæ tangentes, ad utramque aſymptotum terminentur, eæ in eadem ratione ſectæ ſint in puncto, in quo ſibi mutuo occurrunt.*

X. Quod duæ hyperbolæ tangentes, ad utramque aſymptotum terminatæ, ſecantur in eadem ratione. Fig. 28.

Manentibus namque omnibus, ut ſupra, ſint PQ, EH duæ hyperbolæ tangentes, ad utramque aſymptotum terminatæ. Conveniant autem tangentes iſtæ inter ſe in puncto V. Dico, fore, ut PV ad QV, ita HV ad EV.

Ducantur enim ex punctis contactus T,

& A

quarta pars quadrati, quod fit ex AD; quum ex constructione FH semissem adæquet ipsius AD. Quare etiam rectangulum AHB quarta pars erit rectanguli DAB.

III. *Focorum ellipsis proprietas secunda generalis.* III. Ducantur nunc ad vertices A, & B tangentes AX, BZ, quæ conveniant cum tangente quavis tertia XMZ in punctis X, & Z. Et *facile erit ostendere*, quod si ex focorum
FIG. 37. altero G ducantur rectæ GX, GZ, angulus XGZ, sub ipsis comprehensus, perpetuo rectus esse debeat, ubicunque fuerit punctum contactus M.

Nam rectangulum ex AX in BZ, velut æquale quadrato, quod fit ex dimidio axis conjugati, adæquat quartam partem figuræ axis AB. Sed ejusdem figuræ quadranti æquale est quoque rectangulum AGB. Quare erit rectangulum ex AX in BZ æquale rectangulo AGB: & propterea erit, ut AX ad AG, ita BG ad BZ.

Hinc duo triangula rectangula XAG, GBZ æquiangula erunt; adeoque erit angulus AXG æqualis angulo BGZ. Et, apposito communi AGX, erunt etiam duo anguli AXG, AGX æquales duobus angulis BGZ, AGX. Sed priores duo unum rectum adæquant. Quare uni recto pariter æquales erunt posteriores duo; & consequenter angulus XGZ etiam rectus erit.

IV. *Focorum ellipsis proprietas tertia generalis.* IV. Eadem autem ratione ostendemus, rectum esse angulum XHZ, quem continent rectæ HX, HZ, ductæ ex foco altero H ad eadem puncta X, & Z. Unde *sequitur quoque*,
FIG. 37. quod si ex puncto K, in quo rectæ duæ GZ,

HX

HX se mutuo secant, ducatur ad punctum contactus M recta KM, hæc perpendicularis sit ad tangentem XZ.

Si enim fieri potest, sit KO perpendicularis ad XZ. Et quoniam rectus est, tam angulus XGZ, quam angulus XHZ; semicirculus, descriptus super XZ, velut diametro; transibit per focos G, & H. Unde erit angulus HGZ æqualis angulo HXZ. Sed angulus HGZ æqualis est angulo AXG. Quare duo anguli AXG, HXZ æquales erunt inter se; & propterea, ob triangula æquiangula AGX, OKX, erit, ut AX ad OX, ita GX ad KX.

Simili ratione ostendemus, BZ esse ad OZ, ut est HZ ad KZ. Unde, quia propter triangula æquiangula KGX, KHZ; GX est ad KX, ut HZ ad KZ; erit ex æquali, ut AX ad OX, ita BZ ad OZ; & permutando erit quoque, ut AX ad BZ, ita OX ad OZ.

Jam per ea, quæ superius ostensa sunt, in eadem ratione, qua est tangens AX ad tangentem MX, est etiam tangens BZ ad tangentem MZ. Quare erit ex æquali, ut AX ad MX, ita BZ ad MZ; & permutando erit etiam, ut AX ad BZ, ita MX ad MZ.

Quum igitur in eadem ratione rectarum AX, BZ sit, tam OX ad OZ, quam MX ad MZ; erit rursus ex æquali, ut OX ad OZ, ita MX ad MZ. Unde componendo erit, ut XZ ad OZ, ita XZ ad MZ: & propterea duæ OZ, MZ æquales erunt inter se. Quod fieri non potest.

V. Atque hinc *sequitur etiam*, rectas MG, V. Focorum

 MH,

ellipsis proprietas quarta generalis. MH, quæ ex puncto contactus M ad focos inclinantur, æquales cum tangente XZ angulos constituere, hoc est angulum GMX æqualem esse angulo HMZ.

FIG. 37.

Quum enim rectus sit, tam angulus KGX, quam angulus KMX; semicirculus, descriptus super KX, velut diametro, transibit per puncta G, & M: proindeque erit angulus GMX æqualis angulo GKX.

Eadem ratione, quia rectus est uterque angulorum KHZ, KMZ; semicirculus, descriptus super KZ, velut diametro, transibit per puncta H, & M. Quare erit angulus HMZ æqualis angulo HKZ.

Quemadmodum igitur angulo GKX æqualis est angulus GMX, ita angulo HKZ æqualis est angulus HMZ. Sed duo anguli GKX, HKZ inter se sunt æquales. Quare etiam inter se æquales erunt duo anguli GMX, HMZ.

VI. *Focorum ellipsis proprietas quinta generalis.*

VI. Inde vero *deducitur præterea*, easdem rectas MG, MH continere rectangulum, quod quartam partem adæquat figuræ diametri, transeuntis per punctum contactus M.

FIG. 37.

Nam, ex superius ostensis, si ex centro ellipsis C ad puncta X, & Z intelligantur ductæ rectæ CX, CZ, eæ exhibebunt nobis duas ellipsis diametros conjugatas. Quare rectangulum XMZ æquale erit quadrato, quod fit ex dimidio conjugatæ illius diametri, quæ pertinet ad punctum M.

Jam quadratum istud adæquat quartam partem figuræ ejusdem diametri. Unde constabit, rectangulum GMH æquale esse qua-

dran-

dranti figuræ diametri, transeuntis per punctum M, si utique ostendi possit, rectangulum GMH æquale esse rectangulo XMZ. Id vero ostendemus in hunc modum.

Quoniam rectus est uterque angulorum KGX, KMX; erunt alii duo anguli GKM, GXM duobus rectis æquales: proindeque, quum duobus rectis sint etiam æquales anguli duo GKM, MKZ; ablato communi GKM, remanebit angulus GXM æqualis angulo MKZ.

Jam, ob circulum, transeuntem per quatuor puncta M, K, H, Z, angulus MKZ æqualis est angulo MHZ. Quare etiam angulus GXM æqualis erit angulo MHZ. Unde triangula duo GMX, HMZ æquiangula erunt: & propterea, quum sit, ut MX ad MG, ita MH ad MZ; erit rectangulum GMH æquale rectangulo XMZ.

VII. Exinde *colligitur pariter*, easdem rectas MG, MH simul sumptas æquales esse axi AB. Ducantur enim uni earum, veluti MG, parallelæ CR, HS. Tum jungantur rectæ AR, HR, BR. VII. *Focorum ellipsis proprietas sexta generalis.* FIG. 38.

Et quoniam eidem angulo GMX æqualis est, tam angulus HMS, quam angulus HSM, erunt duo anguli HMS, HSM æquales inter se: & propterea triangulum MHS isosceles erit. Sed basis ejus MS bisecta est per rectam HR; quum sit, ut RM ad RS, ita CG ad CH. Quare erit HR perpendicularis ad ipsam MS.

Hinc, ob circulum, transeuntem per quatuor puncta A, H, R, X, erit angulus

ARX æqualis angulo AHX. Et similiter, ob circulum, transeuntem per puncta quatuor B, H, R, Z, erit angulus BRZ æqualis angulo BHZ. Unde angulus ARB æqualis erit angulo XHZ; atque adeo rectus erit.

Id quum ita sit, semicirculus, descriptus super AB, velut diametro, transibit per punctum R: & propterea recta CR ipsi CA, vel CB æqualis erit. Sed, ob rectam GH bisectam in C, est MG dupla ipsius CI, & MH dupla ipsius MI, sive IR. Itaque summa duarum MG, MH dupla erit totius CR; atque adeo æqualis axi AB.

VIII. *Alia ellipsim in plano describendi ratio, datis axe, & umbilicis.* FIG. 37.

VIII. Hinc *vero alia nobis suboritur ratio describendi ellipsim in plano, datis focis cum longitudine axis majoris*. Sit enim AB axis major ellipsis, sintque puncta G, & H ejusdem foci, seu umbilici. Oportet, in subjecto plano ellipsim describere.

Capiatur filum ejusdem longitudinis cum axe AB, & extrema ejus focis G, & H alligentur. Deinde ope alicujus stili circumducatur filum circa focos ea lege, ut portiones ejus maneant continuo tensæ. Dico, curvam, quæ per stilum in subjecto plano describitur, esse ellipsim quæsitam.

Jam enim ex ipsa curvæ descriptione liquet, ejus naturam hanc esse, ut summa rectarum, quæ ex aliquo ejus puncto ducuntur ad puncta G, & H, adæquet longitudinem fili. Sed ex constructione filum est ejusdem longitudinis cum axe majore AB. Quare eadem summa rectarum æqualis erit axi AB; & propterea curva descripta erit ellipsis.

Per-

Perspicuum est autem, quod si foci G, & H accedant ad punctum C, quod bisecat axem AB, descripta curva sit circuli circumferentia. Unde sequitur, *circulum considerari posse, veluti ellipsim, cujus foci coeunt cum ipso centro.*

IX. Sit nunc recta MT aliqua tangens ellipsis, conveniens cum axe AB in puncto T. Erigatur super ea perpendicularis MO, eidem axi occurrens in O. Et *circa perpendicularem istam plura licebit ostendere.*

IX. *Proprietates, pertinentes ad perpendicularem, quæ ex puncto contactus ducitur ad tangentem.*

FIG. 39.

Nimirum primo, quod ea bisecet angulum GMH. Nam rectæ MG, MH constituunt cum tangente angulos æquales. Sed æquales quoque sunt anguli, quos cum eadem tangente constituit perpendicularis MO. Quare erit angulus GMO æqualis angulo HMO.

Secundo, quod recta TH sit harmonice secta in punctis G, & O. Nam rectæ MG, MH, ob æquales angulos, quos constituunt cum tangente MT, sunt, ut perpendicula, quæ ex punctis G, & H ad tangentem demittuntur, sive etiam, ut rectæ TG, TH. Sed, ob angulum GMH bisectum per rectam MO, eædem sunt quoque, ut portiones GO, HO: Igitur erit ex æquali, ut TG ad TH, ita GO ad HO: & propterea rectangulum, quod fit ex tota TH in portionem intermediam GO, æquale erit rectangulo sub portionibus extremis TG, HO.

Tertio, quod tres rectæ CO, CG, CT sint continue proportionales. Quum enim rectangulum ex TH in GO sit æquale rectangulo ex TG in HO; erit, ut TH ad TG, ita

HO ad GO; & componendo, ut summa duarum TH, TG ad TG, ita GH ad GO; & capiendo antecedentium dimidia, ut CT ad TG, ita CG ad GO; ac denique convertendo, ut CT ad GG, ita CG ad CO.

Quarto, quod si demittatur ad axem ordinata MN, data sit ratio, quam habet CO ad CN, hoc est æqualis duplicatæ ejus, quam habet CG ad CA. Quum enim tres rectæ CT, CG, CO sint continue proportionales; erit CG quadratum æquale rectangulo TCO. Sed, ex superius ostensis, CA quadratum est æquale rectangulo TCN. Quare erit, ut rectangulum TCO ad rectangulum TCN, sive etiam ut CO ad CN, ita CG quadratum ad CA quadratum.

Denique, quod data sit etiam ratio, quam habet CO ad NO, hoc est æqualis ei, quam habet CG quadratum ad rectangulum AGB. Jam enim CO est ad CN, ut est CG quadratum ad CA quadratum. Sed, ex superius ostensis, CN est ad NO, ut axis AB ad parametrum ejus AD; sive etiam, ut AB quadratum ad rectangulum DAB; sive demum, ut CA quadratum ad rectangulum AGB. Quare ex æquo ordinando erit, ut CO ad NO, ita CG quadratum ad rectangulum AGB.

X. *Ejusdem perpendicularis singularis quædam proprietas ostenditur.* Fig. 39.

X. Meretur autem, ut *speciatim ostendatur sequens proprietas*: nimirum, quod si ex puncto O super aliquam ipsarum MG, MH perpendicularis demittatur OR, abscissa portio MR sit æqualis dimidio parametri axis majoris AD.

Nec sane difficile erit eam ostendere. Nam

Nam rectæ MG, MH, ob æquales angulos, quos constituunt cum tangente MT, sunt, ut perpendicula, quæ ex punctis G, & H ad tangentem demittuntur; sive etiam, ut portiones TG, TH. Quare componendo summa rectarum MG, MH, sive axis AB, erit ad MH, ut summa duarum TG, TH ad ipsam TH; & capiendo antecedentium dimidia erit quoque, ut CA ad MH, ita CT ad TH; ac denique permutando erit, ut CA ad CT, ita MH ad TH.

Demittatur jam ex puncto H super tangentem perpendicularis HL. Et MH ad TH erit in ratione composita ex MH ad HL, & ex HL ad TH. Jam vero MH est ad HL, ut MO ad MR. Itemque HL est ad TH, ut MO ad TO; sive etiam, ut NO ad MO. Quare erit MH ad TH in ratione composita ex NO ad MO, & ex MO ad MR; atque adeo in simplici ratione, quam habet NO ad MR.

Quum igitur CA sit ad CT, ut MH ad TH, & MH sit ad TH, ut NO ad MR; erit ex æquali, ut CA ad CT, ita NO ad MR. Sed CA est ad CT, ut CN ad CA. Quare rursus ex æquali erit, ut CN ad CA, ita NO ad MR; & permutando erit pariter, ut CN ad NO, ita CA ad MR. Est autem ex ostensis, ut CN ad NO, ita AB ad AD. Et igitur ex æquali rursus erit, ut AB ad AD, ita CA ad MR: proindeque, sicuti CA semissis est ipsius AB, ita erit MR semissis ipsius AD.

XI. Præterea *pertinet ad focos ellipsis hæc alia proprietas*, quod si duæ tangentes MK, NK conveniant in K, & ex eodem foco G du-

XI. *Focorum ellipsis alia proprietas generalis.*

FIG. 40.

ducantur ad puncta contactus rectæ GM, GN, angulus MGN bifariam sit sectus per rectam GK.

Jungantur enim puncta M, & N per rectam MN, cui per focum G, & centrum C parallelæ agantur OR, XZ, cum tangentibus convenientes. Jungantur quoque rectæ HM, HN; & conveniat cum axe, tangens quidem MK in puncto T, tangens vero NK in puncto S.

Et quoniam HM est ad GM, ut TH ad TG; erit componendo, ut AB ad GM, ita summa duarum TH, TG ad ipsam TG; & capiendo antecedentium dimidia erit quoque, ut CA ad GM, ita CT ad TG. Sed CT est ad TG, ut CX ad GO. Quare erit ex æquali, ut CA ad GM, ita CX ad GO.

Eadem ratione ostendemus, CA esse ad GN, ut est CZ ad GR. Unde, quia GM est ad GN in ratione composita ex GM ad GA, & ex CA ad GN; habebit quoque GM ad GN rationem compositam ex GO ad CX, & ex CZ ad GR.

Jam diameter, quæ bisecat rectam MN, eamque velut suam ordinatam agnoscit, transire debet per punctum K, in quo tangentes duæ MK, NK sibi mutuo occurrunt. Quare eadem diameter bisecabit quoque rectam XZ: & propterea, quum æquales sint duæ CX, CZ; erit GM ad GN in simplici ratione, quam habet GO ad GR.

Ponamus modo, rectam GK ipsi MN occurrere in L. Et quoniam GO est ad GR, ut ML ad NL; erit ex æquali, ut GM ad

GN,

GN, ita ML ad NL: proindeque angulus MGN sectus erit bifariam per rectam GK.

XII. Sed *hanc aliam proprietatem nec etiam silentio præteribimus*, quod si per focum aliquem G ducatur recta MN, utrinque ad ellipsim terminata; ea sit tertia proportionalis post axem AB, & diametrum KL, ipsi MN parallelam. XII. *Theorema de longitudine rectæ, per focorum alterum transeuntis.* FIG. 41.

Ducantur enim ad puncta M, & N tangentes MT, NS, convenientes cum axe AB in punctis T, & S, cumque diametro KL in punctis X, & Z. Tum ex iisdem punctis M, & N demittantur ad diametrum KL ordinatæ MO, NR.

Et quoniam, ut paulo ante vidimus, CA est ad GM, ut CT ad TG; erit quoque, ut CA ad GM, ita CX ad eandem GM. Quare duæ CA, CX æquales erunt inter se. Quumque eadem ratione etiam CZ ipsi CA æqualis comperiatur, erit tota XZ æqualis axi AB.

Quia autem tangens MX occurrit diametro KL in puncto X, & ex puncto contactus M ducta est ad eandem diametrum ordinata MO; erit, ut CX ad CK, ita CK ad CO; & duplicando terminos omnes, erit quoque, ut XZ ad KL, ita KL ad OR.

Jam, quemadmodum XZ est æqualis axi AB, ita OR æqualis est rectæ MN. Quare erit, ut AB ad KL, ita KL ad MN: & propterea recta MN, ducta per focum G, & utrinque ad ellipsim terminata, erit tertia proportionalis post axem AB, & diametrum KL, ipsi MN parallelam.

XIII. Hinc autem *proprio alveo fluit*, quod si per XIII. *Corollar.*

tium, quod ex praecedenti theoremate deducitur.

FIG. 41.

si per eundem focum, vel etiam per utrumque ducantur rectæ duæ MN, PQ, utrinque ad ellipsim terminatæ; eæ sint inter se, ut quadrata diametrorum, quæ ipsis sunt parallelæ.

Quum enim MN sit tertia proportionalis post axem AB, & diametrum KL, ipsi MN parallelam; erit KL quadratum æquale rectangulo ex AB in MN. Et eadem ratione, quia PQ est tertia proportionalis post axem AB, & diametrum EF, ipsi PQ æquidistantem; erit EF quadratum æquale rectangulo ex AB in PQ.

Inde autem erit, ut KL quadratum ad EF quadratum, ita rectangulum ex AB in MN ad rectangulum ex AB in PQ. Sed, ob communem altitudinem AB, rectangulum ex AB in MN est ad rectangulum ex AB in PQ, ut MN ad PQ. Quare erit ex æquali, ut MN ad PQ, ita KL quadratum ad EF quadratum.

Quum igitur, ex superius ostensis, rectangula, quæ fiunt ex segmentis duarum secantium, sint inter se, ut quadrata ex conjugatis earum diametrorum, ad quas secantes illæ velut ordinatæ referuntur; erunt nunc illa eadem rectangula, ut earundem diametrorum ordinatæ illæ, quæ transeunt per focos.

XIV. *Focorum ellipsis ultima proprietas generalis.*

FIG. 42.

XIV. Denique *hanc quoque proprietatem nolumus silentio committere*, quod si recta XZ ellipsim contingat in M, & ducta ex focorum altero G ad punctum contactus M recta GM, huic per vertices axis parallelæ agantur AX, BZ, cum tangente convenientes; quod, in quam, demissa ad axem ordinata MN, sint ipsæ

Extendatur enim tangens MX, usque donec conveniat cum axe AB in puncto T. Et, ut paulo superius ostensum est, CA erit ad GM, ut est CT ad TG. Sed, ducta CL ipsi GM parallela, CT est ad TG, ut CL ad GM. Igitur erit ex æquali, ut CA ad GM, ita CL ad eandem GM; & propterea CL ipsi CA æqualis erit.

Jam, ob tangentem MT, CT est ad CA, ut CA ad CN. Quare, subducendo antecedentes ex consequentibus erit, ut CT ad AT, ita CA, sive CL ad AN; & permutando, ut CT ad CL, ita AT ad AN. Sed CT est ad CL, ut AT ad AX. Et igitur ex æquali erit, ut AT ad AX, ita AT ad AN: proindeque AX ipsi AN æqualis erit.

Ulterius, quum CN sit ad CA, ut CA ad CT; erit, convertendo primum, ut CN ad AN, ita CA ad AT; & addendo antecedentes consequentibus, erit quoque, ut CN ad BN, ita CA ad BT. Unde per ordinatam rationem erit, ut AN ad BN, ita AT ad BT. Sed AT est ad BT, ut AX ad BZ. Quare erit ex æquali, ut AX ad BZ, ita AN ad BN: & propterea, quemadmodum AX ostensa est æqualis ipsi AN, sic etiam BZ ipsi BN æqualis erit.

CAP. II.

Focorum ellipsis proprietates speciales ostenduntur.

1. *Focorum ellipsis prima proprietas specialis.*

I. PRæcedenti capite ostensæ sunt *focorum ellipsis proprietates generales*, hoc est, eæ quæ obtinent in quolibet ellipsis puncto; nunc eas ostendemus, quæ *speciales* sunt, & ad illud dumtaxat punctum pertinent, quod conjungitur cum altero focorum per rectam, axi perpendicularem.

FIG. 43. Sit igitur AB axis major ellipsis, sintque etiam G, & H foci ipsius. Ex focorum altero G perpendicularis ad axem erigatur GE, ellipsi occurrens in E. Tum ad punctum E ducatur tangentes ET, cum eodem axe conveniens in T.

Ac primo quidem *ostendemus*, quod erectis ex verticibus axis A, & B ad tangentem usque perpendicularibus AX, BZ, eæ sint æquales portionibus AG, BG, abscissis ex axe AB per focum G.

Jam enim rectæ AX, BZ parallelæ sunt ipsi EG. Quare eædem, ex ostensis, æquales esse debent iis portionibus, in quas dividitur axis per ordinatam, demissam ex puncto E. Sed ordinata ista est ipsa EG. Itaque rectæ AX, BZ æquales esse debent portionibus AG, BG.

Hoc idem ostendi quoque potest in

hunc

hunc modum. Quoniam AX, EX sunt tangentes duæ; per ea, quæ superius ostensa sunt, secabitur angulus AGE bifariam per rectam GX. Unde, quum angulus AGE sit rectus; erit semirecto æqualis, tam angulus AGX, quam angulus AXG; & consequenter duæ AX, AG æquales erunt inter se.

Simili ratione, quoniam BZ, EZ sunt tangentes duæ; secabitur angulus BGE bifariam per rectam GZ. Uude, quum angulus BGE sit rectus; erit semirecto æqualis, tam angulus BGZ, quam angulus BZG; atque adeo duæ BZ, BG æquales erunt inter se.

II. Hinc autem *ostendemus secundo loco*, quod si ex alio ellipsis puncto M ducatur ad axem AB ordinata MN, quæ conveniat, tam cum tangente, quam cum ellipsi ad partem alteram in punctis R, & O; rectangulum MRO sit æquale quadrato, quod fit ex interjecta axis portione GN.

II. Tertiam ellipsis secunda proprietas specialis. FIG. 43.

Nam, per superius ostensa, rectangulum MRO est ad quadratum tangentis ER, ut est quadratum ex axe conjugato ad quadratum ex conjugata diametri, quæ transit per punctum E. Sed in hac eadem ratione est etiam quadratum tangentis AX ad quadratum tangentis EX. Quare erit ex æquali, ut rectangulum MRO ad ER quadratum, ita AX quadratum ad EX quadratum.

Jam, permutando, rectangulum MRO erit ad AX quadratum, ut est ER quadratum ad EX quadratum. Sed, propter parallelas NR, EG, AX, ER quadratum est ad EX

qua-

quadratum, ut GN quadratum ad AG quadratum. Quare erit rursus ex æquali, ut rectangulum MRO ad AX quadratum, ita GN quadratum ad AG quadratum: & propterea, quemadmodum æqualia sunt quadrata duo AX, AG, ita quoque erit rectangulum MRO æquale quadrato, quod fit ex GN.

III. *Focorum ellipsis tertia proprietas specialis.*
FIG. 43.

III. Atque hinc *sequitur tertio*, quod si jungatur punctum M cum foco G per rectam MG, hæc sit semper æqualis rectæ NR, ubicumque sumptum fuerit punctum M.

Jam enim rectangulum MRO ostensum est æquale quadrato, quod fit ex GN. Quare, apposito communi quadrato ex MN, erit rectangulum MRO una cum MN quadrato æquale duobus quadratis GN, MN.

Quoniam autem MO est secta bifariam in puncto N; erit rectangulum MRO una cum MN quadrato æquale quadrato ex NR. Et quoniam angulus GNM est rectus, erunt quadrata duo GN, MN æqualia quadrato ex ipsa MG. Hinc erit NR quadratum æquale quadrato ex MG; & propterea duæ NR, MG æquales erunt inter se.

Hujus autem proprietatis ope, *datis axe, & focis, facile erit invenire longitudinem ordinatæ, quæ cuilibet axis abscissæ correspondet*. Sit enim axis AB, sintque G, & H foci. Et oporteat invenire ordinatam, quæ correspondet abscissæ AN.

Erigantur ex punctis A, & B perpendiculares AX, BZ æquales ipsis AG, BG. Tum, juncta XZ, erigatur ex puncto N perpendicularis altera NR, ei occurrens in R.

De-

Denique centro G, & intervallo ipsius NR describatur arcus, eandem NR secans in M; & erit MN ordinata quæsita.

IV. Iisdem, ut supra manentibus, erigatur modo ex puncto T, in quo tangens ET secat axem AB, perpendicularis ad ipsum axem TV. Et quemadmodum perpendicularem istam TV ellipsis *directricem* deinceps appellabimus, sic *relate ad eam plures ellipsi proprietates competunt.* IV. *De ellipsi directrice, & de illius relate ad istam praecipuis proprietatibus.* FIG. 44.

Nimirum primo, demissa ad directricem perpendiculari EF, erit, ut EF ad EG, ita AT ad AG. Nam, ob parallelogrammum FG, duæ EF, GT inter se sunt æquales. Quare erit, ut EF ad EG, ita GT ad EG. Sed, ob triangula æquiangula TGE, TAX, GT est ad EG, ut AT ad AX. Et, ob æquales AX, AG, ut est AT ad AX, ita est AT ad AG. Quare erit ex æquali, ut EF ad EG, ita AT ad AG.

Secundo, demissa ex alio quovis ellipsis puncto M ad eandem directricem perpendiculari MS, erit, ut MS ad MG, ita AT ad AG. Nam, ducta ad axem ordinata MN, eaque producta ad tangentem usque in puncto R; erit, ut TN ad NR, ita AT ad AX, sive AG. Sed TN est ad NR, ut MS ad MG; quum sint æquales, tam duæ TN, MS, quam duæ NR, MG. Igitur erit ex æquali, ut MS ad MG, ita AT ad AG.

Tertio, id verum erit etiam relate ad alium axis verticem B; quandoquidem erit, ut BT ad BG, ita AT ad AG. Nam, ob triangula æquiangula TBZ, TAX, ut est BT ad

BZ,

BZ, ita est AT ad AX. Sed, ex superius ostensis, æquales sunt inter se, tam duæ AX, AG, quam duæ BZ, BG. Quare erit quoque ut BT ad BG, ita AT ad AG.

Quarto, si duo in ellipsi capiantur puncta M, & P, & ex iis perpendiculares ad directricem demittantur MS, PQ; erit, ut MS ad PQ, ita MG ad PG. Nam in eadem ratione, quam habet AT ad AG, est, tam MS ad ad MG, quam PQ ad PG. Igitur erit ex æquali, ut MS ad MG, ita PQ ad PG; & permutando erit etiam, ut MS ad PQ, ita MG ad PG.

Denique, si ex iisdem punctis M, & P ducantur ad directricem aliæ duæ rectæ MI, PL, quæ inter se sint parallelæ; erit quoque ut MI ad PL, ita MG ad PG. Nam, ob triangula æquiangula MSI, PQL, ut est MI ad PL, ita est MS ad PQ. Sed, ex ostensis, MS est ad PQ, ut est MG ad PG. Igitur erit ex æquali, ut MI ad PL, ita MG ad PG.

IV. *Circa proprietatem præcipuam ellipsis relate ad directricem monita duo.* FIG. 44.

V. Recta igitur, quæ ex quolibet ellipsis puncto perpendiculariter demittitur ad directricem, est ad rectam, quæ ex eodem puncto ducitur ad focum G, in eadem illa ratione, quam habet AT ad AG. Sed *circa proprietatem istam duo occurrunt, notatu digna.*

Primum est, quod ratio, quam habet AT ad AG, sit majoris ad minus: adeo nempe, ut perpendicularis demissa ad directricem sit semper major recta, quæ ducitur ad focum G. Ob tangentem enim ET, ut est CT ad CA, ita est CA ad CG. Quare convertendo erit quoque, ut CT ad AT, ita CA ad AG. Sed

CT

CT major eſt, quam CA. Et igitur AT etiam major erit, quam AG.

Alterum eſt, quod eadem illa ratio ſit æqualis ei, quam habet axis AB ad diſtantiam, quæ inter utrumque focum exiſtit. Nam, ob tangentem ET, ut eſt CT ad CA, ita eſt CA ad CG. Quare, dividendo, erit, ut AT ad CA, ita AG ad CG; & permutando erit quoque, ut AT ad AG, ita CA ad CG. Jam vero CA eſt ad CG, ut AB ad GH. Et igitur ex æquali AT erit ad AG, ut eſt AB ad GH.

VI. *Lemma pro oſtendenda ſingulari ellipſis relate ad directricem proprietate.* FIG. 45.

VI. Ad directricem ellipſis alia etiam proprietas pertinet valde ſingularis. Sed ad eam oſtendendam, *ſternendum eſt prius, velut lemma, ſequens theorema*, quod ſi ad aliquod ellipſis punctum M ducatur tangens MS, conveniens cum axe AB in puncto S, & ex puncto contactus M demittatur ad eundem axem ordinata MO; quod, inquam, CG ſit ad CO, ut eſt CS ad CT.

Quum enim recta ET contingat ellipſim, & ex puncto contactus E ducta ſit ad axem ordinata EG; erit, ex ſuperius oſtenſis, ut CT ad CA, ita CA ad CG: proindeque rectangulum ex CT in CG æquale erit quadrato, quod fit ex CA.

Similiter, quoniam recta MS eſt tangens ellipſis, & ex puncto contactus M ducta eſt ad axem ordinata MO; per ea, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, erit, ut CS ad CA, ita CA ad CO. Quare rectangulum ex CS in CO æquale erit quadrato, quod fit ex CA.

E dem igitur CA quadrato æquale eſt,

 tam

tam rectangulum ex CT in CG, quam rectangulum ex CS in CO. Quare erit rectangulum ex CT in CG æquale rectangulo ex CS in CO; & propterea erit, ut CG ad CO, ita CS ad CT.

VII. *Lemmatis præcedentis corollarium primum.* FIG. 45. VII. Hinc autem *sequitur primo*, quod si eadem tangens MS conveniat cum directrice TV in puncto K, & cum axe conjugato PQ in puncto R; rectangulum ex MO in TK sit ad CP quadratum, ut est GO ad CG.

Quum enim CG sit ad CO, ut est CS ad CT; erit convertendo, ut CG ad GO, ita CS ad TS. Sed, ob triangula æquiangula CRS, TKS, CS est ad TS, ut CR ad TK. Quare erit ex æquali, ut CR ad TK, ita CG ad GO; & invertendo erit etiam, ut TK ad CR, ita GO ad CG.

Præterea, demissa ad axem conjugatum PQ ordinata ML; erit, ob tangentem MR, ut CR ad CP, ita CP ad CL. Unde rectangulum ex CR in CL, sive MO æquale erit quadrato, quod fit ex CP: & propterea rectangulum ex MO in TK erit ad CP quadratum, ut est idem rectangulum ex MO in TK ad rectangulum ex CR in MO.

Jam, ob communem altitudinem MO, rectangulum ex MO in TK est ad rectangulum ex CR in MO, ut est TK ad CR. Ostensum est autem, TK esse ad CR, ut est GO ad CG. Quare erit ex æquali, ut rectangulum ex MO in TK ad rectangulum ex CR in MO, ita GO ad CG; & consequenter in hac eadem ratione erit etiam rectangulum ex MO in TK ad CP quadratum.

VIII. Un-

VIII. Unde *sequitur secundo*, rectangulum ex MO in TK æquale esse rectangulo TGO; atque adeo esse, ut TG ad TK, ita MO ad GO. VIII. *Corollarium secundum.* FIG. 45.

Quum enim recta ET contingat ellipsim, & ex puncto contactus E demissa sit ad axem ordinata EG; erit, ex superius ostensis, rectangulum TGC æquale rectangulo AGB. Sed rectangulum AGB adæquat quartam partem figuræ axis AB, sive etiam quadratum, quod fit ex CP, dimidio axis conjugati. Quare rectangulum TGC eidem CP quadrato pariter æquale erit.

Hinc erit, ut rectangulum TGO ad rectangulum TGC, ita idem rectangulum TGO ad CP quadratum. Sed, ob communem altitudinem TG, rectangulum TGO est ad rectangulum TGC, ut est GO ad GC. Quare erit ex æquali, ut GO ad GC, ita rectangulum TGO ad CP quadratum.

Et quoniam ostensum est, GO esse ad GC, ut est rectangulum ex MO in TK ad CP quadratum; erit rursus ex æquali, ut rectangulum ex MO in TK ad CP quadratum, ita rectangulum TGO ad idem CP quadratum. Unde rectangulum ex MO in TK æquale erit rectangulo TGO.

IX. Atque hinc *sequitur demum*, quod junctis rectis GK, GM, rectus sit angulus KGM, quod sub iis continetur. IX. *Corollarium tertium.* FIG. 45.

Quum enim ostensum sit rectangulum ex MO in TK æquale rectangulo TGO; erit, ut TG ad TK, ita MO ad GO. Unde triangula duo rectangula GTK, MOG habebunt circa angulos rectos latera proportionalia ; & consequenter æquiangula erunt.

Angulus igitur TGK æqualis erit angulo GMO. Unde, apposito communi OGM, erunt duo anguli TGK , OGM æquales duobus angulis GMO , OGM. Sed isti duo simul sumpti unum rectum adæquant. Quare etiam uni recto æquales erunt priores duo ; atque adeo angulus KGM pariter rectus erit.

X. *Ellipsis relate ad directricem singularis proprietas demonstratur.* Fig. 45.

X. His præmissis, *facile modo erit ostendere proprietatem illam singularem, quæ pertinet ad directricem ellipsis*. Illiusmodi proprietas hæc est, quod si per focorum alterum G ducatur recta MN, utrinque ad ellipsim terminata, & rectæ MS, NX contingant ellipsim in punctis M, & N ; tangentes istæ super directrice TV sibi mutuo occurrant.

Si enim fieri potest, secent tangentes illæ directricem TV in punctis diversis : nimirum tangens quidem MS in puncto K ; tangens vero NX in puncto I. Tum jungantur rectæ GK, GI.

Et quoniam recta MK est tangens ellipsis, eaque occurrit directrici in puncto K ; erit angulus KGM rectus ; adeoque rectus pariter angulus KGN, qui ad partem alteram existit.

Eadem ratione, quia recta NX est tangens ellipsis, eademque secat directricem in puncto I, erit angulus IGN similiter rectus. Unde duo anguli KGN, IGN æquales erunt inter se. Quod fieri non potest.

XI. *Alia ellipsis relate ad di-*

XI. Hinc vero *alia etiam proprietas valde elegans fluit* ; nimirum, quod si per foco-

rum

rum alterum G ducatur recta MN, utrinque ad ellipsim terminata; & actis tangentibus MK, NK, sibi mutuo occurrentibus in K, jungatur recta GK; hæc perpendicularis esse debeat ad ipsam MN. *rectarum elegans proprietas ostenditur.* FIG. 45.

Referat namque recta TV directricem ellipsis. Et, per ostensam proprietatem, in ea locabitur punctum K, in quo tangentes duæ sibi mutuo occurrunt. Unde per ea, quæ paulo ante ostensa sunt, omnino necesse est, ut rectus sit uterque angulorum KGM, KGN; atque adeo, ut ipsa GK perpendicularis sit ad rectam MN.

Hoc idem erui quoque potest ex proprietate illa generali, superius ostensa, quod recta GK bifariam dividat angulum, contentum sub rectis GM, GN. Inde enim sequitur, eandem rectam GK æquales semper angulos constituere cum rectis GM, GN; atque adeo rectos esse angulos illos, ubi ipsæ GM, GN jacent in directum.

XII. Cæterum ex iis, quæ modo ostensa sunt, *datis focis, & directrice, nullo negotio ducetur tangens ad quodlibet ellipsis punctum*. Referat enim recta TV directricem ellipsis, sintque foci ejusdem puncta G, & H. Oportet ad punctum N tangentem ducere. XII. *Quomodo datis directrice, & focis ellipsis duci possit tangens ad punctum datum.*

Ad focorum alterum G ducatur ex puncto N recta NG. Tum ei ex eodem foco G perpendicularis erigatur GK, conveniens cum directrice in puncto K. Jungantur denique puncta N, & K per rectam NK. Et erit recta ista NK tangens quæsita. FIG. 45.

Si enim fieri potest, contingat ellipsim in puncto N recta quævis alia NI, quæ conveniat cum directrice in puncto I. Tum ex foco G ad punctum I ducatur recta GI. Et, ex ostensis, rectus erit angulus IGN. Sed ex constructione rectus etiam est angulus KGN. Quare duo anguli IGN, KGN æquales inter se erunt. Quod fieri non potest.

C A P. III.

Demonstrantur focorum hyperbolæ proprietates generales.

1. *Definitio focorum hyperbolæ, & quod æqualiter distent, tum a centro, cum a verticibus.*

I. Similiter in hyperbola foci, sive umbilici dicuntur *duo illa axis puncta quibus ordinatæ correspondentes semissem parametri ejusdem axis adæquant*.

FIG. 46. Ita, si AB sit axis hyperbolæ, & AD parameter ejus, capianturque in axe illo AB duo puncta G, & H adeo quidem, ut ordinatæ EG, FH, punctis illis correspondentes, adæquent semissem ipsius AD; dicentur puncta G, & H foci, sive umbilici ipsius hyperbolæ.

Unde liquet, focos G, & H æqualiter distare, tam a centro hyperbolæ C, quam ab axis verticibus A, & B. Nam, quemadmodum æqualia sunt quadrata EG, FH; ita quoque æqualia erunt rectangula AGB, AHB, quæ iis quadratis proportione correspondent.

Hinc, addendo æqualia ista rectangula AGB, AHB æqualibus quadratis CA, CB, fiet qua-

quadratum ex CG æquale etiam quadrato ex CH : & propterea æquales erunt inter se, tam duæ CG, CH, quam duæ AG, BH.

II. Ex ipsa autem focorum definitione liquet, *rectangulum sub axis portionibus, per focorum alterum abscissis, quadrantem figuræ ejusdem axis adæquare*. Maneant enim omnia, ut supra. Dico, tam rectangulum AGB, quam rectangulum AHB æquale esse quartæ parti figuræ axis AB, quæ constituitur per rectangulum DAB. II. *Focorum hyperbolæ proprietas prima generalis.* Fig. 46.

Nam, propter hyperbolam, EG quadratum est ad rectangulum AGB, ut AD ad AB; sive etiam, ut AD quadratum ad rectangulum DAB. Sed EG quadratum est quarta pars quadrati, quod fit ex AD; quum ex constructione EG semissem adæquet ipsius AD. Quare etiam rectangulum AGB quarta pars erit rectanguli DAB.

Eadem ratione, propter hyperbolam, FH quadratum est ad rectangulum AHB, ut AD ad AB; sive etiam, ut AD quadratum ad rectangulum DAB. Sed FH quadratum est quarta pars quadrati, quod fit ex AD; quum ex constructione FH semissem adæquet ipsius AD. Quare etiam rectangulum AHB quarta pars erit rectanguli DAB.

III. Ducantur nunc ad vertices A, & B tangentes AX, BZ, quæ conveniant cum tangente quavis tertia MXZ in punctis X, & Z. Et *facile erit ostendere*, quod si ex focorum altero G ducantur rectæ GX, GZ, angulus XGZ, sub ipsis comprehensus, perpetuo rectus esse debeat, ubicunque fuerit punctum contactus M. III. *Focorum hyperbolæ proprietas secunda generalis.* Fig. 47.

 Nam

Nam rectangulum ex AX in BZ, velut æquale quadrato, quod fit ex dimidio axis conjugati, adæquat quartam partem figuræ axis AB. Sed ejusdem figuræ quadranti æquale est quoque rectangulum AGB. Quare erit rectangulum ex AX in BZ æquale rectangulo AGB: & propterea erit, ut AX ad AG, ita BG ad BZ.

Hinc duo triangula rectangula XAG, GBZ æquiangula erunt; adeoque erit angulus AXG æqualis angulo BGZ. Et, apposito communi AGX, erunt etiam duo anguli AXG, AGX æquales duobus angulis BGZ, AGX. Sed priores duo unum rectum adæquant. Quare uni recto pariter æquales erunt posteriores duo; & consequenter angulus XGZ, ex iis compositus, rectus erit.

IV. *Focorum hyperbolæ proprietas tertia generalis.* IV. Eadem autem ratione ostendemus, rectum esse angulum XHZ, quem continent rectæ HX, HZ, ductæ ex foco altero H ad eadem puncta X, & Z. Unde *sequitur quoque*,

FIG. 47. quod si ex puncto K, in quo rectæ duæ GZ, HX se mutuo secant, ducatur ad punctum contactus M recta KM, hæc perpendicularis sit ad tangentem MZ.

Si enim fieri potest, sit KO perpendicularis ad XZ. Et quoniam rectus est, tam angulus XGZ, quam angulus XHZ; circulus, descriptus super XZ, velut diametro, transibit per focos G, & H. Unde erit angulus HGZ æqualis angulo HXZ, sive KXO. Sed angulus HGZ æqualis est angulo AXG. Quare duo anguli AXG, KXO æquales erunt inter se: & propterea, ob triangula æquiangula AGX, OKX,

OKX, erit, ut AX ad OX, ita GX ad KX.

Simili ratione ostendemus, BZ esse ad OZ, ut est HZ ad KZ. Unde, quia propter triangula æquiangula KGX, KHZ, GX est ad KX, ut HZ ad KZ; erit ex æquali, ut AX ad OX, ita BZ ad OZ; & permutando erit quoque, ut AX ad BZ, ita OX ad OZ.

Præterea, demissa ad axem ordinata MN, erit, ob tangentem MT, ut CN ad CA, ita CA ad CT. Unde, convertendo primum, erit, ut CN ad AN, ita CA ad AT; & addendo deinde antecedentes consequentibus, erit quoque, ut CN ad BN, ita CA ad BT: proindeque, per ordinatam rationem, erit, ut AN ad BN, ita AT ad BT. Sed AN est ad BN, ut MX ad MZ. Et AT est ad BT, ut AX ad BZ. Quare ex æquali erit, ut AX ad BZ, ita MX ad MZ.

Quum igitur in eadem ratione rectarum AX, BZ sit, tam OX ad OZ, quam MX ad MZ; erit rursus ex æquali, ut OX ad OZ, ita MX ad MZ. Unde, subducendo antecedentes ex consequentibus, erit, ut XZ ad OZ, ita XZ ad MZ: & propterea duæ OZ, MZ æquales erunt inter se. Quod fieri non potest.

V. Atque hinc *sequitur etiam*, rectas MG, MH, quæ ex puncto contactus M ad focos inclinantur, æquales cum tangente MZ angulos constituere, hoc est angulum GMX æqualem esse angulo HMZ. *V. Focorum hyperbolæ proprietas quarta generalis.* Fig. 47.

Quum enim rectus sit, tam angulus KGX, quam angulus KMX; circulus, de-

scri-

ſcriptus ſuper KX, velut diametro, tranſibit per puncta G, & M: proindeque erit angulus GMX æqualis angulo GKX.

Eadem ratione, quia rectus eſt uterque angulorum KHZ, KMZ; ſemicirculus, deſcriptus ſuper KZ, velut diametro, tranſibit per puncta H, & M. Quare erit angulus HMZ æqualis angulo HKZ, ſive GKX.

Eidem igitur angulo GKX æqualis eſt, tam angulus GMX, quam angulus HMZ. Quare erit angulus GMX æqualis angulo HMZ: & propterea rectæ duæ MG, MH cum tangente MZ æquales angulos conſtituent.

VI. *Focorum hyperbolæ proprietas quinta generalis.*

VI. Inde vero *deducitur præterea*, eaſdem rectas MG, MH continere rectangulum, quod quartam partem adæquat figuræ diametri, tranſeuntis per punctum contactus M.

FIG. 47.

Nam, ex ſuperius oſtenſis, ſi ex centro hyperbolæ C ad puncta X, & Z intelligantur ductæ rectæ CX, CZ, eæ exhibebunt nobis duas hyperbolæ diametros conjugatas. Quare rectangulum XMZ æquale erit quadrato, quod fit ex dimidio conjugatæ illius diametri, quæ pertinet ad punctum M.

Jam quadratum iſtud adæquat quartam partem figuræ ejuſdem diametri. Unde conſtabit, rectangulum GMH æquale eſſe quadranti figuræ diametri, tranſeuntis per punctum M, ſi utique oſtendi poſſit, rectangulum GMH æquale eſſe rectangulo XMZ. Id vero oſtendemus in hunc modum.

Quoniam rectus eſt uterque angulorum KGX, KMX; erunt alii duo anguli GKM, GXM duobus rectis æquales. Et ſimilimiliter quia rectus est, tam angulus KHZ, quam angulus KMZ; erunt alii duo anguli GKM, MHZ duobus rectis pariter æquales.

Hinc duo anguli GKM, GXM æquales erunt duobus angulis GKM, MHZ: proindeque, ablato communi GKM, remanebit angulus GXM æqualis angulo MHZ. Unde triangula duo GMX, HMZ æquiangula erunt: & propterea, quum sit, ut MX ad MG, ita MH ad MZ; erit rectangulum GMH æquale rectangulo XMZ.

VII. Exinde *colligitur pariter*, differentiam rectarum MG, MH æqualem esse axi AB. Ducantur enim uni earum, veluti MG, parallelæ CR, HS. Tum jungantur rectæ AR, HR, BR. VII. *Focorum hyperbolæ proprietas secunda generalis.* FIG. 48.

Et quoniam eidem angulo GMX æqualis est, tam angulus HMS, quam angulus HSM, erunt duo anguli HMS, HSM æquales inter se: & propterea triangulum MHS isosceles erit. Sed basis ejus MS bisecta est per rectam HR; quum sit, ut RM ad RS, ita CG ad CH. Quare erit HR perpendicularis ad ipsam MS.

Hinc, ob circulum, transeuntem per quatuor puncta A, R, H, X, erit angulus ARX æqualis angulo AHX. Et similiter, ob circulum, transeuntem per puncta quatuor B, H, Z, R, erit angulus BRX æqualis angulo BHZ. Unde angulus ARB æqualis erit angulo XHZ, atque adeo rectus erit.

Id quum ita sit, semicirculus, descriptus super AB, velut diametro, transibit per punctum R; & propterea recta CR ipsi CA, vel

CB

CB æqualis erit. Sed, ob rectam GH bisectam in C, est MG dupla ipsius CI, & MH dupla ipsius MI, sive IR. Itaque differentia duarum MG, MH dupla erit ipsius CR; atque adeo æqualis axi AB.

VIII. *Alia hyperbolam in plano describendi ratio, datis axe, & umbilicis.* Fig. 47.

VIII. Hinc *vero alia nobis suboritur ratio describendi hyperbolam in plano, datis focis cum longitudine axis.* Sit enim AB axis hyperbolæ, sintque puncta G, & H ejusdem foci, seu umbilici. Oportet, in subjecto plano hyperbolam describere.

Ad alterum focorum H aptetur regula HL, quæ longior sit axe AB. Tum, sumpto filo, cujus longitudo minor sit longitudine regulæ per axem AB, alligentur extrema ejus punctis G, & L. Circumducatur deinde regula HL circa focum H, & ope stili feratur etiam filum cum ipsa regula, ea lege, ut portiones ejus maneant continuo tensæ. Dico, curvam, quæ per stilum in subjecto plano describitur, esse hyperbolam quæsitam.

Jam enim ex ipsa curvæ descriptione liquet, ejus naturam hanc esse, ut differentia rectarum, quæ ex aliquo ejus puncto ducuntur ad puncta G, & H, adæquet differentiam, quæ inter regulam, & filum existit. Sed ex constructione differentia ista æqualis est axi AB. Quare eidem axi AB æqualis quoque erit eadem illa rectarum differentia: & propterea curva descripta erit hyperbola.

Perspicuum est autem, præfata ratione describi tantum hyperbolam, quæ transit per punctum A. Sed, si describenda quoque esset hyperbola alia, quæ transit per punctum

B; tunc regula quidem aptanda erit ad focum G, filum vero oportebit, ut extremitate sua foco H alligetur. Patetque etiam, utriusque hyperbolæ eo majorem portionem describi, quo longior assumitur regula.

IX. Sit nunc recta MT aliqua tangens hyperbolæ, conveniens cum axe AB in puncto T. Erigatur super ea perpendicularis MO, eidem axi occurrens in O. Et *circa perpendicularem istam plura licebit ostendere.*

IX. *Proprietates, pertinentes ad perpendicularem, quæ ex puncto contactus ducitur ad tangentem.*

Nimirum primo, quod rectæ MG, MH constituant cum ea, producta versus R, angulos æquales. Nam rectæ MG, MH efficiunt æquales angulos cum tangente MT. Sed æquales quoque sunt anguli, quos cum eadem tangente constituit perpendicularis OR. Quare erit angulus GMO æqualis angulo HMR.

FIG. 49.

Secundo, quod recta HO sit harmonice secta in punctis T, & G. Nam rectæ MG, MH, ob æquales angulos, quos constituunt cum perpendiculari OR, sunt, ut perpendicula, quæ ex punctis G, & H demittuntur ad ipsam OR, sive etiam, ut rectæ GO, HO. Sed, ob angulum GMH bisectum per tangentem MT, eædem MG, MH sunt, ut portiones TG, TH. Igitur erit ex æquali, ut TG ad TH, ita GO ad HO: & propterea rectangulum, quod fit ex tota HO in portionem intermediam TG, æquale erit rectangulo sub portionibus extremis TH, GO.

Tertio, quod tres rectæ CO, CG, CT sint continue proportionales. Quum enim rectangulum ex TH in GO sit æquale rectangulo ex TG in HO; erit, ut TH ad TG, ita

HO

HO ad GO; & componendo, ut GH ad TG, ita summa duarum HO, GO ad ipsam GO; & capiendo antecedentium dimidia, ut CG ad TG, ita CO ad GO; ac denique convertendo, ut CG ad CT, ita CO ad CG.

Quarto, quod si demittatur ad axem ordinata MN, data sit ratio, quam habet CO ad CN, hoc est æqualis duplicatæ ejus, quam habet CG ad CA. Quum enim tres rectæ CT, CG, CO sint continue proportionales; erit CG quadratum æquale rectangulo TCO. Sed, ex superius ostensis, CA quadratum est æquale rectangulo TCN. Quare erit, ut rectangulum TCO ad rectangulum TCN, sive etiam ut CO ad CN, ita CG quadratum ad CA quadratum.

Denique, quod data sit etiam ratio, quam habet CO ad NO, hoc est æqualis ei, quam habet CG quadratum ad rectangulum AGB. Jam enim CO est ad CN, ut est CG quadratum ad CA quadratum. Sed, ex superius ostensis, CN est ad NO, ut axis AB ad parametrum ejus AD; sive etiam, ut AB quadratum ad rectangulum DAB; sive demum, ut CA quadratum ad rectangulum AGB. Quare ex æquo ordinando erit, ut CO ad NO, ita CG quadratum ad rectangulum AGB.

X. *Ejusdem perpendicularis singularis quædam proprietas ostenditur.* FIG. 49.

X. Meretur autem, ut *speciatim ostendatur sequens proprietas*: nimirum, quod si ex puncto O super aliquam ipsarum MG, MH perpendicularis demittatur OR, abscissa portio MR sit æqualis dimidio parametri AD, quæ defertur ad axem AB.

Nec sane difficile erit eam, ostendere. Nam

Nam rectæ MG, MH, ob æquales angulos, quos constituunt cum tangente MT, sunt, ut portiones TG, TH. Quare differentia rectarum MG, MH, sive axis AB, erit ad MH, ut differentia duarum TG, TH ad ipsam TH; & capiendo antecedentium dimidia, erit quoque, ut CA ad MH, ita CT ad TH; ac denique permutando erit, ut CA ad CT, ita MH ad TH.

Demittatur jam ex puncto H super tangentem perpendicularis HL. Et MH ad TH erit in ratione composita ex MH ad HL, & ex HL ad TH. Jam vero MH est ad HL, ut MO ad MR. Itemque HL est ad TH, ut MQ ad TO; sive etiam, ut NO ad MO. Quare erit MH ad TH in ratione composita ex NO ad MO, & ex MO ad MR; atque adeo in simplici ratione, quam habet NO ad MR.

Quum igitur CA sit ad CT, ut MH ad TH, & MH sit ad TH, ut NO ad MR; erit ex æquali, ut CA ad CT, ita NO ad MR. Sed CA est ad CT, ut CN ad CA. Quare rursus ex æquali erit, ut CN ad CA, ita NO ad MR; & permutando erit pariter, ut CN ad NO, ita CA ad MR. Est autem ex ostensis, ut CN ad NO, ita AB ad AD. Et igitur ex æquali rursus erit, ut AB ad AD, ita CA ad MR: proindeque, sicuti CA semissis est ipsius AB, ita erit MR semissis ipsius AD.

XI. Præterea *pertinet ad focos hyperbolæ hæc alia proprietas*, quod si duæ tangentes MK, NK conveniant in K, & ex eodem foco G ducantur ad puncta contactus rectæ GM, GN, angulus MGN bifariam sit sectus per rectam GK. Jun-

XI. *Focorum hyperbolæ alia proprietas generalis.*

FIG. 50.

Jungantur enim puncta M, & N per rectam MN, cui per focum G, & centrum C parallelæ agantur OR, XZ, cum tangentibus convenientes. Jungantur quoque rectæ HM, HN; & conveniat cum axe, tangens quidem MK in puncto T, tangens vero NK in puncto S.

Et quoniam HM est ad GM, ut TH ad TG; erit dividendo, ut AB ad GM, ita differentia duarum TH, TG ad ipsam TG; & capiendo antecedentium dimidia, erit quoque, ut CA ad GM, ita CT ad TG. Sed CT est ad TG, ut CX ad GO. Quare erit ex æquali, ut CA ad GM, ita CX ad GO.

Eadem ratione ostendemus, CA esse ad GN, ut est CZ ad GR. Unde, quia GM est ad GN in ratione composita ex GM ad CA, & ex CA ad GN; habebit quoque GM ad GN rationem compositam ex GO ad CX, & ex CZ ad GR.

