# ELEMENTE

DER

# GEOMETRIE,

VON

Dr. J. FRISCHAUF,

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU GRAZ.

ZWEITE AUFLAGE.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1877.

# Aus dem Vorwort zur ersten Auflage.

Die Elemente der Geometrie, welche ich hiermit der Oeffentlichkeit übergebe, enthalten die Grundlehren der synthetischen Geometrie einschliesslich der Trigonometrie. Die gewöhnlich durchgeführte Trennung des Stoffes in Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie ist hier nicht beibehalten; hauptsächlich deshalb, weil sie mir nicht natürlich und auch praktisch nicht zweckmässig erscheint.

An die Darstellung der Lagen-Verhältnisse knüpft sich die Betrachtung der einfachsten Gestalten und damit zusammenhängend die Lehre von der Congruenz und Symmetrie. An diese, als einfachste Verwandtschaft, reiht sich die Aehnlichkeit, und daran, gleichsam als Anwendung, die Trigonometrie. Die Lehren der Gleichheit und der Geometrie des Masses bilden den Schluss des Werkes.

Hinsichtlich der Beweisführung hielt ich die Mitte zwischen den ausführlichen Lehrbüchern und solchen, welche die Beweise nur andeuten. Die Hauptsätze sind in der Regel ausführlich bewiesen, das weniger Wichtige ist in Zusätzen nur angedeutet. Aehnliches geschah auch bei den Figuren. Solche Figuren, die man sich leicht hinzudenken kann, wurden weggelassen; ebenso vermied ich alle überflüssigen Linien, welche die Figur nur verwirren.

An Reichthum des Inhaltes dürfte das vorliegende Buch auch von viel umfangreicheren nicht übertroffen werden. Theorien, die nur an und für sich interessant sind, ohne dabei die Einsicht wesentlich zu fördern, liess ich ganz unberücksichtigt. Uebungsaufgaben fehlen dem Werke fast gänzlich. Die Lösung der allgemeinen Berührungsaufgabe sowohl für die Ebene als für den Raum ist jedoch durchgeführt, und zwar aus dem Grunde, weil sämmtliche in diesem Buche behandelte Theorien der Potenzen, Aehnlichkeitspuncte, Pole, . ., welche gewöhnlich zur neueren Geometrie gerechnet werden, dabei Anwendung finden.

Zur Ausarbeitung dieses Buches diente mir ein durch mehr als zwölfjähriges Studium gesammeltes Material aus den Werken von: **Apollonius, Archimedes, Barrow, Bretschneider, Carnot, Chasles, Clavius, Commandinus, Crelle, Euclid, Feuerbach, Gauss, Gergonne, Grunert, Huyghens, C. F. A. Jacobi, Kästner, Klügel, Kunze, Legendre, Lobatschewsky, Mack, Mascheroni, Möbius, Mollweide, J. H. T. Müller, Pappus, Paucker, Poncelet, Ptolemäus, Schlömilch, Simson, Staudt, J. Steiner, Tacquet, Tellkampf, Vieta** u. A. und den Abhandlungen in den mathematischen Zeitschriften von **Crelle, Grunert** und **Schlömilch**. Uebrigens dürfte man wenige Stellen finden, die aus einem der angeführten Werke entnommen sind, ohne dass sie eine dem Ganzen entsprechende Bearbeitung gefunden hätten. Ebenso wurde auf die Anordnung der Sätze die grösste Sorgfalt verwendet.

Mit den Begriffen des positiven und negativen Sinnes bei Strecken und Winkeln kann der Anfänger nicht früh genug vertraut gemacht werden; viele Sätze lassen sich dadurch übersichtlicher darstellen, auch in der Anwendung (Astronomie) leisten diese Begriffe treffliche Dienste. Ueberhaupt war ich bemüht der Methode der neueren Geometrie — denn dieser verdankt doch die synthetische Geometrie ihre ungeheuren Fortschritte in den letzten Decennien — möglichst gerecht zu werden und bereits in den Elementen auf diese Wissenschaften vorzubereiten.

---

## Vorwort zur zweiten Auflage.

Die Aenderungen in der vorliegenden neuen Auflage betreffen theils die Anlage des Buches im Grossen und Ganzen, theils die Umarbeitungen im Einzelnen. Letztere beziehen sich auf die Erweiterung aller zu kurz gehaltenen Stellen, Vermehrung der Figuren, und haben daher auf den Plan des Buches keinen wesentlichen Einfluss. Von ungleich grösserer Wichtigkeit sind die Aenderungen der ersten Art. Diese bestehen in der Ableitung der beiden Gebilde „Gerade und Ebene“, wodurch eine natürlichere Darstellung der Sätze der Stereometrie erreicht wird, und in der Vereinigung der „Gleichheit“ mit der „Congruenz und Symmetrie“, welche ich vielfach ausgesprochenen Wünschen gewiegter Pädagogen zu lieb unternahm. Die Massbestimmungen der Figuren bilden daher den Schluss der Schrift; selbe, wie dies nicht selten der Fall ist, vor die Trigonometrie zu stellen, zeigt ein vollständiges Verkennen der Stellung dieser Disciplin, welche ausschliesslich zur Erleichterung der Massbestimmungen ausgebildet wurde.

Trotz der Vereinigung von Planimetrie mit Stereometrie, hat es keine Schwierigkeit, beim Unterrichte diese Parthien der Geometrie getrennt zu behandeln. Für die Vereinigung sprechen jedoch gewichtige Gründe. Am Untergymnasium wird der Unterricht mit Stereometrie geschlossen, es lassen sich dann nach dem vorliegenden Buche die stereometrischen Sätze fast als eine Repetition behandeln. Dazu kommt noch, dass im Obergymnasium der naturwissenschaftliche Unterricht mit der Krystallographie begonnen wird, wo dann von den Lagenverhältnissen räumlicher Gebilde der ausgedehnteste Gebrauch gemacht wird, aus welchem Grunde ein möglichst rasches Eingehen auf die Stereometrie gewiss erwünscht ist.

Die Schwierigkeiten, welche sich dem Verständnisse stereometrischer Sätze entgegenstellen, kann man durch Modelle vollständig beseitigen. Da die gebräuchlichen Sammlungen gerade die für den Unterricht nöthigen Stücke nicht enthalten, so veranstaltete ich eine Zusammenstellung der wichtigsten Modelle, welche sowol die in der niedersten Stufe des Anschauungs-Unterrichts vorkommenden Körper, als auch die wichtigsten, auf die Lagenverhältnisse und Massbestimmungen bezüglichen Stücke enthält. Das Fehlen der letzteren ist die Ursache, warum die bisherigen, mitunter höchst reichhaltigen Sammlungen einen ganz geringen Nutzen gewähren. Herr O. Trinker (Fabrikant in Graz, Schönaugasse Nr. 23) liefert auf Bestellung die gedruckten Cartons meiner Modelle*).

Die Art. 6 bis 12 enthalten die Construction der Ebene und der Geraden vermittelst der Kugelfläche sammt ihren daraus folgenden Eigenschaften. Sollte diese etwas abstracte Darstellung den Anfängern Schwierigkeiten bereiten, so zähle man die Eigenschaften dieser beiden Gebilde unmittelbar auf; selbe sind gewiss eben so anschaulich, als die gewöhnliche Definition der Ebene; man kann dann in den höheren Classen bei der Repetition auf ihre Beweise eingehen. So lange man, wie dies in der Regel mit den Anfängen der Mathematik geschieht, über die Schwierig-

*) Die ganze Sammlung besteht aus zwei Parthien, wovon die Modelle der ersten beim niederen Unterricht zu verwenden sind, die der zweiten sich auf die Sätze der Art. 12, 28, 39, 42, 48, 108, 112, 130, 134 und 136 beziehen.

keiten hinwegschlüpft, leichte Sachen hingegen breit tritt, kann man allerdings bei oberflächlichen Leuten die Täuschung einer leicht verständlichen und dabei gründlichen Darstellung erreichen. Wie schädlich aber ein solches Verfahren ist, davon wissen die Lehrer der Mathematik an Hochschulen genug zu erzählen.

Hinsichtlich der Uebungen verweise ich auf meine Sammlung von „Uebungen zu den Elementen der Geometrie" (Graz, Leuschner & Lubensky, 1876), welche allerdings fast nur Paradigmen giebt. In unseren vorzüglichen Sammlungen von Junghans und Gandtner, Reidt u. A. findet der Lehrer genug Stoff zur Auswahl. Lange Zeit schwankte ich, ob ich das in meinen „Uebungen" enthaltene Material an Lehrsätzen und Aufgaben an den betreffenden Textstellen einschalten sollte. Der Umstand, dass bei mehrjährigem Gebrauche eines Buches an derselben Anstalt in der Regel sich die Lösungen bei den Schülern vererben, hat mich davon abgehalten. Sollten jedoch mit gewichtigen Gründen unterstützte Wünsche für diese Einschaltung laut werden, so will ich selbe trotz meinen — in massgebenden Lehrerkreisen getheilten — Bedenken in einer folgenden Auflage durchführen.

Die Correcturen dieser Auflage hat mir mein Freund A. v. Frank, Professor an der hiesigen Gewerbeschule, besorgt, wofür ich ihm meinen innigsten Dank ausspreche.

Graz, im Mai 1877.

**J. Frischauf.**

---

# Inhalt.

**Zweites Buch. Die einfachsten Gestalten und deren Congruenz, Symmetrie und Gleichheit.**

I. Ebene Figuren.



II. Räumliche Gestalten.



**Drittes Buch. Die Aehnlichkeit der Gestalten.**

# Erstes Buch.

## Die Grundgebilde der Geometrie und deren Lage.

### Einleitende Bemerkungen.

1. Die Geometrie nimmt ihren Ausgang von der Vorstellung: die verschiedenen in unserem Erfahrungsraume vorkommenden Dinge (Körper) ohne Rücksicht auf ihre besonderen Eigenschaften blos nach dem von ihnen eingenommenen Raume zu betrachten. Man kann nämlich die Dinge aus dem Raume wegdenken und doch den von ihnen eingenommenen Raum festhalten. Man erhält dadurch einen leer gedachten Raum, welcher unveränderlich, unbegrenzt, an allen Stellen gleichartig, daher auch stetig und fortgesetzt theilbar ist.

Jeder allseitig begrenzte Theil dieses Raumes heisst ein Körper.

Die Grenze eines Körpers heisst dessen Oberfläche, jeder Theil derselben wird eine Fläche genannt.

Die Grenze einer Fläche heisst deren Umfang, jeder Theil desselben wird eine Linie genannt.

Die Grenzen einer Linie werden Puncte genannt.

Da die Fläche Grenze eines Körpers ist, so hat sie zwei Seiten, eine gegen den Körper zugewandte und eine von demselben abgewandte. Dasselbe gilt auch von der Linie und dem Puncte. Diese beiden Seiten werden entgegengesetzte Seiten genannt. Puncte, Linien, Flächen und Körper sind die geometrischen Grundgebilde, deren gegenseitige Beziehungen in der Geometrie behandelt werden.

2. Man kann die geometrischen Gebilde auch durch Bewegung erzeugen:

a) Der von einem bewegten Puncte zurückgelegte Weg ist eine Linie.

b) Der von einer bewegten Linie zurückgelegte Weg ist eine Fläche oder eine Linie.

c) Der von einer bewegten Fläche zurückgelegte Weg ist ein Körper oder eine Fläche.

3. Zwei Gebilde, welche sich nur durch den Ort, an welchem sie sich befinden, unterscheiden, heissen congruent. Congruente Gebilde entstehen dadurch, dass ein Gebilde in irgend einem anderen Theile des unbegrenzten Raumes wiederholt gedacht wird. Dass die beiden Gebilde $A$ und $B$ congruent sind, wird durch

$$A \cong B$$

bezeichnet.

Congruente Gebilde können so ineinander gelegt werden, dass sie sich decken.

Umgekehrt: Können zwei Gebilde zur Deckung gebracht werden, so sind sie congruent.

Zwei congruente Gebilde $A$ und $B$ können in solche Theile zerlegt werden, dass die Theile von $A$ mit den Theilen von $B$ einzeln genommen in derselben Ordnung congruent sind. Umgekehrt:

Zwei Gebilde $A$ und $B$ sind congruent, wenn sie aus congruenten Theilen in derselben Weise zusammengesetzt sind.

Sind die Gebilde $A$ und $B$ aus congruenten Theilen in beliebiger Ordnung zusammengesetzt, so werden sie gleich genannt, und zwar längengleich, flächengleich oder inhaltsgleich, je nachdem die Gebilde $A$ und $B$ resp. Linien, Flächen oder Körper bedeuten; man bezeichnet dies durch

$$A = B.$$

Man berücksichtigt hierbei nur die Gleichheit der Quantität oder des räumlichen Gehaltes der beiden Gebilde. Enthält das Gebilde $A$ ausser den Bestandtheilen von $B$ noch andere, so heisst $A$ grösser als $B$, und man bezeichnet dies durch

$$A > B \text{ oder } B < A.$$

Die beiden Gebilde $A$ und $B$ werden hinsichtlich der Quantität, rücksichtlich deren man sie untersucht, gleichartig genannt.

Ist das Gebilde $A$ aus den Theilen $A_1, A_2 \cdots A_n$ zusammengesetzt, wo $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = E$ ist, so drückt man dies durch

$$A = nE$$

aus, und nennt $E$ ein Mass von $A$, und $n$ dessen Masszahl.

Anmerkung. Bei der obigen Uebertragung eines Gebildes von einem Raumtheil in einen andern darf sich das Gebilde nicht ändern. Man denkt sich daher die Körper als fest, die Linien als starr und die Puncte, um ihre gegenseitige Lage zu fixiren, durch solche starre Linien verbunden.

### Kugelfläche und Kreislinie.

4. Werden zwei durch eine starre Linie in feste Verbindung gesetzte Puncte $A$ und $B$ an die Stelle von zwei anderen Raumpuncten $A'$ und $B'$ gebracht, so sagt man: die Puncte $A'$ und $B'$ haben gleichen Abstand mit den Puncten $A$ und $B$.

Der Inbegriff aller Puncte $M$, welche von einem gegebenen Puncte $O$ gleichen Abstand haben, bildet eine Fläche, welche Kugelfläche heisst. Dieselbe ist an allen Stellen gleichartig und scheidet aus dem Raume einen allseitig begrenzten Körper — Kugel genannt — ab. Der Punct $O$ heisst der Mittelpunct (Centrum), der unveränderliche Abstand der Halbmesser (Radius) der Kugel; letzterer wird durch die Zusammenstellung $OM$ bezeichnet.

Zu jeder Kugelfläche kann man sich aus demselben Mittelpuncte eine zweite die erstere einschliessende denken; man sagt dann: die zweite hat einen grösseren Halbmesser als die erste.

5. Zwei Kugelflächen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ mit gleichen Halbmessern und verschiedenen Mittelpuncten $O$ und $O'$, von denen die eine theilweise innerhalb, theilweise ausserhalb der andern liegt, schneiden sich in einer an allen Stellen gleichartigen Linie $k$, welche eine Kreislinie genannt wird. Denkt man sich von einem ihrer Puncte, etwa $A$ aus, zwei Puncte $M$ und $M'$ nach entgegengesetzten Sinne in gleicher Weise bewegt, so treffen sie in einem Puncte, etwa $A'$, derart zusammen, dass durch die Puncte $A$ und $A'$ die Kreislinie $k$ in zwei congruente Theile zerlegt wird. In ähnlicher Weise kann jeder dieser Theile wieder halbirt werden. Die Kreislinie kann man sich daher aus congruenten Stücken bestehend denken.

### Ebene und Gerade.

6. Es seien $O$ und $O'$ zwei Puncte des Raumes. Beschreibt man mit demselben Halbmesser aus $O$ und $O'$ Kugelflächen, so heisst der Inbegriff aller Kreislinien der Kugelflächen-Paare, die zu demselben, aber fortgesetzt sich ändernden Halbmesser gehören, eine Ebene. Für den Beginn beschreibe man das erste Paar der Kugelflächen mit dem Halbmesser $OO' = O'O$. Diese beiden Kugeln sind von einander verschieden und jede liegt theilweise innerhalb, theilweise ausserhalb der anderen, sie schneiden sich daher in einer Kreislinie $k$. In gleicher Weise schneiden sich alle mit grösserem Halbmesser beschriebenen Kugelflächen-Paare. Die Flächen-Paare, welche den fortgesetzt kleinern Halbmessern angehören, werden sich so lange schneiden, bis man auf ein Paar kommt, welche nur einen Punct $P$ gemeinsam haben,

d. h. die sich in diesem Puncte **berühren**. Die Kugelflächen-Paare, welche zu den kleineren Halbmessern gehören, werden keine Puncte mehr gemeinsam haben.

Die sämmtlichen Kreislinien, welche die Ebene 𝔈 bilden, werden von dem Berührungs-Puncte $O$ an immer weiter, d. h. die folgenden umschliessen immer die vorhergehenden.

7. Ist $A$ ein beliebiger Punct der Kreislinie $k$, $A'$ der zugehörige Halbirungs-Punct, so können die Mittelpuncte $O$ und $O'$ sammt ihren Kugeln um die ruhenden Puncte $A$ und $A'$ derart bewegt werden, dass der Punct $O$ nach $O'$ und der Punct $O'$ nach $O$ kommt, dabei fällt die Kreislinie $k$ mit ihrer ursprünglichen Lage zusammen. Gleiches ist der Fall mit den übrigen Kreislinien eines jeden Flächenpaares. Es ändern sich daher sämmtliche Kreislinien also auch die Ebene nicht; d. h. es können die beiden entgegengesetzten Seiten der Ebene zur Deckung gebracht werden.

8. In jeder Kreislinie eines Kugelflächen-Paares existirt (analog mit den Puncten $A$ und $A'$ der Kreislinie $k$) ein Punct-Paar $M$ und $M'$, welches bei der im vorigen Art. erwähnten Bewegung in Ruhe bleibt. Der Inbegriff aller dieser Ruhepuncte wird eine **gerade Linie** oder eine **Gerade** genannt.

Jede Gerade ist durch zwei Puncte bestimmt; zwei Gerade, welche zwei Puncte gemeinsam haben, fallen in allen ihren Puncten zusammen. Alle Geraden sind einander congruent.

Die Gerade ist eine unbegrenzte Linie. Denn die Halbmesser der sie erzeugenden Kugelflächen können unbegrenzt wachsend gedacht werden.

Das zwischen zwei Puncten $M$ und $N$ enthaltene Stück der Geraden wird eine **Strecke** genannt und durch $MN$ bezeichnet. Die Strecke bestimmt den Abstand der beiden Puncte $M$ und $N$.

9. Aus der Eigenschaft, dass man einen Punct $A$ der Kreislinie $k$ durch Bewegung des Kugelsystems um die Puncte $O$ und $O'$ durch die ganze Kreislinie $k$ bis zur Rückkehr in die Anfangslage $A$ bewegen kann, folgt:

a) Die Puncte $O$, $O'$ liegen mit dem Berührungspuncte $P$ der Ebene in einer Geraden. Diese Gerade heisst „**senkrecht** auf der Ebene im Puncte $P$", und jede solche Gerade $AP$ heisst „**senkrecht** auf der Geraden $OO'$ im Puncte $P$".

Die Ebene wird daher durch Bewegung einer Geraden ($AP$) erzeugt, welche während der Bewegung immer in demselben Puncte ($P$) einer festen Geraden ($OO'$) senkrecht ist.

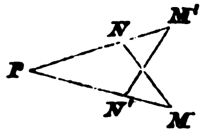
Die beiden entgegengesetzten Bewegungen, welche hierbei möglich sind, erzeugen dieselbe Ebene.

b) Die geradlinigen Verbindungslinien der Halbirungspuncte einer Kreislinie (wie $A$, $A'$ in der Linie $k$) liegen in der Ebene $\mathfrak{E}$ und werden im Puncte $P$ halbirt; letzterer Punct heisst daher auch der **Mittelpunct**, und die constante Strecke eines Punctes der Kreislinie bis zum Mittelpuncte der **Halbmesser** (Radius) der Kreislinie.

Die Strecke $AA'$ wird ein **Durchmesser** (Diameter) genannt.

10. Eine Gerade, welche zwei Puncte $M$ und $N$ mit einer Ebene $\mathfrak{E}$ gemeinsam hat, liegt vollständig in der Ebene.

Fig. 1.

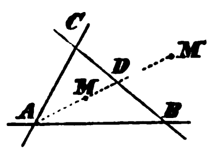


a) Sind die Verbindungsstrecken $PM$ und $PN$ des „Berührungspunctes" $P$ der Ebene mit den Puncten $M$ und $N$ einander gleich, so folgt der Beweis unmittelbar durch die Umkehrung der Ebene.

Die Ebene wird daher durch Bewegung der Geraden $MN$ erhalten, welche auf den (unbegrenzten) Geraden $PM$ und $PN$ derart gleitet, dass immer $PM = PN$ ist.

b) Sind die Strecken $PM$ und $PN$ ungleich, so mache man auf der Geraden $PM$ die Strecke $PN' = PN$ und auf der Geraden $PN$ die Strecke $PM' = PM$. Würde nun die Gerade $MN$ nicht in der Ebene $\mathfrak{E}$ liegen, so müsste nach Art. 9, a) auf derselben Seite der Ebene $\mathfrak{E}$ auch die Gerade $M'N'$ liegen*). Kehrt man die Ebene um, so dass sie mit der ursprünglichen Lage derart zusammenfällt, dass die Puncte $M'$ und $N'$ in die Puncte $M$ und $N$ fallen, so würde die Gerade $M'N'$ in der neuen Lage auf der entgegesetzten Seite der Ebene $\mathfrak{E}$ fallen. Durch die beiden Puncte $M$ und $N$ waren also zwei Gerade möglich.

Fig. 2



11. Durch drei Puncte $A$, $B$, $C$, die nicht in einer Geraden liegen, ist eine (und nur eine) Ebene bestimmt.

Denn wären zwei verschiedene Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ bestimmt, so würden die drei Geraden $AB$, $BC$, $CA$ in beiden Ebenen liegen. Ist $M$ ein beliebiger Punct der Ebene $\mathfrak{E}$, so liegt derselbe entweder auf der durch die drei Strecken $AB$, $BC$, $CA$ abgegrenzten Fläche oder ausserhalb derselben. Im ersten Falle ziehe man die Gerade $AM$ und verlängere sie über $M$ in's Unbegrenzte, dadurch schneidet sie die Strecke $BC$ in einem Puncte, etwa $D$. Liegt der Punct $M$ mit dem Puncte $A$ auf den ent-

*) Zum leichteren Verständniss denke man sich die Ebene $\mathfrak{E}$ horizontal und die Strecken $MN$ und $M'N'$ oberhalb.

gegengesetzten Seiten der Geraden $BC$, so schneidet die Gerade $AM$ die Gerade $BC$ in einem Puncte, etwa $D$. Die Gerade $AD$, also auch der Punct $M$, liegt in beiden Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$.

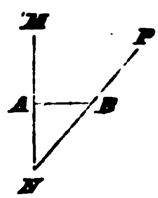
Zusätze. a) Jeder Punct einer Ebene kann als der Berührungspunct der beiden Kugelflächen eines die Ebene erzeugenden Kugelsystems (vergl. Art. 6) betrachtet werden.

b) In jedem Puncte einer Ebene ist eine (und nur eine) auf der Ebene senkrechte Gerade möglich.

c) Zwei in einem Puncte sich schneidende Gerade bestimmen eine (und nur eine) Ebene.

12. Zwei Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$, welche durch denselben Punct $A$ gehen, schneiden sich in einer durch diesen Punct gehenden Geraden.

Fig. 3.




Denn zieht man in der Ebene $\mathfrak{E}$ durch den Punct $A$ eine Gerade $MN$, wobei der Punct $A$ auf der Strecke $MN$ vorausgesetzt wird, so liegen die Theile $MA$ und $AN$ auf den entgegengesetzten Seiten der Ebene $\mathfrak{E}'$. Ist $P$ ein Punct der Ebene $\mathfrak{E}$ ausserhalb der Geraden $MN$, der mit dem Puncte $M$ auf derselben Seite der Ebene $\mathfrak{E}'$ liegt, so schneidet die Gerade $PN$ die Ebene $\mathfrak{E}'$ in einem Puncte, etwa $B$. Die Gerade $AB$ ist daher die Durchschnittslinie der beiden Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$.

Anmerkung. In den Art. 4 bis 11 ist die Existenz der wichtigsten Gebilde „Gerade, Ebene, Kreislinie, Kugelfläche" nachgewiesen. Die Gerade ist durch zwei Puncte, die Ebene durch drei nicht in einer Geraden liegende Puncte, die Kugelfläche durch den Mittelpunct und einen (beliebigen) Punct der Oberfläche, die Kreislinie durch den Mittelpunct und einen (beliebigen) Punct des Umfanges in ihrer Ebene bestimmt. Die Beziehungen dieser Gebilde zu einander geben den Inhalt der elementaren Geometrie, welche in den geometrischen Sätzen, d. i. in den Lehrsätzen und Aufgaben ihren Ausdruck finden. Erstere sprechen irgend einem Raumgebilde gewisse Eigenschaften zu, letztere stellen die Forderung auf, ein Raumgebilde von gewissen Eigenschaften zu construiren. Im Wesentlichen ist jedoch in den beiden Klassen von Sätzen kein Unterschied, dieser besteht nur in der Form der Aussprache.

Zur practischen Durchführung der Constructionen in einer Ebene bedient man sich des Lineals und des Zirkels.

### Von den Strecken und deren Vorzeichen.

13. Eine jede unbegrenzte Gerade wird durch jeden in ihr liegenden Punct in zwei halbbegrenzte Gerade getheilt.

Eine gerade Linie kann von einem Puncte in zwei entgegengesetzten Richtungen durchlaufen werden, die eine dieser Richtungen heisst man die positive, die andere die negative. Nimmt man auf diesen Gegensatz der Richtungen Rücksicht, so versteht man unter dem Ausdrucke $AB$ den Werth der zwischen $A$ und $B$ enthaltenen Strecke positiv oder negativ genommen, je nachdem man vom Puncte $A$ nach $B$ in positiver oder negativer Richtung gelangt. Zufolge dieser Bezeichnung ist $BA = -AB$, also

$$AB + BA = 0.$$

14. Zwei Strecken $AB$ und $CD$ derselben Geraden sind einander gleich, wenn durch Verschiebung der einen, etwa $AB$, die Puncte $A$ und $C$, $B$ und $D$ zusammengebracht werden können; also die beiden Strecken durch Verschiebung der einen zur Deckung gebracht werden können. Die beiden Strecken müssen daher in Grösse und Richtung übereinstimmen.

Um die Summe zweier beliebiger Strecken derselben Geraden zu erhalten, denke man sich die eine Strecke derart verschoben, dass das Ende der ersten Strecke mit dem Anfang der zweiten zusammenfällt; die zwischen dem Anfang der ersten und dem Ende der zweiten Strecke enthaltene Strecke (der neuen Lage) stellt die Summe der beiden Strecken vor. Daraus folgt: Ist $C$ ein beliebiger Punct der Geraden $AB$, so ist

$$AB + BC = AC,$$

also

$$AB + BC + CA = 0.$$

Bei zwei Geraden ist die positive Richtung der einen im Allgemeinen unabhängig von der der anderen.

### Vom Strahlenbüschel.

15. Eine durch einen Punct $S$ gehende unbegrenzte Gerade wird ein Strahl genannt.

Der Inbegriff aller durch den Punct $S$ gehenden Strahlen heisst ein Strahlenbüschel; der Punct $S$ heisst Mittelpunct. Jeder Strahl wird durch den Mittelpunct in zwei Halbstrahlen, von welchem jeder die Ergänzung des andern heisst, und das ganze Strahlenbüschel in zwei Halbstrahlenbüschel getheilt.

Je zwei Strahlen liegen in einer Ebene.

Liegen sämmtliche Strahlen in einer Ebene, so erhält man ein ebenes Strahlenbüschel. Ein solches wird erhalten, indem man in einer Ebene durch einen bestimmten Punct $S$ (den Strahlenmittelpunct) nach allen Richtungen Gerade zieht.

### Von dem ebenen Winkel.

16. Eine stetige Lagenänderung einer Geraden, wobei einer ihrer Puncte unverändert, d. i. fest bleibt, wird eine Drehung genannt. Ist in einer Ebene ein (fester) Halbstrahl $a$ gegeben, und denkt man sich einen zweiten Halbstrahl $b$ um den Strahlenmittelpunct gedreht, so bildet der bewegliche Halbstrahl $b$ in jeder Lage mit dem festen Halbstrahl $a$ einen Winkel. Da der bewegliche Halbstrahl durch fortgesetzte Drehung aus der Anfangslage $a$ in die Endlage $b$ gebracht werden kann, so kann der Winkel auch als Grösse betrachtet werden. Der Winkel der beiden Halbstrahlen $a$ und $b$ wird durch $(a, b)$ bezeichnet. Diese Drehung des beweglichen Halbstrahles $b$ kann so lange fortgesetzt werden, bis derselbe mit dem festen Halbstrahl $a$ wieder zusammenfällt, wodurch die ganze unbegrenzte Ebene durchlaufen wird. Diese Drehung kann in zwei entgegengesetzten Richtungen vollbracht werden; die eine Richtung heisst man die positive, die andere die negative. Nimmt man auf diesen Gegensatz Rücksicht, so versteht man unter dem Zeichen $(a, b)$ den Werth des von den Halbstrahlen $a$ und $b$ bestimmten Winkels, positiv oder negativ genommen, je nachdem man vom Halbstrahle $a$ nach dem Halbstrahle $b$ durch eine positive oder negative Drehung gelangt.

In diesem Sinne ist

$$(a, b) + (b, a) = 0$$

und, wenn $c$ einen beliebigen Halbstrahl bedeutet,

$$(a, b) + (b, c) + (c, a) = 0.$$

17. Nimmt man keine Rücksicht auf diesen Gegensatz der Drehung, so dass also $(a, b) = (b, a)$ ist, so werden die beiden Halbstrahlen, welche den Winkel bilden, Schenkel, ihr Durchschnittspunct Scheitel oder Spitze des Winkels genannt. Der Winkel wird dann auch dadurch bezeichnet, dass man den Scheitel und einen beliebigen Punct jedes seiner Schenkel mit einem Buchstaben bezeichnet und diese in der Ordnung anschreibt, dass der Scheitelbuchstabe in der Mitte steht. Häufig wird nur der Scheitel mit einem Buchstaben bezeichnet, oder in den Raum zwischen beiden Schenkeln in der Nähe des Scheitels ein solcher gesetzt.

Zwei Winkel, welche in eine solche Lage gebracht werden können, dass ihre Scheitel und Schenkel zusammenfallen, werden gleich genannt.

18. Zwei zusammenfallende Halbstrahlen bilden den Nullwinkel. Dreht man den einen Halbstrahl um den Mittelpunct, so wird der Winkel immer grösser; setzt man die Drehung so lange fort, bis beide Halbstrahlen (in entgegengesetzter Richtung) in eine Gerade fallen, so bilden sie einen gestreckten Winkel. Wird die Drehung noch weiter fortgesetzt, so werden zuletzt beide Halbstrahlen in derselben Richtung zusammenfallen und einen vollen Winkel bilden. Die beiden Halbstrahlen desselben Strahles bilden also einen gestreckten Winkel.

Schätzt man den Winkel nach der Grösse der Drehung, so ist ein voller Winkel das Doppelte des gestreckten. Ein Winkel, der kleiner ist als ein gestreckter, heisst ein hohler (concaver) Winkel; ein Winkel, der grösser ist als ein gestreckter, heisst ein erhabener (convexer) Winkel.

19. Zieht man aus dem Scheitel eines gestreckten Winkels einen Halbstrahl $m$, so wird er dadurch in zwei Winkel getheilt, welche in einerlei Ebene liegen und Nebenwinkel heissen.

Sind die beiden Nebenwinkel von gleicher Grösse, so wird jeder ein rechter genannt, und gewöhnlich mit $R$ bezeichnet.

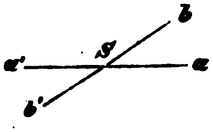
Ein hohler Winkel, welcher kleiner oder grösser als ein rechter ist, wird bezüglich ein spitzer oder stumpfer Winkel genannt.

Anmerkung. Um die Winkel bequem durch Zahlen auszudrücken, nennt man den 90. Theil des rechten Winkels einen Grad, den 60. Theil des Grades eine Minute, den 60. Theil der Minute eine Secunde, und bedient sich der Zeichen

$^{\circ}$ für Grade; $'$ für Minuten; $''$ für Secunden.

20. Zwei Strahlen bilden (von einem Halbstrahl an herumgezählt) vier Winkel. Sind $a$ und $b$ zwei Halbstrahlen, $a'$ und $b'$ ihre Ergänzungen, so sind diese Winkel:

Fig. 4.




$$(a,b),\ (b,a'),\ (a',b'),\ (b',a).$$

Dabei ist

$$(a,b) + (b,a') = 2R$$
$$(b,a') + (a',b') = 2R,$$

also $(a,b) = (a',b')$; u. s. w.

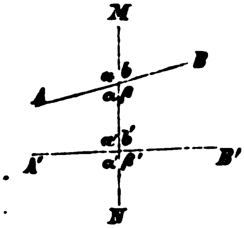
Die Winkel $(a,b)$ und $(b,a')$, u. s. w. sind Nebenwinkel.

Die Ergänzungen zweier Halbstrahlen bilden also einen gleichen Winkel wie die Halbstrahlen; jeder dieser Winkel heisst der Scheitelwinkel des anderen.

## Von den parallelen Geraden.

21. Sind in einer Ebene zwei Gerade $AB$ und $A'B'$ gegeben, so bildet eine dritte, die zwei gegebenen Geraden schneidende Gerade $MN$ an den Durchschnittspuncten $C$ und $C'$ acht Winkel: $a, b, \alpha, \beta; a', b', \alpha', \beta'$.

Fig. 5.



Findet zwischen den obigen acht Winkeln irgend eine der zwölf Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} a = a' & a = \beta' & a + \alpha' = 2R \\ b = b' & b = \alpha' & b + \beta' = 2R \\ \alpha = \alpha' & \alpha = b' & \alpha + a' = 2R \\ \beta = \beta' & \beta = a' & \beta + b' = 2R \end{array}$$

statt oder nicht, so ist dies, wie aus Art. 20 unmittelbar folgt, auch mit den übrigen elf Gleichungen der Fall.

Im Falle des Stattfindens dieser Gleichungen schneiden sich die beiden gegebenen Geraden, wie weit man sie auch nach ihren beiden Richtungen verlängern mag, nicht.

Denn ist: $a = b'$ und $\beta = a'$, so kann man das Gebilde $BCC'B'$ so auf das Gebilde $ACC'A'$ legen, dass die Segmente $CC'$ und $C'C$ sich decken und die halbbegrenzten Geraden

$$\begin{array}{ccc} CA & \text{und} & C'B' \\ C'A' & " & CB \end{array}$$

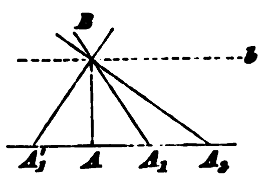
zusammenfallen. Würden sich nun die Geraden $CA$ und $C'A'$ schneiden, so müssten sich auch $CB$ und $C'B'$ schneiden; d. h. $AB$ und $A'B'$ würden zwei Puncte gemeinschaftlich haben, also zusammenfallen.

Zwei solche Gerade heissen parallel zu einander, man bezeichnet dies durch

$$AB \parallel CD.$$

Der zwischen zwei parallelen Geraden enthaltene Theil der (unbegrenzten) Ebene heisst ein Streifen.

Fig. 6.



22. Zur Erläuterung des Begriffes der parallelen Geraden denke man sich in einer Ebene eine Gerade $a$ und einen ausserhalb der Geraden liegenden Punct $B$, welcher als Mittelpunct eines Strahlenbüschels betrachtet wird. Zieht man vom Puncte $B$ die Senkrechte $BA$ auf die Gerade $a$, so zerfallen die Strahlen, welche die Gerade $a$ schneiden, in zwei Classen, je nachdem der Durchschnittspunct auf der einen oder entgegengesetzten Seite

des Punctes $A$ liegt. Denkt man sich einen Halbstrahl aus der Anfangslage $BA$ fortgesetzt gedreht, so erhält man auf der Geraden $a$ Puncte $A_1, A_2, \ldots$, deren vom Puncte $A$ gezählte Entfernungen fortgesetzt wachsen; zuletzt verschwindet der Durchschnittspunct, und bei fortgesetzter Drehung schneidet die Rückverlängerung des bewegten Halbstrahles die Gerade $a$ in einer Punctreihe $A_1', A_2', \ldots$, welche mit den Puncten $A_1, A_2, \ldots$ auf der entgegengesetzten Seite des Punctes $A$ liegt. Man kann daher die Parallele $b$ zu einer Geraden $a$ auch als die gemeinsame Grenze der beiden erwähnten Classen von Strahlen, in welche das Strahlenbüschel zerfällt, betrachten.

Die Parallele $b$ zur Geraden $a$ wird am einfachsten so construirt, dass man im Puncte $B$ einen Strahl $b$ senkrecht auf die Gerade $BA$ zieht.

Dass kein zweiter Strahl existirt, welcher die Gerade $a$ nicht schneidet, lehrt die Uebereinstimmung der aus dieser Voraussetzung gemachten Folgerungen mit der Erfahrung.

Aus diesem Satze und dem Satze, dass eine Gerade durch zwei Puncte bestimmt ist, folgt: Zieht man durch den Punct $B$ die Gerade $b \parallel a$; bedeuten $B_1, B_2, \ldots$ beliebige Puncte der Geraden $b$, ferner $A_1, A_2, \ldots$ beliebige Puncte der Geraden $a$, so sind die Parallelen zur Geraden $a$ durch die Puncte $B_1, B_2, \ldots$ mit der Geraden $b$ und die Parallelen zur Geraden $b$ durch die Puncte $A_1, A_2, \ldots$ mit der Geraden $a$ identisch.

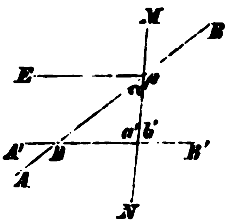
Der Parallelismus zweier Geraden ist daher immer gegenseitig.

Anmerkung. Die Parallele $b$ zur Geraden $a$ wird erhalten, indem man den Durchschnittspunct des bewegten Halbstrahles mit der Geraden $a$ vom Puncte $A$ immer weiter und weiter rückt, gleichgültig auf welcher Seite des Punctes $A$. Man sagt daher auch: Die Parallele $b$ schneidet die Gerade $a$ in unendlicher Ferne, und legt jeder Geraden einen unendlich entfernten Punct bei. Diese Ausdrucksweise hat ihre Vortheile in der Geometrie, indem es dadurch oft möglich wird, Sätze, die sich auf schneidende Gerade beziehen, mit solchen für parallele Gerade zusammenzufassen, wodurch man sowol zu einer grösseren Allgemeinheit als auch übersichtlicheren Darstellung der bezüglichen Sätze gelangt.

23. Schneiden sich die Geraden $AB$ und $A'B'$ im Puncte $D$, so ist die Summe der inneren Winkel $\alpha$ und $\alpha'$, welche mit dem Puncte $D$ auf derselben Seite der Geraden $MN$ liegen, kleiner als zwei Rechte.

Denn die Geraden, welche durch die Puncte $C, C', D$ bestimmt sind, grenzen einen Theil der durch eben diese Puncte bestimmten Ebene ab; zieht man daher durch den Punct $C$ eine Parallele mit $A'B'$, so muss diese ausserhalb dieses abgegrenzten Ebenenstückes, etwa in die Richtung der Geraden $CE$ fallen. Nun ist

Fig. 7.




Winkel $ECD + \alpha + \alpha' = 2R$, also

$$\alpha + \alpha' < 2R.$$

Anderseits ist

$$\beta + b' > 2R,$$

d. h. die Summe der inneren Winkel auf der anderen Seite der Geraden $MN$ ist grösser als zwei Rechte.

Umgekehrt: Zwei Gerade $AB$ und $A'B'$, welche von einer dritten Geraden $MN$ derart geschnitten werden, dass die Summe der inneren auf einerlei Seite von $MN$ liegenden Winkel kleiner als zwei Rechte ist, schneiden sich hinreichend verlängert auf dieser Seite von $MN$*).

Zusatz. Von einem Puncte ausserhalb einer Geraden ist nur eine Senkrechte auf die Gerade möglich.

24. Zwei Gerade sind einander parallel, wenn sie zu einer dritten Geraden, welche mit ihnen in derselben Ebene liegt, parallel sind.

Denn schneidet man die drei Geraden durch eine vierte Gerade, so folgt nach den in Art. 21 erwähnten Relationen der Parallelismus der beiden Geraden.

### Drei Gerade in einer Ebene.

25. Sind drei Gerade in derselben Ebene gegeben, so sind nur folgende Lagen möglich:

a) Die Geraden schneiden sich in drei Puncten.

b) Die Geraden schneiden sich alle drei in einem Puncte.

c) Zwei von den Geraden sind parallel zu einander, werden aber von der dritten geschnitten.

d) Die Geraden sind alle drei parallel zu einander.

Man kann den Fall in a) als den allgemeinen auffassen. Aus a) folgt b), indem man alle drei Durchschnittspuncte zusammenfallen lässt; c), indem man einen; d), indem man alle drei Durchschnittspuncte in's Unendliche rückt.

### Von dem Ebenenbüschel.

26. Der Inbegriff aller durch eine gegebene Gerade gehenden Ebenen heisst ein Ebenenbüschel, die gegebene Gerade

*) Diese Umkehrung ist das elfte Axiom des Euclid.

heisst die **Axe**. Jede Ebene wird durch die Axe in zwei **Halbebenen** getheilt; der Inbegriff aller durch ein und dieselbe Axe gehenden Halbebenen heisst ein **Halbebenenbüschel**.

### Von dem Keile.

27. Zwei durch eine Axe gehende Halbebenen bilden einen **Keil**. Die Axe heisst die **Kante**, die durch die Kante gelegten Halbebenen werden die **Seiten** des Keils genannt.

Ein Keil wird bezeichnet, indem man die Kante mit zwei Buchstaben, etwa mit $AB$, und jede der Seiten mit einem Buchstaben, etwa $C$ und $D$, bezeichnet und die ersteren Buchstaben eingeklammert zwischen die beiden letzteren setzt; also durch

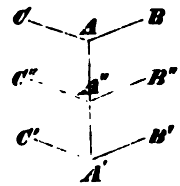
$$C(AB)D,$$

oder auch, indem man bloss die Kante oder bloss die Seiten bezeichnet, resp. durch

$$AB \text{ oder } C, D.$$

28. Errichtet man in einem beliebigen Puncte $A$ der Kante des Keils in den beiden Seiten Senkrechte $AB$ und $AC$ auf die Kante, so ist der Winkel $BAC$ von unveränderlicher Grösse für jede Lage des Punctes $A$; dieser Winkel wird das **Mass des Keiles** genannt.

Fig. 8.




Ist nämlich $A'$ ein beliebiger zweiter Punct der Kante, $A'B'$ und $A'C'$ zugehörigen Senkrechten in den Seiten, $A''$ die Mitte der Strecke $AA'$, $A''B''$ und $A''C''$ die zu $A''$ gehörigen Senkrechten in den Seiten, so kann man das Gebilde $B''A''C''B'A'C'$ so mit dem Gebilde $C''A''B''CAB$ zur Deckung bringen, dass die Geraden

$$A''B'', A''C'', A''A$$

des einen Gebildes, mit den Geraden

$$A''C'', A''B'', A''A'$$

des anderen Gebildes zusammenfallen. Dadurch fallen auch der Scheitel und die Schenkel des Winkels $BAC$ mit dem Scheitel und den Schenkeln des Winkels $C'A'B'$ zusammen.