Jam diameter, quæ bisecat rectam MN, eamque velut suam ordinatam agnoscit, transire debet per punctum K, in quo tangentes duæ MK, NK sibi mutuo occurrunt. Quare eadem diameter bisecabit quoque rectam XZ: & propterea, quum æquales sint duæ CX, CZ; erit GM ad GN in simplici ratione, quam habet GO ad GR.

Ponamus modo, rectam GK ipsi MN occurrere in L. Et quoniam GO est ad GR, ut ML ad NL; erit ex æquali, ut GM ad GN, ita ML ad NL: proindeque angulus MGN sectus erit bifariam per rectam GK.

XII. *Theorema*

XII. Sed *hanc aliam proprietatem nec*

etiam:

etiam silentio præteribimus, quod si per focum aliquem G ducatur recta MN, utrinque ad hyperbolam terminata; ea sit tertia proportionalis post axem AB, & diametrum KL, ipsi MN parallelam. *de longitudine rectæ, per focorum alterum transeuntis.* FIG. 51.

Ducantur enim ad puncta M, & N tangentes MT, NS, convenientes cum axe AB in punctis T, & S, cumque diametro KL in punctis X, & Z. Tum ex iisdem punctis M, & N demittantur ad diametrum KL ordinatæ MO, NR.

Et quoniam, ut paulo ante vidimus, CA est ad GM, ut CT ad TG; erit quoque, ut CA ad GM, ita CX ad eandem GM. Quare duæ CA, CX æquales erunt inter se. Quumque eadem ratione etiam CZ ipsi CA æqualis comperiatur; erit tota XZ æqualis axi AB.

Quia autem tangens MX occurrit diametro KL in puncto X, & ex puncto contactus M ducta est ad eandem diametrum ordinata MO; erit, ut CX ad CK, ita CK ad CO; & duplicando terminos omnes, erit quoque, ut XZ ad KL, ita KL ad OR.

Jam, quemadmodum XZ est æqualis axi AB, ita OR æqualis est rectæ MN. Quare erit, ut AB ad KL, ita KL ad MN: & propterea recta MN, ducta per focum G, & utrinque ad hyperbolam terminata, erit tertia proportionalis post axem AB, & diametrum KL, ipsi MN parallelam.

XIII. Hinc autem *prono alveo fluit*, quod si per eundem focum, vel etiam per utrumque ducantur rectæ duæ MN, PQ, utrinque ad hyperbolam terminatæ; eæ sint inter se, ut *XIII. Corollarium, quod ex præcedenti theoremate deducitur.* FIG. 51.

quadrata diametrorum, quæ ipsis sunt parallelæ.

Quum enim MN sit tertia proportionalis post axem AB, & diametrum KL, ipsi MN parallelam; erit KL quadratum æquale rectangulo ex AB in MN. Et eadem ratione, quia PQ est tertia proportionalis post axem AB, & diametrum EF, ipsi PQ æquidistantem; erit EF quadratum æquale rectangulo ex AB in PQ.

Inde autem erit, ut KL quadratum ad EF quadratum, ita rectangulum ex AB in MN ad rectangulum ex AB in PQ. Sed, ob communem altitudinem AB, rectangulum ex AB in MN est ad rectangulum ex AB in PQ, ut MN ad PQ. Quare erit ex æquali, ut MN ad PQ, ita KL quadratum ad EF quadratum.

Quum igitur, ex superius ostensis, rectangula, quæ fiunt ex segmentis duarum secantium, sint inter se, ut quadrata ex conjugatis earum diametrorum, ad quas secantes illæ velut ordinatæ referuntur; erunt nunc illa eadem rectangula, ut earundem diametrorum ordinatæ illæ, quæ transeunt per focos.

XIV. *Focorum hyperbolæ ultima proprietas generalis.*

FIG. 52.

XIV. Denique *hanc quoque proprietatem nolumus silentio committere*, quod si recta XZ hyperbolam contingat in M, & ducta ex focorum altero G ad punctum contactus M recta GM, huic per vertices axis parallelæ agantur AX, BZ, cum tangente convenientes; quod, inquam, demissa ad axem ordinata MN, sint ipsæ AX, BZ æquales portionibus axis AN, BN.

Ex-

Extendatur enim tangens MX, usque donec conveniat cum axe AB in puncto T. Et, ut paulo superius ostensum est, CA erit ad GM, ut est CT ad TG. Sed, ducta CL ipsi GM parallela, CT est ad TG, ut CL ad GM. Igitur erit ex æquali, ut CA ad GM, ita CL ad eandem GM; & propterea CL ipsi CA æqualis erit.

Jam, ob tangentem MT, CT est ad CA, ut CA ad CN. Quare, subducendo antecedentes ex consequentibus erit, ut CT ad AT, ita CA, sive CL ad AN; & permutando, ut CT ad CL, ita AT ad AN. Sed CT est ad CL, ut AT ad AX. Et igitur ex æquali erit, ut AT ad AX, ita AT ad AN: proindeque AX ipsi AN æqualis erit.

Ulterius, quum CN sit ad CA, ut CA ad CT; erit, convertendo primum, ut CN ad AN, ita CA ad AT; & addendo antecedentes consequentibus, erit quoque, ut CN ad BN, ita CA ad BT. Unde per ordinatam rationem erit, ut AN ad BN, ita AT ad BT. Sed AT est ad BT, ut AX ad BZ. Quare erit ex æquali, ut AX ad BZ, ita AN ad BN: & propterea, quemadmodum AX ostensa est æqualis ipsi AN, sic etiam BZ ipsi BN æqualis erit.

CAP. IV.

Demonstrantur proprietates speciales focorum hyperbolæ.

I. *Focorum hyperbolæ prima proprietas specialis.* FIG. 53.

I. PRæcedenti capite ostensæ sunt *focorum hyperbolæ proprietates generales*, hoc est, eæ quæ obtinent in quolibet hyperbolæ puncto; nunc eas ostendemus, quæ *speciales* sunt, & ad illud dumtaxat punctum pertinent, quod conjungitur cum altero focorum per rectam, axi perpendicularem.

Sit igitur AB axis hyperbolæ, sintque etiam G, & H foci ipsius. Ex focorum altero G perpendicularis ad axem erigatur GE, hyperbolæ occurrens in E. Tum ad punctum E ducatur tangens ET, cum eodem axe conveniens in T.

Ac primo quidem *ostendemus*, quod erectis ex verticibus axis A, & B ad tangentem usque perpendicularibus AX, BZ, eæ sint æquales portionibus AG, BG, abscissis ex axe AB per focum G.

Jam enim rectæ AX, BZ parallelæ sunt ipsi EG. Quare eædem, ex ostensis, æquales esse debent iis portionibus, in quas dividitur axis per ordinatam, demissam ex puncto E. Sed ordinata ista est ipsa EG. Itaque rectæ AX, BZ æquales esse debent portionibus AG, BG.

Hoc idem ostendi quoque potest in hunc

hunc modum. Quoniam AX, EX sunt tangentes duæ; per ea, quæ superius ostensa sunt, secabitur angulus AGE bifariam per rectam GX. Unde, quum angulus AGE sit rectus; erit semirecto æqualis, tam angulus AGX, quam angulus AXG; & consequenter duæ AX, AG æquales erunt inter se.

Simili ratione, quoniam BZ, EZ sunt tangentes duæ; secabitur angulus BGE bifariam per rectam GZ. Unde, quum angulus BGE sit rectus; erit semirecto æqualis, tam angulus BGZ, quam angulus BZG; atque adeo duæ BZ, BG æquales erunt inter se.

II. Hinc autem *ostendemus secundo loco*, quod si ex alio hyperbolæ puncto M ducatur ad axem AB ordinata MN, quæ conveniat, tam cum tangente, quam cum hyperbola ad partem alteram in punctis R, & O; rectangulum MRO sit æquale quadrato, quod fit ex interjecta axis portione GN.

II. *Focorum hyperbolæ secunda proprietas specialis.*

FIG. 53.

Nam, per superius ostensa, rectangulum MRO est ad quadratum tangentis ER, ut est quadratum ex axe conjugato ad quadratum ex conjugata diametri, quæ transit per punctum E. Sed in hac eadem ratione est etiam quadratum tangentis AX ad quadratum tangentis EX. Quare erit ex æquali, ut rectangulum MRO ad ER quadratum, ita AX quadratum ad EX quadratum.

Jam, permutando, rectangulum MRO erit ad AX quadratum, ut est ER quadratum ad EX quadratum. Sed, propter parallelas NR, EG, AX, ER quadratum est ad EX quadratum, ut GN quadratum ad AG quadratum. Quare erit rursus ex æquali, ut rectangulum MRO ad AX quadratum, ita GN quadratum ad AG quadratum: & propterea, quemadmodum æqualia sunt quadrata duo AX, AG, ita quoque erit rectangulum MRO æquale quadrato, quod fit ex GN.

III. *Focorum hyperbola tertia proprietas specialis.* Fig. 53.

III. Atque hinc *sequitur tertio*, quod si jungatur punctum M cum foco G per rectam MG, hæc fit semper æqualis rectæ NR, ubicumque sumptum fuerit punctum M.

Jam enim rectangulum MRO ostensum est æquale quadrato, quod fit ex GN. Quare, apposito communi quadrato ex MN, erit rectangulum MRO una cum MN quadrato æquale duobus quadratis GN, MN.

Quoniam autem MO est secta bifariam in puncto N; erit rectangulum MRO una cum MN quadrato æquale quadrato ex NR. Et quoniam angulus GNM est rectus, erunt quadrata duo GN, MN æqualia quadrato ex ipsa MG. Hinc erit NR quadratum æquale quadrato ex MG: & propterea duæ NR, MG æquales erunt inter se.

Hujus autem proprietatis ope, *datis axe, & focis, facile erit invenire longitudinem ordinatæ, quæ cuilibet axis abscissæ correspondet*. Sit enim axis AB, sintque G, & H foci. Et oporteat invenire ordinatam, quæ correspondet abscissæ AN.

Erigantur ex punctis A, & B ad partes contrarias perpendiculares AX, BZ, quæ fiant æquales ipsis AG, BG. Tum, juncta XZ, erigatur ex puncto N perpendicularis al-

altera NR, ei occurrens in R. Denique centro G, & intervallo ipsius NR describatur arcus, eandem NR secans in M; & erit MN ordinata quaesita.

IV. Iisdem, ut supra, manentibus, erigatur modo ex puncto T, in quo tangens ET secat axem AB, perpendicularis ad ipsum axem TV. Et quemadmodum perpendicularem istam TV hyperbolae *directricem* deinceps appellabimus, sic *relate ad eam plures hyperbolae proprietates competunt*.

IV. *De hyperbolae directrice, & de illius relate ad istam praecipuis proprietatibus.* FIG. 54.

Nimirum primo, demissa ad directricem perpendiculari EF, erit, ut EF ad EG, ita AT ad AG. Nam, ob parallelogrammum FG, duae EF, GT inter se sunt aequales. Quare erit, ut EF ad EG, ita GT ad EG. Sed, ob triangula aequiangula TGE, TAX, GT est ad EG, ut AT ad AX. Et, ob aequales AX, AG, ut est AT ad AX, ita est AT ad AG. Quare erit ex aequali, ut EF ad EG, ita AT ad AG.

Secundo, demissa ex alio quovis hyperbolae puncto M ad eandem directricem perpendiculari MS, erit, ut MS ad MG, ita AT ad AG. Nam, ducta ad axem ordinata MN, eaque producta ad tangentem usque in puncto R; erit, ut TN ad NR, ita AT ad AX, sive AG. Sed TN est ad NR, ut MS ad MG; quum sint aequales, tam duae TN, MS, quam duae NR, MG. Igitur erit ex aequali, ut MS ad MG, ita AT ad AG.

Tertio, id verum erit etiam relate ad alium axis verticem B; quandoquidem erit, ut BT ad BG, ita AT ad AG. Nam, ob triangu-

In æquiangula TBZ, TAX, ut est BT ad BZ, ita est AT ad AX. Sed, ex superius ostensis, æquales sunt inter se, tam duæ AX, AG, quam duæ BZ, BG. Quare erit quoque ut BT ad BG, ita AT ad AG.

Quarto, si duo in hyperbola capiantur puncta M, & P, & ex iis perpendiculares ad directricem demittantur MS, PQ; erit, ut MS ad PQ, ita MG ad PG. Nam in eadem ratione, quam habet AT ad AG, est, tam MS ad ad MG, quam PQ ad PG. Igitur erit ex æquali, ut MS ad MG, ita PQ ad PG; & permutando erit etiam, ut MS ad PQ, ita MG ad PG.

Denique, si ex iisdem punctis M, & P ducantur ad directricem aliæ duæ rectæ MI, PL, quæ inter se sint parallelæ; erit quoque ut MI ad PL, ita MG ad PG. Nam, ob triangula æquiangula MSI, PQL, ut est MI ad PL, ita est MS ad PQ. Sed, ex ostensis, MS est ad PQ, ut est MG ad PG. Igitur erit ex æquali, ut MI ad PL, ita MG ad PG.

V. *Circa proprietatem præcipuam hyperbolæ relate ad directricem monita duo.* Fig. 54.

V. Recta igitur, quæ ex quolibet hyperbolæ puncto perpendiculariter demittitur ad directricem, est ad rectam, quæ ex eodem puncto ducitur ad focum G, in eadem illa ratione, quam habet AT ad AG. Sed *circa proprietatem istam duo occurrunt, notatu digna.*

Primum est, quod ratio, quam habet AT ad AG, sit minoris ad majus: adeo nempe, ut perpendicularis demissa ad directricem sit semper minor recta, quæ ducitur ad focum G. Ob tangentem enim ET, ut est CT ad CA, ita est CA ad CG. Quare, subducendo antecetecedentes ex consequentibus, erit quoque, ut CT ad AT, ita CA ad AG. Jam vero CT minor est, quam CA. Et igitur AT etiam minor erit, quam AG.

Alterum est, quod eadem illa ratio sit æqualis ei, quam habet axis AB ad distantiam, quæ inter utrumque focum existit. Nam, ob tangentem ET, ut est GT ad CA, ita est CA ad CG. Quare, subducendo antecedentes ex consequentibus, erit, ut AT ad CA, ita AG ad CG; & permutando erit quoque, ut AT ad AG, ita CA ad CG. Jam vero CA est ad CG, ut AB ad GH. Et igitur ex æquali AT erit ad AG, ut est AB ad GH.

VI. Ad directricem hyperbolæ alia etiam proprietas pertinet valde singularis. Sed ad eam ostendendam, *sternendum est prius, velut lemmis, sequens theorema*, quod si ad aliquod hyperbolæ punctum M ducatur tangens MS, conveniens cum axe AB in puncto S, & ex puncto contactus M demittatur ad eundem axem ordinata MO; quod, inquam, CG sit ad CO, ut est CS ad CT.

VI. Lemma pro ostendenda singulari hyperbolæ relate ad directricem proprietate.

FIG. 55.

Quum enim recta ET contingat hyperbolam, & ex puncto contactus E ducta sit ad axem ordinata EG; erit, ex superius ostensis, ut CT ad CA, ita CA ad CG: proindeque rectangulum ex CT in CG æquale erit quadrato, quod fit ex CA.

Similiter, quoniam recta MS est tangens hyperbolæ, & ex puncto contactus M ducta est ad axem ordinata MO, per ea, quæ superius ostensa sunt, erit, ut CS ad CA, ita CA ad CO. Quare rectangulum ex CS in CO æquale superfluæ, & ut plurimum rejiciendæ, quo problematis solutio possit obtineri; ita quandoque nec omnes apponuntur conditiones, ad problematis solutionem necessariæ: qua ratione problema indeterminatum redditur, & infinitas solutiones diversas admittet.

Ex quo liquet, problematum tria proprie genera dari: alia scilicet determinata, quæ omnes continent conditiones, ad ipsorum solutionem necessarias; alia indeterminata, in quibus non omnes adsunt conditiones, quæ ad eorum solutionem requiruntur; & alia demum plusquam determinata, in quibus multo plures conditiones sunt appositæ, quam quæ illorum solutioni inserviunt.

III. *Quomodo problematum genera ex datorum, quæsitorumq; numero dignoscuntur.*

III. Sed notetur hic velim, quod *tria ista problematum genera ex datorum, quæsitorumque numero nullo negotio dignoscantur*. Ubi enim numerus datorum adæquat numerum quæsitorum; problema erit determinatum. Ubi vero data sunt pauciora quæsitis; problema erit indeterminatum. Ac demum, ubi quæsita sunt pauciora datis; problema erit plusquam determinatum.

Ita, si rectangulum quæratur, quod sit æquale dato quadrato, & cujus latera simul sumpta datam rectam adæquent: problema erit determinatum; quia, sicuti duo sunt problematis data, sic duo etiam sunt ejusdem quæsita: scilicet latera duo, quæ optatum rectangulum debent continere.

Sed, si ex eodem problemate auferatur una conditio, puta, quod latera rectanguli inveniendi debeant simul sumpta datam rectam

adæ-

adæquare, & dumtaxat quæratur rectangulum, quod sit æquale dato quadrato: problema erit indeterminatum; quia unum quidem est datum, quæsita vero sunt duo.

Et denique, si eidem problemati, præter duas illas conditiones, adjungatur quoque tertia, veluti, quod latera rectanguli inveniendi debeant ad invicem datam rationem habere: problema erit plusquam determinatum; quum in eo tria quidem sint data, duo vero quæsita.

IV. Quum calculo litterali, seu speciosø problematis resolutio peragitur, *innotescit natura ejus, per numerum æquationum, quæ nobis sese offerunt*. Si enim, perlustratis singulis conditionibus, in problemate appositis, tot inveniuntur æquationes, quot occurrunt quantitates incognitæ; problema erit determinatum. Sed, si numerus æquationum minor sit numero incognitarum; problema erit indeterminatum. Et denique idem problema erit plusquam determinatum, si numerus æquationum incognitarum numerum excedat.

IV. Quomodo natura problematis innotescit per numerum æquationum, quæ nobis sese offerunt.

Ut enim notum est, æquationes inveniuntur per ipsas conditiones, quæ in problemate apponuntur: adeo quidem, ut quælibet conditio suam nobis æquationem largiatur. Unde omnino necesse est, ut in problemate determinato tot æquationes inveniantur, quot fuerint incognitæ quantitates assumptæ; quandoquidem, pro determinandis singulis incognitis, tot in eo conditiones apponi debent, quotus est ipse numerus incognitarum.

Ob eandem autem rationem in problemate indeterminato numerus æquationum minor esse debet numero incognitarum ; quia in eo non omnes apponuntur conditiones, quæ ad determinationem singularum incognitarum requiruntur. Et vice versa in problemate plusquam determinato, ob conditiones superfluas, quas habet appositas, necesse est, ut numerus æquationum incognitarum numerum excedat.

V. *Qua ratione Veteres problematum genera distinguebant, & quibus ea nominibus appellabant.*

V. Quemadmodum autem problema *proprie* vocatur illud, quod determinatum est, certisque tantum modis solvi potest ; ita inter problema indeterminatum, & problema plusquam determinatum *illud discriminis inest*, quod primum, ob deficientes conditiones, sit capax infinitarum solutionum ; alterum, ob conditiones superfluas, sæpe sæpius pugnantes cum necessariis, nullam ut plurimum solutionem admittat.

Has omnes problematum differentias satis explicat Proclus libro tertio suorum commentariorum in primum librum Elementorum Euclidis. Et, eodem referente, vocabant Veteres problema *deficiens*, quod indeterminatum est, nec omnes continet conditiones, ad solutionem ejus necessarias. Vocabant vero problema *excedens*, seu *redundans*, quod est plusquam determinatum, & multo plures continet conditiones, quam quæ ad solutionem ejus requiruntur.

Sed *excedentium* problematum, ut idem Proclus est auctor, duas adhuc species Veteres distinguebant. Quæ enim problemata incon-

con-

congruentibus, pugnantibusque conditionibus redundant; *impossibilia* appellabant, quia omnino solvi non possunt. Quæ vero abundant conditionibus, sibi mutuo conspirantibus; dicebant problemata *majora*, ut ab indeterminatis distinguerentur, quæ *minora* vicissim appellabant.

VI. Etsi autem istæ omnes sint problematum differentiæ, attamen Geometræ *problematis nomine illud proprie vocant, quod determinatum est, certumque solutionum numerum admittit*. Nec alia ratione ea, quæ sunt indeterminata, sub ipsorum contemplationem veniunt, quam ut eorum ope determinatis satisfiat, quæ præcipuum Geometriæ objectum constituunt.

VI. Quod problemata indeterminata solutioni problematum determinatorum inserviant.

Quum enim problemata indeterminata infinitas solutiones admittant; utique inter eas necesse est, ut reperiantur solutiones peculiares problematum determinatorum, quæ ejusdem speciei sunt. Unde, nactis semel infinitis illorum solutionibus, non aliud fieri debet, quum de istis est quæstio, quam eas excerpere, quæ ipsis correspondent, suasque conditiones adimplent.

Ita, quotiescumque, exempli gratia, super recta data constituta sunt omnia triangula isoscelia; omnino necesse est, ut inter ea reperiatur triangulum illud isosceles, quod habet quoque datam altitudinem. Unde, quum quæstio est de constituendo triangulo isoscele, cujus data sit, tam basis, quam altitudo; satis erit, ad infinita illa triangula isoscelia confugere, & inter ea illud eligere, cui data competit altitudo.

VII. *Quorsum tendit compositio locorum geometricorum, ostenditur.*

VII. Quum mens nostra finita sit, ac limitata; utique infinitas solutiones, quarum capax est problema aliquod indeterminatum, sigillatim percurrere nequit. Hinc *speciali quodam artificio* opus est, ut eæ omnes in unum colligi possint, atque ita collectæ continuo præsentes haberi. Præstant id igitur Geometræ *compositione locorum geometricorum*; nam ea mediante infinitas illas solutiones certis limitibus claudunt.

Id ut clarius intelligatur, juvat prius advertere, nullum esse problema geometricum, quod ad puncti alicujus positionem determinandam revocari non possit. Unde, quotiescumque problema est natura sua indeterminatum, tunc infinita hujusmodi puncta debent definiri: & propterea habebuntur infinitæ ejus solutiones, determinando locum, in quo infinita illa puncta reperiuntur.

Hac ratione, si super data recta linea constituendum sit triangulum isosceles; res eo redit, ut vertex ejus trianguli reperiatur. Quemadmodum autem infinita esse queunt illiusmodi triangula, ita infinitus quoque erit numerus punctorum, quæ quæsitum verticem nobis exhibebunt. Sed perspicuum est, omnia illa puncta reperiri in linea recta, quæ secat bifariam, & ad angulos rectos rectam lineam datam.

VIII. *Quid sit locus geometricus, & quot locorum genera distingui possint*

VIII. Id quum ita sit, liquet, *locum geometricum non aliud esse, quam sedem omnium illorum punctorum, quæ alicui problemati indeterminato satisfaciunt*. Et quoniam hujusmodi sedes potest esse, vel linea, vel superficies

cies, vel solidum; tria hinc locorum genera Veteres distinguebant, & eorum alia *ad lineam*, alia *ad superficiem*, & alia demum *ad solidum* appellabant.

Ut tres istæ locorum species rectius intelligantur, meminisse oportet, problema esse indeterminatum, quum non omnes apponuntur conditiones, ad problematis solutionem necessariæ. Hinc itaque fit, ut non omnia loca geometrica ejusdem speciei sint. Nam, deficiente una tantum conditione, locus erit ad lineam; deficientibus duabus conditionibus, locus erit ad superficiem; & denique, ubi tres in problemate desunt conditiones, locus erit ad solidum.

Possunt etiam tres istæ locorum species a se mutuo distingui per æquationem, quæ omnes ipsius problematis indeterminati conditiones includit. Ubi enim hujusmodi æquatio duas continet incognitas, locus erit ad lineam; quia ad determinationem problematis una tantum conditio deest. Quotiescumque vero in eadem æquatione tres occurrunt incognitæ, locus erit ad superficiem; quia pro determinando problemate duæ requiruntur conditiones. Et denique, quum æquatio quatuor incognitas complectitur, locus erit ad solidum; quia tribus conditionibus opus est, ut problema determinatum evadat.

IX. Et sane, quod *æquatio, duabus incognitis constans, loco ad lineam debeat explicari*, ostendi potest generaliter in hunc modum. Sint x, & y binæ æquationis incognitæ. Jam utraque harum incognitarum infinitos valo-

IX. *De loco ad lineam, & quomodo hujusmodi locus oriatur.*

res admittit. Sed una ex iis determinata, necesse est, ut altera quoque suam determinationem acquirat.

Fig. 64. Referant itaque portiones AN rectæ alicujus AB valores omnes incognitæ x. Et cuique earum correspondebit incognita altera y determinato valore. Ducantur ergo per singula puncta N parallelæ totidem NM, quæ referant valores correspondentes incognitæ y. Et linea, transiens per extremitates ipsarum NM, locus erit quæsitus.

Notetur autem hoc loco velim, quod quum simpliciter de explicanda æquatione agitur; angulus ANM potest ad libitum assumi. Sed, si una cum æquatione satisfaciendum sit quoque problemati, unde ea fluxit æquatio; tunc angulus ille talis oportet magnitudinis capiatur, qualem ipsum exigit problema.

Nec silentio hic præteribimus, quod in priore casu licebit quandoque angulum illum ANM talem assumere, ut rectæ NM, vel sint in directum cum ipsis AN, vel cadant ad partem oppositam: nimirum, quum dando eis positionem istam, ad unum idemque punctum omnes terminantur. Sed non ideo locus dicendus erit *ad punctum*, ut qui per extremitates alias N proprie constituetur.

X. *De loco ad superficiem, & qua ratione locus iste producatur.*

X. Similiter, quod *æquatio, tribus incognitis constans, loco ad superficiem debeat explicari*, ostendetur generaliter hac ratione. Sint x, y, z tres æquationis incognitæ. Referant adhuc portiones AN rectæ alicujus AB valores omnes incognitæ x. Et cuique earum,

Fig. 65.

tam

tam y, quam z infinitis adhuc valoribus correſpondebit.

Ductis igitur per ſingula puncta N parallelis NX, capiantur ſuper iis portiones NM, quæ referant infinitos valores, quibus incognita y ipſis AN correſpondet. Et quoniam cuique iſtarum NM correſpondet z determinato valore; erigantur ex punctis M parallelæ MO, quæ referant valores illos, & datum cum ſubjecto plano angulum conſtituant. Et ſuperficies, ad quam terminantur omnia puncta O, locus erit quæſitus.

Sed hic quoque notare oportet, quod quum ſimpliciter quæſtio eſt de explicanda æquatione; tunc ad libitum poteſt aſſumi, tam angulus ANM, quam angulus, quem rectæ MO cum ſubjecto plano conſtituunt. Verum, ſi una cum æquatione ſatisfaciendum ſit quoque problemati, unde ea fluxit æquatio; tunc uterque angulus talis oportet magnitudinis capiatur, qualem ipſum problema requirit.

Nec item hoc loco reticebimus, quod in priore caſu licebit quandoque angulum, quem rectæ MO cum ſubjecto plano conſtituunt, indefinite parvum aſſumere, & in eodem illo plano ducere rectas MO: nimirum, quum dando eis poſitionem iſtam, ad unam, eandemque lineam omnes, quotquot fuerint, terminantur. Sed non ideo locus dicendus erit *ad lineam*, ut qui per extremitates alias M proprie conſtituetur.

XI. Non diſſimili ratione oſtendemus quoque, quod *æquatio, quatuor conſtans incogni-* XI. *De loco ad ſolidum, &*

qualis sit ortus ipsius. gnitis, *debeat loco ad solidum explicari*. Sint
FIG. 66. enim *x*, *y*, *z*, *u* quatuor æquationis incognitæ. Referant portiones AN rectæ alicujus AB valores omnes incognitæ *x*. Tum, ductis parallelis NX, designent portiones NM harum parallelarum infinitos valores, quibus incognita *y* ipsis AN correspondet. Et cuique istarum NM tam *z*, quam *u* infinitis adhuc valoribus correspondebit.

Erigantur ergo ex punctis M parallelæ MZ, quæ datum cum subjecto plano angulum constituant. Et capiantur super iis portiones MO, quæ referant infinitos valores, quibus incognita *z* ipsis AN correspondet. Quumque demum cuique istarum MO correspondeat *u* determinato valore; ducantur ex punctis O parallelæ aliæ OR, quæ referant valores illos, datumque angulum constituant cum ipsis MO. Et solidum, inde ortum, illud erit, quod quæritur.

Sed notetur hic velim, hujusmodi solidum tunc tantum usui nobis esse, quum rectæ OR ad unam eandemque superficiem omnes terminantur. Et ratio est, quia in solo isto casu, ope ejus solidi, propositæ æquationi satisfieri potest. Nec tamen idcirco locus dicendus erit *ad superficiem*, ut qui non jam per puncta R, sed per extremitates alias O proprie constituetur.

XII. *Constitutio cujusvis loci geometrici paulo elatius ostenditur.*

XII. Hinc, ut plenius natura loci geometrici intelligatur, sciendum est ulterius, quod, sicuti fit locus loco geometrico, quum æquatio, ex problemate orta, duas, aut plures continet incognitas; sic *ipsius loci constitutio*

tio talis esse debeat, ut per quodlibet ejus punctum omnes simul æquationis incognitæ determinentur.

Nec obscura est hujus rei ratio. Debet siquidem unoquoque loci puncto fieri satis æquationi, ex problemate ortæ. Plane vero, quum æquatio pluribus constat incognitis, non aliter ei fiet satis, quam determinando simul singulas incognitas, quæ in illa continentur. Quare omnino necesse est, ut per quodlibet loci punctum omnes æquationis incognitæ simul definiantur.

Id quum ita sit, facile modo erit intelligere, cur in loco ad solidum rectæ OR debeant ad unam, eandemque superficiem omnes terminari, quo possit nobis usui esse: nimirum, quia dumtaxat in hoc casu quodlibet loci punctum potis est, definire simul omnes æquationis incognitas. Et quoniam hunc effectum præstant puncta O; hinc etiam est, ut per hujusmodi puncta proprie locus constituatur. FIG. 66.

Ob eandem autem rationem, quum in loco ad superficiem rectæ MO ad unam, eandemque lineam omnes terminantur, constituetur locus per puncta M; quia ista puncta sumi debent, ut omnes æquationis incognitæ simul determinentur. Atque ita quoque, quum in loco ad lineam rectæ NM ad unum, idemque punctum omnes terminantur, constituent locum puncta N; quia his mediantibus utraque æquationis incognita simul definitur. FIG. 65. FIG. 64.

XIII. Jam, ut *demonstrationes illæ generales casibus specialibus possint applicari*, non aliud requiritur, quam, ut in solutione cujus- *XIII. Quomodo tradita genesis locorum casibus*

que

specialibus debeat applicari. que problematis indeterminati pro incognitis capiantur rectæ illæ, quæ extremitatibus suis sibi mutuo occurrunt, & occursu illo datum angulum constituunt. Nam in tradita locorum genesi non aliæ, quam istæ conditiones, exiguntur.

FIG. 67. 68. In plano aliquo detur, tum positione, cum magnitudine recta AB. Et extra eam oporteat invenire punctum aliquod, ita ut rectæ, quæ exinde inclinantur ad terminos ipsius AB, rectum angulum comprehendant. In hoc problemate duo casus sunt distinguendi. Vel enim inveniendum est punctum in eodem illo plano, in quo data est recta AB; vel extra planum illud tale punctum oportet invenire.

FIG. 67. In priore casu sit M punctum quæsitum, ex quo demittatur super AB perpendicularis MN. Tum capiantur pro incognitis ipsæ AN, MN, quæ extremitatibus suis sibi mutuo occurrunt, & occursu illo rectum angulum constituunt. Quem in finem, posita AB $= a$, fiat AN $= x$, & MN $= y$. Quumque, ob angulum rectum AMB, quadratum ex MN sit æquale rectangulo ANB, erit $yy = ax - xx$ propositi problematis æquatio.

FIG. 68. In secundo casu sit O punctum, quod quæritur, ex quo demissa ad planum subjectum perpendicularis OM, ducatur ex puncto M super AB perpendicularis alia MN. Et posita adhuc AB $= a$, fiat AN $= x$, MN $= y$, & MO $= z$. Jungatur postea ON. Et quoniam eidem ON quadrato æquale est, tam rectangulum ANB, quam summa quadratorum MN, MO; erunt quadrata duo MN, MO

æqua-

æqualia rectangulo ANB: & propterea problematis æquatio erit $yy + zz = ax - xx$.

In utroque autem casu, perspicuum est, problema esse indeterminatum, & locum fieri loco geometrico. Sed ex tradita locorum genesi liquet etiam, locum esse ad lineam, quum æquatio problematis est $yy = ax - xx$; esse vero ad superficiem, quum eadem æquatio est $yy + zz = ax - xx$. Nam illa quidem duas continet incognitas, in ista vero tres incognitæ comprehenduntur.

XIV. *Quo pacto locorum geometricorum compositio proprie peragi debeat.*

XIV. Cæterum, *haud quidem putandum est, loca gemetrica expositis rationibus componi debere; sed fiet eorum compositio, definiendo limites, quibus loca ipsa terminantur.* Ita in allato problemate, quum æquatio est $yy = ax - xx$, verum quidem est, quod capiendo super AB valores omnes incognitæ x, & applicando eis ad angulos rectos valores correspondentes alterius incognitæ y, oriatur locus ad lineam; nihilo tamen minus ejus compositio fiet, describendo lineam, ad quam ipse locus nos manuducit. FIG. 67.

Simili ratione, quum ejusdem problematis æquatio est $yy + zz = ax - xx$, etsi oriatur locus ad superficiem, capiendo super AB valores omnes incognitæ x, applicando eis ad rectos angulos valores correspondentes incognitæ y, tumque demum erigendo normaliter ad subjectum planum valores tertiæ incognitæ z; attamen loci compositio fiet proprie, describendo superficiem, per quam locus ipse terminatur. FIG. 68.

Hinc locorum compositio duo quidem præ-

præsupponit. Primum est cognitio proprietatum, quæ lineis, superficiebus, & solidis competunt. Alterum est ratio describendi lineas, superficies, & solida. Horum utrumque ad illam pertinet Geometriæ partem, quæ *Elementaris* appellatur. Et ea, quæ *de compositione locorum* edisserit, nonnisi post partem illam elementarem est addiscenda: quæ tamen eo tendit, ut ope ejus partem Geometriæ nobiliorem, quæ *de solutione problematum* agit, tandem assequi liceat.

Tres istas Geometriæ partes, tum item alterius ad alteram subordinationem satis indicat Pappus initio libri septimi suarum collectionum. Ibi enim scribens ad Filium Hermodorum: *locus*, inquit, *qui vocatur resolutus, ut summatim dicam, propria quædam est materia, post communium Elementorum constitutionem, iis parata, qui in geometricis sibi comparare volunt vim, ac facultatem inveniendi problemata, quæ ipsis proponuntur; atque hujus tantummodo utilitatis gratia inventa est.*

XV. *Qua ratione per calculum proprietates linearum, superficierum, aut solidorum innotescunt.*

XV. Nolo autem hoc loco reticere, quod *calculi litteralis ope facile sit quidem inquirere, num alicui lineæ, superficiei, aut solido data quædam proprietas competat*. Si enim, adhibita ea proprietate, talis inveniatur æquatio, ut ab utraque parte eadem quantitas occurrat; indicio erit, illiusmodi proprietatem revera ei competere. Quod si autem secus contigerit; nec item illa proprietas ad eam lineam, superficiem, aut solidum poterit pertinere.

FIG. 67. Sit AB circuli alicujus diameter, cujus cen-

centrum ſit punctum C. Et quæratur, num demiſſa ſuper AB ex aliquo circumferentiæ puncto M perpendiculari MN, ſit MN quadratum æquale rectangulo ANB. Ponatur CA $= a$, CN $= x$, & MN $= y$. Quumque hac ratione fiat AN $= a - x$, & BN $= a + x$; erit rectangulum ANB $= aa - xx$. Quare poſito, quod MN quadratum ſit æquale rectangulo ANB, erit $yy = aa - xx$.

Jam, propter circulum, duæ CA, CM inter ſe ſunt æquales. Quare, ſicuti CM quadratum eſt æquale duobus quadratis CN, NM; ita iiſdem quadratis æquale quoque erit quadratum ex CA. Hinc erit $aa = xx + yy$. Et, poſito loco yy valore ejus $aa - xx$, erit quoque $aa = xx + aa - xx$, hoc eſt $aa = aa$. Unde, quum ab utraque æquationis parte eadem quantitas reperiatur; conſequens eſt, ut MN quadratum ſit revera æquale rectangulo ANB.

Hinc notetur hoc loco velim, quod ſi circa aliquam lineam, ſuperficiem, aut ſolidum proponatur problema aliquod, & in ejus reſolutione talis inveniatur æquatio, ut ab utraque parte eadem quantitas occurrat; tunc illud non erit problema, ſed theorema. Nam, ob illiuſmodi æquationem, id quod quæritur in problemate, verum erit relate ad quodlibet punctum ejus lineæ, ſuperficiei, aut ſolidi; adeoque velut proprietas ipſius univerſalis debet haberi.

CAP.

CAP. II.

De divisione locorum ad lineam, & quomodo ea construi possint.

I. *Quod loca ad lineam, pro qualitate linearum, in varias classes distingui possint.*

I. QUamquam locorum geometricorum tria genera distinguantur, & eorum alia vocentur ad lineam, alia ad superficiem, & alia demum ad solidum; in constructione tamen problematum determinatorum non alia loca a Geometris adhibentur, quam quæ prioris sunt generis, & loca ad lineam dicuntur. Unde etiam, quum *simpliciter*, *& absolute* loca vocant geometrica, non alia veniunt apud ipsos, quam quæ linearum longitudinibus terminantur.

Hujusmodi autem loca *non omnia ejusdem speciei sunt, sed pro qualitate linearum, quas pro suis terminis habent, in varias classes distingui possunt*. Dantur enim loca nonnulla, quæ lineis rectis terminantur. Sed dantur etiam loca alia, quæ lineas curvas, velut suos terminos, agnoscunt. Quumque lineæ curvæ possint esse infinitarum specierum; infinita etiam erit diversitas locorum, quæ lineis curvis circumscribuntur.

Hinc, ut rectius intelligatur, qua ratione loca geometrica, lineis terminata, in certas classes distingui possint; operæ pretium est

prius

prius ostendere, quo pacto recentiores Geometræ naturam cujuscumque lineæ definiunt, & quomodo omnem illarum molem in varia genera dispescunt. Nam profecto ex variis generibus linearum, quibus loca terminantur, fit, ut ipsa quoque loca in varios ordines distingui queant.

II. Itaque recentiores Geometræ non alia ratione *naturam cujusque lineæ definiunt*, quam referendo ejus puncta omnia ad puncta alia rectæ alicujus positione datæ, & inveniendo æquationem, quæ relationem illam nobis ostendat. Ut, si AM sit linea, de qua agitur, ex singulis ejus punctis ducunt ad rectam aliquam positione datam AB parallelas totidem MN, & definiunt naturam illius per relationem, quam habet quælibet earum parallelarum MN ad portionem correspondentem AN.

II. *Quomodo natura cujusque lineæ à recentioribus Geometris definitur.*

Fig. 69.

Supponatur namque, si placet, linea illa descripta per intersectionem duarum regularum AX, BZ, quæ ita quidem revolvantur circa puncta A, & B, ut erecta super AB perpendiculari AC, sit angulus ABZ perpetuo æqualis angulo CAX. Et fingamus quoque, rectas MN, quæ *ordinatæ* dicuntur, parallelas esse ipsi AC; adeoque perpendiculares super portionibus AN, quæ vocantur *abscissæ*.

Quia igitur angulus ABZ æqualis est angulo CAX: apposito communi BAX, erunt duo anguli ABZ, BAX æquales toti angulo BAC. Sed angulus BAC est rectus, ex hypothesi. Quare etiam uni recto æquales erunt duo anguli ABZ, BAX: & propterea tertius angulus AMB etiam rectus erit. Unde, quum ex angulo recto M demissa sit ad hypothenusam AB perpendicularis MN; erit MN quadratum æquale rectangulo ANB.

Hinc, quemadmodum abunde liquet, lineam AM esse circuli circumferentiam, diametrum habentem rectam AB; ita facile quoque erit, æquationem invenire, quæ exprimat nobis relationem inter unamquamque ordinatam MN, & abscissam correspondentem AN. Ponatur enim AB $= a$, AN $= x$, & MN $= y$. Erit igitur reliqua portio BN $= a - x$. Et quoniam MN quadratum est æquale rectangulo ANB; erit $yy = ax - xx$ æquatio quæsita.

III. *Quod æquatio, exprimens lineæ naturam, non semper possit inveniri.* Fig. 70.

III. Sed nolo hic silentio reticere, quod hujusmodi *æquatio, exprimens relationem inter ordinatas, & abscissas correspondentes, non semper possit inveniri*. Sit enim quadratum ABCD. Et interea aclatus ejus AD fertur æquabiliter, & sibi ipsi æquidistanter versus BC, revolvatur motu etiam æquabili circa punctum B latus AB; adeo, ut in fine motus utrumque latus AD, AB reperiatur eodem tempore super BC.

Quum sic duo illa latera feruntur, perspicuum est, continua eorum intersectione, describi lineam curvam AME. Sed, demissis ex singulis ejus punctis rectis MN, perpendicularibus super AB, frustra quæretur æquatio, exprimens relationem inter unamquamque ipsarum MN, & portionem correspondentem AN; quum nulla adsit in descripta curva proprietas, quæ ad inveniendam æquationem illam nos manuducere possit.

De

Descriptæ siquidem curvæ natura, ut ex ipsa ejus genesi liquet, hæc est, quod producta BM usque donec quadrantem AC secet in O, sit semper, ut AN ad BN, ita AO ad CO. Quare, positis $AB = a$, $AN = x$, & $MN = y$, determinanda esset ope istarum quantitatum ratio arcuum AO, CO, ut optata æquatio posset haberi. Unde, quum ratio ista nequeat ullo pacto definiri, nec item optatam æquationem invenire licebit.

IV. Id quum ita sit, *duo passim linearum genera distinguuntur, & ex iis aliæ dicuntur geometricæ, aliæ vero mechanicæ*. Prioris generis lineæ sunt illæ, in quibus relatio ordinatarum ad abscissas correspondentes æquatione aliqua potest definiri. Per contrarium vero lineæ alterius generis sunt eæ, in quibus eadem illa relatio nulla potest æquatione designari.

IV. Distinctio linearum in geometricas, & mechanicas explicatur.

Hanc linearum distinctionem in geometricas, & mechanicas primus omnium protulit Cartesius. Nec alias in Geometriam admittendas esse censuit, quam quæ geometricarum nomen apud ipsum sortitæ sunt; quia eæ tantum sub certam, determinatamque cadunt mensuram. Unde reliquas vocavit mechanicas; quia ad mechanicam potius eas pertinere judicavit.

Et sane, quin lineæ, mechanicæ dictæ, valde differant ab iis, quæ passim geometricæ nuncupantur, non est dubitandum. Sed non ideo illiusmodi curvæ a Geometria sunt excludendæ, quemadmodum voluit Cartesius; quandoquidem, si mente concipiantur descriptæ, ha-

habent perinde, ac lineæ ipsæ geometricæ, constantes quasdam proprietates, quæ ad omnia linearum puncta se extendent.

Huc adde, quod beneficio ejus analysis, quæ dicitur *indefinite parvorum*, etiam in lineis mechanicis reperire licet æquationem, quæ exprimat relationem ordinatarum ad abscissas correspondentes. Nec aliud sane discriminis occurrit, quam quod in iis hujusmodi æquatio ad infinitas semper dimensiones ascendat: quo factum, ut a nonnullis lineæ *transcendentes* dicerentur.

V. *Linearum in certa genera distributio Cartesiana affertur, & rejicitur.*

V. Quemadmodum autem naturam cujusque lineæ definiunt recentiores Geometræ per æquationem, exprimentem relationem ordinatarum ad abscissas correspondentes; sic *omnem linearum molem in certa genera distinguunt, secundum numerum dimensionum, ad quas earum æquationes ascendunt.*

Et Cartesius quidem genera linearum, non unica, sed duabus dimensionibus a se mutuo distinxit. Vocavit enim lineas primi generis, quarum æquationes quadratum, aut rectangulum duarum incognitarum non excedunt; vocavit lineas secundi generis, quarum natura æquationibus, ad tres, vel quatuor dimensiones ascendentibus, definitur; vocavit lineas tertii generis, quarum æquationes ad quinque, vel sex dimensiones assurgunt; atque ita deinceps.

Ut genera linearum hunc in modum a se mutuo distingueret, non aliud eum movit, quam quia, sicuti æquationes quatuor dimensionum, per regulam a Bombellio traditam, fa-

cili

cili negotio deprimuntur ad alias, quæ tres tantum continent dimensiones; sic etiam regula possit inveniri, per quam æquationes sex dimensionum ad alias quinque, æquationes octo dimensionum ad alias septem, atque ita porro, deprimi queant.

Interim regula ista non adhuc Algebræ cultoribus innotuit. Et deinde, si eam reperire liceret, ut jam olim acutissime Fermatius adnotavit, nec etiam usui nobis esse posset ad deprimendas æquationes, quæ duas incognitas comprehendunt; cujusmodi sunt illæ, per quas linearum natura definitur. Quare consequens est, ut nullo quidem solido fundamento Cartesius genera linearum duabus dimensionibus a se mutuo distinxerit.

VI. Rectius igitur alii *distinguunt linearum ordines a se invicem unica tantum dimensione*. Quem in finem vocant lineas primi ordinis, quæ æquationibus simplicibus, ac unius dimensionis definiuntur; vocant lineas secundi ordinis, quarum æquationes ad duas dimensiones ascendunt; vocant lineas tertii ordinis, quarum æquationes ad tres dimensiones assurgunt; atque ita deinceps.

VI. *Qua ratione linearum ordines distingui debeant, aperitur.*

Patet autem hac ratione, dicendas esse lineas ordinis infinitesimi, quæ æquationibus, ad infinitas dimensiones ascendentibus, definiuntur. Et quoniam hujusmodi sunt lineæ illæ, quas Cartesius mechanicas appellavit; liquet, ordinem harum linearum omnes alios sub se comprehendere; nec ideo a Geometria exulem esse debere, quemadmodum Cartesius judicavit.

Jam in lineis ordinis primi nulla curva, sed sola recta continetur. Unde, si curvarum genera sint distinguenda, erunt curvæ primi generis, quarum æquationes quadratum, vel rectangulum duarum incognitarum non excedunt; erunt curvæ secundi generis, quæ æquationibus definiuntur trium dimensionum; erunt curvæ tertii generis, quarum æquationes ad quatuor dimensiones ascendunt; atque ita deinceps.

Eadem linearum distinctio repeti quoque potest a numero punctorum, in quibus a recta secari possunt. Nam generaliter æquatio cujusque lineæ ad tot dimensiones ascendit, quot sunt puncta, in quibus recta eam secare potest. Et ideo erit linea ordinis primi, quam recta secat in unico puncto; linea ordinis secundi, cui recta occurrit in duobus punctis; linea ordinis tertii, quæ in tribus punctis a recta secari potest; atque ita de aliis.

VII. *Quomodo loca geometrica, lineis terminata, in certa genera sunt distinguenda.*

VII. Linearum ordinibus constitutis, *facile modo erit, & ipsa loca geometrica, quæ lineis terminantur, in certa genera dispescere.* Erunt enim loca primi generis, quæ lineas primi ordinis pro suis terminis habent; erunt loca secundi generis, quæ terminantur lineis ordinis secundi; erunt loca tertii generis, quæ agnoscunt ut suos terminos lineas ordinis tertii; atque ita deinceps.

Quoniam autem ad primum ordinem linearum nulla curva, sed sola recta revocatur; perspicuum est, loca primi generis, non aliis lineis, quam rectis terminari. Quumque secundum ordinem linearum constituant coni sectiones, & præter eas nulla alia curva ad eum ordinem referatur; perspicuum est quoque, loca secundi generis, non aliis lineis, quam coni sectionibus, circumscribi.

Inter sectiones vero coni ponendus est etiam circulus; ut qui, ex superius ostensis, velut species quædam ellipsis debet haberi. Unde locorum secundi generis alia erunt ad parabolam, alia ad ellipsim, alia ad circulum, & alia demum ad hyperbolam. Quumque hyperbola considerari possit, vel relate ad aliquam ejus diametrum, vel in ordine ad suas asymptotos; duæ hinc locorum ad hyperbolam species communiter a Geometris distinguuntur.

VIII. Et quidem, *quod recta sola constituat primum ordinem linearum, solisque adeo rectis loca primi generis terminentur*, facile erit ostendere. Æquatio enim, quæ duas incognitas continens, ad unam tantum dimensionem ascendit, potest esse quadruplicis formæ, vel scilicet $x = ay : c$, vel $x + b = ay : c$, vel $x - b = ay : c$, vel $b - x = ay : c$. Unde eo res redit, ut ostendamus, unamquamque harum æquationum posse per rectam solam explicari.

VIII. *Ostenditur, quod loca primi generis solis rectis terminentur. Primus casus.*

Sit itaque primo $x = ay : c$. Ducatur recta quævis AB, per cujus portiones AN designentur valores incognitæ x. Capiatur in AB portio AD $= a$. Et constituto ad punctum D angulo quovis ADE, fiat DE $= c$. Jungantur deinde puncta A, & E per rectam AEX. Et actis rectis NM, ipsi DE parallelis, terminatisque ad rectam AEX; dabunt istæ FIG. 71.

valores correspondentes alterius incognitæ y.

Ponatur enim unaquæque portio AN $= x$, & quælibet rectarum NM $= y$. Jamque, ob triangula æquiangula ADE, ANM, erit, ut AD ad DE, ita AN ad NM. Quare, substituendo symbola harum rectarum, erit, ut a ad c, ita x ad y: & propterea, quum sit $x = ay : c$; erit recta AEX linea, ad quam refertur æquatio $x = ay : c$.

Sed notetur hic velim, quod si recta AEX extendatur ad partem oppositam versus Z, etiam per ipsam AZ explicari possit æquatio $x = ay : c$. Nam, etsi in isto casu sit AN $= - x$, & NM $= - y$; adeoque reperiatur æquatio $- x = - ay : c$: translatis tamen terminis ad partes contrarias, rursus habebitur ut antea $x = ay : c$.

IX. Secundus casus. Fig. 72. IX. Sit secundo $x + b = ay : c$. Designentur quoque per portiones AN rectæ alicujus AB valores incognitæ x. Et, sumpta ad plagam oppositam portione AC $= b$, abscindatur ex tota CB portio alia CD $= a$. Constituatur deinde ad punctum D angulus quivis CDE, & fiat DE $= c$. Jungantur postea puncta C, & E per rectam CEX. Et actis rectis NM, ipsi DE parallelis, terminatisque ad rectam CEX, dabunt istæ valores correspondentes alterius incognitæ y.

Ponatur enim unaquæque portio AN $= x$, & quælibet rectarum NM $= y$. Erit igitur quævis ipsarum CN $= x + b$. Quumque triangula CDE, CNM sint æquiangula; erit, ut CD ad DE, ita CN ad NM. Quare, subrogatis symbolis harum rectarum, erit, ut

a ad

a ad c, ita $x + b$ ad y; adeoque, quum sit $x + b = ay : c$; erit recta CEX linea, ad quam refertur æquatio $x + b = ay : c$.

Sed hic quoque notatu dignum existimo, quod ducta per punctum A recta AF, ipsi DE parallela, explicari possit æquatio $x + b = ay : c$ non solum per rectæ CEX portionem FX, verum etiam per portionem alteram CF. Etsi enim in isto casu sit AN $= -x$; manet tamen, tam NM $= y$, quam CN $= x + b$. Quare, ob triangula æquiangula CDE, CNM, semper erit $x + b = ay : c$.

Quin imo; si recta CEX extendatur ad partem oppositam versus Z, etiam per ipsam CZ explicari poterit æquatio $x + b = ay : c$. Nam relate ad puncta ipsius CZ fiet AN $= -x$, NM $= -y$, & CN $= -x - b$. Unde æquatio erit $-x - b = -ay : c$: quæ tamen, translatis terminis ad partes oppositas, evadet rursus ut antea $x + b = ay : c$.

X. Sit tertio $x - b = ay : c$. Referant adhuc portiones AN rectæ AB valores omnes incognitæ x. Capiatur super ea, tam portio AC $= b$, quam portio CD $= a$. Tum, constituto ad punctum D angulo quovis GDE, fiat DE $= c$. Jungantur postea puncta C, & E per rectam CEX. Et ductis rectis NM, ipsi DE parallelis, terminatisque ad rectam CEX, dabunt istæ valores correspondentes alterius incognitæ y. X. *Tertius casus.* FIG. 73.

Ponatur enim quævis portio AN $= x$; & quælibet rectarum NM $= y$. Erit igitur unaquæque ipsarum CN $= x - b$. Et quoniam triangula CDE, CNM sunt æquiangula la; erit, ut CD ad DE, ita CN ad NM. Quare, substitutis symbolis harum rectarum, erit, ut a ad c, ita $x - b$ ad y: proindeque, quum sit $x - b = ay : c$, erit recta CEX linea, ad quam refertur æquatio $x - b = ay : c$.

Nec silentio hoc loco præteribimus, quod, si per punctum A ducatur recta AF, ipsi DE parallela, quæ conveniat cum recta CEX, producta ad partem oppositam, in puncto F; æquatio $x - b = ay : c$ explicari possit etiam per portionem CF. Etsi enim in isto casu sit NM $= - y$, quia tamen manet AN $= x$, fiet CN $= b - x$. Unde æquatio erit $b - x = - ay : c$: quæ, translatis terminis ad partes contrarias, evadet $x - b = ay : c$.

Quin imo, si ipsa CF extendatur ulterius versus Z, eadem æquatio $x - b = ay : c$ explicari quoque poterit per portionem aliam indefinitam FZ. Nam relate ad puncta ipsius FZ, fiet AN $= - x$, NM $= - y$, & CN $= - x + b$. Unde æquatio erit $- x + b = - ay : c$: quæ, per translationem terminorum ad partes oppositas, evadet rursus ut antea $x - b = ay : c$.

XI. *Quartus casus.* FIG. 74.

XI. Sit demum $b - x = ay : c$. Designentur pariter valores incognitæ x per portiones AN rectæ alicujus AB. Et, sumpta super AB portione AC $= b$, capiatur ad partem oppositam portio alia CD $= a$. Constituatur deinde ad punctum D angulus quivis CDE, & fiat DE $= c$. Jungantur postea puncta C, & E per rectam CEX. Et ductis rectis NM, ipsi DE parallelis, terminatisque ad rectam CEX; dabunt istæ valores corre-

spon-

spondentes alterius incognitæ y.

Ponatur enim quælibet portio AN $= x$, & quælibet rectarum NM $= y$. Erit igitur unaquæque ipsarum CN $= b - x$. Et quoniam triangula CDE, CNM sunt æquiangula; erit, ut CD ad DE, ita CN ad NM. Quare, substituendo symbola harum rectarum, erit, ut a ad c, ita $b - x$ ad y: & propterea, quum sit $b - x = ay : c$, erit recta CEX linea, ad quam refertur æquatio $b - x = ay:c$.

Hic etiam notare oportet, quod, ducta per punctum A recta AF, ipsi DE parallela, explicari possit æquatio $b - x = ay : c$, non solum per rectæ CEX portionem finitam CF, verum etiam per portionem aliam indefinitam FX. Etsi enim in isto casu sit AN $= - x$, manet tamen, tam NM $= y$, quam CN $= b - x$; adeoque, ob triangula æquiangula CDE, CNM, semper erit $b - x = ay : c$.

Quin imo, si recta CEX extendatur ad partem oppositam versus Z, etiam per ipsam CZ explicari poterit æquatio $b - x = ay : c$. Nam relate ad puncta ipsius CZ, etsi fiat NM $= - y$, quia tamen manet AN $= x$, erit CN $= x - b$. Unde æquatio erit $x - b = - ay : c$: quæ, per transpositionem terminorum ad partes oppositas, evadet rursus ut antea $b - x = ay : c$.

XII. Atque hinc, aliud agentes, *jam methodum aperuimus, construendi loca omnia, quæ sunt ad lineam rectam*. Æquatio enim localis, quæ construi debet, omnino necesse est, ut formam habeat alicujus ex quatuor præcedentibus æquationibus. Quare, ea comperta, satis

XII. *Quomodo loca primi generis per reductionem ad singulos casus construuntur.*

satis erit, illas inter se mutuo conferre, & mutua ista comparatione determinare valores quantitatum, quibus locus definitur.

Ut, si in resolutione alicujus problematis indeterminati inventa fuerit æquatio $gx + ff = fy$; divisis terminis omnibus per g, fiet ea $x + ff : g = fy : g$; adeoque erit ejusdem formæ cum secunda æquatione $x + b = ay : c$. Hinc, comparatis inter se mutuo terminis ipsarum, habebitur $b = ff : g$, & $a : c = f : g$: adeo nempe, ut assumpta $a = f$, fiet $c = g$. Unde construetur locus quæsitus, capiendo $AG = ff : g$, $CD = f$, & $DE = g$.

FIG. 72.

Similiter, si æquatio, orta ex resolutione alicujus problematis indeterminati, fuerit $ffx - ggm = ggy$; dividendo terminos omnes per ff, evadet ea $x - ggm : ff = ggy : ff$; adeoque erit ejusdem formæ cum tertia æquatione $x - b = ay : c$. Unde, comparando terminos unius cum terminis alterius, habebitur $b = ggm : ff$, & $a : c = gg : ff$: adeo nempe, ut assumpta $a = gg : f$, fiet $c = f$. Quocirca construetur locus quæsitus, capiendo $AG = ggm : ff$, $CD = gg : f$, & $DE = f$.

FIG. 73.

Atque ita quoque, si æquatio, nata ex resolutione alicujus problematis indeterminati, fuerit $fg - mx = my$; divisis terminis omnibus per m, fiet illa $fg : m - x = y$: proindeque erit ejusdem formæ cum quarta æquatione $b - x = ay : c$. Quare, comparatis inter se mutuo terminis ipsarum, habebitur $b = fg : m$, & $a : c = 1$, sive etiam $a = c$. Unde construetur locus quæsitus, si posita $AC = fg : m$, capiatur CD cujusvis longitudinis, & fiat

FIG. 74.

fiat DE ipsi CD æqualis.

XIII. Quoniam vero molestum est, omnium quatuor formularum constructiones memoria retinere; *poterit unica tantummodo formula totum negotium peragi*. Licebit autem hunc in finem eligere, vel formulam priorem, quæ est omnium simplicissima, vel aliquam trium posteriorum, ad quas casus compositi reducuntur. XIII. *Quo pacto fieri possit eorum constructio, per reductionem ad casum simplicem.*

Quum eligitur formula prior $x = ay : o$, in id maxime incumbendum, *ut substitutionis ope ad eam reducatur localis æquatio proposita*. Nam, reductione ista peracta, facile erit, quæsitum locum construere. Ita, si localis æqualis sit $fg + fx = gy$; divisis terminis omnibus per f, erit $g + x = gy : f$. Et ponendo $g + x = z$, erit $z = gy : f$ æquatio reducta.

Referant modo portiones AN rectæ AB valores incognitæ x. Et quoniam habetur $g + x = z$, capiendo ad partem oppositam $AC = g$, designabunt portiones CN valores incognitæ z. Quare, si ex CB abscindatur portio $CD = g$, & constituto angulo quovis CDE, fiat $DE = f$; erit recta CEX locus quæsitus. Fig. 73.

Eadem ratione, si localis æquatio sit $ffg - ffx = ggy$; dividendo terminos omnes per ff, erit $g - x = ggy : ff$; & ponendo $g - x = z$, erit $z = ggy : ff$ æquatio reducta. Hinc, siquidem super AB capiatur $AC = g$, & designentur per portiones AN istius AC valores incognitæ x; fiet unaquæque reliquarum portionum $CN = g - x$; adeoque ipsæ CN designabunt valores incognitæ z. Unde, si ex Fig. 74.

CA,

CA, producta si opus, abscindatur portio CD $= gg:f$, & constituto angulo quovis CDE, fiat DE $= f$; erit recta CEX locus optatus

XIV. *Quomodo eadem constructio peragenda, per reductionem ad casum compositum.*

XIV. Quod si autem eligi velit aliqua trium posteriorum formularum, veluti secunda $x + b = ay : c$, sive etiam $x + b - ay : c = 0$; *tunc oportebit, comparationis ope, definire quantitates, quæ locum determinant*. Et siquidem omnes inveniuntur positivæ; danda est rectis, quas referunt, illa eadem positio, quam in constructione formulæ reperiuntur habere. Sed, si earum aliqua prodit negativa; tunc recta, quam exhibet, capienda est ad plagam oppositam.

Jam quantitates, quæ locum determinant, sunt a, b, c. Verum, instituta comparatione, dumtaxat ipsius b valor innotescit. Et quantum ad alias duas a, & c, nonnisi ratio, quam habent inter se, cognita fiet. Hinc valor unius ex iis sumi poterit ad libitum. Et tunc per cognitam rationem, quam habent inter se, etiam valor alterius notus evadet. Præstat autem, utcumque assumere valorem ipsius c, quem tamen positivum semper esse oportebit.

Sit igitur $x - g + ffy : gg = 0$ æquatio localis construenda. Instituta comparatione, habebitur $b = -g$, & $a:c = -ff:gg$. Quare, assumpta $c = g$, erit $a = -ff:g$. Quum ergo valores rectarum AC, CD comperti sint negativi, ducendæ sunt eæ ad plagas oppositas: proindeque quæsiti loci constructio peragenda erit, ut in quarta formula, ad quam proposita æquatio proprie reducitur. FIG. 74.

Sit

Sit etiam $x - my : n = o$ æquatio localis proposita. Comparatione instituta, habebitur $b = o$, & $a ; c = m ; n$: proindeque, assumpta $c = n$, fiet $a = m$. Quum ergo valor rectæ AC compertus sit nullus; evanescet ipsa AC, cadetque punctum C super punctum A. Quare construetur quæsitus locus, ut in prima formula; nimirum, capiendo super AB portionem AD $= m$, constituendo utcunque angulum ADE, faciendo DE $= n$, & conjungendo demum puncta A, & E per rectum AEX.

XV. Sed nolo hic silentio reticere, quod *locus ad lineam rectam exprimi quoque possit per æquationem, quæ unicam tantum incognitam contineat*. Jam enim generalis formula, nulla habita signorum, quibus termini afficiuntur, ratione, est $x + b - ay : c = o$. Profecto autem in hujusmodi æquatione ratio, quam habet a ad c, quemadmodum potest esse æqualitatis, ita nihil etiam vetat, ut sit vel infinite magna, vel infinite parva. XV. *Locorum ad lineam rectam casus duo speciales ostenduntur.*

Sit itaque primo ratio illa infinite magna: adeo nempe, ut existente c quantitate finita, sit vicissim infinita quantitas a. Quia igitur in hoc casu punctum C abire debet in infinitum; fiet recta CEX parallela ipsi AB. Unde quælibet parallelarum NM æqualis erit rectæ DE: & propterea, iisdem ut supra manentibus, loci æquatio erit $y = c$. FIG. 72. 75.

Sit secundo eadem illa ratio infinite parva, adeo nempe, ut existente a quantitate finita, sit per contrarium c quantitas infinita. Et quoniam in hoc alio casu abire debet in infinitum punctum E, fiet recta CEX parallela ipsi DE. FIG. 72. 76.

si DE. Quare, sicuti in recta CEX sunt omnia puncta M, ita super eadem CEX cadent parallelæ omnes MN. Hinc quælibet portionum AN æqualis fiet ipsi AC: proindeque loci æquatio erit $x = b$.

Nec silentio hic præteribimus, quod ubi ratio, quam habet a ad c, reperitur esse æqualitatis, tunc etiam portiones CN ipsis NM
Fig. 72. æquales fiant. Unde, si simpliciter quæstio sit de explicanda æquatione, valores incognitæ y exprimi poterunt, non modo per rectas NM, verum etiam per portiones ipsas CN, quæ ad punctum C omnes terminantur.

XIV. *Quomodo construenda sint loca secundi generis, coni sectionibus terminata.*

XVI. Quemadmodum autem, constructione locorum ad lineam rectam, abunde nunc liquet, rectam solam constituere primum ordinem linearum, solisque adeo rectis loca primi generis terminari; ita etiam, construendo loca, quæ conicis sectionibus terminantur, patebit, *solas coni sectiones secundum linearum ordinem constituere, nec aliis, quam coni sectionibus, secundi generis loca definiri.*

Constructionem horum locorum sequentibus capitibus ostendemus; & pro ea quoque eandem illam methodum usurpabimus, qua mediante loca primi generis construuntur. Nimirum formulam unicam eligemus, quæ sit, vel omnium simplicissima, vel omnium maxime composita; & ope ejus formulæ cujuscumque propositæ æquationis constructionem exhibebimus.

Sed hic quoque notare oportet, quod ubi eligitur formula omnium simplicissima; tunc præcipuum constructionis artificium in

eo

eo ſitum ſit, ut ſubſtitutionis ope ad eam reducatur localis æquatio propoſita. Quotieſcumque vero adhibetur formula omnium maxime compoſita; tunc labor omnis eo ſe vertet, ut comparationis ope definiantur quantitates, quæ locum determinant.

C A P. III.

Qua ratione loca ad parabolam conſtrui poſſint, oſtenditur.

I. DIximus præcedenti capite, loca omnia conſtrui poſſe, adhibita formula, quæ caſum contineat, vel omnium ſimpliciſſimum, vel omnium maxime compoſitum. Jam in parabola caſus ſimpliciſſimus habetur, quum *ejus puncta omnia ad aliquam ipſius diametrum referuntur per rectas, quæ ſint diametri illius ordinatæ.* I. *Locorum ad parabolam formula ſimpliciſſima definitur.*

Sit igitur AB aliqua parabolæ diameter, ſitque etiam AD, tum parameter ejus diametri, cum recta, cui omnes ejuſdem diametri ordinatæ ſunt parallelæ. Capiatur in parabola punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum AB recta MN, ipſi AD parallela. Tum ponatur AN $= x$, MN $= y$, & AD $= p$. Fig. 77.

Et quoniam, ob parabolæ naturam, MN quadratum eſt æquale rectangulo DAN; erit ejuſdem parabolæ localis æquatio $yy = px$. Unde, ſemper ac æquatio aliqua ſubinde reduei possit, ut ex una parte habeatur quadratum unius incognitæ, ex altera vero rectangulum ex incognita alia in datam quamvis quantitatem; tunc æquatio illa ad parabolam nos manuducet.

Sed notetur hoc loco velim, æquationem $yy = px$ haberi, non solum adhibitis ordinatis, quæ cadunt ad diametri partem unam, verum etiam, quum adhibentur ordinatæ illæ, quæ cadunt ad diametri partem oppositam. Nam, etsi in hoc casu sit $MN = -y$, quia tamen ejus quadratum est yy, erit semper $yy = px$ æquatio parabolæ localis.

II. *Quæ æquationes ad formulam illam simplicissimam sunt reducibiles.*

II. Neque vero difficile erit definire, *qualis esse debeat æquatio, quæ subinde reduci possit, ut formam induat istius* $yy = px$. Primo enim, si in æquatione incognitæ duæ non reperiantur simul multiplicatæ, reducetur ad eam formam talis æquatio, quotiescumque unius dumtaxat incognitæ quadratum in ea continetur.

Proponatur, exempli gratia, æquatio $yy + 2ay = cx - bb$. Fiat $y + a = z$. Et quoniam habetur $yy + 2ay = zz - aa$; substitutione peracta, erit $zz - aa = cx - bb$, sive etiam $zz = cx + aa - bb$. Fiat quoque $x + (aa - bb) : c = u$, ita ut sit $cx + aa - bb = cu$. Et habebitur demum $zz = cu$, quæ est ejusdem formæ cum æquatione parabolæ $yy = px$.

Quod si autem in æquatione incognitæ duæ simul multiplicatæ reperiantur; tunc, ut illiusmodi æquatio formam induat istius $yy = px$, oportebit, ut in ea utriusque incognitæ quadratum contineatur, sed ita tamen, ut

trans-

translatis ad eandem æquationis partem, tum terminis, quadrata illa continentibus, cum termino, incognitarum productum includente, iidem simul quadratum perfectum constituant.

Ita, si æquatio fuerit $yy - 2ay - 2xy + xx = cx + aa$; ponendo $y - a - x = z$, erit $yy - 2ay - 2xy + xx = zz - 2ax - aa$. Quare, ope substitutionis, fiet $zz - 2ax - aa = cx + aa$, sive etiam $zz = cx + 2ax + 2aa$. Hinc, ponendo quoque $x + 2aa : (c + 2a) = u$, & $c + 2a = d$; erit $cx + 2ax + 2aa = du$; atque adeo, rursus ope substitutionis, erit $zz = cu$.

III. Sed exemplis modo ostendamus, *qua ratione, per reductionem æquationis ad formam simplicissimam, loca ad parabolam construantur.* Primo itaque proponatur construenda æquatio $yy + 2ay = cx$. Fiat $y + a = z$. Quumque habeatur $yy + 2ay = zz - aa$; erit $zz - aa = cx$, sive etiam $zz = cx + aa$. Fiat quoque $x + aa : c = u$. Et quoniam habetur $cx + aa = cu$; erit $zz = cu$ æquatio reducta.

III. Ostenditur exemplis constructio locorum, ad parabolam per formulam simplicissimam. Exemplum primum.

FIG. 78.

Ducatur ergo in subjecto plano recta quævis AB, & per portiones ejus AN designentur valores incognitæ x. Quumque habeatur $x + aa : c = u$; capiendo ad partem oppositam AC $= aa : c$, fiet unaquæque CN $= x + aa : c$; adeoque designabunt portiones CN valores incognitæ u.

Sit porro CD recta, cui esse debent æquidistantes ipsæ NM, quæ referunt valores alterius incognitæ y. Et quoniam in reductione habetur $y + a = z$; capiatur super ea ad plagam oppositam CE $= a$; & ducta per punctum E recta EF, ipsi CB parallela, fiet quælibet EO $= y + a$; adeoque designabunt portiones EO valores incognitæ z.

Denique, quum æquatio reducta sit $zz = cu$, liquet, quæsitæ parabolæ diametrum debere esse rectam ipsam EF. Et quemadmodum ED est illa recta, cui parallelæ esse debent omnes ejus diametri ordinatæ; sic perspicuum est quoque, quod si super eadem ED capiatur portio EG $= c$, debeat esse portio ista EG parameter illius diametri.

IV. *Demonstratio constructionis præcedentis exempli* Fig. 78.

IV. Ut autem ostendere possimus, *parabolam istam esse lineam, ad quam refertur æquatio* $yy + 2ay = cx$, juvat prius advertere, quod ea per punctum A necessario debeat transire. Compleatur siquidem parallelogrammum AE. Et quoniam, ex constructione, est AC, sive EH $= aa : c$, & EG $= c$; erit rectangulum GEH $= aa$, & consequenter æquale quadrato, quod fit ex CE, sive AH. Quare omnino necesse est, ut parabola transeat per punctum A.

Id quum ita sit, capiatur primo in portione parabolæ AX punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum EF ordinata MO, quæ ipsi AB occurrat in N. Jamque, positis AN $= x$, & MN $= y$; erit ex constructione CN, sive EO $= x + aa : c$, & MO $= y + a$. Sed, propter parabolam, MO quadratum est æquale rectangulo GEO. Quare erit $yy + 2ay + aa = cx + aa$, sive etiam $yy + 2ay = cx$.

Capiatur secundo in portione parabolæ AE punctum quodvis M, ex quo etiam demittatur ad diametrum EF ordinata MO, quæ producatur ad partem oppositam, usque do-

nec

nec ipsi AC occurrat in N. Et quoniam in isto casu sit AN $= -x$, & MN $= -y$; invenietur quoque CN, sive EO $= x + aa:c$, & MO $= y + a$. Unde, ob parabolæ naturam, rursus erit ut antea $yy + 2ay + aa = cx + aa$, sive etiam $yy + 2ay = cx$.

Extendatur porro AH usque in K, & capiatur in portione parabolæ AK punctum aliquod M, ex quo similiter demittatur ad diametrum EF ordinata MO, quæ ipsi AC occurrat in N. Et quamquam in hoc casu habeatur quoque AN $= -x$, & MN $= -y$; attamen erit CN, sive EO $= x + aa:c$, & MO $= -y - a$. Interim, quia quadratum ex $-y - a$ est $yy + 2ay + aa$; adhuc, per parabolæ naturam, habebitur ut prius $yy + 2ay = cx$.

Capiatur denique in portione parabolæ KZ punctum quodvis M, ex quo pariter demittatur ad diametrum EF ordinata MO, quæ ipsi AB occurrat in N. Quumque in isto casu fiat AN $= x$, & MN $= -y$; erit CN, sive EO $= x + aa:c$, & MO $= -y - a$. Unde, propter parabolæ naturam, semper erit ut antea $yy + 2ay + aa = cx + aa$, sive etiam $yy + 2ay = cx$.

V. Proponatur secundo *construenda æquatio* $yy - 2ay = bb - cx$, *quæ similiter ad parabolam nos manuducit.* Fiat $y - a = z$. Et quoniam habetur $yy - 2ay = zz - aa$; substitutione peracta, erit $zz - aa = bb - cx$, sive etiam $zz = aa + bb - cx$. Ponatur quoque $(aa + bb) : c - x = u$. Quumque habeatur $aa + bb - cx = cu$; erit rursus ope substitutionis $zz = cu$ æquatio reducta. V. *Exemplum secundum, non longe diversum a primo.*

FIG. 79. Ducatur itaque in subjecto plano recta quævis AB, ex qua abscindatur portio AC $= (aa + bb):c$. Jamque, si designentur per portiones AN istius AC valores incognitæ x, fiet unaquæque reliquarum portionum CN $= (aa + bb):c - x$; adeoque ipsæ CN designabunt valores incognitæ u.

Sit deinde CD recta, cui esse debent æquidistantes ipsæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Et quoniam in reductione habetur $y - a = z$, abscindatur ex CD portio CE $= a$; & ducta per punctum E recta EF, ipsi CA parallela, fiet quælibet OM $= y - a$; atque adeo ipsæ OM valores referent incognitæ z.

Denique, quum æquatio reducta sit $zz = cu$, liquet, quæsitæ parabolæ diametrum debere esse rectam EF. Et quemadmodum diametri ejus ordinatæ debent esse parallelæ ipsi ED, sic perspicuum est quoque, quod si super eadem ED capiatur portio EG $= c$, debeat esse portio ista EG parameter illius diametri.

Jam, quod per parabolam, subinde descriptam, fiat satis propositæ æquationi $yy - 2ay = bb - cx$, ostendetur prorsus ut supra. Tantum notabimus, parabolam istam non posse transire per punctum A. Nam, completo parallelogrammo AE, invenietur rectangulum GEH majus quadrato, quod fit ex AH. Plane vero, si abesset ab æquatione terminus bb, tunc parabola per punctum A proculdubio transire deberet.

VI. *Exemplum tertium, ca-*

VI. Proponatur tertio *construenda æquatio*

tio $yy + 2mxy:n + mmxx:nn = ax - bb$, *quæ ob tres priores terminos, quadratum perfectum constituentes, adhuc ad parabolam nos ducit.* *sunt paulo difficiliorem continens.*

Fiat $y + mx:n = z$. Quumq; habeatur $yy + 2mxy:n + mmxx:nn = zz$, erit $zz = ax - bb$. Capiatur quoque $x - bb:a = u$. Et quoniam habetur $ax - bb = au$, erit $zz = au$ æquatio reducta.

Ducatur jam in subjecto plano recta quævis AB, & per portiones ejus AN designentur valores incognitæ x. Quumque habeatur $x - bb:a = u$, abscindatur ex ea portio AC $= bb:a$. Et quoniam fit unaquæque CN $= x - bb:a$, designabunt portiones CN valores incognitæ u. FIG. 80.

Sit deinde CD recta, cui esse debent æquidistantes ipsæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Et quoniam in reductione habetur $y + mx:n = z$, capiatur super ea ad partem oppositam portio CE, quæ sit ad AC, ut est m ad n. Jamque, ducta recta AEF, occurrente in O ipsis NM, fiet unaquæque OM $= y + mx:n$; adeoque ipsæ OM designabunt valores incognitæ z.

Quoniam autem rectæ OM correspondent portionibus ipsius EF; utique debet esse EF diameter describendæ parabolæ. Verum portiones illæ EO tunc demum reperiuntur æquales ipsis CN, ubi æquales sunt duæ AE, AC. Unde procul est, ut eædem EO designare queant valores incognitæ u; adeoque, etsi æquatio reducta sit $zz = au$, multum tamen abest, ut sit a parameter quæsitæ parabolæ.

Itaque, ut parametrum describendæ parabolæ definiamus, sit AC ad AE, ut est n ad s. Quumque hac ratione fiat quælibet EO $= su:n$; debebit quæsita parameter ejusmodi esse, ut ducta in $su:n$ producat au. Quare, si ea vocetur p, erit $psu:n = au$, hoc est $ps:n = a$, ex quo infertur $p = an:s$.

Abscindatur ergo ex ED portio EG $= an:s$. Et quemadmodum describendæ parabolæ debet esse EF diameter, & ED recta, definiens positionem suarum ordinatarum; ita oportebit, ut abscissa illa portio EG sit parameter ejus diametri. Nec difficile erit ostendere, quod per hujusmodi parabolam fiat satis propositæ æquationi.

VII. *Veritas constructionis præcedentis exempli demonstratur.*

VII. Sit enim XEZ descripta parabola, quæ ipsi AB occurrat in H, & K. Capiatur primo in portione HK punctum quodvis M, ex quo demittatur ad diametrum EF ordinata MO, quæ ipsi AB occurrat in N. Jamq; positis AN $= x$, & MN $= y$; erit ex constructione

FIG. 80.

CN $= x - bb:a$, & MO $= y + mx:n$. Quumque CN sit ad EO, ut est AC ad AE, sive etiam, ut est n ad s; erit EO $= sx:n - sbb:na$. Sed, propter parabolam, MO quadratum est æquale rectangulo GEO. Quare erit $yy + 2mxy:n + mmxx:nn = ax - bb$.

Capiatur secundo in portione EH, vel KX punctum quodvis M, ex quo etiam demittatur ad diametrum EF ordinata MO, quæ producatur ad partem oppositam, usque donec ipsi AB occurrat in N. Et quoniam in isto casu fit AN $= x$, & MN $= -y$; invenietur quoque CN $= x - bb:a$, & MO $= y + mx:n$. Quumque adhuc fiat EO $= sx:n - sbb:na$;

ob

ob parabolæ naturam, rursus erit ut antea $yy + 2mxy:n + mmxx:nn = ax - bb$.

Capiatur denique in portione parabolæ EZ punctum aliquod M, ex quo similiter demittatur ad diametrum EF ordinata MO, quæ ipsi AB occurrat in N. Et quamquam in hoc casu habeatur quoque AN$=x$, & MN $= -y$; attamen erit EO $= sx:n - sbb:na$, & MO $= -y - mx:n$. Interim, quia quadratum ex $-y - mx:n$ est $yy + 2mxy:n + mmxx:nn$; adhuc, per parabolæ naturam, erit ut prius $yy + 2mxy:n + mmxx:nn = ax - bb$.

Neque vero difficile erit, definire puncta duo H, & K, in quibus ipsi AB occurrit descripta parabola. Quum enim sub iis punctis evanescere debeat valor incognitæ y; satis erit, ex ipsa æquatione delere terminos illos, in quibus incognita y reperitur. Et quoniam, deletis hujusmodi terminis, æquatio evadit $mmxx:nn = ax - bb$; dabunt radices duæ hujus æquationis valores ipsarum AH, AK.

Fieri autem potest, ut puncta duo H, & K coeant in unum, & ipsa AB parabolæ tangens evadat: nimirum, quum habetur $a = 2bm:n$; quandoquidem in hoc casu radices duæ æquationis $mmxx:nn = ax - bb$ fiunt æquales inter se. Sed contingere quoque potest, ut recta AB, nec secet, nec tangat parabolam: scilicet si a minor sit, quam $2bm:n$; quum in isto casu ejusdem æquationis radices duæ evadant imaginariæ.

VIII. Proponatur demum *construenda æquatio* $yy - 2ay - 2xy + xx + ax = 0$, *quæ similiter locum exhibet ad parabolam, ob tres ter-* VIII. Exemplum quartum, casum maxime compositum.

mi-

tum subi- bens. *minos* $yy - 2xy + xx$ *, quadratum perfectum constituentes*. Fiat $y - a - x = z$. Quumque habeatur $yy - 2ay - 2xy + xx = zz - 2ax - aa$; erit $zz - 2ax - aa + ax = o$, sive etiam $zz = ax + aa$. Capiatur quoque $x + a = u$, ita ut sit $ax + aa = au$. Et erit $zz = au$ æquatio reducta.

In subjecto itaque plano ducatur recta quævis AB, per cujus portiones AN designentur valores incognitæ x. Et quoniam in reductione habetur $x + a = u$, capiatur super ea ad plagam oppositam portio AC $= a$, Quumque fiat unaquæque CN $= x + a$, designabunt portiones istæ CN valores incognitæ u.

FIG. 81.

Sit deinde CD recta, cui esse debent æquidistantes ipsæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Et quia in reductione habetur quoque $y - a - x = z$, abscindatur ex CD portio CE $= a$, nec non, completo parallelogrammo AE, ducatur in eo diagonalis CF, quæ ipsis NM occurrat in O. Quumque habeatur quælibet OM $= y - a - x$; designabunt ipsæ OM valores incognitæ z.

Jam rectæ OM correspondent portionibus ipsius CF. Quare CF debebit esse diameter describendæ parabolæ. Et quoniam, posito, quod CA sit ad CF, ut n ad s invenitur quælibet CO $= su : n$; parametrum illius diametri talem esse oportebit, ut productum ejus per $su : n$ sit au: proindeque erit $an : s$ ejusmodi parameter.

Abscindatur ergo ex CD portio CG $=$

$an : s$.

$an : s$. Et quemadmodum describendæ parabolæ debet esse CF diameter, & CD recta, definiens positionem suarum ordinatarum; ita necesse erit, ut abscissa illa portio CG sit parameter ejus diametri. Quod autem per hujusmodi parabolam fiat satis propositæ æquationi $yy - 2ay - 2xy + xx + ax = 0$, ostendetur prorsus ut supra.

Notatu interim hic dignum existimo, quod sicuti punctum C est vertex parabolæ, sic eadem parabola transire quoque debeat per punctum A. Est enim CA ad CF, ut n ad s. Itaque erit CF $= as : n$: & propterea, quum sit CG $= an : s$, erit rectangulum GCF $= aa$, & consequenter æquale quadrato, quod fit ex AF. Quare omnino necesse est, ut parabola transeat per punctum A.

IX. Atque ita quidem construuntur loca ad parabolam, per reductionem suarum æquationum ad formulam simplicissimam. Videamus itaque modo, *qua ratione eadem loca ad parabolam construi debeant, reducendo eorum æquationes ad formulam, quæ sit omnium maxime composita*. Quem in finem, qualis sit istiusmodi formula, operæ pretium est, ut primo loco definiamus. IX. *Locorum ad parabolam formula generalis exhibetur.*

Nimirum, referendo parabolæ puncta omnia ad rectam positione datam, per rectas alias, quæ sint diametri alicujus ordinatæ; perspicuum est, tria contingere posse. Primo, ut recta positione data sit ipsa illa diameter. Secundo, ut sit aliqua ejus parallela. Et tertio demum, ut angulum cum eadem diametro constituat. Unde, sicuti ex tribus hisce

ca-

casibus priores duo sub tertio continentur; ita & formula parabolæ, omnium maxime composita, ea erit, quæ ex tertio illo casu deducitur.

Sit igitur EF aliqua parabolæ diameter, Fig. 82. sitque etiam EG recta, quæ exhibet, tum parametrum ejus diametri, cum positionem suarum ordinatarum. Agatur deinde AD, eidem diametro parallela; & per aliquod ejus punctum A ducatur quoque obliqua AB. Sumatur postea in AB punctum quodvis C; & ductis rectis AF, CD, ipsi EG parallelis, ponatur AC $= n$, CD $= m$, AD $= s$, EG $= p$, AF $= q$, & EF $= r$.

Capiatur nunc in parabola punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum EF ordinata MO, conveniens cum AB in N, & cum AD in R; ponaturque adhuc AN $= x$, & NM $= y$. Quia ergo AN est ad NR, ut AC ad CD; erit NR $= mx:n$; adeoque, quum duæ AF, RO inter se sint æquales, erit MO $= y + mx:n + q$. Et quoniam AN est ad AR, ut AC ad AD; erit AR, sive FO $= sx:n$: proindeque erit EO $= r + sx:n$.

Jam, propter parabolam, MO quadratum est æquale rectangulo GEO. Quare erit $yy + 2mxy:n + mmxx:nn + 2qy + 2qmx:n + qq = pr + psx:n$; sive etiam $yy + 2mxy:n + mmxx:nn + 2qy + 2qmx:n - psx:n + qq - pr = 0$: & propterea formulam parabolæ, omnium maxime compositam, comperta æquatio nobis exhibebit.

Perspicuum est autem, in hujusmodi formula tres terminos $yy + 2mxy:n + mmxx:nn$ qua-

quadratum perfectum constituere; nec posse in ea deficere terminum $2mxy:n$, quin simul deficiat terminus alter $mmxx:nn$. Unde veritas regulæ, superius traditæ, pro cognoscendis locis ad parabolam, ex ipsa eorum formula generali prono alveo fluit.

X. *Quomodo per inventam formulam generalem loca ad parabolam construantur.*

X. Sed ostendamus nunc, *quo pacto, ope inventæ formulæ generalis, loca ad parabolam construantur*. Nimirum, comparationis ope, definiendæ sunt primum quantitates, quæ locum determinant. Et siquidem omnes inveniuntur positivæ; danda est rectis, quas referunt, illa eadem positio, quam in figura formulæ reperiuntur habere. Sed, si earum aliqua prodit negativa; tunc recta, quam exhibet, capienda est ad plagam oppositam.

Quantitates porro, quæ locum determinant, sunt m, n, p, q, r, s. Verum, instituta comparatione, dumtaxat ipsarum p, q, r valores innotescunt. Et, quantum ad priores duas m, & n, nonnisi ratio, quam habent inter se, cognita fiet. Hinc valor unius ex iis sumi poterit ad libitum. Et tunc, per cognitam rationem, quam inter se habent, etiam valor alterius notus evadet. Præstat autem, utcumque assumere valorem ipsius n, quem tamen positivum semper esse oportebit.

Determinatis valoribus ipsarum m, & n, etiam quantitatis s valor innotescet. In triangulo enim CAD notus est angulus ACD, velut æqualis angulo ANM, qui vel datus est, vel sumitur ad libitum. Quare, ubi duo ejus latera AC, CD, designata per quantitates n, & m, similiter nota sunt; cognoscemus quoque FIG. 82.

ter-

tertium latus AD, quod exhibet quantitas s. Speciatim autem erit $s = n$, ubi valor ipsius m nullus reperitur; quandoquidem, evanescente CD, cadit AB super AD, & puncta duo C, & D coeunt in unum.

Illud quoque sedulo hic notandum existimo, quod ubi valor parametri p prodit negativus, tunc ipsa parabola volvenda sit concavitate sua ad plagam oppositam. Nec obscura est hujus rei ratio. Nam negatio illa, non tam afficit parametrum, quam abscissam, in quam parameter multiplicata reperitur. Unde, quum abscissa capienda sit ad partem contrariam; omnino necesse est, ut parabola sua concavitate respiciat plagam oppositam.

XI. *Exemplum primum, casum exhibens simpliciorem.*

XI. Oporteat itaque primo, *construere aequationem* $yy - 2ay + cx = 0$, *quae locum exhibet ad parabolam*. Quia in ea deest terminus xy; utique fractio $2m:n$, per quam ille in formula multiplicatus reperitur, debet esse nihilo aequalis. Unde, quum sit $m = 0$; per ea, quae paulo ante notata sunt, erit quoque $n = s$; adeoque ipsa formula fiet $yy + 2qy - px + qq - pr = 0$.

Jam, instituta comparatione, habebitur $2q = -2a$, $p = -c$, & $qq - pr = 0$. Quare, per reductionem, ut est $p = -c$, sic erit $q = -a$, & $r = qq:p = -aa:c$: proindeque, designatis valoribus incognitae x per
Fig. 83. portiones AN rectae AB, & existente AH recta, cui esse debent aequidistantes valores alterius incognitae y, construetur proposita aequatio in eum, qui sequitur, modum.

Abscindatur ex AH portio AF $= a$. Tum,

Tum, ducta FO, ipsi AB parallela, capiatur super ea portio FE $= aa:c$. Agatur postea EG parallela rectæ AH, & fiat eadem EG $= c$. Denique circa diametrum EF describatur parabola, ita ut EG exhibeat, tam parametrum ejus diametri, quam positionem suarum ordinatarum. Et parabola, subinde descripta, locus erit quæsitus.

Ducatur enim ex puncto aliquo M ordinata ad diametrum MO, quæ extendatur usque donec ipsi AB occurrat in N. Et, positis AN, sive FO $= x$, & MN $= y$; erit ex constructione EO $= aa:c - x$, & MO $= y - a$. Sed, propter parabolam, MO quadratum est æquale rectangulo GEO. Quare erit $yy - 2ay + aa = aa - cx$, sive etiam $yy - 2ay + cx = 0$, quæ est æquatio construenda.

XII. Oporteat etiam, *construere æquationem* $yy - 2axy:c + aaxx:cc + 2ay - cx = 0$, *quæ similiter locum exhibet ad parabolam.* Quia hic adest terminus xy; instituta comparatione, habebitur primo $2m:n = -2a:c$. Quare, assumpta $n = c$, fiet $2m = -2a$, sive etiam $m = -a$. Comparatis autem terminis reliquis, habebitur quoque $2q = 2a$, $2qm:n - ps:n = -c$, & $qq - pr = 0$. *XII. Exemplum secundum, casum maxime compositum continens.*

Hinc, per reductionem, erit primo $q = a$. Et, subrogatis in æquatione $2qm:n - ps:n = -c$ valoribus ipsarum m, n, q, erit secundo $p = (cc - 2aa):s$. Unde fiet tertio $r = qq:p = aas:(cc - 2aa)$. Et quoniam relate ad quantitatem $cc - 2aa$ tria contingere possunt; ponamus, cc majorem esse quam $2aa$: qua ratione, ut positiva est quantitas $cc - 2aa$, sic

va-

valores ipsarum p, & r erunt pariter positivi.

FIG. 84. Sit jam AB recta, per cujus portiones AN designantur valores incognitæ x; & ea, cui æquidistantes esse debent valores alterius incognitæ y, sit AH. Capiatur in AB portio AC $= c$; & ducta CD, ipsi AH parallela, fiat eadem CD $= a$, jungaturque AD. Extendatur deinde AH versus A. Et, constituta AF $= a$, ducatur per punctum F recta EO, parallela ipsi AD. Fiat postea FE $= aas:(cc - 2aa)$, & ponatur parameter describendæ parabolæ EG $= (cc - 2aa):s$.

His peractis, describatur parabola circa diametrum EF, ita ut recta EG designet, tam parametrum ejus diametri, quam positionem suarum ordinatarum. Et facile erit ostendere, quod per eam fiat satis propositæ æquationi. Nam, ducta ex aliquo ejus puncto M ordinata ad diametrum MO, quæ occurrat ipsis AB, AD in N, & R, positisque AN $= x$, & NM $= y$; erit, ob triangula æquiangula ACD, ANR, NR $= ax:c$, & AR, sive FO $= sx:c$.

Hinc, quum sit MR $= y - ax:c$, & AF, sive RO $= a$, erit tota MO $= y - ax:c + a$. Est autem ex constructione FE $= aas:(cc - 2aa)$. Quare erit tota EO $= sx:c + aas:(cc - 2aa)$: & propterea, quum propter parabolam MO quadratum sit æquale rectangulo GEO, fiet æquatio $yy - 2axy:c + aaxx:cc + 2ay - 2aax:c + aa = cx - 2aax:c + aa$, quæ reducta exhibebit æquationem propositam $yy - 2axy:c + aaxx:cc + 2ay - cx = 0$.

XIII. *Praecedentis exempli ...*

XIII. Nolo autem hoc loco reticere, quod quem-

quemadmodum valores quantitatum p, & r inveniuntur positivi, quotiescumque cc major est, quam $2aa$; ita iidem valores prodant negativi, ubi per contrarium cc minor est, quam $2aa$. Id vero quum contingit, non aliud fieri debet, quam sumere FE ad partem contrariam, ipsamque parabolam subinde describere, ut concavitate sua respiciat quoque plagam oppositam. *Sus quidem specialis expenditur.* FIG. 84.

Sed fieri quoque potest, ut sit $cc = 2aa$. Quumque in hoc casu quantitas $cc - 2aa$ fiat nihilo æqualis, evanescet quoque valor parametri p; ipsa autem r infinita reperietur. Id vero mirum censeri non debet. Nam, ubi habetur $cc = 2aa$, duo parabolæ crura vertuntur in binas rectas, diametro EF parallelas; quarum una est ipsa AD, transiens per punctum A; altera in eadem a diametro distantia jacet ad partem oppositam.

Nec sane difficile erit, veritatem hujus ostendere. Quotiescumque enim habetur $cc = 2aa$, erit $c = 2aa : c$; adeoque æquatio construenda $yy - 2axy : c + aaxx : cc + 2ay - cx = o$ vertetur in hanc aliam $yy - 2axy : c + aaxx : cc + 2ay - 2aax : c = o$. Hinc, addendo utrique æquationis parti eandem quantitatem aa, erit $yy - 2axy : c + aaxx : cc + 2ay - 2aax : c + aa = aa$. Et, extrahendo hinc inde radicem quadratam, erit $y - ax : c + a = a$, sive $y = ax : c$.

Huic autem æquationi fieri satis per rectam AD, perspicuum quidem est. Nam, quum sit, ut AC ad CD, ita AN ad NR; erit NR $= ax : c$: proindeque, posita eadem NR $= y$,

 fiet

fiet æquatio $y = ax:c$. Quoniam vero, per extractionem quadratæ radicis ex utraque parte æquationis $yy - 2axy:c + aaxx:cc + 2ay - 2aax:c + aa = aa$, habetur quoque $-y + ax:c - a = a$, sive $-y = 2a - ax:c$; hinc est, ut locus componendus, præter rectam AD, aliam exigat ei parallelam ad partem alteram ipsius EF.

XIV. *Quid potissimum in compositione locorum ad parabolam debeat verari.*

XIV. Cæterum, *in compositione locorum ad parabolam illud sedulo notari debet*, quod existentibus x, & y duabus construendæ æquationis incognitis, fieri quandoque possit, ut designari debeant per portiones AN rectæ AB valores incognitæ y, perque rectas NM valores alterius incognitæ x. Nec sane in utraque loca construendi ratione difficile erit definire, quando demum id fieri debeat.

Nimirum, quum construitur locus, per reductionem æquationis ad formulam simplicissimam, fieri id debet, quotiescumque in æquatione reducta per parametrum multiplicata reperitur, vel incognita y, vel quæ ex ipsa dependet. Sic æquatio $xx - 2ax = cy$ mutationem illam exposcit. Nam, faciendo $x - a = z$, & $y + aa:c = u$, habetur loco ejus hæc alia $zz = cu$; ubi incognita u, quæ reperitur per parametrum multiplicata, dependet ex y; quum sit $y + aa:c = u$.

Quotiescumque vero construitur locus, per reductionem æquationis ad formulam compositam, illud idem fieri debet, quando in æquatione construenda quadratum incognitæ x ab omni fractione immune reperitur. Sic sequens æquatio $xx = 2axy:c + aayy:cc$

$- 2ax$

$- 2ax - 2by + cc = 0$ exigit quoque eam variationem; quia quadratum incognitæ x illud est, quod in ea omni fractione denudatum occurrit.

Patet autem, dari posse loca quædam, quæ utroque modo construi queant. Hujusmodi est sequens æquatio $xx - 2xy + yy - 2ax = 0$. Nam primo in ea utriusque incognitæ quadratum omni vacat fractione. Et deinde, si fiat $y - x = z$, habebitur loco ejus hæc alia $zz = 2ax$; si vero ponatur $x - y - a = z$, & $y + a : 2 = u$, fiet $zz = 2au$ æquatio reducta.

Illud quoque perspicuum est, quod ubi æquatio construitur, per reductionem ad formulam compositam, eademque natura sua mutationem illam exposcit, debeant etiam in formula incognitæ variari. Sic formula, cum qua comparanda est æquatio $xx - 2axy : c + aayy : cc - 2ax - 2by + cc = 0$, haud quidem esse debet $yy + 2mxy : n + mmxx : nn + 2qy + 2qmx : n - psx : n + qq - pr = 0$, sed $xx + 2myx : n + mmyy : nn + 2qx + 2qmy : n - psy : n + qq - pr = 0$.

C A P. IV.

Ratio construendi loca ad ellipsim, & circulum aperitur.

I. OStenso, qua ratione loca ad parabolam construuntur; sequitur nunc, I. *Locorum ad* *ellipsim formula simplicissima definitur.*

nunc, ut eorum, quæ ſunt ad ellipſim, conſtructionem aggrediamur. Cum iis autem conjungemus quoque loca, quæ circuli circumferentia terminantur; quia, ut ſæpius dictum eſt, circulus velut ſpecies quædam ellipſis debet haberi.

Primo igitur oſtendemus, quo pacto loca ad ellipſim conſtruantur, adhibita formula, quæ caſum continet, omnium ſimpliciſſimum. Et in ellipſi quoque, non ſecus ac in parabola, caſus ſimpliciſſimus habetur, quum *ejus puncta omnia ad aliquam ipſius diametrum referuntur per rectas, quæ ſint diametri illius ordinatæ.*

FIG. 85. Sit ergo A centrum ellipſis, & BC aliqua ipſius diameter. Sit etiam BD, tum parameter ejus diametri, cum recta, cui omnes ejuſdem diametri ordinatæ ſunt parallelæ. Capiatur in ellipſi punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum BC recta MN, ipſi BD parallela. Tum ponatur AN $= x$, MN $= y$, & AB, vel AC $= d$.

Jam, ob naturam ellipſis, MN quadratum eſt ad differentiam quadratorum AB, AN, ut eſt BD ad BC. Quare, ſi ponamus BD eſſe ad BC, ut eſt n ad m; erit, ut n ad m, ita yy ad $dd - xx$; proindeque ellipſis localis æquatio erit $myy : n = dd - xx$. Unde ſemper ac æquatio aliqua ad iſtiuſmodi formam reduci poterit, tunc illa ad ellipſim proculdubio nos manuducet.

Sed notetur hoc loco velim, quod etſi ordinata MN cadat infra centrum A, adhuc tamen æquatio localis ellipſis ſit $myy : n = dd - xx$.

$-xx$. Nam, licet in hoc casu habeatur $AN = -x$; nihilominus ejus quadratum est semper xx. Et ob eandem rationem eadem adhuc erit ellipsis æquatio localis, ubi ordinata ducitur ad diametri partem oppositam; quia, etsi fiat $MN = -y$, quadratum tamen ex MN semper erit yy.

II. Neque vero difficile erit definire, *qualis esse debeat æquatio, quæ subinde reduci possit, ut formam induat istius* $myy : n = dd - xx$. Primo enim, si in æquatione incognitæ duæ non reperiuntur simul multiplicatæ, reducetur ad eam formam talis æquatio, si ab utraque ejus parte existant quadrata incognitarum, contrariis signis affecta. II. *Quæ æquationes ad formulam illam simplicissimam sunt reducibiles.*

Proponatur, exempli gratia, æquatio $ayy : c - 2ay = 2bx - xx$. Fiat $b - x = u$, Et quoniam habetur $2bx - xx = bb - uu$; substitutione peracta, erit $ayy : c - 2ay = bb - uu$, sive etiam $yy - 2cy = bbc : a - cuu : a$. Fiat quoque $y - c = z$. Quumque habeatur $yy - 2cy = zz - cc$; erit rursus per substitutionem $zz - cc = bbc : a - cuu : a$, sive etiam $azz : c = ac + bb - uu$. Ponatur porro $ac + bb = ff$. Et habebitur demum $azz : c = ff - uu$, quæ est ejusdem formæ cum æquatione ellipsis $myy : n = dd - xx$.

Quod si autem in æquatione incognitæ duæ simul multiplicatæ reperiantur; tunc, ut illiusmodi æquatio formam induat istius $myy : n = dd - xx$, oportebit, utriusque incognitæ quadratum ita quidem in ea contineri, ut translatis ad eandem æquationis partem, tum terminis, quadrata illa continentibus, cum termino, incognitarum productum includente, debeat coefficiens unius quadrati minui nonnihil, quo termini ii possint simul quadratum perfectum constituere.

Ita si æquatio fuerit $yy - 2ay + 2axy:c + 2aaxx:cc + 2bx = 0$; ponendo $y - a + ax:c = z$, erit $yy - 2ay + 2axy:c + aaxx:cc = zz + 2aax:c - aa$. Quare, ope substitutionis, fiet $zz + 2aax:c - aa + aaxx:cc + 2bx = 0$, sive etiam $cczz:aa + 2cx - cc + xx + 2bccx:aa$. Hinc, ponendo quoque $x + c + bcc:aa = u$, ita ut sit $xx + 2cx + 2bccx:aa = uu - cc - 2bc^3:aa - bbc^4:a^4$; erit rursus per substitutionem $cczz:aa + uu - 2cc - 2bc^3:aa - bbcc^4:a^4 = 0$. Et faciendo adhuc $2cc + 2bc^3:aa + bbc^4:a^4 = ff$; erit demum $cczz:aa + uu - ff = 0$, sive etiam $cczz:aa = ff - uu$.

III. *Ostenditur exemplis constructio locorum ad ellipsim per formulam simplicissimam. Exemplum primum.*

III. Sed exemplis modo ostendamus, *qua ratione, per reductionem æquationis ad formulam simplicissimam, loca ad ellipsim construantur*. Primo itaque proponatur construenda æquatio $ayy:c - 2ay = 2bx - xx$, quæ, ut paulo ante ostensum est, reducitur ad $azz:c = ff - uu$, ponendo $b - x = u$, $y - c = z$, & $ac + bb = ff$.

FIG. 86. Ducatur in subjecto plano recta quævis AB, ex qua abscindatur portio AC $= b$. Jamque, si designentur per portiones AN istius AC valores incognitæ x, fiet unaquæque reliquarum portionum CN $= b - x$; adeoque, quum habeatur $b - x = u$, ipsæ CN designabunt valores incognitæ u.

Sit deinde CD recta, cui esse debent æquiquidistantes ipsæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Et quoniam in reductione habetur $y - c = z$, abscindatur ex CD portio CE $= c$; & ducta per punctum E recta EF, ipsi CA parallela, fiet quælibet OM $= y - a$; atque adeo ipsæ OM valores referent incognitæ z.

Denique, quum æquatio reducta sit $azz : c = ff - uu$, liquet, quod, si hinc inde a puncto E capiatur, tum EF, cum EG $= f$, debeat esse FG quæsitæ ellipsis diameter. Et quemadmodum, ducta FH, ipsi CD parallela, diametri ejus ordinatæ debent esse æquidistantes rectæ FH; ita, si fiat, ut FH sit ad FG, veluti est c ad a, erit eadem FH parameter illius diametri.

IV. Ut autem ostendere possimus, *ellipsim istam esse lineam, ad quam refertur æquatio* $ayy : c - 2ay = 2bx - xx$, juvat prius advertere, quod si fiat AB dupla ipsius AC, ea necessario transire debeat per puncta duo A, & B. Nam in æquatione, de qua agitur, si ponatur $y = 0$, habebitur $2bx - xx = 0$, unde infertur, tum $x = 0$, cum $x = 2b$.

IV. *Demonstratio constructionis præcedentis exempli in medium affertur.*

FIG. 86.

Id quum ita sit, agantur rectæ AK, BL ipsi FH parallelæ, & capiatur primo in portione ellipsis KL punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum EF ordinata MO, quæ ipsi AB occurrat in N. Jamque, positis AN $= x$, & MN $= y$; erit ex constructione CN, sive EO, vel $b - x$, vel $x - b$, & MO $= y - c$. Sed, propter ellipsim, MO quadratum est ad differentiam quadratorum EF, EO, ut est FH ad FG. Quare erit, ut $yy - 2cy +$

 cc ad

cc ad $ff - bb + 2bx - xx$, ita c ad a: proindeque erit $ayy:c - 2ay + ac = ff - bb + 2bx - xx$; ſive etiam $ayy:c - 2ay = 2bx - xx$, ſi loco ff valor ipſius $ac + bb$ reponatur.

Capiatur ſecundo in portione ellipſis BGL punctum aliquod M, ex quo etiam demittatur ad diametrum FG ordinata MO, ipſi AB occurrens in N. Et quamquam in iſto caſu maneat adhuc AN $= x$, & MN $= y$; tamen erit ſemper CN, ſive EO $= x - b$, & MO eſſe poterit, vel $y - c$, vel $c - y$. Interim, quia quadratum, ſive fiat ex $y - c$, ſive ex $c - y$, eſt ſemper $yy - 2ay + cc$; rurſus, ob ellipſis naturam, erit ut antea $ayy:c - 2ay = 2bx - xx$.

Capiatur tertio in portione ellipſis AFK punctum quodvis M, ex quo ducatur ad diametrum FG ordinata MO, ipſi AB occurrens in N. Patetque in hoc caſu, manere quidem MN $= y$, ſed fieri AN $= - x$. Hinc erit ſemper CN, ſive EO $= b - x$, & MO eſſe poterit, ut in caſu præcedenti, vel $y - c$, vel $c - y$. Quare, ob ellipſis naturam, habebitur ſemper æquatio $ayy:c - 2ay + ac = ff - bb + 2bx - xx$, quæ reducta fiet $ayy:c - 2ay = 2bx - xx$.

Capiatur demum in portione ellipſis AB punctum quodvis M, ex quo pariter demittatur ad diametrum FG ordinata MO, ipſi AB occurrens in N. Quamque in iſto caſu fiat AN $= x$, & MN $= - y$, erit CN, ſive EO, vel $b - x$, vel $x - b$, & MO erit ſemper $- y + c$. Unde, propter naturam ellipſis, adhuc habebitur æquatio $ayy:c - 2ay = 2bx - xx$.

V. Pro-

V. Proponatur secundo *construenda æquatio altera, superius allata*, $yy - 2ay + 2aaxy:c + 2aaxx:cc + 2bx = o$, quæ, ut ibidem ostensum est, reducitur ad $cczz:aa = ff - uu$, ponendo $y - a + ax:c = z$, $x + c + bcc:aa = u$, & $2cc + 2bc^3:aa + bbc^4:a^4 = ff$.

V. *Exemplum secundum, casum exhibens paulo difficiliorem.*

Ducatur in subjecto plano recta quævis AB, & per portiones ejus AN designentur valores incognitæ x. Quumque habeatur $x + c + bcc:aa = u$, capiatur ad partem oppositam portio $AC = c + bcc:aa$. Et quoniam sit quælibet $CN = x + c + bcc:aa$, designabunt portiones CN valores incognitæ u. FIG. 87.

Sit deinde CD recta, cui esse debent æquidistantes ipsæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Et quoniam in reductione habetur $y - a + ax:c = z$, abscindatur ex CD tum portio $CE = a$, cum portio EF, quæ sit ad AC, ut est a ad c. Jamque completo parallelogrammo AE, ductaque FG, ipsis NM occurrente in O, fiet unaquæque $OM = y - a + ax:c$; adeoque ipsæ OM valores referent incognitæ z.

Quoniam autem rectæ OM correspondent portionibus ipsius FG; utique debet esse F centrum describendæ ellipsis, & FG positio suæ diametri. Verum portiones illæ FO tunc demum reperiuntur æquales ipsis CN, ubi æquales sunt duæ AC, FG. Unde procul est, ut eædem FO designare queant valores incognitæ u; adeoque, etsi æquatio reducta sit $cczz:a = ff - uu$, multum tamen abest, ut sit f semidiameter quæsitæ ellipsis, & ut ratio parametri ad diametrum sit æqualis ei, quam habet aa ad cc. Quia

Itaque, ut definiamus, tum semidiametrum describendæ ellipsis, cum rationem parametri ad diametrum; sit AC ad FG, ut est c ad s. Quumque hac ratione fiat quælibet FO $= su : c$; si ponamus ulterius, quod quæsita semidiameter sit g, & quod ratio parametri ad diametrum sit æqualis ei, quam habet n ad m; erit ejusdem ellipsis localis æquatio $mzz : n = gg - ssuu : cc$, sive etiam $ccmzz : ssn = ccgg : ss - uu$. Erat autem $cczz : aa = ff - uu$. Quare, instituta comparatione, fiet $ccm : ssn = cc : aa$, & $ccgg : ss = ff$. Unde infertur $n : m = aa : ss$, & $g = fs : c$.