29. Durch Anwendung des vorigen Art. werden die Untersuchungen, welche sich auf die Keile beziehen, auf die analogen der ebenen Winkel zurückgeführt.

Man kann daher die in Art. 17—20 gegebenen Sätze unmittelbar auf den Keil übertragen, indem man: Winkel, Scheitel, Schenkel; resp. mit Keil, Kante, Seite vertauscht. Insbesondere wird der rechte Keil erhalten, indem man durch eine in einer

Ebene gezogenen Geraden eine halbbegrenzte Ebene derart legt, dass die beiden dadurch erhaltenen Keile einander gleich werden. Die beiden Ebenen, welche einen rechten Keil bilden, heissen senkrecht aufeinander.

### Von den parallelen Ebenen.

30. Zwei Ebenen, welche sich nicht schneiden, heissen parallel zu einander. Der zwischen zwei parallelen Ebenen enthaltene Raum heisst ein Parallelraum oder eine Schicht.

Man kann von zwei parallelen Ebenen (analog den parallelen Geraden) auch sagen: Ihre Durchschnittslinie liegt im Unendlichen.

31. a) Zwei parallele Ebenen werden von einer dritten Ebene in parallelen Geraden geschnitten.

Denn wären die Durchschnittslinien nicht parallel, so müssten sie sich in einem Puncte schneiden, welcher zugleich in den beiden parallelen Ebenen liegen würde.

b) Durch einen Punct $M$ ausserhalb einer Ebene $\mathfrak{E}$ lässt sich nur eine parallele Ebene legen.

Denn wären durch $M$ zwei parallele Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ möglich, so würde eine durch $M$ gelegte Ebene, welche die drei Ebenen schneidet, dieselben in drei parallelen Geraden $a, a_1, a_2$ schneiden, von welchen $a_1$ und $a_2$ durch denselben Punct $M$ gehen; was nach 22 unmöglich ist.

c) Sind daher zwei Ebenen parallel zu einer dritten, so sind sie zu einander parallel.

### Gerade und Ebene.

32. Eine nicht in einer Ebene liegende Gerade kann die Ebene nur in einem Puncte schneiden. Eine ausserhalb einer Ebene liegende Gerade, welche der Ebene nicht begegnet, heisst parallel zur Ebene.

33. Ist eine Gerade mit einer Ebene parallel, so ist die Durchschnittslinie einer durch die Gerade gelegten Ebene mit der gegebenen Ebene parallel zur Geraden.

Beweis indirect.

Umgekehrt: Eine Gerade ist einer Ebene parallel, wenn sie zu einer in der Ebene liegenden Geraden parallel ist.

Beweis indirect.

34. Durch eine mit einer Ebene parallele Gerade lässt sich nur eine parallele Ebene legen. Jede in einer von zwei parallelen Ebenen gezogene Gerade ist parallel zur anderen Ebene. Zieht man daher durch einen Punct ausserhalb einer Ebene zwei

dieser parallele Gerade, so ist die durch dieselben gelegte Ebene parallel zur gegebenen Ebene.

35. Zwei Winkel in verschiedenen Ebenen, deren Schenkel paarweise parallel sind, sind einander gleich.

Es seien $(a, b)$ und $(a', b')$ die beiden Winkel, $A$ und $A'$ ihre Scheitel, wo $a \parallel a'$ und $b \parallel b'$ vorausgesetzt wird. Denkt man sich das Gebilde nochmals und mit dem gegebenen zur Deckung gebracht, so lassen sich nach 28 die beiden Ebenen $a, a'$ und $b, b'$ ohne Lagenveränderung längs der Geraden $A'A$ verschieben, so dass (wegen 21) $a'$ mit $a$ und $b'$ mit $b$ zusammenfällt.

### Gegenseitige Lage dreier Ebenen.

36. Für drei Ebenen sind folgende Lagen möglich:

a) Die drei Ebenen schneiden sich in drei Geraden;

b) In einer Geraden;

c) Zwei von den Ebenen sind parallel zu einander und werden von der dritten Ebene geschnitten;

d) Alle drei Ebenen sind parallel zu einander.

Zu a) und b). Je zwei nicht parallele Ebenen schneiden sich in einer Geraden, die dritte Ebene kann die beiden ersten in derselben oder in verschiedenen Geraden schneiden; in letzterem Falle können die drei Ebenen nur einen Punct gemeinsam haben. Von den Durchschnittslinien liegen immer je zwei in einer Ebene. Die drei Durchschnittslinien können auch parallel sein.

Zu c). Wird die eine von zwei parallelen Ebenen durch eine dritte Ebene in der Geraden $a$ geschnitten, so wird auch die andere Ebene in einer zweiten Geraden, etwa $b$, geschnitten.

Beweis indirect aus 31.

Man kann den Fall a) als den allgemeinen betrachten. Aus a) folgt b), indem man alle drei Gerade zusammenfallen lässt; c), indem man eine Gerade (die Durchschnittslinie der beiden parallelen Ebenen) in's Unendliche setzt; d), indem man alle drei Geraden in's Unendliche setzt.

37. Sind zwei von den Durchschnittslinien zu einander parallel, so ist die dritte parallel zu jeder der beiden ersten.

Denn wäre sie zu einer nicht parallel, so müsste sie mit dieser einen Punct gemeinsam haben, welcher als in jeder der drei Ebenen liegend in allen drei Geraden liegt, was der Voraussetzung widerspricht.

38. Umgekehrt:

a) Zwei durch ein Paar paralleler Geraden gelegte Ebenen schneiden sich in einer Geraden, welche zu jeder der beiden parallelen Geraden einzeln parallel ist.

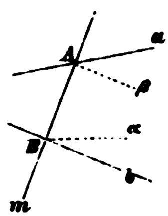
b) Sind zwei Gerade zu einer dritten nicht in derselben Ebene liegenden Geraden parallel, so sind sie untereinander parallel.

### Einander kreuzende Gerade.

39. Zwei Gerade, welche nicht in derselben Ebene liegen, können sich weder schneiden, noch zu einander parallel sein. Solche Gerade nennt man **einander kreuzende** Gerade.

a) Es seien zwei einander kreuzende Gerade $a$ und $b$ gegeben; schneidet man dieselben durch eine dritte Gerade $m$ in den Puncten $A$ und $B$, so kann man sich in der, durch den Punkt $A$ und die Gerade $b$ bestimmten Ebene durch den Punct $A$ eine Gerade $\beta$ parallel zur Geraden $b$ gezogen denken. Man erhält dadurch eine durch die Geraden $a$ und $\beta$ bestimmte Ebene $\mathfrak{E}$, welche der Geraden $b$ parallel ist.

Fig. 9.




b) Durch die Gerade $a$ ist nur eine einzige Ebene möglich, welche der Geraden $b$ parallel ist. Denn zieht man eine zweite Gerade $m'$, welche den beiden gegebenen Geraden in den Puncten $A'$ und $B'$ begegnet, so erhält man eine zweite Gerade $\beta' \parallel b$ und damit eine durch die Geraden $a$ und $\beta'$ bestimmte Ebene $\mathfrak{E}'$. Die drei Geraden $a$, $\beta$, $\beta'$ liegen in derselben Ebene, also ist die Ebene $\mathfrak{E}'$ mit der Ebene $\mathfrak{E}$ identisch.

c) Ebenso kann man nur **eine** durch die Gerade $b$ gelegte Ebene $\mathfrak{F}$ erhalten, welche der Geraden $a$ parallel ist.

d) Die beiden erhaltenen Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ sind zu einander parallel.

Zwei einander kreuzende Gerade bestimmen daher einen Parallelraum.

### Senkrechte Lagen von Geraden und Ebenen.

40. Auf einer Geraden $a$ ist in einem und demselben Puncte $A$ in einer Ebene $\mathfrak{E}$ eine einzige Senkrechte möglich; alle Geraden, welche in allen möglichen durch die Gerade $a$ gelegten Ebenen liegen und senkrecht im Puncte $A$ stehen, liegen in einer Ebene.

Eine Gerade, welche in dem Durchschnittspuncte zweier sich schneidenden Geraden einer Ebene senkrecht steht, steht daher auf allen durch den Durchschnittspunct in der Ebene gezogenen Geraden senkrecht; eine solche Gerade heisst **auf der Ebene senkrecht**.

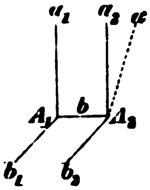
In einem Puncte einer Ebene existirt nur eine darauf senkrechte Gerade.

Von einem Puncte ausserhalb einer Ebene existirt nur eine darauf senkrechte Gerade.

Dass die Gerade $a$ auf der Ebene $\mathfrak{E}$ senkrecht steht, wird ebenfalls durch $a \perp \mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{E} \perp a$ bezeichnet.

41. a) Steht von zwei parallelen Geraden $a_1$ und $a_2$ die eine $a_1$ auf einer Ebene $\mathfrak{E}$ senkrecht, so steht auch die andere $a_2$ auf dieser Ebene senkrecht.

Fig. 10.



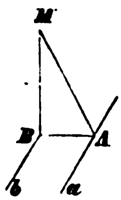

Denn treffen die Geraden $a_1$ und $a_2$ die Ebene $\mathfrak{E}$ in den Puncten $A_1$ und $A_2$, und zieht man die Gerade $A_1A_2 = b$ und durch $A_1$ und $A_2$ in der Ebene $\mathfrak{E}$ die Geraden $b_1$ und $b_2$ beliebig parallel zu einander, so folgt aus 21, dass die Gerade $a_2$ auf $b$; und aus 35, dass die Gerade $a_2$ auf $b_2$ senkrecht steht.

b) Stehen zwei Gerade auf einer Ebene senkrecht, so sind sie zu einander parallel.

Man beweist indirect, dass die beiden Geraden in derselben Ebene liegen. Legt man durch die eine Gerade, etwa $a_1$, und den Fusspunct $A_2$ der zweiten Geraden $a_2$ eine Ebene, so muss $a_2$ in dieser Ebene liegen, weil man sonst in dieser durch den Punct $A_2$ eine Gerade $a \parallel a_1$ ziehen könnte, welche nach dem vorigen Satze im Puncte $A_2$ auf der Ebene senkrecht wäre, was nach 40' unmöglich ist, da bereits $a_2 \perp \mathfrak{E}$ ist.

42. Ist in einer Ebene $\mathfrak{E}$ eine Gerade $a$ gegeben und zieht man von einem ausserhalb der Ebene liegenden Puncte $M$ eine Senkrechte auf die Ebene und von deren Fusspuncte $B$ eine Senkrechte $BA$ auf die Gerade $a$, so steht die Verbindungslinie $AM$ auf der Geraden $a$ senkrecht.

Fig. 11.




Man ziehe in der gegebenen Ebene durch den Punct $B$ eine Gerade $b \parallel a$. Da $b$ auf der durch die Puncte $A$, $B$, $M$ bestimmten Ebene senkrecht steht, so steht auch $a$ auf dieser Ebene, also auch auf der gegebenen Geraden $MA$ senkrecht.

Umgekehrt:

a) Zieht man $MB \perp \mathfrak{E}$, $MA \perp a$, so ist $BA \perp a$. Wäre nicht $BA \perp a$, so müsste etwa $BA' \perp a$, also auch $MA' \perp a$ sein; d. h. vom Puncte $M$ wären zwei Senkrechte auf die Gerade $a$ möglich.

b) Stehen die Geraden $MA$ und $BA$ auf der Geraden $a$ im Puncte $A$ senkrecht und ist $MB \perp BA$, so steht die Gerade $MB$ auf der Ebene $\mathfrak{E}$ senkrecht.

Denn die Gerade $b \parallel a$ steht auf der Ebene der Puncte $A, B, M$, also auch auf der Geraden $MB$ senkrecht u. s. w.

43. Steht eine Gerade $a$ auf einer von zwei parallelen Ebenen $A$ und $B$ senkrecht, so steht sie auch auf der zweiten senkrecht.

Man denke sich durch $a$ zwei Ebenen gelegt, welche die beiden Ebenen $A$ und $B$ in zwei Paaren von parallelen Geraden schneiden. Der Winkel der Geraden $a$ mit jeder dieser vier Geraden ist gleich einem Rechten.

44. Zwei Ebenen, welche auf derselben Geraden $a$ senkrecht stehen, sind parallel.

Denn wären sie nicht parallel, so müssten sie sich schneiden; verbindet man nun irgend einen Punct der Durchschnittslinie mit den Fusspuncten der Geraden $a$, so wären von diesem Puncte auf die Gerade $a$ zwei Senkrechte möglich.

45. Zwei parallele Ebenen bilden mit einer dritten Ebene gleiche Keile. Aus 31, a) und 41, a).

46. Stehen zwei Ebenen auf einander senkrecht, so folgt:

a) Zieht man durch irgend einen Punct $A$ der Durchschnittslinie der beiden Ebenen in der einen Ebene eine Senkrechte auf die Durchschnittslinie, so steht diese auf der Ebene senkrecht.

Man ziehe in der zweiten Ebene durch den Punct $A$ eine Gerade senkrecht auf die Durchschnittslinie, der Winkel der Geraden in den beiden gegebenen Ebenen ist ein Rechter u. s. w.

b) Zieht man durch irgend einen Punct der einen Ebene auf die Durchschnittslinie eine Senkrechte, so steht diese auf der zweiten Ebene senkrecht.

47. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht auch jede durch dieselbe gelegte Ebene senkrecht.

Man ziehe in der gegebenen Ebene durch den Fusspunct der Geraden eine Senkrechte auf die Durchschnittslinie der beiden Ebenen, u. s. w.

48. Die Durchschnittslinie zweier auf einer gegebenen Ebene $\mathfrak{E}$ senkrechter Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ steht auf der gegebenen Ebene $\mathfrak{E}$ senkrecht.

Man ziehe in der Ebene $\mathfrak{E}$, Senkrechte $b_1$ und $b_2$ auf die Durchschnittslinien $a_1$ und $a_2$ der Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ mit der Ebene $\mathfrak{E}$ und zwar in dem Durchschnittspunkte der Geraden $a_1$ und $a_2$. Dann ist nach 46, a) die Gerade $b_1$ auf der Ebene $\mathfrak{E}_1$ und die Gerade $b_2$ auf der Ebene $\mathfrak{E}_2$, also die Durchschnittslinie der Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ auf den Geraden $b_1$ und $b_2$ senkrecht.

47. Es existirt nur eine Gerade, welche zwei einander kreuzende Gerade rechtwinklig schneidet.

Denn legt man durch die beiden Geraden auf die durch sie bestimmten parallelen Ebenen senkrechte Ebenen, so schneiden sich letztere in einer Geraden, welche die beiden kreuzenden Geraden unter rechten Winkeln schneidet.

## Von den Projectionen.

48. Zieht man von einem gegebenen Mittelpuncte Strahlen nach allen Puncten eines Gebildes und schneidet man dieses Strahlenbüschel durch eine Fläche, so nennt man den Schnitt die **Projection** des Gebildes auf die Fläche.

Der Strahlenmittelpunct heisst das **Projectionscentrum**; die Fläche, auf welche die Projection geschieht, die **Projectionsfläche**.

Insofern die Projection aus einem Puncte als Strahlenmittelpunct geschieht, heisst diese Art der Projection die **centrale**.

Als Projectionsfläche wird gewöhnlich eine Ebene, die **Projectionsebene**, gewählt.

Ist das Projectionscentrum im Unendlichen, d. h. sind die Strahlen parallel zu einander, so erhält man die **parallele Projection**.

In diesem Falle ist für die Ausführung der Projection die Lage eines Strahles gegeben.

Stehen ausserdem die Strahlen auf der Projectionsebene senkrecht, so erhält man die **orthogonale** Projection.

Ein ebenes Gebilde und seine Projection auf eine andere Ebene von einem ausserhalb beider Ebenen befindlichen Projectionscentrum, sind die Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels mit den beiden Ebenen.

49. Sind zwei einander kreuzende Gerade gegeben, wovon die eine als **Projectionsaxe**, die andere als **Projectionslinie** betrachtet wird, so nennt man den Durchschnittspunct einer durch einen gegebenen Punct und die Projectionsaxe gelegten Ebene mit der Projectionslinie „die Projection des gegebenen Punctes aus der Projectionsaxe auf die Projectionslinie".

Ein System von Puncten wird durch ein Ebenenbüschel projicirt.

Die Projection einer Strecke, welche mit der Axe nicht in einerlei Ebene liegt, ist der Schnitt der Projectionslinie mit den Seiten des Keiles, welcher die Endpuncte jener Strecke projicirt.

Liegt eine Linie mit der Projectionsaxe in einerlei Ebene, so ist ihre Projection nur ein Punct.

Ist die Projectionsaxe im Unendlichen, so werden die projicirenden Ebenen zu einander parallel.

In diesem Falle ist für die Ausführung der Projection die Lage einer projicirenden Ebene gegeben.

Die projicirenden Ebenen können auch auf der Projectionslinie senkrecht stehen.

---

# Zweites Buch.

## Die einfachsten Gestalten und deren Congruenz, Symmetrie und Gleichheit.

---

## I. Ebene Figuren.

### Von den Vielecken im Allgemeinen.

50. Durch $n$ Puncte, von denen keine drei in derselben Geraden liegen, sind $\frac{n(n-1)}{2}$ Gerade bestimmt.

Denn aus jedem Puncte lassen sich zu den übrigen Puncten $(n-1)$ Gerade ziehen, also aus allen Puncten $n(n-1)$ Gerade, von denen immer je zwei zusammenfallen.

Unter einem vollständigen $n$ Ecke versteht man ein System von $n$ Puncten, von denen keine drei in derselben Geraden liegen, mit den $\frac{n(n-1)}{2}$ dadurch bestimmten Geraden, welche Seiten genannt werden.

Durch $n$ Gerade, von denen keine drei durch denselben Punct gehen, sind $\frac{n(n-1)}{2}$ Puncte bestimmt.

Denn jede Gerade schneidet die übrigen Geraden in $(n-1)$ Puncten, also alle Geraden schneiden sich in $n(n-1)$ Puncten, von denen immer je zwei zusammenfallen.

Unter einem vollständigen $n$ Seit versteht man ein System von $n$ Geraden, von denen keine drei durch denselben Punct gehen, mit den $\frac{n(n-1)}{2}$ dadurch bestimmten Puncten, welche Scheitel genannt werden.

51. Ein einfaches $n$ Eck wird erhalten, wenn man von den $n$ Puncten: den ersten mit dem zweiten, den zweiten mit dem dritten u. s. w. und den letzten mit dem ersten verbindet.

Analog ist die Bedeutung des einfachen $n$ Seits, als eines Systemes von $n$ Geraden, welche derart mit einander verbunden sind, dass jede derselben von der nächst folgenden und die letzte von der ersten begrenzt wird.

Im einfachen $n\,\substack{\text{Eck}\\ \text{Seit}}$ ist die Zahl der $\substack{\text{Seiten}\\ \text{Scheitel}}$ gleich der der $\substack{\text{Ecken}\\ \text{Seiten}}$. Ohne Rücksicht auf die Anzahl der $\substack{\text{Ecken}\\ \text{Seiten}}$ wird das einfache $n\,\substack{\text{Eck}\\ \text{Seit}}$ ein Viel $\substack{\text{Eck}\\ \text{Seit}}$ genannt.

Im vollendeten Zustande sind die beiden Figuren nicht zu unterscheiden; in diesem Falle wird der Name Vieleck oder Polygon gebraucht.

52. In jedem einfachen Polygone unterscheidet man *anliegende* und *gegenüberliegende* Stücke.

a) Zu jedem Scheitel oder Winkel bilden die Seiten, welche ihn bilden,

und, zu jeder Seite bilden die Scheitel oder Winkel, welche dieselbe zum gemeinsamen Schenkel haben, die *anliegenden* Stücke.

b) Zwei Stücke des Polygons, zwischen denen gleich viel Stücke des Umfanges liegen, heissen *gegenüberliegende* oder *Gegenstücke*.

c) Jede Gerade, welche zwei nicht aufeinander folgende Scheitel verbindet, heisst *Diagonale* oder *Nebenseite*.

d) Jeder Durchschnitt zweier nicht aufeinander folgender Seiten heisst ein *Nebenscheitel*.

Der Inbegriff aller Seiten eines Vielecks wird der *Umfang* oder *Perimeter* genannt.

Ein Vieleck heisst ein *gewöhnliches*, wenn sein Umfang sich nicht selbst schneidet.

Der von dem Umfange eines gewöhnlichen Vieleckes in der unendlichen Ebene, in welcher das Vieleck enthalten ist, abgegrenzte Flächentheil wird *Inhalt* des Vieleckes genannt.

Im Folgenden soll, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird, nur von gewöhnlichen Vielecken die Rede sein.

Der von je zwei aufeinander folgenden Seiten im Innern der Figur gebildete Winkel wird ein *Vielecks-Winkel* genannt.

Sind alle Winkel des Vieleckes hohle, so wird dasselbe ein *hohlwinkliges* genannt.

Die Verlängerung einer Seite bildet mit der anstossenden einen Winkel, welcher ein *Aussenwinkel* heisst.

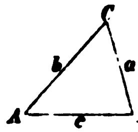
## Allgemeine Eigenschaften des Dreieckes.

53. Das Dreieck ist die einfachste geradlinige Figur; dasselbe ist durch drei Puncte, welche nicht in einer Geraden liegen, oder durch drei Gerade, welche sich nicht in demselben Puncte

schneiden, bestimmt. Das Dreieck ist das einzige Vieleck ohne Nebenscheitel und Nebenseiten.

Da im Dreiecke das Gegenstück einer Seite oder eines Winkels, resp. ein Winkel oder eine Seite ist, so kann man darauf folgende bequeme Bezeichnung gründen: Man bezeichnet die Winkel mit $A, B, C$, die gegenüberliegenden Seiten mit $a$, $b$, $c$. Das Dreieck selbst wird mit $\triangle\ ABC$ bezeichnet.

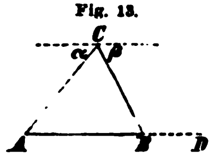
Fig. 12.




Von den Seiten des Dreiecks nennt man willkürlich eine die Grundlinie oder die Basis, die gegenüberliegende Ecke die Spitze oder den Scheitel des Dreiecks. Die Senkrechte von der Spitze auf die Grundlinie wird die Höhe genannt.

54. Die Summe der Winkel eines jeden Dreiecks ist gleich $2\,R$, d. h. gleich einem gestreckten Winkel.

Fig. 13.




Denn zieht man durch den Punct $C$ eine Parallele zur Gegenseite und bezeichnet die Winkel derselben mit den Seiten $b$ und $a$ resp. mit $\alpha$ und $\beta$, so ist $\alpha = A, \beta = B$. Nun ist

$$\alpha + C + \beta = 2\,R,$$

also

$$A + B + C = 2\,R.$$

55. Der Aussenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm nicht anliegenden Winkel des Dreiecks. Denn ist für den Scheitel $B$ die Gerade $BD$ die Verlängerung der Seite $AB$, also $DBC = B'$ der zugehörige Aussenwinkel, so folgt aus

$$B + B' = 2\,R, A + B + C = 2\,R$$
$$B' = A + C.$$

Zusatz. Sind ausserdem $A'$ und $C'$ die Aussenwinkel zu $A$ und $C$, so folgt aus

$$A + A' = 2\,R, B + B' = 2\,R, C + C' = 2\,R$$
$$A' + B' + C' = 4\,R,$$

d. h. die Summe der drei Aussenwinkel ist gleich vier Rechten.

56. In jedem Dreiecke kann höchstens ein rechter oder stumpfer Winkel vorkommen.

Von einem Puncte ausserhalb einer Geraden lässt sich auf diese nur eine Senkrechte ziehen. Denn wären zwei Senkrechte möglich, so erhielte man ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln.

Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heisst ein rechtwinkliges, ein Dreieck mit einem stumpfen Winkel heisst ein stumpfwinkliges Dreieck. Sind alle drei Winkel spitze, so wird das Dreieck ein spitzwinkliges genannt.

Im rechtwinkligen Dreiecke heisst die Gegenseite des rechten Winkels die Hypotenuse, jede der beiden anderen Seiten eine Kathete.

Sind in einem Dreiecke alle drei Seiten gleich, so heisst es ein gleichseitiges, sind zwei Seiten gleich, so heisst es ein gleichschenkliges Dreieck. Die beiden gleichen Seiten werden die Schenkel, die dritte Seite wird die Grundlinie genannt.

57. In jedem Dreiecke haben gleiche Seiten gleiche Gegenwinkel.

Denn ist im Dreiecke $ABC$ etwa $a = b$ und denkt man sich dasselbe Dreieck noch einmal als $A'B'C'$, so kann man letzteres so auf das erstere legen, dass die Winkel $C, C'$ sich decken und der Punct $B'$ auf den Punct $A$, der Punct $A'$ auf den Punct $B$ fällt. Es ist daher

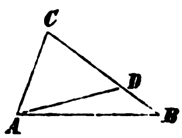
$$A = B.$$

Umgekehrt: In jedem Dreiecke haben gleiche Winkel gleiche Gegenseiten. Beweis analog, indem man die Seite $B'A'$ mit der Seite $AB$ sich decken lässt.

Zusatz. Im gleichseitigen Dreiecke ist jeder Winkel gleich $\frac{2}{3} R$.

58. a) In jedem Dreiecke hat die grössere von zwei Seiten den grösseren Gegenwinkel.

Fig. 14.




Es sei $BC > AC$, so mache man auf der Seite $BC$ die Strecke $CD = CA$ und ziehe die Gerade $AD$. Dann ist

$$\text{Winkel } CAD = CDA,$$

also $$A > CAD = CDA > B.$$

b) In jedem Dreiecke hat der grössere von zwei Winkeln die grössere Gegenseite.

Ist $A > B$ und wäre nicht $a > b$, so müsste entweder $a = b$ oder $a < b$ sein, was den beiden vorigen Sätzen widerspricht.

Folgerung. Die Senkrechte auf eine Gerade von einem ausserhalb derselben liegenden Puncte, bestimmt die kürzeste Entfernung des Punctes von der Geraden. Denn zieht man ausser der Senkrechten noch eine zweite Gerade, so entsteht dadurch ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Hypotenuse die längste Seite ist.

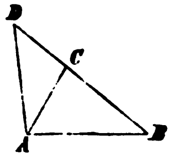
59. In jedem Dreiecke sind zwei Seiten zusammen grösser als die dritte.

Ist $AB$ die grösste Seite, so verlängere man eine der Seiten $AC$ oder $BC$ um die andere, etwa $BC$ um $CD = AC$.

Nun ist Winkel $DAB > DAC = ADC$, also

$$BD > AB, \text{ d. h. } AC + CB > AB.$$

Fig. 15.

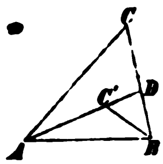


Folgerung. In jedem Dreiecke ist jede Seite grösser als der Unterschied der beiden übrigen.

Denn aus $a + b > c$ folgt $a > c - b$.

60. Haben zwei Dreiecke $ABC$ und $ABC'$ eine Seite $AB$ gemeinsam und liegt der dritte Scheitel $C'$ des zweiten Dreiecks innerhalb des Umfanges des ersten, so ist die Summe der den dritten Scheitel einschliessenden Seiten bei dem ersten Dreiecke grösser als bei dem zweiten, hingegen schliessen die Seiten des zweiten Dreiecks den grösseren Winkel ein.

Fig. 16.



Denn ist $D$ der Durchschnittspunct der Geraden $AC'$ und $BC$, so ist

a) $$AC + CD > AD$$
$$DB = DB$$
$$AC + CD + DB > AD + DB$$
oder $$AC + CB > AD + BD;$$
ebenso $$AD + BD > AC' + BC',$$
also $$AC + BC > AC' + BC'.$$

b) Ferner ist nach 55: Winkel $C' > D > C$.

### Congruenz der Dreiecke.

61. Da in einem Dreiecke drei Seiten und drei Winkel vorkommen, so kann man die Frage aufwerfen: Wie viele von diesen Stücken müssen zwei Dreiecke gleich haben, damit sie congruent sind?

Diese Frage wird durch folgende Congruenzsätze erledigt:

a) Sind in zwei Dreiecken eine Seite und die beiden anliegenden Winkel einzeln einander gleich, so sind sie congruent.

Ist in den Dreiecken $ABC$ und $A'B'C'$

$$AB = A'B',\ A = A',\ B = B',$$

und denkt man sich das Dreieck $A'B'C'$ so auf das Dreieck $ABC$ gelegt, dass die Seiten $AB$ und $A'B'$ zusammenfallen, so muss wegen $A = A'$ die Seite $A'C'$ auf die Seite $AC$ und wegen $B = B'$ die Seite $B'C'$ auf die Seite $BC$, also der Durchschnittspunct $C'$ auf den Punct $C$ fallen.

Zusatz. Da die Summe der drei Winkel eines Dreiecks gleich einem gestreckten ist, so kann man statt des einen anliegenden auch den gegenüberliegenden nehmen.

b) Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel einzeln einander gleich, so sind sie congruent.

Beweis wie in a).

c) Sind in zwei Dreiecken die drei Seiten einzeln einander gleich, so sind sie congruent.

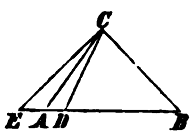
In diesem Falle lege man das Dreieck $A'B'C'$ so an das Dreieck $ABC$ an, dass die Seite $A'B'$ mit der Seite $AB$ zusammenfällt, die Spitze $C'$ auf die entgengegesetzte Seite von $AB$ fällt, etwa nach $C''$. Dann sind die beiden Dreiecke $CC''A$ und $CC''B$ gleichschenklig, also die Winkel an der Grundlinie gleich, und der Satz c) kann auf b) zurückgeführt werden.

d) Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten und der Gegenwinkel der grösseren einzeln einander gleich, so sind sie congruent.

Es sei in den Dreiecken $ABC$ und $A'B'C'$

$$AC > BC, AC = A'C', BC = B'C', B = B'.$$

Fig. 17.




Man lege das Dreieck $A'B'C'$ so auf das Dreieck $ABC$, dass die Seiten $BC$ und $B'C'$ zusammenfallen, dann fällt auch die Seite $B'A'$ in die Richtung von $BA$. Der Punct $A'$ muss daher auf der Geraden $AB$ liegen. Würde nun der Punct $A'$ nicht auf den Punct $A$ fallen, so müsste er entweder auf dem Segmente $AB$, etwa in $D$, oder ausserhalb desselben, etwa in $E$, liegen. Im ersten Falle wäre, da das gleichschenklige Dreieck $ADC$ nicht zwei stumpfe Winkel haben kann, der Aussenwinkel $CDB$ stumpf, im Dreiecke $DBC \cong A'B'C'$ läge dem grösseren Winkel $D$ die kleinere Seite gegenüber. Im zweiten Falle erhielte man, da der Winkel $A$ des Dreiecks $ABC$ spitz ist, ein gleichschenkliges Dreieck $EAC$ mit zwei stumpfen Winkeln.

Allgemein: Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen einzeln einander gleich sind, sobald die Gegenwinkel der anderen gleichzeitig entweder spitze, rechte oder stumpfe Winkel sind.

Beweis wie früher.

## Anwendung der Congruenzsätze.

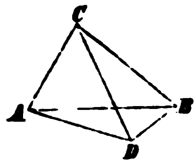
62. a) Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten einzeln einander gleich, die von ihnen eingeschlossenen Winkel ungleich, so liegt dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber.

Es sei in den Dreiecken $ABC$ und $A'B'C'$:

$$AC = A'C', BC = B'C', C > C'.$$

Man lege das Dreieck $A'B'C'$ so auf das Dreieck $ABC$, dass die Seiten $AC$ und $A'C'$ zusammenfallen, so muss wegen $C' > C$ die Seite $B'C'$ in den Winkel $C$ fallen, etwa nach $CD$ ($= C'B' = CB$).

Fig. 18.



Das Dreieck $DBC$ ist gleichschenklig, also die Winkel an der Grundlinie einander gleich. Nun ist Winkel $ADB > CDB = DBC > DBA$, also im Dreiecke $ABD$

$$AB > AD = A'B'.$$

b) Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten einzeln einander gleich, die dritten Seiten jedoch ungleich, so liegt der grösseren Seite der grössere Winkel gegenüber.

Ist in den Dreiecken $ABC$ und $A'B'C'$:

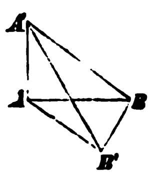
$$AC = A'C', BC = B'C', AB > A'B',$$

so ist auch $$C > C'.$$

Denn wäre nicht $C > C'$, so müsste entweder $C = C'$, also die beiden Dreiecke congruent, oder $C < C'$ sein, also (nach dem vorigen Satze) $AB < A'B'$ sein.

Zusatz. Schneidet eine Gerade eine Ebene, so ist der spitze Winkel, welchen die Gerade mit ihrer orthogonalen Projection auf die Ebene bildet, der kleinste Winkel unter allen, welche die Gerade mit den durch ihren Durchschnittspunct in der Ebene gezogenen Geraden bildet. Dieser Winkel heisst der **Neigungswinkel** der Geraden mit der Ebene.

Fig. 19.



Ist $AB$ die Projection von $A'B$, und zieht man durch $B$ eine zweite beliebige Gerade $BB' = BA$, so ist $A'B' > A'A$, also Winkel $A'BB' > A'BA$.

63. a) Zieht man von der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks eine Senkrechte auf die Grundlinie, so halbirt dieselbe die Grundlinie und den Winkel an der Spitze, und umgekehrt.

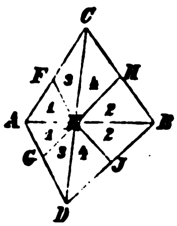
b) Beschreibt man über derselben Grundlinie zwei verschiedene gleichschenklige Dreiecke, so steht die Gerade, welche ihre Spitzen verbindet, auf der Grundlinie senkrecht und halbirt dieselbe.

## Gleichheit der Dreiecke.

64. Zwei Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind einander gleich.

Man lege das zweite Dreieck so an das erste, dass die gleichen Grundlinien in $AB$ zusammenfallen und die Spitzen $C$ und $D$ zu entgegengesetzten Seiten dieser Grundlinie fallen. Ist $E$ der Durchschnittspunct der Geraden $AB$ und $CD$, so folgt aus der Gleichheit der Höhen

Fig. 20.




$$CE = ED.$$

Zieht man aus $E$ die Geraden $EF \parallel AD$, $EG \parallel AC$, $EH \parallel BD$, $EJ \parallel BC$, so folgt die Congruenz der in der Figur mit denselben Ziffern bezeichneten Dreiecke, mithin durch Addition dieser Dreiecke die Gleichheit von $ABC$ und $ABD$.

Ebenso wird der Beweis geführt, wenn der Punct $E$ ausserhalb der Strecke $AB$ liegt.

Umgekehrt. Zwei gleiche Dreiecke von gleicher Höhe / Grundlinie haben gleiche Grundlinie / Höhe.

Beweis indirect.

## Allgemeine Eigenschaften des Vierecks.

65. Das Viereck ist das nächst einfachste Vieleck, dasselbe besitzt zwei Paare von Gegenseiten und Gegenwinkeln. Durch jede Diagonale zerfällt ein Viereck in zwei Dreiecke. Da die Summe der Winkel dieser beiden Dreiecke gleich ist der Summe der Winkel des Vierecks, so beträgt letztere vier Rechte.

Ein Viereck, in welchem zwei Gegenseiten einander parallel sind, heisst ein Trapez. Jede der parallelen Seiten wird Grundlinie, die Länge der Senkrechten, welche von einem Puncte der einen Grundlinie zur andern gezogen werden kann, wird Höhe des Trapezes genannt.

Ein Trapez, in welchem die nicht parallelen Seiten einander gleich sind, heisst ein Antiparallelogramm.

Ein Trapez, in welchem noch das zweite Paar von Gegenseiten parallel ist, heisst ein Parallelogramm.

66. Ein Parallelogramm wird durch jede seiner Diagonalen in zwei congruente Dreiecke getheilt.

Im Parallelogramme sind je zwei Gegenseiten und Gegenwinkel einander gleich.

Ein Parallelogramm, in welchem ein Winkel, also auch jeder der übrigen ein rechter ist, heisst ein rechtwinkliges oder Rechteck.

Da je zwei Höhen eines Trapezes mit den zugehörigen Abschnitten der Grundlinien ein Rechteck bestimmen, so folgt:

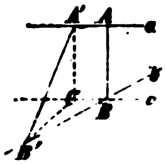
Alle Höhen eines Trapezes oder Streifens sind einander gleich.

Dasselbe gilt auch von dem Parallelraume: Alle Puncte einer jeden der beiden Ebenen haben von der anderen Ebene gleichen Abstand.

Dieser Abstand bestimmt zugleich die kleinste Entfernung zweier in den Ebenen liegenden einander kreuzenden Geraden $a$ und $b$.

Denn ist nach 49 die Gerade $AB \perp a$ und $b$, bedeutet $c$ die Durchschnittslinie der durch die Gerade $a$ auf die Ebene der Geraden $b$ senkrechten Ebene, so ist für zwei beliebige Puncte $A'$ und $B'$, wenn $A'C \perp c$ vorausgesetzt,

Fig. 21.




$$A'B' > A'C = AB.$$

Ein Parallelogramm, in welchem zwei anstossende Seiten einander gleich sind, heisst ein **Rhombus**.

Ein Rhombus mit einem rechten Winkel oder ein Rechteck, welches zugleich ein Rhombus ist, wird ein **Quadrat** genannt. In demselben sind alle Seiten einander gleich und jeder Winkel ist gleich einem Rechten.

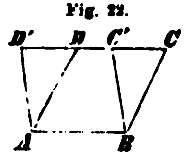
Im Parallelogramme halbiren sich die Diagonalen gegenseitig.

Umgekehrt: Ein Viereck, in welchem sich die Diagonalen gegenseitig halbiren, ist ein Parallelogramm.

### Gleichheit der Vierecke.

67. Zwei Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind einander gleich.

Fig. 22.




Man kann die beiden Parallelogramme immer so legen, dass die Grundlinien in $AB$ zusammenfallen, die gegenüberliegenden Seiten $CD$ und $C'D'$ also in dieselbe, zur Grundlinie $AB$ parallele, Gerade fallen. Addirt man zu $\triangle ADD' \cong \triangle BCC'$ das Trapez $ABC'D$, so erhält man

$$\text{Par. } ABCD = \text{Par. } ABC'D'.$$

Jedes Parallelogramm ist gleich einem Rechtecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe.

Umgekehrt. Zwei gleiche Parallelogramme von gleicher $\frac{\text{Höhe}}{\text{Grundlinie}}$ haben gleiche $\frac{\text{Grundlinie}}{\text{Höhe}}$.

Beweis indirect.

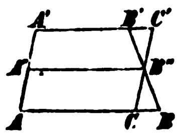
Sind $AB$ und $AD$ zwei im Puncte $A$ zusammenstossende Seiten eines Rechtecks, so wird dessen Fläche ebenso wie das Rechteck durch $AB \times AD$ und analog die des Quadrats über $AB$ durch $\overline{AB}^2$ bezeichnet.

Zusatz. Das Product $ab$ stellt auch die Masszahl der Fläche des Rechtecks dar, wenn $a$ und $b$ die Masszahlen der Seiten sind und als Flächeneinheit ein Quadrat, dessen Seite gleich der Längeneinheit ist, angenommen wird.

Daraus folgt: Die (Masszahl der) Fläche eines Dreiecks ist gleich dem halben Producte (der Masszahlen) der Grundlinie mit der Höhe.

68. Verbindet man die Mitte der nicht parallelen Seiten eines Trapezes durch eine Gerade, so ist die Länge dieser Verbindungslinie gleich der halben Summe der Längen der Grundlinien, und das Trapez gleich einem Parallelogramm, dessen Grundlinie diese Verbindungslinie und dessen Höhe die Höhe des Trapezes ist.

Fig. 22.



Es seien $A''$ und $B''$ die Mitten von $AA'$ und $BB'$. Wird durch $B''$ die Gerade $CC' \parallel AA'$ gezogen, so folgt aus:
$\triangle CBB'' \cong \triangle C'B'B''$, dass $CB = B'C'$ ist, also

$$AB = AC + CB = A''B'' + CB$$
$$A'B' = A'C' - B'C' = A''B'' - B'C'$$
$$AB + A'B' = 2A''B''.$$

Addirt man zur Fläche $ACB''B'A'$ die beiden Dreiecke $BCB''$ und $B'C'B''$, so erhält man den zweiten Theil des Satzes.

### Arithmetische Analogien.

69. Die in Art. 67 eingeführte Bezeichnung der Fläche eines Rechtecks liefert eine geometrische Darstellung der Sätze über das Product zweier Zahlen.

Setzt man für das Rechteck $ABCD$

$$AB = a, \; AD = b,$$

so stellt das Product $ab$ die Fläche desselben dar, und es ist

$$ab = ba.$$

Zieht man im Rechtecke $ABCD$ durch den Punct $E$ der Seite $AB$ die Gerade $EF \parallel AD$, so folgt

$$AB \times AD = AE \times AD + EB \times AD.$$

Setzt man der Kürze halber $AE = a$, $EB = b$, $AD = m$, so folgt aus der vorhergehenden Gleichung

$$(a + b)\, m = am + bm.$$

Setzt man $AB = a$, $EB = b$, so ist

$$am = (a - b)\, m + bm \text{ oder } (a - b)\, m = am - bm.$$

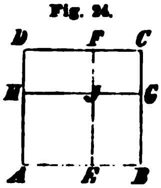
Durch zweimalige Anwendung erhält man:

$$(a+b)(m+n) = am + bm + an + bn$$
$$(a-b)(m-n) = am - bm - an + bn.$$

Setzt man $m = a$, $n = b$, so wird

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Fig. 24.



Die letzten Formeln lassen sich unmittelbar aus der beistehenden Figur ableiten, indem man im Quadrate $ABCD$ durch den Punct $J$ die Geraden $EF \parallel AD$, $HG \parallel AB$ zieht, und

1) $AE = BG = a, EB = GC = b$

setzt, wodurch die erste Formel, und

2) $AB = AD = a, EB = GC = b$

setzt, wodurch die zweite Formel erhalten wird.

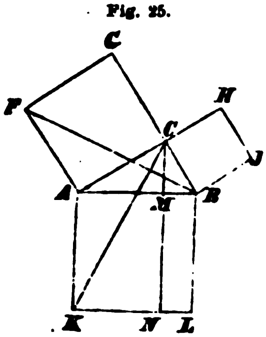
Die vorstehenden Sätze enthalten die geometrische Uebertragung der entsprechenden algebraischen Formeln.

### Der Pythagoräische Satz und seine Anwendungen.

70. In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der Katheten. Pythagoräischer Satz.

Beschreibt man über $AC$, $BC$, $AB$ Quadrate und zieht, $C = R$ vorausgesetzt, $CN \perp KL$, so folgt

Fig. 25.



$$\triangle ACK \sim \triangle AFB$$
$$ACK = \tfrac{1}{2}\, AK \times AM$$
$$AFB = \tfrac{1}{2}\, \overline{AC}^2,$$

also $AK \times AM = \overline{AC}^2$.

Ebenso $BL \times BM = \overline{BC}^2$.

Durch Addition erhält man

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.$$

Dieser Satz gilt auch umgekehrt, d. h. ist in einem Dreiecke $ABC$ das Quadrat der einen Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Denn denkt man sich ein rechtwinkliges Dreieck $A'B'C'$, in welchem $A'C' = AC$, $B'C' = BC$, $C' = R$ ist, so folgt aus der obigen Voraussetzung $A'B' = AB$; mithin ist

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C', \text{ also } C = C' = R.$$

71. a) Ist im Dreiecke $ABC$ der Winkel $A$ spitz und $CD \perp AB$, so folgt aus

$$\begin{aligned}\overline{CB}^2 &= \overline{DB}^2 + \overline{CD}^2,\ DB = AB - AD\\ \overline{CB}^2 &= (AB - AD)^2 + \overline{CD}^2\\ &= \overline{AB}^2 - 2AB \cdot AD + \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2\\ &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,AB \cdot AD.\end{aligned}$$

b) Ist im Dreiecke $ABC$ der Winkel $A$ stumpf und $CD \perp AB$, so folgt aus

$$\begin{aligned}\overline{CB}^2 &= \overline{DB}^2 + \overline{CD}^2,\ DB = DA + AB\\ \overline{CB}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\,AB\,.\,DA.\end{aligned}$$

Das Segment $AD$ stellt die Projection von $AC$ auf die Seite $AB$ dar. Nimmt man diese Projection positiv oder negativ, je nachdem sie auf die Seite $AB$ oder deren Verlängerung fällt, so kann man beide Sätze in einen zusammenfassen:

Das Quadrat einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten vermindert um das doppelte Product der einen Seite in die Projection der andern Seite auf diese.

c) Aus a) und b) folgt, wenn $C'$ die Mitte von $AB$ ist,

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2\,\overline{AC'}^2 + 2\,\overline{CC'}^2 = 2\,\overline{CC'}^2 + \tfrac{1}{2}\,\overline{AB}^2$$

d. h. die Summe der Quadrate zweier Seiten ist gleich dem doppelten Quadrate der Verbindungslinie der gemeinsamen Spitze dieser Seiten mit der Mitte der Gegenseite vermehrt um die Hälfte des Quadrates der Gegenseite.

72. a) Durch Anwendung des vorigen Satzes auf das Parallelogramm erhält man:

In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der vier Seiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen.

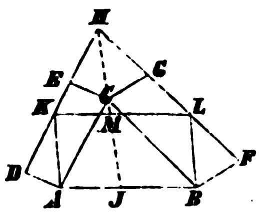
b) Ist $ABCD$ ein beliebiges hohlwinkliges Viereck, $AC$ und $BD$ dessen Diagonalen, $M$ und $N$ die Mitten derselben, so erhält man durch Anwendung des vorigen Satzes auf die Dreiecke $ACB$, $ACD$, $BDM$:

In jedem hohlwinkligen Vierecke ist die Summe der Quadrate der vier Seiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen vermehrt um das vierfache Quadrat der Verbindungslinie der Mitten der Diagonalen.

## Der Satz von Pappus.

73. Beschreibt man auswärts über zwei Seiten $AC$ und $BC$ eines Dreiecks $ABC$ beliebige Parallelogramme, so ist deren Summe gleich einem Parallelogramme, dessen aufeinanderfolgende Seiten mit der dritten Dreiecksseite $AB$ und der Verbindungslinie der gemeinsamen Spitze $C$ der beiden ersten Seiten mit dem Durchschnittspuncte $H$ der gegenüberliegenden Parallelogrammseiten gleich und parallel sind.

Fig. 26.




Denn beschreibt man über $AC$ und $BC$ die Parallelogramme $ACED$, $BCGF$, deren Seiten $DE$ und $FG$ sich in $H$ schneiden, so ist, wenn man $AK \parallel CH \parallel BL$ zieht, wo $K$ und $L$ resp. in den Geraden $DH$ und $FH$ liegen, und mit $M$, $J$ die Durchschnittspuncte der Geraden $HC$ mit $KL$ und $AB$ bezeichnet, wegen $CH = AK = JM = BL$,

$$\text{Par. } ACED = \text{Par. } ACHK = \text{Par. } AJMK,$$
$$\text{Par. } BCGF = \text{Par. } BCHL = \text{Par. } BJML.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man

$$\text{Par. } ACED + \text{Par. } BCGF = \text{Par. } ABLK.$$

Anmerkung. Dieser Satz wurde von Pappus aufgestellt. Derselbe gilt auch, wenn die beiden Parallelogramme nach einwärts beschrieben werden; das dritte Parallelogramm fällt dann nach auswärts. Beschreibt man jedoch ein Parallelogramm nach auswärts, das andere nach einwärts, so ist das dritte Parallelogramm gleich dem Unterschiede der beiden ersten. Man kann diese drei Fälle so zusammenfassen: Beschreibt man über die drei Seiten nach der angegebenen Regel Parallelogramme, so ist die Summe der aus- oder einwärts liegenden resp. gleich dem ein- oder auswärts liegenden.

Zusatz. Anwendung des Pappus'schen Satzes auf den Pythagoräischen.

Ist $\triangle ABC$ bei $C$ rechtwinklig, und beschreibt man über $AC$ und $BC$ Quadrate, so ist das Viereck $CEHG$ ein Rechteck, woraus folgt:

$$\triangle ABC \cong \triangle CHE \cong \triangle AKD,$$

also
$$AB = CH = AK = BL,$$

und Winkel

$$KAB = KAC + CAB = DAK + KAC = R.$$

Das Viereck $ABLK$ ist daher ein Quadrat. Der Satz des Pappus ist also eine Verallgemeinerung des Pythagoräischen Satzes.

**Eigenschaften der Vielecke.**

74. Zieht man von einem Scheitel eines hohlwinkligen $n$ Eckes die $n - 3$ möglichen Diagonalen, so zerfällt dadurch dasselbe in $n - 2$ Dreiecke.

Daraus folgt:

a) Die Winkelsumme eines hohlwinkligen $n$ Eckes beträgt $2(n - 2)R = 2n - 4$ Rechte.

Die Summe der Aussenwinkel eines hohlwinkligen $n$ Eckes beträgt 4 Rechte. Denn der Aussenwinkel und der anliegende Vielecks-Winkel machen einen gestreckten.

b) Zwei hohlwinklige Vielecke sind congruent, wenn sie aus gleich vielen, einzeln und in derselben Ordnung einander congruenten Dreiecken zusammengesetzt sind.

c) Zur Congruenz zweier hohlwinkliger $n$ Ecke ist daher im Allgemeinen die Gleichheit von $2n - 3$ von einander unabhängigen Stücken erforderlich.

Denn das Vieleck zerfällt durch die obigen $n - 3$ von einem Scheitel gezogenen Diagonalen in $n - 2$ Dreiecke, von welchen (zu Folge der Congruenzsätze) das erste durch drei, jedes der übrigen $n - 3$ Dreiecke durch zwei Stücke bestimmt ist. Die Anzahl der von einander unabhängigen gegebenen Stücke beträgt daher:

$$N = 3 + 2(n - 3) = 2n - 3.$$

Für $n = 4$ ist $N = 5$; d. h.:

Ein Viereck ist durch fünf von einander unabhängige Stücke bestimmt.

Zusatz. Wie sich für die besonderen Arten von Dreiecken die erforderlichen drei Stücke verringern, ebenso gilt dasselbe für die besonderen Arten von Vielecken.

Z. B. Ein Trapez erfordert nur vier Stücke, da zwei Gegenseiten parallel sind.

Ein Parallelogramm erfordert nur drei Stücke u. s. w.

Ein Vieleck, in welchem alle Seiten und Winkel einander gleich sind, heisst ein regelmässiges Vieleck. Ein solches ist durch eine Seite und die Angabe der Seitenzahl bestimmt.

**Eigenschaften bezüglich eines Kreises.**

75. Die Kreislinie ist nach Art. 9 eine krumme Linie, deren sämmtliche Puncte von einem innerhalb derselben gelegenen

Puncte gleich weit entfernt sind. Man kann eine Kreislinie erzeugen, indem man in einer Ebene eine Strecke um ihren als fest gedachten Anfangspunct so lange in derselben Richtung dreht, bis sie in ihre ursprüngliche Lage kommt.

Die Kreislinie und die von ihr abgegrenzte Kreisfläche werden gewöhnlich mit dem Namen „Kreis“ bezeichnet.

Jedes Stück des Umfanges wird ein Bogen, jede Strecke zwischen zwei Puncten des Umfanges eine Sehne genannt.

Jedes der beiden Stücke, in welche der Kreis durch eine Sehne getheilt wird, heisst ein Abschnitt (Segment).

Jeder Durchmesser theilt den Kreis in zwei congruente Segmente.

Durch zwei Halbmesser wird ein Kreis in zwei Stücke getheilt, welche man Kreisausschnitte (Sectoren) nennt. Durch zwei aufeinander senkrechte Durchmesser wird der Kreis in vier congruente Sectoren, welche Viertelkreise (Quadranten) heissen, getheilt.

76. Ist die Entfernung eines Punctes vom Mittelpuncte eines Kreises grösser, ebenso gross oder kleiner als dessen Halbmesser, so liegt der Punct ausserhalb, in dem Kreisumfange oder innerhalb desselben.

Eine unbegrenzte Gerade, welche den Umfang eines Kreises einmal schneidet, schneidet ihn nochmals.

Denn wenn die Gerade den Umfang des Kreises schneidet, so muss sie aus dem Aeusseren in das Innere des Kreises gehen, und da die Gerade unbegrenzt, hingegen die Kreislinie eine geschlossene Linie ist, aus dem begrenzten Innern in das unbegrenzte Aeussere übergehen.

77. Ist der Abstand einer Geraden vom Mittelpuncte eines Kreises grösser, eben so gross oder kleiner als dessen Halbmesser, so trifft die Gerade den Kreis gar nicht, in einem Puncte oder schneidet ihn in zwei Puncten.

Die beiden ersten Fälle sind für sich klar.

Eine Gerade, welche den Kreisumfang nur in einem Puncte trifft, heisst eine Berührungslinie (Tangente).

Im letzten Falle werden, wenn $O$ der Mittelpunct des Kreises und $OA$ der Abstand ist, die Abstände der Puncte der Geraden zu beiden Seiten von $A$, von der Grösse von $OA$ an fortwährend stetig wachsen, also beiderseits einmal die Grösse des Radius erreichen, d. h. die zugehörigen Puncte im Umfange des Kreises liegen.

Aus dem Beweise folgt noch:

a) Die Senkrechte im Endpuncte eines Halbmessers ist eine Tangente.

Umgekehrt: Zieht man im Berührungspuncte auf die Tangente eine Senkrechte, so geht diese durch den Mittelpunct.

b) Jede Sehne wird von ihrer Abstandslinie halbirt. In der Senkrechten auf der Mitte einer Sehne liegt der Mittelpunct.

c) Eine Gerade kann einen Kreis nur in zwei Puncten schneiden.

78. Der Winkel, welchen die beiden Radien eines Kreisausschnittes mit einander einschliessen, heisst ein Mittelpunctswinkel (Centriwinkel).

Für einen Kreisausschnitt, welcher kleiner als ein Halbkreis ist, gelten folgende Sätze:

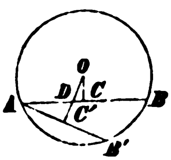
a) In demselben Kreise haben gleiche Bögen gleiche Mittelpunctswinkel und gleiche Sehnen.

b) In demselben Kreise entspricht dem grösseren Bogen der grössere Mittelpunctswinkel und auch die grössere Sehne.

c) Gleichen Sehnen entsprechen gleiche Abstände vom Mittelpuncte.

d) Der grösseren Sehne entspricht der kleinere Abstand.

Fig. 27.




Es sei $AB > AB'$, $OC \perp AB$, $OC' \perp AB'$, $O$ der Mittelpunct des Kreises.

Da die Senkrechte $OC'$ den Winkel $AOB'$ halbirt, so liegt sie im Innern des Winkels $AOB$, begegnet also der Sehne $AB$ etwa in $D$. Nun ist $OC' > OD > OC$.

Der Durchmesser ist daher die grösste Sehne.

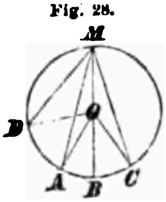
Diese Sätze gelten auch, wie man leicht indirect beweist, umgekehrt.

Zusatz. Zieht man von einem Puncte ausserhalb eines Kreises Strahlen, so bestimmt der durch den Mittelpunct gehende die grösste Sehne. Je zwei gegen diesen Strahl gleich geneigte Strahlen bilden gleiche Sehnen.

Die beiden von einem Puncte an den Kreis gezogenen Tangenten haben gleiche Länge.

79. Ein Winkel, dessen Scheitel im Umfange eines Kreises liegt und dessen Schenkel Sehnen sind, heisst ein Umfangswinkel (Peripheriewinkel).

Fig. 28.




Der Peripheriewinkel ist gleich der Hälfte des Centriwinkels, welcher auf demselben Bogen aufsteht.

Beweis. a) Ist der eine Schenkel ein Durchmesser, so folgt aus dem gleichschenkligen Dreiecke $AOM$

$$AOB = 2AMB.$$

b) Ist der gegebene Winkel $= AMC$,

c) „ „ „ „ $AMD$,

so erhält man den Beweis resp. durch Addition oder Subtraction zweier Winkel wie in a).

Zusätze. a) Steht ein Peripheriewinkel auf den Endpuncten eines Durchmessers auf, so heisst er ein Winkel im Halbkreis; derselbe ist gleich einem Rechten.

b) Der Peripheriewinkel ist ein spitzer oder stumpfer, je nachdem der Bogen, auf dem er steht, kleiner oder grösser als der halbe Umfang ist.

c) Alle Peripheriewinkel über demselben Bogen, deren Scheitel auf derselben Seite der Sehne liegen, welche die Schenkel umfassen, d. h. die in demselben Abschnitte liegen, sind einander gleich.

d) Zwei Peripheriewinkel, welche in entgegengesetzten Abschnitten liegen, deren Scheitel also auf entgegengesetzten Seiten der Sehne, welche die Schenkel umfassen, liegen, ergänzen sich zu einem gestreckten Winkel: denn die Summe der entsprechenden Centriwinkel ist gleich vier Rechten.

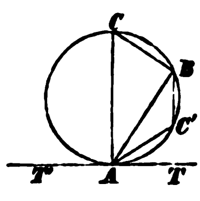
80. a) Zwei parallele Sehnen $AB$ und $A'B'$ schneiden zwischen sich gleiche Bögen $AA'$ und $BB'$ ab.

b) Der Winkel, welcher von zwei sich schneidenden Sehnen $AB$ und $A'B'$ gebildet wird, ist gleich der Summe oder der Differenz der Peripheriewinkel, welche die von den Sehnen abgeschnittenen Bögen bestimmen, je nachdem der Durchschnittspunct der Sehnen innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt.

Man ziehe $AB'$, so folgt a) unmittelbar; b) aus 55.

81. Der Winkel, welchen eine Tangente mit einer durch den Berührungspunct gezogenen Sehne bildet, ist gleich dem Peripheriewinkel über dem Bogen, welchen die Sehne bestimmt.

Fig. 29.




Es sei $AT$ eine Tangente im Puncte $A$. Ist $AC$ der Durchmesser durch $A$, mithin $ABC = R$, so folgt aus

$$C + CAB = R,\ CAB + BAT = R,$$
$$C = BAT.$$

Ferner ist

$$C + C' = 2R,\ BAT + BAT' = 2R,$$

mithin $C' = BAT'$.

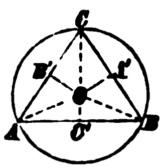
## Ein- und umschriebene Vielecke.

82. Ein Vieleck, dessen Seiten Sehnen / Tangenten eines Kreises sind, heisst ein dem Kreise einbeschriebenes / umgeschriebenes Vieleck, oder kurz ein Sehnen- / Tangenten- Vieleck.

Die drei Senkrechten in den Mitten der Dreiecksseiten schneiden einander in demselben Puncte, der von den drei Ecken gleichweit entfernt ist.

Sind $A', B'$ die Mitten zweier Dreiecksseiten, so schneiden sich die Senkrechten $OA' \perp BC$

Fig. 30.




und $OB' \perp AC$ in einem Puncte $O$.

Aus

$\triangle AB'O \cong CB'O$ folgt $AO = CO$

Aus

$\triangle BA'O \sim CA'O$ „ $BO = CO$

also

$$AO = BO.$$

Verbindet man die Mitte $C'$ der dritten Seite mit $O$, so folgt

Winkel $OC'A = OC'B = R$.

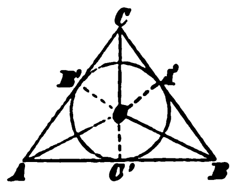
Ein aus dem Puncte $O$ mit dem Radius $AO = BO = CO$ beschriebener Kreis geht durch die drei Ecken des Dreiecks.

Jedem Dreiecke lässt sich ein Kreis umschreiben.

Die drei Geraden, welche die Winkel eines Dreiecks halbiren, schneiden einander in demselben Puncte, der von den drei Seiten gleichweit entfernt ist.

Die Halbirungslinien zweier Winkel $A$ und $B$ schneiden sich in einem Puncte $O$.

Fig. 31.




Man ziehe von $O$ aus Senkrechte $OA', OB', OC'$ auf die Seiten des Dreiecks.

Aus

$\triangle AC'O \cong AB'O$ folgt $C'O = B'O$

Aus

$\triangle BC'O \sim BA'O$ „ $C'O = A'O$

also $\therefore$ $B'O = A'O$.

Verbindet man $O$ mit $C$, so folgt

Winkel $OCB' = OCA'$.

Ein aus dem Puncte $O$ mit dem Radius $A'O = B'O = C'O$ beschriebener Kreis berührt die drei Seiten des Dreiecks.

In jedes Dreieck lässt sich ein Kreis einbeschreiben.

Zusatz. Halbirt man zwei Aussenwinkel und den gemeinsamen Gegenwinkel eines Dreiecks, so schneiden sich die Halbirungslinien in einem Puncte, welcher ebenfalls von den drei Seiten gleichweit entfernt ist. Man erhält auf diese Art drei weitere Berührungskreise, welche man äussere Berührungskreise nennt, während der obige Kreis der innere Berührungskreis genannt wird.

83. In jedem Sehnenvierecke sind die Summen der gegenüberliegenden Winkel einander gleich. Diese Summe ist $= 2\,R$.

Beweis aus 79, d).

Umgekehrt: Sind in einem Vierecke die Summen der gegenüberliegenden Winkel gleich, so ist dasselbe ein Sehnenviereck.

Beweis indirect. Beschreibt man einen Kreis, welcher durch drei Spitzen des Vierecks geht, so muss dieser durch die vierte gehen, weil sonst ein Aussenwinkel eines Dreiecks gleich einem innern wäre.

In jedem Tangentenvierecke sind die Summen der gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

Beweis aus 78, Zusatz.

Umgekehrt: Sind in einem Vierecke die Summen der gegenüberliegenden Ssiten gleich, so ist dasselbe ein Tangentenviereck.

Beweis indirect. Beschreibt man einen Kreis, welcher drei Seiten des Vierecks berührt, so muss dieser die vierte berühren, weil sonst eine Seite des Dreiecks gleich dem Unterschiede der beiden andern wäre.

84. Allgemein: Bezeichnet man in jedem hohlwinkligen Vielecke die Scheitel und Winkel mit $A_1, A_2, A_3, \ldots$ die Länge der Seiten $A_1 A_2, A_2 A_3, \ldots.$ mit $a_1, a_2, a_3, \ldots.$ so ist in dem, einem Kreise

einbeschriebenen — umgeschriebenen

Vielecke von gerader Seitenanzahl

$$A_1 + A_3 + \cdots + A_{2n-1} = A_2 + A_4 + \cdots + A_{2n}\,.$$

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}\,.$$

Bei ungerader Seitenanzahl zerlege man

den letzten Winkel $A_{2n-1}$ durch einen Durchmesser in zwei Theile $A'_{2n-1}$ und $A''_{2n-1}$, welche resp. die vorletzte und letzte Seite zum andern Schenkel haben; dann ist

$$A_1 + A_3 + \cdots + A'_{2n-1} = A_2 + A_4 + \cdots + A''_{2n-1}\,.$$

Denn die Summe der Bögen, auf welchen die Winkel aufstehen, ist für beide Summen gleich.

die letzte Seite $a_{2n-1}$ im Berührungspuncte in zwei Theile $a'_{2n-1}$ und $a''_{2n-1}$, welche so auf einander folgen, wie die Seiten gezählt werden; dann ist

$$a_1 + a_3 + \cdots + a'_{2n-1} = a_2 + a_4 + \cdots + a''_{2n-1}\,.$$

Der Beweis wird so wie beim Tangentenvierecke geführt.

85. Jedem regelmässigen Vielecke lässt sich ein Kreis einschreiben und umschreiben.

Halbirt man zwei an einer Seite liegende Vieleckswinkel, so ist der Durchschnittspunct $O$ der Halbirungslinien der Mittelpunct des ein- und umschriebenen Kreises.

Denn die Geraden von $O$ nach den Spitzen des Vielecks halbiren die Winkel und sind von gleicher Länge, woraus dann noch folgt, dass auch die Abstände des Punctes $O$ von den Seiten des Vielecks gleich sind.

## Gegenseitige Lage zweier Kreise.

86. Zwei Kreise in einer Ebene liegen entweder ganz ausserhalb einander, oder der eine ganz innerhalb des andern, oder ein jeder zum Theil ausserhalb, zum Theil innerhalb des andern.

Zwei Kreise, welche denselben Mittelpunct haben, heissen concentrisch.

Wenn der eine ganz $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{ausserhalb}}{\text{innerhalb}}$ des andern liegende Kreis mit diesem irgendwo zusammenstösst, so berührt er ihn daselbst von $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{aussen.}}{\text{innen.}}$

Liegt jeder der beiden Kreise zum Theil ausserhalb oder innerhalb des andern, so schneiden die beiden Kreislinien einander.

87. Zwei Kreislinien schneiden sich in zwei Puncten.

Denn, wenn die eine Kreislinie die andere schneidet, so muss sie (als geschlossene Linie) vom Innern derselben wieder ins Aeussere treten, d. h. die zweite Kreislinie nochmals schneiden.

Dass die beiden Kreislinien sich nicht in einem dritten Puncte schneiden können, geht aus Folgendem hervor:

Wären $A$, $B$, $C$ die drei Durchschnittspuncte, so müssten sich die Mittelpuncte der beiden Kreise auf der Geraden befinden, welche in der Mitte von $AB$ senkrecht gezogen würde. Ebenso müssten sich die Mittelpuncte der beiden Kreise auf der in der Mitte von $BC$ errichteten Senkrechten befinden. In dem Durchschnittspuncte der beiden Senkrechten müsste nun der Mittelpunct beider Kreise sein. Die beiden Kreise hätten daher denselben Mittelpunct gemeinsam, d. h. wären concentrisch.

88. Ist $a$ die Entfernung der Mittelpuncte zweier Kreise, $r$ und $r'$ deren Halbmesser, dabei $r > r'$ vorausgesetzt, so begegnen die beiden Kreise einander:

a) in zwei Puncten, wenn

$$r - r' < a < r + r';$$

b) in einem Puncte, wenn

$$a = r + r' \text{ oder } a = r - r';$$

c) in keinem Puncte, wenn

$$a > r + r' \text{ oder } a < r - r' \text{ ist.}$$

Für $a = r + r'$ berühren sich die beiden Kreise von aussen, für $a = r - r'$ von innen.

Beweise:

Zu a) Sind $O$ und $O'$ die Mittelpuncte der beiden Kreise, $A'$ und $B'$ die Puncte, in welchen der Kreis um $O'$ der unbegrenzten Geraden $OO' = a$ begegnet, wobei $A'$ als der dem Puncte $O$ nähere Punct vorausgesetzt wird, so ist:

1) $OA' = a - r'$; wegen $a < r + r'$ ist $OA' < r$, d. h. der Punct $A'$ liegt innerhalb des Kreises $O'$;

2) $OB' = a + r'$; wegen $a > r - r'$ ist $OB' > r$, d. h. der Punct $B'$ liegt ausserhalb des Kreises $O$. Der Kreis um $O'$ liegt daher theils ausserhalb, theils innerhalb des Kreises um $O$; er schneidet daher denselben in zwei Puncten.

Zu b) Man beweist indirect, dass ausser dem Berührungspuncte kein Punct des zweiten Kreises im Umfange des ersten liegen kann.

Zu c) Würden die beiden Kreise einen Punct $M$ gemeinsam haben, so wäre für denselben $OM = r$, $O'M = r'$, also:

1) $OM + O'M > OO'$; $r + r' > a$, was $r + r' < a$ widerspricht;

2) $OM - O'M < OO'$; $r - r' < a$, was $r - r' > a$ widerspricht.

Im ersten Falle liegt der eine Kreis ganz ausserhalb des andern, im letzten Falle liegt der kleinere Kreis ganz innerhalb des Umfanges des grösseren.

Zusätze.

a) Die Gerade, welche die Mittelpuncte zweier sich berührender Kreise verbindet, geht durch den Berührungspunct.

b) Die Tangente im Berührungspuncte an den einen Kreis berührt auch den andern.

c) Unter dem Winkel zweier in einem Puncte sich schneidender Kreise oder Kreisbögen, versteht man den Winkel der beiden in einem Durchschnittspuncte an die Kreise gezogenen Tangenten. Ist der Winkel ein Rechter, so schneiden sich die beiden Kreise rechtwinklig.

## Aufgaben.

89. Man nennt eine Aufgabe der ebenen Geometrie gelöst, wenn sie auf die beiden Fundamentalaufgaben: 1) „Durch zwei Puncte eine Gerade zu ziehen und über einen oder beide Endpuncte hinaus zu verlängern; 2) mit einem gegebenen Halbmesser aus einem gegebenen Puncte als Mittelpunct einen Kreis zu beschreiben," zurückgeführt ist. Bei der wirklichen Ausführung

dieser beiden Aufgaben in einer gegebenen Ebene (Papierfläche) bedient man sich für 1) des Lineals, für 2) des Zirkels. Die Spitzen des letzteren stellen zwei Puncte unveränderlichen Abstandes dar.

90. Jede Aufgabe besteht aus drei Theilen:

1) der Angabe der Aufgabe;

2) der Construction, d. i. Zurückführung der zu construirenden Figur auf die obigen Fundamentalaufgaben;

3) dem Beweise, d. h. dem Nachweise, dass die gelöste Aufgabe wirklich die in 1) geforderten Eigenschaften besitze.

Sind diese drei Theile durchgeführt, so kann man noch nach den Bedingungen fragen, unter welchen die Aufgabe möglich ist. Die Angabe dieser Bedingungen pflegt man als einen vierten Theil zu betrachten. Man nennt ihn die **Determination** der Aufgabe.

Für die Auflösung einer Aufgabe ist es meist sehr vortheilhaft, die Aufgabe als gelöst zu betrachten, also eine Figur zu construiren, in welcher das zu Vollbringende als vollbracht vorausgesetzt wird, und aus dieser Figur den Zusammenhang zwischen den unbekannten und bekannten, d. i. gegebenen Stücken zu erforschen, um in Folge dieser Erkenntniss von den gegebenen Stücken zu den gesuchten zu gelangen.

Man nennt diesen Vorgang die (geometrische) **Analysis** der Aufgabe.

Betrachtet man die Analysis und die Determination als Bestandtheile einer Aufgabe, so besteht dieselbe aus fünf Theilen, welche in folgender Ordnung auf einander folgen:

1) Angabe oder Ausspruch der Aufgabe,
2) Analysis,
3) Construction,
4) Beweis,
5) Determination.

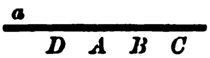
92. Eine Aufgabe heisst eine **bestimmte**, wenn sich aus den gegebenen Angaben nur **eine** oder eine gewisse im vorhinein bestimmte Anzahl von Figuren construiren lässt. Sind hingegen die Bedingungen derart, dass die Anzahl der Figuren unbegrenzt ist, so heisst die Aufgabe eine **unbestimmte**. In diesem Falle sind zu wenig Bedingungen vorhanden, als dass die Aufgabe eine bestimmte wäre. **Ueberbestimmt** heisst eine Aufgabe dann, wenn zu viele Bedingungen vorhanden sind, so dass sich im Allgemeinen keine Figur finden lässt, welche den gegebenen Bedingungen Genüge leistet.

### Bestimmte Aufgaben.

93. Auf einer Geraden $a$, von einem gegebenen Puncte $A$ aus, eine gegebene Strecke abzuschneiden.

Man beschreibe von $A$ aus mit der gegebenen Strecke als Halbmesser einen Kreis, welcher der Geraden $a$ in den Puncten $C$ und $D$ begegnet, so genügt jeder der Abschnitte $AC$ oder $AD$ der Aufgabe.

Fig. 32.




Ist $B$ ein beliebiger Punct der Geraden $a$, $C$ der ihm nähere, $D$ der ihm entferntere Punct, so ist

$$DB = DA + AB$$
$$CB = AB - AC,$$

durch welche Formeln die Addition und Subtraction zweier Strecken $AB$ und $DA = AC$ gelöst ist.

94. Ein Dreieck zu beschreiben, dessen drei Seiten gegeben sind.

Analysis. Ist $ABC$ das gesuchte Dreieck, $AB$ die eine Seite, so ist der Punct $C$ ein Durchschnittspunct der beiden mit den Radien $AC$ und $BC$ beschriebenen Kreise.

Auflösung. Auf einer Geraden nehme man die Seite $AB$ und beschreibe aus $A$ mit der zweiten Seite und aus $B$ mit der dritten Seite als Halbmesser Kreise. Jeder der beiden Durchschnittspuncte genügt der Aufgabe.

Determination. Von den drei Geraden als Seiten müssen je zwei zusammen grösser sein, als die dritte.

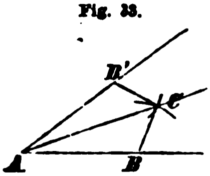
Anwendungen. a) An eine Gerade im Puncte $A$ als Scheitel einen gegebenen Winkel zu construiren.

Man verbinde zwei beliebige Puncte auf den Schenkeln des gegebenen Winkels mit einander und construire nach der vorigen Aufgabe über der gegebenen Geraden mit dem Anfangspuncte $A$ ein congruentes Dreieck, dessen Winkel in $A$ dann gleich dem gegebenen ist.

b) Durch einen gegebenen Punct $C$, ausserhalb einer Geraden $AB$, eine zu dieser parallele zu ziehen.

Man construire über $BC$ ein dem Dreiecke $ABC$ congruentes $BCD$, so ist $CD \parallel AB$.

Fig. 33.




95. Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Analysis. Es sei $BAB'$ der gegebene Winkel, $AC$ die Halbirungslinie. Ist $AB = AB'$ und verbindet man einen beliebigen Punct $C$ der Halbirungslinie mit $B$ und $B'$, so ist $\triangle ABC \cong \triangle AB'C$, also $BC = B'C$.

Construction. Man mache beliebig $AB = AB'$, beschreibe aus $B$ und $B'$ mit einem beliebigen Halbmesser Kreise, welche sich in $C$ schneiden, so ist Winkel $BAC = B'AC$.

Beweis. $\triangle ABC \simeq \triangle AB'C$, also der Winkel bei $A$ halbirt.

Determination. Die Aufgabe ist unter allen Bedingungen möglich.

Folgerungen: a) Ist der Winkel bei $A$ ein gestreckter, so ist $AC \perp AB$, wodurch also die Aufgabe gelöst ist: In einem gegebenen Puncte $A$ einer Geraden $AB$ auf diese eine Senkrechte zu ziehen.

b) Bestimmt man in diesem Falle nach derselben Construction auf der andern Seite der Geraden $AB$ den Punct $C'$, so erhält man dadurch noch die Lösungen der folgenden Aufgaben:

1) Eine gegebene Strecke $BB'$ zu halbiren.

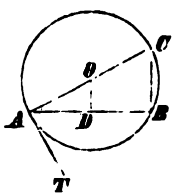
2) Von einem Puncte $C$ ausserhalb einer Geraden $BB'$ auf diese eine Senkrechte zu ziehen.

96. a) Von einem gegebenen Kreise einen Bogen abzuschneiden, der einen gegebenen Winkel als Umfangswinkel umfasst.

b) Ueber einer gegebenen Strecke als Sehne einen Bogen zu beschreiben, der einen gegebenen Winkel als Umfangswinkel umfasst.

Analysis. Zu a). Es sei der Umfangswinkel $ACB$ über der Sehne $AB$ gleich dem gegebenen Winkel. Zieht man in $A$ eine Tangente $AT$, so ist $TAB = ACB$. Man erhält dadurch folgende Lösung:

Fig. 34.




Man ziehe an einen beliebigen Punct $A$ eine Tangente und die Gerade $AB$ an dieselbe unter dem gegebenen Winkel.

Zu b). Ist $AB$ die gegebene Sehne, $TAB$ der gegebene Winkel und $D$ die Mitte von $AB$, so ist der Durchschnittspunct der Geraden $DO$ und $AO$, wenn $DO \perp AB$ und $AO \perp AT$ ist, der Mittelpunct des gesuchten Kreisbogens.

97. Von einem Puncte an einen Kreis eine Berührungslinie zu ziehen.

Liegt der Punct ausserhalb, so existiren zwei Lösungen.

98. An zwei Kreise die gemeinschaftlichen Berührungslinien zu ziehen.

Liegen die beiden Kreise getrennt, so sind vier Lösungen.

Analysis. Zieht man von dem Mittelpuncte des einen Kreises eine Gerade parallel zu den Berührungslinien, so erhält man rechtwinklige Dreiecke mit Katheten resp. $r - r'$ und $r + r'$, durch deren Construction die Berührungslinien erhalten werden.

Schneiden sich die beiden Kreise, so sind zwei Lösungen.
Liegt der eine Kreis innerhalb des Umfanges des anderen, so giebt es keine Lösung.

### Unbestimmte Aufgaben und geometrische Oerter.

99. Wie bereits aus der Durchführung von wenigen Aufgaben ersichtlich ist, handelt es sich bei der Auflösung von Aufgaben um die Bestimmung von Puncten. Diese werden bei Constructionen in einer Ebene als der Durchschnitt zweier Geraden, einer Geraden und eines Kreises, zweier Kreise; und bei Constructionen im Raume als der Durchschnitt dreier Ebenen, zweier Ebenen und einer Kugel, zweier Kugeln und einer Ebene, dreier Kugeln gefunden. Die Puncte eines jeden dieser Gebilde, wie Gerade, Kreis, Ebene oder Kugel leisten einer Bedingung Genüge.

Man nennt den Inbegriff aller Puncte, welche gewissen gegebenen Bedingungen Genüge leisten, einen geometrischen Ort.

Hier sollen als geometrische Oerter nur diese erwähnten Gebilde zugelassen werden. Jeder geometrische Ort enthält die Lösungen einer unbestimmten Aufgabe, z. B.: „Der geometrische Ort der Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke, welche eine gegebene Grundlinie haben, ist die Senkrechte in der Mitte derselben.“ Gleichbedeutend ist die Aufgabe: „Ueber einer gegebenen Geraden als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck zu beschreiben.“

100. Die bestimmten Aufgaben können aus den Oertern, welche der Lösung zweier oder mehrerer unbestimmter Aufgaben entsprechen, zusammengesetzt werden.

Als Beispiele mögen folgende Aufgaben dienen:

a) Ein Dreieck $ABC$ zu construiren, wenn gegeben sind: die Seite $AB$, der gegenüberliegende Winkel $C$ und die von der Spitze $C$ gezogene Höhe $h$. Die beiden Lösungen sind die Durchschnittspuncte der im Abstande $h$ zu $AB$ parallelen Geraden mit dem über $AB$ beschriebenen Kreisbogen, welcher den Winkel $C$ fasst.

b) Ein Dreieck $ABC$ zu construiren, wenn gegeben sind: die Seite $AB$, der gegenüberliegende Winkel $C$ und die vom Puncte $A$ gezogene Höhe.

c) Ein Dreieck zu construiren, wenn der Winkel $C$ und zwei Höhen gegeben sind. Zwei Fälle, je nachdem die Höhe aus dem Scheitel $C$, und eine, oder die beiden Höhen aus den Scheiteln $A$ und $B$ gegeben sind.

# II. Räumliche Gestalten.

## Das körperliche Vieleck und Vielflach.

101. a) Durch $n$ Puncte im Raume, von denen keine drei in einer Geraden liegen, sind $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Gerade bestimmt.

b) Durch $n$ Puncte, von denen keine vier in einer Ebene liegen, sind $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ Ebenen bestimmt.

Denn durch jeden Punct und die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Verbindungslinien der übrigen $(n-1)$ Puncte sind eben so viele Ebenen bestimmt, also durch alle $n$ Puncte $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ Ebenen, von denen jede dreimal gezählt wurde.

Durch $n$ Ebenen, von denen keine drei durch dieselben zwei Puncte gehen, sind $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Durchschnittslinien bestimmt.

Durch $n$ Ebenen, von denen keine vier durch denselben Punct gehen, sind $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ Durchschnittspuncte bestimmt.

Denn durch jede Ebene und die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Durchschnittslinien der übrigen $(n-1)$ Ebenen sind eben so viele Durchschnittspuncte bestimmt, also durch alle $n$ Ebenen $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ Puncte, von denen jeder dreimal gezählt wurde.

Sind die Durchschnittslinien dreier Ebenen zu einander parallel, so kann man ihren gemeinsamen Durchschnittspunct ins Unendliche setzen.

c) Drei einander zu zweien kreuzende Gerade bestimmen einen begrenzten Raum, weil immer je zwei einander kreuzende Gerade einen Parallelraum bestimmen. Durch $n$ einander zu zweien kreuzende Gerade sind daher $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ begrenzte Räume bestimmt.

102. Unter einem **vollständigen körperlichen $n$ Eck** versteht man das Gebilde, welches entsteht, wenn $n$ Puncte im Raume zu je dreien durch Ebenen verbunden werden. Die Verbindungslinien der Puncte heissen **Kanten**, die von diesen begrenzten Ebenen **Flächen**.

Unter einem **vollständigen körperlichen $n$ Flach** versteht man das Gebilde, welches entsteht, wenn $n$ Ebenen zu je dreien sich in einem Puncte schneiden. Die Durchschnittslinien der Ebenen heissen **Kanten**, die Durchschnittspuncte **Scheitel**.

103. Unter einem **einfachen körperlichen $n$ Eck** versteht

Unter einem **einfachen körperlichen $n$ Flach** versteht man das Gebilde, welches entsteht, wenn *n* Puncte im Raume durch eine in sich zurückkehrende gebrochene Fläche derart verbunden werden, dass keine drei Theilflächen durch irgend dieselben zwei von jenen *n* Puncten gehen.

man das Gebilde, welches entsteht, wenn *n* Ebenen einander zu einer in sich selbst zurückkehrenden gebrochenen Fläche derart abgrenzen, dass keine drei Scheitel in denselben zwei von jenen *n* Ebenen liegen.

Analog wie das einfache ebene *n* Eck und *n* Seit nach der Vollendung mit einem gemeinschaftlichen Namen (Vieleck) bezeichnet wird, so bezeichnet man das einfache körperliche *n* Eck und *n* Flach mit dem gemeinschaftlichen Namen Polyeder.

Häufig bezeichnet man damit auch den begrenzten Raum, welchen das Polyeder abschliesst.

Der an einer Polyederkante liegende Keil, welchen die zugehörigen zwei Flächen einschliessen, wird ein Keil, die an einem Polyederscheitel liegende Ecke, welche die zugehörigen Kanten einschliessen, eine Ecke des Polyeders genannt.

Der Durchschnittspunct dreier oder mehrerer Polyederflächen, welche keine Polyederecke bilden, heisst ein Nebenscheitel.

Die Verbindungslinie zweier Polyederscheitel, welche durch keine Polyederkante verbunden sind, heisst eine Nebenkante oder Diagonale, und zwar der Oberfläche oder des Polyeders, je nachdem sie in der Oberfläche des Polyeders liegt oder nicht.

Der von zwei nicht an einander stossenden Polyederflächen gebildete Keil heisst ein Nebenkeil.

Eine durch drei oder mehrere nicht derselben Polyederfläche angehörende Polyederscheitel gelegte und von der Oberfläche begrenzte Ebene heisst eine Nebenfläche oder Diagonalfläche des Polyeders.

Jeder Theil der Oberfläche des Polyeders heisst ein Polyedernetz oder Netz.

### Allgemeine Eigenschaften der Polyeder.

104. a) Da jeder Winkel der Oberfläche des Polyeders durch zwei Kanten gebildet wird, jede Kante zu zwei Polyederflächen gehört und an jedem Endpuncte einen Scheitel bildet, d. h. zu vier Polyederwinkeln der gemeinschaftliche Schenkel ist, so ist die Anzahl der ebenen Winkel der Oberfläche des Polyeders doppelt

so gross, als die Anzahl der Kanten. Ist daher $W$ die Anzahl der Winkel, $K$ die Anzahl der Kanten, so ist

$$W = 2K.$$

Die Zahl $W$ ist daher immer gerade.

Die Anzahl der Flächen, welche Polygone von ungerader Seitenanzahl sind, muss daher gerade sein.

b) Da jede Polyederfläche von mindestens drei Kanten gebildet wird, jede Kante zu zwei Polyederflächen gehört, so ist die dreifache Zahl der Flächen höchstens gleich der doppelten Zahl der Kanten. Ist daher $F$ die Zahl der Flächen, so ist

$$3F \leqq 2K.$$

c) Da jede Polyederecke von mindestens drei Kanten gebildet wird, jede Kante zu zwei Polyederecken gehört, so ist die dreifache Zahl der Ecken höchstens gleich der doppelten Zahl der Kanten. Ist daher $E$ die Zahl der Ecken, so ist

$$3E \leqq 2K.$$

105. In jedem Polyeder ist die Summe der Anzahl der Ecken und Flächen gleich der um zwei vermehrten Zahl der Kanten, d. h. es ist

$$E + F = K + 2. \qquad \text{Euler'scher Satz.}$$

Erster Beweis.

Hülfssatz. Wenn in einem Netze eine Fläche mit anderen eine gewisse Anzahl von Ecken und Kanten nicht gemeinsam hat, so ist die Anzahl der nicht gemeinschaftlichen Kanten um Eins grösser, als die Anzahl der nicht gemeinschaftlichen Ecken.

Es sei nun ein Netz von $e$ Ecken, $f$ Flächen, $k$ Kanten gegeben. Nimmt man eine Theilfläche, welche mit den übrigen Theilflächen $\varepsilon$ Ecken nicht gemeinsam hat, weg, und bezeichnet man in dem jetzt erhaltenen Netze die Zahl der Ecken, Flächen und Kanten resp. mit $e_1$, $f_1$, $k_1$, so ist

$$f_1 = f - 1, \; e_1 = e - \varepsilon, \; k_1 = k - (\varepsilon + 1);$$

mithin

$$f_1 + e_1 - k_1 = f + e - k;$$

d. h. der Ausdruck $f + e - k$ ist von der Zahl der Polyederflächen des Netzes unabhängig.

Für ein Netz, welches aus nur einer Fläche besteht, ist $f = 1$, $k = e$, mithin $f + e - k = 1$, also auch allgemein: In jedem Polyedernetze ist die Summe der Anzahl der Ecken und Flächen vermindert um die Zahl der Kanten gleich der Einheit.