Capiatur ergo super FG hinc inde à puncto F, tum FH, cum FK $= fs : c$; & erit HK diameter quæsitæ ellipsis. Ducatur porro per punctum H recta HL, ipsi CD parallela; & fient diametri ejus ordinatæ æquidistantes rectæ HL. Constituatur demum HL talis longitudinis, ut sit HL ad HK, veluti est aa ad ss; & erit eadem HL parameter illius diametri.

VI. *Veritas constructionis præcedentis exempli demonstratur.* VI. Hic etiam, ut ostendere possimus, *hujusmodi ellipsim satisfacere propositæ æquationi* $yy - 2ay + 2axy : c + 2aaxx : cc + 2bx = 0$, juvat prius advertere, quod si super

FIG. 87. AC capiatur portio AP $= bcc : aa$, ea necessario transire debent per puncta duo A, & P. Nam in æquatione, de qua agitur, si ponatur $y = 0$, fiet $2aaxx : cc + 2bx = 0$, sive etiam $aaxx : cc + bx = 0$, unde infertur, tum $x = 0$, cum $x = - bcc : aa$.

Id, quum ita sit, agantur rectæ AQ, PS ipsi CD, vel HL parallelæ. Et capiatur primo mo in portione ellipsis AKQ punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum HK ordinata MO, ipsi AB occurrens in N. Jamque, positis AN $= x$, & MN $= y$; erit ex constructione CN $= x + c + bcc : aa$, & MO vel $y - a + ax : c$, vel $- y + a - ax : c$. Sed CN est ad FO, ut AC ad FG, sive etiam, ut c ad s. Quare erit FO $= sx : c + s + bsc : aa$.

Quia autem, propter ellipsim, MO quadratum est ad differentiam quadratorum FH, FO, veluti est HL ad HK; erit, ut $yy - 2ay + aa + 2axy : c - 2aax : c + aaxx : cc$ ad $ffss : cc - ssxx : cc - 2ssx : c - ss - 2bssx : aa - 2bssc : aa - bbsscc : a^4$, ita aa ad ss. Unde fiet $yy - 2ay + aa + 2axy : c - 2aax : c + aaxx : cc = aaff : cc - aaxx : cc - 2aax : c - aa - 2bx - 2bc - bbcc : aa$, quæ, translatis terminis omnibus ad eandem partem, & posito loco ff valore ejus $2cc + 2bc^3 : aa + bbc^4 : a^4$, reducitur ad $yy - 2ay + 2axy : c + 2aaxx : cc + 2bx = 0$.

Capiatur secundo in portione ellipsis QS punctum aliquod M, ex quo etiam demittatur ad diametrum HK ordinata MO, ipsi AB occurrens in N. Et quamquam in isto casu maneat MN $= y$, fiet tamen AN $= - x$. Unde adhuc erit CN $= x + c + bcc : aa$, & FO $= sx : c + s + bsc : aa$; sed MO erit semper $y - a + ax : c$: proindeque, ob naturam ellipsis, rursus erit ut antea $yy - 2ay + 2axy : c + 2aaxx : cc + 2bx = 0$.

Capiatur tertio in portione ellipsis PHS punctum quodvis M, ex quo similiter ducatur ad diametrum HK ordinata MO, ipsi AB

oc-

occurrens in N. Patetque, etiam in isto casu manere quidem $MN = y$, sed fieri $AN = -x$. Hinc erit MO, vel $y - a + ax:c$, vel $-y + a - ax:c$; CN, vel $x + c + bcc:aa$, vel $-x - c - bcc:aa$; & FO, vel $sx:c + s + bsc:aa$, vel $-sx:c - s - bsc:aa$. Quare, ob ellipsis naturam, habebitur semper æquatio $yy - 2ay + 2axy:c + 2aaxx:cc + 2bx = 0$.

Capiatur demum in portione ellipsis AP punctum quodvis M, ex quo pariter demittatur ad diametrum HK ordinata MO, ipsi AB occurrens in N. Et quoniam in isto casu fit, tam $AN = -x$, quam $MN = -y$; erit semper $CN = x + c + bcc:aa$, $FO = sx:c + s + bsc:aa$, & $MO = -y + a - ax:c$. Unde, propter ellipsim, adhuc habebitur æquatio $yy - 2ay + 2axy:c + 2aaxx:cc + 2bx = 0$, quam construere oportebat.

VII. *Locorum ad ellipsim formula generalis exhibetur.*

VII. Atque ita quidem construuntur loca ad ellipsim, per reductionem suarum æquationum ad formulam simplicissimam. Videamus itaque modo, *qua ratione eadem loca ad ellipsim construi debeant, reducendo earum æquationes ad formulam, quæ sit omnium maxime composita.* Quem in finem, qualis sit istiusmodi formula, operæ pretium est, ut primo loco definiamus.

Nimirum, referendo ellipsis puncta omnia ad rectam positione datam, per rectas alias, quæ sint diametri alicujus ordinatæ; perspicuum est, tria contingere posse. Primo, ut recta positione data sit ipsa illa diameter. Secundo, ut sit aliqua ejus parallela. Et tertio de-

demum, ut angulum cum eadem diametro constituat. Unde, sicuti, ex tribus hisce casibus priores duo sub tertio continentur; ita & formula ellipsis, omnium maxime composita, ea erit, quæ ex tertio illo casu deducitur.

Sit igitur E centrum ellipsis, & HK aliqua ejus diameter; sitque etiam HG recta, quæ exhibet, tum parametrum illius diametri, cum positionem suarum ordinatatum. Agatur deinde AD, eidem diametro parallela; & per aliquod ejus punctum A ducatur quoque obliqua AB. Sumatur postea in AB punctum quodvis C; & ductis rectis AF, CD, ipsi HG, parallelis, ponatur $AC = n$, $CD = m$, $AD = s$, EH, vel $EK = t$, $HG = p$, $AF = q$, & $EF = r$. FIG. 88.

Capiatur nunc in ellipsi punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum HK ordinata MO, conveniens cum AB in N, & cum AD in R; ponaturque adhuc $AN = x$, & $NM = y$. Quia ergo AN est ad NR, ut AC ad CD; erit $NR = mx:n$; adeoque, quum duæ AF, RO inter se sint æquales, erit $MO = y + mx:n + q$. Et quoniam AN est ad AR, ut AC ad AD; erit AR, sive $FO = sx:n$: proindeque erit $EO = r + sx:n$.

Jam, propter ellipsim, MO quadratum est ad differentiam quadratorum EH, EO, ut est HG ad HK. Quare erit, ut $yy + 2mxy:n + mmxx:nn + 2qy + 2qmx:n + qq$ ad $tt - rr - 2rsx:n - ssxx:nn$, ita p ad $2t$. Unde fiet $yy + 2mxy:n + mmxx:nn + 2qy + 2qmx:n + qq = pt:2 - prr:2t - prsx:tn - pssxx:2tnn$, sive etiam $yy + 2mxy:n + mmxx:nn + pssxx:2tnn$

$+ 2qy$

$+ 2qy + 2qmx : n + prsx : tn + qq - pt : 2 + prr : 2t = o$: & propterea formulam ellipsis, omnium maxime compositam, comperta æquatio nobis exhibebit.

Perspicuum est autem, in hujusmodi formula coefficientem quadrati xx debere minui nonnihil, quo priores tres termini $yy + 2mxy : n + mmxx : nn + psxx : 2tnn$ constituere queant quadratum perfectum; nec, deficiente termino $2mxy : n$, deficere quoque debere terminum alterum, in quo quadratum xx continetur. Unde veritas regulæ, superius traditæ, pro cognoscendis locis ad *ellipsim*, ex ipsa eorum formula generali prono alveo fluit.

VIII. *Quomodo per inventam formulam generalem loca ad ellipsim construantur.*

VIII. Sed ostendamus nunc, *quo pacto, ope inventæ formulæ generalis, loca ad ellipsim construantur*. Nimirum, comparationis ope, definiendæ sunt primum quantitates, quæ locum determinant. Et siquidem omnes inveniuntur positivæ; danda est rectis, quas referunt, illa eadem positio, quam in figura formulæ reperiuntur habere. Sed, si earum aliqua prodit negativa; tunc recta, quam exhibet, capienda est ad plagam oppositam.

Quantitates porro, quæ locum determinant, sunt m, n, p, q, r, s, t. Verum, instituta comparatione, dumtaxat ipsarum p, q, r, t valores innotescunt. Et, quantum ad priores duas m, & n, nonnisi ratio, quam habent inter se, cognita fiet. Hinc valor unius ex iis sumi poterit ad libitum. Et tunc, per cognitam rationem, quam inter se habent, etiam valor alterius notus evadet. Præstat autem,

ut-

utcumque assumere valorem ipsius n, quem tamen positivum semper esse oportebit.

Determinatis valoribus ipsarum m, & n, etiam quantitatis s valor innotescet. In triangulo enim CAD notus est angulus ACD, velut æqualis angulo ANM, qui vel datus est, vel sumitur ad libitum. Quare, ubi duo ejus latera AC, CD, designata per quantitates n, & m, similiter nota sunt; cognoscemus quoque tertium latus AD, quod exhibet quantitas s. Speciatim autem erit $s = n$, ubi valor ipsius m nullus reperitur; quandoquidem, evanescente CD, cadit AB super AD, & puncta duo C, & D coeunt in unum. FIG. 88.

Quantum ad valorem parametri p, ille nunquam negativus potest oriri. Unde, quod in constructione locorum ad parabolam observavimus, nequit hic locum habere. Potius valor semidiametri t oriri potest quandoque imaginarius. Et quum id contingit, indicio est, quæsitum locum contradictionem aliquam involvere. Nec reticebimus ejusdem semidiametri valorem posse etiam interdum nihilo æqualem inveniri; & in eo casu optata ellipsis ad simplex punctum reducetur.

IX. Exemplum primum, casus exhibens simpliciorem.

IX. Oporteat itaque primo, *construere æquationem* $yy - 2ay + axx:c - ac = 0$, *quæ locum exhibet ad ellipsim*. Quia in ea deest terminus xy; utique fractio $2m:n$, per quam ille in formula multiplicatus reperitur, debet esse nihilo æqualis. Unde, quum sit $m = 0$; per ea, quæ paulo ante notata sunt, erit quoque $n = s$; adeoque ipsa formula fiet $yy + pxx:2t + 2qy + prx:t + qq - pt:2 + prr:2t = 0$.

Jam,

Jam, instituta comparatione, habebitur: $p:2t = a:c$, $2q = -2a$, $pr:t = o$, & $qq - pt:2 + prr:2t = -ac$. Unde, sicuti ex prima harum æquationum infertur, quod ratio parametri ad diametrum debeat esse æqualis ei, quam habet a ad c; sic ex secunda eruitur $q = -a$, ex tertia $r = o$, & ex quarta $pt = 2aa + 2ac$.

Quum autem sit $p:2t = a:c$, erit etiam $p = 2at:c$, & $pt = 2att:c$. Est vero $pt = 2aa + 2ac$. Itaque erit $2att:c = 2aa + 2ac$, & $tt = ac + cc$. Hinc, per extractionem quadratæ radicis, fiet $t = \surd(ac + cc)$: proindeque, designatis valoribus incognitæ x per portiones

FIG. 89. AN rectæ AB, & existente AL recta, cui esse debent æquidistantes valores alterius incognitæ y, construetur proposita æquatio in eum, qui sequitur, modum.

Abscindatur ex AL portio AF$=a$. Tum, ducta FO, ipsi AB parallela, capiatur super ea hinc inde a puncto F, tam portio FH, quam portio FK $= \surd(ac + cc)$. Agatur postea HG, parallela rectæ AL, & constituatur eadem HG talis longitudinis, ut sit HG ad HK in eadem ratione, quam habet a ad c. Denique diametro HK describatur ellipsis, ita ut recta HG exhibeat, tam parametrum ejus diametri, quam positionem suarum ordinatarum. Et ellipsis, subinde descripta, locus erit quæsitus.

Ducatur enim ex puncto aliquo M ordinata ad diametrum MO, quæ extendatur usque donec ipsi AB occurrat in N. Et, positis AN, sive FO $= x$, & MN $= y$, erit ex con-

constructione MO $= y - a$. Sed, propter ellipsim, MO quadratum est ad differentiam quadratorum FH, FO, ut est HG ad HK. Quare erit, ut $yy - 2ay + aa$ ad $ac + cc - xx$, ita a ad c. Unde fiet $yy - 2ay + aa = aa + ac - axx : c$, sive etiam $yy - 2ay + axx : c - ac = 0$, quæ est æquatio construenda.

X. Oporteat etiam, *construere æquationem* $yy - 2axy : c + 2aaxx : cc - 2by + aa = 0$, *quæ similiter locum exhibet ad ellipsim.* Quia hic adest terminus xy; instituta comparatione, habebitur primo $2m:n = - 2a:c$. Quare, assumpta $n = c$, fiet $2m = - 2a$, sive etiam $m = - a$. Comparatis autem terminis reliquis, habebitur quoque $mm: nn + pss: 2tnn = 2aa: cc$, $2q = - 2b$, $2qm: n + prs: tn = 0$, & $qq - pt: 2 + prr: 2t = aa$.

X. Exemplum secundum, casum maxime compositum continens.

Hinc in prima harum æquationum, subrogatis valoribus ipsarum m, & n, fiet $aa:cc + pss: 2tcc = 2aa:cc$, sive etiam $p:2t = aa:ss$. Unde infertur, rationem parametri ad diametrum æqualem esse debere ei, quam habet aa ad ss. Et quoniam ex secunda æquatione eruitur $q = - b$, habebitur ope tertiæ $pr : t = - 2ab:s$, sive etiam $pr : 2t = - ab : s$. Quumque sit $p: 2t = aa: ss$, erit per substitutionem $aar : ss = - ab: s$, atque adeo $r = - bs: a$.

Denique, ob quartam æquationem, erit $bb - pt :2 + bb = aa$, sive etiam $4bb - 2aa = pt$. Quum autem habeatur $p: 2t = aa : ss$, fiet quoque $pt = 2aatt: ss$. Unde erit $2aatt: ss = 4bb - 2aa$, & $tt = 2bbss: aa - ss$: proindeque, per extractionem quadratæ radicis, habebitur $t = \sqrt{(2bbss: aa - ss)}$: adeo nempe, ut nisi sit $2bb$ major, quam aa, valor ipsius t, vel nullus, vel imaginarius prodibit.

Ponamus ergo, $2bb$ majorem esse, quam aa. Et, designatis valoribus incognitæ x per portiones AN rectæ AB, sit AL ea, cui æquidistantes esse debent valores alterius incognitæ y. Capiatur in AB portio AC $= c$. Et, ducta CD, ipsi AL parallela, fiat eadem CD $= a$, jungaturque AD. Abscindatur deinde ex AL portio AF $= b$, perque punctum F agatur recta FEO, parallela ipsi AD. Fiat postea FE $= bs : a$. Et hinc inde a puncto E capiatur, tam portio EH, quam portio EK $=$ $\sqrt{(2bbss:aa - ss)}$.

FIG. 90.

Ducatur porro HG, æquidistans eidem AL, & constituatur eadem HG talis longitudinis, ut sit HG ad HK in eadem prorsus ratione, quam habet aa ad ss. Denique diametro HK describatur ellipsis, ita ut HG exhibeat, tam parametrum ejus diametri, quam positionem suarum ordinatarum. Et ellipsis, subinde descripta, locus erit quæsitus. Quod ut palam fiat, ducatur ex puncto aliquo M ordinata ad diametrum MO, quæ occurrat ipsis AB, AD in N, & R; positisque AN $= x$, & NM $= y$, erit, ob triangula æquiangula ACD, ANR, NR $= ax : c$, & AR, sive FO $= sx : c$.

Hinc, quum sit MR $= y - ax:c$, & AF, sive RO $= b$; erit reliqua MO $= y - ax : c - b$. Est autem ex constructione FE $= bs : a$ Quare erit reliqua EO $= sx : c - bs : a$. Jam vero, propter ellipsim, MO quadratum est ad differentiam quadratorum EH, EO, ut est

HG

HG ad HK. Itaque, quum habeatur, ut $yy - 2axy:c + aaxx:cc - 2by + 2abx:c + bb$ ad $2bbss:aa - ss - ssxx:cc + 2bssx:ac - bbss:aa$, ita aa ad ss; erit $yy - 2axy:c + aaxx:cc - 2by + 2abx:c + bb = 2bb - aa - aaxx:cc + 2abx:c - bb$, quæ reducta exhibebit æquationem propositam $yy - 2axy:c + 2aaxx:cc - 2by + aa = 0$.

XI. In allato igitur exemplo, ut valor semidiametri t realis evadat, necesse est, ut $2bb$ major sit, quam aa. Sed, si fuerit $2bb$ minor quam aa; tunc ejusdem semidiametri valor prodibit imaginarius; adeoque ipse locus construendus contradictionem aliquam involvet. Et denique, si habeatur $2bb = aa$; tunc evanescet valor semidiametri t; atque adeo ipsa ellipsis describenda in centro F tota colligetur.

XI. *Præcedentis exempli casus omnes expenduntur.*

Et sane, quum æquatio construenda sit $yy - 2axy:c + 2aaxx:cc - 2by + aa = 0$, sive etiam $yy - 2axy:c + aaxx:cc - 2by = - aaxx:cc - aa$; addendo utrique ejus parti communem quantitatem $2abx:c + bb$, fiet $yy - 2axy:c + aaxx:cc - 2by + 2abx:c + bb = bb + 2abx:c - aaxx:cc - aa$; adeoque, per extractionem quadratæ radicis, erit, vel $y = ax:c + b + \surd(bb + 2abx:c - aaxx:cc - aa)$ vel $y = ax:c + b - \surd(bb + 2abx:c - aaxx:cc - aa)$.

Hinc, ut valor incognitæ y realis reperiatur, necesse est, quantitatem $bb + 2abx:c - aaxx:cc - aa$, vel nullam esse, vel positivam. Talis autem esse non potest, quotiescumque $2bb$ minor est, quam aa. Nam posito, quod sit $2bb + ff = aa$, quantitas illa $bb + 2abx:c - aaxx:cc - aa$, ope substitutionis, mutabitur in hanc aliam $bb + 2abx:c - aaxx:cc - 2bb - ff$, sive $- bb + 2abx:c - aaxx:cc - ff$, quam, velut compositam ex duobus quadratis negativis, liquet esse realem, & negativam.

Sed non perinde res est, quum $2bb$ major est, quam aa. Tunc enim poni debet $2bb - ff = aa$; adeoque, per substitutionem, quantitas $bb + 2abx:c - aaxx:cc - aa$ evadet $bb + 2abx:c - aaxx:cc - 2bb + ff$, hoc est $- bb + 2abx:c - aaxx:cc + ff$, quam, perspicuum est, tunc tantum esse realem & negativam, quotiescumque ff, sive $2bb - aa$ minor est, quam $bb - 2abx:c + aaxx:cc$.

Nec item id accidit, quum habetur $2bb = aa$. Nam in isto casu illa eadem quantitas fiet $- bb + 2abx:c - aaxx:cc$, quæ nulla evadit, si ponatur $x = bc:a$. Atque hinc est, ut in hypothesi, quod sit $2bb = aa$, ellipsis tota in centro colligatur. Nimirum, quia in ea hypothesi tunc tantum valor incognitæ y realis reperitur, quotiescumque habetur $x = bc:a$.

XII. *Quid in compositione locorum ad ellipsim potissimum notari debeat.*

XII. Cæterum, *in compositione locorum ad ellipsim illud quoque sedulo notari debet,* quod existentibus x, & y duabus construendæ æquationis incognitis, fieri quandoque possit, ut designari debeant per portiones AN rectæ AB valores incognitæ y, perque rectas NM valores alterius incognitæ x. Nec sane in utraque loca construendi ratione difficile erit definire, quando demum id fieri debeat.

Ni-

Nimirum, quum construitur locus, per reductionem æquationis ad formulam simplicissimam, fieri id debet, quotiescumque in æquatione reducta per fractionem aliquam multiplicatum reperitur quadratum, vel incognitæ x, vel ejus, quæ ex ipsa dependet. Sic æquatio $mxx:n - 2mx = 2ay - yy$ mutationem illam exposcit. Nam, faciendo $x - n = z$, $a - y = u$, & $aa + mn = cc$, habetur loco ejus hæc alia $mzz:n = cc - uu$: ubi per fractionem $m:n$ reperitur multiplicatum quadratum incognitæ z, quæ dependet ex x; quum habeatur $x - n = z$.

Quotiescumque vero construitur locus, per reductionem æquationis ad formulam compositam, illud idem fieri debet, quando in æquatione construenda quadratum incognitæ x ab omni fractione immune reperitur. Sic sequens æquatio $xx - 2axy:c + 2aayy:cc - 2ax - 2by + cc = 0$ exigit quoque eam variationem, quia quadratum incognitæ x illud est, quod in ea omni fractione denudatum occurrit.

Interim, quum construitur æquatio, per reductionem ad formulam compositam, eademque natura sua mutationem illam exposcit, necesse est, ut etiam in formula incognitæ varientur. Sic formula, cum qua comparanda est æquatio $xx - 2axy : c + 2aayy : cc - 2ax - 2by + cc = 0$, haud quidem esse debet $yy + 2mxy:n + mmxx:nn + pssxx:2tnn + 2qy + 2qmx:n + prsx:tn + qq - pt:2 + prr:2t = 0$, sed $xx + 2myx:n + mmyy:nn + pssyy:2tnn + 2qx + 2qmy:n + prsy:tn + qq - ps:2 + prr:2t = 0$.

Fatendum eſt tamen, variationem iſtam non eſſe abſolute neceſſariam. Nam in priore exemplo, etſi per reductionem habeatur $mzz:n = cc - uu$; multiplicando tamen omnes æquationis terminos per n, eoſdemque dividendo per m, fiet $zz = ncc:m - nuu:m$, ſive etiam $nuu:m = ncc:m - zz$: ubi per fractionem $n:m$ multiplicatum reperitur quadratum incognitæ u, quæ dependet ex y; quum habeatur $a - y = u$.

Atque ita quoque in ſecundo exemplo, etſi æquatio ſit $xx - 2axy:c + 2aayy:cc - 2ax - 2by + cc = 0$; multiplicatis tamen terminis omnibus per cc, iiſdemque diviſis per $2aa$, habebitur $ccxx:2aa - cxy:a + yy - ccx:a - bccy:aa + c^4:2aa = 0$: ubi quadratum incognitæ y omni vacat fractione. Nec difficile erit intelligere, quod hoc idem præſtari poſſit in omnibus æquationibus, quæ ad ellipſim nos manuducunt.

XIII. *Quomodo conſtruenda ſint loca, quæ circuli circumferentia terminantur.*

XIII. Quantum *ad compoſitionem locorum, quæ circuli circumferentia terminantur*, ea fieri debet, perinde ac ſi loca ipſa eſſent ad ellipſim; quum revera circulus velut ſpecies quædam ellipſis debeat haberi. Innoteſcet autem, locum eſſe ad circulum, quotieſcumque, conſtructo loco, parameter ſit æqualis diametro, ad quam refertur, itemque ordinatæ rectos cum eadem diametro angulos conſtituunt; quum non aliter ellipſis in circulum abire queat, quam quum duo iſta contingunt.

Proponatur, exempli gratia, conſtruenda æquatio $yy - 2ay = 2bx - xx$, quæ ad el-

ellipsim nos ducit. Fiat, tum $y - a = z$, cum $b - x = u$. Et quoniam habetur $yy - 2ay = zz - aa$, & $2bx - xx = bb - uu$; erit per substitutionem $zz - aa = bb - uu$, sive etiam $zz = aa + bb - uu$. Ponatur quoque $aa + bb = cc$; & erit $zz = cc - uu$ æquatio reducta.

Ducatur jam in subjecto plano recta quævis AB, ex qua abscindatur portio AC $= b$. Et siquidem designentur per portiones AN istius AC valores incognitæ x, fiet unaquæque reliquarum portionum CN $= b - x$; adeoque, quum habeatur $b - x = u$, ipsæ CN designabunt valores incognitæ u. Fig. 91.

Sit deinde CD recta, cui esse debent æquidistantes ipsæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Et quoniam in reductione habetur $y - a = z$, abscindatur ex CD portio CE $= a$; & ducta per punctum E recta EF, ipsi CA parallela, fiet quælibet OM $= y - a$; adeoque ipsæ OM valores referent incognitæ z.

Denique, quum æquatio reducta sit $zz = cc - uu$, liquet, quod si hinc inde a puncto E capiatur, tum EF, cum EG $= c$, debeat esse FG quæsitæ ellipsis diameter. Et quemadmodum, ducta FH, ipsi CD parallela, diametri ejus ordinatæ debent esse æquidistantes rectæ FH; ita si fiat, ut FH sit ad FG in ratione æqualitatis, erit eadem FH parameter illius diametri.

In constructo igitur loco inventa est parameter FH æqualis diametro FG, ad quam refertur. Unde, si ordinatæ ejusdem diametri OM rectos cum ipsa angulos constituant, jam ellipsis vertetur in circulum; adeoque componetur quæsitus locus, describendo circuli circumferentiam ex puncto E tanquam centro, & intervallo ipsius EF, sive EG.

C A P. V.

De constructione locorum ad hyperbolam, relate ad diametros consideratam.

I. *Locorum ad hyperbolam, relate ad diametros consideratam formula simplicissima definitur.*

I. RElíquum jam est, ut constructionem locorum ostendamus, quæ ad hyperbolam nos ducunt. Hujusmodi loca duplicis speciei esse possunt. Nam hyperbola, per quam terminantur, considerari potest, vel relate ad ejus diametros, vel in ordine ad suas asymptotos. Unde eorundem locorum constructionem duobus etiam capitibus complectemur; & in isto quidem agemus de locis illis, in quibus hyperbola relate ad diametros consideratur; tum capite sequenti ea prosequemur, in quibus hyperbola sub contemplationem venit relate ad asymptotos.

Tradituri autem constructionem locorum ad hyperbolam, relate ad ejus diametros consideratam, ostendemus primo loco, qua ratione ea construi debeant, adhibita formula, quæ casum continet, omnium simplicissimum. Et in hyperbola quoque, non secus ac in parabola, & ellipsi, casus simplicissimus ha-

habetur, quum *ejus puncta omnia ad aliquam ipsius diametrum referuntur per rectas, quæ sint diametri illius ordinatæ.*

Sit ergo A centrum hyperbolæ, & BC aliqua ipsius diameter. Sit etiam BD, tum parameter ejus diametri, cum recta, cui omnes ejusdem diametri ordinatæ sunt parallelæ. Capiatur in hyperbola punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum BC recta MN, ipsi BD parallela. Tum ponatur AN $= x$, MN $= y$, & AB, vel AC $= d$. Fig. 92.

Jam, ob naturam hyperbolæ, MN quadratum est ad differentiam quadratorum AN, AB, ut est BD ad BC. Quare, si ponamus, BD esse ad BC, ut est n ad m; erit, ut n ad m, ita yy ad $xx - dd$: proindeque hyperbolæ localis æquatio erit $myy : n = xx - dd$. Unde semper ac æquatio aliqua ad istiusmodi formam reduci poterit, tunc ea ad hyperbolam, relate ad diametros consideratam, proculdubio nos manuducet.

Sed notetur hoc loco velim, quod etsi ordinata MN ducatur in hyperbola opposita, adhuc tamen æquatio localis hyperbolæ sit $myy : n = xx - dd$. Nam, licet in hoc casu habeatur AN $= -x$, nihilominus ejus quadratum est semper xx. Et ob eandem rationem eadem adhuc erit hyperbolæ æquatio localis, ubi ordinata ducitur ad diametri partem oppositam; quia, etsi fiat MN $= -y$, quadratum tamen ex MN semper erit yy.

II. Neque vero difficile erit definire, *qualis esse debeat æquatio, quæ subinde reduci possit, ut formam induat istius* $myy : n = xx - dd$. II. *Quæ æquationes ad formulam illam simpli-*

cissimam sunt reducibiles. dd. Primo enim, si in æquatione incognitæ duæ non reperiuntur simul multiplicatæ, reducetur ad eam formam talis æquatio, si ab utraque ejus parte existant quadrata incognitarum iisdem signis affecta.

Proponatur, exempli gratia, æquatio $ayy:c - 2ay + ac = 2bx + xx$. Fiat $x + b = u$. Et quoniam habetur $2bx + xx = uu - bb$; substitutione peracta, erit $ayy:c - 2ay + ac = uu - bb$, sive etiam $yy - 2cy + cc = cuu:a - cbb:a$. Fiat quoque $y - c = z$. Quumque habeatur $yy - 2cy + cc = zz$; erit rursus per substitutionem $zz = cuu:a - cbb:a$, sive etiam $azz:c = uu - bb$, quæ est ejusdem formæ cum æquatione hyperbolæ locali $myy:n = xx - dd$.

Quod si autem in æquatione incognitæ duæ simul multiplicatæ reperiantur; tunc, ut illiusmodi æquatio formam induat istius $myy:n = xx - dd$, oportebit, utriusque incognitæ quadratum ita quidem in ea contineri, ut translatis ad eandem æquationis partem, tum terminis, quadrata illa continentibus, cum termino, incognitarum productum includente, debeat coefficiens unius quadrati augeri nonnihil, quo termini ii possint simul quadratum perfectum constituere.

Ita si æquatio fuerit $yy - 2ay + 4axy:c + 3aaxx:cc + 2bx = 0$, ponendo $y - a + 2ax:c = z$, erit $yy - 2ay + 4axy:c + 3aaxx:cc = zz + 4aax:c - aa - aaxx:cc$. Quare, ope substitutionis, fiet $zz + 4aax:c - aa - aaxx:cc + 2bx = 0$, sive etiam $cczz:aa + 4cx - cc - xx + 2ccbx:aa = 0$. Hinc, ponendo quoque $x -$

$ac - ccb:aa = u$, ita ut sit $4cx - 2ccbx:aa - xx = 4cc + 4bc^3:aa + bbc^4:a^4 - uu$; erit rursus per substitutionem $cczz:aa + 3cc + 4bc^3:aa + bbc^4:a^4 - uu = o$. Et, faciendo adhuc $3cc + 4bc^3:aa + bbc^4:a^4 = ff$, erit demum $cczz:aa + ff - uu = o$, sive etiam $cczz:aa = uu - ff$.

III. Sed exemplis modo ostendamus, *qua ratione, per reductionem æquationis ad formulam simplicissimam, construantur loca ad hyperbolam, relate ad diametros consideratam.* Primo itaque proponatur construenda æquatio $ayy:c - 2ay + ac = 2bx + xx$, quæ, ut paulo ante ostensum est, reducitur ad $azz:c = uu - bb$, ponendo $x + b = u$, & $y - c = z$.

III. *Ostenditur exemplis constructio locorum ad hyperbolam. Exemplum primum.*

Ducatur in subjecto plano recta quævis AB, per cujus portiones AN designentur valores incognitæ x. Et quoniam in reductione habetur $x + b = u$, capiatur ad partem oppositam portio AC $= b$. Quumque fiat quælibet CN $= x + b$, designabunt ipsæ CN valores incognitæ u. FIG. 93.

Sit deinde CD recta, cui esse debent æquidistantes ipsæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Et quoniam in reductione habetur quoque $y - c = z$, abscindatur ex CD portio CE $= c$; & ducta per punctum E recta EF ipsi CA parallela, fiet quælibet OM $= y - c$; atque adeo ipsæ OM valores referent incognitæ z.

Denique, quum æquatio reducta sit $azz:c = uu - bb$, liquet, quod si hinc inde a puncto E capiatur, tum EF, tum EG $= b$, debeat esse FG quæsitæ hyperbolæ diameter.

Et

Et quemadmodum, ducta FH, ipsi CD parallela, diametri ejus ordinatæ debent esse æquidistantes rectæ FH; ita, si fiat, ut FH sit ad FG, veluti est c ad a, erit eadem FH parameter illius diametri.

IV. *Demonstratio constructionis præcedentis exempli in medium affertur.* FIG. 93.

IV. Ut autem ostendere possimus, *hyperbolam istam esse lineam, ad quam refertur æquatio* $ayy : c - 2ay + ac = 2bx + xx$, juvat prius advertere, quod si super CB capiatur hinc inde a puncto C, tum CK, cum CL $= \sqrt{(ac + bb)}$; hyperbola quidem principalis transire debeat per punctum K, ejus vero opposita per punctum L. Nam in æquatione, de qua agitur, si ponatur $y = 0$, habebitur $ac = 2bx + xx$, unde infertur, tum $x = - b + \sqrt{(ac + bb)}$, cum $x = - b - \sqrt{(ac + bb)}$.

Id quum ita sit, capiatur primo in portione hyperbolæ principalis KFX punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum FG ordinata MO, ipsi AB occurrens in N. Jamque, positis AN $= x$, & MN $= y$, erit ex constructione CN, sive EO $= x + b$, & MO esse poterit, vel $y - c$, vel $- y + c$. Sed, propter hyperbolam, MO quadratum est ad differentiam quadratorum EO, EF, ut est FH ad FG. Quare erit, ut $yy - 2cy + cc$ ad $xx + 2bx + bb - bb$, ita c ad a: Unde fiet $ayy : c - 2ay + ac = xx + 2bx$.

Capiatur secundo in portione altera ejusdem hyperbolæ principalis KZ punctum aliquod M, ex quo etiam demittatur ad diametrum FG ordinata MO, ipsi AB occurrens in N. Et quamquam in isto casu maneat AN $= x$; fiet tamen MN $= - y$. Unde erit semper

per CN, sive EO $= x + b$, & MO $= -y + c$; atque adeo, ob hyperbolæ naturam, erit rursus ut antea $ayy:c - 2ay + ac = xx + 2bx$.

Capiatur tertio in portione hyperbolæ oppositæ LGX punctum quodvis M, ex quo adhuc ducatur ad diametrum FG ordinata MO, ipsi AB occurrens in N. Et quoniam in isto casu fit AN $= -x$, & MN $= y$; erit CN, sive EO $= -x - b$, & MO esse poterit, vel $y - c$, vel $-y + c$. Quare, ob hyperbolæ naturam, habebitur semper æquatio $ayy:c - 2ay + ac = xx + 2bx$.

Capiatur demum in portione altera ejusdem hyperbolæ oppositæ LZ punctum quodvis M, ex quo pariter demittatur ad diametrum FG ordinata MO, ipsi AB occurrens in N. Quumque in isto casu fiat AN $= -x$, & MN $= -y$; erit semper CN, sive EO $= -x - b$, & MO $= -y + c$. Unde, propter naturam hyperbolæ, adhuc habebitur æquatio $ayy:c - 2ay + ac = xx + 2bx$.

V. Proponatur secundo *construenda æquatio altera, superius allata*, $yy - 2ay + 4axy:c + 3aaxx:cc + 2bx = 0$, quæ, ut ibidem ostensum est, reducitur ad $cczz:aa = uu - ff$, ponendo $y - a + 2ax:c = z$, $x - 2c - ccb:aa = u$, & $3cc + 4bc^3:aa + bbc^4:a^4 = ff$. V. *Exemplum secundum, casum exhibens paulo difficiliorem*

Ducatur in subjecto plano recta quævis AB, & per portiones ejus AN designentur valores incognitæ x. Quumque habeatur $x - 2c - ccb:aa = u$, abscindatur ex AB portio AC $= 2c + ccb:aa$. Et quoniam fit quælibet CN $= x - 2c - ccb:aa$, designabunt FIG. 94.

bunt

bunt portiones CN valores incognitæ u.

Sit deinde CD recta, cui esse debent æquidistantes ipsæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Et quoniam in reductione habetur $y - a + 2ax:c = z$, abscindatur, tum ex CD portio CE $= a$, cum ex EC, producta si opus, portio EF, quæ sit ad AC, ut est $2a$ ad c. Jamque, completo parallelogrammo AE, ductaque FG, ipsis NM occurrente in O, fiet unaquæque OM $= y - a + 2ax:c$; adeoque ipsæ OM valores referent incognitæ z.

Quoniam autem rectæ OM correspondent portionibus ipsius FG; utique debet esse F centrum describendæ hyperbolæ, & FG positio suæ diametri. Verum portiones illæ FO tunc demum reperiuntur æquales ipsis CN, ubi æquales sunt duæ AC, FG. Unde procul est, ut eædem FO designare queant valores incognitæ u; adeoque, etsi æquatio reducta sit $cczz:aa = uu - ff$, multum tamen abest, ut sit f semidiameter quæsitæ hyperbolæ, & ut ratio parametri ad diametrum sit æqualis ei, quam habet aa ad cc.

Itaque, ut definiamus, tum semidiametrum describendæ hyperbolæ, cum rationem parametri ad diametrum, sit AC ad FG, ut est c ad s. Quumque hac ratione fiat quælibet FO $= su:c$; si ponamus ulterius, quod quæsita semidiameter sit g, & quod ratio parametri ad diametrum sit æqualis ei, quam habet n ad m, erit ejusdem hyperbolæ localis æquatio $mzz:n = ssuu : cc - gg$, sive etiam $ccmzz:ssn = uu - ccgg:ss$. Erat autem $cczz:aa$

$= uu$

$= uu - ff$. Quare, instituta comparatione, fiet $ccm : ssn = cc : aa$, & $ccgg : ss = ff$. Unde infertur $n:m = aa:ss$, & $g = fs:c$.

Capiatur ergo super FG hinc inde a puncto F, tum FH, cum FK $= fs:c$; & erit HK diameter quæsitæ hyperbolæ. Ducatur porro per punctum H, recta HL, ipsi CD parallela; & fient diametri ejus ordinatæ æquidistantes rectæ HL. Constituatur demum HL talis longitudinis, ut sit HL ad HK, veluti est aa ad ss; & erit eadem HL parameter illius diametri.

VI. Hic etiam, ut ostendere possimus, *hujusmodi hyperbolam satisfacere propositæ æquationi* $yy - 2ay + 4axy : c + 3aaxx : cc + 2bx = 0$, juvat prius advertere, quod si super AB capiatur ad partem oppositam portio AP $= 2bcc : 3aa$, hyperbola quidem principalis nullimode secet rectam AB, ejus autem opposita transire debeat per puncta duo A, & P. Nam in æquatione, de qua agitur, si ponatur $y = 0$, fiet $3aaxx:cc + 2bx = 0$, unde infertur, tum $x = 0$, cum $x = - 2bcc : 3aa$.

IV. *Veritas constructionis præcedentis exempli demonstratur.* FIG. 94.

Id quum ita sit, capiatur primo in hyperbola principali punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum HK ordinata MO, ipsi AB occurrens in N. Et quoniam hic poni debet AN $= x$, & MN $= - y$; erit ex constructione CN $= x - 2c - ccb : aa$, & MO vel $y - a + 2ax : c$ vel $- y + a - 2ax : c$. Sed CN est ad FO, ut AC ad FG, sive etiam, ut c ad s. Quare erit FO $= sx : c - 2s - bsc : aa$.

Quia autem, propter hyperbolam, MO qua-

quadratum est ad differentiam quadratorum FO, FH, veluti est HL ad HK; erit, ut $yy - 2ay + aa + 4axy:c - 4aax:c + 4aaxx:cc$ ad $ssxx:cc - 4ssx:c + 4ss - 2bssx:aa + 4bssc:aa + bbsscc:a^4 - ffss:cc$, ita aa ad ss. Unde fiet $yy - 2ay + aa + 4axy:c - 4aax:c + 4aaxx:cc = aaxx:cc - 4aax:c + 4aa - 2bx + 4bc + bbcc:aa - ffaa:cc$, quæ, translatis terminis omnibus ad eandem partem; & posito loco ff valore ejus $3cc + 4bc^3:aa + bbc^4:a^4$, reducitur ad $yy - 2ay + 4axy:c + 3aaxx:cc + 2bx = 0$.

Extendatur deinde in hyperbola opposita ordinata AG versus I, & capiatur in portione ejus AKI punctum aliquod M, ex quo etiam demittatur ad diametrum HK ordinata MO, ipsi AB occurrens in N. Et quamquam in isto casu maneat $AN = x$, fiet tamen $CN = -x + 2c + ccb:aa$; adeoque erit $FO = -sx:c + 2s + bsc:aa$. Quumque hic poni debeat $MN = y$; erit adhuc MO, vel $y - a + 2ax:c$, vel $-y + a - 2ax:c$: proindeque, ob naturam hyperbolæ, rursus erit ut antea $yy - 2ay + 4axy:c + 3aaxx:cc + 2bx = 0$.

Capiatur tertio in portione hyperbolæ oppositæ AP punctum quodvis M, ex quo similiter ducatur ad diametrum HK ordinata MO, ipsi AB occurrens in N. Patetque, in isto casu fieri, tum $AN = -x$, cum $MN = -y$. Et erit semper, tam $CN = -x + 2c + ccb:aa$, quam $MO = -y + a - 2ax:c$. Unde, quum habeatur $FO = -sx:c + 2s + bsc:aa$; ob hyperbolæ naturam, invenietur semper æquatio $yy - 2ay + 4axy:c + 3aaxx:cc + 2bx = 0$.

Ca-

Capiatur demum punctum M in aliqua duarum reliquarum portionum hyperbolæ oppositæ, ex quo pariter demittatur ad diametrum HK ordinata MO, ipsi AB occurrens in N. Et quoniam in isto casu sit $AN = -x$, & $MN = y$; erit semper $CN = -x + 2c + ccb:aa$, & $FO = -sx:c + 2s + bsc:aa$. Et licet MO esse possit, vel $y - a + 2ax:c$, vel $-y + a - 2ax:c$; attamen, ob naturam hyperbolæ, semper habebitur æquatio $yy - 2ay + 4axy:c + 3aaxx:cc + 2bx = 0$.

VII. *Locorum ad hyperbolam, relate ad diametros consideratam, formula generalis exhibetur.*

VII. Atque ita quidem construuntur loca ad hyperbolam, relate ad ejus diametros consideratam, per reductionem suarum æquationum ad formulam simplicissimam. Videamus itaque modo, *qua ratione eadem loca ad hyperbolam construi debeant, reducendo earum æquationes ad formulam, quæ sit omnium maxime composita*. Quem in finem, qualis sit ejusmodi formula, operæ pretium est, ut primo loco definiamus.

Nimirum, referendo hyperbolæ puncta omnia ad rectam positione datam, per rectas alias, quæ sint diametri alicujus ordinatæ, perspicuum est, tria contingere posse. Primo, ut recta positione data sit ipsa illa diameter. Secundo, ut sit aliqua ejus parallela. Et tertio demum, ut angulum cum eadem diametro constituat. Unde, sicuti ex tribus hisce casibus priores duo sub tertio continentur, ita & formula hyperbolæ, relate ad diametros consideratæ, omnium maxime composita, ea erit, quæ ex tertio illo casu deducitur.

Sit igitur F centrum hyperbolæ, & HK ali- FIG. 95.

aliqua ejus diameter; sitque etiam HG recta, quæ exhibet, tum parametrum illius diametri, cum positionem suarum ordinatarum. Agatur deinde AD, eidem diametro parallela; & per aliquod ejus punctum A ducatur quoque obliqua AB. Sumatur postea in AB punctum quodvis C; & ductis rectis AF, CD, ipsi HG parallelis, ponatur $AC = n$, $CD = m$, $AD = s$, EH, vel $EK = t$, $HG = p$, $AF = q$, & $EF = r$.

Capiatur nunc in hyperbola punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum HK ordinata MO, conveniens cum AB in N, & cum AD in R; ponaturqne adhuc $AN = x$, & $MN = y$. Quia ergo AN est ad NR, ut AC ad CD; erit $NR = mx : n$; adeoque, quum duæ AF, RO inter se sint æquales, erit $MO = y + mx:n + q$. Et quoniam AN est ad AR, ut AC ad AD; erit AR, sive $FO = sx : n$: proindeque erit $EO = r + sx : n$.

Jam, propter hyperbolam, MO quadratum est ad differentiam quadratorum EO, EH, ut est HG ad HK. Quare erit, ut $yy + 2mxy : n + mmxx : nn + 2qy + 2qmx : n + qq$ ad $rr + 2rsx : n + ssxx : nn - tt$, ita p ad $2t$. Unde fiet $yy + 2mxy : n + mmxx : nn + 2qy + 2qmx : n + qq = prr : 2t + prsx : tn + pssxx : 2tnn - pt : 2$, sive etiam $yy + 2mxy : n + mmxx : nn - pssxx : 2tnn + 2qy + 2qmx : n - prsx : tn + qq + pt : 2 - prr : 2t = 0$; & propterea formulam hyperbolæ, relate ad diametros consideratæ, omnium maxime compositam, comperta æquatio nobis exhibebit.

Perspicuum est autem, in hujusmodi

for-

formula coefficientem quadrati xx augendum esse nonnihil, quo priores tres termini $yy + 2mxy:n + mmxx:nn - psxx:2tnn$ constituere queant quadratum perfectum; nec, deficiente termino $2mxy:n$, deficere quoque debere terminum alterum, in quo quadratum xx continetur. Unde veritas regulæ, superius traditæ, pro cognoscendis locis ad hyperbolam, relate ad suas diametros consideratam, ex ipsa eorum formula generali, prono alveo fluit.

VIII. Sed ostendamus modo, *quo pacto, ope inventæ formulæ generalis, loca ad hyperbolam, relate ad diametros consideratam, construantur*. Nimirum, comparationis ope, definiendæ sunt primum quantitates, quæ locum determinant. Et siquidem omnes inveniuntur positivæ; danda est rectis, quas referunt, illa eadem positio, quam in figura formulæ reperiuntur habere. Sed si earum aliqua prodit negativa; tunc recta, quam exhibet, capienda est ad plagam oppositam.

VIII. *Quomodo per inventam formulam generalem loca ad hyperbolam, relate ad diametros consideratam, construantur.*

Quantitates porro, quæ locum determinant, sunt m, n, p, q, r, s, t. Verum, instituta comparatione, dumtaxat ipsarum p, q, r, t valores innotescunt. Et, quantum ad priores duas m, & n, nonnisi ratio, quam habent inter se, cognita fiet. Hinc valor unius ex iis sumi poterit ad libitum. Et tunc, per cognitam rationem, quam inter se habent, etiam valor alterius notus evadet. Præstat autem, utcumque assumere valorem ipsius n, quem tamen positivum semper esse oportebit.

Determinatis valoribus ipsarum m, & n,

FIG. 95. etiam quantitatis s valor innotescet. In triangulo enim CAD notus est angulus ACD, velut æqualis angulo ANM, qui vel datus est, vel sumitur ad libitum. Quare, ubi duo ejus latera, designata per quantitates n, & m, similiter nota sunt; cognoscemus quoque tertium latus AD, quod exhibet quantitas s. Speciatim autem erit $s = n$, ubi valor ipsius m nullus reperitur; quandoquidem, evanescente CD, cadit AB super AD, & puncta duo C, & D coeunt in unum.

Hic etiam notare oportet, quod, perinde ac in locis ad ellipsim, valor parametri p numquam negativus possit oriri. Unde, quod in constructione locorum ad parabolam observavimus, hic quoque nequit locum habere. Potius valor semidiametri t oriri potest quandoque imaginarius. Et quum id contingit, haud quidem putandum est, quæsitum locum contradictionem aliquam involvere; sed tantum per hyperbolas conjugatas ille debet explicari. Nec reticebimus, ejusdem semidiametri valorem posse etiam interdum nihilo æqualem inveniri; & in eo casu optata hyperbola ad duplicem rectam reducetur.

IX. *Exemplum primum, casum exhibens paulo simpliciorem.*

IX. Oporteat itaque primo, *construere æquationem* $yy - 2ay - axx:c + aa + ab = 0$. Quia in ea deest terminus xy; utique fractio $2m:n$, per quam ille in formula multiplicatus reperitur, debet esse nihilo æqualis. Unde, quum sit $m = 0$; per ea, quæ paulo ante notata sunt, erit quoque $n = s$; adeoque ipsa formula fiet $yy - pxx:2t + 2qy - prx:t + qq + pt:2 - prr:2t = 0$.

Jam,

Jam, instituta comparatione, habebitur $p : 2t = a : c$, $2q = -2a$, $pr : t = o$, & $qq + pt : a - prr : 2t = aa + ab$. Unde, sicuti ex prima harum æquationum infertur, quod ratio parametri ad diametrum debeat esse æqualis ei, quam habet a ad c; sic ex secunda eruitur $q = -a$, ex tertia $r = o$, & ex quarta $pt = 2ab$.

Quum autem sit $p : 2t = a : c$; erit etiam $p = 2at : c$, & $pt = 2att : c$. Est vero $pt = 2ab$. Itaque erit $2att : c = 2ab$, & $tt = bc$. Hinc, per quadratæ radicis extractionem, fiet $t = \sqrt{bc}$: proindeque, designatis valoribus incognitæ x per portiones AN rectæ AB, & existente AL recta, cui esse debent æquidistantes valores alterius incognitæ y, construetur proposita æquatio in eum, qui sequitur, modum. FIG. 96.

Abscindatur ex AL portio AF $= a$. Tum, ducta FO, ipsi AB parallela, capiatur super ea hinc inde a puncto F, tam portio FH, quam portio FK $= \sqrt{bc}$. Agatur postea HG, parallela rectæ AL, & constituatur eadem HG talis longitudinis, ut sit HG ad HK in eadem ratione, quam habet a ad c. Denique diametro HK describatur hyperbola, ita ut HG exhibeat, tam parametrum ejus diametri, quam positionem suarum ordinatarum. Et hyperbola, subinde descripta, locus erit quæsitus.

Ducatur enim ex puncto aliquo M ordinata ad diametrum MO, quæ extendatur usque donec, ipsi AB occurrat in N. Et, positis AN, sive FO $= x$, & MN $= y$, erit ex constructione $MO = y - a$. Sed, propter hyperbolam, MO quadratum est ad differentiam quadratorum FO, FH, ut est HG ad HK. Quare erit, ut $yy - 2ay + aa$ ad $xx - bc$, ita a ad c. Unde fiet $yy - 2ay + aa = axx : c - ab$; sive etiam $yy - 2ay - axx : c + aa + ab = 0$, quæ est æquatio construenda.

X. *Exemplum secundum, casum maxime compositum continens.*

X. Oporteat etiam, *construere æquationem* $yy - 2axy : c - aaxx : cc - 2by + aa = 0$, *quæ similiter locum exhibet ad hyperbolam*. Quia hic adest terminus xy; instituta comparatione, habebitur primo $2m : n = - 2a : c$. Quare, assumpta $n = c$, fiet $2m = - 2a$, sive etiam $m = - a$. Comparatis autem terminis reliquis, habebitur quoque $mm : nn - pss : 2tnn = - aa : cc$, $2q = - 2b$, $2qm : n - prs : tn = 0$, & $qq + pt : 2 - prr : 2t = aa$.

Hinc in prima harum æquationum, subrogatis valoribus ipsarum m, & n, fiet $aa:cc - pss : 2tcc = - aa:cc$, hoc est $2aa : cc = pss : 2tcc$, sive etiam $p : 2t = 2aa : ss$. Unde infertur, rationem parametri ad diametrum æqualem esse debere ei, quam habet $2aa$ ad ss. Et quoniam ex secunda æquatione eruitur $q = - b$, habebitur ope tertiæ $pr : t = 2ab:s$, sive etiam $pr : 2t = ab : s$. Quumque sit $p : 2t = 2aa:ss$; erit per substitutionem $2aar : ss = ab:s$, atque adeo $r = bs:2a$.

Denique, ob quartam æquationem, erit $bb + pt:2 - bb:2 = aa$, sive etiam $aa - bb : 2 = pt : 2$, aut $2aa - bb = pt$. Quum autem habeatur $p : 2t = 2aa : ss$, fiet quoque

pt

$pt = 4aatt:ss$. Unde erit $4aatt:ss = 2aa - bb$, & $tt = ss:2 - bbss:4aa$: proindeque, per extractionem quadratæ radicis, habebitur $t = \surd(ss:2 - bbss:4aa)$: adeo nempe, ut nisi sit $2aa$ major, quam bb, valor ipsius t, vel nullus, vel imaginarius prodibit.

Ponamus ergo, $2aa$ majorem esse, quam bb. Et, designatis valoribus incognitæ x per portiones AN rectæ AB, sit AL ea, cui æquidistantes esse debent valores alterius incognitæ y. Capiatur in AB portio AC $= c$. Et, ducta CD, ipsi AL parallela, fiat eadem CD $= a$, jungaturque AD. Abscindatur deinde ex AL portio AF $= b$, perque punctum F agatur recta EO parallela ipsi AD. Fiat postea FE $= bs:2a$. Et hinc inde a puncto E capiatur, tam portio EH, quam portio EK $= \surd(ss:2 - bbss:4aa)$. FIG. 97.

Ducatur porro HG, æquidistans eidem AL, & constituatur eadem HG talis longitudinis, ut sit HG ad HK in eadem ratione, quam habet $2aa$ ad ss. Denique diametro HK describatur hyperbola, ita ut HG exhibeat, tam parametrum ejus diametri, quam positionem suarum ordinatarum. Et hyperbola, subinde descripta, locus erit quæsitus. Quod ut palam fiat, ducatur ex puncto aliquo M ordinata ad diametrum MO, quæ occurrat ipsis AB, AD in N, & R; positisque AN $= x$, & MN $= y$, erit, ob triangula æquiangula ACD, ANR, NR $= ax:c$, & AR, sive FO $= sx:c$.

Hinc, quum sit MR $= y - ax:c$, & AF, sive RO $= b$: erit reliqua MO $= y - ax:c - b$.

$-b$. Est autem ex constructione $FE = bs:2a$. Quare erit tota $EO = sx:c + bs:2a$. Jam vero, propter hyperbolam, MO quadratum est ad differentiam quadratorum EO, EH, ut est HG ad HK. Itaque, quum habeatur, ut $yy - 2axy:c + aaxx:cc - 2by + 2abx:c + bb$ ad $ssxx:cc + 2bssx:2ac + bbss:4aa - ss:2 + bbss:4aa$, ita $2aa$ ad ss; erit $yy - 2axy:c + aaxx:cc - 2by + 2abx:c + bb = 2aaxx:cc + 2abx:c + bb:2 - aa + bb:2$, quae reducta exhibebit aequationem propositam $yy - 2axy:c - aaxx:cc - 2by + aa = 0$.

XI. Praecedentis exempli casus omnes expenduntur.

XI. In allato igitur exemplo, ut valor semidiametri t realis evadat, necesse est, ut $2aa$ major sit, quam bb. Sed, si fuerit $2aa$ minor, quam bb, tunc ejusdem semidiametri valor prodibit imaginarius. In isto autem casu, ut superius innuimus, explicandus est locus per hyperbolas conjugatas, & fieri debet EH, vel $EK = \sqrt{(bbss:4aa - ss:2)}$. Nec difficile id erit ostendere. FIG. 97.

Sumatur enim in altera hyperbolarum conjugatarum punctum aliquod M, ex quo ducatur ad diametrum HK ordinata MO, ipsi AB occurrens in N. Jamque, positis adhuc $AN = x$, & $MN = y$; erit $MO = y - ax:c - b$, & $EO = sx:c + bs:2a$. Sed in isto casu MO quadratum est ad summam quadratorum EO, EH, ut HG ad HK. Quare, quum sit, ut $yy - 2ay:c + aaxx:cc - 2by + 2abx:c + bb$ ad $ssxx:cc + 2bssx:2ac + bbss:4aa + bbss:4aa - ss:2$, ita $2aa$ ad ss; erit $yy - 2axy:c + aaxx:cc - 2by + 2abx:c + bb = 2aaxx:cc + 2abx:c + bb - aa$, sive etiam $yy -$

$2axy:c$

$2axy : c - aaxx : cc - 2by + aa = 0$.

Fieri etiam potest, ut sit $2aa = bb$. Et tunc, evanescente valore semidiametri t, vertetur hyperbola in rectas duas, in centro E sese mutuo secantes. Id vero ut ostendamus, addatur utrique æquationis construendæ parti communis quantitas $2aaxx: cc + 2abx : c + bb - aa$; & erit $yy - 2axy: c + aaxx : cc - 2by + 2abx : c + bb = 2aaxx : cc + 2abx: c + bb - aa$, sive etiam $yy - 2axy: c + aaxx: cc - 2by + 2abx : c + bb = bbxx: cc + 2abx: c + aa$. Quare, per extractionem quadratæ radicis, fiet, tum $y - ax: c - b = bx : c + a$, cum $-y + ax: c + b = bx : c + a$: quæ duæ æquationes ad lineam rectam nos ducunt.

Et quidem, quod evanescente valore semidiametri t, hyperbola verti debeat in rectas duas, in centro sese invicem secantes; id generaliter vidimus supra, ubi sectionum conicarum ortum exposuimus. Quod autem locus explicari debeat per hyperbolas conjugatas, quum ejusdem semidiametri valor prodit imaginarius; id universaliter pendet ex eo, quod in hyperbolis conjugatis quadratum cujusque ordinatæ proportione correspondet, non quidem differentiæ, sed summæ quadratorum, quæ fiunt ex semidiametro, & portione ejus, ordinata, & centro comprehensa.

Hinc notetur hoc loco velim, quod si construendus sit locus aliquis ad hyperbolam, relate ad diametros consideratam, per reductionem ejus ad formulam simplicissimam, & æquatio reducta formam induat,

non

non quidem istius $myy : n = xx - dd$, sed alterius hujus $myy : n = xx + dd$; tunc ipse locus per hyperbolas conjugatas poterit explicari; quum sit, ut n ad m, ita quadratum ordinatæ y ad summam quadratorum, quæ fiunt ex semidiametro d, & portione x, centro & ordinata comprehensa.

Neque vero mirum censeri debet, quod id superius a nobis non fuerit adnotatum. Si enim reductæ æquationis $myy : n = xx + dd$ termini omnes multiplicentur per n, iidemque dividantur per m; fiet $yy = nxx : m + ndd : m$, sive etiam $nxx : m = yy - ndd : m$, quæ proculdubio per hyperbolas principales debet explicari. Unde, per reductionem æquationis ad formulam simplicissimam, semper casus vitari potest, qui ad hyperbolas conjugatas nos manuducit.

XII. *Quid in compositione locorum ad hyperbolam, relate ad diametros consideratam, potissimum notari debeat.*

XII. Cæterum, *in compositione locorum ad hyperbolam, relate ad diametros consideratam, illud etiam sedulo notari debet*, quod existentibus x, & y duabus construendæ æquationis incognitis, fieri quandoque possit, ut designari debeant per portiones AN rectæ AB valores incognitæ y, perque rectas NM valores alterius incognitæ x. Nec sane in utraque loca construendi ratione difficile erit definire, quando demum id fieri debeat.

Nimirum, quum construitur locus, per reductionem æquationis ad formulam simplicissimam, fieri id debet, quotiescumque in æquatione reducta per fractionem aliquam multiplicatum reperitur quadratum, vel incognitæ x, vel ejus, quæ ex ipsa dependet.

Sic

Sic æquatio $mxx:n - 2mx + mn = yy + 2ay$ mutationem illam exposcit. Nam, faciendo $x - n = z$, & $y + a = u$, habebitur loco ejus hæc alia $mzz: n = uu - aa$: ubi per fractionem $m : n$ reperitur multiplicatum quadratum incognitæ z, quæ dependet ex x; quum habeatur $x - n = z$.

Quotiescumque vero construitur locus, per reductionem æquationis ad formulam compositam, illud idem fieri debet, quando in æquatione construenda quadratum incognitæ x ab omni fractione immune reperitur. Sic sequens æquatio $xx - 2axy:c + aayy:2cc - 2ax - 2by + cc = 0$ exigit quoque eam variationem, quia quadratum incognitæ x illud est, quod in ea omni fractione denudatum occurrit.

Interim, quum construitur æquatio, per reductionem ad formulam compositam, eademque natura sua mutationem illam exposcit, necesse est, ut etiam in formula incognitæ varientur. Sic formula, cum qua comparanda est æquatio $xx - 2axy: c + aayy:2cc - 2ax - 2by + cc = 0$, haud quidem esse debet $yy + 2mxy:n + mmxx:nn - pssxx:2tnn + 2qy + 2qmx : n - prsx : tn + qq + pt: 2 - prr: 2t = 0$, sed $xx + 2myx: n + mmyy: nn - pssyy: 2tnn + 2qx + 2qmy: n - prsy : tn + qq + pt: 2 - prr: 2t = 0$.

Sed hic quoque, perinde ac in ellipsi, fatendum est, variationem istam non esse absolute necessariam. Nam in priore exemplo, etsi per reductionem habeatur $mzz : n = uu - aa$; multiplicando tamen omnes æquationis his terminos per n, eosdemque dividendo per m, fiet $zz = nuu : m - naa : m$, sive etiam $nuu : m = zz + naa : m$: ubi per fractionem $n : m$ multiplicatum reperitur quadratum incognitæ u, quæ dependet ex y; qum habeatur $y + a = u$: licet ipsa æquatio explicari debeat per hyperbolas conjugatas.

Atque ita quoque in secundo exemplo, etsi æquatio sit $xx - 2axy : c + aayy : 2cc - 2ax - 2by + cc = 0$; multiplicatis tamen terminis omnibus per $2cc$, iisdemque divisis per aa, habebitur $2ccxx : aa - 4cxy : a + yy - 4ccx : a - 4bccy : aa + 2c^4 : aa = 0$: ubi quadratum incognitæ y omni vacat fractione. Nec difficile erit intelligere, quod hoc idem præstari possit in omnibus æquationibus, quæ ad hyperbolam, relate ad diametros consideratam, nos manuducunt.

XIII. *Quomodo distinguenda sint loca, quæ hyperbola æquilatera terminantur.*

XIII. Illud quoque nolim hic silentio præterire, quod sicuti loca ad circulum referri debent ad illa, quæ sunt ad ellipsim; sic *inter loca ad hyperbolam speciatim consideranda sint ea, quæ hyperbola æquilatera terminantur.* Innotescent autem hujusmodi loca, quotiescumque in eorum constructione oritur parameter æqualis diametro, ad quam refertur.

Proponatur, exempli gratia, construenda æquatio $yy - 2ay + aa = xx - 2bx$, quæ ad hyperbolam, relate ad diametros consideratam, nos ducit. Fiat, tum $y - a = z$, cum $x - b = u$. Et quoniam habetur $yy - 2ay + aa = zz$, & $xx - 2bx = uu - bb$; erit per substitutionem $zz = uu - bb$ æquatio reducta.

Du-

Ducatur jam in subjecto plano recta quævis AB, & designentur per portiones ejus AN valores incognitæ x. Quumque in reductione habeatur $x - b = u$, abscindatur ex AB portio AC $= b$. Et quoniam sit quælibet CN $= x - b$, designabunt portiones istæ CN valores incognitæ u. FIG. 98.

Sit deinde CD recta, cui esse debent æquidistantes ipsæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Et quoniam in reductione habetur quoque $y - a = z$, abscindatur ex CD portio CE $= a$; & ducta per punctum E recta EF, ipsi CA parallela, fiet quælibet OM $= y - a$; adeoque ipsæ OM valores referent incognitæ z.

Denique, quum æquatio reducta sit $zz = uu - bb$, liquet, quod, si hinc inde a puncto E capiatur, tum EF, cum EG $= b$, debeat esse FG quæsitæ hyperbolæ diameter. Et quemadmodum, ducta FH, ipsi CD parallela, diametri ejus ordinatæ debent esse æquidistantes rectæ FH; ita si fiat, ut FH sit ad FG in ratione æqualitatis, erit eadem FH parameter illius diametri.

In constructo igitur loco inventa est parameter FH æqualis diametro FG, ad quam refertur. Unde consequens est, ut hyperbola, per quam locus terminatur, sit æquilatera: adeo nempe, ut non modo diameter FG adæquet parametrum suam FH, sed & omnes aliæ diametri parametris suis æquales esse debebunt.

Cæterum, quum hyperbola æquilatera circulo correspondeat, quæri hic potest, cur hy-

hyperbola fiat æquilatera, per solam æqualitatem parametri cum diametro, ad quam refertur; sed non item ellipsis, quippe quæ ut in circulum abeat, requiritur quoque, ut ordinatæ rectos cum eadem diametro angulos constituant.

Pendet id igitur ex eo, quod in qualibet ellipsi binæ adsint conjugatæ diametri æquales, tam inter se, quam cum parametris suis. Unde sola æqualitas parametri cum diametro efficere nequaquam potest, ut ellipsis vertatur in circulum; quum æqualitas illa etiam in ellipsi possit haberi.

C A P. VI.

De constructione locorum ad hyperbolam, relate ad asymptotos consideratam.

I. Locorum ad hyperbolam, relate ad asymptotos considera- tam, formula simplicissima exhibetur.

I. TRadita constructione locorum ad hyperbolam, relate ad diametros consideratam; ostendemus modo, qua ratione construenda sint loca illa, in quibus hyperbola sub contemplatioem venit relate ad asymptotos. Et ut ab ea methodo ordiamur, quæ formulam adhibet, casum omnium simplicissimum continentem, sciendum est, quod in hyperbola, relate ad asymptotos considerata, casus simplicissimus habeatur, quum *ejus puncta omnia ad aliquam ipsius asymptotum referuntur per rectas, quæ sint asymptoto alteri parallelæ.*

Sit

Sit ergo A centrum hyperbolæ, sintque etiam AB, AC duæ ejus asymptoti. Capiatur in hyperbola punctum aliquod M, ex quo demittatur ad asymptotum AB recta MN, asymptoto alteri AC parallela. Tum ponatur AN $= x$, & MN $= y$. Jamque, ob naturam hyperbolæ, rectangulum ANM est ejusdem ubique magnitudinis. Quare, si quantitas ejus vocetur aa, erit hyperbolæ localis æquatio $xy = aa$. Unde semper ac æquatio aliqua ad istiusmodi formam reduci poterit; tunc ea ad hyperbolam, relate ad asymptotos consideratam, proculdubio nos manuducet. Fig. 99.

Sed notetur hoc loco velim, quod etsi punctum M capiatur in hyperbola opposita, adhuc tamen æquatio localis hyperbolæ sit $xy = aa$. Nam, licet in hoc casu habeatur, tam AN $= -x$, quam MN $= -y$; nihilominus rectangulum ANM semper per xy exprimi debet; quum notum sit ex Algebræ Elementis, positivum esse productum, quod oritur ex multiplicatione duarum quantitatum negativarum.

Notatu etiam hic dignum existimo, quantitatem cujusque rectanguli ANM, per aa a nobis designatam, vocari communiter *potentiam* hyperbolæ; nec aliter, datis asymptotis, hyperbolam definiri, quam data etiam ejus potentia. Qua autem ratione hyperbola in plano describi possit, ubi una cum ejus asymptotis data est quoque ejusdem potentia; id quidem inferius ostendemus.

II. Neque vero difficile erit definire, *qua-* II. *Quæ æqua-*

tiones ad formulam illam simplicissimam sunt reducibiles.

qualis esse debeat æquatio, quæ subinde reduci possit, ut formam induat istius $xy = aa$. Primo enim, quemadmodum in formula incognitæ duæ simul multiplicatæ reperiuntur; sic etiam non poterit æquatio aliqua ad eam formulam revocari, nisi contineat productum duarum incognitarum.

Sed productum istud necesse est quoque, ut vel cum nullo earundem incognitarum quadrato, vel cum uno tantum conjungatur: adeo nempe, ut si ambo fuerint in æquatione quadrata incognitarum, locus nunquam erit ad hyperbolam, relate ad suas asymptotos consideratam; sed, per regulas superius traditas, erit, vel ad hyperbolam, consideratam relate ad diametros, vel ad ellipsim, vel etiam ad parabolam.

Proponatur, exempli gratia, æquatio $xy - ax - by - ac = 0$, ubi productum incognitarum cum nullo earum quadrato conjungitur. Fiat $y - a = z$, sive etiam $y = z + a$; & erit per substitutionem $xz + ax - ax - bz - ab - ac = 0$, sive etiam $xz - bz - ab - ac = 0$. Fiat quoque $x - b = u$, ita ut sit $xz - bz = uz$; & erit rursus ope substitutionis $uz - ab - ac = 0$. Fiat demum $ab + ac = ff$; & erit $uz - ff = 0$, sive etiam $uz = ff$ æquatio reducta.

Proponatur etiam æquatio $ax - xx + xy + by - ac = 0$, ubi productum incognitarum cum uno tantum earum quadrato conjungitur. Capiatur $x + b = u$; sive etiam $x = u - b$. Et ponendo ubique $u - b$ loco x, & $uu - 2bu + bb$ loco xx; erit $au - uu +$

2bu

$2bu + uy - ab - bb - ac = 0$. Capiatur quoque $a - u + 2b + y = z$, ita ut sit $az - uu + 2bu + uy = uz$; & erit per substitutionem $uz - ab - bb - ac = 0$. Unde, ponendo demum $ab + bb + ac = ff$, fiet $uz - ff = 0$, sive etiam $uz = ff$ æquatio reducta.

III. Sed exemplis modo ostendamus, *qua ratione, per reductionem æquationis ad formulam simplicissimam, loca ad hyperbolam, relate ad asymptotos consideratam, construantur*. Primo itaque proponatur construenda æquatio $xy - ax - by - ac = 0$, quæ, ut paulo ante ostensum est, reducitur ad $uz = ff$, ponendo $y - a = z$, $x - b = u$, & $ab + ac = ff$. *III. Ostenditur exemplis constructio horum locorum per formulam simplicissimam. Exemplum primum.*

Ducatur in subjecto plano recta quævis AB, ex qua abscindatur portio $AC = b$. Jamque, si designentur per portiones AN ipsius AB valores incognitæ x, fiet unaquæque reliquarum portionum $CN = x - b$; adeoque, quum habeatur $x - b = u$, ipsæ CN designabunt valores incognitæ u. FIG. 100.

Sit deinde CD recta, cui esse debent æquidistantes ipsæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Et quoniam in reductione habetur $y - a = z$, abscindatur ex CD portio $CE = a$; & ducta per punctum E recta EF, ipsi CA parallela, fiet quælibet $OM = y - a$; atque adeo ipsæ OM valores referent incognitæ z.

Denique, quum æquatio reducta sit $uz = ff$, liquet, debere esse punctum E centrum describendæ hyperbolæ, & rectas ED, EF asymptotos ejus. Describatur ergo hyperbola ista, sed ita tamen, ut sit ff potentia ejus,

 & ea-

& eadem erit terminus loci propositi.

IV. *Demonstratio constructionis praecedentis exempli in medium affertur.*

IV. Ut autem ostendere possimus, *hyperbolam istam esse lineam, ad quam refertur aequatio* $xy - ax - by - ac = 0$, juvat prius advertere, quod si super AB capiatur ad partem oppositam portio $AG = c$, hyperbola quidem principalis nullimode secet rectam AB, ejus autem opposita transire debeat per punctum G. Nam in aequatione, de qua agitur, si ponatur $y = 0$, habebitur $- ax - ac = 0$, unde infertur $x = - c$.

Fig. 100.

Id quum ita sit, capiatur primo in hyperbola principali punctum aliquod M, ex quo demittatur ad asymptotum EF recta MO, ipsi ED parallela, conveniens cum AB in N. Jamque, positis $AN = x$, & $MN = y$; erit ex constructione CN, sive $EO = x - b$, $OM = y - a$, & rectangulum $EOM = xy - ax - by + ab$. Unde, quum sit ff, sive etiam $ab + ac$ potentia hyperbolae; erit $xy - ax - by + ab = ab + ac$, sive etiam $xy - ax - by - ac = 0$, quae est aequatio construenda.

Ducantur nunc ex punctis A, & G in hyperbola opposita rectae AH, GK, ipsi ED parallelae. Tum capiatur secundo punctum aliquod M in portione HX ipsius hyperbolae oppositae, ex quo demittatur pariter ad asymptotum EF recta MO, eidem ED parallela, conveniens cum AB in N. Et quamquam in isto casu maneat $AN = x$, fiet tamen CN, sive $EO = b - x$. Quumque hic poni debeat $MN = - y$; erit $MO = - y + a$: proindeque, ob naturam hyperbolae, rursus erit ut antea $xy - ax - by - ac = 0$.

Ca-

Capiatur tertio in portione hyperbolæ oppositæ HK punctum quodvis M, ex quo etiam ducatur ad asymptotum EF recta MO, alteri ED parallela, conveniens cum AB in N. Patetque, in isto casu fieri, tum $AN = -x$, cum $MN = -y$; adeoque esse, ut in casu præcedenti, CN, sive $EO = b - x$, & $MO = -y + a$. Quare, ob hyperbolæ naturam, invenietur semper æquatio $xy - ax - by - ac = 0$.

Capiatur denique punctum M in portione reliqua KZ hyperbolæ oppositæ, ex quo similiter demittatur ad asymptotum EF recta MO, alteri ED parallela, conveniens cum AB in N. Et quoniam in isto casu fit $AN = -x$, & $MN = y$; adhuc erit CN, sive $EO = b - x$, & $MO = -y + a$. Unde, ob naturam hyperbolæ, semper habebitur æquatio $xy - ax - by - ac = 0$.

V. Proponatur secundo *construenda æquatio altera, superius allata*, $ax - xx + xy + by - ac = 0$, quæ, ut ibidem ostensum est, reducitur ad $uz = ff$, ponendo $x + b = u$, $a - u + 2b + y = z$, & $ab + bb + ac = ff$. *V. Exemplum secundum, casum exhibens paulo difficiliorem.* FIG. 101.

Ducatur in subjecto plano recta quævis AB, & per portiones ejus AN designentur valores incognitæ x. Quumque habeatur $x + b = u$, capiatur super AB ad plagam oppositam portio $AC = b$. Et quoniam fit quælibet $CN = x + b$, designabunt portiones CN valores incognitæ u.

Sit deinde CD recta, cui esse debent æquidistantes ipsæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Et quoniam in redu-

& eadem erit terminus loci propositi.

IV. *Demonstratio constructionis precedentis exempli in medium affertur.*

IV. Ut autem ostendere possimus, *hyperbolam istam esse lineam, ad quam refertur aequatio* $xy - ax - by - ac = 0$, juvat prius advertere, quod si super AB capiatur ad partem oppositam portio AG $= c$, hyperbola quidem principalis nullimode secet rectam AB, ejus autem opposita transire debeat per punctum G. Nam in aequatione, de qua agitur, si ponatur $y = 0$, habebitur $-ax - ac = 0$, unde infertur $x = -c$.

Fig. 100.

Id quum ita sit, capiatur primo in hyperbola principali punctum aliquod M, ex quo demittatur ad asymptotum EF recta MO, ipsi ED parallela, conveniens cum AB in N. Jamque, positis AN $= x$, & MN $= y$; erit ex constructione CN, sive EO $= x - b$, OM $= y - a$, & rectangulum EOM $= xy - ax - by + ab$. Unde, quum sit ff, sive etiam $ab + ac$ potentia hyperbolae; erit $xy - ax - by + ab = ab + ac$, sive etiam $xy - ax - by - ac = 0$, quae est aequatio construenda.

Ducantur nunc ex punctis A, & G in hyperbola opposita rectae AH, GK, ipsi ED parallelae. Tum capiatur secundo punctum aliquod M in portione HX ipsius hyperbolae oppositae, ex quo demittatur pariter ad asymptotum EF recta MO, eidem ED parallela, conveniens cum AB in N. Et quamquam in isto casu maneat AN $= x$, fiet tamen CN, sive EO $= b - x$. Quumque hic poni debeat MN $= -y$; erit MO $= -y + a$: proindeque, ob naturam hyperbolae, rursus erit ut antea $xy - ax - by - ac = 0$.

Ca-

Capiatur tertio in portione hyperbolæ oppositæ HK punctum quodvis M, ex quo etiam ducatur ad asymptotum EF recta MO, alteri ED parallela, conveniens cum AB in N. Patetque, in isto casu fieri, tum $AN = -x$, cum $MN = -y$; adeoque esse, ut in casu præcedenti, CN, sive $EO = b - x$, & $MO = -y + a$. Quare, ob hyperbolæ naturam, invenietur semper æquatio $xy - ax - by - ac = o$.

Capiatur denique punctum M in portione reliqua KZ hyperbolæ oppositæ, ex quo similiter demittatur ad asymptotum EF recta MO, alteri ED parallela, conveniens cum AB in N. Et quoniam in isto casu fit $AN = -x$, & $MN = y$; adhuc erit CN, sive $EO = b - x$, & $MO = -y + a$. Unde, ob naturam hyperbolæ, semper habebitur æquatio $xy - ax - by - ac = o$.

V. Proponatur secundo *construenda æquatio altera, superius allata*, $ax - xx + xy + by - ac = o$, quæ, ut ibidem ostensum est, reducitur ad $uz = ff$, ponendo $x + b = u$, $a - u + 2b + y = z$, & $ab + bb + ac = ff$. V. *Exemplum secundum, casum exhibens paulo difficiliorem.* FIG. 101.

Ducatur in subjecto plano recta quævis AB, & per portiones ejus AN designentur valores incognitæ x. Quumque habeatur $x + b = u$, capiatur super AB ad plagam oppositam portio $AC = b$. Et quoniam fit quælibet $CN = x + b$, designabunt portiones CN valores incognitæ u.

Sit deinde CD recta, cui esse debent æquidistantes ipsæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Et quoniam in reductione habetur $a - x + 2b + y = z$, sive etiam $y + a + b - x = z$; capiatur super CD ad partem contrariam, tum portio CE $= a + b$, cum portio EF æqualis ipsi AC. Jamque, completo parallelogrammo AE, ductaque FG, ipsis NM occurrente in O, fiet unaquæque OM $= y + a + b - x$; adeoque ipsæ OM valores referent incognitæ z.

Quoniam autem rectæ istæ OM correspondent portionibus ipsius FG; utique erit F centrum describendæ hyperbolæ, tum item FG, FD erunt asymptoti ejus. Verum portiones illæ FO tunc demum reperiuntur æquales ipsis CN, ubi æquales sunt duæ AC, FG. Unde procul est, ut eædem FO designare queant valores incognitæ u; adeoque, etsi æquatio reducta sit $uz = ff$, multum tamen abest, ut sit ff quæsitæ hyperbolæ potentia.

Itaque, ut definiamus potentiam describendæ hyperbolæ, sit AC ad FG, ut est n ad m. Quumque hac ratione fiat quælibet FO $= mu : n$, si ponamus ulterius, quod quæsita potentia sit gg, erit ejusdem hyperbolæ localis æquatio $muz : n = gg$, sive etiam $uz = ngg : m$. Erat autem $uz = ff$. Quare, instituta comparatione, fiet $ngg : m = ff$. Unde infertur $gg = mff : n$; adeoque potentia hyperbolæ describendæ debet esse $mff : n$.

VI. *Veritas constructionis praecedentis exempli demonstratur.*

VI. Hic etiam, ut ostendere possimus, *hujusmodi hyperbolam satisfacere propositæ æquationi* $ax - xx + xy + by - ac = 0$, juvat prius advertere, quod si ex AB abscindatur portio AH $= a : 2$, & hinc inde a puncto H capiatur, tum HK, cum HL $= \sqrt{(aa : 4 - ac)}$,

FIG. 101.

ac), hyperbola quidem principalis transire debeat per puncta K, & L; ejus autem opposita nullimode secet rectam AB. Nam in æquatione, de qua agitur, si ponatur $y=o$, fiet $ax-xx-ac=o$, unde infertur, tum $x=a:2+\surd(aa:4-ac)$, cum $x=a:2-\surd(aa:4-ac)$.

Id quum ita sit, extendatur AG usque donec hyperbolam principalem secet in I, & capiatur in portione ejus IL, aut KX punctum aliquod M, ex quo demittatur ad asymptotum FG recta MO, alteri FD parallela, conveniens cum AB in N. Jamque, positis AN $=x$, & MN $=y$; erit ex constructione CN $=x+b$, & MO $=y+a+b-x$. Sed CN est ad FO, ut AC ad FG, sive etiam, ut n ad m. Quare erit FO $=mx:n+mb:n$.

Hinc erit rectangulum FOM $=mxy:n+max:n+mbx:n-mxx:n+mby:n+mab:n+mbb:n-mbx:n$. Sed, ob naturam hyperbolæ, quantitas ejusdem rectanguli est $mff:n$. Quare erit $mxy:n+max:n+mbx:n-mxx:n+mby:n+mab:n+mbb:n-mbx:n=mff:n$, sive etiam $xy+ax+bx-xx+by+ab+bb-bx=ff$, quæ, translatis terminis omnibus ad eandem partem, & posito loco ff valore ejus $ab+bb+ac$, reducitur ad $xy+ax-xx+by-ac=o$.

Capiatur secundo in portione hyperbolæ principalis KL punctum aliquod M, ex quo etiam demittatur ad asymptotum FG recta MO, alteri FD parallela, conveniens cum AB in N. Et quoniam in isto casu fit AN $=x$, & MN $=-y$; erit adhuc CN $=x+b$, FO $=mx:n+mb:n$, & MO $=y$

$+ a + b - x$. Unde, ob hyperbolæ naturam, rursus erit ut antea $xy + ax - xx + by - ac = 0$.

Capiatur tertio in portione reliqua hyperbolæ principalis IZ punctum quodvis M, ex quo ducatur pariter ad asymptotum FG recta MO, alteri FD parallela, conveniens cum AB in N. Patetque, in hoc casu fieri AN $= - x$, & MN $= y$. Hinc erit semper CN $= = x + b$, FO $= mx : n + mb : n$, & MO $= y + a + b - x$, Quare, ob naturam hyperbolæ, habebitur semper æquatio $xy + ax - xx + by - ac = 0$.

Capiatur demum in hyperbola opposita punctum quodvis M, ex quo similiter ducatur ad asymptotum FG recta MO, alteri FD parallela, quæ conveniat cum AB in N. Quumque in isto casu fiat, tum AN $= - x$, cum MN $= - y$; erit adhuc CN $= x + b$, FO $= mx : n + mb : n$, & MO $= y + a + b - x$: proindeque, ob hyperbolæ naturam, adhuc habebitur eadem æquatio $xy + ax - xx + by - ac = 0$.

Fieri autem potest, ut puncta duo H, & K coeant in unum, & ipsa AB hyperbolæ tangens evadat: nimirum, quum habetur $a = 4c$; quandoquidem in hoc casu radices duæ æquationis $ax - xx - ac = 0$ fiunt æquales inter se. Sed contingere quoque potest, ut recta AB nec secet, nec tangat hyperbolam: scilicet, si a minor sit, quam $4c$; quum in isto casu ejusdem æquationis radices duæ evadant imaginariæ.

VII. Locorum ad

VII. Atque ita quidem construuntur lo-

loca ad hyperbolam, relate ad asymptotos consideratam, per reductionem suarum æquationum ad formulam simplicissimam. Videamus itaque modo, *qua ratione eadem loca ad hyperbolam construi debeant, reducendo eorum æquationes ad formulam, quæ sit omnium maxime composita*. Quem in finem, qualis sit istiusmodi formula, operæ pretium est, ut primo loco definiamus. *hyperbolam, relate ad asymptotos consideratam, formula generalis exhibetur.*

Nimirum, referendo hyperbolæ puncta omnia ad rectam positione datam, per rectas alias, quæ sint uni ex asymptotis parallelæ; perspicuum est, tria contingere posse. Primo, ut recta positione data sit asymptotus altera. Secundo, ut sit aliqua ejus parallela. Et tertio demum, ut angulum cum eadem asymptoto constituat. Unde, sicuti ex tribus hisce casibus priores duo sub tertio continentur; ita & formula hyperbolæ, relate ad asymptotos consideratæ, omnium maxime composita, ea erit, quæ ex tertio illo casu deducitur.

Sit igitur E centrum hyperbolæ; sintque etiam EH, EK binæ ejus asymptoti. Agatur recta AD, asymptoto EH parallela; & per aliquod ejus punctum A ducatur quoque obliqua AB. Sumatur postea in AB punctum quodvis C; & ductis rectis AF, CD, asymptoto alteri EK æquidistantibus, ponatur $AC = n$, $CD = m$, $AD = s$, $AF = q$, & $EF = r$. FIG. 102.

Capiatur nunc in hyperbola punctum aliquod M, ex quo demittatur ad asymptotum EH recta MO, alteri EK parallela, conveveniens cum AB in N, & cum AD in R; ponaturque adhuc AN $= x$, & NM $= y$. Quia ergo AN est ad NR, ut AC ad CD; erit NR $= mx : n$; adeoque, quum duæ AF, RO inter se sint æquales, erit MO $= y + mx:n + q$. Et quoniam AN est ad AR, ut AC ad AD; erit AR, sive FO $= sx : n$: proindeque erit EO $= r + sx : n$.

Hinc erit rectangulum EOM $= ry + mrx:n + rq + sxy:n + msxx : nn + sqx : n$; adeoque, si potentia hyperbolæ vocetur pp, habebitur, ob naturam ejusdem hyperbolæ, $ry + mrx : n + rq + sxy : n + msxx:nn + sqx:n = pp$, sive etiam $xy + mxx : n + nry : s + mrx : s + qx + nrq : s - npp : s = o$: & propterea formulam hyperbolæ, relate ad asymptotos considerata, omnium maxime compositam, comperta æquatio nobis exhibebit.

Perspicuum est autem, in hujusmodi formula productum duarum incognitarum xy cum uno tantum earum quadrato conjungi; nec quidquam obstare, quin quadratum illud ab ipsa formula deficiat: nimirum, si fuerit $m = o$. Unde veritas regulæ, superius traditæ, pro cognoscendis locis ad hyperbolam, relate ad suas asymptotos consideratam, ex ipsa eorum formula generali prono alveo fluit.

VIII. *Quomodo per inventam formulam generalem præfata loca construantur.*

VIII. Sed ostendamus modo, *quo pacto, ope inventæ formulæ generalis, construantur loca ad hyperbolam, relate ad ejus asymptotos consideratam*. Nimirum, comparationis ope definiendæ sunt primum quantitates, quæ locum determinant. Et siquidem omnes inveniunveniuntur positivæ, danda est rectis, quas referunt, illa eadem positio, quam in figura formulæ reperiuntur habere. Sed si earum aliqua prodit negativa; tunc recta, quam exhibet, capienda est ad plagam oppositam.

Quantitates porro, quæ locum determinant, sunt *m*, *n*, *pp*, *q*, *r*, *s*. Verum, instituta comparatione, dumtaxat ipsarum *pp*, *q*, *r* valores innotescunt. Et, quantum ad priores duas *m*, & *n*, nonnisi ratio, quam habent inter se, cognita fiet. Hinc valor unius ex iis sumi poterit ad libitum. Et tunc, per cognitam rationem, quam inter se habent, etiam valor alterius notus evadet. Præstat autem, utcumque assumere valorem ipsius *n*, quem tamen positivum semper esse oportebit.

Determinatis valoribus ipsarum *m*, & *n*, etiam quantitatis *s* valor innotescet. In triangulo enim CAD notus est angulus ACD, velut æqualis angulo ANM, qui vel datus est, vel sumitur ad libitum. Quare, ubi duo ejus latera AC, CD, designata per quantitates *n*, & *m*, similiter nota sunt; cognoscemus quoque tertium latus AD, quod exhibet quantitas *s*. Speciatim autem erit $s = n$, ubi valor ipsius *m* nullus reperitur; quandoquidem, evanescente CD, cadit AB super AD, & puncta duo C, & D coeunt in unum. FIG. 102.

Illud quoque sedulo hic notandum existimo, quod ubi valor ipsius *pp*, quæ hyperbolæ potentiam refert, prodit negativus; tunc ipsa hyperbola describenda sit ad partem alteram asymptoti EH. Nec obscura est hujus rei ratio. Nam negatio illa, non tam affi-

cit

cit hyperbolæ potentiam, quam rectangulum EOM, cui potentia illa est æqualis. Unde, quum ordinata OM capienda sit ad partem contrariam; omnino necesse est, ut hyperbola describatur ad partem alteram ipsius EH

IX. *Exemplum primum, casum exhibens simpliciorem.* IX. Oporteat itaque primo, *construere æquationem* $xy - ax - by - ac = o$, *quæ locum exhibet ad hyperbolam, relate ad asymptotos consideratam*. Quia in ea deest quadratum xx; utique fractio $m : n$, per quam illud in formula multiplicatum reperitur, debet esse nihilo æqualis. Unde, quum sit $m = o$; per ea, quæ paulo ante notata sunt, erit quoque $n = s$; adeoque ipsa formula fiet $xy + ry + qx + rq - pp = o$.

Jam, instituta comparatione habebitur, $q = - a$, $r = - b$, & $rq - pp = - ac$. Unde, quemadmodum $- a$, $- b$ sunt valores ipsarum q, & r; ita, substitutis valoribus hisce in tertia æquatione, fiet $ab - pp = - ac$, hoc est $pp = ab + ac$: proindeque, designatis valoribus incognitæ x per portiones AN rectæ AB, & existente AL recta, cui æquidistantes esse debent valores alterius incognitæ y, construetur proposita æquatio in eum, qui sequitur, modum.

Fig. 103. Abscindatur ex AL portio AF $= a$. Tum, ducta FK, ipsi AB parallela, capiatur super ea portio FE $= b$. Ducatur porro per punctum E recta EK, æquidistans ipsi AL. Denique centro E, & asymptotis EH, EK describatur hyperbola talis, ut ejus potentia sit $ab + ac$. Et hyperbola, subinde descripta, locus erit quæsitus.

Du-

Ducatur enim ex puncto aliquo M ad asymptotum EH recta MO, alteri EK parallela, conveniens cum AB in N. Et, positis AN, sive FO $= x$, & MN $= y$; erit ex constructione MO $= y - a$, EO $= x - b$, & rectangulum EOM $= xy - ax - by + ab$. Est autem hyperbolæ potentia $ab + ac$. Quare erit $xy - ax - by + ab = ab + ac$, sive etiam $xy - ax - by - ac = 0$, quæ est æquatio construenda.

X. Oporteat etiam, *construere æquationem* $xy + ay + bx - axx : c + ac = 0$, *quæ similiter locum exhibet ad hyperbolam, relate ad ejus asymptotos consideratam*. Quia hic adest quadratum xx; instituta comparatione, habebitur primo $m : n = - a : c$. Quare, assumpta $n = c$, fiet $m = - a$. Comparatis autem terminis reliquis, habebitur quoque $nr : s = a$, $mr : s + q = b$, & $nrq : s - npp : s = ac$. X. *Exemplum secundum, casum magis compositum continens.*

Hinc in prima harum æquationum, subrogato valore ipsius n, fiet $cr : s = a$, sive etiam $r = as : c$. Et quoniam ex secunda æquatione eruitur $q = b - mr : s$; per substitutionem fiet quoque $q = b + aa : c$. Quumque demum per tertiam habeatur $pp = rq - acs : n$; substitutionis ope fiet etiam $pp = abs : c + a^3s : cc - as$: adeo nempe, ut nisi sit $bc + aa$ major, quam cc, valor ipsius pp prodibit, vel nullus, vel negativus.

Ponamus ergo, $bc + aa$ majorem esse, quam cc. Et, designatis valoribus incognitæ x per portiones AN rectæ AB, sit AL ea, cui æquidistantes esse debent valores al- FIG. 104.

te-

terius incognitæ y. Capiatur in AB portio AC $= c$. Tum, ducta CD, ipsi AL parallela, fiat eadem CD $= a$, jungaturque AD. Capiatur deinde super AL ad partem oppositam portio AF $= b + aa:c$, perque punctum F agatur recta EH, parallela ipsi AD. Fiat postea FE $= as:c$, & ducatur per punctum E recta EK æquidistans rectæ AL.

Denique centro E, & asymptotis EH, EK describatur hyperbola, quæ habeat pro sua potentia quantitatem $abs:c + a^3s:cc - as$. Et hyperbola, subinde descripta, locus erit quæsitus. Quod ut palam fiat, ducatur ex puncto aliquo M ad asymptotum EH recta MO, alteri EK parallela, quæ occurrat ipsis AB, AD in punctis N, & R; positisque AN $= x$, & MN $= y$, erit ob triangula æquiangula ACD, ANR, NR $= ax:c$, & AR, sive FO $= sx:c$.

Hinc, quum sit MR $= y - ax:c$, & AF, sive RO $= b + aa:c$; erit tota MO $= y - ax:c + b + aa:c$. Est autem ex constructione FE $= as:c$. Quare erit tota EO $= sx:c + as:c$; atque adeo erit rectangulum EOM $= sxy:c - asxx:cc + bsx:c + aasx:cc + asy:c - aasx:cc + abs:c + a^3s:cc$. Est autem $abs:c + a^3s:cc - as$ hyperbolæ potentia. Itaque erit $sxy:c - asxx:cc + bsx:c + aasx:cc + asy:c - aasx:cc + abs:c + a^3s:cc = abs:c + a^3s:cc - as$, quæ reducta exhibebit æquationem propositam $xy - axx:c + bx + ay + ac = 0$.

XI. *Præcedentis exempli ex-* XI. In allato igitur exemplo, ut valor potentiæ pp positivus evadat, necesse est, ut

ut $bc + aa$ major sit, quam cc. Sed, si fuerit *sus omnes expendantur.*
$bc + aa$ minor, quam cc; tunc ejusdem potentiæ valor prodibit negativus. In isto autem casu, ut superius innuimus, describenda est hyperbola ad partem alteram asymptoti EH, & esse debet $as - abs : c - a^3s : cc$ FIG.
potentia ejus. Nec difficile id erit ostendere. 105.

Nam, ducta adhuc ex aliquo hyperbolæ puncto M ad asymptotum EH recta MO, alteri EK parallela, quæ conveniat cum AB in N, & cum AD in R; poni debet AN $= x$, & MN $= - y$. Unde, quum fiat EO $= sx : c + as : c$, & MO $= - y + ax : c - b - aa : c$; erit rectangulum EOM $= - sxy : c + asxx : cc - bsx : c - aasx : cc - asy : c + aasx : cc - abs : c - a^3s : cc$; adeoque, ob naturam hyperbolæ, erit $- sxy : c + asxx : cc - bsx : c - aasx : cc - asy : c + aasx : cc - abs : c - a^3s : cc = as - abs : c - a^3s : cc$, unde eruitur æquatio construenda $xy - axx : c + bx + ay + ac = o$.

Fieri etiam potest, ut sit $bc + aa = cc$. Et tunc, evanescente hyperbolæ potentia, cum suis asymptotis hyperbola ipsa confundetur. Id vero ut ostendamus, ponatur in æquatione construenda loco b valor ejus $c - aa : c$; & erit $xy - axx : c + cx - aax : c + ay + ac = o$. Quumque æquatio ista dividi possit per binomium $x + a$, & ex divisione oriatur quotiens $y - ax : c + c$; liquet, eandem componi ex duabus hisce æquationibus primi gradus $y - ax : c + c = o$, & $x + a = o$.

Jam primæ harum æquationum fit satis FIG.
per asymptotum EH. Manentibus enim omni- 104.

nibus, ut supra, invenitur semper NR $= ax:c$. Unde, quum sit AF, sive RO $= b + aa:c = c$; erit NO $= c - ax:c$; proindeque, posita eadem NO $= -y$, erit $c - ax:c = -y$, sive etiam $y - ax:c + c = o$. Quod vero secundæ satisfaciat asymptotus altera EK; id liquet ex eo, quod, producta BA, usque donec secet EK in G, fiat AG $= a$.

XII. *Quid in compositione locorum ad hyperbolam, relate ad asymptotos considerata, potissimum notari debeat.*

XII. Cæterum, *in compositione locorum ad hyperbolam, relate ad asymptotos considerata, illud pariter sedulo notari debet*, quod existentibus x, & y duabus construendæ æquationis incognitis, fieri quandoque possit, ut designari debeant per portiones AN rectæ AB valores incognitæ y, perque rectas NM valores alterius incognitæ x. Nec sane difficile erit definire, quando demum id fieri debeat.

Nimirum id fiat oportet, quotiescumque in æquatione proposita una cum producto duarum incognitarum reperitur quadratum incognitæ y. Sic æquatio $xy + yy - ay - ac = o$ mutationem illam exposcit, quia quadratum incognitæ y illud est, quod in ea conjungitur cum producto ambarum incognitarum xy.

Interim, quum construitur æquatio aliqua, per reductionem ejus ad formulam compositam, eademque natura sua exigit eam variationem, necesse est, ut etiam in formula incognitæ varientur. Sic formula, cum qua comparanda est æquatio $xy + yy - ay - ac = o$, haud quidem esse debet $xy + mxx:n + nry:s + mrx:s + qx + nrq:s -$

$npp:s$

$npp : s = o$, sed $xy + myy : n + nrx : s + mry : s + qy + nrq : s - npp : s = o$,

Esse autem omnino necessariam variationem istam, quum construitur locus, per reductionem æquationis ad formulam compositam; id liquet abunde. Sed eadem necessitas non ita liquido apparet, quum constructio fit, per reductionem æquationis ad formulam simplicissimam. Quare, ut ea innotescat, fiat in allato exemplo $x + y - a = u$, ita ut sit $xy + yy - ay = uy$. Et erit $uy - ac = o$, sive etiam $uy = ac$ æquatio reducta.

Designentur jam valores incognitæ u per portiones AN rectæ AB. Et quoniam in reductione habetur $x + y - a = u$; liquet, non aliter haberi posse valores incognitæ u, quam delendo ex eis constantem a, & addendo iisdem variabilem y. Id ergo quum fieri nullo pacto possit; hinc est, ut per portiones AN rectæ AB designandi sint valores incognitæ y.

XIII. Illud quoque *nolim hic silentio præterire*, quod quotiescumque in æquatione, una cum producto incognitarum, reperitur quadratum unius ex iis, tunc locus explicari possit, non modo per hyperbolam, relate ad eius asymptotos consideratam, verum etiam per hyperbolam, consideratam in ordine ad suas diametros; quum ad utriusque formulam possit æquatio ipsa revocari.

XIII. *Quod adsint quædam loca, quæ utraque ratione possunt per hyperbolam explicari.*

Proponatur, exempli gratia, construenda æquatio $yy + 2xy - 2ay + 2cx + aa = o$. Fiat $y + x - a = z$. Et quoniam habetur $yy + 2xy - 2ay + aa = zz - xx + 2ax$;

sub-

ſubſtitutione peracta, erit $zz - xx + 2ax + 2cx = 0$. Fiat quoque $x - a - c = u$. Quumque habeatur $2ax + 2cx - xx = aa + 2ac + cc - uu$; erit rurſus per ſubſtitutionem $zz + aa + 2ac + cc - uu = 0$. Ponatur porro $a + c = f$, ita ut ſit $aa + 2ac + cc = ff$; & habebitur demum $zz + ff - uu = 0$, ſive etiam $zz = uu - ff$, quæ ad hyperbolam, relate ad diametros conſideratam, nos ducit.

Id vero mirum cenſeri non debet. Jam enim vidimus ſupra, quod ubi in æquatione incognitæ duæ ſimul multiplicatæ reperiuntur, locus non aliter eſſe poſſit ad hyperbolam, conſideratam in ordine ad ſuas diametros, quam quum quadrata earundem incognitarum ita quidem in æquatione continentur, ut translatis ad eandem partem, tum terminis quadrata illa continentibus, cum termino incognitarum productum includente, debeat coefficiens unius quadrati augeri nonnihil, quo termini ii poſſint ſimul quadratum perfectum conſtituere.

Profecto autem, quotieſcumque in æquatione cum producto incognitarum conjungitur quadratum unius ex iis; tunc nihil vetat, alterius quoque quadratum in ea conſiderare; quum ſatis ſit, ei præfigere zero, ſeu nihilum, velut coefficientem. Unde, quia coefficiens iſtius quadrati debet augeri nonnihil, quo idem poſſit una cum quadrato alio, & producto incognitarum quadratum perfectum conſtituere; poterit conſideratione illa per hyperbolam, relate ad diametros conſideratam, æquatio ipſa explicari.

XIV.

XIV. Supereſt jam, ut oſtendamus, *qua ratione hyperbola in plano deſcribi poſſit, datis ejus aſymptotis, & potentia*. Sint igitur AB, AC aſymptoti hyperbolæ deſcribendæ; & exponatur potentia ejus per rectangulum, quod ſit ex duabus earum portionibus AD, AE. Compleatur parallelogrammum AF. Et quoniam rectangulum ADF adæquat potentiam datam; erit punctum F in hyperbola quæſita.

XIV. *Quomodo deſcribi poſſit hyperbola in plano, datis ejus aſymptotis, & potentia.*

FIG. 106.

Quum autem punctum A ſit centrum hyperbolæ, ſi extendatur AF ad partem oppoſitam, uſque donec æquales ſint duæ AF, AG; fiet tota FG una ex diametris hyperbolæ. Et quoniam, conſtituta AB dupla ipſius AD, ductaque per punctum F recta BC, contingit iſta hyperbolam deſcribendam in F; deſignabit eadem BC poſitionem ordinatarum diametri FG. Unde quæſita hyperbola nullo negotio deſcribetur, ſi ejuſdem diametri poſſit etiam parameter definiri.

Ad hanc vero definiendam, meminiſſe oportet, quod eadem recta BC ſit æqualis conjugatæ ipſius FG. Hinc enim ſequitur, parametrum diametri FG debere eſſe tertio loco proportionalem poſt duas FG, BC; adeoque eandem haberi, ſi ſiat, ut FG ad BC, ita BC ad FH. Deſcribatur ergo diametro FG hyperbola, ita ut recta FH exhibeat, tam parametrum ejus diametri, quam poſitionem ſuarum ordinatarum. Et hyperbola, ſubinde deſcripta, eam, quam quærimus, nobis exhibebit.

Obiter autem notetur hoc loco velim,

quod ficuti, datis afymptotis, & potentia, pofitione datur hyperbola ipfa; fic dabitur quoque, fi una cum afymptotis datum fit punctum aliquod, per quod hyperbola debeat tranfire. Neque enim in expofito problemate alium ufum nobis præftitit potentia, expreffa per rectangulum DAE, quam ut, completo parallelogrammo AF, haberi poffet punctum F, per quod tranfire deberet hyperbola. Unde, fi loco potentiæ daretur ab initio punctum F, adhuc folutio problematis eadem foret futura.

Idem problema, de defcribenda hyperbola in plano, datis ejus afymptotis, & potentia, refolvi quoque poteft, inveniendo axem, & focos ipfius hyperbolæ. Si enim angulus BAC, fub afymptotis comprehenfus, fecetur bifariam per rectam AF; dabit recta ifta AF pofitionem axis hyperbolæ. Et fi porro, conftituto AB quadrato quadruplo datæ potentiæ, demittatur fuper AF perpendicularis BC; fiet punctum F vertex ipfius axis. Unde demum, ficuti vertex alter habetur, capiendo ad partem oppofitam AG, ipfi AF æqualem; ita circulus, qui defcribitur centro A, & intervallo AB, vel AC, quæfitos in axe focos defignabit.

LIBER VIII.

De Constructione Problematum Solidorum.

TRadita compositione locorum geometricorum, quæ conicis sectionibus terminantur; reliquam jam est, ut easdem coni sectiones ad constructionem problematum solidorum traducamus. Sed, ut methodus istud obtinendi rectius intelligatur, præstat, rem paulo altius repetere, & breviter primum explicare, quo quidem artificio problematum geometricorum constructiones generaliter fieri debeant.

CAP. I.

Ratio construendi problemata geometrica generatim explicatur.

I. DIximus præcedenti libro, problemata geometrica proprie vocari ea, quæ determinata sunt, omnesque continent conditiones, ad solutiones ipsorum necessarias; nec alia ratione illa, quæ sunt indeterminata, a Geometris considerari, quam ut eorum ope determinatis satisfiat, quæ præ- I. *Qua ratione problemata determinata per loca geometrica construuntur.*

 ci-

cipuum Geometriæ objectum constituunt. Videamus itaque modo, *quo demum artificio problemata determinata construantur, adhibitis iis, quæ indeterminata sunt, & per loca geometrica explicantur*.

Nimirum primo invenienda sunt duo loca geometrica, quæ omnes construendi problematis conditiones seorsim includant. Tum ita oportet loca illa construantur, ut valores unius incognitæ super eadem recta in utroque loco capiantur. Nam, quum valores incognitarum, ubi linearum, composita loca terminantium, fit intersectio, conditiones habeant utriusque loci geometrici; necesse est, ut valores illi problematis solutioni satisfaciant.

Oporteat, exempli gratia, invenire rectangulum, cujus latera datam habeant rationem inter se, & simul sumpta datam quoque rectam adæquent. Jam in hoc problemate determinato duæ conditiones continentur. Quare, iis a se mutuo sejunctis, duo fient indeterminata problemata; unum, in quo quæritur rectangulum, cujus latera datam rationem habeant inter se; alterum, in quo quæritur rectangulum, cujus latera simul sumpta datam rectam adæquent.

Duo ista problemata indeterminata duo etiam nobis suppetunt loca geometrica. Unde, quum in iis utraque propositi problematis conditio seorsim contineatur, poterunt pro ejusdem problematis constructione loca illa in subsidium advocari. Construantur ergo illiusmodi loca ea quidem lege, ut va-

lo-

lores unius, ejusdemque incognitæ super eadem recta in utroque loco capiantur. Et valores, quos habent incognitæ in loco intersectionis, quæsitum rectangulum continebunt.

II. Ut autem id liquido constet, *revocemus ad calculum duo illa loca, tum exposita ratione utrumque construamus*. Assumptis ergo incognitis x, & y pro lateribus rectanguli inveniendi, si eorum ratio ponatur æqualis ei, quam habet a ad b; erit, ut x ad y, ita a ad b; adeoque erit $y = bx : a$ æquatio primi loci. Quod si porro summa earundem laterum dicatur c; fiet $x + y = c$, vel $y = c - x$ æquatio secundi loci.

II. Artificium constructionis problematum determinatorum exemplo illustratur.

Sit jam AB recta linea, per cujus portiones AN designantur valores incognitæ x; & AC recta alia, cui æquidistantes esse debent rectæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Quumque æquatio primi loci sit $y = bx : a$; perspicuum est, quod si ex AB abscindatur portio AD $= a$, & ducta DE ipsi AC parallela, fiat eadem DE $= b$, terminari debeat locus ille per rectam AE, quæ conjungit puncta duo A, & E.

Fig. 107.

Quia autem æquatio secundi loci est $y = c - x$, construetur alter iste locus, faciendo, tum AB, cum AC $= c$, & conjungendo puncta duo B, & C per rectam BC. Nam, ob triangula æquiangula BAC, BNM, erit, ut AB ad AC, ita BN ad NM. Quare, propter æquales AB, AC, erunt etiam æquales duæ BN, NM; adeoque, quum sit BN $= c - x$, & NM $= y$, erit $y = c - x$.

Termini igitur eorum locorum sunt rectæ AE, BC. Quum autem rectæ istæ sese secent in puncto F; habebit punctum istud F utriusq;loci conditiones. Quare,ducta FG, ipsis MN parallela; erunt rectæ AG, FG in data ratione, ob locum AE; & eædem simul datam summam constituent, ob locum BC: proindeque latera quæsiti rectanguli erunt rectæ ipsæ AG, FG.

III. *Quomodo cognoscenda sint loca, quibus determinatum problema construi possit.*

III. Neque vero difficile erit, inquirere, *num duo loca geometrica omnes alicujus problematis determinati conditiones includant.* Si enim ex eorum æquationibus colligi possit ipsa problematis æquatio; indicio erit, in locis illis singulas problematis conditiones includi. Quod si autem secus contigerit; nec item in iis locis omnes problematis conditiones continebuntur.

Ita, si æquatio problematis sit $x = ac : (a - b)$, nulli dubium esse potest, quin omnes ejusdem problematis conditiones includantur in duobus locis geometricis $y = ax:c$, & $y = bx : c + a$. Nam, quum ex duabus hisce æquationibus eruatur $ax: c = bx:c + a$; reductione instituta, fiet $ax - bx = ac$, sive etiam $x = ac : (a - b)$, quæ est ipsa problematis æquatio.

Similiter, si æquatio problematis sit $xx + bx - ax + bb = o$, dubitari non potest, quin omnes ejusdem problematis conditiones contineantur in duobus locis geometricis $yy = 2ax - xx - bb$, & $y = x + b$. Nam, quum duæ istæ æquationes dent nobis $2ax - xx - bb = xx + 2bx + bb$;reductione instistituta, fiet $2xx + 2bx - 2ax + 2bb = 0$, sive etiam $xx + bx - ax + bb = 0$, quæ est problematis æquatio proposita.

Atque ita quoque, si in resolutione alicujus problematis perventum sit ad æquationem $x^3 + aax - aab = 0$, in dubium verti non potest, quin contineant omnes ejusdem problematis conditiones duo loca geometrica $xx = ay$, & $bx - xx = yy$. Nam, quum ex duabus hisce æquationibus eruatur $bx - xx = x^4 : aa$; reductione instituta, fiet $aabx - aaxx = x^4$, sive etiam $x^3 + aax - aab = 0$, quæ est ipsa problematis æquatio.