Ein Netz wird auch erhalten, indem man von einem Polyeder eine Fläche wegnimmt. Für ein solches Netz ist

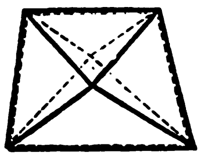
$$f = F - 1, \quad e = E, \quad k = K.$$

Aus $F - 1 + E - K = 1$, folgt

$$E + F = K + 2.$$

Zweiter Beweis. Projicirt man das Polyeder von irgend einem ausserhalb desselben liegenden Puncte $S$ im Raume, welcher in keiner der beliebig erweitert gedachten Seitenflächen liegt, auf eine Ebene, so erhält man auf dieser ein ebenes Netz von eben so vielen Puncten, Geraden, Polygonen, als auch das Polyeder Scheitel, Kanten, Polyederflächen besitzt. Man kann nun in diesem Netze zwei Theile unterscheiden: eine dem Projectionscentrum $S$ zugewandte (in der Figur durch ausgezogene Linien dargestellte) und eine dem Puncte $S$ abgewandte (in der Figur durch punctirte Linien bezeichnete) Partie. Die äussersten Seiten gehören beiden Theilen an.

Fig. 35.



Man kann nun die Winkelsumme dieses Netzes auf doppelte Weise bestimmen:

a) Jede Kante des Polyeders projicirt sich als Polygonseite im Netze, es ist daher nach 74 a)

$$W = 2K \cdot 2R - F \cdot 4R = (K - F) \cdot 4R.$$

b) Ist $E_1$ die Anzahl der äusseren Umfangsecken des Netzes, $E_2$ die der inneren, so ist die Winkelsumme, da jede der $E_1$ Ecken zweimal zu zählen ist,

$$W = 2(E_1 \cdot 2R - 4R) + E_2 \cdot 4R = (E - 2) \cdot 4R.$$

Es ist daher

$$K - F = E - 2 \text{ oder } K = E + F - 2.$$

Zusatz. Da die Winkelsumme $W$ in a) gleich ist der Summe der Winkel des Polyeders, so ist in jedem Polyeder die Summe der Winkel an der Oberfläche

$$W = (E - 2) \cdot 4R.$$

Anmerkung. Der erste Beweis ist von A. Grunert und setzt voraus, dass das Polyeder von einer zusammenhängenden gebrochenen Fläche begrenzt ist. Der zweite Beweis ist von J. Steiner und beruht auf der Voraussetzung, dass jede projicirende Gerade die Oberfläche des Polyeders nur in (einem) zwei Puncten trifft. Dass für nicht einfache Polyeder der Euler'sche Satz nicht gültig ist, hat zuerst S. L'Huilier nachgewiesen.

106. Folgerungen.

a) Da $E + F - K = 2$ ist, so folgt: Hat das Polyeder eine gerade Anzahl von Kanten, so ist die Anzahl der Ecken und die der Flächen zugleich gerade oder ungerade; ist die Anzahl der Kanten ungerade, so muss, wenn die Zahl der Ecken gerade oder ungerade ist, die der Flächen ungerade oder gerade sein.

b) Subtrahirt man die Ungleichungen

$$3E \leq 2K, \quad 3F \leq 2K$$

von $3E + 3F = 3K + 6$, so erhält man

$$3E \geq K + 6, \quad 3F > K + 6,$$

also

$$3E > K \quad , \quad 3F > K.$$

Daraus folgt, dass in jedem Eckpuncte nicht mehr als fünf Kanten zusammenstossen dürfen, und jede Fläche von nicht mehr als fünf Kanten begrenzt sein darf.

Denn würden in jeder Ecke sechs Kanten zusammenstossen, so wäre $6E = 2K$, also $3E = K$, was unmöglich ist. Wären alle Flächen von sechs Kanten begrenzt, so wäre $6F = 2K$, also $3E = K$, was unmöglich ist.

c) Wenn in jedem Eckpuncte $m$ Kanten zusammenstossen, so ist

$$mE = 2K, \text{ also } F - 2 = K - E = \frac{m-2}{m} K$$

und

$$E : F - 2 : K = 2 : m - 2 : m.$$

Ist jede Fläche von $n$ Kanten begrenzt, so ist

$$nF = 2K, \text{ also } E - 2 = K - F = \frac{n-2}{n} K$$

und

$$F : E - 2 : K = 2 : n - 2 : n.$$

Finden beide Fälle statt, d. h. stossen in jeder Ecke $m$ Kanten zusammen, und ist jede Fläche von $n$ Kanten begrenzt, so ist

$$EF : (E-2)(F-2) = 4 : (m-2)(n-2).$$

Da $EF > (E-2)(F-2)$ ist, so muss $4 > (m-2)(n-2)$ sein. Dies giebt 1) $m = 3, n = 3$; 2) $m = 3, n = 4$; 3) $m = 4, n = 3$; 4) $m = 3, n = 5$; 5) $m = 5, n = 3$.

Der erste Körper ist ein 4 eckiges 4 Flach, der zweite ein 8 eckiges 6 Flach, der dritte ein 6 eckiges 8 Flach, der vierte ein 20 eckiges 12 Flach, der fünfte ein 12 eckiges 20 Flach.

Sind die Flächen regulär, so heissen diese fünf Körper: (Reguläres) Tetraeder, Hexaeder, Octaeder, Dodekaeder, Ikosaeder.

Diese Polyeder werden reguläre genannt. Es gibt daher nur fünf reguläre Polyeder.

## Das Dreikant.

107. Der unbegrenzte Raum wird durch drei Ebenen, welche sich in einem Puncte schneiden, in acht halbbegrenzte Räume getheilt, von welchen jeder ein **Dreikant** genannt wird.

Ein solcher Raum wird erhalten, indem man durch einen Punct drei Halbstrahlen, welche nicht in einer Ebene liegen, zieht, und dann zwischen je zwei in den hohlen Winkel ein Ebenenstück legt.

Der Strahlenmittelpunct heisst die **Spitze**, jede der drei halbbegrenzten Geraden heisst eine **Kante**, jedes der eingeschalteten Ebenenstücke eine **Seitenebene**, der hohle Winkel zwischen je zwei Kanten eine **Seite**, der an einer Kante liegende hohle Keil ein **Winkel** des Dreikants.

Im Dreikant unterscheidet man wie beim Dreieck zwischen **anliegenden** und **gegenüberliegenden** Stücken.

Der **Winkel**, welcher an der ausserhalb einer Seitenebene liegenden Kante liegt, heisst der **Seite** dieser Seitenebene **gegenüberliegend**; die beiden andern Winkel heissen der Seite **anliegend**.

Ist $S$ die Spitze des Dreikantes und sind $SA$, $SB$, $SC$ dessen Kanten, so werden mit $A$, $B$, $C$ die Winkel, mit $(B,C)$, $(C,A)$, $(A,B)$ die gegenüberliegenden Seiten und Seitenebenen, und mit $SABC$ das Dreikant bezeichnet. Das Dreikant ist für die räumlichen Gebilde von derselben Wichtigkeit, wie das Dreieck für die ebenen.

108. Verlängert man die Kanten eines Dreikantes $SABC$ in das Entgegengesetzte und erweitert die Seitenebenen in das Unbegrenzte, so erscheinen zu dem gegebenen Dreikant noch sieben andere, welche mit dem gegebenen den ganzen unbegrenzten Raum erfüllen. Jedes der neuen Dreikante hat zu Kanten: entweder

a) zwei der ursprünglichen und die Verlängerung der dritten, oder

b) eine ursprüngliche und die Verlängerung der beiden andern, oder

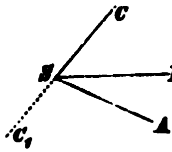
c) die Verlängerungen aller drei ursprünglichen Kanten.

Sind $SA_1, SB_1, SC_1$ die Verlängerungen von $SA$, $SB$, $SC$, so nennt man die Dreikante $SABC_1$, $SBCA_1$, $SCAB_1$ in a) **Nebendreikante**; die drei Dreikante $SAB_1C_1$, $SBC_1A_1$, $SCA_1B_1$ in b) **Hinterdreikante** und das Dreikant $SA_1B_1C_1$ in c) **Scheiteldreikant** des ursprünglichen.

109. Zusammenhang dieser Dreikante.

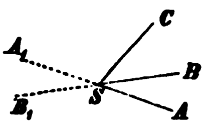
a) Von $SABC$ und $SABC_1$. Die beiden Dreikante haben die Seite $(A,B)$ gemeinsam, je zwei der übrigen Seiten, welche in derselben Ebene liegen, sind Supplemente zu einander. Die Winkel $C$ und $C_1$ sind einander gleich, hingegen je zwei der an einer der gemeinschaftlichen Kanten $SA$ oder $SB$ liegenden Winkel sind Supplemente zu einander.

Fig. 36.



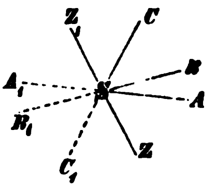

b) Von $SABC$ und $SA_1B_1C$. Die Seiten $(A,B)$ und $(A_1,B_1)$ sind einander gleich. Je zwei der übrigen Seiten der beiden Dreikante, welche in einerlei Ebene liegen, sind Supplemente zu einander. Die Winkel an der Kante $SC$ sind einander gleich. Je zwei Winkel, wie $A$ und $A_1$, oder $B$ und $B_1$, deren Scheitelkante auf einer Geraden liegen, sind Supplemente zu einander.

Fig. 37.




c) Von $SABC$ und $SA_1B_1C_1$. Je zwei Seiten, welche in derselben Ebene liegen, sind einander gleich; je zwei Winkel, deren Scheitelkanten auf derselben Geraden liegen, sind ebenfalls einander gleich. Denkt man sich im Innern eines jeden dieser Dreikante das Auge eines Beobachters, so folgen die gleichen Stücke der beiden Dreikante in derselben Ordnung, aber in verschiedenem Drehungssinne auf einander.

Fig. 38.




110. Da die beiden Dreikante die Seiten und Winkel in derselben Ordnung einander gleich haben, so kann man die Frage aufwerfen: Ist es möglich, zwei solche Dreikante zur Deckung zu bringen? Um diese Frage zu beantworten, könnte man zunächst damit anfangen, dass man zwei gleiche Seiten, etwa $(A,B)$ und $(A_1,B_1)$, zur Deckung bringt. Dieses kann auf doppelte Weise geschehen:

Erstens, indem man $SA_1$ mit $SA$ und $SB_1$ mit $SB$ zusammenlegt;

zweitens, indem man $SA_1$ mit $SB$ und $SB_1$ mit $SA$ zusammenlegt.

a) Für die erste Deckung drehe man die Winkelebene $(A_1,B_1)$ um den Scheitel $S$ in der Ebene $(A,B)$ so lange, bis $SA_1$ mit $SA$ und $SB_1$ mit $SB$ zusammenfällt. Die Kanten $SC$ und $SC_1$ fallen dann auf entgegengesetzte Seiten der Ebene $(A,B)$, können daher nicht zusammenfallen.

b) Um die zweite Art der Deckung der Seiten $(A,B)$ und $(A_1,B_1)$ zu vollziehen, denke man sich den Winkel $ASB_1$ und seinen Scheitelwinkel $A_1SB$ durch eine Gerade $ZZ_1$ halbirt.

Dreht man nun die Ebene $(A_1, B_1)$ um die Gerade $ZZ_1$ so lange, bis sie mit der Ebene $(A, B)$ zusammenfällt, so wird $SA_1$ mit $SB$, und $SB_1$ mit $SA$ zusammenfallen.

Sollten die Kanten $SC_1$ und $SC$ zusammenfallen, so müssten die an den Kanten $SA$ oder $SB_1$ und $SB$ oder $SA_1$ liegenden Keile einander gleich sein,

also $\quad A = B_1$ und $B = A_1$

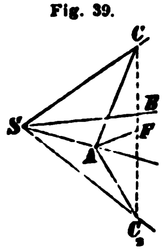
mithin, wegen $\quad A = A_1$ und $B = B_1$

$$A = B = A_1 = B_1 \text{ sein; d. h.:}$$

Zwei Dreikante, die sich als Scheiteldreikante verhalten, können zur Deckung gebracht werden, wenn zwei Winkel des einen, und somit auch die ihnen entsprechenden Winkel des andern gleich sind.

111. Der in a) des vorigen Art. angeführte Versuch, um die beiden Scheiteldreikante zur Deckung zu bringen, führte zu einer solchen Lage derselben, dass die Kanten $SA$ und $SA_1$, sowie $SB$ und $SB_1$, also auch die Winkelebenen $(A, B)$ und $(A_1, B_1)$ zusammenfallen, während die Kante $SC$ und die Kante

Fig. 39.



$SC_1$, welche in ihrer neuen Lage mit $SC_2$ bezeichnet werden soll, auf der entgegengesetzten Seite der gemeinschaftlichen Winkelebene liegt.

Nimmt man nun auf den Kanten $SC$ und $SC_2$ gleiche Stücke, etwa $SC = SC_2$ an, und zieht von den Puncten $C$ und $C_2$ Senkrechte auf die Kante $SA$, welche dieselbe in dem Puncte $A$ schneiden, so folgt aus:

$$\triangle SCA \sim \triangle SC_2A,$$

dass $CA = C_2A$ ist. Zieht man an der gemeinschaftlichen Winkelebene $(A, B)$ im Puncte $A$ auf die $SA$ eine Senkrechte $AF$, so ist der Winkel $CAF$ das Mass des Keiles $A$, und der Winkel $C_2AF$ ist das Mass des Keiles $A_1$, mithin ist Winkel $CAF = C_2AF$. Die von den Puncten $C$ und $C_2$ auf die Gerade $AF$ gefüllten Senkrechten schneiden dieselbe wegen $CA = C_2A$ in demselben Puncte, etwa $F$, so dass $CF = C_2F$ ist; d. h.:

Zieht man in der angegebenen Lage der beiden Dreikante von den Puncten $C$ und $C_2$, welche von der Spitze $S$ gleichen Abstand haben, Senkrechte auf die gemeinsame Winkelebene, so treffen diese Senkrechten die gemeinsame Winkelebene in demselben Puncte $F_1$ und die Abstände $CF$ und $C_2F$ sind einander gleich.

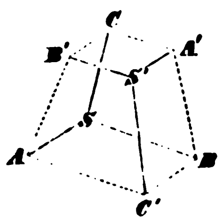
Zwei solche Dreikante werden **symmetrische** Dreikante genannt.

### Vom Supplementar- und Polar-Dreikant.

112. Nach Art. 28 bestimmt man den Keil oder Neigungswinkel zweier Ebenen dadurch, dass man eine Ebene senkrecht auf die Durchschnittslinie der beiden Ebenen legt. Der Winkel der beiden Durchschnittslinien der gegebenen Ebenen mit der dritten Ebene ist das Maas des Keils.

Um die Winkel (Keile) eines Dreikants bequem darzustellen, denke man durch einen Punct $S'$ im Innern des angegebenen Dreikants drei Ebenen senkrecht auf die drei Kanten gelegt. Diese drei Ebenen schneiden sich in drei Geraden $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$, welche auf den drei Seitenebenen des ursprünglichen Dreikants senkrecht stehen, und zwar $S'A'$ auf $(B,C)$, $S'B'$ auf $(C,A)$, $S'C'$ auf $(A,B)$. Diese drei Geraden bilden wieder ein Dreikant $S'A'B'C'$, welches ein Supplementar-Dreikant des ursprünglichen heisst.

Fig. 40.




Je zwei Supplementar-Dreikante sind einander congruent.

Denn sind $S'$ und $S''$ deren Spitzen, so folgt wegen des Parallelismus der Kanten und Seitenebenen die Gleichheit der Seiten und Winkel der beiden Dreikante in derselben Ordnung, also auch deren Congruenz.

Man kann daher am bequemsten das Supplementar-Dreikant so construiren, dass man den Punct $S''$ in den Punct $S$ legt; also von $S$ auf die drei Seitenebenen Senkrechte auf die entgegengesetzte Seite der den Seitenebenen gegenüberliegenden Kanten legt; in letzterer Lage soll das Supplementar-Dreikant das Polar-Dreikant des gegebenen heissen.

Aus der Construction des Supplementar-Dreikants folgt unmittelbar:

Jede Seite des Supplementar-Dreikants ist das Mass des Supplementes von demjenigen Winkel des ursprünglichen Dreikants, auf dessen Scheitelkante ihre Seitenebene senkrecht steht.

Da der Punct $S$ innerhalb des Dreikants $S'A'B'C'$ liegt, und die Kanten des Dreikants $SABC$ auf den Seitenebenen des Dreikants $S'A'B'C'$ senkrecht stehen, so folgt, dass das Dreikant $SABC$ ein Supplementar-Dreikant des Dreikants $S'A'B'C'$ ist. Die Seiten des Dreikants $SABC$ sind daher ebenfalls die Supplemente der Winkel des Dreikants $S'A'B'C'$.

Es ist daher

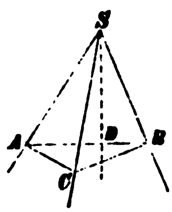
$$(A,B) + C' = 2R,\ (B,C) + A' = 2R,\ (C,A) + B' = 2R$$
$$(A',B') + C = 2R,\ (B',C') + A = 2R,\ (C',A') + B = 2R.$$

Dieselben Beziehungen gelten auch für das Polar-Dreikant.

### Allgemeine Eigenschaften des Dreikants.

113. a) Zwei Seiten eines Dreikants sind grösser als die dritte.

Fig. 41.



Es sei $(A,B)$ die grösste Seite; man mache in der Ebene $(A,B)$ den Winkel $ASD = ASC$, nehme $SD = SC$ beliebig und ziehe durch $D$ die Gerade $ADB$ willkürlich und verbinde $A$ und $C$, so ist:

$$\triangle SAD \cong \triangle SAC, \text{ also } AD = AC.$$

Verbindet man $B$ und $C$, so ist in dem Dreiecke $ABC: AC + CB > AB = AD + DB$, also

$$CB > DB.$$

In den Dreiecken $SBC$ und $SBD$ ist nach 58:

$$\text{Winkel } BSC > BSD,$$

addirt man dazu $ASC = ASD$, so erhält man

$$ASC + CSB > ASB, \text{ d. h.}$$
$$(A,C) + (C,B) > (A,B).$$

b) In jedem Dreikant ist der Ueberschuss je zweier Winkel über den dritten kleiner als zwei Rechte.

Denn für ein Supplementar-Dreikant ist:

$(A',C') + (C',B') > (A'B')$, woraus $A + B < 2R + C$ folgt.

114. a) Die Summe der drei Seiten eines Dreikants ist kleiner als vier Rechte.

Schneidet man die drei Kanten durch eine vierte Ebene in den Puncten $A$, $B$, $C$, so erhält man drei neue Dreikante mit den Spitzen $A, B, C$. Die Summe der Winkel der drei in $S$ zusammenstossenden Dreiecke beträgt $3 \cdot 2R = 6R$, die Summe der Winkel des Dreiecks $ABC$ beträgt $2R$; daraus folgt nach dem vorigen Satze, dass die Summe der übrigen Seiten der Dreikante mit den Spitzen $A$, $B$, $C$ grösser als $2R$ ist. Zieht man diese Summe von der Summe der Winkel der drei in $S$ zusammenstossenden Dreiecke ab, so ist der Rest kleiner als $4R$.

b) Die Summe der drei Winkel eines Dreikants ist grösser als zwei Rechte.

Denn construirt man ein Supplementar-Dreikant zum ursprünglichen, so ist

$$(A', B') + (B', C') + (C', A') < 4R,$$

oder $$2R - C + 2R - A + 2R - B < 4R,$$

mithin $$2R < A + B + C.$$

### Von der Congruenz und Symmetrie zweier Dreikante.

115. Da in einem Dreikant drei Seiten und drei Winkel vorkommen, so kann man die Frage aufwerfen: Wie viele und welche von diesen Stücken müssen zwei Dreikante einzeln einander gleich haben, damit sie congruent oder symmetrisch sind? Von den verschiedenen Fällen, zu welchen die Beantwortung dieser Frage führt, sollen hier nur die wichtigsten durchgeführt werden.

Sind in zwei Dreikanten

$a_1$) eine Seite und die anliegenden Winkel,

$a_2$) ein Winkel und die anliegenden Seiten

einzeln einander gleich, so sind sie congruent oder symmetrisch, je nachdem die in beiden verglichenen Stücke in demselben oder in verschiedenem Drehungssinne aufeinander folgen.

Beweis von $a_1$). Folgen die verglichenen Stücke in demselben Sinne aufeinander, so bringe man die beiden gleichen Seiten zur Deckung. Wegen der Gleichheit der anliegenden Winkel fallen die beiden andern Seitenebenen, folglich auch deren gemeinsame Kante zusammen. Folgen die verglichenen Stücke in verschiedenem Sinne aufeinander, so bringe man das zweite Dreikant mit dem Scheiteldreikant des ersten zur Deckung.

Der Satz $a_2$) wird auf dieselbe Art bewiesen.

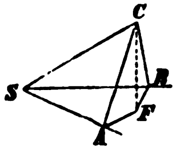
Sind in zwei Dreikanten

$b_1$) die drei Seiten,

$b_2$) die drei Winkel

einzeln einander gleich, so sind sie congruent oder symmetrisch, je nachdem die in beiden verglichenen Stücke in demselben oder in verschiedenem Drehungssinne aufeinander folgen.

Fig. 42.




Beweis von $b_1$). Sind $SABC$ und $S'A'B'C'$ die beiden gegebenen Dreikante, so ziehe man von einem beliebigen Puncte $C$ der Kante $SC$ des ersten Dreikants $CA \perp SA$, $CB \perp SB$, und in der Ebene $(A,B)$ $AF \perp SA$, $BF \perp SB$, wo $F$ den Durchschnittspunct der Geraden $AF$ und $BF$ bedeutet. Macht man im zweiten Dreikant $S'C' = SC$, und wiederholt die vorige Construction, so ist

$$S'A' = SA,\ S'B' = SB;$$

mithin Viereck $\quad S'A'F'B' \simeq SAFB,$

also Winkel $\quad C'A'F' = CAF,\ C'B'F' = CBF,$

wodurch die Bedingungen auf $a_1$) oder $a_2$) zurückgeführt sind.

Beweis von $b_2$). Man construire zu den beiden Dreikarten die Supplementar-Dreikante, so sind diese nach $b_1$) entweder congruent oder symmetrisch, also auch die ursprünglichen.

Zusatz. Ist $(A,C) = (B,C)$, so folgt aus der für den Beweis von $b_1$) gegebenen Construction, wegen $\triangle\ CAF \sim \triangle\ CBF$, dass $A = B$ ist, d. h.:

Gleichen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber, und umgekehrt.

Ein Dreikant, welches zwei gleiche Seiten hat, wird **gleichschenklig** genannt.

116. Halbirt man die drei Seiten eines Dreikants $SABC$ durch drei Gerade $SA', SB', SC'$ (die Seite $(B,C)$ durch $SA'$, u. s. w.) und legt durch diese Gerade auf die Seitenebenen senkrechte Ebenen, so schneiden sich diese in einer und derselben Geraden $SO$, deren Winkel mit den drei Kanten des gegebenen Dreikants einander gleich sind.

Es sei zunächst $SO$ die Durchschnittslinie der Ebenen, welche durch $SA'$ und $SB'$ senkrecht auf den zugehörigen Seitenebenen gelegt sind.

Nach $a_2$) sind die Dreikante $SOA'B$ und $SOA'C$ symmetrisch,
" $\quad SOB'A$ " $SOB'C$ "

also Winkel $OSB = OSC,\ OSA = OSC$, mithin auch

$$\text{Winkel } OSB = OSA.$$

Legt man durch die Geraden $SO$ und $SC'$ eine Ebene, so sind die beiden Dreikante $SOC'A$ und $SOC'B$ symmetrisch, mithin steht die Ebene $OS$ auf der Seitenebene $(A,B)$ senkrecht. Vergl. Art. 82.

Hieraus folgt noch: Man kann jedes Dreikant $SABC$ in drei gleichschenklige Dreikante $SOAB$, $SOBC$, $SOCA$, deren Seiten $(O,A)$, $(O,B)$, $(O,C)$ gleich sind, zerlegen.

117. Jedes von zwei symmetrischen Dreikanten lässt sich in drei Dreikante zerlegen, welche einzeln verglichen einander congruent sind.

Denn bildet man zu einem Dreikant das zugehörige Scheiteldreikant, und verlängert die nach Angabe des vorigen Art. bestimmte Gerade $SO$ nach rückwärts, so wird durch diese Rückverlängerung das Scheiteldreikant in drei Dreikante zerlegt, welche mit den drei, durch die Gerade $SO$ erhaltenen, Dreikanten congruent sind.

## Symmetrische Gebilde.

118. Man kann die am Schlusse des Art. 111 gegebene Definition für beliebige räumliche Figuren verallgemeinern:

Wenn zwei räumliche Figuren eine gemeinschaftliche ebene Grundfläche haben und, die eine über, die andere unter der Ebene dieser Grundfläche, derart zusammengesetzt sind, dass die von zwei entsprechenden Puncten, etwa $M$ und $M_1$, auf die Ebene der Grundfläche gefällten Senkrechten diese in demselben Puncte $m$ treffen und dabei von gleicher Länge sind, d. h. $Mm = M_1 m$ ist, so nennt man sie symmetrische Figuren.

119. Aus dieser Erklärung ergibt sich Folgendes:

1) Der Abstand zweier Puncte $A$ und $B$ in der einen Figur ist gleich dem Abstande der entsprechenden Puncte $A_1$ und $B_1$ in der andern Figur.

Denn die Trapeze $ABab$ und $A_1B_1ab$ sind congruent.

2) Liegen drei Puncte $A, B, C$ der einen Figur in einer Geraden, so liegen die entsprechenden Puncte $A_1, B_1, C_1$ der andern Figur in derselben Ordnung in einer Geraden.

Denn nach 1) ist $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, also wegen

$$AB = AC + CB,$$

ist

$$A_1B_1 = A_1C_1 + C_1B_1.$$

Dem Durchschnittspuncte zweier Geraden entspricht daher der Durchschnittspunct der entsprechenden Geraden.

3) Liegen in der einen Figur vier Puncte $A, B, C, D$, von denen nicht drei in einer Geraden liegen, in einer Ebene, so liegen auch die entsprechenden Puncte der andern Figur in einer Ebene.

Denn schneiden sich die Geraden $AB$ und $CD$ in einem Puncte $Z$, so schneiden sich die entsprechenden Geraden $A_1B_1$ und $C_1D_1$ in dem entsprechenden Puncte $Z_1$.

Aus 1), 2) und 3) folgt:

4) Einer ebenen Figur entspricht eine congruente, ebene Figur.

5) Da jeder Winkel immer auf den Winkel zweier Geraden, die in einer Ebene liegen, zurückgeführt werden kann, der Winkel zweier solcher Geraden in der einen Figur nach 4) dem Winkel der entsprechenden Geraden der andern Figur gleich ist, so folgt die Gleichheit aller entsprechender Winkel der beiden Figuren.

Zwei Polyeder, welche in die angegebene Lage gebracht werden können, werden symmetrisch genannt. In zwei symmetrischen Polyedern sind je zwei entsprechende Flächen congruent, und jeder Keil des einen ist dem entsprechenden Keile des andern gleich. Dabei folgen die gleichen Stücke in gleicher Ordnung aufeinander, ohne dass die beiden Polyeder zur Deckung gebracht werden können.

Zu jedem Polyeder ist nur ein Polyeder symmetrisch.

Sind zwei Polyeder zu einem dritten symmetrisch, so sind sie untereinander congruent.

Zusatz. Lässt sich ein Körper durch eine Ebene in zwei symmetrische Hälften zerlegen, so ist ein dem gegebenen Körper symmetrischer mit ihm congruent.

Denn nimmt man diese theilende Ebene als Grundfläche, so bildet jede Hälfte des gegebenen Körpers eine Hälfte des symmetrischen.

Anmerkung. Wollte man als Analogon zu einer gegebenen ebenen Figur eine symmetrische construiren, so müsste man in derselben Ebene eine Gerade als Grundlinie annehmen und dem Scheitel der entsprechenden symmetrischen Figur von der Grundlinie gleichen Abstand geben. Dreht man das Ebenenstück der symmetrischen Figur um die Grundlinie, bis es mit der gegebenen Figur zusammenfällt, so decken sich die beiden Figuren. Bei ebenen Figuren ist also die symmetrische Figur zugleich congruent, es verschwindet daher die Symmetrie.

### Pyramidale und prismatische Räume.

120. Bewegt man eine unbegrenzte Gerade derart, dass sie längs des Umfanges eines (einfachen) ebenen $n$Ecks und immer durch einen fixen Punct $S$, welcher nicht in der Ebene des $n$ Ecks liegt, geht, so beschreibt die Gerade eine Fläche, wodurch der unbegrenzte Raum in zwei halbbegrenzte Räume getheilt wird.

Ein jeder dieser beiden Räume, bestehend aus zwei im Puncte $S$ zusammenstossenden Stücken, welche zusammen eine $n$flächige Ecke sammt Scheitelecke bilden, wird ein $n$seitiger pyramidaler Raum genannt.

Den Umfang des $n$Ecks nennt man die Leitlinie, den festen Punct $S$ die Spitze, die bewegte Gerade die Erzeugungslinie, die beschriebene Fläche den Mantel des pyramidalen Raumes.

Jedes der beiden Stücke desselben wird ein pyramidaler Halbraum genannt.

Bewegt man die Erzeugungslinie fortwährend parallel, d. h. setzt man den Punct $S$ in das Unendliche, so heisst der (halb) abgegrenzte Raum ein prismatischer.

Ein pyramidaler Raum entsteht auch dadurch, dass man zwischen je zwei aufeinander folgende Strahlen eines Büschels von $n$ Strahlen ein Stück einer Ebene einschaltet.

Ein $n$ seitiger prismatischer Raum entsteht auch dadurch, dass man zwischen je zwei von $n$ Parallelen, von denen nie mehr als zwei in einer Ebene liegen, einen Streifen einschaltet.

Dem pyramidalen oder prismatischen Raum analog erhält man resp. einen conischen oder cylindrischen, wenn die Leitlinie eine krumme Linie ist.

Hier sollen nur solche conische und cylindrische Räume betrachtet werden, deren Leitlinie eine Kreislinie ist.

Die erzeugende Gerade heisst in jeder Lage eine Seite.

Die Gerade, welche die Spitze des conischen Raumes mit dem Mittelpuncte des Kreises verbindet, heisst die Axe des conischen Raumes.

In ähnlicher Weise nennt man die vom Mittelpuncte parallel zur Seite gezogene Gerade die Axe des cylindrischen Raumes.

121. Schneidet man einen $n$ seitigen pyramidalen Halbraum durch eine Ebene, welche den sämmtlichen Kanten begegnet, so nennt man das dadurch abgegrenzte Polyeder eine $n$ seitige Pyramide.

Das durch den Mantel abgegrenzte Stück der schneidenden Ebene, welches als von einem $n$ Seit begrenzt ist, heisst die Grundfläche oder Basis; deren Seiten die Grundkanten, die übrigen die Seitenkanten der Pyramide.

Der Abstand der Spitze von der Grundfläche heisst die Höhe der Pyramide.

Schneidet man einen pyramidalen Halbraum durch zwei parallele Ebenen, so heisst das dadurch erhaltene Polyeder ein Pyramidalstumpf.

Schneidet man einen prismatischen Raum durch zwei parallele Ebenen, welche sämmtlichen Kanten begegnen, so nennt man das dadurch abgegrenzte Polyeder ein Prisma.

Bei beiden Körpern nennt man jedes in den beiden schneidenden parallelen Ebenen abgegrenzte Stück eine Grundfläche oder Basis; der Abstand der beiden Grundflächen heisst die Höhe resp. des Pyramidalstumpfes oder des Prismas.

Schneidet man ein Prisma durch eine mit der Grundfläche nicht parallele Ebene, so heisst jeder der dadurch erhaltenen Körper ein Prismastumpf.

Ist die Höhe zu den Seiten parallel, so heisst das Prisma ein gerades, sonst ein schiefes.

Schneidet man einen halbconischen Raum durch eine Ebene, so erhält man einen Kegel — das Analogon zur Pyramide.

Den von zwei parallelen Ebenen abgeschnittenen Raum nennt man einen Kegelstumpf.

Schneidet man einen cylindrischen Raum durch zwei parallele Ebenen, so erhält man einen Cylinder — das Analogon zum Prisma.

### Die Pyramide.

122. Eine Pyramide heisst regulär, wenn ihre Grundfläche ein reguläres Vieleck ist und die Verbindungslinie des Mittelpunctes der Grundfläche mit der Spitze auf der Grundfläche senkrecht steht, also mit der Höhe identisch ist.

Eine $n$ seitige Pyramide hat $n$ dreieckige Flächen mit gemeinsamer Spitze, $n$ dreiflächige Ecken mit gemeinsamer Grundfläche, eine $n$ eckige Fläche, eine $n$ flächige Ecke, $\frac{n(n-3)}{2}$ dreieckige Nebenflächen und ebensoviele dreiflächige Nebenecken, $\frac{n(n-3)}{2}$ Nebenkeile, die durch die Spitze gehen, und ebensoviele Nebenkanten, die in der Grundfläche liegen.

Jede $n$ seitige Pyramide lässt sich durch $(n-3)$ Nebenflächen, welche durch eine und dieselbe Seitenkante gehen, in $(n-2)$ dreiseitige Pyramiden zerlegen, die mit der ursprünglichen gleiche Höhe haben.

Eine Pyramide, deren Grundfläche ein Dreieck ist, heisst ein Tetraeder.

Dasselbe hat vier Flächen, vier Ecken und sechs Kanten, keine Nebenscheitel, Nebenkanten und Nebenflächen.

Zu jeder Tetraederfläche gibt es nur einen ausserhalb derselben liegenden Scheitel, und umgekehrt.

Zwei solche Stücke heissen Gegenstücke zu einander.

Zu jeder Tetraederkante gibt es nur eine dieselbe kreuzende. Zwei solche Kanten werden Gegenkanten genannt.

Ein Tetraeder, welches eine rechte Ecke enthält, wird ein rechteckiges genannt.

123. Die beiden Halbräume eines pyramidalen Raumes bilden zwei symmetrische Ecken. Schneidet man nun diese beiden Halbräume durch zwei parallele Ebenen, welche von der Spitze gleichen Abstand haben und alle Kanten treffen, so bilden die Durchschnittspuncte der Kanten in den beiden parallelen Ebenen zwei congruente Figuren; man erhält dadurch zwei symmetrische Pyramiden, welche Scheitelpyramiden genannt werden.

Denn die Verbindungslinien zweier entsprechender Punctpaare sind gleich und parallel, woraus folgt, dass die beiden

Schnitte congruent sind. Bringt man diese congruenten Schnitte zur Deckung, so fallen die Spitzen der beiden Pyramiden zu entgegengesetzten Seiten dieser Fläche, welche die Grundfläche der Symmetrie der beiden Pyramiden bildet, denn die Verbindungslinie der Spitzen derselben steht auf dieser Fläche senkrecht und wird von ihr halbirt.

124. a) Sind in zwei $n$ seitigen Pyramiden die Ecken an der Spitze congruent oder symmetrisch und drei Paare entsprechender Seitenkanten einander gleich, so sind die Pyramiden congruent oder symmetrisch.

Im ersten Falle kann man die congruenten Ecken an der Spitze zur Deckung bringen; wegen der Gleichheit der drei entsprechenden Seitenkanten müssen die Ebenen der Grundflächen und mithin letztere selbst zusammenfallen.

Sind aber die Ecken an der Spitze symmetrisch, so bildet man zu der einen Pyramide die Scheitelpyramide und beweist deren Congruenz mit der andern.

b) Sind in zwei $n$ seitigen Pyramiden die Grundflächen congruent, ein Paar entsprechender Grundecken congruent oder symmetrisch, und das zugehörige Paar von Seitenkanten einander gleich, so sind die Pyramiden congruent oder symmetrisch.

Im ersten Falle kann man die congruenten Grundecken zur Deckung bringen; wegen der Gleichheit der beiden Seitenkanten werden die Spitzen und wegen der Congruenz der Grundflächen die Grundflächen der beiden Pyramiden zusammenfallen. Zwei Pyramiden, deren Spitzen und Grundflächen zusammenfallen, decken sich. Sind die Grundecken symmetrisch, so construire man zu der einen Pyramide die Scheitelpyramide, u. s. w.

125. Sind in zwei $n$ seitigen Pyramidenstumpfen ein Paar Grundflächen congruent, ein Paar entsprechender Grundecken congruent oder symmetrisch und die diesen zugehörigen Seitenkanten einander gleich, so sind die Pyramidenstumpfe congruent oder symmetrisch.

Beweis wie im vorigen Art.

126. Durch Zusammensetzung von zwei oder mehreren Pyramiden erhält man ein Polyeder.

Zwei Polyeder sind nur congruent oder symmetrisch, wenn sie in gleicher Weise aus gleichvielen congruenten oder symmetrischen Pyramiden zusammengesetzt sind.

## Das Prisma.

127. Analog wie bei der Pyramide unterscheidet man bei dem Prisma zwischen Grundkanten, Seitenkanten, Grundkeilen,

Seitenkeilen, u. s. w., deren Anzahl bei einem $n$ seitigen Prisma sehr leicht angegeben werden kann.

Wegen des Parallelismus der Seitenkanten und der Grundflächen sind die Seitenflächen Parallelogramme.

Sind die Grundflächen Parallelogramme, so heisst das Prisma ein Parallelepipedon oder eine Säule. In diesem sind je zwei gegenüberliegende Flächen congruent.

Durch eine Ecke eines Parallelepipedons sind die übrigen bestimmt.

Durch drei Schichten, welche durch drei einander kreuzende Gerade bestimmt sind, entsteht ein Parallelepipedon.

Ist eine Kante senkrecht auf einer Fläche, d. h. sind zwei Keile einer Ecke rechte, so heisst das Parallelepipedon ein gerades; sind die drei Keile einer Ecke rechte, so heisst es ein rechteckiges. In letzterem sind alle Flächen Rechtecke.

Ein rechteckiges Parallelepipedon, in welchem die drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten einander gleich sind, wird ein Würfel oder Kubus genannt. In demselben sind alle gleichnamigen Haupt- und Nebenstücke einander gleich.

Alle Flächen sind Quadrate.

Der Würfel ist durch eine Seite bestimmt.

Ein schiefeckiges Parallelepipedon, in welchem die drei in eine Ecke zusammenstossenden Kanten einander gleich sind, wird ein Rhomboeder genannt.

Das Rhomboeder ist durch eine Seite und einen schiefen Winkel bestimmt.

Denn ist $\varphi$ der spitze Winkel einer Seitenfläche, so ist $\psi = 2R - \varphi$ der andere (stumpfe) Winkel.

Stellt man nun drei Seitenflächen so zusammen, dass drei spitze Winkel $\varphi$ zusammenstossen, so sind die Winkel einer jeden der übrigen Ecken der Grundfläche $\psi$, $\psi$, $\varphi$.

Lässt man hingegen drei stumpfe Winkel $\psi$ zusammenstossen, so sind die Winkel einer jeden der übrigen Ecken der Grundfläche $\varphi$, $\varphi$, $\psi$.

Es sind nur zwei Rhomboeder möglich: das eine hat ein Paar gegenüberliegender Ecken mit lauter spitzen, das andere mit lauter stumpfen Winkeln. Diese beiden Ecken werden Hauptecken genannt.

128. Zwei Prismen sind congruent oder symmetrisch, wenn sie ein Paar congruenter Grundflächen, ein Paar congruenter oder symmetrischer Ecken und das anliegende Paar Seitenkanten gleich haben.

129. Zwei Parallelepipeda sind congruent, wenn sie ein

Paar congruenter oder symmetrischer Ecken haben und die drei anstossenden Kanten einzeln einander gleich haben.

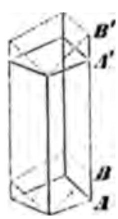
Wegen der Symmetrie zweier Gegenecken verschwindet die Symmetrie der Parallelepipeda.

## Inhaltsgleichheit der Prismen und Pyramiden.

130. Schneidet man einen prismatischen Raum durch zwei Paare paralleler Ebenen $\mathfrak{A} \parallel \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B} \parallel \mathfrak{B}'$, so sind die zwischen den beiden Paaren enthaltenen Prismen inhaltsgleich, wenn ihre Seitenkanten gleich sind.

Legt man die beiden Prismen so zusammen, dass zwei entsprechende Seitenkanten zusammenfallen, wodurch ein Punct der Fläche $\mathfrak{A}$ mit einem Puncte der Fläche $\mathfrak{B}$, ebenso ein Punct von $\mathfrak{A}'$ mit einem Puncte von $\mathfrak{B}'$ zusammenfällt, so sind die zwischen den Flächen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ enthaltenen Körper (Prismenstumpfe) congruent. Addirt man beiderseits den dazwischen liegenden Körper, so erhält man die Gleichheit des Inhaltes der beiden Prismen. Vergl. Art. 67.

Fig. 43.

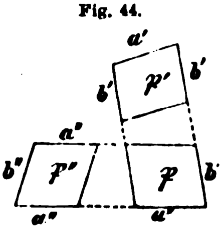



131. Jedes Parallelepipedon wird durch eine Diagonalfläche in zwei inhaltsgleiche, dreiseitige Prismen getheilt.

Ist das Parallelepipedon ein gerades, so sind die beiden Theile congruent; ist das Parallelepipedon ein schiefes, so lege man an die Endpuncte einer Seitenkante des Diagonalschnittes senkrechte Ebenen. Man erhält durch Erweiterung der Seitenebenen des gegebenen Parallepipedon ein zweites, diesem inhaltsgleiches, gerades, welches durch die Diagonalebene halbirt wird. Die beiden zwischen den Grundebenen enthaltenen Prismen sind inhaltsgleich, also jedes die Hälfte des zugehörigen Parallelepipedon.

Zusatz. Zwei dreiseitige Prismen, welche durch verschiedene Diagonalschnitte eines Parallelepipedon erhalten wurden, sind inhaltsgleich.

Fig. 44.




132. Zwei Parallelepipeda, welche gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben, sind inhaltsgleich.

Es seien

$\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ die zu vergleichenden Parallelepipeda; $a'$, $b'$; $a''$, $b''$ die Kanten ihrer Grundflächen; $c'$, $c''$ die Seitenkanten.

Von den Seiten $a'$, $a''$ sei $a' < a''$. In der Ebene der Grundfläche von $\mathfrak{P}'$ verlängere man den zwischen $b'$ und $b'$ enthaltenen Streifen beliebig und construire in demselben ein Parallelogramm, dessen Seiten $a''$ und $b'$ sind; dieses ist dem ersten flächengleich.

Den zwischen $a''$ und $a''$ soeben erhaltenen Streifen verlängere man und construire in demselben ein Parallelogramm, welches $b''$ und $a''$ zu Seiten hat, daher dem aus $a''$ und $b'$ construirten, also auch der Grundfläche von $\mathfrak{P}''$ flächengleich ist. Das Parallelogramm aus $a''$ und $b''$ ist daher dem von $\mathfrak{P}''$ congruent*).

Stellt man die Parallelepipeda $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$ so auf die ihnen congruenten Grundflächen, dass sie auf einerlei Seiten der obgewählten Ebene liegen, so müssen wegen der Gleichheit der Höhen die oberen Grundflächen in einer und derselben Ebene liegen.

Erweitert man die an $b'$ und $b'$ liegenden Seitenebenen von $\mathfrak{P}'$
" " " $a''$ " $a''$ " " " $\mathfrak{P}''$,
so erhält man ein Parallelepipedon $\mathfrak{P}$, dessen Grundfläche die Kanten $a''$, $b'$ sind**).

Nun ist nach 130

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}', \; \mathfrak{P} = \mathfrak{P}'', \text{ also auch } \mathfrak{P}' = \mathfrak{P}''.$$

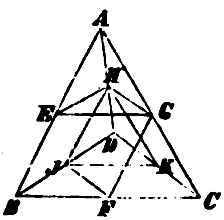
**133.** Da jedes dreiseitige Prisma als die Hälfte eines Parallelepipedon angesehen werden kann, jedes mehrseitige Prisma in dreiseitige zerlegt werden kann, so folgt:

a) Zwei dreiseitige Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe sind inhaltsgleich.

b) Zwei beliebige Prismen von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind inhaltsgleich.

**134.** Jede dreiseitige Pyramide lässt sich in zwei congruente Pyramiden und zwei inhaltsgleiche Prismen, welche zusammen grösser als die Hälfte der Pyramide sind, zerlegen.

Fig. 45.




a) Sind $E$, $F$, $G$, $H$, $J$, $K$ die Mitten der Kanten der Pyramide $ABCD$, so zerfällt dieselbe durch Ebenen, welche durch die Mitten der Kanten gelegt werden, in die Pyramiden $AEGH$, $DHJK$, und in die Prismen, deren eines das Dreieck $BFJ$, das andere das Dreieck $CFG$ zur Grundfläche hat. Diese beiden Prismen sind einander inhaltsgleich, wie man unmittelbar nach 131 ersieht, wenn man sie zu Parallelepipeda ergänzt, wovon das eine die Grundfläche $BFGE$, das zweite das doppelte Dreieck $CFG$ als Grundfläche besitzt.

---

*) Aus der Gleichheit der Grundflächen von $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ und der Voraussetzung $a' < a''$ folgt die Möglichkeit dieser Construction.

**) Der Deutlichkeit halber wurden in der Figur nur die Grundflächen gezeichnet.

b) Legt man durch die Halbirungspuncte je dreier in einer Ecke zusammenstossender Kanten Ebenen, so zerfällt die Pyramide in vier congruente Pyramiden der angegebenen Art und in ein Achtflach. Jede der Pyramiden ist daher kleiner als ein Viertel der ursprünglichen Pyramide.

c) Setzt man die angegebene Zerlegung mit den beiden in a) erhaltenen Pyramiden fort und bezeichnet man die ursprüngliche Pyramide mit $\mathfrak{T}$, die erhaltenen Theilpyramiden und Theilprismen mit $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \cdots$ und $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots$, so ist

$$\mathfrak{T} = 2\mathfrak{P}_1 + 2\mathfrak{T}_1,$$
$$\mathfrak{T} = 2\mathfrak{P}_1 + 4\mathfrak{P}_2 + 4\mathfrak{T}_2,$$
$$\mathfrak{T} = 2\mathfrak{P}_1 + 4\mathfrak{P}_2 + 8\mathfrak{P}_3 + 8\mathfrak{T}_3, \text{ u. s. w.}$$

Da nun $\mathfrak{T}_1 < \frac{1}{4}\mathfrak{T},\ \mathfrak{T}_2 < \frac{1}{4}\mathfrak{T}_1,\ \mathfrak{T}_3 < \frac{1}{4}\mathfrak{T}_2, \cdots$ ist,

so ist $2\mathfrak{T}_1 < \frac{1}{2}\mathfrak{T},\ 4\mathfrak{T}_2 < \frac{1}{4}\mathfrak{T},\ 8\mathfrak{T}_3 < \frac{1}{8}\mathfrak{T}, \cdots$ und

$$\mathfrak{T} = 2^1\mathfrak{P}_1 + 2^2\mathfrak{P}_2 + 2^3\mathfrak{P}_3 + \cdots + 2^n\mathfrak{P}_n + 2^n\mathfrak{T}_n,$$

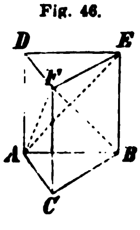
wo $2^n\mathfrak{T}_n < \frac{\mathfrak{T}}{2^n}$ ist, also kleiner werden kann. als jede noch so kleine gegebene Grösse.

135. Zwei dreiseitige Pyramiden, von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe, sind inhaltsgleich. Denn zerlegt man die beiden Körper in ihre Theilpyramiden und Theilprismen, so sind die letzteren in derselben Ordnung inhaltsgleich; es müssen daher auch die beiden Pyramiden, als die Summen der Theilprismen inhaltsgleich sein.

Zusatz. Zwei beliebige Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind inhaltsgleich.

136. Jedes dreiseitige Prisma lässt sich in drei inhaltsgleiche dreiseitige Pyramiden zerlegen.

Fig. 46.



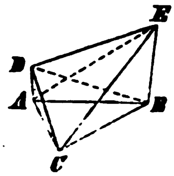

Legt man durch $A$, $B$, $F$ eine Ebene, so zerfällt das Prisma in eine dreiseitige Pyramide mit $ABC$ als Grundfläche und $F$ als Spitze, und in eine vierseitige Pyramide mit $ABED$ als Grundfläche und $F$ als Spitze. Legt man durch $A$, $E$, $F$ eine Ebene, so wird dadurch die letztere Pyramide halbirt. Jede dieser Hälften ist der ersten Pyramide raumgleich: denn betrachtet man z. B. $ACF$ und $ADF$ als Grundflächen und $B$ und $E$ als Spitzen u. s. w.

Zusatz. Jedes dreiseitige Prisma ist das Dreifache einer Pyramide, welche mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

137. Jeder Prismenstumpf ist gleich der Summe dreier Pyramiden, welche die Grundfläche des Prisma zur Grundfläche und die drei Ecken des Schnittes zu Spitzen haben.

a) Es gehe der Schnitt zunächst durch eine Ecke der Grundfläche, etwa durch $C$.

Fig. 47.




Legt man durch $BCD$ eine Ebene, so zerfällt der Prismenstumpf in die Pyramide mit $ABC$ als Grundfläche und $D$ als Spitze und in die Pyramide mit $BDE$ als Grundfläche und $C$ als Spitze. Letztere Pyramide ist, wegen $AD \parallel BE$, gleich der mit $ABE$ als Grundfläche und $C$ als Spitze, oder was dasselbe ist, mit $ABC$ als Grundfläche und $E$ als Spitze. Es ist daher der Prismenstumpf gleich der Summe zweier Pyramiden, welche $ABC$ als Grundflächen und resp. $D$ und $E$ als Spitzen haben.

b) Legt man durch die kleinste Seitenkante eine Ebene parallel zur Grundfläche, so zerfällt der gegebene Prismenstumpf $S$ in ein dreiseitiges Prisma $P$ und in einen Stumpf $S'$, wie in a). Aus $S = P + S'$ folgt, wenn man $P$ in die drei Pyramiden und $S'$ in die obigen zwei Pyramiden zerlegt, der angegebene Satz.

Zusatz. Zieht man durch den Schwerpunct $J$ des Schnittes $CDE$ eine Gerade $JM$ parallel den Kanten des Stumpfes, welche dem Dreiecke $ABC$ im Puncte $M$ begegnet, und schneidet die Ebene $CJM$ das Trapez $ABED$ in der Geraden $KL$, so ist

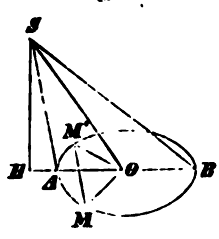
$$AD + BE = 2KL = 3JM;$$

d. h. der Prismenstumpf ist gleich einem Prisma mit derselben Grundfläche und mit Seitenkanten gleich der, vom Schwerpuncte der Schnittfläche parallel zu den Kanten, gezogenen Geraden.

### Der Kegel und der Cylinder.

138. a) Jede durch die Axe des Kegels gelegte Ebene schneidet die Mantelfläche in zwei Geraden, die Grundfläche in einem Durchmesser, also die ganze Oberfläche in einem Dreiecke.

Fig. 48.




Das durch eine, durch die Axe $SO$ und die Höhe $SH$, gelegte Ebene bestimmte Dreieck $SAB$ heisst das charakteristische Dreieck. Die Ebene desselben steht auf der Grundfläche senkrecht. Das charakteristische Dreieck theilt den Kegel in zwei symmetrische Theile.

Denn zieht man in der Grundfläche zwei, gegen den durch das charakteristische Dreieck bestimmten Durchmesser $AB$ gleichgeneigte Radien $OM$ und $OM'$, so haben deren Endpuncte von dem Durchmesser, also auch von der Ebene des charakteristischen Dreiecks gleichen Abstand.

b) Jede durch die Axe des Cylinders gelegte Ebene schneidet die Mantelfläche in zwei parallelen Geraden, die Grundflächen in zwei parallelen Durchmessern und die ganze Oberfläche in einem Parallelogramme.

Von den Schnitten wird der durch die Axe und eine Höhe gelegte, das charakteristische Parallelogramm genannt. Dasselbe theilt den Cylinder in zwei symmetrische Theile.

Beweis wie beim Kegel.

139. Zwei Kegel oder Cylinder mit kreisförmiger Grundfläche sind congruent, wenn die Radien der Grundflächen gleich sind und die Axen gleiche Länge und gleiche Neigung gegen die Grundfläche haben.

Denn zwei Kegel, deren Grundflächen und Spitzen zusammenfallen, sind congruent.

Beim Kegel und Cylinder verschwindet die Symmetrie.

Zwei gerade Kegel oder Cylinder sind congruent, wenn die Grundflächen gleiche Radien, und ihre Axen gleiche Länge haben.

## Die Kugel.

140. Man kann eine Kugel erzeugen, indem man einen Halbkreis, um seinen Durchmesser als Axe, eine volle Drehung machen lässt; der von demselben beschriebene Weg ist eine Kugel, die von der Kreislinie beschriebene Fläche eine Kugelfläche.

Statt des Halbkreises kann man auch einen ganzen Kreis um einen Durchmesser eine halbe Umdrehung machen lassen. Aus dieser Erzeugung einer Kugel durch einen Kreis, erklärt sich die Analogie vieler Eigenschaften von Kreis und Kugel.

Eine auf dem Axen-Durchmesser senkrechte Gerade beschreibt bei der Umdrehung eine auf dem Axen-Durchmesser senkrechte Ebene; die Endpuncte der durch die Gerade bestimmten Sehne einen Kreis. Steht die Gerade im Endpuncte des Durchmessers senkrecht, so beschreibt sie eine Ebene, welche die Kugel nur in einem Puncte trifft, und daher Berührungsebene an die Kugel heisst. Der gemeinsame Punct heisst der Berührungspunct.

Der Schnitt einer Ebene mit einer Kugelfläche ist ein Kreis, dessen Mittelpunct $P$ der Fusspunct der vom Kugelmittelpuncte $O$ auf die Ebene gefällten Senkrechten ist.

Denn sind $M, N, \cdots$ beliebige Puncte der Schnittlinie,

so ist $\triangle OPM \cong \triangle OPN$ u. s. w.,

also $PN = PN =$ dem Halbmesser des Schnittkreises.

Zusatz. Je grösser der Abstand einer Ebene vom Mittelpuncte der Kugel ist, desto kleiner ist der Kreis, welchen die Ebene abschneidet.

Eine durch den Mittelpunct der Kugel gelegte Ebene schneidet daher den grössten Kreis ab. Man nennt einen solchen einen grössten Kugelkreis.

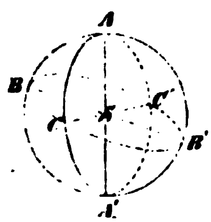
Die Endpuncte des auf der Ebene des grössten Kugelkreises senkrechten Durchmessers werden Pole genannt.

141. Zwei durch einen Durchmesser gelegte und durch diesen halbbegrenzte Ebenen bestimmen auf der Kugelfläche ein sphärisches Zweieck.

Die beiden an einen Endpunct des Durchmessers gezogenen Tangenten bilden einen Winkel, welcher der Winkel des Zweiecks genannt wird, derselbe ist gleich dem Keile der Ebenen des Zweiecks.

Durch drei Durchmesser sind drei Ebenen bestimmt, welche die Kugelfläche in acht sphärische Dreiecke zerlegen. Jedes Dreieck wird durch drei Bögen grösster Kreise gebildet. Diese Bögen heisen die Seiten, die von ihnen gebildeten Winkel die Winkel des sphärischen Dreiecks.

Fig. 49.




Die sphärischen Dreiecke dienen zur Darstellung der zugehörigen Dreikante. Man kann die in Art. 108—117 gegebenen Sätze unmittelbar auf das sphärische Dreieck übertragen.

142. Die Fläche des sphärischen Dreiecks dient zugleich als Mass des von den Ebenen gebildeten körperlichen Raumes.

Sind nämlich $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Flächen der den Winkeln $A$, $B$, $C$ entsprechenden Zweiecke, so ist (mit Berücksichtigung, dass die Dreiecke $ABC$ und $A'B'C'$ flächengleich sind), wenn mit $F$ die Fläche der Kugel, mit $f$ die Fläche von $ABC$ bezeichnet wird,

$$\alpha + (\beta - f) + (\gamma - f) = \tfrac{1}{2} F;$$

mithin

$$f = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} - \tfrac{1}{4} F.$$

143. Die Schnittlinie zweier Kugelflächen ist eine Kreislinie.

Denn sind $O$, $O'$ die Mittelpuncte der beiden Kugelflächen, so ist, wenn $M, N \cdots$ beliebige Puncte der Schnittlinie bedeuten,

$$\triangle\, OO'M \cong \triangle\, OO'N \cdots$$

Die von den Puncten $M$, $N$, $\cdots$ auf die Gerade $OO'$ gezogenen Senkrechten treffen diese Gerade in einem und demselben Puncte, etwa $P$, und sind von gleicher Länge = dem Radius des Schnittkreises, dessen Mittelpunct der Punct $P$ ist.

144. Alle in den Art. 86—88 angeführten Sätze für zwei Kreise gelten unmittelbar für zwei Kugeln, indem man das Wort Kreis mit Kugel vertauscht.

145. Eine Kreislinie kann mit einer Kugelfläche zwei, einen oder keinen Punct gemeinsam haben.

Schneidet nämlich eine Kreislinie eine Kugelfläche einmal, so muss sie als geschlossene Linie aus dem Innern der ebenfalls geschlossenen Kugelfläche ins Aeussere treten, d. h. die Kugel nochmals schneiden.

Hat ein Kreis mit einer Kugelfläche drei Puncte gemeinsam, so liegt er vollständig in der Kugelfläche. Hat ein Kreis mit einer Kugelfläche nur einen Punct gemeinsam, so berührt er die Kugel in diesem Puncte.

Eine unbegrenzte Gerade kann die Kugelfläche nur in zwei Puncten schneiden. Trifft die Gerade die Kugelfläche nur in einem Puncte, so berührt sie jene in diesem Puncte.

146. Drei Kugelflächen können sich in höchstens zwei Puncten schneiden.

Denn der Durchschnitt zweier Kugelflächen ist eine Kreislinie, welche die dritte Kugelfläche höchstens in zwei Puncten schneiden kann.

## Ein- und umschriebene Tetraeder.

147. Die sechs Ebenen, welche auf den Kanten eines Tetraeders in deren Mitten senkrecht stehen, schneiden sich in einem Puncte, welcher von den vier Ecken des Tetraeders gleichweit entfernt ist.

Die drei auf den Kanten einer Tetraederfläche senkrechten Ebenen schneiden sich nach 82 in einer auf der Fläche in dem Mittelpuncte des umschriebenen Kreises senkrechten Geraden. Alle Puncte dieser Geraden haben von den Ecken der Fläche gleichen Abstand. Je zwei dieser Geraden liegen in einer Ebene und schneiden sich in einem Puncte, welcher von

Die sechs Ebenen, welche die inneren Keile eines Tetraeders halbiren, schneiden sich in einem Puncte, welcher von den vier Flächen des Tetraeders gleichweit entfernt ist.

Halbirt man einen Keil durch eine Ebene, so haben deren Puncte von den Seiten des Keiles gleichen Abstand. Die drei Ebenen, welche die drei an einer Tetraederfläche liegenden Keile halbiren, schneiden sich in einem Puncte, welcher von den vier Tetraederflächen gleichweit entfernt ist. Die drei durch diesen Punct und die übrigen Kanten gelegten Ebenen halbiren die den Ecken gleichweit entfernt ist, woraus folgt, dass durch diesen Punct die erwähnten sechs Ebenen gehen.

Um ein gegebenes Tetraeder lässt sich eine Kugel beschreiben.

drei an diesen Kanten liegenden Tetraederkeile, woraus folgt, dass durch diesen Punct die erwähnten sechs Ebenen gehen.

In ein gegebenes Tetraeder lässt sich eine Kugel einschreiben.

Vergl. Art. 82.

Zusatz. Halbirt man die drei an einer Tetraederfläche liegenden Nebenkeile und die drei nicht anliegenden inneren Keile, so schneiden sich die Halbirungsebenen in einem Puncte, welcher ebenfalls von den vier Tetraederflächen gleichweit entfernt ist. Man erhält auf diese Art vier weitere Berührungskugeln, welche man äussere Berührungskugeln nennt, während man die obige Kugel die innere Berührungskugel nennt.

Ausser diesen fünf Kugeln existiren noch drei, von denen jede einzelne die Erweiterungen der Tetraederflächen, welche durch je zwei Gegenkanten gehen, berührt.

### Construction von Punctsystemen.

148. Ein System von $n$ Puncten zu construiren, welches einem gegebenen Systeme von $n$ Puncten congruent oder symmetrisch ist.

Es seien $A$, $B$, $C$, $D$, $\cdots$ die Puncte des gegebenen Systems; $A'$, $B'$, $C'$ $D'$, $\cdots$ die ihnen entsprechenden des zu construirenden.

Bei der Auflösung sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die gegebenen Puncte in einer Geraden, in einer Ebene oder im Raume überhaupt liegen.

a) Im ersten Falle nehme man in einer beliebigen zweiten Geraden den Punct $A'$ beliebig, mache $A'B' = AB$, gleichgiltig auf welcher Seite von $A'$. Jeder folgende Punct, etwa $C'$, wird so bestimmt, dass $A'C' = AC$ wird, wo $C'$ mit $B'$ auf derselben oder entgegengesetzten Seite von $A'$ liegt, je nachdem $C$ mit $B$ auf derselben oder entgegengesetzten Seite von $A$ liegt. Legt man die beiden Geraden so aufeinander, dass die Puncte $A$ und $A'$, $B$ und $B'$ zusammenfallen, so werden auch je zwei andere Punctpaare, wie $C$ und $C'$, zusammenfallen.

b) Im zweiten Falle nehme man in einer beliebigen zweiten Ebene einen Punct $A'$ beliebig an, den Punct $B'$ nehme man beliebig im Umfange des aus $A'$ mit dem Halbmesser $AB$ beschriebenen Kreises; für den dritten Punct $C'$ nehme man irgend einen der beiden Durchschnittspuncte der zwei aus den Puncten $A'$ mit $AC$ und aus $B'$ mit $BC$ als Halbmesser beschriebenen

Kreise. Jeden der folgenden Puncte, wie $D'$, erhält man, indem man aus $A'$ mit $AD$ und aus $B'$ mit $BD$ Kreise beschreibt und denjenigen der beiden Durchschnittspuncte nimmt, welcher mit $C'$ auf derselben oder entgegengesetzten Seite von $A'B'$ liegt, je nachdem $D$ mit $C$ auf derselben oder entgegengesetzten Seite von $AB$ liegt.

Legt man die beiden Ebenen so aufeinander, dass die Puncte $A$ und $A'$, $B$ und $B'$, $C$ und $C'$ zusammenfallen, so werden auch je zwei übrige Punctpaare zusammenfallen.

Die beiden Figuren, welche erhalten werden, indem man mit jedem der beiden Puncte $C'$ die Figur construirt, werden dadurch zur Deckung gebracht, dass man die eine um $A'B'$ als Axe einen halben Umschwung machen lässt. Vergl. Art. 119.

c) Im dritten Falle nehme man im Raume einen Punct $A'$ beliebig an; der Punct $B'$ ist ein beliebiger Punct der aus $A'$ mit dem Halbmesser $AB$ beschriebenen Kugelfläche. Der Punct $C'$ ist ein beliebiger Punct des Kreises, in dem die beiden aus $A'$ mit $AC$ und aus $B'$ mit $BC$ beschriebenen Kugelflächen sich schneiden. Der Punct $D'$ ist einer der beiden Durchschnittspuncte, in denen die drei aus $A'$ mit $AD$, aus $B'$ mit $BD$, aus $C'$ mit $CD$ als Halbmessern beschriebenen Kugelflächen sich schneiden.

Jeder der folgenden Puncte, wie $E'$, wird gefunden, indem man denjenigen der beiden Durchschnittspuncte nimmt, in welchem die drei aus $A'$ mit $AE$, aus $B'$ mit $BE$, aus $C'$ mit $CE$ beschriebenen Kugelflächen sich schneiden, welcher mit $D'$ auf derselben oder entgegengesetzten Seite der Ebene $A'B'C'$ liegt, je nachdem $E$ mit $D$ auf derselben oder entgegengesetzten Seite der Ebene $ABC$ liegt.

Vollendet man die beiden Gebilde, welche durch Verwendung der verschiedenen Durchschnittspuncte $D'$, die mit $D'$ und $D_1'$ bezeichnet werden sollen, erhalten werden, so seien

$$A',\ B',\ C',\ D',\ E',\ \cdots\cdot$$
$$A',\ B',\ C',\ D_1',\ E_1',\cdots\cdot$$

die beiden erhaltenen Systeme. Diese beiden Systeme sind, wie man unmittelbar aus 119 ersieht, symmetrisch.

Eines dieser beiden Systeme von Puncten kann mit dem gegebenen zur Deckung gebracht werden.

Legt man nämlich jedes der beiden Systeme nacheinander so auf das gegebene, dass die Puncte $A$ und $A'$, $B$ und $B'$, $C$ und $C'$ zusammenfallen, so wird einer der Puncte $D'$ oder $D_1'$, etwa der Punct $D'$ mit $D$ auf derselben Seite, der andere auf der entgegengesetzten Seite der Ebene $ABC$ liegen. Die

Systeme $A$, $B$, $C$, $D\cdots$ und $A'$, $B'$, $C'$, $D'\cdots\cdot$ sind dann nach 106 congruent.

149. Was die Construction des Systemes $A'$, $B'$, $C'$, $\cdots\cdot$ anbelangt, so ist im ersten Falle für den Punct $A'$ kein Abstand, für jeden der folgenden Puncte wie $B'$ ein Abstand, also für alle $n$ Puncte $(n-1)$ Abstände erforderlich. Im zweiten Falle ist für $A'$ kein Abstand, für $B'$ ein Abstand, für jeden der folgenden $(n-2)$ Puncte wie $C'$ zwei Abstände, also im Ganzen

$$0+1+2(n-2)=2n-3$$

Abstände erforderlich. Im dritten Falle ist für $A'$ kein Abstand, für $B'$ ein Abstand, für $C'$ zwei Abstände, für jeden der folgenden Puncte wie $D'$ sind drei Abstände, also im Ganzen

$$0+1+2+3(n-3)=3n-6$$

Abstände erforderlich.

Da nun bei einem Systeme von $n$ Puncten die Anzahl der Abstände je zweier Puncte $\frac{1}{2}n(n-1)$ beträgt, so sind

im ersten Falle $\frac{1}{2}n(n-1)-(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$
„ zweiten „ $\frac{1}{2}n(n-1)-(2n-3)=\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$
„ dritten „ $\frac{1}{2}n(n-1)-(3n-6)=\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$

übrige Abstände der beiden Figuren einander gleich. Ist daher nicht, wie in der Aufgabe vorausgesetzt wurde, das ganze System von Puncten gegeben, sondern nur die $(n-1)$, $(2n-3)$, $(3n-6)$ zur Construction eines congruenten oder symmetrischen erforderlichen Abstände, sowie auch die Seiten, auf denen die übrigen Puncte resp. vom Puncte $A$ oder von der Geraden $AB$, oder von der Ebene $ABC$ liegen, so lassen sich daraus auch die übrigen Abstände und alle dabei vorkommenden Grössen finden.

Statt der gegebenen Abstände kann man andere, durch sie bestimmte Grössen (Winkel, Keile) nehmen.

# Drittes Buch.

## Die Aehnlichkeit der Gestalten.

### Proportionale Strecken auf den Strahlen.

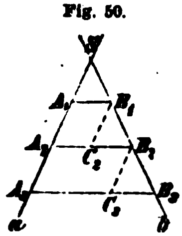
150. Unter dem Verhältnisse zweier Strecken derselben Geraden versteht man das Verhältniss ihrer Masszahlen, dieselben positiv oder negativ genommen, je nachdem die Strecken einen positiven oder negativen Werth haben.

Bei parallelen Geraden werden die positiven Richtungen übereinstimmend vorausgesetzt, ferner werden zwei gleichgerichtete Strecken von gleicher Grösse in parallelen Geraden als gleich betrachtet.

Aus zwei gleichen (rationalen oder irrationalen) Verhältnissen von Strecken erhält man eine Proportion. Mit den vier Gliedern derselben kann man die in der Arithmetik als gestattet bewiesenen Veränderungen vornehmen.

151. Sind zwei Strahlen $a$ und $b$ gegeben und trägt man auf dem einen, etwa $a$, vom Mittelpuncte $S$ aus eine Strecke $= \alpha$ mehrmals ab und zieht nach irgend einer Richtung in der Ebene der beiden Strahlen parallele Gerade, so schneiden diese auf dem zweiten Strahle vom Mittelpuncte $S$ aus dieselbe Anzahl gleicher Strecken, jede etwa $= \beta$, ab.

Fig. 50.




Ist nämlich auf dem Strahle $a$

$$SA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = \alpha$$
$$A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \cdots,$$

so ziehe man

$$B_1C_2,\ B_2C_3, \cdots \parallel SA,$$

und es folgt aus

$$\triangle SA_1B_1 \cong \triangle B_1C_2B_2 \cong \triangle B_2C_3B_3 \cdots,$$

dass $$SB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \cdots = \beta.$$

Aus dem Beweise folgt noch, dass

$$A_2B_2 = 2\,A_1B_1,\; A_3B_3 = 3\,A_1B_1, \cdots A_nB_n = n\,A_1B_1;$$

d. h. die Parallelen sind gleiche Vielfache einer Strecke, wie die Abschnitte auf den beiden Strahlen.

152. a) Sind $A_m$, $B_m$; $A_n$, $B_n$ zwei Paare von gleichvielten Puncten, so ist

$$SA_m : SA_n = SB_m : SB_n = A_mB_m : A_nB_n.$$

Allgemein: Sind $A$, $A'$ zwei beliebige Puncte des Strahles $a$, und zieht man $AB \parallel A'B'$ nach irgend einer Richtung, so ist

$$SA : SA' = SB : SB' = AB : A'B''.$$

Sind $SA$ und $SA'$ commensurabel, so kann man sie als Vielfache einer Strecke, etwa jedes $= \alpha$, betrachten; $SB$ und $SB'$ werden dann gleiche Vielfache einer Strecke, etwa jedes $= \beta$, sein.

Sind $SA$ und $SA'$ incommensurabel, so kann man die Verhältnisse $\frac{SA}{SA'}$ und $\frac{SB}{SB'}$ zwischen dieselben Grenzen bringen. Dasselbe gilt von dem Verhältnisse $\frac{AB}{A'B'}$.

Man kann nämlich immer $SA'$ als ein Vielfaches einer Strecke betrachten, z. B. indem man $SA'$ fortgesetzt ($n$ mal) halbirt, wodurch $SA' = 2^n\alpha = q\alpha$ wird. Wegen der Incommensurabilität wird $SA$ zwischen zwei Vielfache, etwa $p\,\alpha$ und $(p+1)\,\alpha$ fallen, also das Verhältniss $\frac{SA}{SA'}$ zwischen die Grenzen $\frac{p}{q}$ und $\frac{p+1}{q}$. Verbindet man $A'$ und $B'$ und zieht durch die Theilungspuncte Parallele mit $A'B'$, so wird $SB' = q\beta$, und $SB$ zwischen $p\beta$ und $(p+1)\,\beta$ fallen u. s. w.

Zusatz. Dieser Satz enthält die Lösung der Aufgabe: Zu drei gegebenen Strecken $a$, $b$, $c$ die vierte Proportionale $d$ zu finden.

Macht man $SA = a$, $SA' = b$, $SB = c$, und zieht $A'B' \parallel AB$, so wird $SB' = d$.

Anmerkung. Nimmt man auf das Zeichen Rücksicht, so ist $\frac{SA}{SA'}$ positiv oder negativ, je nachdem die Puncte $A$, $A'$, also auch die Puncte $B$, $B'$, auf derselben oder entgegengesetzten Seiten des Strahlenmittelpunctes $S$ liegen. Da bei parallelen Geraden die positive Richtung übereinstimmend angenommen wird, so ist die Gleichung ($a$) auch mit Rücksicht auf das Zeichen, d. i. vollständig richtig.

b) Umgekehrt, findet die Proportion

$$SA : SA' = SB : SB'$$

statt, so ist

$$AB \parallel A'B'.$$

Denn verbindet man $A$ mit $B$ und zieht von $A'$ eine Parallele, welche den Strahl $SB$ in $B''$ schneidet, so ist

$$SA : SA' = SB : SB'', \text{ also } SB' = SB'', \text{ d. h.}$$

der Punct $B''$ ist mit dem Puncte $B'$ identisch.

Fasst man a) und b) zusammen, so erhält man:

c) Sind in einer Ebene drei Strahlen $a, b, c$ gegeben und werden diese in den Puncten $A, A'$; $B, B'$; $C, C'$ so geschnitten, dass

$$SA : SA' = SB : SB' = SC : SC'$$

wird, so ist

$$AB \parallel A'B'; \; BC \parallel B'C'; \; CA \parallel C'A',$$

also sind auch die Winkel der Geraden $AB$, $BC$, $CA$ den Winkeln der Geraden $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ gleich.

Insbesondere: Liegen die Puncte $A, B, C$ in einer Geraden, so liegen die Puncte $A'$, $B'$, $C'$ ebenfalls in einer zur ersten parallelen Geraden.

Im Folgenden sollen zwei Puncte, wie $A$ und $A'$, $B$ und $B'$, u. s. w., welche auf demselben Strahle liegen, **entsprechende** Puncte genannt werden.

## Aehnliche Gebilde.

153. Ist im Raume ein Strahlenbüschel gegeben und bestimmt man auf jedem Strahle ein Paar entsprechender Puncte: $A, A'$; $B, B'$; $C, C'$; $\cdots$ dergestalt, dass

$$SA : SA' = SB : SB' = SC : SC' = \cdots = k$$

ist, so finden folgende Beziehungen statt:

1) Liegen die Puncte $A$, $B$, $C$, $\cdots$ in einer Geraden, so liegen die entsprechenden Puncte $A'$, $B'$, $C'$, $\cdots$ ebenfalls in einer parallelen Geraden.

Dem Durchschnittspuncte zweier Geraden entspricht der Durchschnittspunct der entsprechenden Geraden.

2) Liegen die vier Puncte $A, B, C, D$ in einer Ebene, so liegen die entsprechenden Puncte $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ ebenfalls in einer parallelen Ebene.

Denn schneiden sich die Geraden $AB$ und $CD$ in einem Puncte $Z$, so schneiden sich die entsprechenden Geraden $A'B'$ und $C'D'$ in dem entsprechenden Puncte $Z'$.

3) Einer ebenen Figur entspricht nach 1) und 2) eine ebene Figur mit gleichen Winkeln.

4) Der Durchschnittslinie zweier Ebenen entspricht die (parallele) Durchschnittslinie der entsprechenden Ebenen.

5) Einer krummen Fläche entspricht eine krumme Fläche, der Durchschnittslinie zweier Flächen entspricht die Durchschnittslinie der entsprechenden Flächen.

Der Berührungsebene einer Fläche entspricht eine, zu jener parallele, Berührungsebene an die entsprechende Fläche.

6) Einer Kugelfläche entspricht eine Kugelfläche, die Mittelpuncte der beiden Kugeln sind entsprechende Puncte. Denn ist $O$ der Mittelpunct der einen Kugelfläche, $O'$ der entsprechende Punct; $M, M'$ zwei beliebige entsprechende Puncte, so ist

$$\frac{SO}{SO'} = \frac{SM}{SM'} = \frac{OM}{O'M'} = \text{const.}$$

Da $OM$ unveränderlich ist, so muss auch $O'M'$ unveränderlich sein, d. h. der Punct $M'$ ist ein Punct der aus $O'$ mit dem Halbmesser $O'M'$ beschriebenen Kugelfläche.

7) Einer krummen Linie entspricht eine krumme Linie, dem Durchschnittspuncte zweier Linien entspricht der Durchschnittspunct der entsprechenden Linien.

Der Berührungslinie an eine Linie entspricht eine, zu jener parallele, Berührungslinie an die entsprechende Linie.

8) Einem Kreise entspricht ein Kreis, als Durchschnitt einer Kugel mit einer Ebene u. s. w.

9) Bilden die Verbindungslinien der Puncte $A, B, C, \cdots$ $A', B', C', \cdots$ zwei einfache ebene oder räumliche Vielecke, so folgt aus

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \cdots \cdot \frac{SA}{SA'} = \cdots \cdot$$

$$\frac{AB + BC + \cdots}{A'B' + B'C' + \cdots} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{SA}{SA'};$$

d. h. die Umfänge der beiden Vielecke stehen in demselben constanten Verhältnisse.

**154.** Die beiden nach der angegebenen Construction erhaltenen Gebilde $A, B, C, \cdots$ und $A', B', C', \cdots$ nennt man **ähnliche und ähnlich liegende** Gebilde. Der Strahlenmittelpunct $S$ heisst der **Aehnlichkeitspunct**, und zwar ein äusserer oder innerer, je nachdem die Paare entsprechender Puncte auf derselben oder entgegengesetzten Seiten des Aehnlichkeitspunctes liegen, d. h. je nachdem das constante Verhältniss $SA : SA'$ positiv oder negativ ist.

Ist $SA : SA' = +1$, so sind die beiden Gebilde congruent. ist $SA : SA' = -1$, so sind die beiden Gebilde symmetrisch. Die Aehnlichkeit ist daher eine allgemeinere Beziehung (Verwandtschaft) als die Congruenz und Symmetrie.

Dass zwei Gebilde $G$ und $H$ ähnlich sind, wird durch

$$G \sim H$$

bezeichnet.

Anmerkung. Der unendliche Raum wird hier gleichsam doppelt gedacht; man kann nämlich einen beliebigen Punct desselben als einen Punct, sowohl der einen als der andern Figur, betrachten. Ist $A$ ein Punct der ersten Figur, so erhält man (auf dem Strahle $SA$) den entsprechenden $A'$ der zweiten Figur aus $\frac{SA}{SA'} = k$. Ist $A$ ein Punct der zweiten Figur, so erhält man (auf dem Strahle $SA$) den entsprechenden $A''$ der ersten Figur aus $\frac{SA''}{SA} = k$.

Die Puncte $A$ und $A'$, $A''$ und $A$ sind entsprechende Punctpaare.

155. Zwei Gebilde, für welche sich ein Aehnlichkeitspunct finden lässt, werden ähnlich genannt.

Zwei Kugeln haben für jede beliebige Lage einen äussern und einen innern Aehnlichkeitspunct.

Denn zieht man von den Mittelpuncten $O$ und $O'$ die Radien $OM$ und $O'M'$ parallel und in derselben Richtung und verbindet die Puncte $M$ und $M'$, so begegnet die Gerade $MM'$ der Verlängerung der Centrilinie $OO'$ in einem Puncte $A$, so dass

$$OA : O'A = OM : O'M'$$

ist. Zieht man jedoch die Radien $ON$ und $O'M'$ parallel, aber in verschiedenen Richtungen, und verbindet die Puncte $N$ und $M'$, so begegnet die Gerade $NM'$ der Centrilinie $OO'$ in einem Puncte $I$, so dass

$$OI : O'I = ON : O'M'$$

ist. Die Puncte $A$ und $I$ sind daher unabhängig von der Lage der parallelen Radien $OM$, $ON$, $O'M'$, es ist daher der Punct $A$ der äussere, der Punct $I$ der innere Aehnlichkeitspunct der beiden Kugeln. Jede gerade Linie, welche durch einen Aehnlichkeitspunct geht, heisst ein Aehnlichkeitsstrahl, und zwar ein äusserer oder innerer, je nachdem sie durch den Punct $A$ oder durch den Punct $I$ geht. Jeder Aehnlichkeitsstrahl schneidet beide Kugeln im Allgemeinen in zwei Puncten, z. B. begegnet der Strahl $AMM'$ der Kugel $O$ noch im Puncte $M_1$, so begegnet er der Kugel $O'$ in einem Puncte $M_1'$, so dass $OM_1 \parallel O'M_1'$ ist. Fallen die Puncte $M$ und $M_1$ zusammen, so fallen die Puncte $M'$ und $M_1'$ ebenfalls zusammen, und die Gerade $AM$ geht in eine gemeinschaftliche Tangente an beide Kugeln über.

Wegen $OM = ON$ ist

$$AO : AO' = IO : IO'.$$

Berücksichtigt man das Zeichen, so hat man

$$AO : AO' = -IO : IO'.$$

**Zusatz.** Sind $r, r'$ die Halbmesser der beiden Kugeln, so ist $OO' = c$, $r > r'$:

$$OA = \frac{cr}{r - r'},\quad O'A = \frac{cr'}{r - r'},$$

$$OI = \frac{cr}{r + r'},\quad O'I = \frac{cr'}{r + r'}.$$

Daraus folgt:

a) $OA > O'A$, $OI > O'I$, d. h. die Aehnlichkeitspuncte liegen näher dem Mittelpuncte der Kugel, die den kleineren Radius hat.

b) 1. Liegt die eine Kugel ganz ausserhalb der anderen, so liegen die Aehnlichkeitspuncte ausserhalb der beiden Kugeln.

2. Berühren sich die Kugelflächen von aussen, so ist der Berührungspunct der innere Aehnlichkeitspunct.

3. Schneiden sich die Kugelflächen, so liegt der äussere Aehnlichkeitspunct ausserhalb, der innere innerhalb der beiden Kugeln.

4. Berühren sich die Kugelflächen von innen, so ist der Berührungspunct der äussere Aehnlichkeitspunct.

5. Liegt die eine Kugel innerhalb der anderen, so liegen die Aehnlichkeitspuncte innerhalb der kleineren Kugel.

6. Sind die Halbmesser der beiden Kugeln einander gleich, so liegt der äussere Aehnlichkeitspunct im Unendlichen, der innere auf der Mitte von $OO'$.

Dasselbe gilt auch von zwei Kreisen, welche in derselben Ebene liegen.

156. Alle im vorigen Buche über Congruenz und Symmetrie zweier Gebilde ausgesprochenen Sätze lassen sich unmittelbar auf die Aehnlichkeit übertragen, indem man für die Gleichheit der Seiten oder Kanten die Gleichheit der Verhältnisse dieser Grössen setzt.

Sind nur zwei Seiten vorhanden, so kann man die darauf bezügliche Bedingung weglassen, indem zwei Grössen nur ein Verhältniss bilden.

Insbesondere sind zwei Dreiecke ähnlich:

a) Wenn zwei Seiten proportionirt und die eingeschlossenen Winkel einzeln einander gleich sind.

b) Wenn zwei Winkel einzeln einander gleich sind.

c) Wenn die drei Seiten des einen den drei Seiten des anderen proportionirt sind.

d) Wenn zwei Seiten proportionirt, die gegenüberliegenden Winkel der einen Seite einzeln einander gleich, und das andere Paar Gegenwinkel zugleich spitze, rechte oder stumpfe Winkel sind.

Bei dem Beweise im Einzelnen kann man sich des Hilfssatzes bedienen: Sind zwei Gebilde congruent und ist das eine einem dritten ähnlich, so ist auch das andere diesem ähnlich.

Besitzen die Dreiecke $ABC$ und $\mathfrak{ABC}$ eine der in a) bis d) angegebenen Beziehungen, so ist, wenn man im Dreiecke $ABC$ $A'B' \parallel AB$ zieht,

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C.$$

Für a) mache man, wenn $\mathfrak{C} = C$ vorausgesetzt wird,

$$CA' = \mathfrak{CA},$$

dann folgt aus

$$CA : \mathfrak{CA} = CB : \mathfrak{CB}$$
$$CA : CA' = CB : CB'$$
$$\mathfrak{CB} = CB'$$

mithin $\qquad \triangle A'B'C \cong \triangle \mathfrak{ABC}.$

Für b) folgt, wenn $CA' = \mathfrak{CA}$ gesetzt wird, unmittelbar

$$\triangle A'B'C \cong \triangle \mathfrak{ABC}.$$

Für c) folgt diese Congruenz aus $CA' = \mathfrak{CA}$ und

$$CA : \mathfrak{CA} = CB : \mathfrak{CB} = BA : \mathfrak{BA},$$
$$CA : CA' = CB : CB' = BA : B'A'.$$

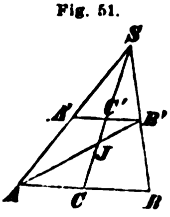
d) wird wie a) bewiesen.

157. Durch Uebertragung der im Art. 149 gefundenen Resultate erhält man: Sind in einem Systeme von $n$ Puncten in einer Geraden, in einer Ebene oder im Raume überhaupt resp. $n - 2$, $2n - 4$, $3n - 7$ von einander unabhängige Verhältnisse der Abstände gegeben, so lassen sich aus diesen alle übrigen Verhältnisse der Abstände bestimmen.

### Anwendungen der Aehnlichkeitspuncte.

158. Ist $C$ die Mitte des Segmentes $AB$, also $C'$ die Mitte von $A'B'$, so folgt, wenn man mit $I$ den Durchschnittspunct der Geraden $SC$ und $AB'$ bezeichnet,

Fig. 51.




$$\triangle ACI \sim \triangle B'C'I$$
$$AI : IB' = AC : C'B' = AB : A'B'.$$

Dieselbe Beziehung erhält man für den Durchschnittspunct der Geraden $SC$ und $BA'$. Die drei Geraden $AB'$, $BA'$, $SC$ schneiden sich daher in demselben Puncte $I$.

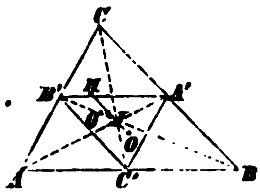
Umgekehrt. Zieht man in einem Dreiecke $ABS$ die Gerade $A'B' \parallel AB$ und verbindet den Durchschnittspunct $I$ der Geraden $AB'$ und $BA'$ mit der Spitze $S$, so halbirt die Gerade $SI$ das Segment $AB$ oder $A'B'$.

159. Ist $A'$ die Mitte von $AS$, $B'$ die Mitte von $BS$, so erhält man: die drei Geraden, welche die Mitten der Seiten eines Dreiecks mit den gegenüberliegenden Spitzen verbinden, schneiden sich in demselben Puncte.

Dieser Punct wird der Schwerpunct des Dreiecks genannt. Die Verbindungslinien heissen die Schwerlinien. Dabei ist wegen $AB = 2A'B'$, $AI = 2IB'$, $BI = 2IA'$, $SI = 2IC$.