IV. *Ratio inveniendi eadem loca in medium affertur.*

IV. Sed nec etiam difficile erit, *duo loca geometrica reperire, quæ omnes alicujus problematis determinati conditiones includant.* Inveniatur etenim æquatio, ad quam propositum problema reducitur. Tum, sumpta ad libitum æquatione alia indeterminata, complicentur ambæ simul, quoties fieri potest, sive substitutionis, sive additionis, sive demum subtractionis ope. Atque hac ratione, non duo tantum, sed plura loca geometrica reperientur, quorum bina quævis singulas problematis conditiones continebunt.

Sit, exempli gratia, $x^4 + aaxx - aabx - a^3c = 0$ æquatio, ex resolutione alicujus determinati prbolematis orta. Capiatur æquatio indeterminata $xx - ay = 0$, sive $xx = ay$. Jamque, si in ea ponatur $aayy$ loco x^4, habebitur $aayy + aaxx - aabx - a^3c = 0$, sive $yy + xx - bx - ac = 0$, quæ est æquatio altera indeterminata. Et si porro in ista locò xx ponatur ay, fiet $yy + ay - bx - ac = 0$, quæ est tertia æquatio indeterminata.

Tres istæ æquationes indeterminatæ jam tria nobis loca geometrica suppetunt, quorum singula paria cunctas problematis conditiones complectuntur. Sed possunt, additionis, subtractionisque ope, tres aliæ reperiri, quæ eundem præstent effectum. Addendo enim priores duas, fiet $yy + 2xx - ay - bx - ac = o$; addendo autem duas posteriores, habebitur $2yy + xx + ay - 2bx - 2ac = o$; ac denique addendo simul primam, & tertiam orietur $yy + xx - bx - ac = o$, quæ tamen a secunda non differt.

Eadem ratione, subducendo primam ex secunda, orietur $yy + ay - bx - ac = o$, quæ non differt a tertia; & subducendo secundam ex tertia, habebitur $ay - xx = o$, sive $xx - ay = o$, quæ est ipsissima prima. Sed, si prima ex tertia subducatur, fiet $yy - xx + 2ay - bx - ac = o$, quæ a singulis præcedentibus diversa deprehenditur.

V. *Quod unum idemq; problema variis rationibus construi possit.*

V. Id, quum ita sit, liquet, *unum, idemque problema geometricum non una ratione construi posse*. Primo enim pro eodem problemate potest, modo una, modo alia æquatio reperiri: prout hanc, aut illam lineam assumere placet, velut incognitam. Et deinde, etiamsi semper eadem futura esset problematis æquatio; adhuc tamen variis, multisque modis problema construere liceret: ob varia locorum geometricorum paria, in quibus singulæ problematis conditiones possunt seorsim contineri.

Interim, ut non omnes problematis con-

conſtructiones Geometriæ legibus correſpondent; ſic inter eas, quas legitimas Geometria fatetur, dantur perſæpe quædam, quæ facilitate, ac elegantia merentur reliquis præferri. Unde, quum problema aliquod geometricum conſtrui debet, non modo vitandæ ſunt eæ conſtructiones, quæ vitio argui poſſunt; ſed in id etiam ſedulo incumbendum, ut eligantur conſtructiones illæ, quæ Geometriæ ſolertiam, ac nitorem oſtendunt.

Hinc duo nobis hoc loco præſtanda ſunt. Primo enim oportet oſtendamus, quæ quidem problematum conſtructiones legitimæ cenſendæ ſint, quæve per contrarium vitio argui queant. Deinde vero inter ipſas conſtructiones, quæ Geometriæ legibus correſpondent, nec ullo vitio laborant, qua utique ratione faciliores, ſimplicioreſque dignoſci poſſint, oportet aperiamus.

Et quantum ad primum, eæ quidem conſtructiones velut legitimæ haberi debent, quæ naturæ problematum conſonæ ſunt. Neque enim omnia problemata per cujuſcumque generis loca geometrica conſtrui poſſunt; ſed unumquodque pro ſuo gradu determinati generis loca requirit. Unde, ut de rectitudine conſtructionum tuto judicium ferri poſſit, conſtituendi primum ſunt gradus problematum geometricorum.

VI. Plane *Veteres*, referente Pappo, *problematum geometricorum tria genera diſtinguebant, & eorum alia quidem plana, alia ſolida, & alia demum linearia appellabant*. Quæ enim per rectas, & circuli circumferen- *VI. Quomodò Veteres problemata diſtinguebant, & quo vitio diſtinctio illa laboret.*

tiam

tiam solvi possunt, vocabant plana: ob ortum earum linearum, quem habent in plano. Quæ vero solvuntur, assumpta in constructione aliqua coni sectione, dicebant solida; quia coni sectiones ex solido trahunt originem suam. Et denique, quæ construi nequeunt, nisi adhibitis lineis aliis, præter jam dictas, linearia nuncupabant: velut problemata, quæ ut construantur, lineas alias magis compositas exigunt.

Sed hujusmodi problematum geometricorum distinctio, a Veteribus facta, non uno vitio laborat. Primo enim per eam natura problematis non semper nobis innotescit. Etsi enim tuto concludere liceat, problema esse planum, quotiescumque circulo, & recta construitur; quod tamen sit solidum, aut lineare, numquam certo, ac infallibiliter statui potest; quum impossibile sit, ejus criterii certiorem fieri, quod, juxta Veteres, tum solidum a plano, cum lineare a plano, & solido secernere valet.

Ut enim, ex mente Veterum, solidum dici possit aliquod problema, haud quidem satis est, aliqua coni sectione construi posse; sed necesse est quoque, ut recta, & circulo nullimode construi queat. Quare, non aliter concludere licebit, solidum esse problema aliquod, quam ubi illiusmodi impossibilitas extra omnem dubitationis aleam ponitur: & propterea, quum id sine alterius criterii ope obtineri non possit, consequens est, ut nec item solidum problema distinguere liceat.

Similiter, ut juxta Veteres lineare dici ci possit aliquod problema, haud quidem satis est, linea alia magis composita construi posse; sed oportet etiam, ut respuat, tum circuli circumferentiam, cum coni sectiones. Quare, tunc demum concludere licebit, lineare esse problema aliquod, quum ostenditur, nec circulo, nec aliqua coni sectione posse constructionem ejus obtineri. Unde, quum id evinci nullimode queat, nisi criterium aliud habeatur; nec item lineare problema a plano, & solido poterit secerni.

Hinc, posita problematum geometricorum distinctione, a Veteribus facta, tantum abest, ut reprehensione digni sint ii, qui duplicationem cubi, & anguli trisectionem recta, & circulo tentare conantur; quin potius, meo judicio, laudem omnem merentur, & excitandi eo magis, ut nullum non moveant lapidem, quo videant, num Geometriæ planæ præsidio constructio eorum problematum posset haberi. Nam etsi eorum conatus semper irriti forent futuri; exinde tamen eo magis probabile redditur, problemata illa natura sua esse solida, & non jam plana.

VII. Sed *alio quoque vitio laborat distinctio problematum geometricorum, quam Veteres condiderunt*: nimirum, quod juxta eam nullum non fiat discrimen inter problemata, quæ nec plana sunt, nec solida; sed omnia in uno eodemque gradu reponantur. Inde enim colligi posset, quod sicuti ejusdem naturæ sunt, tam cuncta problemata plana, quam omnia problemata solida; sic quoque singula problemata linearia eandem naturam deberent habere.

VII. *Aliud vitium in distinctione problematum, a Veteribus facta, indicatur.*

In-

Interim nolim ex hac parte adeo Veteres increpare. Neque enim problemata linearia ita ii excoluere, quemadmodum plana, & solida. Unde, tametsi eis innotuerit, dari problemata quædam, quæ nec plana, nec solida essent; multiplices tamen, ac pene infinitas eorum problematum differentias minime norunt: quippe quæ non aliter fiunt cognitæ, ac exploratæ, quam ubi aliquot ex iis problematibus ad examen revocantur.

Notetur autem hoc loco velim, quod sicuti problematum geometricorum tria genera Veteres distinguebant; sic lineas omnes, quibus problematum fiunt constructiones, ad tres classes pariter revocabant. Prima etenim erat illarum, per quas plana problemata solvuntur; eaque nonnisi rectam, ac circuli circumferentiam continebat. Secunda complectebatur coni sectiones, quas ad constructionem problematum solidorum oportet assumere. Et tertia demum omnes alias lineas magis compositas comprehendebat, quæ constructioni problematum linearium inserviunt.

Revocabant porro ad tertiam hanc classem, non modo omnes alias lineas geometricas, ut cissoidem Dioclis, conchoidem Nicomedis; verum etiam lineas mechanicas, ut quadratricem Dinostrati, spiralem Archimedis. Qua in re nec etiam adeo ii velim arguantur. Nam, sicuti, ob differentias problematum linearium, non adhuc eis exploratas, unum eorum genus constituebant; sic omnino necesse erat, ut in una eademque classe reponerent, tam lineas geometricas,

quæ

quæ circuli circumferentiam, & coni sectiones excedunt, quam lineas mechanicas, quæ cunctis natura sua superiores deprehenduntur.

Hinc, quod Cartesius antiquis Geometris vitio vertit, potius refellendo ejus errori apposite nobis inserviet. Ex eo enim, quod sub eodem genere reposuerint Veteres, tam cissoidem, & conchoidem, quam spiralem, & quadratricem; censuit, eos e Geometria rejecisse omnes alias curvas, quæ circuli circumferentia, & conicis sectionibus magis compositæ essent. Sed crediderim, hanc eis sententiam adscripsisse, quia ipse in ea erat opinione, ut spiralis, quadratrix, & similes e Geometria exules esse deberent: quam tamen vel ex eo exuere poterat, quod illiusmodi lineas ad eandem classem cum curvis aliis geometricis ipsi Veteres revocabant.

VIII. Quum igitur distinctio problematum geometricorum, a Veteribus facta, in plana, solida, & linearia, non uno vitio laboret; rectius Recentiores *distinguunt genera problematum ex numero dimensionum, ad quas eorum æquationes ascendunt*. Et quamquam Cartesius duabus dimensionibus ea a se mutuo distinguenda esse putaverit; communiter tamen unica tantum dimensione a se invicem secernuntur, & unumquodque problema ejus generis esse censetur, quod ipse æquationis gradus ostendit.

VIII. Distinctio problematum ex numero dimensionum, ad quas eorum æquationes ascendunt.

Itaque, si æquatio problematis sit primi gradus, sive unius tantum dimensionis; ipsum quoque problema primi generis esse di-

dicetur. Sed., si æquatio fuerit secundi gradus, seu duarum dimensionum; tunc etiam problema dicetur esse generis secundi. Atque ita pariter dicetur esse generis tertii, si ejus æquatio fuerit tertii gradus, sive trium dimensionum; generis quarti, si æquatio sit quarti gradus, sive quatuor dimensionum; generis quinti, si æquatio sit quinti gradus, sive quinque dimensionum; atque ita deinceps.

Notandum tamen hoc loco est, quod æquatio aliqua tunc proprie dicitur esse alicujus gradus, quum ad gradum alium inferiorem deprimi non potest. Unde, si in resolutione alicujus problematis perventum sit ad æquationem aliquam, quæ deprimi queat; tunc, ut de genere problematis judicium ferri possit, necesse est, prius deprimere æquationem illam per regulas, quæ in Algebra traduntur; quia sic problema ejus generis esse dicetur, quod depressus gradus ostendit.

Illud quoque nolo hic reticere, quod etsi, definiendis constructionibus, quæ naturæ problematum consonæ sunt, consultius sit, unica tantum dimensione eorum genera a se invicem distinguere; attamen, si in cujusque constructione circulus vellet adhiberi, tunc potius probanda esset distinctio problematum Cartesiana, quæ per duas dimensiones procedit; quum in eo casu lex constructionis intra binas dimensiones eadem semper, ac immutata perseveret.

Interim, vitandæ confusionis gratia, etiam quum quæstio erit, de adhibendo circulo in constructione cujusque problematis,

uni-

unica tantum dimensione distinguemus a se mutuo genera problematum. Nam, juxta hanc distinctionem, nullo negotio pro singulis casibus regulæ tradi possunt; quum tamen, recepta distinctione Cartesiana, nonnisi per ambages id, quod quisque casus exigit, poterit definiri.

IX. Problematum generibus constitutis, *facile modo erit, constructiones definire, quæ eorum naturæ consonæ sunt; & velut legitimæ debent haberi.* Jam enim vidimus supra, pro cujusque problematis constructione, adhibenda esse duo loca geometrica, quæ singulas problematis conditiones seorsim includant. Itaque, ut constructio legitima sit, & naturæ problematis consona, loca illa talia insuper sint oportet, ut multiplicatis per se mutuo numeris suarum dimensionum, oriatur numerus alter, qui vel ipsum problematis genus, vel etiam genus proxime superius nobis exhibeat. IX. *Quæ constructiones sunt legitimæ, & naturæ problematum consonæ.*

Hac ratione, si problema sit quarti generis, legitima erit constructio, quæ per loca duo geometrica secundi generis absolvitur; enim vero, multiplicatis simul duobus binariis, producitur numerus quaternarius, per quem gradus problematis ostenditur. Et eadem ratione, si problema sit generis sexti, erit consona ejus naturæ constructio, quæ perficitur loco secundi generis, & alio tertii; quandoquidem ex multiplicatione numeri binarii per numerum ternarium producitur numerus senarius, per quem problematis genus exhibetur.

Quum

Quum vero non ſemper fieri poſſit, ut numerus, problematis genus oſtendens, ex aliis duobus, per ſe mutuo multiplicatis, oriatur; hinc eſt, ut pleriſque in caſibus loca geometrica talia eſſe debeant, ut eorum exponentes, in ſe invicem ducti, genus proxime ſuperius exhibeant. Sic per loca duo ſecundi generis conſtruenda ſunt, non modo problemata generis quarti, verum etiam ea, quæ genus tertium conſtituunt. Atque ita quoque per locum ſecundi generis, & alium tertii conſtrui debent, tam problemata generis ſexti, quam quæ ad quintum genus revocantur.

Quemadmodum autem abunde liquet, id dumtaxat contingere poſſe in iis problematum generibus, quæ per numeros impares definiuntur; ſic liquido etiam patet, non in omnibus hiſce generibus tale quidpiam evenire. Si enim, exempli gratia, problema ſit noni generis; poterit conſtructio ejus per loca duo generis tertii obtineri. Et eadem ratione, ſi problema ſit generis decimiquinti; nihil obſtat, quin per locum tertii generis, & alium quinti conſtructio illius peragatur. Contingit id ergo in iis tantummodo generibus, quorum exponentes ſunt numeri primi; quum notum ſit, hujuſmodi numeros nullos diviſores admittere.

X.
Allata regula conſectaria quadam in medium afferuntur.

X. Ex regula jam tradita, pro definiendis conſtructionibus, quæ legitimæ ſunt, & naturæ problematum conſonæ, *plura modo licebit inferre, non exiguam rei, de qua agimus, lucem allatura.* Primo enim perſpicuum

eſt,

est, posse unum, idemque problema per multiplicis generis loca legitime construi. Sic problema duodecimi generis construere licet, non modo per locum generis tertii, & alium quarti; verum etiam per loca duo, quorum alter sit secundi generis, alter generis sexti.

Deinde liquet etiam, unumquodque problema legitime construi posse per locum geometricum, qui sit ejusdem generis cum ipso problemate. Nam semper ac locus alter assumitur generis primi; jam duo illa loca talia erunt, ut eorum exponentes, per se mutuo multiplicati, construendi problematis genus ostendent. Et quoniam loca primi generis sunt semper ad rectam; non aliter, quam rectæ, & curvæ alicujus intersectione, hujusmodi constructiones erunt peragendæ.

Liquet demum, quod si cujusque problematis constructio circulo fieri velit, omnino necesse sit, ut locus alter geometricus sit ejus generis, cujus exponens duplicatus exhibet, vel ipsum problematis genus, vel genus proxime superius. Est enim circulus, locus secundi generis. Quare, ubi una cum ipso alter ille locus adhibetur; jam problema construitur per loca duo, quorum exponentes, in se mutuo ducti, exhibent nobis, vel proprium problematis genus, vel quod proxime illud subsequitur.

Itaque, si problema decimi generis circulo foret construendum, oporteret, locum alium quinti generis esse; nec aliter esse deberet, si problema, circulo construendum, non decimi, sed noni generis esset. Et eadem ratione, tam problema generis undecimi, quam quod ad duodecimum genus revocatur, non aliter recte circulo construitur, quam assumpto in constructione loco alio, qui sit generis sexti.

Hinc, quotiescumque problemata circulo construi debent, lex ipsius constructionis intra duas dimensiones eadem semper perseverat. Atque hac de causa distinctio problematum Cartesiana, quæ per duplicem dimensionem procedit, probari potius, quam rejici deberet. Nam, juxta eam, locus alter, quem in constructione oporteret assumere, foret semper ejusdem generis cum ipso problemate construendo.

XI. Ostenditur veritas regulæ pro definiendis constructionibus legitimis, & naturæ problematum consonis.

XI. Cæterum haud difficile erit, *ostendere veritatem regulæ, superius traditæ, pro definiendis constructionibus, quæ legitimæ sunt, & naturæ problematum consonæ*. Jam enim loca, in constructione problematis adhibenda, debent singulas ejus conditiones seorsim continere. Quare, tunc quidem legitima erit constructio, & naturæ problematis consona, quum simpliciora loca adhibentur, quæ omnes illius conditiones seorsim complectuntur.

Hinc, ut præfatæ regulæ veritas constet, duo quidem sunt nobis ostendenda. Primum est, ut omnes alicujus problematis conditiones contineri possint in duobus locis geometricis, quorum exponentes, in se mutuo ducti, exhibent, vel ipsum problematis genus, vel genus proxime superius. Alterum est, ut loca, quorum exponentes, per se invicem multiplicati, exhibent genus inferius, nequeant

queant

queant ejusdem illius problematis conditiones omnes seorsim comprehendere.

Nescio autem, nunc horum utrumque sua egeat demonstratione. Ut enim vidimus supra, tunc quidem duo loca geometrica singulas alicujus problematis conditiones seorsim includunt, quum ex eorum æquationibus eruere licet æquationem, ex resolutione problematis ortam. Unde eo res redit, ut ostendamus, æquationem istam haberi quidem posse per loca priora, sed non item per loca secunda.

Id vero in ipsis Algebræ Elementis ostenditur. Nam, quum quæstio est, de exterminanda incognita una, per æquationes duas, quæ totidem incognitas complectuntur; regula traditur in iis, ope cujus liquet abunde, æquationem, incognitam alteram continentem, posse quidem ascendere ad eum gradum, qui producitur, multiplicatis per se mutuo gradibus earum æquationum; altius autem attolli nullimode posse.

Atque hinc, alio rursus artificio, inveniri poterunt loca duo, quibus determinati alicujus problematis constructio peragi possit. Nimirum, capiendo indefinite loca illa, tum per eorum æquationes exterminando incognitam unam, & inveniendo æquationem, quæ alteram tantum incognitam contineat. Nam, instituta deinde comparatione inter æquationem istam, & eam, ad quam problema reducitur, facili negotio quæsita loca definientur.

XII. Quum ergo jam nobis innotuerit, XII. Quomodo

Inter constructiones legitimas faciliores, simplicioresque dignosci possint, aperitur.

quæ constructiones sint legitimæ, & naturæ problematum consonæ; inquirendum est modo, *qua ratione inter eas faciliores, simplicioresque dignosci possint*. Et quidem negotium istud dijudicandum est ex locis, quibus ipsæ problematum constructiones peraguntur. Nam, etsi loca omnia, quæ æquationibus ejusdem gradus definiuntur, ad idem omnino genus pertineant; quin tamen inter ea fieri debeat discrimen aliquod, non est dubitandum.

Hujusmodi vero discrimen repeti primo debet ex ipsis lineis, quibus loca terminantur; in quantum non omnes eadem facilitate in plano describuntur. Sic lineæ, loca secundi generis terminantes, ut superius vidimus, sunt circuli circumferentia, & conicæ sectiones. Sed nulli dubium esse potest, quin circumferentia circuli longe facilius describatur in plano, quam quælibet sectio coni.

Idem discrimen repetendum est quoque ex æquationibus eorundem locorum. Nam, etsi ad eundem locum per varias æquationes possit perveniri; nequit tamen in dubium revocari, quin ipsa loci compositio eo facilior futura sit, quo minus composita est ejus æquatio. Sic loca, conicis sectionibus terminata, eo quidem facilius construuntur, quo magis æquationes, quibus designantur, ad formulas ipsorum simplicissimas accedunt.

Hæc autem quum ita sint, liquet, facilitatem, simplicitatemque constructionis geometricæ æstimandam esse duplici ex capite; primo nempe ex faciliore ratione, qua lineæ, lo-

loca terminantes, deſcribuntur; & ſecundo ex ſimpliciore apparatu, quo opus eſt, pro determinatione earundem linearum. Unde in hæc duo ſedulo oportet incumbere, quo elegans, ac valde ſimplex dati alicujus problematis conſtructio poſſit haberi.

Qui igitur in conſtruendo problemate aliquo, loco conicæ ſectionis, circulum ſubſtituit, non eſt dubitandum, quin faciliorem, ſimplicioremque conſtructionem exhibeat; quandoquidem circulus in plano facilius longe deſcribitur, quam quælibet ſectio conica. Et eadem ratione nulli etiam dubium eſſe poteſt, quin elegantior futura ſit dati alicujus problematis conſtructio, quum conica ſectio, quæ aſſumitur in ea, refertur per ſuam æquationem, vel ad ipſam diametrum, vel ad aliquam ejus parallelam.

CAP. II.

Ratio conſtruendi problemata plana in medium affertur.

I. ETſi in hoc libro propoſitum nobis ſit, dumtaxat de conſtructione eorum problematum agere, quæ ſolida a Veteribus dicebantur; nihilo tamen minus, quemadmodum, ad pleniorem ejus rei intelligentiam, neceſſarium duximus, generatim prius explicare, quo pacto problemata geometrica conſtruantur; ſic, ob eandem ratio- I. *Quæ ſint problemata plana, juxta Recentiorum diſtinctionem, oſtenditur.*

S 3 nem,

nem, præmittenda est quoque constructio problematum, quæ iidem Veteres plana vocabant; quum ipsa solida problemata nullimode absque ea construi possint.

Plana igitur problemata, ut præcedenti capite dictum est, vocabant Veteres ea, quæ recta, & circulo construi possunt. Unde, juxta Recentiorum distinctionem, non alia problemata tale nomen merentur, quam *quæ, tum ad primum, cum ad secundum genus revocantur*. Istorum enim problematum æquationes secundum gradum non excedunt. Quare eadem problemata per ea semper loca geometrica construere licebit, quæ recta, & circuli circumferentia terminantur.

Et illa quidem problemata, quæ primi sunt generis, nec etiam circulo opus habent, sed rectis tantum construi possunt. Assumenda est autem circuli circumferentia, in constructione eorum problematum, quæ secundi sunt generis. Nam numerus binarius, per quem istorum genus ostenditur, non aliter potest oriri, quam multiplicando unitatem per eundem numerum binarium; adeoque omnino necesse est, ut talia problemata construantur per loca duo, quorum alter sit generis primi, alter generis secundi.

Quamquam vero loca primi generis rectis semper terminentur; ea tamen, quæ secundi sunt generis, non modo circuli circumferentia, sed omnibus coni sectionibus possunt circumscribi. Hinc problemata, quæ secundum genus constituunt, tam recta, & circulo, quam recta, & qualibet coni sectione,

ne,

ne construere liceret. Sed præferendæ sunt eæ constructiones, quæ recta, & circulo fiunt; quia circuli circumferentia facilius longe in plano describitur.

II. Jam, ut *ea primum problemata construere doceamus, quæ primi sunt generis*, sciendum est, quod si æquatio, ex aliquo horum problematum orta, sit adeo simplex, ut habeatur $x = a$; tunc nulla arte opus sit, pro ejus constructione; quum nihil facilius dari possit, quam ut recta, alteri datæ æqualis, capiatur. Constructionem ergo istiusmodi problematis velut postulatum in hoc negotio assumemus: eoque magis, quod eadem sit veluti fundamentum omnium constructionum geometricarum.

II. *Quod adsint quædam problemata primi generis, quorum constructiones ut postulata debent assumi.*

Verum, si concedenda est nobis constructio hujus æquationis $x = a$, ratio exigit, ut concedantur pariter constructiones istarum $x = a + b$, $x = a + b + c$, $x = a + b + c + d$, atque ita deinceps. Nam, sicuti super recta AB capi potest portio AC $= a$, ita successive super eadem assumere licebit CD $= b$, DE $= c$, & EF $= d$. Unde, quemadmodum valor incognitæ x in æquatione $x = a$ est AC, sic erit AD in æquatione $x = a + b$, AE in æquatione $x = a + b + c$, & AF in æquatione $x = a + b + c + d$. Fig. 108.

Eadem autem ratione neque etiam denegands est nobis constructio illius problematis, ex quo suborta est æquatio $x = a - b$. Jam enim, progrediendo ex A versus B, capi potest super AB portio AC $= a$. Quare, redeundo ex C versus A, poterit etiam super CA, Fig. 109.

producta si opus, capi portio $CD = b$. Quumque hoc pacto fiat $AD = a - b$; erit eadem AD valor, quem habet incognita x in æquatione $x = a - b$.

Atque hinc ulterius nec item alicui difficultati obnoxia esse debet constructio ejus problematis, ex quo nata est æquatio $x = a - b + c - d$. Si enim quærantur rectæ duæ, quæ duabus summis $a + c$, & $b + d$ sint æquales; eæ, ut vidimus, ultro nobis concedi debent. Unde, si eædem dicantur f, & g, æquatio fiet $x = f - g$, cujus quidem constructio nequit nobis denegari.

III. *Constructio problematis primi generis, ad quod omnia alia, quæ ejusdem sunt generis, revocantur.*

III. Constructionibus hisce præjactis, sive potius præsuppositis, facile modo erit, *construere unumquodque aliud problema, quod primi sit generis*. Ut vero ordine progrediamur, sit primum $x = ab : c$ æquatio, ex resolutione problematis orta. Jamque, si locus ad rectam simplicissimus $y = b$ capiatur; fiet per substitutionem $x = ay : c$, sive etiam $y = cx : a$, quæ quidem æquatio similiter ad rectam nos ducit.

Hinc problema, contentum in æquatione $x = ab : c$, construi poterit duobus hisce locis geometricis $y = cx : a$, & $y = b$; ut quæ non modo singulas ejus conditiones seorsim continent, sed ambo etiam lineis rectis terminantur. Hunc in finem sit AB recta, per cujus portiones AN designantur in utroque loco valores incognitæ x; & AC ea, cui in utroque pariter loco æquidistantes esse debent valores alterius incognitæ y.

Fig. 110.

Quum igitur æquatio primi loci sit $y =$

$cx : a$,

$cx:a$, construetur ille, si abscissa ex AB portione AD $= a$, ductaq; per punctum D recta DE, ipsi AC parallela, fiat DE $= c$, & jungatur AE. Quumque æquatio secundi loci sit $y = b$, fiet alterius hujus loci constructio, abscindendo ex AC portionem AF $= b$, & ducendo per punctum F rectam FH, alteri AB parallelam.

Jam rectæ duæ AE, FH, omnino necesse est, ut sibi mutuo occurrant. Fiat itaque earum occursus in puncto M. Et, demissa exinde super AB recta MN, ipsi AC parallela; erit AN valor, quem habet incognita x in æquatione $x = ab : c$. Ponatur enim AN $= x$. Et quoniam, ob triangula æquiangula ADE, ANM, AD est ad DE, ut AN ad NM, sive AF: erit, ut a ad c, ita x ad b: & propterea erit $x = ab : c$.

IV. Exhibita constructione problematis, contenti in æquatione $x = ab : c$; *jam, ope ejus, omnia alia, quæ primi sunt generis, construere licebit*; quum facile sit, ea mediante, æquationes omnes primi gradus ad formam illam revocare. Ita, si æquatio problematis sit $x = abc : de$; capiendo $f = ab : d$, fiet $x = cf : e$. Et, si æquatio sit $x = abcd : efg$; sumendo, tam $m = ab : e$, quam $n = cd : f$, habebitur $x = mn : g$.

IV. *Quomodo ad constructum problema omnia alia primi generis problemata reducuntur.*

Fieri autem potest, ut incognita x plures hujusmodi quantitates adæquet. Et tunc, eas seorsim reperiendo, adhuc problema construi poterit. Sed, si habeatur $x = ab : (c + d)$, vel $x = ab : (c - d)$; fiet constructio, ponendo f loco ipsius $c + d$, vel $c - d$; quum sic æquatio evadat $x = ab : f$. Atque ita quoque, si fuesi fuerit $x = abc : (de + fg - bl)$, capiatur $m = (de + fg - bl) : a$, & habebitur $x = bc : m$.

Præterea, si in resolutione alicujus problematis perventum sit ad æquationem $x = (ab - cd) : (m + n)$; construetur illud, capiendo $f = m + n$; quum hac ratione habeatur æquatio $x = ab : f + cd : f$, quæ jam construi potest. Pariterque, si æquatio problematis sit $x = (abc - adf) : (gb - mn)$, capiatur $l = gb : a - mn : a$, ita ut sit $al = gb - mn$; & habebitur loco ejus hæc alia æquatio $x = bc : l - df : l$, quam similiter construere licet.

Opus est autem solertia Geometræ in æquationum reductionibus instituendis, ut quæ contrahi quandoque possunt. Ita, si habeatur æquatio $x = (aabc - bbcc) : (abc + a^3)$, facillime fiet ejus reductio, capiendo $d = bc : a$. Nam, quum sit $ad = bc$, & $aadd = bbcc$; substitutione peracta, habebitur $x = (ad - dd) : (d + a)$. Unde, ponendo postea, tum $m = a - d$, cum $n = d + a$; fiet $x = dm : n$ æquatio reducta.

V. *Quorsum reducatur constructio problematum primi generis, aperitur.*

V. Non igitur dubitari potest, quin omnia problemata primi generis nullo negotio construantur, ubi semel constructum est problema, quod exhibet æquatio $x = ab : c$. Et quoniam problema istud non aliud involuit, quam ut, datis tribus rectis lineis, quarta proportionalis inveniatur; liquet, *cuncta primi generis problemata, per inventionem quartæ alicujus proportionalis, construi posse.*

Sed notetur hoc loco velim, ejusdem illius problematis, quod continetur in æquatiotione $x = ab : c$, plures alias constructiones dari posse. Placuit autem eam eligere, quæ superius allata est; tum quia est omnium simplicissima; tum etiam, quia affinis est illi, qua usus est Euclides in suis Elementis, pro inveniendа quarta proportionali post tres rectas lineas datas.

Plane enim, si quemadmodum æquatio construenda est $x = ab : c$, sive $cx = ab$, ita capiatur æquatio ad rectam $dx : a = y$, sive $dx = ay$; fiet, addendo eas simul, $cx + dx = ab + ay$, quæ similiter ad rectam nos ducit. Unde æquatio $cx = ab$ construi quoque poterit, adhibitis duobus hisce locis geometricis $dx = ay$, & $cx + dx = ab + ay$.

Quin etiam, si æquatio assumpta $dx = ay$ subducatur ex ipsa $cx = ab$, habebitur tertius locus ad rectam $cx - dx = ab - ay$. Unde ejusdem illius æquationis constructio fieri pariter poterit, tum ope locorum $dx = ay$, & $cx - dx = ab - ay$, cum ope istorum $cx + dx = ab + ay$, & $cx - dx = ab - ay$. Interim, si fuerit $c = d$, ex prima harum constructionum rursus superior orietur.

VI. *Constructio problematis secundi generis, ad quod omnia alia, quæ ejusdem sunt generis, reducuntur.*

VI. Ostensa constructione problematum primi generis, videamus modo, *qua ratione ea, quæ secundi sunt generis, construi debeant.* Et simplicior quidem æquatio, quæ ex aliquo horum problematum potest oriri, est $xx = ab$. Quumque eo res redeat, ut inter duas rectas datas media proportionalis inveniatur; construi poterit illiusmodi problema eo quidem artificio, quo utitur Euclides in Elementis pro mediæ proportionalis inventione.

Ve-

Verum, ut methodo nostro tale artificium inquiramus, capiatur locus ad rectam simplicissimus $y = c$. Et quoniam habetur, tum $xx = ab$, cum $yy = cc$; fiet additione $xx + yy = ab + cc$. Quemadmodum autem hæc æquatio ad circulum nos ducit, quum valores incognitarum rectos angulos continent; ita, ut descriptio hujus circuli problema primi generis fiat, oportebit, quantitatem $ab + cc$ quadratum esse perfectum: quo radix ejus, quæ circuli radium refert, rationalis oriatur.

Jam quantitas illa talis esse non potest, nisi adæquet c semissem differentiæ ipsarum a, & b. Nam, ponendo a majorem esse, quam b, fiet $c = a : 2 - b : 2$; adeoque, quum sit $cc = aa : 4 - ab : 2 + bb : 4$, erit $ab + cc = aa : 4 + ab : 2 + bb : 4$. Hinc ex duobus locis geometricis, quibus construendum est problema, contentum in æquatione $xx = ab$, erit $y = a : 2 - b : 2$ locus ad rectam, & $xx + yy = aa : 4 + ab : 2 + bb : 4$ locus ad circulum.

FIG. III. Sit igitur AB recta, super qua sumi debent valores incognitæ x. Et quoniam æquatio circuli nulla eget reductione, erit centrum illius ipsum punctum A; adeoque, abscissa ex AB portione $AD = a : 2 + b : 2$, fiet AD ejusdem circuli radius. Erigatur deinde super AB perpendicularis AC. Jamque, si ex ea auferatur portio $AE = a : 2 - b : 2$, & per punctum E ducatur recta GH, ipsi AB parallela; terminabitur recta ista GH locus alter $y = a : 2 - b : 2$.

VII. *Veritas constructionis.* VIII. Neque vero difficile erit, *ostendere, quod compositione horum locorum fiat satis*

pro-

problemati, *contento in æquatione* $xx = ab$. Jam enim recta GH secare debet circulum, qui describitur centro A, intervalloque AD, in duobus punctis M, O. Quare, demissis exinde super AB perpendicularibus MN, OR, fient AN, AR valores duo, quos habet incognita x in æquatione $xx = ab$; eritque AN valor positivus, & AR valor negativus.

prefati problematis demonstratio.

Ponatur siquidem AN $= x$. Et quoniam inter se sunt æquales, tam duæ AM, AD, quam duæ MN, AE; erit AM $= a:2 + b:2$, & MN $= a:2 - b:2$. Sed, ob triangulum ANM, rectangulum in N, quadratum ex AM est æquale duobus quadratis AN, NM simul sumptis. Itaque erit $xx + aa:4 - ab:2 + bb:4 = aa:4 + ab:2 + bb:4$, unde infertur æquatio problematis $xx = ab$.

Ponatur quoque AR $= -x$. Et quia pariter sunt æquales inter se, tam duæ AO, AD, quam duæ OR, AE; erit AO $= a:2 + b:2$, & OR $= a:2 - b:2$. Sed, ob triangulum ARO, rectangulum in R, quadratum ex AO æquale est summæ quadratorum AR, OR. Quare erit rursus $xx + aa:4 - ab:2 + bb:4 = aa:4 + ab:2 + bb:4$, unde eruitur æquatio problematis $xx = ab$.

Quod autem hæc constructio recidat in eam, qua utitur Euclides, pro mediæ proportionalis inventione, non est dubitandum. Si enim circuli circumferentia, quæ describitur centro A, intervalloque AD, secet rectam AC in punctis C, & F; fiet portio CE $= b$, & portio EF $= a$. Unde, quum ipsis AN, AR æquales sint duæ EM, EO; omnino liquet,

Eu-

Euclideã constructionem in nostra contineri.

VIII. *Impossibilitas problematis non dissimilis ex ipsa ejus constructione deducitur.*

VIII. Sed notetur hoc loco velim, quod *si æquatio problematis sit $xx = -ab$, tunc ejus impossibilitatem, non modo ex duabus æquationis radicibus imaginariis, sed ex ipsa etiam constructione eruere licebit*. Nam, assumpto rursus loco ad rectam simplicissimo $y = c$, fiet locus ad circulum $xx + yy = cc - ab$. Unde oportebit, esse in hoc casu quadratum perfectum, non quidem quantitatem $cc + ab$, sed $cc - ab$.

Talis vero hæc quantitas esse non potest, nisi semisummæ ipsarum a, & b sit c æqualis. Nam, semper ac habetur $c = a:2 + b:2$, fiet $cc = aa:4 + ab:2 + bb:4$; adeoque erit $cc - ab = aa:4 - ab:2 + bb:4$. Hinc ex duobus locis geometricis, quibus problema construi debet, erit $y = a:2 + b:2$ locus ad rectam, & $xx + yy = aa:4 - ab:2 + bb:4$ locus ad circulum.

Fig. 112. Sit itaque rursus AB recta, super qua sumi debent valores incognitæ x. Et quoniam æquatio circuli hic pariter nulla eget reductione, erit adhuc punctum A centrum illius. Unde, abscissa ex AB portione $AD = a:2 - b:2$, fiet AD radius ejusdem. Erigatur deinde super AB perpendicularis AC, ex qua auferatur portio $AE = a:2 + b:2$. Quumque locus ad rectam sit $y = a:2 + b:2$, construetur ille, ducendo per punctum E rectam GH, ipsi AB parallelam.

Patet autem, rectam istam GH nullo pacto secari posse cum circumferentia circuli, quæ describitur centro A, & intervallo AD; quan-

quandoquidem ejus a centro distantia major est ipsa AD. Unde, quemadmodum constructa loca nulla habent puncta communia; ita nec etiam dari poterunt valores tales incognitæ x, qui utriusque loci conditiones adimpleant: proindeque problema, quod simul continet eas conditiones, omnino contradictionem involvet.

IX. Constructo problemate, quod continet æquatio $xx = ab$; jam, *ope ejus, omnia alia, quæ secundi sunt generis, construere licebit*; quum facile sit, æquationes omnes secundi gradus, per constructiones problematum primi generis, ad formam illam revocare. Ita, si æquatio problematis sit $xx = ab + cd$; capiendo $f = b + cd : a$, fiet $af = ab + cd$; atque adeo erit $xx = af$. Et, si æquatio sit $xx = ab + cc + dd$; sumendo $f = b + cc : a + dd : a$, erit $af = ab + cc + dd$; & consequenter fiet $xx = af$.

IX. *Quomodo ad constructum problema omnia alia secundi generis problemata revocantur.*

Fieri autem potest, ut æquatio problematis oriatur affecta, & contineat quoque secundum terminum. Sed quum facile sit, terminum illum ex æquatione delere; adhuc quidem eodem artificio problema construi poterit. Ita, si æquatio problematis sit $xx + 2ax = ab$; faciendo $x + a = z$, erit $xx + 2ax = zz - aa$. Unde, per substitutionem, erit $zz - aa = ab$, sive etiam $zz = ab + aa$, quæ quidem æquatio jam construi potest.

Eadem ratione, si in resolutione alicujus problematis perventum sit ad æquationem $2ax - xx = bb$, ponendum erit $x - a = z$. Nam, quum habeatur $2ax - xx = aa$

$- zz$

$-zz$; erit, substitutionis ope, $aa - zz = bb$, sive etiam $zz = aa - bb$: Sed nihil vetat, quin hujusmodi problema quandoque impossibile fiat: nimirum, quum fuerit b major, quam a. Tunc enim poni debet $a - bb$: $a = -f$; adeoque æquatio ultimo reducta erit $zz = -af$, quæ construi nequit.

Hic quoque in æquationum reductionibus instituendis Geometræ solertia debet locum suum habere. Ita, si habeatur $zz = aa + ab$, sumi poterit $f = a + b$; & erit $zz = af$ æquatio reducta. Pariterque, si fuerit $zz = aa - bb$, fiat, tum $a + b = c$, cum $a - b = d$: ita, ut sit $aa - bb = cd$; & habebitur loco ejus hæc alia $zz = cd$.

X.
Quorsum reducatur constructio problematum secundi generis, ostenditur.

X. Non itaque in dubium verti potest, quin omnia problemata secundi generis nullo negotio construantur, ubi semel constructum est problema quod continet æquatio $xx = ab$. Et quoniam problema istud non aliud involvit, quam ut inter duas rectas datas media proportionalis inveniatur; liquet, *cuncta secundi generis problemata, per inventionem mediæ alicujus proportionalis, construi posse.*

Interim, si in resolutione alicujus problematis occurrat æquatio, in qua quadratum incognitæ x adæquet duo alia quadrata cognita; tunc longe facilius, per hypothenusam dati alicujus trianguli rectanguli, poterit ipsius incognitæ valor designari. Ut, si habeatur $xx = aa + bb$, fiat triangulum rectangulum, cujus crus unum sit a, & crus alterum b; eritque hypothenusa ejusdem trianguli rectanguli valor incognitæ x.

Nec

Nec item reticebimus, quod si æquatio, ex aliquo problemate orta, ejusmodi sit, ut in ea quadratum incognitæ x adæquet differentiam, quæ inter duo alia quadrata cognita deprehenditur; tunc designari queat valor ipsius incognitæ, per crus unum dati alicujus trianguli rectanguli. Ut, si habeatur $xx = aa - bb$, fiat triangulum rectangulum, cujus a sit hypothenusa, & b crus unum; eritque crus alterum valor incognitæ x.

Et ad constituendum quidem triangulum rectangulum, cujus data sint crura; satis est, crura illa conjungere ad rectos angulos, tum eorum extrema per rectam aliam connectere. Sed, ut construatur triangulum rectangulum, in quo data sit hypothenusa cum crure uno; oportet primo super hypothenusa, velut diametro, semicirculum describere; tum in eo aptare crus datum, quod portionem ejus semicirculi subtendat; ac denique chordam ducere reliquæ portionis.

XI. Cæterum *in constructione problematum secundi generis reducendæ sunt eorum æquationes ad formam illam simplicissimam, quo constructio ipsa uno circulo peragi possit.* Ut enim ostensum est, reductiones hic fiunt, per constructiones problematum primi generis, quæ rectis tantum absolvuntur. Quare, reductione peracta, non alium circulum in constructione problematis oportebit assumere, quam qui pro mediæ proportionalis inventione omnino requiritur.

XI. *Cur æquationes aliorum problematum secundi generis ad formam illam simplicissimam sunt reducendæ.*

Interim, si hanc nobis legem imponere nollemus, etiam absque reductione unumquodque problema secundi generis construi poterit. Sit enim $xx - 2ax = ab$ æquatio, ex resolutione problematis orta. Capiatur locus ad rectam simplicissimus $y = c$. Quumque fiat $yy = cc$, habebitur additione locus ad circulum $yy + xx - 2ax = ab + cc$; qui tamen non aliter potest describi, quam adhibito circulo alio; quum sit $\sqrt{(aa + ab + cc)}$, hoc est media proportionalis inter a, & $a + b + cc : a$ radius ipsius.

Sit etiam $xx - 2ax + ab = o$ æquatio, ex resolutione alicujus problematis nata. Capiatur quoque locus ad rectam simplicissimus $y = c$. Quumque habeatur $yy = cc$, sive $yy - cc = o$; adhuc additione fiet locus ad circulum $yy + xx - 2ax + ab - cc = o$. Sed radius circuli hujus est $\sqrt{(aa - ab + cc)}$, hoc est media proportionalis inter a, & $a - b + cc : a$; nec proinde describi potest, nisi circulus alter adhibeatur.

Juvat autem hoc loco notare, quod quemadmodum radices duæ æquationis $xx - 2ax + ab = o$ fiunt imaginariæ, quum ab major est, quam aa; ita ipse etiam circulus impossibilis evadat, quotiescumque in eadem hypothesi $ab - aa$ major est, quam cc. Sed etsi, ob quantitatem c ad libitum sumptam, eludere liceat circuli impossibilitatem; contradictionem tamen ex problemate nunquam delere licebit; enim vero, cujuscumque valoris capiatur quantitas c, semper ea major erit, quam $\sqrt{(aa - ab + cc)}$.

XII. *Quomodo problema se-*

XII. Illud etiam nolo hic silentio preterire, quod *hoc artificio licebit interdum, proble-*

blema secundi generis dato etiam circulo construere. Jam enim, assumpto loco ad rectam simplicissimo $y = c$, reperire licet, additionis ope, locum alium, qui ad circulum nos ducat. Quare non aliud superest, quam ut, comparatione instituta, inveniatur, quinam esse debeat valor assumptæ quantitatis c, quo compertus circulus possit datum illum nobis exhibere. *cundi generis dato circulo construi possit, aperitur.*

Sit ergo $xx - 2ax = ab$ æquatio, ex resolutione alicujus problematis orta. Et oporteat, eam construere mediante circulo, cujus radius sit f. Capiatur locus ad rectam simplicissimus $y = c$. Quumque fiat $yy = cc$; erit additione $yy + xx - 2ax = ab + cc$ locus ad circulum. Jam radius hujus circuli est $\surd(aa + ab + cc)$. Quare, ut idem possit nobis circulum datum exhibere, oportebit, esse $f = \surd(aa + ab + cc)$, sive etiam $ff = aa + ab + cc$. Unde erit $cc = ff - aa - ab$, & $c = \surd(ff - aa - ab)$.

Hinc, ut problema, contentum in æquatione $xx - 2ax = ab$, construi possit mediante circulo, cujus radius sit f, necesse est, ut locus ad rectam sit $y = \surd(ff - aa - ab)$. Nam, quum habeatur $yy = ff - aa - ab$; fiet additione $yy + xx - 2ax = ff - aa$ locus ad circulum; cujus radium esse f, liquet abunde. Sed perspicuum est, constructionem istam non semper possibilem esse. Nam, si fuerit f minor, quam $\surd(aa + ab)$; quantitas $\surd(ff - aa - ab)$ fiet imaginaria; adeoque locus ad rectam nullibi reperietur.

Eadem ratione, si æquatio problematis

sit $xx - 2ax + ab = o$, & in ejus constructione adhiberi velit circulus, cujus radius sit a; fiet $y = \sqrt{ab}$ locus ad rectam. Nam, quum habeatur $yy = ab$, sive $yy - ab = o$; erit additione $yy + xx - 2ax = o$ locus ad circulum; cujus radium esse a, nemo non videt. Hic autem locus ad rectam semper realis deprehenditur. Sed non ideo constructio problematis semper possibilis erit. Nam, si fuerit ab major quam aa, sive etiam b major quam a; nulla erunt utriusque loci puncta communia; adeoque problema contradictionem involvet.

XIII. *Problematum secundi generis constructiones Cartesianæ afferuntur.*

XIII. Denique, ne aliquid hic missum faciamus, quod scitu sit dignum, *subjungemus constructiones Cartesianas problematum secundi generis.* Itaque, si problematis æquatio induat formam, vel hujus $xx + ax - bb = o$, vel etiam istius $xx - ax - bb = o$, fiet constructio, formando prius angulum rectum ABC, in quo sit AB $= b$, & CB $= a : 2$; tum describendo circulum ex puncto C, tamquam centro, & intervallo CB. Nam, si deinde jungatur AC, quæ circulo occurrat in punctis D, & E; erunt rectæ AD, AE valores duo incognitæ x.

Fig. 113.

Et in prima quidem æquatione $xx + ax - bb = o$, erit AD valor positivus, & AE valor negativus: enim vero, sive ponatur AD $= x$, sive AE $= - x$, ope trianguli rectanguli ABC, semper æquatio illa nobis suborietur. Vicissim autem in secunda æquatione $xx - ax - bb = o$, erit AE valor positivus, & AD valor negativus; quum, beneficio

ficio ejusdem trianguli rectanguli, restituatur nobis illiusmodi æquatio, ponendo $AE = x$, & $AD = -x$.

Quod si autem æquatio problematis sit, vel hujus formæ $xx - ax + bb = 0$, vel etiam istius $xx + ax + bb = 0$; construetur problema, si iisdem ut supra peractis, ducatur recta ADE, parallela ipsi BC. Et hic quo- FIG. 114.
que fient AD, AE valores incognitæ x: qui tamen erunt positivi, quum habetur $xx - ax + bb = 0$; & vicissim negativi, quum problematis æquatio est $xx + ax + bb = 0$.

In secundo hoc casu nihil obstat, quin recta ADE circulo non occurrat: nimirum si fuerit AB major, quam CB, hoc est b major, quam $a:2$. Sed, quum id contingit, ut nulla sunt puncta occursus; sic problema impossibile erit. Fieri etiam potest, ut eadem recta ADE circulum tangat: scilicet, si fuerit $b = a:2$. Et tunc, coeuntibus in unum punctis D, & E, æquales fient inter se valores duo incognitæ x.

XIV. *Quod judicium ferri debeat de Cartesianis constructionibus, ostenditur.*

XIV. Sed *quod judicium de hisce Cartesianis constructionibus ferendum sit, nec etiam subjicere gravabimur.* Quin eluceat in eis simplicitas, ac elegantia; non est dubitandum. Ea tamen ex formulis potius æquationum tota proficiscitur: quæ profecto non amplius apparebit, ubi non formulæ, sed ipsæ problematum æquationes, quæ ut plurimum compositæ esse solent, ad illas constructiones exiguntur.

Jam enim pro iis constructionibus duabus rectis opus est, scilicet tangente AB, & FI. 113. 114.

radio circuli CB. Ex his autem posterior CB, quum semissem adæquet coefficientis secundi termini, semper per problema primi generis potest definiri. Sed, quantum ad priorem AB, raro quidem evenit, ut per problema secundi generis determinari non debeat; quum ejus quadratum ultimo æquationis termino sit æquale.

Hinc Cartesianæ constructiones problematum secundi generis ponendæ sunt inter eas, quas lubet admittere, etsi non uno circulo fiant. Qua autem ratione eas detexerit Auctor; id quidem minime nobis explicare dignatus est. Sed probabile est, in eas incidisse, considerando expressiones valorum, quos in singulis iis formulis habet incognita; quum non aliter earum veritatem ostendat, quam quia rectæ illæ AD, AE eodem modo oriuntur expressæ.

Illud etiam nolo hic reticere, constructionibus suis Cartesium exhibuisse tantum valores positivos, & non item negativos. Istud autem vitio ei verti non debet. Nam, etsi, beneficio earundem constructionum, habeantur quoque valores negativi; eos tamen negligendos esse putavit; quia non adhuc ostenderat, posse æquationes utriusque generis valores admittere. Et inde pariter factum, ut constructio quartæ formulæ omnino apud ipsum omissa videatur.

CAP.

CAP. III.

Methodus construendi problemata solida generatim ostenditur.

I. Solida problemata vocabant Veteres ea, quæ construi non possunt, nisi adhibita aliqua coni sectione. Talia autem, juxta Recentiorum distinctionem, *sunt problemata illa, quæ sive ad tertium, sive ad quartum genus revocantur.* Debent siquidem hujusmodi problemata per loca duo secundi generis construi. Quare omnino necesse est, in eorum constructione aliquam coni sectionem assumere. I. *Quæ sint problemata solida, juxta Recentiorum distinctionem, ostenditur.*

Neque enim esse potest ad circulum uterque locus. Nam, etsi circulus sit locus secundi generis, & per æquationem secundi gradus definiatur; ex duabus tamen æquationibus ad circulum, in quibus incognitæ eundem angulum continent, numquam licebit, æquationem determinatam eruere, quæ ad tertium, quartumve gradum ascendat: nec proinde unquam poterit constructio problematis tertii, vel quarti generis intersectione duorum circulorum obtineri.

Ponamus etenim primo, incognitas duas in utroque ad circulum loco rectum angulum continere. Et quoniam in isto casu nequit in eorum æquationibus reperiri productum ipsaſarum incognitarum; neceſſe eſt, ut eæ æquationes formas induant iſtarum $xx + yy \,..\, ax \,..\, by \,..\, cc = o$, & $xx + yy \,..\, dx \,..\, fy \,..\, gg = o$. Quare, exterminando unam incognitarum, nunquam poterit incognita alia ad tres, aut quatuor dimenſiones aſcendere.

Ponamus ſecundo, incognitas duas obliquum angulum continere; ita ut in æquationibus, loca ad circulum deſignantibus, reperiatur productum ipſarum incognitarum. Et quoniam obliquus ille angulus debet eſſe idem in utroque loco, induent eorum æquationes in hoc caſu, vel formas iſtarum $yy + mxy : n + mmxx : ss \,..\, ax \,..\, by \,..\, cc = o$, & $yy + mxy : n + mmxx : ss \,..\, dx \,..\, fy \,..\, gg = o$; vel harum, quæ ſequuntur, $yy - mxy : n + mmxx : ss \,..\, ax \,..\, by \,..\, cc = o$, & $yy - mxy : n + mmxx : ss \,..\, dx \,..\, fy \,..\, gg = o$. Unde, eliminata incognita una, nec etiam incognita alia ad tres, aut quatuor dimenſiones poterit attolli.

II. *Quod ex æquationibus problematum ſolidorum omnes ſpecies locorum ſecundi generis erui queant.*

II. Non itaque in dubium verti poteſt, quin, juxta Recentiorum diſtinctionem, ea quidem problemata ſint ſolida, quæ tum ad tertium, cum ad quartum genus revocantur. Hujuſmodi autem problemata conſtruere licebit, tam duabus coni ſectionibus, quam circulo, & una coni ſectione. Sed præferendæ ſunt ſemper eæ conſtructiones, quas circulus ingreditur; quandoquidem circulus in plano longe facilius deſcribitur, quam quælibet ſectio coni.

Poteſt vero cum circulo conjungi quæcumque ſectio conica; quia ex æquationibus

pro-

problematum solidorum omnes secundi generis locorum species erui possunt. Et quoniam, comparatis locis geometricis, naturæ problematum consonis, constructiones ipsæ nullo negotio peraguntur; ostendemus potissimum hoc capite, *qua ratione ex solidi alicujus problematis æquatione singulæ species locorum secundi generis colligi queant.*

Etsi autem æquationes problematum solidorum possint, tum ad tertium, cum ad quartum gradum attolli; nihilo tamen minus, quæ hic a nobis in exemplum afferentur, ad quatuor semper dimensiones ascendent. Id vero multum abest, ut difficultatem facere debeat. Nam, quum æquatio quarti gradus deprimatur ad tertium, ubi ultimus ejus terminus zero æqualis supponitur; considerari poterit æquatio tertii gradus velut alia quarti, postremo termino carens.

Potius discrimen fieri debet inter æquationes, secundo termino præditas, & eas, in quibus idem ille terminus deest. Nam longe aliter eruenda sunt loca secundi generis, quum æquatio problematis solidi secundo termino caret, quam quum eodem illo termino est referta. Et quamquam facillimum sit, delere secundum terminum ex quacumque æquatione; construere tamen præparatione ista problemata solida, non semper subinde facile deprehenditur.