160. Es seien $A'$, $B'$, $C'$ die Mitten der den Spitzen $A$, $B$, $C$ gegenüberliegenden Seiten; $I$ der Schwerpunct. Errichtet man in den Puncten $A'$, $B'$, $C'$ Senkrechte auf die Dreiecksseiten, so durchschneiden sich diese nach 82 in einem Puncte $O$. Dieser Punct ist zugleich der Durchschnittspunct der Höhen des Dreiecks $A'B'C'$, da dieses Dreieck mit dem Dreieck $ABC$, in Bezug auf $I$ als innern Aehnlichkeitspunct, ähnlich ist. Der absolute Werth des Aehnlichkeitsverhältnisses ist

Fig. 82.




$$IA : IA' = 2 : 1.$$

Um für das Dreieck $ABC$ den dem Puncte $O$ (als Punct der zweiten Eigur) entsprechenden Punct $H$ zu finden, verlängere man die Verbindungslinie $OI$ über $I$ hinaus, bis $IH = 2\,OI$ ist. Der Punct $H$ ist zugleich der Höhendurchschnittspunct des Dreiecks $ABC$. Es ergibt sich daher Folgendes:

a) In jedem Dreiecke schneiden sich die drei Höhen in einem Puncte.

b) In jedem Dreiecke liegen der Schwerpunct, der Höhendurchschnittspunct und der Mittelpunct des umschriebenen Kreises in einer Geraden, und zwar ist die Entfernung des letzteren vom Schwerpuncte die Hälfte der Entfernung des Höhendurchschnittspunctes. Euler'scher Satz.

Betrachtet man $O$ als einen Punct des Dreiecks $ABC$, so wird der entsprechende Punct $O'$ des Dreiecks $A'B'C'$ gefunden, indem man $IO' = \frac{1}{2} OI$ macht. Der Punct $O'$ ist der Mittelpunct des um das Dreieck $A'B'C'$ beschriebenen Kreises.

Setzt man $O'I = a$, so werden die absoluten Längen von

$$IO = 2a,\quad HI = 4a,\quad HO = 6a,\quad HO' = HI - O'I = 3a$$
$$O'I : IO : HO' : HI : HO = 1 : 2 : 3 : 4 : 6.$$

Ausserdem folgt noch:

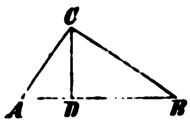
$$O'I : IO = O'H : OH, \text{ d. h.}$$

der Punct $H$ kann als äusserer Aehnlichkeitspunct der beiden aus $O$ und $O'$ um $ABC$ und $A'B'C'$ beschriebenen Kreise betrachtet werden*).

## Der Pythagoräische Satz.

161. Zieht man vom Scheitel $C$ des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks $ABC$ eine Senkrechte $CD$ auf die Hypotenuse, so folgt

Fig. 53.



$$\triangle ABC \sim \triangle ADC,$$

also

$$AB : AC = AC : AD,$$

oder

$$\overline{AC}^2 = AB \cdot AD. \tag{1}$$

Ebenso ist

$$\overline{BC}^2 = AB \cdot BD.$$

Durch Addition erhält man

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 \tag{2}$$

d. h. das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten.

Aus $\triangle ADC \sim \triangle DBC$

folgt $AD : CD = CD : DB$,

oder

$$AD \cdot DB = \overline{CD}^2. \tag{3}$$

162. Aus den Gleichungen (1) und (3) erhält man die Lösung folgender Aufgaben:

a) Zu zwei gegebenen Strecken $a$ und $c$ die mittlere Proportionale $b$ zu finden.

1) Man beschreibe über die grössere Strecke $a = AB$ als Durchmesser einen Halbkreis, trage die kleinere $c = AD$ vom Endpuncte $A$ aus ab, errichte im Endpuncte $D$ eine Senkrechte, welche den Kreis im Puncte $C$ schneidet. $AC = b$ ist die mittlere Proportionale.

2) Man mache auf derselben Geraden $AD = a$, $DB = c$, beschreibe über $AB$ einen Halbkreis, ziehe $DC \perp AB$, so ist $DC = b$ die mittlere Proportionale.

*) Der Deutlichkeit halber wurden, um die Figur nicht zu compliciert zu machen, diese beiden Kreise nicht gezeichnet und alle überflüssigen Linien weggelassen.

b) Zu zwei gegebenen Strecken $a$ und $b$ die dritte Proportionale zu finden. Lösung analog.

163. Aus (1) folgt

$$\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 = AD : DB, \quad \sqrt{AD} : \sqrt{DB} = AC : CB;$$

damit lassen sich die Aufgaben lösen: a) Das Verhältniss zweier Quadrate, b) das Verhältniss zweier Quadratwurzeln in ein einfaches Verhältniss zu verwandeln. Lösung analog.

164. Die Constructionen von Ausdrücken von der Form

$$\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \sqrt{a^2 \pm b^2 \pm c^2 \pm \cdots}$$

werden mit Hilfe des Pythagoräischen Satzes vollzogen. Vermittelst dieses Satzes wird auch die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl geometrisch bestimmt, indem man die Zahl als die Summe oder Differenz von Quadraten darstellt; z. B.

$$\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}, \quad \sqrt{7} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 - 1^2}$$

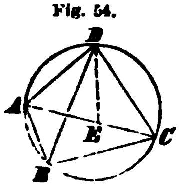
u. s. w.

## Der Ptolemäische Satz.

164. In jedem hohlwinkligen Kreisvierecke ist die Summe der Producte der Gegenseiten gleich dem Producte der Diagonalen.

Macht man im hohlwinkligen Kreisvierecke $ABCD$ Winkel $CDE = ADB$, so ist

Fig. 54.





$$\triangle ABD \sim \triangle ECD$$
$$\triangle BCD \sim \triangle AED,$$

also
$$AB : BD = EC : CD$$
$$BC : BD = AE : AD$$

oder
$$AB \cdot CD = BD \cdot EC$$
$$BC \cdot AD = BD \cdot AE,$$

also
$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AC.$$

## Potenz, Potenzlinie und Potenzebene.

165. Zieht man in der Ebene eines Kreises von irgend einem Puncte $P$ eine Gerade, welche dem Umfange des Kreises in den Puncten $M$ und $N$ begegnet, so ist das Product

$$PM \cdot PN$$

eine constante Grösse für jede durch den Punct $P$ gezogene Gerade.

Denn begegnet eine zweite Gerade dem Kreise in den Punc-

Fig. 55.

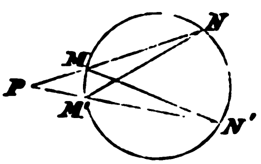
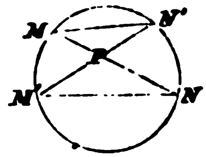



Fig. 56.




ten $M'$ und $N'$, so ist

$$\triangle PMN' \sim \triangle PM'N,$$

also $$PM : PM' = PN' : PN$$

oder $$PM \cdot PN = PM' \cdot PN' = \text{const.}$$

Dieses constante Product heisst die **Potenz** des Punctes $P$ für den gegebenen Kreis.

Geht die Gerade $PM'N'$ durch den Mittelpunct $O$, so stellt der Ausdruck $(PO + r)\,(PO - r) = \overline{PO}^2 - r^2$ die Potenz des Punctes $P$ dar.

Die Potenz ist positiv oder negativ, je nachdem der Punct $P$ ausserhalb oder innerhalb des Kreises liegt.

Liegt der Punct $P$ ausserhalb des Kreises, so ist die Potenz gleich dem Quadrate der von $P$ an den Kreis gezogenen Tangente.

Liegt der Punct $P$ innerhalb des Kreises, so ist der absolute Werth der Potenz gleich dem Quadrate der halben Sehne, welche auf dem durch $P$ gezogenen Durchmesser im Puncte $P$ senkrecht steht.

Zusatz. Eine Strecke $AB = a$ ist durch einen Punct $C$ nach dem äusseren und mittleren Verhältnisse getheilt, wenn der grössere Abschnitt $AC = x$ das geometrische Mittel aus der ganzen Strecke und dem kleineren Abschnitte $CB = a - x$ ist; also

$$x^2 = a\,(a - x) \text{ oder } a^2 = x\,(a + x).$$

Aus diesem folgt: Beschreibt man mit dem Durchmesser $a$ einen Kreis und zieht an einen Punct eine Tangente von der Länge $a$, so bestimmt der ausserhalb des Kreises liegende Theil der vom Endpuncte durch den Mittelpunct gezogenen Secante den grösseren Abschnitt $x$.

166. Umgekehrt. Liegen auf zwei Geraden, welche sich im Puncte $P$ schneiden, vier Puncte: $M$ und $N$ auf der einen, $M'$ und $N'$ auf der anderen dergestalt, dass

$$PM \cdot PN = PM' \cdot PN'$$

ist, so liegen die vier Puncte $M$, $N$, $M'$, $N'$ im Umfange eines Kreises.

Denn beschreibt man durch drei Puncte, etwa $M$, $N$, $M'$ einen Kreis, und begegnet dieser der Geraden $PM'$ im Puncte $N''$, so folgt aus

$$PM' \cdot PN'' = PM \cdot PN = PM' \cdot PN',$$

dass der Punct $N''$ mit $N'$ identisch ist.

167. Sind in derselben Ebene zwei Kreise $O$ und $O'$ gegeben, so nennt man den geometrischen Ort aller Puncte, deren Potenzen für beide Kreise einander gleich sind, die Potenzlinie der beiden Kreise; es ist dies eine Gerade, welche auf der Centrilinie $OO'$ senkrecht steht.

Denn ist $P$ ein Punct der Potenzlinie und sind $r$, $r'$ die Radien der Kreise, so stellt der Ausdruck $\overline{PO}^2 - r^2$ die Potenz des Punctes $P$ hinsichtlich des Kreises $O$, und der Ausdruck $\overline{PO'}^2 - r'^2$ die Potenz des Punctes $P$ hinsichtlich des Kreises $O'$ dar; wegen der Gleichheit dieser Potenzen ist daher

$$\overline{PO}^2 - r^2 = \overline{PO'}^2 - r'^2.$$

Zieht man vom Puncte $P$ eine Senkrechte auf die Gerade $OO'$, welche derselben im Puncte $C$ begegnet, so geht die obige Gleichung über in

$$\overline{CO}^2 - r^2 = \overline{CO'}^2 - r'^2.$$

Für alle Puncte der unbegrenzten Geraden $PC$ findet diese Gleichung statt; es ist daher diese Gerade die Potenzlinie der beiden Kreise.

Für die Bestimmung des Punctes $C$ hat man

$$\overline{CO}^2 - \overline{CO'}^2 = r^2 - r'^2, \quad OC + CO' = OO' = d,$$

woraus durch Division

$$OC - CO' = \frac{r^2 - r'^2}{d}$$

und damit

$$OC = \tfrac{1}{2} d + \frac{r^2 - r'^2}{2d}$$

$$CO' = \tfrac{1}{2} d - \frac{r^2 - r'^2}{2d}$$

folgt.

Zusätze.

a) Für zwei Kreise, welche sich schneiden, ist die gemeinsame Secante die Potenzlinie.

b) Berühren sich die beiden Kreise, so ist ihre gemeinsame Berührungslinie die Potenzlinie.

c) Liegt der eine Kreis ganz ausserhalb oder ganz innerhalb des anderen, so liegt die Potenzlinie ganz ausserhalb der beiden Kreise und zwar im ersteren Falle zwischen den beiden Kreisen, im letzteren Falle liegt der Punct $C$ näher dem Mittelpuncte des kleineren Kreises.

d) Die von einem Puncte $P$ der Potenzlinie ausserhalb der beiden Kreise an dieselben gezogenen Tangenten, sind von gleicher Länge.

Beschreibt man daher aus dem Puncte $P$ als Mittelpunct mit der Länge dieser Tangenten als Halbmesser eine Kreislinie, so schneidet diese die beiden gegebenen rechtwinklig.

168. Ist $S$ ein Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise, und zieht man durch denselben einen Aehnlichkeitsstrahl, welcher dem Kreise $O$ in den Puncten $M$ und $N$, dem Kreise $O'$ in den Puncten $M'$ und $N'$ begegnet, so folgt aus

$$SM : SM' = SN : SN'$$
$$SM \cdot SN' = SM' \cdot SN.$$

Nun ist
$$SM \cdot SN = k^2$$
$$SM' \cdot SN' = l^2,$$

wo $k$ und $l$ für alle durch $S$ gezogene Strahlen constant sind. Multiplicirt man diese Gleichungen, so erhält man mit Berücksichtigung der obigen Gleichung

$$SM \cdot SN' = SM' \cdot SN = kl.$$

Zwei Paare von Puncten, wie $M$ und $N'$ oder $N$ und $M'$ nennt man potenzhaltende Puncte des Aehnlichkeitspunctes $S$.

169. Die in Art. 165 bis 168 gegebenen Beziehungen gelten auch für die Kugel.

Dreht man die beiden Kreise und deren Potenzlinie um die Centrilinie als Axe, so beschreiben die Kreise Kugelflächen, die Potenzlinie eine auf der Centrilinie der beiden Kugeln senkrechte Ebene.

Man erhält folgende Sätze:

a) Zieht man von einem beliebigen Puncte $P$ an eine Kugel eine Gerade, welche der Oberfläche in den Puncten $M$ und $N$ begegnet, so ist das Product

$$PM \cdot PN$$

eine constante Grösse für jede durch den Punct $P$ gezogene Gerade.

Dieses constante Product heisst die Potenz des Punctes $P$ für die gegebene Kugel.

b) Der geometrische Ort aller Puncte, deren Potenzen für zwei gegebene Kugeln einander gleich sind, ist eine auf der Centrilinie der beiden Kugeln senkrechte Ebene, welche die Potenzebene der beiden Kugeln heisst.

## Aehnlichkeitspuncte und Potenzen dreier Kreise und dreier Kugeln.

170. Sind in derselben Ebene drei Kreise $O$, $O'$, $O''$ gegeben, so erhält man drei äussere und drei innere Aehnlichkeitspuncte. Es seien

| | | | |
|---|---|---|---|
| für $O$ und $O'$ | die Aehnlichkeitspuncte | $A''$ | und $I''$ |
| „ $O$ „ $O''$ | „ „ | $A'$ | „ $I'$ |
| „ $O'$ „ $O''$ | „ „ | $A$ | „ $I$. |

Von diesen Puncten liegen in einer Geraden:

a) Die drei äusseren Aehnlichkeitspuncte.

b) Je zwei innere Aehnlichkeitspuncte und derjenige äussere, welcher den von den inneren Aehnlichkeitspuncten verschiedenen Index hat.

1) Da die inneren Aehnlichkeitspuncte auf den Seiten des Dreiecks $O\,O'\,O''$ liegen, so können dieselben nicht in einer Geden liegen.

2) Weil die äusseren Aehnlichkeitspuncte auf den Verlängerungen der Seiten des Dreiecks $O\,O'\,O''$ liegen, so können zwei äussere Aehnlichkeitspuncte und der innere Aehnlichkeitspunct mit dem verschiedenen Index nicht in einer Geraden liegen.

3) Die Gerade $AA'$ ist ein Aehnlichkeitsstrahl für die Kreise $O'$ und $O''$, weil sie durch den Punct $A$ geht; ebenso für die Kreise $O$ und $O''$, weil sie durch den Punct $A'$ geht; also auch für die Kreise $O$ und $O'$: sie muss daher durch den Punct $A''$ gehen.

Anderer Beweis von a).

Man ziehe von den Mittelpuncten $O, O', O''$ parallele Gerade nach irgend einer Richtung; es seien $p, p', p''$ deren Längen bis zum Durchschnitte mit der Geraden $AA'$; $r$, $r'$, $r''$ seien die Radien der drei Kreise. Nun ist

$r' : r'' = p' : p''$, da $A$ ein Aehnlichkeitspunct von $O', O''$ ist,
$r : r'' = p : p''$ „ $A'$ „ „ „ $O, O''$ „

also auch

$$r : r' = p : p'.$$

Ist $X$ der Durchschnittspunct der Geraden $OO'$ und $AA'$, so folgt aus der letzten Gleichung

$$OX : O'X = r : r',$$

d. h. $X$ ist der äussere Aehnlichheitspunct der Kreise $O$ und $O'$.

Auf dieselbe Art beweist man, dass die Gerade $II'$ durch den Punct $A''$ geht.

Man erhält daher die folgenden Geraden:

$$A\,A'\,A''$$
$$A\,I'\,I''$$
$$I\,A'\,I'$$
$$I\,I'\,A''$$

welche die Aehnlichkeitsaxen der drei Kreise genannt werden, und zwar die erste die äussere, die drei übrigen die inneren.

171. Es sei für $O$ und $O'$ die Potenzlinie $p''$
„ $O$ „ $O''$ „ $p'$
„ $O'$ „ $O''$ „ $p$.

Die drei Potenzlinien schneiden sich in demselben Puncte. Denn ist $P$ der Durchschnittspunct der Geraden $p''$ und $p'$, so sind die Potenzen des Punctes $P$ für alle drei Kreise einander gleich, d. h. $P$ ist auch ein Punct der Potenzlinie $p$ der Kreise $O'$ und $O''$, oder die drei Potenzlinien dreier Kreise schneiden sich in einem Puncte. Dieser Punct heisst das Potenzcentrum der drei Kreise. Liegen die Mittelpuncte der drei Kreise in einer Geraden, so sind deren Potenzlinien parallel, d. h. das Potenzcentrum liegt im Unendlichen.

172. Die Beziehungen der beiden letzten Art. lassen sich unmittelbar auf die Kugel übertragen.

a) Für drei Kugeln erhält man eine äussere und drei innere Aehnlichkeitsaxen, wie man ersieht, wenn man durch die Mittelpunkte eine Ebene legt.

Zusatz. Jede durch eine Aehnlichkeitsaxe gelegte Ebene, welche die eine Kugel berührt, berührt auch die beiden anderen.

Liegt jede Kugel ausserhalb der beiden anderen, so bilden die vier Aehnlichkeitsaxen die Kanten von vier Keilen, deren Seiten jede der drei Kugeln berühren.

b) Ebenso wie in 171 beweist man, dass die drei Potenzebenen dreier Kugeln sich in derselben Geraden schneiden, indem man $P$ als Durchschnittslinie der beiden Potenzebenen $p''$ und $p'$ betrachtet u. s. w.

## Aehnlichkeitspuncte und Potenzen von vier Kugeln.

173. Bei vier Kugeln $O_0$, $O_1$, $O_2$, $O_3$ erhält man sechs äussere und sechs innere Aehnlichkeitspuncte; diese Puncte liegen in folgender Ordnung auf acht Ebenen, wobei allgemein durch $A_{rs}$, $I_{rs}$ die Aehnlichkeitspuncte von

$$O_r \text{ und } O_s$$

bezeichnet sind:

$$\begin{array}{cccccc}
A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{12} & A_{13} & A_{23} \\
I_{01} & I_{02} & I_{03} & A_{12} & A_{13} & A_{23} \\
I_{01} & I_{12} & I_{13} & A_{02} & A_{03} & A_{23} \\
I_{02} & I_{12} & I_{23} & A_{01} & A_{03} & A_{13} \\
I_{03} & I_{13} & I_{23} & A_{01} & A_{02} & A_{12} \\
I_{01} & I_{02} & I_{13} & I_{23} & A_{03} & A_{12} \\
I_{01} & I_{03} & I_{12} & I_{23} & A_{02} & A_{13} \\
I_{02} & I_{03} & I_{12} & I_{13} & A_{01} & A_{23}
\end{array}$$

Die erste Ebene, welche die sechs äusseren Aehnlichkeitspuncte enthält, soll äussere Aehnlichkeitsebene genannt werden; die vier folgenden Ebenen, welche drei äussere und drei innere Aehnlichkeitspuncte enthalten, sollen mittlere Aehnlichkeitsebenen; und die drei letzten Ebenen, welche vier innere und zwei äussere Aehnlichkeitspuncte enthalten, sollen innere Aehnlichkeitsebenen genannt werden.

Man beweist die Richtigkeit dieser Lagen der Aehnlichkeitspuncte in den erwähnten acht Ebenen, indem man beachtet, dass immer je sechs solcher Puncte auf drei Geraden liegen, von denen jede die übrigen schneidet. Von den drei äusseren Aehnlichkeitsaxen

$$\begin{array}{ccc}
A_{01} & A_{02} & A_{12} \\
A_{01} & A_{03} & A_{13} \\
A_{02} & A_{03} & A_{23}
\end{array}$$

schneidet jede die beiden anderen, also müssen diese drei Geraden, welche die sechs äusseren Aehnlichkeitspuncte enthalten, in einer Ebene liegen.

Ebenso schneiden sich die inneren Aehnlichkeitsaxen

$$\begin{array}{ccc}
I_{01} & I_{02} & A_{12} \\
I_{01} & I_{03} & A_{13} \\
I_{02} & I_{03} & A_{23}
\end{array}$$

gegenseitig, also liegen die Puncte

$$I_{01},\ I_{02},\ I_{03},\ A_{12},\ A_{13},\ A_{23}$$

in einer Ebene.

Dasselbe gilt von den drei Geraden

$$\begin{array}{ccc}
I_{01} & I_{02} & A_{12} \\
I_{13} & I_{23} & A_{12} \\
I_{01} & I_{13} & A_{03},
\end{array}$$

also liegen die sechs Puncte

$$I_{01},\ I_{02},\ I_{13},\ I_{23},\ A_{13},\ A_{02}$$

in einer Ebene.

Auf ähnliche Art wird der Beweis für die übrigen Ebenen geführt.

174. Die sechs Potenzebenen von vier Kugeln schneiden sich in einem Puncte, dieser Punct heisst das **Potenzcentrum** der vier Kugeln.

Es werde allgemein durch $p_{rs}$ die Potenzebene von $O_r$ und $O_s$ bezeichnet. Die drei Ebenen

$$p_{01},\ p_{02},\ p_{12}$$

schneiden sich in derselben Geraden, etwa $p$; ebenso schneiden sich die drei Ebenen

$$p_{02},\ p_{03},\ p_{23}$$

in derselben Geraden, etwa $q$. Die Geraden $p$ und $q$ liegen in der Ebene $p_{02}$, sie schneiden sich daher in einem Puncte $P$, welcher das Potenzcentrum der vier Kugeln ist.

## Harmonische Puncte und Strahlen.

175. Eine durch ihre Endpuncte $A$ und $B$ bestimmte Strecke $AB$ wird durch einen Punct $C$ derselben Geraden in die Abschnitte $AC$ und $CB$ getheilt, aus welchen das Verhältniss

$$\frac{AC}{CB}$$

erhalten wird.

Dieses Verhältniss ist positiv oder negativ, je nachdem der Punct $C$ auf der Strecke $AB$ oder ausserhalb derselben liegt; der absolute Werth desselben ist grösser oder kleiner als Eins, je nachdem der Punct $C$ dem Puncte $B$ oder $A$ näher liegt.

Ist $\frac{AC}{CB} = +1$, so liegt $C$ auf der Mitte von $AB$; ist $\frac{AC}{CB} = -1$, so liegt $C$ im Unendlichen.

176. Um die Strecke $AB$ nach einem gegebenen Verhältnisse $p:q$ zu theilen, kann man sich des Satzes des Art. 152 bedienen, indem man durch den Punct $A$ eine beliebige Gerade zieht, davon zwei Strecken $AD = p$ und $DE = q$ abträgt, den Punct $E$ mit $B$ verbindet und $DC \parallel EB$ zieht.

177. Zwei Puncte $C$ und $D$, welche die Strecke $AB$ nach demselben aber entgegengesetzt bezeichneten Verhältnisse theilen,

dergestalt also, dass

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$

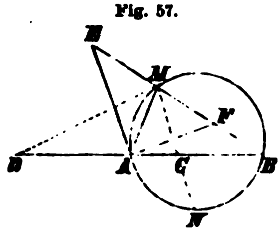
ist, theilt dieselbe **harmonisch**.

Man nennt die vier Puncte $A, B, C, D$ **vier harmonische Puncte**.

Die Puncte $A$ und $B$, sowie $C$ und $D$ nennt man **zugeordnete (conjugirte) harmonische Puncte**.

178. Ist für die beiden Puncte $A$ und $B$ der innere Punct $C$ gegeben, so kann man den äusseren Punct $D$ vermittelst des folgenden Satzes finden:

Fig. 57.




Halbirt man in einem Dreiecke $ABM$ den Winkel $M$ und den zugehörigen Aussenwinkel, so theilen die Halbirungslinien $MC$ und $MD$ die gegenüberliegende Seite $AB$ in den Puncten $C$ und $D$ harmonisch.

Man ziehe $AE \parallel CM$, $AF \parallel DM$, so sind die Dreiecke $AEM$ und $AFM$ gleichschenklig, also

$$EM = AM = FM.$$

Es ist nun

$$AC : CB = EM : MB = AM : MB$$
$$DA : DB = MF : MB = AM : MB,$$

also mit Rücksicht auf das Zeichen

$$AC : CB = -AD : DB.$$

Beschreibt man daher um $AB$ einen Kreis und verbindet die Mitte $N$ des Bogens $ANB$ mit dem Puncte $C$, so bestimmt die Gerade, welche den Aussenwinkel bei $M$ halbirt, den Punct $D$.

**Zusatz.** Aus dem Beweise des obigen Hilfssatzes folgt noch: dass die absoluten Werthe der Verhältnisse der Segmente von $AB$ dem Verhältnisse der Seiten $AM$ und $BM$ gleich sind.

179. Sind auf einer Geraden vier harmonische Puncte gegeben, so nennt man die vier von einem ausserhalb liegenden Puncte gezogenen Strahlen **harmonische Strahlen**, z. B. die vier Geraden

$$MA,\ MB,\ MC,\ MD.$$

Die Strahlen $MA$ und $MB$, sowie $MC$ und $MD$ nennt man **zugeordnete harmonische Strahlen**.

### Lage der harmonischen Puncte.

180. **Es seien die Puncte $A$ und $B$ unveränderlich (fix), der Punct $C$ veränderlich; man bestimme den dem Puncte $C$ zugeordneten Punct $D$.**

$O$ sei die Mitte von $AB$.

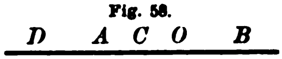
Es ist $$AC : CB = -AD : DB.$$

1) Ist der Punct $C$ mit $A$ identisch, d. h. ist $AC = 0$, so ist $AD = 0$, also auch $D$ mit $A$ identisch.

Entfernt man $C$ von $A$, so wächst das Verhältniss $AC : CB$, also auch das Verhältniss $AD : DB$.

2) Ist $AC < AO$, so ist $AC : CB < 1$, also $AD : DB$ absolut $< 1$, mithin liegt der Punct $D$ ausserhalb $AB$ auf der Seite von $A$.

Fig. 58.




Nähert sich der Punct $C$ dem Puncte $O$, so nähert sich der Punct $D$ auf der Seite von $A$ dem Unendlichen.

3) Ist $AC > AO$, so ist $AC : CB > 1$, also $AD : DB$ absolut $> 1$, mithin liegt der Punct $D$ ausserhalb $AB$ auf der Seite von $B$.

Nähert sich der Punct $C$ dem Puncte $B$, so nähert sich der Punct $D$ dem Puncte $B$.

Aus dieser Untersuchung folgt noch: Die Mitte zweier zugeordneter Puncte liegt immer ausserhalb der Strecke der beiden anderen zugeordneten Puncte.

Sind von vier harmonischen Puncten drei gegeben, so ist der vierte bestimmt.

### Massgleichungen.

181. Aus $$AC : CB = -AD : BD \tag{1}$$
folgt $$AC \cdot BD = CB \cdot AD \tag{2}$$

Folgen die vier Puncte in der Ordnung $A, C, B, D$ aufeinander, so ist das Product der beiden äusseren Segmente gleich dem Producte des grössten Segmentes mit dem mittleren. Das mittlere Segment ist daher das kleinste

Setzt man
$$BD = AD - AB, \quad CB = AB - AC,$$
so ist
$$AC \cdot BD = AC(AD - AB) = AC \cdot AD - AC \cdot AB,$$
$$CB \cdot AD = (AB - AC)\,AD = AB \cdot AD - AC \cdot AD,$$
raus $$2\,AC \cdot AD = AB\,(AC + AD).$$

Ist $O$ die Mitte von $C$ und $D$, so ist

$$AC + AD = 2\,AO,\ AC \cdot AD = \overline{AO}^2 - \overline{CO}^2,$$

mithin $$AB \cdot AO = AC \cdot AD = \overline{AO}^2 - \overline{CO}^2; \tag{3}$$

woraus folgt

$$\overline{CO}^2 = AO\,(AO - AB) = AO \cdot BO. \tag{4}$$

Anmerkung. Drei Grössen oder Zahlen $A$, $B$, $C$ heissen harmonisch proportionirt, wenn das Verhältniss der ersten zur dritten gleich ist dem Verhältnisse des Unterschiedes der ersten und zweiten zum Unterschiede der zweiten und dritten, d. h.

$$A : C = A - B : B - C.$$

Folgen die vier Puncte $A$, $B$, $C$, $D$ in der angegebenen Ordnung aufeinander, so sind die Segmente $AD$, $AC$, $AB$ harmonisch proportionirt, wenn

$$AD : AB = AD - AC : AC - AB$$

oder $$AD : AB = CD : BC \text{ ist.}$$

Die Proportion heisst darum harmonisch, weil drei Saiten von gleicher Dicke und Spannung zusammenklingen, wenn ihre Längen harmonisch sind, d. h. wenn sie die Längen 3, 4, 6 haben, für welche

$$3 : 6 = 4 - 3 : 6 - 4 \text{ ist.}$$

### Von dem Pole, der Polare und der Polarebene.

182. Dreht man in der Ebene eines Kreises (mit dem Mittelpuncte $O$) um einen festen Punct $P$ eine Gerade, und sucht für die jedesmaligen Durchschnittspuncte $M$ und $N$ der Geraden mit dem Umfange des Kreises den zum Puncte $P$ zugeordneten harmonischen Punct $Q$, so ist der geometrische Ort des Punctes $Q$ eine Gerade $QC$, welche auf der Geraden $PO$ senkrecht steht.

Fig. 59.

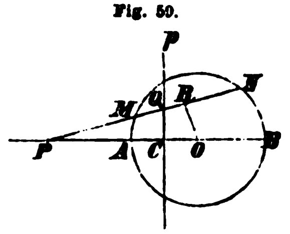
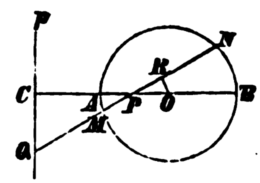


Fig. 60.



Denn begegnet die Gerade $PO$ dem Umfange des Kreises in den Puncten $A$ und $B$, und ist $C$ der zu $P$ zugeordnete harmonische Punct, ist ferner $R$ die Mitte von $MN$, so folgt nach 181, (3)

$$PA \cdot PB = PC \cdot PO$$
$$PM \cdot PN = PQ \cdot PR.$$

Nun ist $$PA \cdot PB = PM \cdot PN,$$
also $$PC \cdot PO = PQ \cdot PR$$
oder $$PQ : PC = PO : PR,$$
d. h. $$\triangle POR \sim \triangle PQC.$$

Da $OR \perp MN$ ist, so ist auch $QC \perp AB$, d. h. die im bestimmten Puncte $C$ auf der Geraden $PO$ errichtete Senkrechte $CQ$ enthält den Punct $Q$. Man nennt die Gerade $CQ$ oder $p$ die Polare des Punctes $P$. Der Punct $P$ heisst der Pol der Geraden $p$.

Für die Gerade $PO$ folgt noch nach 181, (4)

$$AO^2 = PO \cdot OC,$$

d. h. der Halbmesser des Kreises ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Entfernung des Poles und der Polaren vom Mittelpuncte.

Vermittelst dieses Satzes erhält man ein sehr einfaches Constructions-Verfahren, zu einem gegebenen Pole die Polare, und umgekehrt, zu finden.

Liegt der Punct $P$ innerhalb des Kreises, so liegt die Gerade $p$ ausserhalb desselben und umgekehrt.

Fallen die beiden Puncte $M$, $N$ zusammen, so fällt mit ihnen auch $Q$ zusammen; die Gerade $PM$ wird dann eine Tangente an den Kreis, deren Berührungspunct ein Punct der Polare ist. Hieraus folgt: Zieht man von einem ausserhalb des Kreises liegenden Puncte die beiden Tangenten, so ist die Gerade, welche die Berührungspuncte mit einander verbindet, die Polare dieses Punctes.

183. a) Die Polaren der sämmtlichen Puncte einer Geraden $p$ gehen durch den Pol dieser Geraden.

Denn ist $Q$ ein beliebiger Punct der Geraden $p$, so enthält dessen Polare $q$ sämmtliche zugeordnete harmonische Puncte, also auch den Punct $P$.

b) Umgekehrt: Die Pole der verschiedenen Strahlen eines Strahlenbüschels liegen in der Polare $p$ des Strahlenmittelpunctes $P$.

184. Die im Vorigen aufgestellten Begriffe über Pol und Polare lassen sich unmittelbar auf die Kugel übertragen. Denkt man sich die vorige Figur um $PO$ als Axe gedreht, so beschreibt

der Kreis eine Kugelfläche, die Polare des Punctes $P$ eine auf der Geraden $PO$ senkrechte Ebene. Diese Ebene besitzt die Eigenschaft, dass sie jede durch den Punct $P$ gezogene Transversale, welche der Kugelfläche in den Puncten $M$ und $N$ begegnet, in dem Puncte $Q$ schneidet, welcher zu $P$ zugeordnet harmonisch ist für die Puncte $M$ und $N$. Diese Ebene heisst die Polarebene des Punctes $P$, und der Punct $P$ ist der Pol dieser Ebene.

185. a) Die Polarebenen der verschiedenen Puncte einer Ebene schneiden sich in einem Puncte, dem Pol der Ebene.

Umgekehrt: Die Pole aller Ebenen, welche sich in einem Puncte schneiden, liegen in einer Ebene, welche die Polarebene dieses Punctes ist.

b) Die Polarebenen der verschiedenen Puncte einer Geraden schneiden sich in einer zweiten Geraden.

Denn die Puncte einer Geraden können in jeder durch diese Gerade gelegten Ebene gedacht werden, die Polarebenen derselben müssen sich daher in einem und demselben Puncte schneiden; aber nach der Verschiedenheit der Ebene, in welcher die Gerade liegen soll, in immer anderen Puncten, was nur möglich ist, wenn diese Puncte in einer Geraden liegen oder die Polarebenen sich in einer und derselben Geraden durchschneiden.

Umgekehrt: Die Pole der Ebenen, welche sich in derselben Geraden durchschneiden, liegen in einer zweiten Geraden. Die zwei Geraden heissen polarreciproke Gerade.

Zusatz. Um zu einer Geraden hinsichtlich einer gegebenen Kugel die Polarreciproke zu construiren, verfährt man folgendermassen: Schneidet die Gerade die Kugelfläche, so lege man an die beiden Durchschnittspuncte Berührungsebenen; der Durchschnitt derselben ist die Polarreciproke der ersten.

Liegt die Gerade ausserhalb der Kugel, so lege man durch sie die zwei Berührungsebenen; die Verbindungslinie der Berührungspuncte ist die Polarreciproke.

Denn berührt eine Ebene die Kugel, so ist der Berührungspunct der Pol der Ebene, und umgekehrt. Aus der Construction ist klar, dass die polarreciproken Geraden auf einander senkrecht stehen.

### Von der Berührungsaufgabe.

186. Die in den vorigen Abschnitten auseinandergesetzten Theorien der Aehnlichkeitspuncte, Axen und Ebenen, Potenzen, u. s. w. gestatten eine leichte Lösung der ebenen und räumlichen Berührungsaufgabe.

Die ebene Berührungsaufgabe lautet: Es sind drei Kreise gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, welcher die gegebenen Kreise berührt.

Die räumliche Berührungsaufgabe lautet: Es sind vier Kugeln gegeben; man soll eine Kugel beschreiben, welche die vier gegebenen Kugeln berührt.

Die erste Aufgabe wurde von Apollonius von Pergä aufgestellt und gelöst. Das hierauf bezügliche Werk ging verloren, wurde jedoch von Vieta wieder hergestellt. Die erste Lösung des räumlichen Problems wurde von Fermat gegeben. Beide Lösungen geschahen durch Reduction auf immer einfachere Aufgaben. Erst durch Gaultier 1813 und Gergonne 1814, wurden unmittelbare Lösungen der ersten Aufgabe gegeben.

Die ganz analogen Lösungen der beiden Aufgaben sollen hier gegeben werden.

187. Hülfssätze.

a) Werden zwei Kreise $O$ und $O'$ von einem Kreise $C$ berührt, so geht die Gerade, welche die Berührungspuncte verbindet, durch den äusseren oder inneren Aehnlichkeitspunct $S$ von $O$ und $O'$, und zwar: durch den äusseren, wenn die beiden Kreise gleichartig (zugleich von aussen oder zugleich von innen); durch den inneren, wenn die beiden Kreise ungleichartig (der eine von aussen, der andere von innen) berührt werden.

Denn jeder Berührungspunct ist ein Aehnlichkeitspunct und zwei gleichartige Aehnlichkeitspuncte liegen nach 170 mit einem dritten in einer Geraden.

b) Werden zwei Kreise $O$ und $O'$ von zwei Kreisen $C$ und $C'$ zugleich gleichartig oder zugleich ungleichartig berührt, so gehen also die Geraden, welche die Berührungspuncte verbinden, durch denselben Aehnlichkeitspunct $S$ der beiden Kreise $O$ und $O'$.

Da die Berührungspuncte potenzhaltende Puncte von $S$ sind, so folgt die Gleichheit der Potenzen von $S$ hinsichtlich der Kreise $C$ und $C'$, d. h. der Punct $S$ liegt in der Potenzlinie dieser Kreise.

Die Gerade, welche die Berührungspuncte der Kreise $C$ und $C'$ durch die Kreise $O$ und $O'$ verbindet, geht aus denselben Gründen durch denselben Aehnlichkeitspunct $T$ der Kreise $C$ und $C'$, und dieser Punct liegt in der Potenzlinie von $O$ und $O'$.

188. Dieselben Beziehungen gelten auch für die Kugel, indem man „Kreis“ und „Potenzlinie“ durch „Kugel“ und „Potenzebene“ ersetzt.

## I. Berührungsaufgabe für die Ebene.

189. Berührt der Kreis $\frac{C}{C'}$ die drei gegebenen Kreise

$$O,\ O_1,\ O_2$$

von $\substack{\text{aussen}\\ \text{innen}}$ und bezeichnet man die Berührungspuncte von $C$ mit den gegebenen Kreisen durch

$$B,\ B_1,\ B_2,$$

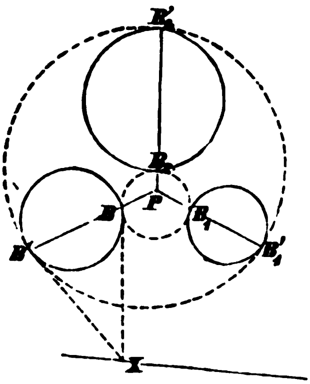
die Berührungspuncte von $C'$ mit den gegebenen Kreisen durch

$$B',\ B_1',\ B_2',$$

so ergibt sich Folgendes:

1) $O$, $O_1$, $O_2$ berühren $\substack{C\\ C'}$ von $\substack{\text{aussen}\\ \text{innen}}$, also gehen die Sehnen $BB'$, $B_1B_1'$, $B_2B_2'$ durch den inneren Aehnlichkeitspunct von $C$ und $C'$.

Fig. 61.




2) Die Potenzlinien von $O$ und $O_1$, $O$ und $O_2$, $O_1$ und $O_2$ gehen durch den inneren Aehnlichkeitspunct von $C$ und $C'$; d. h. das Potenzcentrum $P$ der drei Kreise $O$, $O_1$, $O_2$ ist der innere Aehnlichkeitspunct von $C$ und $C'$.

3) $\substack{C\\ C'}$ berührt $O$ und $O_1$ von $\substack{\text{aussen}\\ \text{innen}}$. Die Potenzlinie von $C$ und $C'$ geht daher durch den äusseren Aehnlichkeitspunct von $O$ und $O_1$. Ebenso wird bewiesen, dass die Potenzlinie von $C$ und $C'$ durch die äusseren Aehnlichkeitspuncte von $O$ und $O_2$, $O_1$ und $O_2$ geht; d. h. die äussere Aehnlichkeitsaxe der drei gegebenen Kreise ist die Potenzlinie der Kreise $C$ und $C'$.

4) Die Berührungslinien in $B$ und $B'$ sind zugleich die Potenzlinien von $O$ und $C$, $O$ und $C'$. Weil die drei Potenzlinien von $O$, $C$ und $C'$ sich in einem Puncte $X$ schneiden, so liegt der Durchschnittspunct $X$ der Berührungstangenten in $B$ und $B'$ in der Potenzlinie von $C$ und $C'$.

Umgekehrt: Bestimmt man für den Kreis $O$ den Pol der Potenzlinie von $C$ und $C'$, so liegt dieser auf der Geraden $BB'$. Aehnliches gilt auch von den Sehnen $B_1B_1'$ und $B_2B_2'$.

190. Werden zwei Kreise, etwa $O$ und $O_1$ gleichartig, der dritte $O_2$ ungleichartig berührt, so berühren

$$\substack{C\\ C'}\ O \text{ und } O_1 \text{ von } \substack{\text{aussen}\\ \text{innen}},\ O_2 \text{ von } \substack{\text{innen}\\ \text{aussen}}.$$

Man findet, dass die Potenzlinie von $C$ und $C'$ durch den äusseren Aehnlichkeitspunct von $O$ und $O_1$ und durch die inneren Aehnlichkeitspuncte von $O$ und $O_2$, $O_1$ und $O_2$ geht, d. h. mit der inneren Aehnlichkeitsaxe $II_1A_2$ identisch ist. Alle übrigen Beziehungen bleiben ungeändert.

**191.** Die Lösung der Berührungsaufgabe erhält man daher auf folgende Art:

Man bestimmt das Potenzcentrum und die Aehnlichkeitsaxen der drei gegebenen Kreise. Für jeden der gegebenen Kreise bestimmt man die diesen Geraden zugehörigen Pole. Je drei Gerade durch das Potenzcentrum und durch die drei Pole einer Aehnlichkeitsaxe geben die Berührungspuncte zweier gesuchter Kreise.

Man erhält daher acht Auflösungen.

## II. Berührungsaufgabe für den Raum.

**192.** Berührt die Kugel $\substack{C\\C'}$ die vier gegebenen Kugeln

$$O_0,\ O_1,\ O_2,\ O_3$$

von $\substack{\text{aussen}\\\text{innen}}$ und bezeichnet man die Berührungspuncte von $C$ mit den gegebenen Kugeln durch

$$B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_3,$$

die Berührungspuncte von $C'$ mit den gegebenen Kugeln durch

$$B_0',\ B_1',\ B_2',\ B_3',$$

so ergibt sich Folgendes:

1) $O_0$, $O_1$, $O_2$, $O_3$ berühren $\substack{C\\C'}$ von $\substack{\text{aussen}\\\text{innen}}$, also gehen die Sehnen

$$B_0B_0',\ B_1B_1',\ B_2B_2',\ B_3B_3'$$

durch den inneren Aehnlichkeitspunct von $C$ und $C'$.

2) Die Potenzebenen von $O_0$ und $O_1$, $O_0$ und $O_2$, $O_0$ und $O_3$, $O_1$ und $O_2$, $O_1$ und $O_3$, $O_2$ und $O_3$ gehen durch den inneren Aehnlichkeitspunct von $C$ und $C'$; d. h. das Potenzcentrum $P$ der vier Kugeln $O_0$, $O_1$, $O_2$, $O_3$ ist der innere Aehnlichkeitspunct von $C$ und $C'$.

3) $\substack{C\\C'}$ berührt $O_0$ und $O_1$ von $\substack{\text{aussen}\\\text{innen}}$.

Die Potenzebene von $C$ und $C'$ geht daher durch den äusseren Aehnlichkeitspunct von $O_0$ und $O_1$. Ebenso wird bewiesen, dass die Potenzebene von $C$ und $C'$ durch die äusseren Aehnlichkeitspuncte von $O_0$ und $O_2$, $O_0$ und $O_3$, $O_1$ und $O_2$, $O_1$ und $O_3$, $O_2$ und $O_3$ geht; d. h. die äussere Aehnlichkeitsebene der vier gegebenen Kugeln ist die Potenzebene der Kugel $C$ und $C'$.

4) Die Berührungsebenen in $B_0$ und $B_0'$ sind zugleich die

Potenzebenen von $O_0$ und $C$, $O_0$ und $C'$. Weil die drei Potenzebenen von $O_0$, $C$ und $C'$ sich in einer Geraden schneiden, so liegt die Durchschnittslinie der Berührungsebenen in $B_0$ und $B_0$ in der Potenzebene von $C$ und $C'$. Diese Durchschnittslinie ist aber die polarreciproke Gerade zur Geraden $B_0 B_0'$, letztere muss daher den Pol der Potenzebene von $C$ und $C'$ hinsichtlich der Kugel $O_0$ enthalten. Aehnliches gilt auch von den Sehnen $B_1 B_1'$, $B_2 B_2'$, $B_3 B_3'$.

Wir erhalten daher für die Construction der Kugeln $C$ und $C'$ folgendes Verfahren:

Um die Kugeln zu finden, welche vier gegebene Kugeln von aussen und von innen berühren: bestimme man das Potenzcentrum der vier gegebenen Kugeln und die äussere Aehnlichkeitsebene, suche zu dieser für jede der vier Kugeln den Pol. Die vier Geraden durch das Potenzcentrum und durch die vier Pole geben die Berührungspuncte der beiden gesuchten Kugeln.

193. Werden drei Kugeln, etwa $O_0$, $O_1$, $O_2$ gleichartig, die vierte $O_3$ ungleichartig berührt, so berühre

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{C}{C'}\; O_0,\ O_1,\ O_2 \text{ von } \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{aussen}}{\text{innen}},\ O_3 \text{ von } \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{innen}}{\text{aussen}}.$$

Man findet, dass die Potenzebene von $C$ und $C'$ durch die äusseren Aehnlichkeitspuncte von $O_0$ und $O_1$, $O_0$ und $O_2$, $O_1$ und $O_2$, hingegen durch die inneren Aehnlichkeitspuncte von $O_0$ und $O_3$, $O_1$ und $O_3$, $O_2$ und $O_3$ geht; d. h. die mittlere Aehnlichkeitsebene

$$I_{03}\ I_{13}\ I_{23}\ A_{01}\ A_{02}\ A_{12}$$

ist die Potenzebene von $C$ und $C'$.

194. Werden zwei Kugeln, etwa $O_0$ und $O_1$, gleichartig, die beiden anderen $O_2$ und $O_3$ zwar untereinander gleichartig, aber ungleichartig mit den Kugeln $O_0$ und $O_1$ berührt, so berühre

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{C}{C'}\; O_0 \text{ und } O_1 \text{ von } \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{aussen}}{\text{innen}},\ O_2 \text{ und } O_3 \text{ von } \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{innen}}{\text{aussen}}.$$

Man findet, dass die Potenzebene von $C$ und $C'$ durch die äusseren Aehnlichkeitspuncte von $O_0$ und $O_1$, $O_2$ und $O_3$, und durch die inneren Aehnlichkeitspuncte von $O_0$ und $O_2$, $O_0$ und $O_3$, $O_1$ und $O_2$, $O_1$ und $O_3$ geht; d. h. die innere Aehnlichkeitsebene

$$I_{02}\ I_{03}\ I_{12}\ I_{13}\ A_{01}\ A_{23}$$

ist die Potenzebene von $C$ und $C'$.

195. Die Lösung der Berührungsaufgabe erhält man daher auf folgende Art:

Man bestimmt das Potenzcentrum und die Aehnlichkeitsebenen der vier gegebenen Kugeln. Für jede der gegebenen Kugeln bestimmt man die diesen Ebenen zugehörigen Pole. Je vier Gerade, durch das Potenzcentrum und durch die Pole einer Aehnlichkeitsebene, geben die Berührungspuncte zweier gesuchter Kugeln.

Man erhält daher sechzehn Auflösungen.

## III. Specielle Fälle der Berührungsaufgabe.

196. Die obige Lösung ist die Lösung des allgemeinen Falles der folgenden Aufgabe:

a) Es sind von Puncten, Geraden und Kreisen drei gegeben; man bestimme einen Kreis, welcher durch die Puncte geht und die Geraden und Kreise berührt.

b) Es sind von Puncten, Ebenen und Kugeln vier gegeben; man bestimme eine Kugel, welche durch die Puncte geht und die Ebenen und Kugeln berührt.

Man kann insofern die frühere Aufgabe als den allgemeinen Fall betrachten, indem man den Punct als einen Kreis oder eine Kugel vom Halbmesser Null, die Gerade als einen Kreis, die Ebene als eine Kugel, beide mit unendlich grossem Halbmesser betrachtet.

Wie aus dem Ganzen ersichtlich ist, reducirt die Lösung in I. den gegebenen Kreis, und ebenso die in II. die gegebene Kugel auf einen Punct. Aber auch in den übrigen speciellen Fällen ist es möglich, die gegebenen Kreise oder Kugeln auf Puncte zu reduciren. Dazu ist es erforderlich, die Begriffe der Aehnlichkeitspuncte, Potenzen, u. s. w. für diese besonderen Fälle von Kreis und Kugel aufzustellen.

197. 1) Der äussere und innere Aehnlichkeitspunct eines Punctes und $\begin{matrix}\text{eines Kreises}\\ \text{einer Kugel}\end{matrix}$ ist der Punct selbst.

2) Als äusserer und innerer Aehnlichkeitspunct einer $\begin{matrix}\text{Geraden}\\ \text{Ebene}\end{matrix}$ und $\begin{matrix}\text{eines Kreises}\\ \text{einer Kugel}\end{matrix}$ können die Endpuncte des auf der $\begin{matrix}\text{Geraden}\\ \text{Ebene}\end{matrix}$ senkrechten Durchmessers angenommen werden. Sind $A$ und $I$ die Endpuncte dieses Durchmessers, $P$ der Durchschnittspunct der Geraden $AI$ mit der gegebenen $\begin{matrix}\text{Geraden}\\ \text{Ebene}\end{matrix}$, so folgt, z. B. für den Aehnlichkeitsstrahl $ANM$, wo $M$ und $N$ die Durchschnittspuncte mit der $\begin{matrix}\text{Geraden}\\ \text{Ebene}\end{matrix}$ und $\begin{matrix}\text{dem Kreise}\\ \text{der Kugel}\end{matrix}$ sind:

$$\triangle APM \sim \triangle ANI$$
$$AN : AI = AP : AM$$
$$AM \cdot AN = AI \cdot AP = \text{const.}$$

Die Puncte $M$ und $N$ sind daher potenzhaltend.

Dasselbe gilt für jeden inneren Aehnlichkeitsstrahl.

Man kann daher auf diesen Fall die Art. 187 und 188 anwenden.

3) Der äussere Aehnlichkeitspunct zweier Puncte liegt auf der Verbindungslinie derselben im Unendlichen, der innere auf der Mitte derselben.

4) Die Potenz$^{\text{linie}}_{\text{ebene}}$ eines Punctes und $\substack{\text{eines Kreises}\\ \text{einer Kugel}}$ hat vom Puncte und der $\substack{\text{Polare}\\ \text{Polarebene}}$ dieses Punctes gleichen Abstand.

Denn begegnet eine vom Puncte $P$ an den Kreis gezogene Gerade dem Umfange in den Puncten $M$ und $M'$, und ist $Q$ die Mitte von $PP'$, wo $P'$ der vierte harmonische Punct ist, so ist 181, (4)

$$\overline{QP}^2 = \overline{QP'}^2 = QM \cdot QM'.$$

Nun ist $\overline{QP}^2$ die Potenz des Punctes $Q$ für den Punct $P$ (als Kreis betrachtet), $QM \cdot QM'$ die Potenz des Punctes $Q$ für den Kreis; also ist $Q$ ein Punct der Potenzlinie von Punct und Kreis.

Alle Puncte $Q$ liegen in einer zur Polare parallelen Geraden.

Ebenso wird der Beweis für die Kugel geführt.

5) Als Potenz$\substack{\text{linie eines Kreises}\\ \text{ebene einer Kugel}}$ und einer $\substack{\text{Geraden}\\ \text{Ebene}}$ kann die gegebene $\substack{\text{Gerade}\\ \text{Ebene}}$ genommen werden.

6) Die Potenz$^{\text{linie}}_{\text{ebene}}$ zweier Puncte ist die auf der Mitte der Verbindungslinie senkrechte $\substack{\text{Gerade}\\ \text{Ebene}}$.

198. Durch Anwendung dieser Begriffe gelangt man schliesslich zu folgenden Aufgaben:

a) Gegeben sind:
1) Zwei Puncte und eine Gerade.
2) Ein Punct und zwei Gerade.
3) Drei Gerade.

Zu 1). Sind $M$ und $N$ die beiden gegebenen Puncte, $P$ der Durchschnittspunct der Verbindungslinie derselben mit der gegebenen Geraden, $T$ der Berührungspunct des gesuchten Kreises, so ist

$$\overline{PT}^2 = PM \cdot PN,$$

also $T$ bekannt. — Zwei Auflösungen.

Zu 2). Man bestimme in der Verlängerung der Senkrechten von dem gegebenen Puncte auf die Halbirungslinie des Winkels der beiden Geraden einen Punct von gleicher Entfernung von der Halbirungslinie.

Der gesuchte Kreis geht durch diesen Punct.

Dadurch ist die Aufgabe auf 1) reducirt.

Zu 3). Vergl. 82.

b) Gegeben sind:

1) Drei Puncte und eine Ebene.
2) Zwei Puncte und zwei Ebenen.
3) Ein Punct und drei Ebenen.
4) Vier Ebenen.

Zu 1). Durch die drei Puncte lege man einen Kreis, errichte im Mittelpuncte desselben eine Senkrechte, so liegt auf derselben der Mittelpunct der gesuchten Kugel. Durch diese senkrechte Gerade lege man eine auf der gegebenen Ebene senkrechte Ebene; so liegt im Durchschnitte der beiden Ebenen der gesuchte Berührungspunct. Bestimmt man auf dieser Geraden den Berührungspunct des Kreises, welcher durch die zwei Durchschnittspuncte des Kreises durch die gegebenen Puncte mit der senkrechten Ebene geht, und obige Gerade berührt, so ist dieser Berührungspunct ein Punct der gesuchten Kugel.

Zu 2). Halbirt man den Neigungswinkel der beiden Ebenen und zieht man von einem der beiden gegebenen Puncte eine Senkrechte auf die Halbirungsebene und verlängert dieselbe um die Entfernung des Punctes von der Halbirungsebene, so ist der Endpunct dieser Senkrechten ein Punct der gesuchten Kugel.

Zu 3). Wird auf ähnliche Art auf 2) reducirt.

Zu 4). Vergl. 147.

Anmerkung. Die Bestimmung der Berührungspuncte einer Geraden ist durch das angegebene allgemeine Constructionsverfahren nicht möglich. Der Grund liegt darin, dass es keinen construirbaren Pol einer Geraden hinsichtlich einer gegebenen Geraden (diese nämlich als Kreis mit unendlichem Radius betrachtet) gibt. Die Polaren der verschiedenen Puncte einer Geraden hinsichtlich einer gegebenen Geraden sind parallel zu dieser Geraden; der Durchschnittspunct der Polaren, welcher der Pol der ersten Geraden ist, liegt daher im Unendlichen.

Dasselbe gilt auch von den Berührungspuncten einer Ebene.

## Von der stereographischen Projection.

199. Projicirt man die Puncte einer Kugelfläche von einem Puncte $S$ der Oberfläche derselben als Projectionscentrum auf eine Ebene als Projectionsebene, welche zur Berührungsebene im Projectionscentrum $S$ parallel ist, so erhält man die **stereographische** Projection der Puncte der Kugelfläche.

Für diese Projection gelten folgende Sätze:

a) Liegen die zu projicirenden Puncte der Kugelfläche in einem Kreise, so liegen auch die Puncte der Projection in einem Kreise; d. h. einem Kreise auf der Kugelfläche entspricht ein Kreis als Projection.

Zieht man vom Projectionscentrum eine Gerade durch den Mittelpunct, so steht diese auf der Projectionsebene senkrecht. Der Fusspunct $N'$ dieser Geraden ist die Projection des Endpunctes $N$ des Durchmessers $SN$.

Ist $M'$ die Projection des Punctes $M$, so folgt (vergl. Art. 197)

$$SM \cdot SM' = SN \cdot SN' = \text{const.}$$

Es seien $M_1, M_2, M_3, \cdots$ Puncte eines Kreises $k$ auf der Kugelfläche; $M_1', M_2', M_3', \cdots$ deren Projectionen. Für diese Puncte findet also die Gleichung statt

$$SM_1 \cdot SM_1' = SM_2 \cdot SM_2' = \cdots$$

Denkt man sich durch den Kreis $k$ und den Punct $M_1$ eine Kugelfläche $\mathfrak{K}$ gelegt, und bezeichnet man mit $M_2'', M_3'' \cdots$ die Durchschnittspuncte derselben mit den Strahlen $SM_2, SM_3, \cdots$, so ist $SM_1 \cdot SM_1'$ die Potenz des Punctes $S$ für die Kugel $\mathfrak{K}$, also

$$SM_1 \cdot SM_1' = SM_2 \cdot SM_2'' = \cdots$$

woraus die Identität der Puncte $M_2'', M_3'', \cdots$ mit den Puncten $M_2', M_3' \cdots$ folgt.

Da die Puncte $M_1', M_2', M_3', \cdots$ auf einer Kugel und in einer Ebene liegen, so liegen sie in einem Kreise $k'$, welcher die Projection von $k$ ist.

b) Zwei sphärische Linien (d. i. Linien auf der Oberfläche der Kugel) schneiden sich unter demselben Winkel wie ihre Projectionen.

Sind $s$ und $t$ die beiden im Durchschnittspuncte $M$ der beiden Linien gezogenen Tangenten, also $(s, t)$ das Mass des spärischen Winkels; so bestimmen die Ebenen durch $S$, $s$ und $S$, $t$ in der Projectionsebene zwei im Puncte $M'$ sich schneidende Gerade $s'$ und $t'$, und in der Berührungsebene an den Punct $S$ zwei durch $S$ gehende Gerade $\sigma$ und $\tau$. Dabei ist der Winkel $(s', t')$ die Projection von $(s, t)$. Nun ist

$$(s, t) = (\sigma, \tau),$$

weil zwei Kugelkreise, welche sich in $M$ und $S$ schneiden, in diesen Puncten gleiche sphärische Winkel bilden. Ferner ist

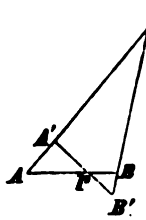
$$(\sigma, \tau) = (s', t'),$$

weil $\sigma \parallel s'$, $\tau \parallel t'$ ist; also ist auch

$$(s, t) = (s', t').$$

Zusatz 1. Ist $SAB$ das charakteristische Dreieck eines Kegels mit kreisförmiger Grundfläche, so bildet, wenn Winkel $SA'B' = SBA$ ist, eine durch die Gerade $A'B'$ auf die Ebene $SAB$ senkrecht gelegte Ebene auf der Kugelfläche einen antiparallelen Schnitt, welcher ein Kreis ist.

Fig. 63




Denn ist $M$ einer der beiden Puncte, in welchen die Durchschnittslinie der beiden durch $AB$ und $A'B'$ gelegten Schnitte der Kegelfläche begegnet, wobei der Durchschnittspunct $P$ der Geraden $AB$ und $A'B'$ auf der Strecke $AB$ vorausgesetzt wird, so ist wegen

$$\triangle SA'B' \sim \triangle SBA,$$
$$A'P \cdot PB' = AP \cdot PB = \overline{MP}^2;$$

d. h. der Punct $M$ ist ein Punct des über $AB'$ als Durchmesser beschriebenen Kreises. Bewegt man die Ebene durch $AB$ parallel zu sich selbst dergestalt, dass der Punct $P$ alle Puncte der Strecke $A'B'$ durchläuft, so erhält man sämmtliche Puncte des antiparallelen Schnittes als Puncte eines Kreises über dem Durchmesser $A'B'$.

Die Projection $k'$ ist ein antiparalleler Schnitt des Kegels mit $k$ als Grundfläche und $S$ als Spitze.

Denn ist $SAB$ das charakteristische Dreieck dieses Kegels, so folgt, wegen

$$SA \cdot SA' = SB \cdot SB',$$
$$\text{Winkel } A' = B, \text{ u. s. w.}$$

In der Ebene des charakteristischen Dreiecks liegen die Mittelpuncte von $k$, $k'$, $\mathfrak{K}$.

Zusatz 2. Aus b) kann man a) erhalten. Zieht man an die Puncte von $k$ Tangenten, und projicirt den längs $k$ als Grundfläche um die Kugel beschriebenen Kegel sammt den Tangenten, so ist die Projection von $k$ ein Kegelschnitt $k'$, und die Projectionen der Seiten des Kegels sind Gerade, welche auf den Tangenten von $k'$ nach b) senkrecht stehen und durch die Projection $C'$ der Spitze $C$ des Kegels gehen. Ein solcher Kegelschnitt ist ein Kreis mit dem Puncte $C'$ als Mittelpunct.

# Viertes Buch.

## **Trigonometrie.**

### **Einleitung.**

**200.** In den vorigen Büchern wurde nachgewiesen, wie man aus einer gewissen Anzahl gegebener, unabhängiger Stücke eines Gebildes die übrigen durch Construction bestimmen kann. Statt der Construction kann man sich, wenn bloss Abstände gegeben sind, wie z. B. in einigen speciellen Fällen (vergl. Art. 161—165, 181, u. s. w.) der Rechnung bedienen, indem man nämlich für die Abstände ihre Verhältnisszahlen zu einer gegebenen Einheit einführt und die Masszahlen der gesuchten Abstände, mithin letztere selbst, durch Rechnung bestimmt.

Kommen in einer Aufgabe sowohl Abstände als Winkel auf welche Grössen zuletzt alle Bestimmungsstücke zurückgeführt werden können vor, so muss man um auf solche Aufgaben die Rechnung anwenden zu können statt der Winkelgrössen andere davon abhängige Winkelfunctionen, d. i. Verhältnisse von Linien, wodurch die Winkel vollkommen bestimmt sind, einführen.

Diese Winkelfunctionen, ihre Eigenschaften und Beziehungen zu einander, bilden den Gegenstand der Goniometrie. Die Anwendung derselben auf das Dreieck, Vieleck, Dreikant, u. s. w. wird ebene Trigonometrie, Polygonometrie, sphärische Trigonometrie, u. s. w. genannt.

Alle Theile zusammen, führen gewöhnlich den Namen „Trigonometrie“.

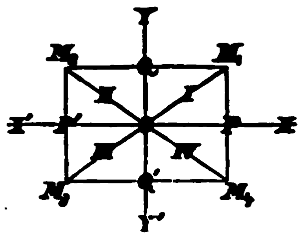
## Goniometrie.

### **Bestimmung der Lage von Puncten einer Ebene.**

**201.** Zur Bestimmung der Lage eines Punctes einer Ebene bedient man sich gewöhnlich zweier unter einem rechten Winkel sich schneidender Geraden, welche Coordinaten-Axen heissen.

Der Durchschnittspunct $O$ heisst der **Coordinaten-Anfang.**

Fig. 62.



Die eine Gerade heisst die **Abscissenaxe** und wird mit $XX'$, die andere Gerade die **Ordinatenaxe** und wird mit $YY'$ bezeichnet.

Durch die beiden Coordinatenaxen wird die unbegrenzte Ebene in vier (congruente) Theile getheilt, welche **Quadranten** heissen.

In jeder der beiden Coordinatenaxen unterscheidet man eine positive und eine negative Richtung. Es soll in der Abscissenaxe die von $O$ nach rechts gehende Richtung, in der Figur mit $OX$ bezeichnet, als positiv, mithin die nach links gehende, mit $OX'$ bezeichnete, als negativ angenommen werden. In der Ordinatenaxe soll die Richtung oberhalb der Abscissenaxe, in der Figur mit $OY$ bezeichnet, als positiv, mithin die unterhalb der Abscissenaxe, d. i. die Richtung $OY'$, negativ genommen werden.

202. Um nun die Lage eines Punctes $M$ in der Coordinaten-Ebene zu bestimmen, ziehe man von diesem Puncte Parallele zu den Coordinatenaxen; dadurch werden auf den Axen Stücke, auf der Abscissenaxe der Abschnitt $OP$, auf der Ordinatenaxe der Abschnitt $OQ$ bestimmt, welche die **Coordinaten** des Punctes $M$ heissen. Man bezeichnet die Coordinaten mit $x$, $y$ und nennt $x$ die **Abcisse**, $y$ die **Ordinate** des Punctes $M$; dieselben sind positiv oder negativ, je nachdem sie in die positiven oder negativen Axen-Theile fallen.

Ist in der Figur die absolute Distanz von

$$OP \text{ oder } OP' = a$$
$$OQ \quad „ \quad OQ' = b,$$

so ist für den Punct $M_1$ $\quad x = +a,\ y = +b$

„ $M_2$ $\quad x = -a,\ y = +b$

„ $M_3$ $\quad x = -a,\ y = -b$

„ $M_4$ $\quad x = +a,\ y = -b.$

Ist $r = OM$ die Entfernung des Punctes $M$ vom Anfang $O$, so ist

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

wobei $r$ immer absolut (positiv) genommen wird.

Durch die Coordinaten ist die Lage eines Punctes vollkommen bestimmt.

203. Es seien $M_1$ und $M_2$ zwei beliebige Puncte, $x_1$, $y_1$ und $x_2$, $y_2$ die Coordinaten von $M_1$ und $M_2$.

Ist $x_1 = OP_1$, $x_2 = OP_2$, so ist $OP_2 = OP_1 + P_1P_2$.

Legt man durch den Punct $M_1$ ein neues Axensystem, dessen positive und negative Richtungen den positiven und negativen Richtungen des gegebenen parallel sind, so ist die Strecke $P_1P_2 = x_2 - x_1$ der Grösse und dem Zeichen nach die Abscisse von $M_2$ in Bezug auf $M_1$ als Anfang.

Ebenso stellt, wenn $y_1 = OQ_1$, $y_2 = OQ_2$ ist, die Strecke $Q_1Q_2 = y_2 - y_1$ die Ordinate von $M_2$ in Bezug auf $M_1$ dar.

Nun ist $$\overline{M_1M_2}^2 = \overline{P_1P_2}^2 = \overline{Q_1Q_2}^2$$

oder $$\overline{M_1M_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

### Erklärung der Winkelfunctionen.

204. Jede vom Ursprunge nach einem Puncte $M$ der Coordinaten-Ebene gezogene Gerade bildet mit der positiven Abscissen-Richtung einen Winkel $XOM = \alpha$.

Sind $x$, $y$ die Coordinaten von $M$, und setzt man $OM = r$, so bezeichnet man die Quotienten

$$\frac{x}{r}\ ,\ \frac{y}{r}$$

durch $$\cos\alpha\ ,\ \sin\alpha$$

und spricht diese Zeichen aus: Cosinus von $\alpha$, Sinus von $\alpha$.

Die Quotienten

$$\frac{x}{y}\ ,\ \frac{y}{x}\ ,\ \frac{r}{x}\ ,\ \frac{r}{y}$$

werden durch $\cot\alpha$, $\tan\alpha$, $\sec\alpha$, $\csc\alpha$

(sprich: Cotangente, Tangente, Secante, Cosecante von $\alpha$) bezeichnet.

Die Verhältnisse sin, cos, tan, cot, sec, csc hängen blos von der Grösse des Winkels ab und werden daher **Winkelfunctionen** genannt. Dabei heissen sin, tan, sec **Hauptfunctionen**; cos, cot, csc **Cofunctionen**.

205. Aus dieser Erklärung folgt unmittelbar:

a) $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$.

Wegen $x^2 + y^2 = r^2$ ist, wenn man succesive durch $r^2$, $x^2$, $y^2$ dividirt:

$$\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 = 1$$
$$1 + \tan\alpha^2 = \sec\alpha^2$$
$$\cot\alpha^2 + 1 = \csc\alpha^2.$$

b) **Ferner ist**

$\sin 0 = 0,$ $\qquad \cos 0 = +1$

$\sin R = +1,$ $\qquad \cos R = 0.$

$\sin 2R = 0,$ $\qquad \cos 2R = -1$

$\sin 3R = -1,$ $\qquad \cos 3R = 0$

$\sin(m.4R + \alpha) = \sin\alpha,\ \cos(m.4R + \alpha) = \cos\alpha,$

wo $m$ jede beliebige ganze Zahl bedeutet.

c) Der Sinus ist positiv für Winkel von 0 bis $2R$
" negativ " $2R$ " $4R$.

Der Sinus wächst für Winkel von 0 bis $R$, nimmt ab für Winkel von $R$ bis $2R$.

Der Sinus nimmt ab (wächst absolut) für Winkel von $2R$ bis $3R$, wächst (nimmt absolut ab) für Winkel von $3R$ bis $4R$.

Der Cosinus ist positiv von 0 bis $R$, negativ von $R$ bis $3R$, positiv von $3R$ bis $4R$.

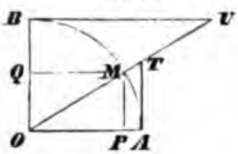
Der Cosinus nimmt ab für Winkel von 0 bis $2R$ und wächst für Winkel von $2R$ bis $4R$.

Aehnliche Beziehungen lassen sich auch für die übrigen Winkelfunctionen aufstellen.

Sinus und Cosinus liegen zwischen den Grenzen $+1$ und $-1$
Tangente und Cotangente · · · · · · · · · · · · · $+\infty$ " $-\infty$
Secante und Cosecante · · · · · · · · entweder $+1$ " $+\infty$
oder $-1$ " $-\infty$

Anmerkung 1. Beschreibt man in der Ebene des Winkels $\alpha$ mit dem Halbmesser $OM = r$ einen Kreis, so stellen wenn der Bogen $AB$ ein Quadrant ist und $AT \perp OA$, $BU \perp OB$ steht,

Fig. 64.



$$\sin\alpha = \frac{PM}{r},\ \tan\alpha = \frac{AT}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{OP}{r},\ \sec\alpha = \frac{OT}{r}$$

$$\cot\alpha = \frac{BU}{r},\ \csc\alpha = \frac{OU}{r}.$$

Die Strecken $PM, \cdots OU$, deren Verhältnisse zum Halbmesser die Winkelfunctionen sind, werden trigonometrische Linien genannt.

Das Verhältniss der Länge des Bogens $AM$ zum Halbmesser $OA$ wird „der in Theilen des Halbmessers ausgedrückte Winkel $AOM$" genannt.

Anmerkung 2. Ist der Winkel $\alpha$ sehr klein, so fällt die Strecke $PM$ mit Bogen $AM$ nahezu zusammen, und da letzterer auf dem Halbmesser $OA$ senkrecht steht, so ändert sich der Sinus nahezu proportional der Aenderung des Bogens, während der Cosinus nahezu unverändert bleibt.

Für einen Winkel nahe gleich $R$ findet das Umgekehrte statt. Ist daher:

$$\sin\alpha = a, \qquad \cos\alpha = b$$
$$\sin(\alpha+\alpha') = a + a', \quad \cos(\alpha+\alpha') = b - b'$$

so ist, wenn $\alpha$ klein ist, für eine kleine Aenderung $\alpha'$ des Winkels $\alpha$ nahezu

$$a' = \alpha', \quad b' = 0;$$

wo $\alpha'$ die in Theilen des Halbmessers ausgedrückte Aenderung des Winkels ist.

Der Unterschied

$$\tan(\alpha+\alpha') - \tan\alpha = \frac{a'}{b-b'} + \frac{a}{b}\cdot\frac{b'}{b-b'}$$

wird nahe $= a' = \alpha'$.

206. Dreht man die Gerade $OM$ im entgegengesetzten Sinne, bis die Drehung unterhalb der Abscissenaxe denselben absoluten Werth erreicht, und bezeichnet man mit $M'$ die neue Lage des Punctes $M$, so erhält man einen Winkel $M'OX$, welcher das entgegengesetzte des früheren ist und mit „$-\alpha$" bezeichnet wird.

Sind $x'$, $y'$ die Coordinaten des Punctes $M'$, so ist

$$x' = +x, \quad y' = -y, \quad OM' = OM = r,$$

also $$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

## Beziehungen zwischen den Functionen mehrerer Winkel.

207. Beschreibt man in der Ebene der Coordinatenaxen aus $O$ mit einem beliebigen Radius $= r$ einen Kreis, und sind $M_1$ und $M_2$ zwei beliebige Puncte des Umfanges, $XOM_1 = \alpha_1$, $XOM_2 = \alpha_2$, so ist der von den Halbmessern $OM_1$ und $OM_2$ eingeschlossene hohle Winkel $= \alpha_2 - \alpha_1$ oder $= \alpha_1 - \alpha_2$, also $= \pm(\alpha_2 - \alpha_1)$.

Zieht man vom Mittelpuncte $O$ eine Senkrechte auf die Sehne, so wird der Winkel $\pm(\alpha_2 - \alpha_1)$ halbirt und es ist daher

$$\tfrac{1}{2}\, M_1M_2 = r\sin\left[\pm\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)\right]$$

oder $$\overline{M_1M_2}^2 = 4r^2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)^2.$$

Aus $x_1 = r\cos\alpha_1$, $y_1 = r\sin\alpha_1$, $x_2 = r\cos\alpha_2$, $y_2 = r\sin\alpha_2$ folgt nach Art. 203

$$\overline{M_1M_2}^2 = (r\cos\alpha_2 - r\cos\alpha_1)^2 + (r\sin\alpha_2 - r\sin\alpha_1)^2$$
$$= 2r^2 - 2r^2(\cos\alpha_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_2\sin\alpha_1).$$

Mithin ist

$$2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)^2 = 1 - (\cos\alpha_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_2\sin\alpha_1).$$

Setzt man $\alpha_1 = 0$, so wird

$$2\sin\tfrac{1}{2}\alpha_2^2 = 1 - \cos\alpha_2.$$

Da $\alpha_2$ jeden beliebigen Werth bedeutet, so ist auch

$$2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)^2 = 1 - \cos(\alpha_2-\alpha_1),$$

mithin

$$\cos(\alpha_2-\alpha_1) = \cos\alpha_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_2\sin\alpha_1.$$

Setzt man in der gefundenen Formel $-\alpha_1$ statt $\alpha_1$, so erhält man

$$\cos[\alpha_2-(-\alpha_1)] = \cos\alpha_2\cos(-\alpha_1) + \sin\alpha_2\sin(-\alpha_1)$$

oder

$$\cos(\alpha_2+\alpha_1) = \cos\alpha_2\cos\alpha_1 - \sin\alpha_2\sin\alpha_1.$$

Setzt man in der Formel für $\cos(\alpha_2-\alpha_1)$ statt $\alpha_1$ $\alpha_2-\alpha_1$, so erhält man

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2\cos(\alpha_2-\alpha_1) + \sin\alpha_2\sin(\alpha_2-\alpha_1).$$

Wird in dieser Formel statt $\cos(\alpha_2-\alpha_1)$ sein Werth gesetzt, in der erhaltenen Gleichung $\cos\alpha_2^2 = 1 - \sin\alpha_2^2$ gesetzt und durch $\sin\alpha_2$ abgekürzt, so erhält man

$$\sin(\alpha_2-\alpha_1) = \sin\alpha_2\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\sin\alpha_1;$$

hieraus folgt, wenn man $-\alpha_1$ statt $\alpha_1$ setzt

$$\sin(\alpha_2+\alpha_1) = \sin\alpha_2\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2\sin\alpha_1.$$

Man erhält daher, wenn man $\alpha_2$ und $\alpha_1$ durch $\alpha$ und $\beta$ ersetzt, die vier Gleichungen

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Folgerungen:

a) Setzt man $\alpha = R$, so wird

$$\sin(R+\beta) = +\cos\beta,\quad \sin(R-\beta) = +\cos\beta$$
$$\cos(R+\beta) = -\sin\beta,\quad \cos(R-\beta) = +\sin\beta.$$

b) Setzt man $\alpha = 2R$, so wird

$$\sin(2R+\beta) = -\sin\beta,\quad \sin(2R-\beta) = +\sin\beta$$
$$\cos(2R+\beta) = -\cos\beta,\quad \cos(2R-\beta) = -\cos\beta.$$

c) Setzt man $\alpha = 3R$, so wird

$$\sin(3R+\beta) = -\cos\beta, \quad \sin(3R-\beta) = -\cos\beta$$
$$\cos(3R+\beta) = +\sin\beta, \quad \cos(3R-\beta) = -\sin\beta.$$

d) Setzt man $\alpha = 4R$, so wird

$$\sin(4R-\beta) = -\sin\beta, \quad \cos(4R-\beta) = +\cos\beta,$$

welch letztere Formeln schon in Art. 205 enthalten sind.

Vermittelst dieser Formeln kann man die Winkelfunctionen für Sinus, Cosinus aller Winkel auf die der positiven, spitzen Winkel zurückführen.

Liegt der gegebene Winkel $\alpha$ zwischen

$R$ und $2R$, so setze man $\alpha = R+\beta$
$2R$ „ $3R$ „ $= 2R+\beta$
$3R$ „ $4R$ „ $= 3R+\beta$

wo $\beta$ spitz ist.

Ist $\alpha$ negativ, so kann man dafür $4R+\alpha$ setzen.

Ebenso erhält man die übrigen Functionen.

208. $\tan(\alpha\pm\beta) = \dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta}.$

Dividirt man Zähler und Nenner durch $\cos\alpha\cos\beta$, so wird

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}.$$

Analog erhält man

$$\cot(\alpha\pm\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}.$$

209. Setzt man in den Ausdrücken für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ Winkel $\alpha=\beta$, so wird

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2,$$

woraus mit Zuziehung von $\cos\alpha^2+\sin\alpha^2 = 1$ erhalten wird

$$2\sin\alpha^2 = 1-\cos 2\alpha$$
$$2\cos\alpha^2 = 1+\cos 2\alpha.$$

Setzt man $2\alpha = \alpha'$, also $\alpha = \dfrac{\alpha'}{2}$ und vertauscht schliesslich $\alpha'$ mit $\alpha$, so wird

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$2\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 = 1-\cos\alpha$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 = 1+\cos\alpha,$$

woraus noch $\tan\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ folgt.

210. Addirt und subtrahirt man die Gleichungen des Art. 207, so erhält man

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta.$$

Setzt man $\alpha+\beta=\alpha'$, $\alpha-\beta=\beta'$, so ist

$$\alpha=\frac{\alpha'+\beta'}{2},\ \beta=\frac{\alpha'-\beta'}{2}.$$

Vertauscht man schliesslich $\alpha'$ und $\beta'$ mit $\alpha$ und $\beta$, so erhält man:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Aus der ersten und zweiten Formel folgt noch:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

211. Die im Vorigen entwickelten Formeln der Goniometrie sind die wichtigsten. Ausser diesen mögen noch folgende zusammengestellt werden:

1) $$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos\alpha^2}=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan\alpha^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\cot\alpha^2}}=\frac{\sqrt{\sec\alpha^2-1}}{\sec\alpha}$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin\alpha^2}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan\alpha^2}}=\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot\alpha^2}}=\frac{\sqrt{\csc\alpha^2-1}}{\csc\alpha}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin\alpha^2}}=\frac{\sqrt{1-\cos\alpha^2}}{\cos\alpha}=\sqrt{\sec\alpha^2-1}=\frac{1}{\sqrt{\csc\alpha^2-1}}$$

$$\cot\alpha=\frac{\sqrt{1-\sin\alpha^2}}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha^2}}=\frac{1}{\sqrt{\sec\alpha^2-1}}=\sqrt{\csc\alpha^2-1}$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\sqrt{1-\sin\alpha^2}}=\sqrt{1+\tan\alpha^2}=\frac{\sqrt{1+\cot\alpha^2}}{\cot\alpha}=\frac{\csc\alpha}{\sqrt{\csc\alpha^2-1}}$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sqrt{1-\cos\alpha^2}}=\frac{\sqrt{1+\tan\alpha^2}}{\tan\alpha}=\sqrt{1+\cot\alpha^2}=\frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec\alpha^2-1}}$$

welche unmittelbar aus den Gleichungen des Art. 205 erhalten werden.

2) $$\tan\alpha\pm\tan\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}.$$

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

3) Aus
$$\tan\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$
und
$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \tan\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha^2}{2}$$
folgt
$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha^2}{2}},\quad \cos\alpha = \frac{1-\tan\frac{\alpha^2}{2}}{1+\tan\frac{\alpha^2}{2}},$$
d. h. man kann sämmtliche goniometrische Functionen eines Winkels rational durch die Tangente des halben Winkels ausdrücken.

4) $\cos\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}[R \pm (\alpha+\beta)]\cos\frac{1}{2}[R \pm (\alpha-\beta)]$, indem man entweder $\sin(R+\alpha)$ statt $\cos\alpha$, oder $\cos(R-\beta)$ statt $\sin\beta$ setzt und Art. 210 anwendet.

5) $\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta) = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

Anwendung von Art. 210 und
$$\sin(\alpha+\beta) = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

6) $\sin\alpha\sin(\beta-\gamma) + \sin\beta\sin(\gamma-\alpha) + \sin\gamma\sin(\alpha-\beta) = 0$

$\cos\alpha\sin(\beta-\gamma) + \cos\beta\sin(\gamma-\alpha) + \cos\gamma\sin(\alpha-\beta) = 0,$

indem man statt $\sin(\beta-\gamma), \cdots$ die Werthe setzt.

7)
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin\alpha^3$$
$$\cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos\alpha^3,\ \text{u. s. w.}$$
indem man in $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\beta = 2\alpha$ setzt, u. s. w.

8) Setzt man in
$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$
$\alpha = a + mb$, $\beta = \frac{b}{2}$, und setzt hierauf $m = 0, 1, 2, \cdots n$ und addirt die erhaltenen Gleichungen, so wird
$$\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \cdots + \sin(a+nb) = \frac{\sin(a+\frac{1}{2}nb)\sin\frac{1}{2}(n+1)b}{\sin\frac{1}{2}b}$$
$$\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cdots + \cos(a+nb) = \frac{\cos(a+\frac{1}{2}nb)\sin\frac{1}{2}(n+1)b}{\sin\frac{1}{2}b}.$$

Setzt man $b = a$ und $n-1$ statt $n$, so wird

$$\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \cdots \sin na = \frac{\sin \frac{1}{2} na \cdot \sin \frac{1}{2}(n+1) a}{\sin \frac{1}{2} a}$$

$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cdots \cos na = \frac{\cos \frac{1}{2} na \cdot \sin \frac{1}{2}(n+1) a}{\sin \frac{1}{2} a}$$

Für $b = 2a$ wird

$$\sin a + \sin 3a + \sin 5a + \cdots \sin (2n+1) a = \frac{\sin (n+1) a^2}{\sin a}$$

$$\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \cdots \cos (2n+1) a = \frac{\sin 2(n+1) a}{2 \sin a}$$

9) Bedeutet $i$ die Einheit der imaginären Zahlen, d. h. $i = \sqrt{-1}$, so folgt durch Multiplication

$$(\cos\alpha + i \sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta).$$

Ebenso ist

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\gamma + i\sin\gamma)$$
$$= \cos(\alpha+\beta+\gamma) + i\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

u. s. w.

Setzt man $\alpha = \beta = \gamma = \cdots$, und ist $n$ die Anzahl der Factoren, so hat man

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha.$$

Wendet man

$$(a + ib)^n = a^n - \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 - \cdots\cdots$$
$$+ i\left[\binom{n}{1} a^{n-1} b - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \binom{n}{5} a^{n-5} b^5 - \cdots\right]$$

an, und zerfällt die Gleichung in die reellen und imaginären Theile, so erhält man

$$\cos n\alpha = \cos\alpha^n - \binom{n}{2}\cos\alpha^{n-2}\sin\alpha^2 + \binom{n}{4}\cos\alpha^{n-4}\sin\alpha^4 - \cdots$$

$$\sin n\alpha = \binom{n}{1}\cos\alpha^{n-1}\sin\alpha - \binom{n}{3}\cos\alpha^{n-3}\sin\alpha^3 + \binom{n}{5}\cos\alpha^{n-5}\sin\alpha^5 \cdots$$

### Berechnung der goniometrischen Functionen.

212. Kennt man die Werthe einer goniometrischen Function für alle Winkel von 0 bis $R$, so lassen sich auf diese die Werthe aller Functionen für alle Winkel zurückführen. Vermöge $\sin(R-\alpha) = \cos\alpha$, $\cos(R-\alpha) = \sin\alpha$, $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$ braucht man nur die Sinusse oder Cosinusse von 0 bis $\frac{1}{2} R$ zu bestimmen, um daraus die übrigen zu erhalten.

Da im gleichseitigen Dreieck ein Winkel $60^0$ beträgt, so ist

$$\sin 30^0 = \tfrac{1}{2},\quad \cos 30^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Daraus erhält man durch Anwendung des Art. 209 die Sinusse und Cosinusse von $15^0$, $7\frac{1}{2}^0$, $3\frac{3}{4}^0$, $1\frac{7}{8}^0$, $56'15''$, $\cdots$ $\cdots\cdots 52\frac{47}{64}''$.

Für sehr kleine Winkel kann man das Verhältniss der Sinusse gleich dem der Winkel setzen, man erhält daher aus der Proportion

$$\sin 52\tfrac{47}{64}'' : \sin 60'' = 52\tfrac{47}{64} : 60$$

$$\sin 60'' = \sin 1' = 0\cdot 00029088820.$$

Damit erhält man $\sin 2'$, $\sin 4'$, $\cdots$ und kann die Sinusse von $0^0$ bis $30^0$ von Minute zu Minute angeben.

Aus den Gleichungen

$$\sin(30^0 + \alpha) = \cos\alpha - \sin(30^0 - \alpha)$$

$$\cos(30^0 + \alpha) = \cos(30^0 - \alpha) - \sin\alpha,$$

welche aus Art. 210 erhalten werden, indem man statt $\alpha$ und $\beta$ resp. $30^0 + \alpha$ und $30^0 - \alpha$ setzt, erhält man die Sinusse und Cosinusse von $30^0$ bis $45^0$.

Auf diesem Wege wurden die ersten grossen Sinustafeln berechnet.

### Auflösung goniometrischer Gleichungen.

213.

a) Aus
$$x \sin X = a$$
$$x \cos X = b$$

wo $x$ positiv oder negativ ist, soll $x$ und $X$ bestimmt werden.

$$\tan X = \frac{a}{b}, \quad x = \frac{a}{\sin X} = \frac{b}{\cos X}.$$

Ist (was in der Anwendung beinahe immer der Fall ist) $X \leq 4R$ und das Zeichen von $x$ bekannt, so sind die Zeichen von $\sin X$ und $\cos X$ bekannt, also der Winkel $X$ eindeutig bestimmt.

Beispiel. $a = 86504$, $b = 75318$.

| | | |
|---|---|---|
| $\log a$ | 4.93704 | |
| *$\log \sin X$ | 9.87748 s | Ist $\sin X > \cos X$, so wird $x$ aus $a$ bestimmt. |
| $\log b$ | 4.87690 | |
| $\log \tan X$ | 0.06014 | |
| $X =$ | $48^0 57'.25$ | |
| $\log x =$ | 5.05956 | |
| $x =$ | 114700 | |

* Die mit „s" bezeichneten Logarithmen sind „später" eingesetzt. Etwaige Nebenrechnungen werden auf einem besonderen Blatt Papier ausgeführt.