III. Primo igitur ostendemus, *quo pacto erui debeant species omnes locorum secundi generis ex æquatione problematis solidi, quæ secundo termino caret.* Hunc in finem sit x^4 — III. *Quomodo eruenda sint loca illa ex æquationibus, quæ secundo termi-*

abxx

... caret. Exemplum primum.

$abxx + aacx - a^3d = 0$ æquatio ista. Capiatur locus ad parabolam simplicissimus $xx = ay$, sive $xx - ay = 0$. Quumque fiat $x^4 = aayy$; substitutione peracta, erit $aayy - abxx + aacx - a^3d = 0$, sive etiam $yy - bxx : a + cx - ad = 0$, qui est locus ad hyperbolam, relate ad diametros consideratam.

Ponatur deinde in æquatione ista ad hyperbolam loco xx valor ejus ay; & habebitur hoc pacto æquatio altera ad parabolam $yy - by + cx - ad = 0$. Sed duabus hisce æquationibus ad parabolam facillime poterit obtineri, tam locus ad circulum, si incognitæ duæ rectos angulos continent, quam locus ad hyperbolam æquilateram. Nam, addendo eas simul, fiet $xx + yy - ay - by + cx - ad = 0$, qui est locus ad circulum; subducendo vero unam ex alia, orietur $xx - yy - ay + by - cx + ad = 0$, qui est locus ad hyperbolam æquilateram.

Ellipsis porro, quæ deest, habebitur, si æquatio ad parabolam simplicissima $xx - ay = 0$ per fractionem aliquam cognitam multiplicetur. Sit enim $b : a$ fractio ista. Jamque, multiplicatione peracta, fiet $bxx : a - by = 0$. Sed habetur quoque $yy - by + cx - ad = 0$. Quare, addendo simul duas istas æquationes, orietur tertia $yy - by - by + bxx : a + cx - ad = 0$, quæ proculdubio per ellipsim debet explicari.

Notetur hic autem, quod si ultimus æquationis terminus nihilo æqualis supponatur, tunc æquatio fiet tertii gradus, & loco ejus habebitur hæc alia $x^3 - abx + aac = 0$.

Un-

Unde, si ista fuerit problematis æquatio, erunt relate ad eam $xx - ay = 0$ locus ad parabolam; $yy - bxx : a + cx = 0$ locus ad hyperbolam; $yy - by + cx = 0$ locus alter ad parabolam; $xx + yy - ay - by + cx = 0$ locus ad circulum; $xx - yy - ay + by - cx = 0$ locus ad hyperbolam aliam æquilateram; & $yy - by - by + bxx : a + cx = 0$ locus ad ellipsim.

IV. Sed, ut ejusdem rei aliud exemplum afferamus, sit $x^4 + abxx - aacx + a^3d = 0$ *æquatio, orta ex resolutione alicujus problematis solidi*. Capiatur quoque locus ad parabolam simplicissimus $xx = ay$, sive $xx - ay = 0$. Et quoniam habetur $x^4 = aayy$; substitutione peracta, erit $aayy + abxx - aacx + a^3d = 0$, sive etiam $yy + bxx : a - cx + ad = 0$, qui est locus ad ellipsim. IV. *Exemplum secundum.*

Ponatur postea in æquatione ista ad ellipsim loco xx valor ejus ay; & habebitur hoc pacto æquatio altera ad parabolam $yy + by - cx + ad = 0$. Unde hic quoque, si duæ istæ æquationes ad parabolam simul addantur, fiet locus ad circulum $xx + yy - ay + by - cx + ad = 0$; si vero una ex alia subducatur, orietur locus ad hyperbolam æquilateram $xx - yy - ay - by + cx - ad = 0$.

Deest hic autem hyperbola non æquilatera; sed facili negotio ea comparabitur, si æquatio ad parabolam simplicissima $xx - ay = 0$ per datam aliquam fractionem multiplicetur. Sit enim $b : a$ fractio ista. Jamque, multiplicatione peracta, fiet $bxx : a - by = 0$. Sed habetur quoque $yy + by - cx + ad = 0$.

Qua-

Quare, subductis a se mutuo duabus hisce æquationibus, orietur tertia $yy + by + by - bxx : a - cx + ad = o$, quæ per hyperbolam non æquilateram debet explicari.

Etiam in hoc exemplo, si ultimus æquationis terminus nihilo æqualis supponatur, habebitur loco ejus hæc alia $x^3 + abx - aac = o$. Unde, si ista fuerit problematis æquatio, erunt relate ad eam $xx - ay = o$ locus ad parabolam; $yy + bxx : a - cx = o$ locus ad ellipsim; $yy + by - cx = o$ locus alter ad parabolam; $xx + yy - ay + by - cx = o$ locus ad circulum; $xx - yy - ay - by + cx = o$ locus ad hyperbolam æquilateram; & $yy + by + by - bxx : a - cx = o$ locus ad hyperbolam aliam non æquilateram.

V. Quomodò eruenda sint eadem loca ex æquationibus, secundo termino præditis. Exemplum primum.

V. Ostendemus deinde, *qua ratione eruendæ sint species omnes locorum secundi generis ex æquatione problematis solidi, in qua secundus terminus reperitur*. Hunc in finem sit $x^4 + 2fx^3 - abxx + aacx - a^3d = o$ æquatio ista. Capiatur locus ad parabolam paulo compositus $xx + fx = ay$, sive $xx + fx - ay = o$. Quumque fiat $x^4 + 2fx^3 = aayy - ffxx$; substitutione peracta, erit $aayy - ffxx - abxx + aacx - a^3d = o$, sive etiam $yy - ffxx : aa - bxx : a + cx - ad = o$, qui est locus ad hyperbolam, relate ad diametros considerata.

Ex eo autem, quod sit $xx + fx = ay$, erit etiam $xx = ay - fx$. Unde in inventa æquatione ad hyperbolam poterit quoque loco xx valor ille subrogari. Plane vero manebit locus semper ad hyperbolam, si substitutio in uno tantum termino fiat. Nam erit $yy - ffy : a + f^3x : ad - bxx : a + cx - ad = o$, si substituatur ille valor tantum in termino $ffxx : aa$; & $yy - ffxx : aa - by + bfx : a + cx - ad = o$, si substitutio fiat dumtaxat in termino $bxx : a$. Sed si in utroque termino valor ille subrogetur; locus fiet ad parabolam, & erit $yy - ffy : a + f^3x : aa - by + bfx : a + cx - ad = o$.

Compertis duobus locis ad parabolam, habebitur eorum additione locus ad circulum $xx + fx - ay + yy - ffy : a + f^3x : aa - by + bfx : a + cx - ad = o$. Sed si eadem illa loca complicentur simul subtractione, orietur locus ad hyperbolam æquilateram $xx + fx - ay - yy + ffy : a - f^3x : aa + by - bfx : a - cx + ad = o$. Unde non aliud superest, quam ut locum exhibeamus ad ellipsim, quem facillime reperire licebit, si termini omnes prioris æquationis ad parabolam per datam aliquam fractionem multiplicentur, tum ea cum altera ad parabolam æquatione conjungatur.

VI. Et ut aliud ejusdem rei exemplum afferamus, *sit* $x^4 - 2fx^3 + abxx - aacx + a^3d = o$ *æquatio, orta ex resolutione alicujus problematis solidi*. Capiatur quoque locus ad parabolam paulo compositus $xx - fx = ay$, sive $xx - fx - ay = o$. Et quoniam habetur $x^4 - 2fx^3 = aayy - ffxx$; substitutione peracta, erit $aayy - ffxx + abxx - aacx + a^3d = o$, sive etiam $yy - ffxx : aa + bxx : a - cx + ad = o$: qui est locus ad parabolam, si sit $ff = ab$; locus ad hyperbolam, si sit ff major, quam ab; ac denique locus ad ellipsim,

VI. *Exemplum secundum.*

psim, sit sit ff minor, quam ab.

Quum autem sit $xx = ay + fx$; poterit in hac alia æquatione subrogari valor iste loco ipsius xx. Et quidem, si substitutio fiat tantum in termino $ffxx:aa$; habebitur $yy - ffy:a - f^3x:aa + bxx:a - cx + ad = 0$, qui est locus ad ellipsim. Quod si vero fiat dumtaxat in termino $bxx:a$, orietur $yy - ffxx:aa + by + bfx:a - cx + ad = 0$, qui est locus ad hyperbolam. Et denique, si valor ille substituatur in utroque termino; æquatio fiet $yy - ffy:a - f^3x:aa + by + bfx:a - cx + ad = 0$, quæ ad parabolam nos ducet.

Compertis duobus ad parabolam locis, habebitur eorum additione locus ad circulum $xx - ay - fx + yy - ffy:a - f^3x:aa + by + bfx:a - cx + ad = 0$. Et, si eadem complicentur simul subtractione, orietur locus ad hyperbolam æquilateram $xx - ay - fx - yy + ffy:a + f^3x:aa - by - bfx:a + cx - ad = 0$. Possentque adhuc duo alia ad ellipsim, & hyperbolam loca reperiri, si multiplicatis terminis omnibus prioris æquationis ad parabolam per notam aliquam fractionem, eadem tum additionis, cum subtractionis ope cum altera ad parabolam æquatione complicetur.

VII. *Discrimen inter utramque loca eruendi rationem ostenditur.*

VII. His igitur rationibus eruendæ sunt species omnes locorum secundi generis ex æquationibus problematum solidorum. Nec difficile erit intelligere, *quale quidem sit discrimen inter æquationes, secundo termino præditas, & eas, in quibus idem ille terminus deest*. Jam enim in utroque casu debet

esse

esse ad parabolam locus, qui assumitur ab initio. Sed, quum æquatio secundo termino caret, referenda est parabola per suam æquationem ad axem ipsius; quum vero eodem illo termino est prædita, ad aliquam axis parallelam oportet referatur.

Necesse est autem, referre parabolam ad aliquam axis parallelam, quum adest in æquatione secundus terminus; ut, substitutione peracta, possit ex ipsa æquatione, tum primus, cum secundus terminus deleri. Atque hinc est, ut locus ad parabolam debeat esse $xx + fx = ay$, quum æquatio problematis est $x^4 + 2fx^3 - abxx + aacx - a^3d = 0$; & $xx - fx = ay$, quum eadem problematis æquatio est $x^4 - 2fx^3 + abxx - aacx + a^3d = 0$. Nam aliter, substitutionis ope, priores duo æquationis termini deleri non poterunt.

Delendi sunt porro, per locum ad parabolam, qui assumitur, priores duo æquationis termini; ut aliæ locorum secundi generis species non ita compositæ oriantur. Si enim, existente $x^4 + 2fx^3 - abxx + aacx - a^3d = 0$ problematis æquatione, capiatur locus ad parabolam $xx - ay = 0$; substitutionis ope habebitur, tum $yy + 2fxy : a - bxx : a + cx - ad = 0$, cum $yy + 2fxy : a - by + cx - ad = 0$, quorum uterque est locus ad hyperbolam.

Et, si multiplicatis terminis æquationis ad parabolam per fractionem aliquam indeterminatam $m : a$, conjungatur eadem cum æquatione $yy + 2fxy : a - by + cx - ad = 0$; orietur hæc alia æquatio $yy + 2fxy + mxx : a$

$- by$

$-by-my+cx-ad=0$, quæ, pro vario valore ipsius m, ad omnes coni sectiones, tum item ad circulum, si duæ incognitæ obliquum angulum continent, nos ducere poterit. Sed perspicuum est, omnes hasce æquationes casus valde compositos locorum secundi generis continere.

VIII. *Quod constructio problematum solidorum fieri possit, data parabola.*

VIII. Ne aliquid hic omittamus, quod ad rem faciat, *illud quoque sedulo notari debet*, quod etsi, in eruendis locis secundi generis ex æquatione problematis solidi, capi debeat ab initio locus ad parabolam; parameter tamen ejus parabolæ haud quidem datæ alicujus longitudinis esse debet, sed ad libitum potest assumi. Unde, etsi in allatis exemplis assumpta fuerit quantitas a pro parametro ejus parabolæ; attamen, si alia quælibet quantitas tale munus obiret, adhuc easdem locorum species eruere liceret.

Poterit ergo, ut parabolæ parameter assumi, indeterminata aliqua quantitas. Et tunc ipse locus, non ad unam, sed ad infinitas parabolas erit. Quumque eadem quantitas indeterminata omnes alias locorum species, quæ deinceps eruuntur, ingrediatur; perspicuum est, etiam loca ista infinitis prope modis posse explicari. Interim, ut constructio problematis, quantum fieri potest, simplex oriatur; præstat, ut parametrum assumere quantitatem illam, quæ vel in singulis æquationis terminis, vel in maxima eorum parte reperitur.

Capiendo autem indefinite parabolæ parametrum, licebit deinceps, construere pro-

problema per parabolam, cujus parameter sit data; quum non aliud fieri debeat, quam loco ejus inderminatæ quantitatis parametrum datam substituere. Et, quamquam eadem indeterminata quantitas reperiatur quoque, tum in loco ad circulum, cum in loco ad hyperbolam æquilateram; nihilominus, si ope ejus fieri velit, ut datus sit alteruter horum locorum, non aliter, quam per problema solidum, id poterit obtineri.

Sit enim $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$ æquatio problematis. Capiatur indefinite locus ad parabolam simplicissimus $xx = my$, sive $xx - my = 0$. Et, methodo tradita, fiet $xx + yy - my - aby : m + aacx : mm - a^3d : mm = 0$ locus ad circulum. Jam radius hujus circuli est $\sqrt{(a^4cc : 4m^4 + mm : 4 + ab : 2 + aabb : 4mm + a^3d : mm)}$. Quare, si fuerit r radius circuli dati, oportebit esse $r = \sqrt{(a^4cc : 4m^4 + mm : 4 + ab : 2 + aabb : 4mm + a^3d : mm)}$. Unde infertur æquatio sexti gradus, derivativa tertii, $m^6 - 4rrm^4 + 2abm^4 + aabbmm + 4a^3dmm + a^4cc = 0$. Et par est ratio, si data esse debeat hyperbola æquilatera.

IX. Non deest interim methodus, qua mediante, *solius Geometriæ planæ præsidio, fieri possit, ut sive locus ad circulum, sive locus ad hyperbolam æquilateram sit datus*. Sit enim rursus $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$ æquatio problematis. Fiat primo $x = az : m$, adeo ut per substitutionem migret æquatio illa in hanc aliam $a^4z^4 : m^4 - a^3bzz : mm + a^3cz : m - a^3d = 0$; sive etiam $z^4 - bmmzz : a + cm^3z : a - dm^4 : a = 0$. Jamque, si deinde

IX. *Quomodo eadem constructio peragi queat, vel dato circulo, vel data hyperbola æquilatera.*

capiatur locus ad parabolam simplicissimus $zz - my = o$, fiet methodo superius tradita $zz + yy - my - bmy : a + cmz : a - dmm : a = o$ locus ad circulum.

Hujus autem circuli radius est $\sqrt{(ccmm : 4aa + mm : 4 + bmm : 2a + bbmm : 4aa + dmm : a)}$. Quare, si fuerit r radius circuli dati, oportebit esse $r = \sqrt{(ccmm : 4aa + mm : 4 + bmm : 2a + bbmm : 4aa + dmm : a)}$. Unde, quum habeatur $rr = ccmm : 4aa + mm : 4 + bmm : 2a + bbmm : 4aa + dmm : a$, sive etiam $4aarr = ccmm + aamm + 2abmm + bbmm + 4admm$; fiet $mm = 4aarr : (cc + aa + 2ab + bb + 4ad)$, & $m = 2ar : \sqrt{(cc + aa + 2ab + bb + 4ad)}$.

Iisdem porro manentibus, locus ad hyperbolam æquilateram erit $zz - yy - my + bmy : a - cmz : a + dmm : a = o$. Et quoniam semiaxis hujus hyperbolæ est $\sqrt{(mm : 4 - bmm : 2a + bbmm : 4aa - ccmm : 4aa + dmm : a)}$; si utique vocetur f semiaxis hyperbolæ datæ, erit $f = \sqrt{(mm : 4 - bmm : 2a + bbmm : 4aa - ccmm : 4aa + dmm : a)}$. Quare, quum habeatur $ff = mm : 4 - bmm : 2a + bbmm : 4aa - ccmm : 4aa + dmm : a$; fiet $mm = 4aaff : (aa - 2ab + bb - cc + 4ad)$, & $m = 2af : \sqrt{(aa - 2ab + bb - cc + 4ad)}$.

Notetur hic vero, quod si fuerit cc major, quam $aa - 2ab + bb + 4ad$, tunc valor ipsius m prodibit imaginarius. Sed quum id contingit, explicandus est locus per hyberbolas conjugatas. Sic enim semiaxis erit $\sqrt{(ccmm : 4aa - mm : 4 + bmm : 2a - bbmm : 4aa - dmm : a)}$. Unde habebitur $m = 2af : \sqrt{(cc - aa + 2ab - bb - 4ad}$.

Fieri

Fieri etiam potest, ut sit $cc = aa - 2ab + bb + 4ad$. Et tunc valor ejusdem m fiet infinitus. Verum in hoc casu, quum habeatur $ad = cc:4 - aa:4 + ab:2 - bb:4$, æquatio evadet $x^4 - abxx + aacx - aacc:4 + a^4:4 - a^3b:2 + aabb:4 = 0$, quæ non erit in propria sua sede; quum dividi possit in hasce duas secundi gradus $xx + ax - ac:2 + aa:2 - ab:2 = 0$, & $xx - ax + ac:2 + aa:2 - ab:2 = 0$.

X. Sed non abs re erit hoc loco subjungere, *quid factu sit opus, ut problema construi possit, vel per datam ellipsim, vel per hyperbolam non æquilateram datam*. Sane determinatio harum curvarum ex duplici capite oritur; primo nempe ex axis longitudine; tum ex ratione, quam habet axis ad suam parametrum. Unde, ut id, quod quæritur, possit obtineri; oportebit, duas quidem indeterminatas quantitates in illiusmodi locis contineri.

X. *Quomodo etiam absolvenda, vel per datam ellipsim, vel per datam hyperbolam non æquilateram.*

Sit ergo rursus $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$ problematis æquatio; & posito $x = az:m$, transformetur iterum ea in hanc aliam $z^4 - bmmzz:a + cm^3z:a - dm^4:a = 0$. Capiatur adhuc locus ad parabolam simplicissimus $zz - my = 0$. Jamque, si ponatur my loco zz, & $mmyy$ loco z^4; habebitur locus alter ad parabolam $mmyy - bm^3y:a + cm^3z:a - dm^4:a = 0$, sive etiam $yy - bmy:a + cmz:a - dmm:a = 0$.

Multiplicetur deinde prior locus ad parabolam per fractionem indeterminatam $n:a$, ita ut habeatur $nzz:a - nmy:a = 0$. Et siquidem

idem iste locus complicetur, tam additione, quam subtractione, cum altero ad parabolam loco $yy - bmy : a + cmz : a - dmm : a = o$; habebitur additione quidem locus ad ellipsim $nzz : a + yy - nmy : a - bmy : a + cmz : a - dmm : a = o$; subtractione vero locus ad hyperbolam non æquilateram $nzz : a - yy - nmy : a + bmy : a - cmz : a + dmm : a = o$.

Quum itaque in utroque horum locorum duæ indeterminatæ quantitates contineantur; facile quidem erit, iis mediantibus, unumquemque eorundem locorum subinde determinare, ut exhibeat, vel datam ellipsim, vel datam hyperbolam non æquilateram. Nam, quemadmodum indeterminata m usui nobis esse debet, ut ellipsis, aut hyperbola datum habeat axem; sic indeterminata altera n inserviet nobis, ut idem ille axis ad suam parametrum datam habeat rationem.

XI. *Ostenditur exemplo, quomodo fieri possit, ut data sit, vel ellipsis, vel hyperbola non æquilatera.*

XI. Et, *ne ullus supersit dubitandi locus*, videamus primo, quomodo æquatio ad ellipsim $nzz : a + yy - nmy : a - bmy : a + cmz : a - dmm : a = o$ illiusmodi determinationem suscipere possit. Nimirum in ea ratio axis ad parametrum est æqualis ei, quam habet n ad a; tum item ipsa axis longitudo est $2\sqrt{(bbmm : 4aa + bnmm : 2aa + nnmm : 4aa + ccmm : 4an + dmm : a)}$. Quare, si in data ellipsi sit axis ad parametrum, ut r ad s, & $2f$ longitudo ipsius axis; erit, tum $n : a = r : s$, cum $f = \sqrt{(bbmm : 4aa + bnmm : 2aa + nnmm : 4aa + ccmm : 4an + dmm : a)}$. Unde infertur $n = ar : s$, & $m = 2afs\sqrt{r : (bbrss + 2abrrs + aar^3 + ccs^3 + 4adrss)}$.

Osten-

Ostendamus deinde, quomodo æquatio ad hyperbolam $nzz : a - yy - nmyza + bmy : a - cmz : a + dmm : a = 0$ eandem illam determinationem subire queat. Nimirum in ea ratio axis ad parametrum est æqualis ei, quam habet n ad a; tum item est $2\surd\,(bbmm : 4aa - bnmm : 2aa + nnmm : 4aa - cemm : 4an + dmm : a)$ ipsa axis longitudo. Quare, si in data hyperbola sit axis ad parametrum, ut r ad s, & $2f$ longitudo ipsius axis; erit, tum $n : a = r : s$, cum $f = \surd\,(bbmm : 4aa - bnmm : 2aa + nnmm : 4aa - ccmm : 4an + dmm : a)$. Unde eruitur $n = ar : s$; & $m = 2afs\surd r : \surd\,(bbrss - 2abrrs + aar^3 - ccs^3 + 4adrss)$.

Fieri autem hic potest, ut sit ccs^3 major, quam $bbrss - 2abrrs + aar^3 + 4adrss$. Et tunc, ne valor ipsius m prodeat imaginarius, explicandus est locus per hyperbolas conjugatas; quia sic erit $m = 2afs\surd r : \surd\,(ccs^3 - bbrss + 2abrrs - aar^3 - 4adrss)$. Sed nihil vetat, quin habeatur quoque $ccs^3 = bbrss - 2abrrs + aar^3 + 4adrss$. Et in isto casu, sicuti valor ipsius m evadit infinitus, sic nec etiam in propria sede erit æquatio, de qua agitur, $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$. Nam, quum fiat $ad = ces : 4r - bb : 4 + abr : 2s - aarr : 4ss$; habebitur loco ejus hæc alia $x^4 - abxx + aacx - aaccs : 4r + aabb : 4 - a^3br : 2s - a^4rr : 4ss = 0$, quæ quidem dividitur in duas hasce secundi gradus $xx + ax\surd\,(r : s) - ac\surd\,(s : 4r) + aar : 2s - ab : 2 = 0$, & $xx - ax\surd(r : s) + ac\surd(s : 4r) + aar : 2s - ab : 2 = 0$.

XII. Ex duobus itaque locis geometricis, quibus constructio problematis solidi fieri de- XII. Quod ellipsi, aut hy-

perbola non æquilatera assumi possit similis tantum alteri datæ.

bet, nihil obstat, quin unus quandoque sit datus. Sed, si eadem constructio duobus datis locis peragi vellet; id sane tantum non impossibile foret. Plane vero, *si ellipsis, aut hyperbola non æquilatera deberet esse similis dumtaxat alteri datæ; tunc data etiam esse posset, vel parabola, vel circumferentia circuli, vel hyperbola æquilatera*; quandoquidem, ad adstruendam similitudinem illam, nonnisi unica quantitas indeterminata requiritur.

Dicuntur quippe duæ ellipses, aut duæ hyperbolæ non æquilateræ similes inter se, quoticscumque eadem in utraque est ratio axis ad parametrum. Unde, non aliud exigit quæsita illa similitudo, quam ut axis ad parametrum datam habeat rationem. Profecto autem, ope datæ hujus rationis, tam in loco ad ellipsim, quam in loco ad hyperbolam non æquilateram, dumtaxat determinatur valor ipsius n. Quare, quum maneat indeterminata alia m; licebit, ope hujus, efficere, ut data sit, vel parabola, vel circumferentia circuli, vel hyperbola æquilatera.

Obiter autem notetur hoc loco velim, de similitudine sectionum conicarum fuse egisse Apollonium in libro sexto suorum conicorum; & præter definitionem ejus similitudinis, quam ipse Apollonius ibidem assumpsit, plures alias, a subsequentibus Geometris excogitatas, passim circumferri. Hujusmodi argumentum, velut parum utile, in nostris hisce Elementis omisimus omnino. Sed, si de eo agendum esset, posthabitis aliorum de-

definitionibus, vocarem libenter *similes coni sectiones, quæ ex uno, eodemque cono per plana parallela erui possunt.*

Ex hac vero definitione ultro liquet, parabolas omnes debere esse similes inter se; quum omnes, quot quot fuerint, possint per plana parallela ex eodem cono deduci. Patetque etiam, tam ellipses, quam hyperbolas tunc demum eandem similitudinem sortiri, quotiescumque eadem in iis est ratio axis ad parametrum. Nam, ob eandem istam rationem, licebit quidem, eas eruere ex uno, eodemque cono per plana æquidistantia.

XIII. Meretur interim, *ut speciatim hoc loco ostendatur*, quod si duarum ellipsium, aut hyperbolarum axes eandem habeant rationem ad suas parametros; omnino necesse sit, ut etiam diametri, quæ æqualiter ad suas ordinatas inclinantur, eandem servent rationem cum parametris suis. Hunc in finem sint AM, *am* duæ istæ ellipses, aut hyperbolæ, quæ ita quidem disponantur, ut habeant, tum commune centrum C, cum axes AB, *ab* sibi mutuo coincidentes.

XIII. *Ellipsium, & hyperbolarum similium specialis quadam proprietas demonstratur.*

Fi. 115. 116.

Ducatur ex centro C recta quævis CE, secans utramque earum curvarum in punctis E, & *e*. Tum ex punctis istis demittantur ad axes ordinatæ EG, *eg*. Et quoniam in utraque curva eadem est ratio axis ad parametrum; erit, ut rectangulum AGB ad EG quadratum, ita rectangulum *agb* ad *eg* quadratum. Sed EG quadratum est ad CG quadratum, ut *eg* quadratum ad Cg quadratum. Itaque erit ordinando, ut rectangulum AGB ad

CG quadratum, ita rectangulum *agb* ad C*g* quadratum.

Hinc erit pariter, ut CA quadratum ad CG quadratum, ita C*a* quadratum ad C*g* quadratum; sive etiam, ut CA ad CG, ita C*a* ad C*g*. Et permutando erit quoque, ut CA ad C*a*, ita CG ad C*g*. Sed CG est ad C*g*, ut CE ad C*e*. Quare erit ex æquali, ut CA ad C*a*, ita CE ad C*e*: & propterea duabus iis ellipsibus, aut hyperbolis illud etiam accidet; ut omnis recta, quæ ad eas ducitur ex centro C, secetur ab ipsis in data ratione.

Extendatur jam recta CE ad partem alteram versus F, ita ut EF, *ef* sint duæ earundem curvarum diametri; sitque porro AM ordinata una diametri EF. Et quoniam, juncta CM, fit, ut CM ad C*m*, ita CA ad C*a*; erit *am* ipsi AM parallela. Sed, ob AM bisectam in O, etiam *am* bisecatur in *o*. Quare erit *am* similiter ordinata una ipsius *ef*: proindeque duæ diametri EF, *ef* æqualiter ad suas ordinatas inclinabuntur.

Denique, quum in eadem ratione ipsarum CA, C*a* sit, tam CE ad C*e*, quam CO ad C*o*; proportionalia erunt quadrata, quæ fiunt ex ipsis CE, CO, C*e*, C*o*. Unde erit quoque, ut rectangulum EOF ad CO quadratum, ita rectangulum *eof* ad C*o* quadratum. Sed CO quadratum est ad AO quadratum, ut C*o* quadratum ad *ao* quadratum. Quare erit ordinando, ut rectangulum EOF ad AO quadratum, ita rectangulum *eof* ad *ao* quadratum: & propterea diametri EF, *ef* ad parametros suas eandem rationem habebunt.

CAP.

CAP. IV.

Elegantiores problematum solidorum constructiones exhibentur.

I. *Quod cum circulo conjungi debeat vel parabola, vel ellipsis, ut problematis constructio simplex, ut facilis oriatur.*

I. VIdimus præcedenti capite, ex æquationibus problematum solidorum omnes secundi generis locorum species eruere licere. Inde autem abunde liquet, constructiones eorundem problematum, tam duabus coni sectionibus, quam circulo, & una coni sectione peragi posse. Sed, ut ibidem innuimus, præferendæ sunt eæ constructiones, quas circulus ingreditur; quum circulus in plano longe facilius describatur, quam quælibet sectio coni.

Quamquam vero cum circulo conjungi possit quæcumque sectio conica; non omnis tamen sectio coni, unita circulo, elegantiorem nobis suppetit problematis cōstructionem. Unde, quia in construendis problematibus, non modo vitandæ sunt eæ constructiones, quæ naturæ problematum consonæ non sunt, sed in id etiam sedulo incumbendum, ut faciliores, simplicioresque eligantur; illud jam oportet inquiramus, *quæ coni sectio cum circulo sit conjungenda, ut problematis constructio, quoad fieri potest, elegans oriatur.*

Hunc in finem meminisse oportet, facilitatem, simplicitatemque constructionis geometricæ generaliter ex duplici capite æstimari debere; primo nempe ex faciliore ratione, qua lineæ, loca terminantes, describuntur; & secundo ex simpliciore apparatu, quo opus est, pro determinatione earundem linearum. Hinc enim fit, ut sectio conica, cum circulo conjungenda, esse debeat ellipsis, si descriptionis facilitas consideretur; parabola vero, si simplicior eam determinandi ratio inspiciatur.

Primo siquidem dubitari non potest, quin ex conicis sectionibus ellipsis sit illa, quam paulo facilius in plano describere licet. Nam, ubi ad ejus descriptionem foci adhibentur, describitur eadem fere facilitate, qua circulus ipse delineatur. Et deinde nec etiam in dubium verti potest, quin ex curvis omnibus, quæ ex æquatione problematis solidi eruuntur, parabola sit ea, quæ simpliciore apparatu determinatur. Nam liquet, ejus æquationem non esse adeo compositam, quemadmodum æquationes aliarum curvarum.

Hæc quum ita sint, duo nobis hoc capite præstanda sunt. Primo enim oportet ostendamus, qua ratione problemata solida parabola, & circulo construantur. Deinde explicandum nobis erit, quo pacto eorundem problematum constructiones ellipsi, & circulo peragi debeant. Et quamquam, ad hæc ostendenda, exemplis primum utemur specialibus; deinceps tamen non gravabimur, ad regulas generales rem omnem revocare.

II. *Quomodo problemata*

II. Ut igitur ostendamus primo loco, *qua ratione problemata solida parabola, & circulo* *lo construantur*, sit primum $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$ problematis æquatio, quæ secundo termino caret. Sumpto itaque loco ad parabolam simplicissimo $xx - ay = 0$; fiet methodo superius tradita $xx + yy - ay - by + cx - ad = 0$ locus ad circulum. Unde duobus hisce locis constructio problematis est peragenda, quo parabola, & circulo construi possit.

solida parabola, & circulo construantur, quarum æquationes secundo termino carent. Exemplum.

Sit ergo positione data recta quævis AB. Et quoniam æquatio ad parabolam est $xx - ay = 0$; designandi sunt per portiones ejus valores incognitæ y. Unde, erecta super ea perpendiculari AC; fient huic æquidistantes valores alterius incognitæ x: proindeque, abscissa ex AC portione AD $= a$; oportebit, eam describere, axe quidem AB, parametro vero AD. FIG. 117.

Ad circulum vero quod attinet, quia ipsius æquatio est $xx + yy - ay - by + cx - ad = 0$, invenietur centrum ejus; abscindendo ex AB, tum AE $= a:2$, cum EF $= b:2$; & capiendo super AG ad partem oppositam AG $= c:2$. Nam, completo deinde parallelogrammo rectangulo FG, fiet H centrum quæsitum.

Radius porro ejusdem circuli est $\sqrt{(aa:4 + ab:2 + bb:4 + cc:4 + ad)}$. Unde, quum propter triangulum rectangulum AFH sit AH $= \sqrt{(aa:4 + ab:2 + bb:4 + cc:4)}$; si erigatur super AH perpendicularis AI $= \sqrt{ad}$, fiet HI $= \sqrt{(aa:4 + ab:2 + bb:4 + cc:4 + ad)}$; adeoque circulus describendus erit centro H, & intervallo HI.

De-

Describatur itaque hujusmodi circulus. Et siquidem ex punctis, in quibus idem parabolæ occurrit, perpendiculares demittantur super AB; dabunt eæ valores, quos habet incognita x in æquatione $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$. Nec dubium esse potest, quin occursus fieri debeat in totidem punctis, quot sunt valores illi. Nam, si quæratur æquatio, definiens eum occursum; non alia nobis sese offeret, quam illa ipsa, de qua agitur, $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$.

Quum ergo hujus æquationis tres radices sint positivæ, & una negativa; fiet occursus in quatuor punctis, quorum tria erunt in portione AX, & unum in portione AZ. Quumque duæ ex radicibus positivis possint quandoque, vel æquales fieri, vel etiam imaginariæ; hinc etiam est, ut ex tribus punctis, in quibus circulus secat portionem AX, duo interdum, vel in unum coire queant, vel nullibi etiam reperiri.

III. *Constructio præcedentis exempli ad omnes casus extenditur.*

III. Neque vero difficile erit, *specialem istam constructionem ad omnes casus extendere, suamq; ei universalitatem conciliare.* Quæcumque enim sit æquatio quarti gradus, secundo termino carens; per constructiones problematum primi generis, fieri semper potest, ut sit ab coefficiens tertii termini, aac coefficiens quarti, & a^3d ultimus terminus. Quare, nulla habita signorum ratione, poterunt æquationes omnes quarti gradus, quæ secundo termino carent, exhiberi per istam $x^4 \,..\, abxx \,..\, aacx \,..\, a^3d = 0$.

Hinc, si quæ mutatio facienda sit in construstructionibus aliarum æquationum, ea ex diversitate signorum, quibus affici possunt ipsarum termini, tota proficiscitur. Quare, sicuti in allato exemplo, ubi erat $-abxx$, portio EF $= b:2$ sumpta est in directum cum AE; sic capienda erit ad partem oppositam, quum habetur $+abxx$. Atque ita quoque, quemadmodum in eodem exemplo, ubi erat $+aacx$, portio AG $= c:2$ sumpta est ad partem alteram rectæ AC; sic oportebit, eam sumere super ipsa AC, quum habetur $-aacx$. FIG. 117.

Non perinde autem se res habet, si ultimus æquationis terminus a^3d signo $+$ afficiatur. Tunc enim haud quidem ducenda erit AI $= \surd ad$ ad plagam oppositam; sed oportebit, talem ei positionem tribuere, ut angulus HIA rectus oriatur. Nec obscura est hujus rei ratio. Nam, sicuti quadratum radii circuli describendi est æquale summæ quadratorum, quæ fiunt ex ipsis AH, AI, quum ultimus æquationis terminus afficitur signo $-$; sic ejusdem radii quadratum æquale fiet differentiæ eorum quadratorum, quum idem ultimus terminus signo $+$ affectus reperitur.

Fieri autem potest, ut in æquatione non omnes ii termini reperiantur. Et tunc nullæ evadunt rectæ illæ, quæ per coefficientes deficientium terminorum definiuntur. Sic, deficiente tertio termino $abxx$, nulla fiet ipsa EF; adeoque punctum F accedet ad E. Pariterque, deficiente quarto termino $aacx$, ad nihilum reducetur ipsa AG, sive FH: unde punctum H coincidet cum puncto F. Et quoniam, quum deest ultimus terminus a^3d,

æqua-

æquatio deprimitur ad tertium gradum; liquet, circulum describendum esse centro H, & intervallo HA, quotiescumque æquatio problematis est $x^3 \ldots abx \ldots aac = o$.

IV. *Quomodo eadem problemata sint construenda parabola, & circulo, quum eorum æquationes secundum terminum habent. Exemplum.*

IV. Sit deinde $x^4 + 2fx^3 - abxx + aacx - a^3d = o$ *problematis æquatio, in qua secundus terminus reperitur*. Capiatur locus ad parabolam paulo compositus $xx + fx - ay = o$. Et, methodo superius tradita, fiet $xx + fx - ay + yy - ffy : a + f^3x : aa - by + bfx : a + cx - ad = o$ locus ad circulum. Unde duobus hisce locis constructio problematis fieri debet, quo parabola, & circulo construi possit.

FIG. 118. Designentur itaque per portiones rectæ AB valores incognitæ y. Tum, erecta super ea perpendiculari AC, sint huic æquidistantes valores alterius incognitæ x. Et quoniam æquatio ad parabolam est $xx + fx - ay = o$; perspicuum est, quod si ad partem alteram ipsius AC capiatur $AD = f : 2$, & ducta per punctum D recta EF, ipsi AB parallela, fiat $DE = ff : 4a$, debeat esse EF axis parabolæ, & $EG = a$ parameter ejus.

Quantum vero ad circulum, quia ipsius æquatio est $xx + fx - ay + yy - ffy : a + f^3x : aa - by + bfx : a + cx - ad = o$, invenietur centrum ejus, abscindendo successive ex AB primo $AH = ff : 2a$, tum $HI = a : 2$, ac denique $IK = b : 2$; nec non capiendo ad partem alteram ipsius AC itidem successive, non modo $AD = f : 2$, verum etiam $DL = f^3 : 2aa$, $LO = bf : 2a$, & $OR = c : 2$. Nam, completo deinde rectangulo KR, fiet S centrum quæsitum.

Ra-

Radius porro ejusdem circuli est $\surd(f^4 : 4aa + ff : 2 + aa : 4 + bff : 2a + ab : 2 + bb : 4 + ff : 4 + f^4 : 2aa + f^6 : 4a^4 + bff : 2a + bf^4 : 2a^3 + bbff : 4aa + cf : 2 + cf^3 : 2aa + cbf : 2a + cc : 4 + ad)$. Unde, quum propter triangulum rectangulum AKS sit AS $= \surd(f^4 : 4aa + ff : 2 + aa : 4 + bff : 2a + ab : 2 + bb : 4 + ff : 4 + f^4 : 2aa + f^6 : 4a^4 + bff : 2a + bf^4 : 2a^3 + bbff : 4aa + cf : 2 + cf^3 : 2aa + cbf : 2a + cc : 4)$; si erigatur super AS perpendicularis AV $= \surd ad$, fiet SV radius quæsitus; adeoque circulus describendus erit centro S, & intervallo SV.

Describatur ergo hujusmodi circulus. Et siquidem ex punctis, in quibus idem parabolæ occurrit, perpendiculares demittantur super AB, dabunt eæ valores, quos habet incognita x in æquatione $x^4 + 2fx^3 - abxx + aacx - a^3d = 0$. Nec dubium esse potest, quin occursus fieri debeat in totidem punctis, quot sunt valores illi. Nam, si quæratur æquatio, definiens eum occursum; non alia nobis sese offeret, quam illa ipsa, de qua agitur $x^4 + 2fx^3 - abxx + aacx - a^3d = 0$.

V. *Constructio præcedentis exempli ad suam universalitatem revocatur.*

V. Sed facile quoque erit, *specialem istam constructionem ad suam universalitatem revocare, eandemque ad omnes alios casus extendere*. Quæcumque enim sit æquatio quarti gradus, secundo termino prædita; per constructiones problematum primi generis, fieri semper potest, ut sit $2f$ coefficiens secundi termini, ab coefficiens tertii, aac coefficiens quarti, & a^3d ultimus terminus. Quare, nulla habita signorum ratione, poterunt æquationes omnes quarti gradus, quæ secundum termi-

num

num continent, exhiberi per istam $x^4 \,..\, 2fx^3 \,..\, abxx \,..\, aacx \,..\, a^3d = 0$.

Hinc, si quæ mutatio facienda sit in constructionibus aliarum æquationum, ea ex diversitate signorum, quibus affici possunt ipsarum termini, tota proficiscitur. Qualis autem esse debeat hæc mutatio, haud difficile erit intelligere. Nimirum primo portiones
FIG. 118. duæ $AD = f : 2$, & $DL = f^3 : 2aa$ sumendæ sunt super ipsa AC, quum habetur $- 2fx^3$. Secundo portio $IK = b : 2$ capienda est ad plagam oppositam, quum fuerit $+ abxx$. Tertio portionem $LO = bf : 2a$ oportet sumere ex L versus A, quum termini duo $2fx^3$, $abxx$ iisdem signis sunt affecti. Quarto portio $OR = c : 2$ sumenda est ad partem contrariam, quum habetur $- aacx$. Ac denique ipsa $AV = \surd ad$ subinde aptanda est super AS, ut rectus sit angulus SVA, quum fuerit $+ a^3d$.

Hic quoque, si desit in æquatione terminus aliquis, nulla evadit recta illa, quæ per coefficientem ejus termini definitur. Et inde duo consequuntur, notatu digna. Primum est, quod hujusmodi constructio recidat in eam, quæ paulo ante allata est, quotiescumque deest in æquatione secundus terminus $2fx^3$; quandoquidem, per defectum hujus termini, non modo evanescit AD, sed nullæ quoque fiunt, tam duæ DL, LO, quam duæ DE, AH. Alterum est, quod si æquatio problematis sit $x^3 \,..\, 2fxx \,..\, abx \,..\, aac = 0$, circulus describi debeat centro S, & intervallo SA. Nam æquatio, de qua agitur, $x^4 \,..\, 2fx^3 \,..\, abxx \,..\, aacx \,..\, a^3d = 0$ non aliter

abit

abit in eam, quam deficiente ultimo termino a^3d: quo casu ipsa AV $= \sqrt{ad}$ nulla fiat oportet.

VI. *Quomodo problemata solida ellipsi, & circulo construantur, quum eorum aequationes secundo termino carent. Exemplum.*

VI. Ostenso, qua ratione problemata solida parabola, & circulo construantur, videamus nunc, *quo pacto eorundem problematum constructio ellipsi, & circulo peragi debeat*. Hunc in finem referat rursus $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$ problematis aequationem, quae secundo termino caret. Jamque, si capiatur locus ad parabolam simplicissimus $xx - ay = 0$; habebitur substitutione locus alter ad parabolam $yy - by + cx - ad = 0$. Et, quemadmodum istorum additione oritur locus ad circulum $xx - ay + yy - by + cx - ad = 0$; ita si prior ad parabolam aequatio multiplicetur per fractionem $b : a$, fiet etiam additione $bxx : a - by + yy - by + cx - ad = 0$ locus ad ellipsim.

Fig. 119.

Sit nunc AB recta illa, per cujus portiones designantur valores incognitae y. Et, erecta super ea perpendiculari AC, sint huic aequidistantes valores alterius incognitae x. Quia ergo locus ad circulum est $xx - ay + yy - by + cx - ad = 0$; oportebit, ut supra, primo quidem abscindere ex AB, tam AE $= a : 2$, quam EF $= b : 2$; deinde vero ad partem alteram ipsius AC sumere AG $= c : 2$. Nam, completo postea rectangulo FG, & erecta super AH perpendiculari AI $= \sqrt{ad}$; fiet H centrum ejus, & HI radius ejusdem.

Quantum vero ad ellipsim, quum ejus aequatio sit $bxx : a - by + yy - by + cx - ad = 0$; necesse est pariter, primo quidem ex

AB abſcindere, tum AK $= b : 2$, cum KL $= b : 2$; deinde vero ad plagam oppoſitam ipſius AC ſumere AO, quæ ſit ad AG, ut eſt a ad b. Nam, completo poſtea rectangulo LO, ſumptiſque ſuper RO hinc inde a puncto R portionibus RP, RQ talis longitudinis, ut cujuſque quadratum ſit æquale quadratis AL, AI una cum quadrato alio, quod ſit ad AO quadratum, ut eſt b ad a; fiet R centrum ejus, PQ axis ejuſdem, & ratio axis ad parametrum æqualis ei, quam habet b ad a.

Deſcribatur itaque, tum ille circulus, cum iſta ellipſis. Et ſiquidem ex punctis, in quibus ſibi mutuo occurrunt, perpendiculares demittantur ſuper AB; dabunt eæ valores, quos habet incognita x in æquatione $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$. Nec in dubium verti poteſt, quin occurſus fieri debeat in totidem punctis, quot ſunt valores illi. Nam, ſi invenienda proponatur æquatio, per quam occurſus ille definitur, non alia nobis ſeſe offeret, quam ipſa illa, de qua agitur, $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$.

VII. *Quod ellipſis, in præcedenti conſtructione aſſumpta, poſſit eſſe infinitarum ſpecierum, & conſequenter in parabolam verti.*

VII. Non hic ſubjungam, quo pacto ſpecialis iſta conſtructio ad ſuam univerſalitatem ſit revocanda; quum facile id intelligi poſſit ex iis, quæ paulo ante dicta ſunt de conſtructionibus, quæ parabola, & circulo fiunt. Potius loco ejus notari hic poterit, *ellipſim, in conſtructione problematis aſſumptam, pro multiplici valore ipſius b, poſſe eſſe infinitarum ſpecierum*. Et quamquam hac ratione in circulum pariter poſſit abire; non hinc tamen duobus circulis problema conſtruere licet

cet; quum non aliter verti queat in circulum, quam ubi fuerit $b = a$: quo casu rursus prior circulus oritur.

Quum autem parabola, velut species quædam ellipsis, considerari possit; omnino necesse est, ut in allata constructione contineatur ea, quæ parabola, & circulo perficitur. Et sane fiet locus huic constructioni, ubi quantitas b infinita supponitur. Tunc enim, Fi. 119. quemadmodum, ob infinitam longitudinem 117. ipsius AK, in infinitum abit centrum ellipsis; sic axis ejus PQ coincidet cum AB, ob rectam AO, quæ evanescit, & ad nihilum reducitur. Quumq; in eadem hypothesi æquales fiant duæ RO, RP, coincidet etiam punctum P cum puncto A; adeoque, non modo ellipsis vertetur in parabolam, sed erit quoque A vertex parabolæ principalis, AB axis ejus, & recta AD $= a$ parameter axis.

Illud etiam reticendum hoc loco non est, quod si æquatio problematis sit $x^3 - abx + aac = 0$; tunc satis erit in ea, de qua agitur, $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$ delere ultimum terminum a^3d. Et quoniam, deleto isto termino, nulla evadit recta AI $= \sqrt{ad}$; duo hinc consequuntur, notatu digna. Primum est, quod circulus describi debeat centro H, & intervallo HA. Alterum, quod portiones RP, RQ, quæ super RO sumuntur hinc inde a puncto R, debeant esse talis longitudinis, ut cujusque quadratum sit æquale quadrato ex AL una cum quadrato alio, quod sit ad AO quadratum, ut est b ad a.

VIII. Sit ulterius $x^4 + afx^3 - abxx +$ VIII. Quomodo *eadem problemata ellipsi, & circulo sint construenda, quum eorum æquationes secundum terminum habent.*

$aacx - a^3d = 0$ *æquatio problematis, ellipsi & circulo construendi*. In ea, ut vides, adest secundus terminus. Quare capiendus est locus ad parabolam paulo compositus $xx + fx - ay = 0$; eritque substitutione $yy - ffy : a + f^3x : aa - by + bfx : a + cx - ad = 0$ locus alter ad parabolam. Unde, quemadmodum eorum additione fit locus ad circulum $xx + fx - ay + yy - ffy : a + f^3x : aa - by + bfx : a + cx - ad = 0$; ita, si prior ad parabolam æquatio multiplicetur per fractionem $b : a$, habebitur etiam additione locus ad ellipsim $bxx : a + fbx : a - by + yy - ffy : a + f^3x : aa - by + bfx : a + cx - ad = 0$.

Fig. 120. Sit jam AB recta, per cujus portiones designantur valores incognitæ y. Et, erecta super ea perpendiculari AC, sint huic æquidistantes valores alterius incognitæ x. Quia ergo locus ad circulum est $xx + fx - ay + yy - ffy : a + f^3x : aa - by + bfx : a + cx - ad = 0$; oportebit, ut supra, primo quidem ex AB abscindere successive AH $= ff : 2a$, HI $= a : 2$, & IK $= b : 2$; deinde vero ad partem alteram ipsius AC sumere itidem subsecutive AD $= f : 2$, DL $= f^3 : 2aa$, LO $= bf : 2a$, & QR $= c : 2$. Nam, completo postea rectangulo LR, & erecta super AS perpendiculari AV $= \sqrt{ad}$; fiet S centrum ejus, & SV radius ejusdem.

Quantum vero ad ellipsim, quum ejus æquatio sit $bxx : a + fbx : a - by + yy - ffy : a + f^3x : aa - by + bfx : a + cx - ad = 0$; necesse est pariter, primo quidem ex AB abscindere, HT $= b : 2$, & TX $= b : 2$; deinde vero

ro

ro ex DR, producta si opus, auferre portionem DZ, quæ sit ad DR, ut est *a* ad *b*. Nam, completo postea rectangulo XZ, sumptisque super YZ hinc inde a puncto Y portionibus YP, YQ talis longitudinis, ut cujusque quadratum sit æquale quadratis AX, AV una cum quadrato alio, quod sit ad AZ quadratum, ut est *b* ad *a*; fiet Y centrum ejus, PQ axis ejusdem, & ratio axis ad parametrum æqualis ei, quam habet *b* ad *a*.

Describatur itaque, tum ille circulus, cum ista ellipsis. Et siquidem ex punctis, in quibus sibi mutuo occurrunt, perpendiculares demittantur super AB; dabunt eæ valores, quos habet incognita x in æquatione $x^4 + 2fx^3 - abxx + aacx - a^3d = 0$. Nec ulli dubium esse potest, quin occursus fieri debeat in totidem punctis, quot sunt valores illi. Nam, si quæratur æquatio, per quam occursus ille definitur, & assumatur velut incognita perpendicularis, quæ exinde demittitur super AB, non alia nobis sese offeret, quam ipsa illa, de qua agitur, $x^4 + 2fx^3 - abxx + aacx - a^3d = 0$.

IX. Nec etiam hic subjungemus, qua ratione specialis ista constructio ad omnes casus sit extendenda; quum similiter intelligere id liceat ex iis, quæ superius dicta sunt de constructionibus, quæ parabola, & circulo fiunt. Meretur autem, ut hic quoque notetur, *ellipsim, in constructione problematis assumptam, pro multiplici valore ipsius b, posse esse infinitarum specierum*. Et quamquam hac ratione possit pariter in circulum abire; non

IX. *Quod in hac etiam constructione ellipsis assumpta possit esse infinitarum specierum, atque adeo in parabolam verti.*

hinc tamen duobus circulis problema construere licet; quum non aliter verti queat in circulum, quam ubi fuerit $b = a$: quo casu rursus prior circulus oritur.

Ob eandem rationem necesse est, ut in allata constructione contineatur ea, quæ parabola, & circulo perficitur; quum parabola, velut species quædam ellipsis, possit considerari. Ei autem sit locus, quum quantitas b in-

Fi. 120. 118. finita supponitur. Tunc enim, quemadmodum, ob infinitam longitudinem ipsius HT, in infinitum abit centrum ellipsis; sic axis ejus PQ coincidet cum recta EF, ducta per punctum D ipsi AB æquidistanter, ob rectam DZ, quæ evanescit, & ad nihilum reducitur. Cumque, sumpta super EF portione DE $= ff : 4a$, coincidat in eadem hypothesi punctum P cum puncto E; non modo ellipsis vertetur in parabolam, sed erit quoque E vertex parabolæ principalis, EF axis ejus, & recta EG $= a$ parameter axis.

Hic vero non ita liquido patet, quod punctum P coincidere debeat cum puncto E, quotiescumque quantitas b infinita supponitur. Quare, ne dubium ullum supersit, ostendemus illud in hunc modum. Quoniam habetur $AX = ff : 2a + b : 2 + b : 2$, & $AZ = f : 2 + f^3 : 2ab + ff : 2b + ac : 2b$; utique, supposita b infinita, fiet $AX = b : 2$, & $AZ = f : 2$. Sed ex constructione, YP quadratum est æquale quadratis AX, AV una cum quadrato alio, quod sit ad AZ quadratum, ut est b ad a. Quare, posita $PZ = t$; erit $tt + tb + bb : 4 = bb : 4 + ad + ffb : 4a$; hoc est $tt + tb$

$= ad$

$= ad + ffb : 4a$; sive etiam, ob b infinitam, $tb = ffb : 4a$: & propterea erit PZ $= t = ff : 4a$. Unde, quum sit etiam DE $= ff : 4a$, omnino necesse est, ut accedente PQ ad ipsam EF, cadat punctum P super punctum E.

Illud quoque notandum hoc loco est, quod si æquatio problematis sit $x^3 + 2fxx - abx + aac = 0$; tunc satis erit in ea, de qua agitur, $x^4 + 2fx^3 - abxx + aacx - a^3d = 0$ delere ultimum terminum a^3d. Et quoniam, deleto isto termino, nulla evadit recta AV $= \sqrt{ad}$; duo hinc consequuntur, notatu digna. Primum est, quod circulus describi debeat centro S, & intervallo SV. Alterum, quod portiones YP, YQ, quæ super YZ sumuntur hinc inde a puncto Y, debeant esse talis longitudinis, ut cujusque quadratum sit æquale quadrato ex AX una cum quadrato alio, quod sit ad AZ quadratum, ut est b ad a.

X. Cæterum, etsi constructiones problematum solidorum, quæ hyperbola, & circulo fiunt, ob rationes superius allatas, non sint comparandæ cum iis, quæ sive circulo, & parabola, sive circulo, & ellipsi peraguntur; attamen, si eæ velint adhiberi, *poterit locus ad hyperbolam eodem fere artificio reperiri, quo invenitur locus ad ellipsim*; hoc est, multiplicando per fractionem aliquam priorem locum ad parabolam, tum eum subducendo ex loco altero, qui etiam ad parabolam nos ducit.

X. Quomodo inveniendus est locus ad hyperbolam, quum hyperbola, & circulo problemata solida sunt construenda.

Ita, si $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$ sit problematis æquatio, sumpto loco ad parabolam simplicissimo $xx - ay = 0$, fiet substitutione $yy - by + cx - ad = 0$ locus alter ad parabolam. Unde, quemadmodum additione horum locorum habebitur locus ad circulum $xx - ay + yy - by + cx - ad = 0$; ita, si prior ad parabolam æquatio $xx - ay = 0$ multiplicetur per fractionem $b : a$, orietur subtractione locus ad hyperbolam $yy - by + by - bxx : a + cx - ad = 0$.

Similiter, si $x^4 + 2fx^3 - abxx + aacx - a^3d = 0$ sit æquatio problematis, sumpto loco ad parabolam paulo composito $xx + fx - ay = 0$, habebitur substitutione locus alter ad parabolam $yy - ffy : a + f^3x : aa - by + bfx : a + cx - ad = 0$. Unde, sicuti additione istorum locorum oritur locus ad circulum $xx + fx - ay + yy - ffy : a + f^3x : aa - by + bfx : a + cx - ad = 0$; ita, si prior ad parabolam æquatio $xx + fx - ay = 0$ multiplicetur per fractionem $b : a$, fiet subtractione $yy - ffy : a - by + by - bxx : a - bfx : a + f^3x : aa + bfx : a + cx - ad = 0$ locus ad hyperbolam.

Sed hic quoque notare oportet, quod hujusmodi hyperbola, pro multiplici valore ipsius b, possit esse infinitarum specierum. Speciatim vero erit æquilatera, si fuerit $b = a$. Et quoniam parabola considerari potest velut species quædam hyperbolæ; omnino necesse est, ut in constructione, quæ hyperbola, & circulo perficitur, contineatur ea, quæ circulo, & parabola peragitur: quemadmodum revera abit in illam, quotiescumque ipsa quantitas b infinita supponitur.

XI. Quomodo haberi possit

XI. Hyperbola vero sub contemplationem hic venit relate ad aliquam ejus diametrum

trum. Sed quid, *si adhiberi velit, in ordine ad suas asymptotos considerata?* Plane, quum æquatio problematis est tertii gradus, sive trium dimensionum, inter alia loca, quæ tradita methodo exinde eruuntur, ille etiam reperitur, qui ad hyperbolam nos ducit, relate ad ipsius asymptotos consideratam. Unde facile erit, ope ejus, problematis constructionem exhibere. *Locus ad hyperbolam, relate ad suas asymptotos consideratam.*

Sit enim primo $x^3 - abx + aac = o$ problematis æquatio. Capiatur locus ad parabolam simplicissimus $xx = ay$. Et quoniam, multiplicata utraque ejus parte per x, fit $x^3 = axy$; erit substitutione $axy - abx + aac = o$, sive etiam $xy - bx + ac = o$: quæ quidem æquatio non aliter, quam per hyperbolam, relate ad suas asymptotos consideratam, potest explicari.

Sit etiam $x^3 + 2fxx - abx + aac = o$ æquatio, ex problemate nata. Capiatur adhuc locus ad parabolam paulo compositus $xx + fx = ay$. Quumque, multiplicata utraque ejus parte per x, fiat $x^3 + fxx = axy$; erit substitutione $axy + fxx - abx + aac = o$, sive etiam $xy + fxx : a - bx + ac = o$: quæ sane æquatio per hyperbolam, utroque modo consideratam, potest explicari.

Quod si autem æquatio problematis sit quatuor dimensionum; tunc tradita methodo numquam ex ea erui poterit locus ad hyperbolam, relate ad suas asymptotos consideratam. Verum, si æquatio subinde transformetur, ut ultimus ejus terminus sit quadratum perfectum, & afficiatur etiam signo $+$; licebit circulum, & hyperbolam reperire in

hunc

hunc, qui sequitur, modum.

Sit $x^4 + 2fx^3 - abxx - aacx + aadd = 0$ hujuscemodi problematis æquatio. Capiatur locus simplicissimus ad hyperbolam, relate ad asymptotos consideratam, $xy = ad$. Et quoniam fit, tum $x = ad : y$, cum $xx = aadd : yy$; erit substitutione $aaddxx : yy + 2aaddfx : yy - a^3bdd : yy - a^3cd : y + aadd = 0$. Quare, reducta æquatione ista, habebitur locus ad circulum $xx + 2fx - ab - acy : d + yy = 0$.

XII. Cur occursus locorum fieri debet in totidem punctis, quot valores in æquatione problematis habet incognita.

XII. Illud jam superest, ut paulo elarius hic explicemus, cur omnino opus sit, ut *occursus duorum locorum, quibus problema construitur, fiat in totidem punctis, quot valores in ejus æquatione habet incognita.* Nam, quod sæpius supra dictum est, id exinde oriri, quia æquatio, per quam occursus ille definitur, ab ipsa problematis æquatione non differt, etsi verissimum sit; rem tamen non adeo luculenter ostendit, ut omnis dubitandi ratio remota videatur.

Propria ergo ejus rei ratio repeti debet ex illo Algebræ principio, quod æquatio, ex resolutione alicujus problematis nata, radicibus suis omnes ejus problematis casus nobis ostendat. Inde enim fit, ut æquatio, qua duarum linearum occursus definitur, debeat per suas radices puncta omnia exhibere, in quibus occursus ille contingit. Unde omnino necesse est, ut occursus duorum locorum, quibus problema construitur, fiat in totidem punctis, quot valores in ejus æquatione habet incognita; quum eadem problematis æqua-

qua-

quatione etiam occursus ille definiatur.

Quod autem æquatio, definiens occursum duorum locorum, quibus problema construitur, non differat ab ipsa problematis æquatione; id notius est, quam ut possit in dubium revocari. Invenienda est enim æquatio illa per conditiones, quæ seorsim in utroque loco continentur. Unde, quum istæ conditiones sint illæ eædem, quæ simul in problemate reperiuntur; oportebit, eam invenire per ipsas problematis conditiones; proindeque omnino necesse est, ut non differat ab æquatione, ad quam problema ipsum revocatur; quum ex iisdem conditionibus utraque æquatio erui debeat.

Ex eo porro, quod æquatio, definiens duarum linearum occursum, debeat radicibus suis puncta omnia exhibere, in quibus occursus ille contingit, perspicuum est, non melius intelligi posse, in quot punctis duarum linearum occursus fiat, quam quærendo æquationem, per quam illiusmodi occursus definitur. Unde, quod nimio labore ostendit Apollonius libro quarto suorum Conicorum de numero punctorum, in quibus aliqua sectio coni convenire potest, vel cum circumferentia circuli, vel cum alia coni sectione; ope ejus principii, facili quidem negotio demonstrare licebit.

Nimirum æquatio, definiens occursum, sive duarum coni sectionum, sive circumferentiæ circuli, & unius conicæ sectionis, regulariter ad quatuor dimensiones ascendit. Unde non plura, quam quatuor, poterunt esse

se

se puncta ejus occursus. Sed duo quævis horum punctorum possunt, vel in unum coire, vel nullibi etiam reperiri: si scilicet radices, iis correspondentes, vel æquales fiant, vel etiam evadant imaginariæ. Et quoniam, quum coeunt in unum, abeunt in punctum contactus; hinc est, ut eædem curvæ in pluribus, quam duobus, punctis nequeant se mutuo contingere.

C A P. V.

Constructio problematum solidorum plenius expenditur.

1\. *Quòd problemata quarti generis construi possint mediantibus iis, quæ genus tertium constituunt.*

1\. UBi de constructione egimus problematum planorum, ad rem visum fuit ostendere, ad quos terminos constructiones eoum possint revocari. Eadem autem ratione non abs re erit, hic etiam aperire, quorsum constructio problematum solidorum proprie reducatur. Id vero ut commodius exequi valeamus, præstat prius advertere, quod *problemata quarti generis facillimum sit construere mediantibus iis, quæ tertium genus constituunt*.

Sunt quippe problemata quarti generis, quorum æquationes ad quatuor dimensiones ascendunt; sunt vero problemata tertii generis, quorum dimensiones ad tres tantum dimensiones assurgunt. Unde constabit, priora problemata posse istorum beneficio construi, si utique ostendi possit, quod quælibet æquatio quar-

quarti gradus ad aliam trium dimensionum deprimi queat.

Id autem demonstravit primus omnium Raphael Bombellius. Et facillime illud idem ostendere licebit in hunc modum. Sit $x^4 - abxx + aacx - a^3d = o$ æquatio quarti gradus. Supponatur ea orta ex multiplicatione istarum secundi gradus $xx - yx + ff = o$, & $xx + yx - gg = o$. Jamque, iis per se mutuo multiplicatis, fiet $x^4 - yyxx + ffxx - ggxx + ffyx + ggyx - ffgg = o$ ejusdem naturæ cum æquatione proposita.

Comparentur itaque simul, & ex mutua terminorum collatione habebitur $yy - ff + gg = ab$, $ffy + ggy = aac$, & $ffgg = a^3d$. Hinc, quum sit $gg + ff = aac : y$, & $gg - ff = ab - yy$; erit $2gg = aac : y + ab - yy$, $2ff = aac : y - ab + yy$, & $4ffgg = a^4cc : yy - aabb + 2abyy - y^4$. Sed habetur quoque $4ffgg = 4a^3d$. Itaque erit $4a^3d = a^4cc : yy - aabb + 2abyy - y^4$, sive etiam $y^6 - 2aby^4 + aabbyy + 4a^3dyy - a^4cc = o$, quæ est æquatio sexti gradus, derivativa tertii.

Verum quidem est, quod æquatio quarti gradus assumpta sit carens secundo termino. Sed id difficultatem facere non debet; quum facillimum sit ex æquationibus delere secundum terminum. Qua autem ratione æquatio quarti gradus $x^4 - abxx + aacx - a^3d = o$ censenda sit reducta ad hanc aliam cubicam $y^6 - 2aby^4 + aabbyy + 4a^3dyy - a^4cc = o$; facile quidem erit intelligere: nimirum, quia cognito valore incognitæ y, innotescet quoque valor incognitæ x.

Jam

Jam enim habetur, tum $ff = aac : 2y - ab : 2 + yy : 2$, cum $gg = aac : 2y + ab : 2 - yy : 2$. Quare ex duabus iis æquationibus secundi gradus $xx - yx + ff = 0$, & $xx + yx - gg = 0$, ex quarum multiplicatione concipitur orta æquatio, de qua agitur, $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$, prior fiet $xx - yx + aac : 2y - ab : 2 + yy : 2 = 0$, & posterior $xx + yx - aac : 2y + ab : 2 - yy : 2 = 0$: proindeque, cognito valore incognitæ y, facile erit iis mediantibus invenire quatuor valores, quos habet incognita x in æquatione proposita.

II. *Quorsum reducatur constructio problematum tertii generis, quorum æquationes sunt simplicissimæ.*

II. Quum ergo problemata quarti generis facili negotio construantur per ea, quæ tertium genus constituunt; satis erit, inquirere, *quorsum constructio problematum tertii generis reducatur*. Et simplicior quidem æquatio, quæ ex aliquo horum problematum potest oriri, est $x^3 = aac$. Ei autem fit satis per primam duarum medio loco proportionalium inter a, & c. Nam, si ista vocetur x, fiet altera $xx : a$; adeoque, quum sit, ut a ad x, ita $xx : a$ ad c, erit $x^3 : a = ac$, sive etiam $x^3 = aac$.

Nec aliter fiet satis problemati, si æquatio ejus sit $x^3 = - aac$. Tum enim duæ mediæ proportionales inveniendæ sunt inter a, & $-c$; & adhuc prima ipsarum valorem exhibebit incognitæ x. Nam, vocando x primam duarum medio loco proportionalium inter a, & $-c$; fiet altera $xx : a$. Unde, quum sit, ut a ad x, ita $xx : a$ ad $-c$; erit $x^3 : a = - ac$, sive etiam $x^3 = - aac$, quæ est ipsa problematis æquatio.

Sed

Sed notare oportet hoc loco, valorem incognitæ x oriri positivum, quum æquatio problematis est $x^3 = aac$; & vicissim negativum, quum eadem æquatio est $x^3 = -aac$. Constabit id autem facili negotio, si regulis, præcedenti capite traditis, utrumque problema construatur. Patebit enim, occursum locorum, quibus constructio peragitur, fieri ex parte radicum positivarum, quum habetur $x^3 = aac$; & ex parte radicum negativarum, quum per contrarium est $x^3 = -aac$.

Hoc idem repeti quoque potest ex ipso criterio, quo magnitudines proportionales dignoscuntur. Ut enim vidimus in nostris Algebræ Elementis dicendæ sunt proportionales quatuor magnitudines, quotiescumque quicquid efficitur ab uno antecedentium, ut consequentem suum adæquet, id omne fieri debet ab alio antecedente, ut adæquet quoque suum consequentem. Unde, non aliter inter magnitudines diversi status proportio subsistere potest, quam si servantes legem proportionis, qua quantitates, duæ fuerint unius status, & aliæ duæ status oppositi.

Hinc autem prono alveo fluit, ut duarum medio loco proportionalium inter a, & $-c$ prima debeat esse negativa, & secunda positiva. Debent enim in iis magnitudinibus, velut continue proportionalibus, tres analogiæ distingui. Nam, non modo necesse est, ut prima sit ad secundam, veluti est tertia ad quartam; sed oportet quoque, ut tam prima sit ad secundam, veluti est secunda ad tertiam; quam secunda ad tertiam, veluti est tertia ad quar-

quartam. Profecto autem non aliter omnes istæ analogiæ subsistere queunt, quam si duarum mediarum proportionalium prima sit negativa, & secunda positiva.

Atque hinc etiam ratio repeti potest, cur problema planum sit impossibile, quum ejus æquatio est $xx = -ab$. Pro eo enim invenienda esset inter a, & $-b$ una media proportionalis. Sed cujuscumque status ea capiatur, numquam efficere licet, ut in ipsa analogia duo termini sint positivi, & alii duo negativi. Plane vero media proporionalis inter a, & b potest esse, tum positiva, cum negativa. Nam, sicuti in priore casu omnes analogiæ termini fiunt positivi; sic in secundo duo erunt unius status, & alii duo status oppositi.

III. *Quomodo reddi possint simplicissima æquationes aliorum problematum tertii generis.*

III. Quemadmodum autem per inventionem duarum mediarum proportionalium fit satis problemati, cujus æquatio est, vel $x^3 = aac$, vel $x^3 = -aac$; sic *eodem artificio omnia alia problemata tertii generis construere liceret, si eorum æquationes ad formas illas simplicissimas possent revocari*. Fieri vero id facile potest, quum æquatio problematis secundo, & tertio termino caret. Nam, si habeatur, exempli gratia, $x^3 = aab + acc - bcd$; capiendo $f = b + cc : a - bcd : aa$, fiet utique $x^3 = aaf$.

Sed non perinde se res habet, si in æquatione problematis, vel secundus, vel tertius, vel etiam uterque terminus reperiatur. Tunc enim in id primo incumbendum, ut, remotis ab æquatione illiusmodi terminis, pura ra reddatur, & ab omni affectione immunis æquatio ipsa. Et quamquam, delere secundum terminum, facillimum sit; non est tamen peræque facile, subinde etiam auferre terminum tertium, ut iterum secundus non oriatur.

Obtineri interim id potest sequenti ratione. Sit $x^3 + abx - aac = 0$ æquatio cubica, tertio termino prædita. Ponatur $x = y + z$. Et quoniam habetur, tum $x^3 = aac - abx$, cum $x^3 = y^3 + 3yyz + 3yzz + z^3$; erit $aac - abx = y^3 + 3yyz + 3yzz + z^3$. Sed, multiplicata per $3yz$ utraque parte æquationis $x = y + z$, fit etiam $3yzx = 3yyz + 3yzz$. Quare, substitutionis ope, erit $aac - abx = y^3 + 3yzx + z^3$.

Ponatur porro, quod sit $aac = y^3 + z^3$. Quumque fiat $-abx = 3yzx$, erit $-ab = 3yz$: unde infertur $z = -ab : 3y$, & $z^3 = -a^3b^3 : 27y^3$. Hinc, rursus per substitutionem, erit $aac = y^3 - a^3b^3 : 27y^3$, hoc est $y^6 - aacy^3 = a^3b^3 : 27$, sive etiam $y^6 - aacy^3 + a^4cc : 4 = a^4cc : 4 + a^3b^3 : 27$. Et quoniam, per extractionem quadratæ radicis, eruitur $y^3 - aac : 2 = \sqrt{(a^4cc : 4 + a^3b^3 : 27)}$; fiet demum $y^3 = aac : 2 + \sqrt{(a^4cc : 4 + a^3b^3 : 27)}$.

Quemadmodum autem abunde liquet, deficere in æquatione ista, tam secundum, quam tertium terminum; ita nec etiam dubitari potest, quin ad eam reduci queat æquatio proposita $x^3 + abx - aac = 0$. Est enim ex hypothesi $x = y + z$; estque etiam $z = -ab : 3y$. Quare erit $x = y - ab : 3y$: & propterea cognito valore, quem habet inco-

 gni-

gnita y in æquatione $y^3 = aac : 2 + \sqrt{(a^4cc : 4 + a^3b^3 : 27)}$, innotescet quoque valor, quem habet incognita alia x in æquatione principali $x^3 + abx - aac = 0$.

IV. *Quorsum reducatur constructio problematum tertii generis, quorum æquationes unicum valorem realem admittunt.*

IV. Et sane, quin hujusmodi reductio recte procedat, quum æquatio problematis induit hanc formam $x^3 + abx - aac = 0$, non est dubitandum. Tunc enim incognita x unicum valorem realem, eumque positivum admittit; quem semper determinare licebit, adhibita æquatione $y^3 = aac : 2 + \sqrt{(a^4cc : 4 + a^3b^3 : 27)}$; quum nihil impedimento esse possit inventioni ejus. Et par est ratio, si æquatio problematis accipiat hanc aliam formam $x^3 + abx + aac = 0$, ubi etiam incognita x unicum valorem realem, eumque negativum admittit.

Sed non perinde res est, si æquatio problematis sit hujus formæ $x^3 - abx + aac = 0$. Nam in hoc casu procedit reductio tunc tantum, quum incognita x unico valore reali, eoque negativo potest explicari; & deprehenditur omnino impossibilis, quotiescumque, præter valorem illum negativum, alios duos positivos admittit. Nec aliter se res habet, si æquatio fuerit $x^3 - abx - aac = 0$, ubi etiam incognita x, præter valorem unum positivum, potest quandoque duobus aliis negativis pariter explicari.

Ut autem id liquido constet, meminisse oportet ejus, quod in Algebra demonstratur: nimirum in duabus hisce æquationibus $x^3 - abx + aac = 0$, & $x^3 - abx - aac = 0$, admittere incognitam x unicum tantum valorem realem, quum cubus ex triente coefficienficientis tertii termini minor est quadrato, quod fit ex ultimo termino dimidiato, hoc est quum $a^3b^3 : 27$ minor est, quam $a^4cc : 4$; explicari vero tribus valoribus realibus, quum vicissim $a^3b^3 : 27$ major est, quam $a^4cc : 4$.

Jam, quotiescumque habetur $x^3 - abx + aac = 0$, tunc æquatio reducta est $y^3 = aac : 2 + \surd(a^4cc : 4 - a^3b^3 : 27)$. Unde, quemadmodum in ista valor incognitæ y tunc tantum oritur realis, quum $a^3b^3 : 27$ minor est, quam $a^4cc : 4$; sic etiam in æquatione principali $x^3 - aax + aac = 0$ tunc tantum, adhibita ejus reducta, reperire licebit valorem incognitæ x, quum fuerit $a^3b^3 : 27$ minor, quam $a^4cc : 4$, hoc est quum ipsa incognita x unicum valorem realem admittit.

Et similiter, quum æquatio problematis est $x^3 - abx - aac = 0$, tunc æquatio reducta est $y^3 = - aac : 2 + \surd(a^4cc : 4 - a^3b^3 : 27)$. Unde adhuc, sicuti in ista valor incognitæ y tunc demum realis deprehenditur, quum $a^3b^3 : 27$ minor est, quam $a^4cc : 4$; sic pariter in æquatione principali $x^3 - abx - aac = 0$ tunc demum, mediante ejus reducta, determinari poterit valor incognitæ x, quum fuerit $a^3b^3 : 27$ minor, quam $a^4cc : 4$, hoc est, quum ipsa incognita x unico tantum valore reali potest explicari.

Id quum ita sit, liquet, *per inventionem duarum mediarum proportionalium, ea sola problemata tertii generis construi posse, quorum æquationes unicum tantum valorem realem admittunt*; quum in solis hisce æquatio-

 ni-

nibus reductio rite procedat. Sed supersunt problemata illa, in quorum æquationibus tres valores reales occurrunt. Unde, quorsum istorum constructiones reducendæ sint, nunc oportet ostendamus.

V. *Quorsum reducatur constructio problematum tertii generis, in quorum æquationibus tres valores reales occurrunt.*

V. Et quidem *constructiones problematum tertii generis, in quorum æquationibus tres valores reales occurrunt, per dati cujusdam arcus trisectionem commode peragi possunt*. Nam, si oporteat, datum aliquem arcum tripartito dividere; invenietur æquatio cubica, cujus omnes radices erunt reales. Quod ut liquido constet, detur circulus ADE, cujus centrum sit punctum F; & assumpta in ejus circumferentia portione quavis AD, secanda sit ea in tres partes æquales.

Fig. 121.

Ponatur jam factum, quod quæritur, sintque AB, BC, CD partes quæsitæ. Ducantur radii AF, BF, CF, DF; & junctis chordis AB, BC, CD, agatur per punctum B recta BG, parallela ipsi CF, quæ conveniat cum chorda arcus dati AD in puncto G; ponaturque radius dati circuli AF $= r$, chorda arcus similiter dati AD $= p$, & chorda arcus quæsiti AB $= x$.

Itaque, quia angulus BFD duplus est, tam anguli BAD, quam anguli BFA; erunt duo anguli BAD, BFA æquales inter se; adeoque, ob triangula æquiangula BFA, BAH, erit, ut AF ad AB, ita AB ad BH. Et quoniam, propter parallelas BG, CF angulus GBF æqualis est angulo BFC, sive BFA; erit idem angulus GBF æqualis quoque angulo BAD; & consequenter, ob triangula

gula

gula æquiangula ABH, BGH, erit, ut AB ad BH, ita BH ad HG. Hinc quatuor rectæ AF, AB, BH, HG continue proportionales erunt: & propterea erit BH $= xx : r$, & HG $= x^3 : rr$.

Ulterius, quum triangula duo BFA, BAH ostensa sint æquiangula, & trianguli BFA æqualia sint latera AF, BF; erunt quoque trianguli BAH æqualia latera AB, AH. Unde, quum eadem ratione ostendantur etiam æqualia latera GD, DK trianguli CDK; erit AD una cum GH æqualis tribus AB, BC, CD simul sumptis, sive etiam triplo unius AB. Quare, instituta æqualitate inter valores istarum linearum, fiet $p + x^3 : rr = 3x$, hoc est $x^3 - 3rrx + prr = 0$, quæ est ejusdem formæ cum æquatione $x^3 - abx + aac = 0$.

Jam vero, quod in ista æquatione $x^3 - 3rrx + prr = 0$ radices omnes sint reales, facile erit ostendere. Quum enim AD sit linea in circulo inscripta, ea diametro AL æqualis quidem esse potest, major autem esse non potest. Itaque, omisso casu æqualitatis, veluti speciali, AL major est, quam AD: proindeque, quum sit AL $= 2r$, & AD $= p$; erit $2r$ major, quam p; adeoque r major, quam $p : 2$. Est igitur in æquatione $x^3 - 3rrx + prr = 0$ cubus ex triente coefficientis tertii termini major quadrato, quod fit ex ultimo termino dimidiato; & idcirco erunt in ea tres radices reales.

VI. Sed non ita liquido patet, *per quas rectas in schemate tres illæ radices reales exhibeantur*. Eæ igitur habebuntur, si secetur in *VI. Æquationis, ad quam reducitur problema de tri-*

 tres

sectione arcus, tres radices reales exhibentur.

FIG. 121.

tres partes æquales, tam arcus DMA, qui est complementum ad circulum ipsius ABD, quam arcus DIL, qui est complementum ad semicirculum ejusdem ABD. Si enim DM, MN, NA sint partes arcus prioris DMA, & DO, OI, IL sint partes arcus alterius DIL; designabit recta AB radicem unam, recta AN radicem alteram, & recta AI radicem tertiam. Quumque ex tribus radicibus æquationis $x^3 - 3rrx + prr = 0$ duæ quidem sint positivæ, & una negativa; erunt rectæ AB, AN radices positivæ, & recta AI radix negativa.

Et quidem, rectam AN esse radicem æquationis $x^3 - 3rrx + prr = 0$ perinde, ac est recta AB, facili negotio suaderi potest; quia quotiescumque trifariam secandus proponitur arcus AD, potest hic esse tam arcus ABD, quam arcus AND; quum uterque istorum punctis A, & D terminetur. Sed, quod ejusdem æquationis radix sit etiam recta AI, quæ nec subtendit trientem arcus ABD, nec trientem arcus AND: id equidem non ita facile concipitur; quia, quam relationem habeat recta AI cum problemate de trisectione arcus AD, sane non apparet.

Constabit id autem, si sedulo consideremus, quo pacto procedimus in resolutione problematis, in quo arcus, duobus datis punctis interceptus, in certum æqualium partium numerum dividendus proponitur. Nimirum, quum in resolutione ejus problematis procedamus, inveniendo valorem chordæ, quæ unam ex iis partibus subtendat; perspicuum est, problema ipsum eo quidem redire, ut

in-

inveniatur valor rectæ lineæ, quæ incipiendo ab uno puncto, toties aptari possit in circuli circumferentia, donec perveniatur ad punctum alterum, quot sunt partes, in quas dividere oportet arcum, qui inter duo illa puncta intercipitur.

Atque hac ratione facile modo intelligimus, cur æquatio $x^3 - 3rrx + prr = o$ tres habeat radices reales, designatas per rectas AB, AN, AI. Orta est namque æquatio illa ex resolutione problematis, in quo arcus, punctis A, & D interceptus, in tres partes æquales proponitur dividendus. Itaque, ut illi æquationi satisfiat, rectam oportet invenire, quæ a puncto A ter aptari queat in circumferentia circuli, donec ad punctum alterum D perveniatur. Unde, quum id præstari possit per quamlibet rectarum AB, AN, AI; consequens est, ut valor incognitæ x in æquatione $x^3 - 3rxx + prr = o$ sit unaquæque rectarum AB, AN, AI.

VII. *Quæ sint ejusdem æquationis radices duæ positivæ, & quæ radix negativa, aperitur.*

VII. Ne aliquid hic omittamus, *illud etiam ostendendum nobis est*, quod in eadem æquatione $x^3 - 3rrx + prr = o$ referant radices positivas rectæ AB, AN, & designet radicem negativam recta AI. Id autem facile constabit, si utique ostendi possit, rectam AI ipsis AB, AN simul sumptis æqualem esse. Deest enim in æquatione illa secundus terminus; adeoque, per ea, quæ in Algebra demonstrantur, debet radix negativa ejusmodi esse, ut adæquet summam ex duabus radicibus positivis.

FIG. 121.

Ostendemus vero rectam AI æqualem

summæ ipsarum AB, AN, præmisso prius hoc lemmate. Nimirum, quod si in circulo aliquo
FIG. 122. ABC describatur triangulum æquilaterum BCD, & ex uno trianguli angulo, veluti C, ducatur recta AB, quæ terminata ad circuli circumferentiam, secet latus oppositum BD in puncto E; quod, inquam, recta ista CA ipsis AB, AD simul sumptis sit æqualis.

Hujus lemmatis veritas ostendi potest in hunc modum. Angulus DAC, velut æqualis angulo DBC, adæquat angulum BDC. Itaque duo triangula CDE, CAD æquiangula erunt; adeoque erit, ut CD ad DE, ita CA ad AD. Eadem ratione angulus BAC, velut æqualis angulo BDC, adæquat angulum DBC. Itaque duo triangula CBE, CAB æquiangula erunt; adeoque erit, ut CB ad BE, ita CA ad AB.

Jam, propter triangulum æquilaterum BCD, duæ CB, CD inter se sunt æquales. Quare erit quoque, ut CD ad BE, ita CA ad AB. Sed ostensum est pariter, quod CD sit ad DE, ut CA ad AD. Itaque erit, ut CD ad summam ipsarum BE, DE, ita CA ad summam ipsarum AB, AD. Unde, quemadmodum CD ipsis BE, DE simul sumptis est æqualis; ita CA ipsas AB, AD simul adæquabit.

Hoc lemmate præmisso, facile modo erit,
FIG. 121. ostendere, rectam AI ipsis AB, AN simul sumptis æqualem esse. Quum enim arcus AB sit tertia pars arcus ABD, & arcus AN tertia pars arcus AND; erit arcus BAN tertia pars totius circumferentiæ. Et rursus, quoniam arcus BD continet duas tertias partes arcus

ABD,

ABD, & arcus DI duas tertias partes arcus DIL; continebit arcus BDI duas tertias partes semicircumferentiæ ADL; adeoque tertia pars erit circumferentiæ integræ.

Hinc arcus BAN, BDI, non modo æquales erunt inter se, verum etiam adæquabunt arcum reliquum IMN. Unde, si puncta tria B, I, N rectis totidem jungantur, æquilaterum erit triangulum, sub iis comprehensum: & consequenter, per lemma jam ostensum, recta AI ipsis AB, AN simul sumptis æqualis esse debebit.

VIII. Quemadmodum ergo in problemate de trisectione arcus AD invenitur æquatio $x^3 - 3rrx + prr = a$, cujus omnes radices sunt reales; ita nulli dubium esse potest, quin referant radices duas positivas rectæ AB, AN, & radicem negativam recta AI. Sed, *qua ratione, per trisectionem alicujus arcus, construi possint problemata omnia tertii generis, in quorum æquationibus tres valores reales occurrunt*, jam superest, ut ostendamus.

VIII. *Quomodo per trisectionem alicujus arcus construi possint problemata tertii generis, quorum æquationes tres radices reales admittunt.*

Sit itaque primo $x^3 - abx + aac = 0$ æquatio problematis, quæ duas admittit radices positivas, & unam negativam. Conferatur æquatio ista cum ea de trisectione arcus, superius inventa, $x^3 - 3rrx + prr = 0$. Et, comparatione instituta, habebitur $3rr = ab$, & $prr = aac$. Unde, quemadmodum ex prima harum æquationum infertur $r = \sqrt{(ab:3)}$, sic ex secunda eruitur $p = 3ac:b$. FIG. 121.

Jam in problemate de trisectione arcus erat r radius circuli, & p chorda arcus trisecandi. Quare, si describatur circulus ABL,

cu-

cujus radius sit $\sqrt{(ab:3)}$, & in eo aptetur recta AD $= 3ac:b$; erunt propositæ æquationis radices positivæ rectæ AB, AN, quæ subtendunt trientes arcuum ABD, AND; & radix negativa recta AI, quæ subtendit trientem arcus ABDNABD.

Sit secundo $x^3 - abx - acd = 0$ æquatio problematis, in qua sunt duæ radices negativæ, & una positiva. Jam ista a præcedente non in alio differt, quam quod terminorum, locis paribus existentium, mutata sint signa. Quare per ea, quæ in Algebra ostenduntur, erunt istius radices negativæ, quæ in illa erant positivæ; & per contrarium erit hujus radix positiva, quæ illic erat negativa.

Hinc, descripto rursus circulo ABL, cujus radius sit $\sqrt{(ab:3)}$, & aptata adhuc in eo recta AD $= 3ac:b$; oportebit, tripartito dividere, non modo arcus ABD, AND, verum etiam arcum ABDNABD. Nam erunt propositæ æquationis radices negativæ rectæ AB, AN, quæ subtendunt trientes arcuum ABD, AND; & erit radix positiva recta AI, quæ subtendit trientem arcus ABDNABD.

IX. *Ad quod problema, tum arcus trisectio, cum inventio duarum mediarum proportionalium possit revocari.*

IX. Omnia igitur problemata solida, vel inventione duarum mediarum proportionalium inter duas rectas datas, vel trisectione arcus alicujus construere licebit. Sed nolo hic silentio reticere, quod *utrumque horum problematum nullo negotio construatur, si utique intra datum angulum, sive rectilineum sive mixtilineum, aptari possit recta datæ longitudinis, quæ convergat ad punctum datum.*

Oporteat etenim primo invenire duas me-

medias proportionales inter rectas AB, AC. Jungatur eæ ad rectos angulos; & completo rectangulo AC secetur utraque ipsarum bifariam in E, & F. Tum, juncta DE, producatur eadem, usque donec ipsi BC occurrat in G; & erecta super BC perpendiculari FH talis longitudinis, ut fiat CH æqualis ipsi AE, jungatur GH, cui per punctum C parallela agatur CI. Extendatur postea BC versus K, & intra angulum rectilineum KCI aptetur recta KI, eidem AE æqualis, quæ convergat ad punctum H. Denique per punctum D ducatur recta KL, ipsi AB occurrens in L; & dico, CK, AL medias esse proportionales inter duas AB, AC. FIG. 123.

Quum enim AB secta sit bifariam in E; erit BG ipsi AD, seu BC æqualis; adeoque erit, ut AE ad AB, ita BC ad CG. Sed AB est ad AL, ut CK ad BC. Quare, perturbando, erit, ut AE ad AL, ita CK ad CG; & addendo antecedentes consequentibus, erit etiam, ut AE ad EL, ita CK ad GK. Unde, quum CK sit ad GK, ut est KI ad KH; erit ex æquali, ut AE ad EL, ita KI ad KH: & propterea, ob æquales AE, KI, erunt etiam æquales EL, KH: proindeque erit quadratum ex EL æquale quadrato ex KH.

Jam quadratum ex EL est æquale rectangulo ALB una cum AE quadrato; & quadratum ex KH est æquale quadratis KF, FH, sive etiam rectangulo BKC una cum CH quadrato. Quare erit rectangulum ALB una cum AE quadrato æquale rectangulo BKC una cum CH quadrato; adeoque, ablatis æquaqualibus quadratis AE, CH, erit rectangulum ALB æquale rectangulo BKC. Unde erit, ut BL ad BK, ita CK ad AL. Sed BL est ad BK, ut AB ad CK, & ut AL ad BC. Et igitur ex æquali erit, ut AB ad CK, ita CK ad AL, & ita AL ad BC.

FIG. 124. Oporteat secundo, secare trifariam arcum AB, sumptum in circumferentia circuli ABD, cujus centrum est punctum C. Extendatur diameter AD versus E, & intra angulum mixtilineum EDF aptetur recta EF æqualis radio CA, quæ convergat ad punctum B. Agatur postea per centrum C recta CG, ipsi EF parallela; & erit AG tertia pars arcus AB. Nam, ob æquales CB, CF, EF, isoscelia erunt triangula BCF, CFE; adeoque erit angulus ACB triplus anguli AEB, sive ACG.

X. *Quomodo præfatum problema solvebat Nichomedes Conchoide sua, & num legitima sit illa solutio.*

X. Non ergo dubitari potest, quin facili negotio resolvatur, tam problema de duabus mediis proportionalibus; quam problema de anguli trisectione, ubi aptari possit intra datum angulum, sive rectilineum, sive mixtilineum recta datæ longitudinis, quæ convergat ad punctum datum. Præstabat id autem Nichomedes sua *conchoide*. Si enim super recta positione data AB feratur centrum circuli DEF interea, ac recta CH, transiens per centrum illud, revolvitur circa C; continua rectæ hujus, & circuli intersectione describetur conchois Nichomedis XMZ.

FIG. 125. Jam curvæ hujus illud est accidens præcipuum, ut ducta ad eam ex puncto C recta quavis CM, sit æqualis radio circuli DEF portio ejus MO, quæ recta AB, & curva ipsa conci-

tinetur. Unde, si AB sit crus rectilineum anguli dati, C punctum, ad quod convergere debet recta, intra angulum applicanda, & radius circuli DEF longitudo ejusdem rectæ; solvetur problema, faciendo, ut recta convergat quoque ad punctum illud, in quo aliud anguli crus a conchöide secatur.

Obiter autem notetur hic velim, quod sicuti curva XMZ conchois appellatur; sic dicitur polus ejus punctum C, regula recta AB, & intervallum radius circuli DEF, quo mediante describitur. Regula porro est etiam asymptotus curvæ. Nam, si super ea ex quolibet curvæ puncto M perpendicularis demittatur MN; fiet ista eo minor, quo magis a polo receditur, nec tamen unquam evanescet. Unde, curva ipsa accedet quidem continuo ad rectam AB, ei tamen numquam occurret.

Cæterum conchois est curva tertii generis. Nam, demisso super AB perpendiculo CA, positisque CA $= a$, MO $= b$, AN $= x$, & MN $= y$; invenietur æquatio quarti gradus $xxyy + y^4 + 2ay^3 + aayy - bbyy - 2abby - aabb = 0$. Unde, etsi problema de applicanda intra datum angulum recta datæ longitudinis, quæ convergat ad punctum datum, sit solidum natura sua; est tamen legitima constructio ejus, quæ conchoide perficitur, quum sit ad rectam locus alter, qui cum conchoide conjungitur.

FINIS.

INDEX

LIBRORUM, ET CAPITUM,

Quæ in hoc Secundo Tomo continentur.

LIBER V.

De Tangentibus, & Secantibus Sectionum Conicarum.

LIBER VI.

De Focis, seu Umbilicis Sectionum Conicarum.

LIBER VII.

De Locis Geometricis, Coni Sectionibus terminatis.

LIBER VIII.

De Constructione Problematum Solidorum.

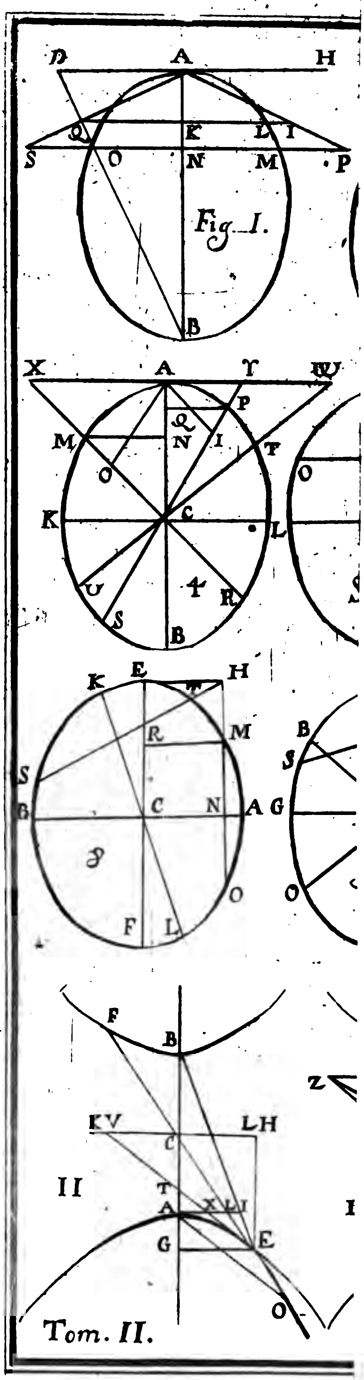
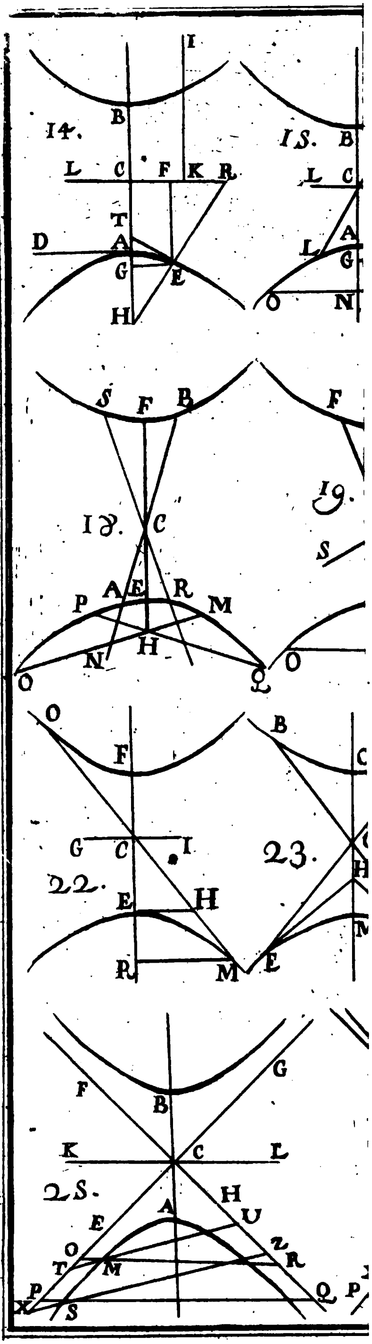
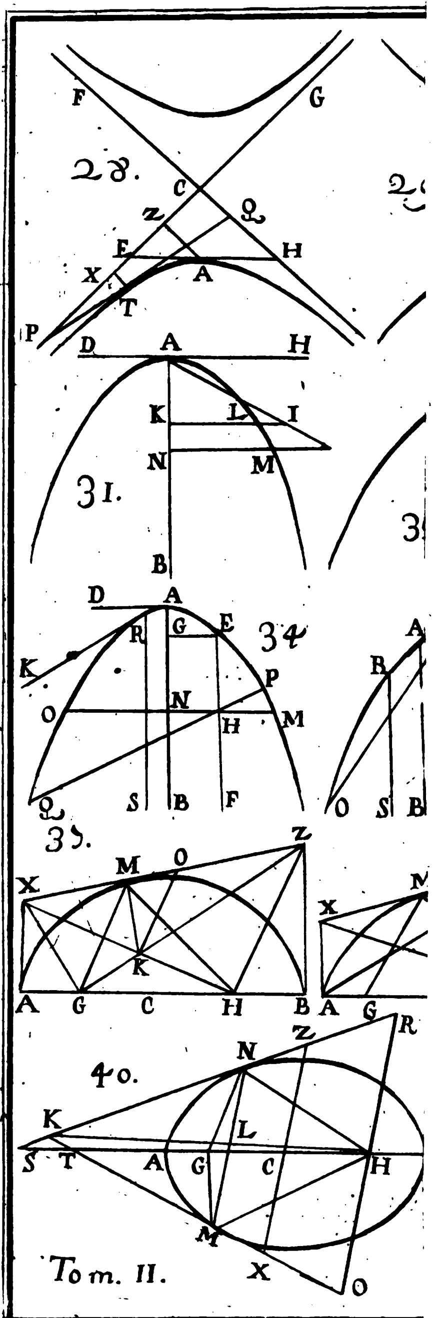
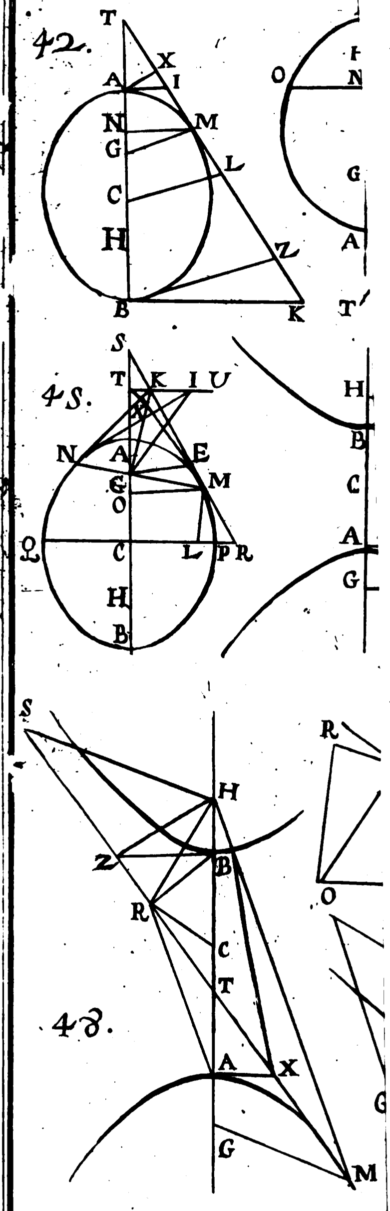


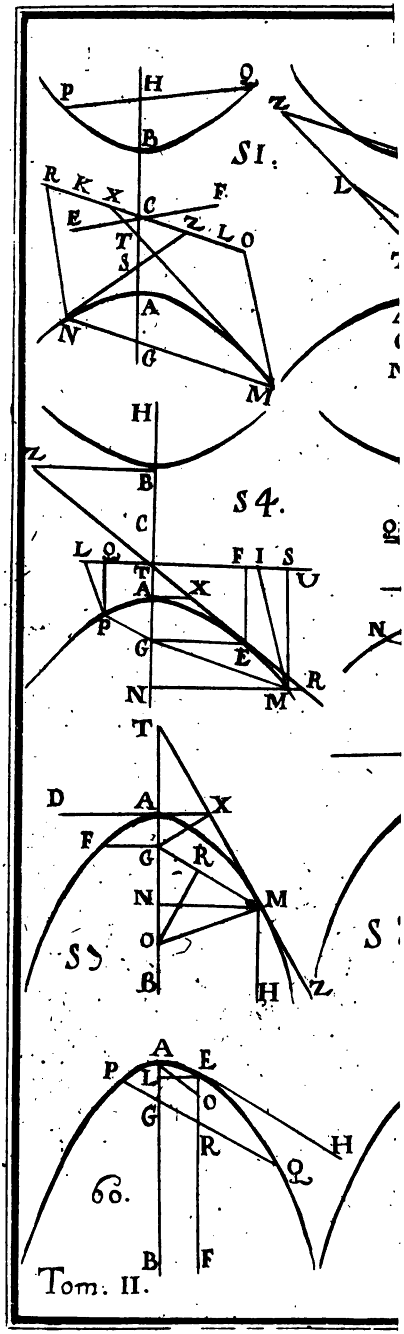
Fig. I.
Tom. II.


14.
15.
18.
19.
22.
23.
25.

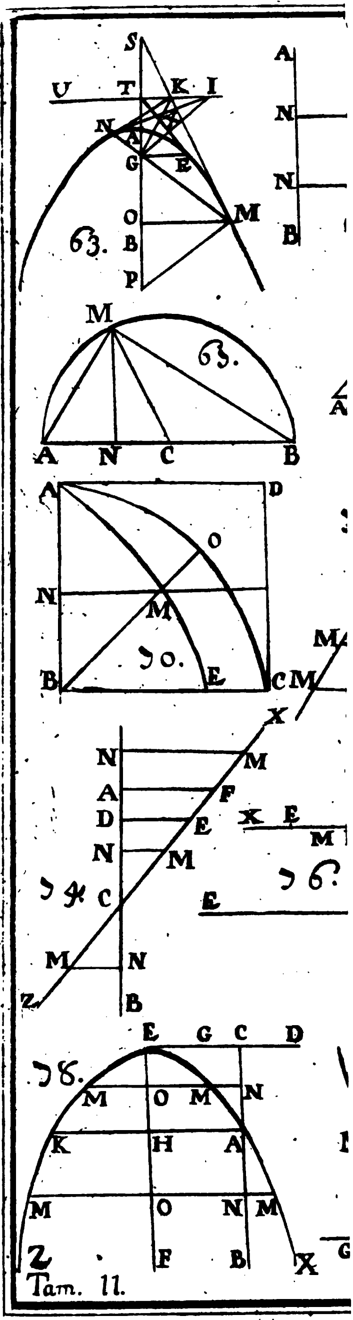

28.
31.
34
35.
40.
Tom. II.



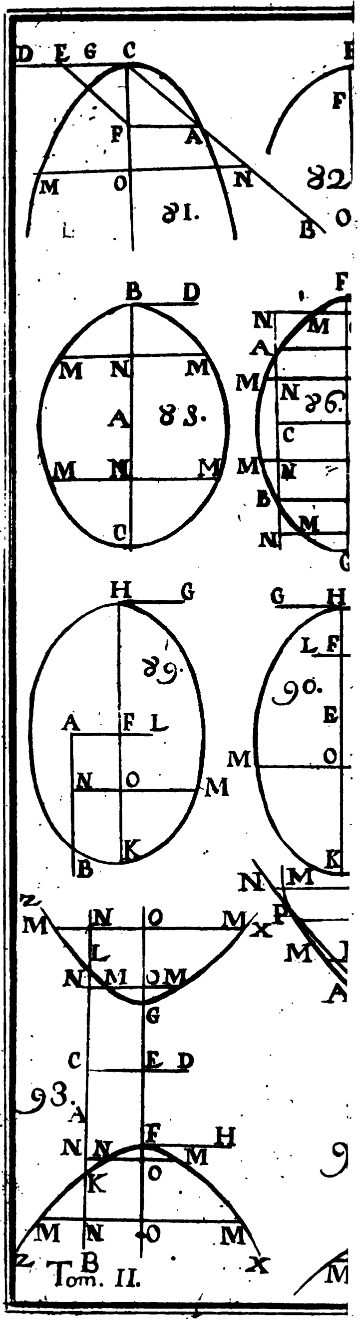
Tom. II.

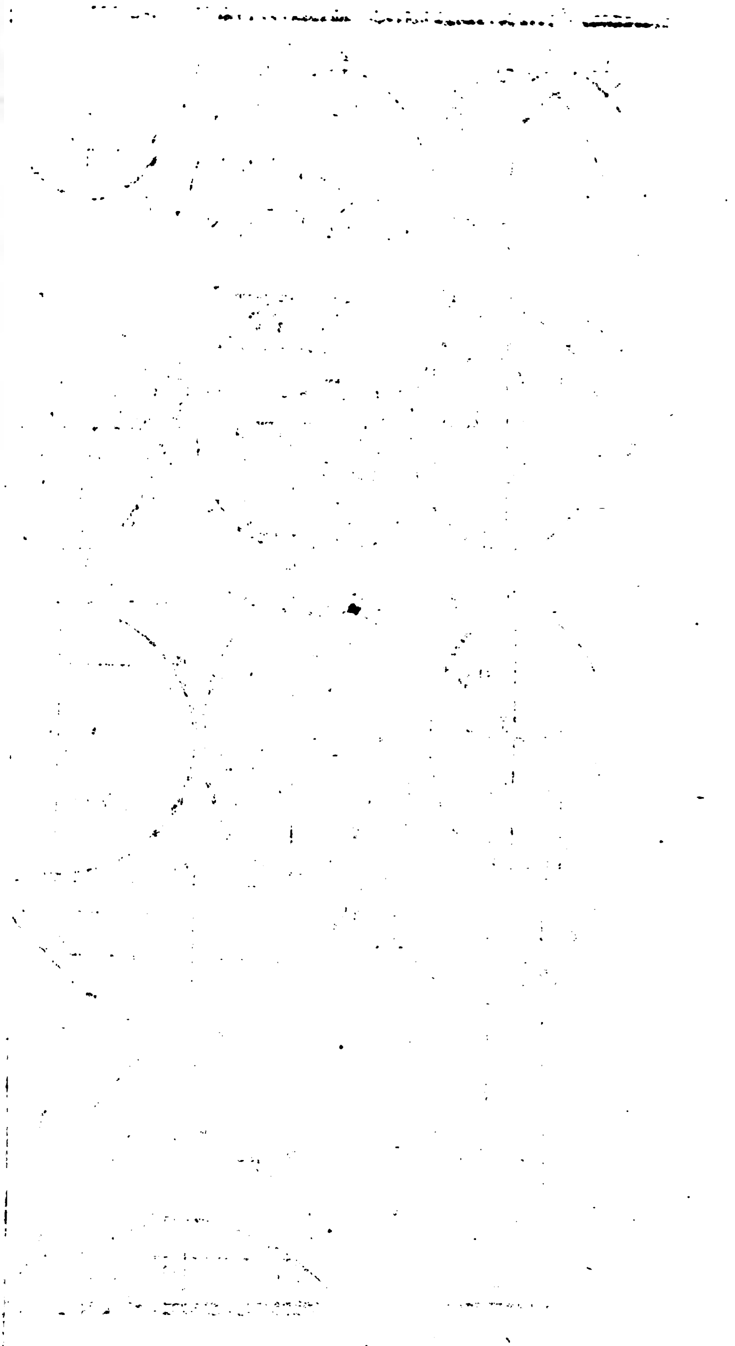


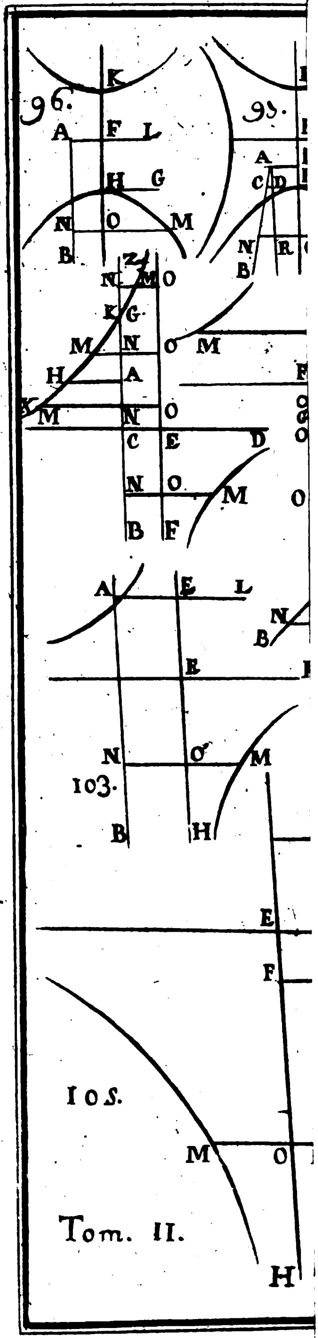
51.
54.
55
60.
Tom. II.

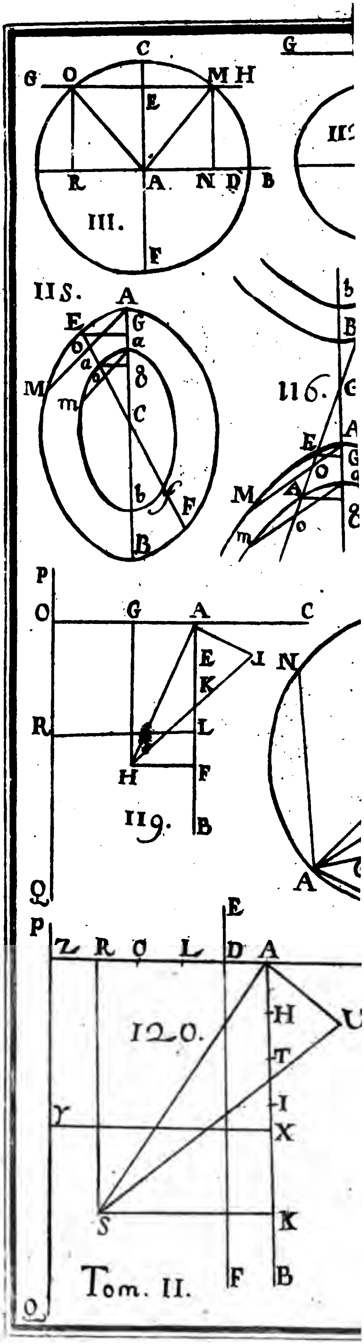


Tam. 11.


81.
82
83.
86.
89.
90.
93.
Tom. II.




96.
95.
103.
105.
Tom. II.


III.
115.
116.
119.
120.
Tom. II.