Für $a = +86504$, $b = -75318$, setze man $X = R + X'$
„ — „ „ — „ „ $2R + X''$
„ — „ „ + „ „ $3R + X'''$;
es ist dann $X'' = 48^\circ 57'.25$, $X' = X''' = 41^\circ 2'.75$.

b) Aus 1) $x \sin X = a$ oder 2) $x \cos X = a$
$x \sin (X + B) = b$ $x \cos (X + B) = b$

wo $x$ positiv oder negativ ist, soll $x$ und $X$ bestimmt werden.

Entwickelt man $x \sin (X + B)$ oder $x \cos (X + B)$ und setzt resp. für $x \sin X$ oder $x \cos X$ den Werth, so ist:

1) $x \sin (X + B) = a \cos B + x \cos X \sin B$, oder
2) $x \cos (X + B) = a \cos B - x \sin X \sin B$, mithin

1) $x \sin X = a$ 2) $x \sin X = -\dfrac{b - a \cos B}{\sin B}$

$x \cos X = \dfrac{b - a \cos B}{\sin B}$ $x \cos X = a$.

c) Aus $a \sin X + b \cos X = C$ soll $X$ bestimmt werden.

Auflösung: 1) Man setze $\cos X = \sqrt{1 - \sin X^2}$ und bestimme $\sin X$.

2) Man setze $a = m \cos M$, $b = m \sin M$ und bestimme daraus $m$ und $M$, so wird

$$m \sin (X + M) = C,$$

woraus $X$ erhalten wird.

d) Aus $a \sin (X + A) + b \cos (X + B) = C$, soll $X$ bestimmt werden.

Man löse $\sin (X + A)$ und $\cos (X + B)$ auf, so erhält man die frühere Aufgabe.

e) Auf ähnliche Weise werden

$$a \tan (X + A) + b \tan (X + B) = C, \text{ u. s. w.}$$

gelöst.

---

# Ebene Trigonometrie.

## a) Das rechtwinklige Dreieck.

214. Ist im Dreieck $ABC$ der Winkel $C = R$, so folgt aus Art. 204

$$a = c \sin A = c \cos B$$
$$b = c \sin B = c \cos A$$

$$a = b \tan A = b \cot B$$
$$b = a \tan B = a \cot A\,,$$

vermittelst welcher Gleichungen alle auf das rechtwinklige Dreieck bezüglichen Aufgaben gelöst werden können.

Beispiele.

1) $a = 86504$
$b = 75318$

Lösung in 213, a).

3) $a = 86504$
$A = 48^\circ 57'.25$

Lösung.

| | |
|---|---|
| log sin $A$ | 9.87748 |
| log $a$ | 4.93704 |
| log cot $A$ | 9.93986 |
| log $c$ | 5.05956 |
| log $b$ | 4.87690 |

$c = 114700$
$b = 75318$

Der zweite Winkel $B$ wird nach

$$B = R - A$$

bestimmt.

2) $a = 86504$
$c = 114700$

Lösung.

| | |
|---|---|
| log $a$ | 4.93704 |
| log cos $A$ | 9.81734 s |
| log $c$ | 5.05956 |
| log sin $A$ | 9.87848 |
| log $b$ | 4.87690 |

$A$ $48^\circ 57'.25$
$b$ $75318$

4) $c = 114700$
$A = 48^\circ 57'.25$

Lösung.

| | |
|---|---|
| log sin $A$ | 9.87748 |
| log $c$ | 5.05956 |
| log cos $A$ | 9.81734 |
| log $a$ | 4.93704 |
| log $b$ | 4.87690 |

$a = 86504$
$b = 75318$

## b) Das schiefwinklige Dreieck.

215. Zieht man vom Scheitel $C$ eine Senkrechte $CD = h$ auf die gegenüberliegende Seite $AB$, so ist:

$$h = a \sin B = b \sin A,$$

woraus $a : b = \sin A : \sin B$ folgt.

Setzt man $AD = d$, so ist $DB = c - d$ oder $c + d$, je nachdem der Winkel bei $A$ spitz oder stumpf ist.

Im ersten Falle ist $d = b \cos A$, im zweiten Falle ist $d = b \cos(2R - A) = -b \cos A$. Nun ist $DB = a \cos B$, also allgemein

$$= a \cos B + b \cos A.$$

Zieht man noch die übrigen Höhen, so erhält man:

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= b\cos C + c\cos B \\ b &= c\cos A + a\cos C \\ c &= a\cos B + b\cos A \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Aus (1) folgt:

$$a + b : c = \sin A + \sin B : \sin C$$
$$a - b : c = \sin A - \sin B : \sin C.$$

Berücksichtigt man, dass $A + B + C = 2R$ ist, so wird mit Anwendung von Art. 210

$$\left.\begin{aligned} (a + b)\sin\tfrac{1}{2}C &= c\cos\tfrac{1}{2}(A - B) \\ (a - b)\cos\tfrac{1}{2}C &= c\sin\tfrac{1}{2}(A - B) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (2) resp. mit $a$, $b$, $c$, und vermindert dann jede der erhaltenen Gleichungen um die Summe der übrigen, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

216. Aus (4) folgt:

$$\cos A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$$

und aus dieser Gleichung

$$\begin{aligned} 2\cos\frac{A^2}{2} = 1 + \cos A &= \frac{2bc - a^2 + b^2 + c^2}{2bc} \\ &= \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{(a + b + c)(-a + b + c)}{2bc}. \end{aligned}$$

Ebenso wird

$$\begin{aligned} 2\sin\frac{A^2}{2} = 1 - \cos A &= \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2bc} \\ &= \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} \\ &= \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2bc}. \end{aligned}$$

Mithin ist

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{4bc}}\\ \sin\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}\\ \tan\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(-a+b+c)}}\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

und analog für die übrigen Winkel.

Setzt man der Kürze halber

$$a+b+c = 2s,$$

so wird

$$-a+b+c = 2(s-a) \text{ u. s. w., also}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\\ \sin\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\ \tan\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\end{aligned}\right\} \qquad (5a)$$

Für die bequemere Rechnung setze man

$$\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} = r^2,$$

dann wird

$$\frac{r^2}{(s-a)^2} = \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)} = \tan\frac{A^2}{2},$$

also

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{r}{s-a}; \qquad (5b)$$

dabei bedeutet $r$ den Halbmesser des in das Dreieck einbeschriebenen Kreises.

217. Vermittelst der Gleichungen (1) bis (5) lassen sich alle auf das schiefwinklige Dreieck bezüglichen Aufgaben lösen.

Behandlung der hierher gehörigen Aufgaben.

Gegeben seien:

1) Die drei Seiten $a$, $b$, $c$. Man findet die drei Winkel am bequemsten und genauesten nach den Formeln (5b), wo $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2} = R$ als Controle dient.

Beispiel.

$$a = 7312, \quad b = 5634, \quad c = 7736.$$

Lösung.

| | |
|---|---|
| $a$ | 7312 |
| $b$ | 5634 |
| $c$ | 7736 |
| $2s$ | 20682 |
| $s$ | 10341 |
| $s-a$ | 3029 |
| $s-b$ | 4707 |
| $s-c$ | 2605 |

| | |
|---|---|
| $\log(s-a)$ | 3.48130 |
| $\log(s-b)$ | 3.67274 |
| $\log(s-c)$ | 3.41581 |
| $\log r$ | 3.27765 |
| $\log(s-a)(s-b)(s-c)$ | 10.56[illegible]85 |
| $\log s$ | 4.01456 |
| $2\log r$ | 6.55529 |
| $\log\tan\frac{A}{2}$ | 9.79635 |
| $\log\tan\frac{B}{2}$ | 9.60491 |
| $\log\tan\frac{C}{2}$ | 9.86184 |

$$\frac{A}{2}=32^\circ\,2'.0 \quad \frac{B}{2}=21^\circ\,55'.89 \quad \frac{C}{2}=36^\circ\,2'.17.$$

2) Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, etw $a, b, C$. Man findet nach den Formeln (3) $c$, $A-B$, und weg $A+B=2R-C$, $A$ und $B$.

Beispiele. $a=7312$, $b=5634$, $c=72^\circ\,4'.21$.

Lösung.

| | |
|---|---|
| $a$ | 7312 |
| $b$ | 5634 |
| $a+b$ | 12946 |
| $a-b$ | 1678 |
| $\frac{C}{2}$ | $36^0\,2'.10$ |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\log(a+b)$ | 4.11213 |
| | $\log\sin\frac{C}{2}$ | 9.76959 |
| 2 | $\log(a-b)$ | 3.22479 |
| | $\log\cos\frac{C}{2}$ | 9.90776 |

| | |
|---|---|
| Summe 1 | 3.88172 |
| $\log\cos\frac{1}{2}(A-B)$ | 9.99321 s |
| Summe 2 | 3.13255 |
| $\log\tan\frac{1}{2}(A-B)$ | 9.25083 |
| $\log c$ | 3.88851 |

$$c=7736$$

$$\tfrac{1}{2}(A+B)=53^0\;57'.90 \qquad A=64^0\;\;4'.03$$
$$\tfrac{1}{2}(A-B)=10\quad 6.14 \qquad B=43\;\;51.76$$

3) Zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen, etwa $a, b, A$ Man findet aus $\sin B=\dfrac{b\cdot\sin A}{a}$ den Winkel $B$. Ist $\beta$ der spitz Winkel der Tafel, so ist auch
$\sin(2R-\beta)=\sin\beta$, also $B$ entweder $=\beta$ oder $=2R-\beta$

I. Ist $a > b$, so muss $A > B$, also $B = \beta$ sein.

II. „ $a < b$, „ $A < B$, also kann $B = \beta$ oder $2R - \beta$ sein. Der Fall, dass $\beta < A$ ist, kann wegen $\sin B > \sin A$ nicht eintreten. Man erhält in diesem Falle zwei Auflösungen.

III. Ist $a = b$, so ist $A = B$, d. h. das Dreieck gleichschenklig. Aus $A$ und $B$ erhält man $C$ und damit

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Im Falle II. erhält man zwei Werthe von $C$ und $c$.

Beispiel. $a = 7312$, $b = 5634$, $A = 64^\circ\, 4'.0$.

Lösung.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\log b$ | 3.75082 | $\log a : \sin A$ | 3.91013 |
| $\log \sin A$ | 9.95391 | $\log \sin C$ | 9.97838 |
| $\log a$ | 3.86404 | $\log c$ | 3.88851 |
| $\log b \sin A$ | 3.70473 | $c$ | 7736 |
| $\log \sin B$ | 9.84069 | | |
| $B$ | $43^\circ\, 51'.75$ | | |
| $A$ | $64^\circ\, 4'.00$ | | |
| $A + B$ | $107^\circ\, 66'.75$ | | |
| $C$ | $72^\circ\, 4'.25$ | | |

4) Eine Seite und zwei Winkel, etwa $a$, $A$, $B$. Man erhält nach den Formeln (1) $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$ die übrigen Stücke.

Beispiel. $a = 7312$, $A = 64^\circ\, 4'.00$ $B = 43^\circ\, 51'.75$.

Lösung.

$C = 72^\circ\, 4'.25$ wie in 3).

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\log a$ | 3.86404 | $\log b$ | 3.75082 |
| $\log \sin A$ | 9.95391 | $\log c$ | 3.88851 |
| $\log \sin B$ | 9.84069 | $b$ | 5634 |
| $\log a : \sin A$ | 3.91013 | $c$ | 7736 |
| $\log \sin C$ | 9.97838 | | |

---

## Polygonometrie.

218. Es seien $A_1, A_2, \cdots A_n$ die Scheitel eines gewöhnlichen $n$ Eckes;

$$x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ \cdots\ x_n, y_n$$

die Coordinaten in Beziehung auf ein in der Ebene des Vielecks liegendes Axensystem;

$$a_1 = A_1 A_2,\ a_2 = A_2 A_3, \cdots a_{n-1} = A_{n-1} A_n,\ a_n = A_n A_1$$

die Längen der Seiten.

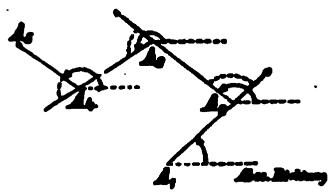
Geht man im Umfange des Vielecks von einer Ecke zu den übrigen derart, dass man die innere Seite des Umfanges stets zur Linken hat, so sollen die Winkel, welche in dieser Richtung die Seiten $a_1, a_2, \cdots a^n$ mit der Abscissenaxe bilden, durch

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$$

bezeichnet werden.

Verlängert man jede Seite in ihrer Richtung, so bildet sie mit der nächsten einen Winkel, welcher der Aussenwinkel der zugehörigen Ecke heissen soll.

Fig. 66.




Die Aussenwinkel sollen durch

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$$

bezeichnet werden; dabei bedeutet $\varphi_r$ den Winkel an dem Scheitel $A_r$, gebildet von der Verlängerung der Seite $A_{r-1} A_r$ mit der Seite $A_r A_{r+1}$. Der Aussenwinkel ist der Nebenwinkel des an derselben Ecke liegenden Innenwinkels, und wird positiv oder negativ von 0 bis $2R$ gezählt.

Aus dieser Erklärung folgt

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1 \\ \alpha_2 &= \alpha_1 + \varphi_2 \\ \alpha_3 &= \alpha_2 + \varphi_3 \\ &\vdots \\ \alpha_n &= \alpha_{n-1} + \varphi_n. \end{aligned}$$

219. Nach 203 und 204 ist

$$\begin{array}{llll} x_2 - x_1 & = a_1 \cos \alpha_1, & y_2 - y_1 & = a_1 \sin \alpha_1 \\ x_3 - x_2 & = a_2 \cos \alpha_2, & y_3 - y_2 & = a_2 \sin \alpha_2 \\ & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_{n-1} & = a_{n-1} \cos \alpha_{n-1}, & y_n - y_{n-1} & = a_{n-1} \sin \alpha_{n-1} \\ x_1 - x_n & = a_n \cos \alpha_n, & y_1 - y_n & = a_n \sin \alpha_n. \end{array}$$

Addirt man diese Gleichungen, so erhält man

$$a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \cdots + a_n \cos \alpha_n = 0$$
$$a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \cdots + a_n \sin \alpha_n = 0,$$

welche Gleichungen die Grundgleichungen der Polygonometrie bilden.

220. Nimmt man successive die Richtungen von $a_1, a_2, \cdots a_n$ als Abscissenaxe an, und bezeichnet man durch $(r, 1)\ (r, 2), \cdots (r, n)$ die Winkel der Seiten $a_1, a_2, \cdots a_n$ mit der Seite $a_r$, so erhält man

$$\begin{array}{l} a_1 + a_2 \cos(1, 2) + \cdots \qquad + a_n \cos(1, n) = 0 \\ a_1 \cos(2, 1) + a_2 + \cdots \qquad + a_n \cos(2, n) = 0 \\ \vdots \\ a_1 \cos(n, 1) + a_2 \cos(n, 2) + \cdots \qquad + a_n = 0. \end{array}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen successive mit $a_1, a_2, \cdots a_n$, so erhält man mit Berücksichtigung, dass

$$\cos(r, s) = \cos(s, r)$$

ist, durch Addition

$$0 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \\ + 2\, a_1\, a_2 \cos(1, 2) + \cdots + 2\, a_{n-1}\, a_n \cos(n-1, n).$$

Subtrahirt man von jeder der erhaltenen Gleichungen die Summe der übrigen, so wird

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 - 2\, a_2 a_3 \cos(2,3) - 2\, a_2 a_4 \cos(2,4) - \cdots \\ - 2\, a_{n-1} a_n \cos(n-1, n),$$

und ebenso für die übrigen Seiten.

221. Nimmt man $a_n$ als Abscissenaxe, so wird

$$\begin{array}{l} \alpha_1 = \varphi_1 \\ \alpha_2 = \varphi_2 + \varphi_1 \\ \alpha_3 = \varphi_3 + \varphi_2 + \varphi_1 \\ \vdots \\ \alpha_n = \varphi_n + \varphi_{n-1} + \cdots \varphi_2 + \varphi_1 = 4\, R, \end{array}$$

und ebenso für die übrigen Seiten.

In jedem $n$ Eck ist daher

$$a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cdots + a_{n-1} \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_{n-1}) + a_n = 0$$
$$a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \cdots + a_{n-1} \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_{n-1}) = 0,$$

und ebenso

$$a_2 \cos\varphi_2 + a_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) + \cdots + a_n \cos(\varphi_2 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_n) + a_1 = 0$$
$$a_2 \sin\varphi_2 + a_3 \sin(\varphi_2 + \varphi_3) + \cdots + a_n \sin(\varphi_2 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$a_n \cos\varphi_n + a_1 \cos(\varphi_n + \varphi_1) + \cdots \\ + a_{n-2} \cos(\varphi_n + \varphi_1 + \cdots + \varphi_{n-2}) + a_{n-1} = 0$$
$$a_n \sin\varphi_n + a_1 \sin(\varphi_n + \varphi_1) + \cdots \\ + a_{n-2} \sin(\varphi_n + \varphi_1 + \cdots + \varphi_{n-2}) = 0.$$

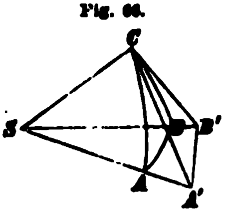
# Sphärische Trigonometrie.

## Fundamentalformeln.

**222.** Die sphärische Trigonometrie hat zur Aufgabe, die Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreikants aufzustellen.

Beschreibt man aus der Spitze des Dreikants mit einem beliebigen Radius $= r$ eine Kugelfläche, so schneidet diese die drei Seitenflächen des Dreikants in drei Bögen grösster Kugelkreise, welche ein sphärisches Dreieck bilden. Die den Bögen entsprechenden Mittelpunctswinkel werden die Seiten des sphärischen Dreiecks genannt. Sind $A$, $B$, $C$ die Durchschnittspuncte der Kugel mit den Kanten, so bilden die auf $SC$ in den beiden durch $SC$ gehenden Ebenen des Dreikants errichteten Senkrechten $CA'$ und $CB'$ einen Winkel, welcher ein Winkel des Dreikants oder des sphärischen Dreiecks genannt wird; $A'$ und $B'$ seien die Durchschnittspuncte dieser Senkrechten mit den Kanten $SA$ und $SB$.

Fig. 66.




**223.** Bezeichnet man die Seiten des Dreikants, also auch die des sphärischen Dreiecks, mit $a$, $b$, $c$; die gegenüberliegenden Winkel mit $A$, $B$, $C$, so ist

$$CA' = r \tan b,\ CB' = r \tan a,\ SA' = \frac{r}{\cos b},\ SB' = \frac{r}{\cos a}$$

$$\text{Winkel } A'CB' = C.$$

Aus dem Dreiecke $SA'B'$ erhält man

$$\overline{A'B'}^2 = \overline{A'S}^2 + \overline{B'S}^2 - 2\,A'S \cdot B'S \cdot \cos A'SB'.$$

Aus dem Dreiecke $CA'B'$ erhält man

$$\overline{A'B'}^2 = \overline{A'C}^2 + \overline{B'C}^2 - 2\,A'C \cdot B'C \cdot \cos A'CB'.$$

Durch Gleichstellung der beiden Werthe von $\overline{A'B'}^2$ und Berücksichtigung der obigen Werthe erhält man

$$\frac{r^2}{\cos b^2} + \frac{r^2}{\cos a^2} - \frac{2\,r^2 \cos c}{\cos b \cos a} = r^2 \tan b^2 + r^2 \tan a^2 - 2\,r^2 \tan b \tan a \cos C.$$

Berücksichtigt man, dass $\sec a^2 - \tan a^2 = 1$ ist, so erhält man

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

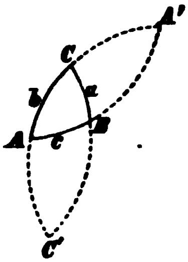
**224.** Die Ableitung der Gleichung des vorigen Art. beruht auf der Voraussetzung, dass

$$a < R,\ b < R$$

ist, $c$ kann beliebig zwischen Null und $2\,R$ liegen.

Ist $a < R$, $b > R$, so verlängere man die Bögen $AC$ und $AB$, bis sie sich in $A'$ schneiden.

Fig. 67.




Im sphärischen Dreieck $A'BC$ ist

$$A'C = b' = 2R - b,\quad A'B = c' = 2R - c,$$

Winkel $BCA' = C' = 2R - C$.

Da $a < R$, $b' < R$ ist, so ist

$$\cos c' = \cos a \cos b' + \sin a \sin b' \cos C',$$

oder
$$\cos(2R - c) = \cos a \cos(2R - b) + \sin a \sin(2R - b) \cos(2R - C),$$

d. h.
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Ist $a > R$, $b > R$, so verlängere man die Bögen $AC$ und $BC$, bis sie sich in $C'$ schneiden.

Im sphärischen Dreieck $C'AB$ ist

$$C'A = b'' = 2R - b,\ C'B = a'' = 2R - a,\ \text{Winkel } C' = C.$$

Da $a'' < R$, $b'' < R$ ist, so ist

$$\cos c = \cos a'' \cos b'' + \sin a'' \sin b'' \cos C',$$

$$\cos c = \cos(2R - a)\cos(2R - b) + \sin(2R - a)\sin(2R - b)\cos C,$$

woraus wieder

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

folgt.

Anmerkung. Statt des Dreikants $SABC$ nimmt man im ersten Falle das Nebendreikant $SA'BC$, im zweiten Falle das Nebendreikant $SABC'$ und wendet auf dieselben die im vorigen Art. gefundene Formel an.

225. Es ist daher allgemein

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Daraus folgt

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in

$$\sin A^2 = 1 - \cos A^2,$$

so erhält man

$$\sin A^2 = \frac{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin b^2 \sin c^2}$$

Daraus folgt, dass der Quotient $\frac{\sin A^2}{\sin a^2}$ unverändert bleibt, wenn man $A$, $a$ mit $B$, $b$ oder $C$, $c$ vertauscht, d. h. dass

$$\frac{\sin A^2}{\sin a^2} = \frac{\sin B^2}{\sin b^2} = \frac{\sin C^2}{\sin c^2}$$

ist. Zieht man die Quadratwurzel aus, so erhält man in Berücksichtigung, dass $A$, $B$, $C$, $a$, $b$, $c$ zwischen 0 und $2R$ liegen, ihre Sinusse daher positiv sind,

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}. \tag{2}$$

226. Multiplicirt man die zweite Gleichung von (1) mit $\cos c$ und setzt das dadurch erhaltene Product $\cos b \cos c$ in die erste Gleichung, so wird:

$$\cos a = \cos a \cos c^2 + \sin a \sin c \cos c \cos B + \sin b \sin c \cos A.$$

Setzt man statt $\cos a - \cos a \cos c^2 = \cos a \sin c^2$ und kürzt durch $\sin c$ ab, so wird

$$\cos a \sin c = \sin a \cos c \cos B + \sin b \cos A,$$

woraus

$$\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$$

oder durch entsprechende Vertauschung

$$\left.\begin{aligned} \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

entsteht, und ebenso für die beiden übrigen Seiten $b$ und $c$.

227. Der Polarecke entspricht auf der Kugelfläche ein sphärisches Dreieck, welches das **Polardreieck** genannt wird. Sind $a'$, $b'$, $c'$ die Seiten, $A'$, $B'$, $C'$ die gegenüberliegenden Winkel, so erhält man mit Berücksichtigung von

$$a + A' = 2R, \quad a' + A = 2R \text{ u. s. w.}$$

durch Anwendung der Gleichungen von (1), (2) und (3) auf das Polardreieck:

Aus (1)

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Aus (2) erhält man keine neuen Relationen.

Aus (3)

$$\left.\begin{aligned} \sin A \cos b &= \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a \\ \sin A \cos c &= \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

und ebenso für die übrigen Winkel $B$ und $C$.

### Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke.

**228.** Ist der Winkel $C$ ein rechter, so wird $\sin C = 1$, $\cos C = 0$ und man erhält

$$\left.\begin{array}{ll} \text{aus (1)} & \cos c = \cos a \cos b \\ \text{„ (4)} & \cos c = \cot A \cot B \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{„ (2)} & \sin a = \sin c \sin A \\ & \sin b = \sin c \sin B \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{„ (4)} & \cos A = \cos a \sin B \\ & \cos B = \cos b \sin A \end{array}\right\} \quad (3)$$

Durch Division der beiden letzten Formeln erhält man

$$\left.\begin{array}{l} \tan a = \sin b \tan A \\ \tan b = \sin a \tan B \end{array}\right\} \quad (4)$$

aus (3)

$$\left.\begin{array}{l} \tan a = \tan c \cos B \\ \tan b = \tan c \cos A \end{array}\right\} \quad (5)$$

welche Formeln für die vollständige Berechnung ausreichen.

Zusatz. Diese Gleichungen lassen sich in folgende Formen bringen:

$\cos c = \sin (R - a) \sin (R - b) = \cot A \cot B$

$\cos (R - a) = \sin c \sin A = \cot B \cot (R - b)$ aus (2) und (4)

$\cos (R - b) = \sin c \sin B = \cot A \cot (R - a)$

$\cos A = \sin (R - a) \sin B = \cot c \cot (R - b)$ aus (3) und (5)

$\cos B = \sin (R - b) \sin A = \cot c \cot (R - a)$

Denkt man sich die drei Seiten und drei Winkel des sphärischen Dreiecks in ihrer Aufeinanderfolge genommen, dabei den rechten Winkel ausgelassen und statt der Seiten $a$ und $b$, resp. $R - a$, $R - b$ gesetzt, so folgen diese Elemente cyclisch so aufeinander:

$$A,\ c,\ B,\ R - a,\ R - b.$$

Berücksichtigt man, dass jedem Elemente zwei anliegende und zwei getrennte entsprechen, so enthalten diese Gleichungen folgende Regel:

In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist der Cosinus eines jeden Elementes gleich dem Producte der Sinusse der beiden getrennten, oder gleich dem Producte der Cotangenten der beiden anliegenden Stücke.

## Auflösung der schiefwinkligen Dreiecke.

229. Die möglichen hier vorkommenden Aufgaben sind:

Gegeben sind:

$a, b, c$ die drei Seiten;
$A, B, C$ die drei Winkel;
$a, b, C$ zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel;
$A, B, c$ zwei Winkel und die dazwischen liegende Seite;
$a, b, A$ zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen;
$A, B, a$ zwei Winkel und die Gegenseite des einen.

230. Sind die drei Seiten gegeben, so erhält man nach Art. 225 (1)

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$A$, und analog $B$ und $C$.

Hieraus findet man

$$2 \cos \frac{A^2}{2} = 1 + \cos A = \frac{\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$2 \sin \frac{A^2}{2} = 1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

oder

$$2 \cos \frac{A^2}{2} = \frac{\cos a - \cos (b + c)}{\sin b \sin c} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (a+b+c) \sin \frac{1}{2} (-a+b+c)}{\sin b \sin c}$$

$$2 \sin \frac{A^2}{2} = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (a-b+c) \sin \frac{1}{2} (a+b-c)}{\sin b \sin c}.$$

Setzt man der Kürze halber $a + b + c = 2s$, so wird

$$-a + b + c = 2(s - a), \text{ u. s. w.}$$

wobei zu bemerken ist, dass die vier Sinusse: $\sin s$, $\sin (s - a)$, $\sin (s - b)$, $\sin (s - c)$ positiv sind, weil in jedem Dreikant die Summe der drei Seiten kleiner als $4R$, und jede Seite kleiner als die Summe der beiden anderen ist.

Es wird daher

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - a)}{\sin b \sin c}}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin s \sin (s - a)}},$$

wo sämmtliche Quadratwurzeln positiv sind.

231. Sind die drei Winkel gegeben, so erhält man nach Art. 227 (4)

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

$a$, und analog $b$ und $c$.

Daraus erhält man, wenn $A + B + C = 2S$ gesetzt wird,

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B \sin C}}$$

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos S \cos(S-A)}{\sin B \sin C}}$$

$$\tan\frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos S \cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}},$$

wo ebenfalls alle Quadratwurzeln positiv sind.

Dabei sind wegen

$$A + B + C > 2R,\ A + B - C < 2R, \text{ u. s. w.}$$

$-\cos S$, $\cos(S-A)$, $\cos(S-B)$, $\cos(S-C)$ positiv.

232. Sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, etwa $a$, $b$, $C$ gegeben, so erhält man nach

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$
$$\sin c \sin A = \sin a \sin C$$
$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C$$

und den beiden analogen Gleichungen für den Winkel $B$, die Seite $c$, die Winkel $A$ und $B$.

Durch Einführung von Hilfsgrössen kann man die Rechnung bequemer machen. Man setze

$$m \sin M = \cos a$$
$$m \cos M = \sin a \cos C,$$

so wird

$$\cos c = m \sin(M + b)$$
$$\sin c \cos A = -m \cos(M + b).$$

233. Sind zwei Winkel und die dazwischen liegende Seite gegeben, etwa $A$, $B$, $c$, so erhält man aus

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$
$$\sin C \cos a = \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c$$
$$\sin C \sin a = \sin A \sin c$$

und den beiden analogen Gleichungen für die Seite $b$, den Winkel $C$ und die Seiten $a$ und $b$.

Setzt man

$$n \cos N = \cos A$$
$$n \sin N = \sin A \cos c,$$

so wird

$$\cos C = -n \cos(B + N)$$
$$\sin C \cos a = n \sin(B + N).$$

234. Sind zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen gegeben, etwa $a$, $b$, $A$, so erhält man aus

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}$$

den Winkel $B$, und damit nach

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

den Winkel $C$.

Setzt man

$$p \cos P = \cos B$$
$$p \sin P = \sin B \cos a,$$

so wird

$$\cos A = -p \cos (P + C),$$

aus welcher Gleichung $C$ erhalten wird.

Aus $C$ folgt

$$\sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A}.$$

235. Sind zwei Winkel und die Gegenseite des einen gegeben, etwa $A$, $B$, $a$, so erhält man aus

$$\sin b = \frac{\sin B \sin a}{\sin A}$$

die Seite $b$, und damit nach

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

die Seite $c$.

Für die Berechnung setze man

$$q \sin Q = \cos b$$
$$q \cos Q = \sin b \cos A,$$

so wird

$$\cos a = q \sin (Q + c),$$

aus welcher Gleichung $c$ erhalten wird.

Aus $c$ folgt

$$\sin C = \frac{\sin A \sin c}{\sin a}.$$

## Entwickelung der Gauss'schen und Neper'schen Gleichungen.

236. Aus

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-c)}{\sin a \sin c}}$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a \sin b}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}$$

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}}$$

$$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}$$

folgt

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \cos\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin(s-b)}{\sin c}$$

$$\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin(s-a)}{\sin c}$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \sin\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin s}{\sin c}$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \sin\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin(s-c)}{\sin c}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man durch Addition und Subtraction

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\frac{c}{2} = \cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\frac{c}{2} = \sin\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\frac{C}{2}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\frac{c}{2} = \sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\frac{c}{2} = \sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\frac{C}{2},$$

oder, in anderer Ordnung geschrieben,

$$\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\frac{C}{2} = \cos\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\frac{c}{2}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\frac{C}{2} = \cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\frac{c}{2}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\frac{C}{2} = \sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\frac{c}{2}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\frac{C}{2} = \sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\frac{c}{2},$$

welche Gleichungen die Gauss'schen Gleichungen heissen.

237. Durch Division erhält man aus diesen die Neper'schen Gleichungen:

$$\tan \tfrac{1}{2}(A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)} \cot \frac{C}{2}$$

$$\tan \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)} \cot \frac{C}{2}$$

$$\tan \tfrac{1}{2}(a + b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}(A + B)} \tan \frac{c}{2}$$

$$\tan \tfrac{1}{2}(a - b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A - B)}{\sin \frac{1}{2}(A + B)} \tan \frac{c}{2}\,.$$

Zusatz. Aus der zweiten Gauss'schen Gleichung folgt:

Da $\sin \frac{C}{2}$, $\cos \frac{c}{2}$ positiv sind, so müssen die Zeichen von

$$\cos \tfrac{1}{2}(A + B),\ \cos \tfrac{1}{2}(a + b)$$

übereinstimmen, d. h. ist

$$A + B \gtreqless 2R, \text{ so ist } a + b \gtreqless 2R.$$

Aus der dritten Gauss'schen Gleichung folgt aus ähnlichen Gründen, dass die Zeichen von

$$\sin \tfrac{1}{2}(A - B),\ \sin \tfrac{1}{2}(a - b)$$

übereinstimmen, d. h. ist

$$A \gtreqless B, \text{ so ist } a \gtreqless b.$$

In jedem sphärischen Dreiecke liegt also dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber und umgekehrt.

238. Sind in einem sphärischen Dreiecke zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, oder zwei Winkel und die dazwischen liegende Seite gegeben, so erhält man aus den Gauss'schen Gleichungen die übrigen Stücke.

239. Sind in einem sphärischen Dreiecke zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen gegeben, etwa $a$, $b$, $A$; so bestimmt man $B$ nach

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}$$

und dann $C$, $c$ vermittelst der Neper'schen Gleichungen

$$\tan \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)} \cot \tfrac{1}{2}(A - B)$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)} \cot \tfrac{1}{2}(A + B)$$

$$\tan\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}\tan\frac{1}{2}(a-b)$$
$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}\tan\frac{1}{2}(a+b).$$

Da der Winkel $B$ aus dem Sinus bestimmt wird, so erhält man zwei Werthe. Ist $\beta$ der spitze Winkel der Tafel, so ist $B = \beta$ oder $2R - \beta = \beta'$.

Welcher der beiden Werthe von $B$ zu nehmen ist, oder ob die Aufgabe zwei Lösungen zulässt, wird dadurch entschieden, indem man berücksichtigt, dass die Summen $A + B$ und $a + b$ zugleich $\gtreqless 2R$ sind, und dass der grösseren Seite der grössere Winkel (und umgekehrt) gegenüber liegt.

Man findet, dass nur zweideutige Fälle eintreten können, wenn

$$a + b < 2R,\ A < R,\ a < b$$
$$a + b > 2R,\ A > R,\ a > b$$

ist.

240. Sind in einem sphärischen Dreiecke zwei Winkel und die Gegenseite des einen gegeben, etwa $A$, $B$, $a$, so bestimmt man $b$ nach

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}$$

und dann $c$ und $C$ vermittelst der Neper'schen Gleichungen, wie bei der vorigen Aufgabe.

Die Betrachtung der zweifelhaften Fälle, wo die Aufgabe vermöge der Bestimmung von $b$ aus $\sin b$ zwei Auflösungen zulässt, ist dieselbe wie in der vorigen Aufgabe; man vertauscht nur die Winkel $A$, $B$ mit den Seiten $a$, $b$.

Man findet, dass nur zweideutige Fälle eintreten können, wenn

$$A + B < 2R,\ a < R,\ A < B$$
$$A + B > 2R,\ a > R,\ A > B$$

ist.

# Fünftes Buch.

## Geometrie des Masses.

### Vom Messen.

241. Unter dem Messen einer Grösse versteht man, wie bereits in Art. 3 angedeutet wurde, die Vergleichung dieser Grösse mit einer zweiten gleichartigen, welche die **Masseinheit** genannt wird*).

In der Geometrie kommen drei Arten von Grössen zur Messung: Linien, Flächen und Körper; es sind daher drei Einheiten erforderlich. Die Geometrie des Masses hat nun die Aufgabe für die im zweiten Buche behandelten Gebilde die Massbestimmungen durchzuführen. Wenngleich jede Massbestimmung schliesslich auf Congruenz beruht, so gestatten doch die Lehren der Aehnlichkeit nicht selten bedeutende Vortheile in der Auswerthung der zu bestimmenden Gebilde.

## I. Geradlinige Gebilde.

### Flächen-Verhältnisse der Vielecke.

242. Die Flächen zweier Parallelogramme von:

a) gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien. Sind die Grundlinien Vielfache einer Strecke, d. h. commensurabel, so trage man diese Strecke so oft als möglich ab, und ziehe durch die Theilungspuncte Parallele mit den anderen Seiten. Sind die Grundlinien incommensurabel, so wird der Beweis vermittelst der Grenzen geführt.

b) gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen. Beweis wie im vorigen Satze.

*) Näheres vergl. des Verfassers Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik, 3. Aufl., S. 27 bis 30.

c) ungleichen Grundlinien und ungleichen Höhen verhalten sich wie die Producte der Masszahlen der Grundlinien und der Höhen.

Denn sind $f$, $f'$ die Masszahlen der Flächen der beiden Parallelogramme; $g$, $g'$ ihre Grundlinien; $h$, $h'$ ihre Höhen, so sei $f_1$ die Fläche eines Parallelogrammes von der Grundlinie $g$ und von der Höhe $h'$. Dann ist

$$f : f_1 = h : h'$$
$$f_1 : f' = g : g'.$$

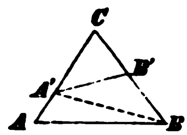
Durch Multiplication folgt

$$f : f' = gh : g'h'.$$

243. Da das Dreieck die Hälfte eines Parallelogrammes von gleicher Grundlinie und Höhe ist, so finden dieselben Flächenverhältnisse für das Dreieck statt.

244. Die Flächen zweier Dreiecke $ABC$ und $A'B'C$, welche einen Winkel $C$ gemeinsam haben, verhalten sich wie die Producte der einschliessenden Seiten.

Fig. 68.




Denn zieht man $A'B$, so ist

$$ABC : A'BC = AC : A'C$$
$$A'BC : A'B'C = BC : B'C,$$

also durch Zusammensetzung

$$ABC : A'B'C = AC \cdot BC : A'C \cdot B'C.$$

Ist $A'B' \parallel AB$, d. h. ist $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$,

so folgt $$AC : A'C = BC : B'C,$$

also $$AC \cdot BC : A'C \cdot B'C = \overline{AC}^2 : \overline{A'C}^2$$

und $$ABC : A'B'C = \overline{AC}^2 : \overline{A'C}^2;$$

d. h. die Flächen zweier ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate der entsprechenden Seiten.

245. Da jede ebene Figur durch Gerade in Dreiecke zerlegt werden kann, so folgt:

Die Flächen zweier ähnlicher ebener Figuren verhalten sich wie die Quadrate zweier entsprechender Strecken.

Zusatz. Construirt man über den drei Seiten $a, b, c$ eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Figuren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, wo $\mathfrak{C}$ die über der Hypotenuse construirte Figur ist, so folgt aus

$$\mathfrak{A} : \mathfrak{C} = a^2 : c^2, \ \mathfrak{B} : \mathfrak{C} = b^2 : c^2$$
$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} : \mathfrak{C} = a^2 + b^2 : c^2 = 1$$
$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B};$$

d. h. die über der Hypotenuse construirte Figur ist gleich der Summe der über den beiden Katheten construirten Figuren, — eine Verallgemeinerung des Pythagoräischen Satzes.

### Verwandlung der ebenen Figuren in flächengleiche.

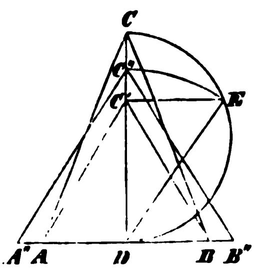
246. Ein Dreieck in ein gleichschenkliges von derselben Grundlinie zu verwandeln.

Man errichte in der Mitte der Grundlinie eine Senkrechte, und ziehe von der Spitze eine Parallele zur Grundlinie; der Durchschnittspunct dieser beiden Linien ist die gesuchte Spitze.

247. Ein gleichschenkliges Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

Analysis. Ist $\triangle ABC$ das gegebene Dreieck, $AB$ die Grundlinie, $\triangle ABC'$ ein gleichseitiges über $AB$; $\triangle A''B''C''$ das gesuchte gleichseitige, dessen Grundlinie $A''B''$ in die Grundlinie $AB$, dessen Spitze $C''$ in die Höhe $CD$ des $\triangle ABC$ fällt; so folgt aus

Fig. 69.




$$ABC : ABC' = CD : C'D$$
$$A''B''C'' : ABC' = \overline{C''D}^2 : \overline{C'D}^2,$$
$$CD : C'D = \overline{C''D}^2 : \overline{C'D}^2,$$
d. h. $$\overline{C''D}^2 = CD \cdot C'D;$$

mithin ist $C''D$ die mittlere Proportionale zu $CD$ und $C'D$.

Construction. Beschreibt man über $CD$ einen Halbkreis, und zieht $C'E \perp CD$, so ist nach Art. 162, a) die Strecke $DE$ die mittlere Proportionale zu $DC$ und $DC'$. Macht man $DC'' = DE$ und zieht $C''A'' \parallel C'A$, $C''B'' \parallel C'B$, so ist $\triangle A''B''C''$ das gesuchte Dreieck.

248. Ein Dreieck $ABC$ in ein anderes zu verwandeln, dessen Grundlinie in die Gerade $AB$ fällt, und dessen Spitze $C'$

a) in der Geraden $BC$ liegt,

b) eine beliebige Lage hat.

Zu a). Man ziehe $AC'$, ferner $CA' \parallel C'A$, wo $A'$ in der Geraden $AB$ liegt. Dann ist $A'BC' = ABC$.

Zu b). Man ziehe von $C'$ eine Parallele zu $AB$; ist $C_1$ der Durchschnitt mit der Geraden $BC$, so bestimme man nach a) $A'BC_1 = ABC$. Dann ist $A'BC' = ABC$.

249. Um ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln, bestimme man die mittlere Proportionale zu den beiden Seiten

des Rechteckes. Man erhält dadurch die Seite des gesuchten Quadrates.

250. Ein Viereck $ABCD$ in ein Dreieck zu verwandeln. Man ziehe $AC$ und $DA' \parallel CA$, wo $A'$ der Durchschnitt mit $AB$ ist. Dann ist $A'BC = ABCD$.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens kann man jedes Vieleck in ein Dreieck verwandeln.

Dieses Dreieck kann man wieder in ein Parallelogramm, und letzteres wieder in ein Quadrat, also das gegebene Vieleck in ein Quadrat verwandeln.

Zusatz. Derselben Construction bedient man sich, um die einspringenden Winkel eines Vielecks wegzuschaffen. Ist z. B. im Viereck $ABCD$ der Winkel $B$ einspringend, d. h. grösser als $2R$, so ziehe man $AC$ und durch $B$ die Gerade $EF \parallel AC$ (wo $E$ auf der Seite $AD$, $F$ auf der Seite $CD$ vorausgesetzt wird). Jedes der Dreiecke $ECD$ und $FAD$ ist flächengleich dem Vierecke $ABCD$.

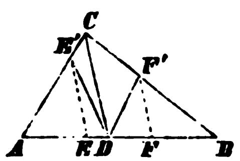
### Theilung der ebenen Figuren.

251. Ein Dreieck durch Gerade, welche von einem Scheitel ausgehen, in $n$ Theile zu theilen, welche im gegebenen Verhältnisse stehen.

Man theile die Gegenseite des Scheitels in diesem Verhältnisse u. s. w.

252. Ein Dreieck aus einem Puncte einer Seite in gleiche Theile zu theilen, z. B. aus dem Puncte $D$ in der Seite $AB$ in drei gleiche Theile.

Fig. 70.




Man theile $AB$ in drei gleiche Theile in $E$ und $F$, ziehe $CD$ und $EE'$, $FF' \parallel DC$, so sind $DE'$ und $DF'$ die gesuchten Theilungslinien.

Denn es ist $\triangle E'ED = \triangle EE'C$ u. s. w.

Ebenso verfährt man, wenn die Theile gegebene Verhältnisse haben sollen.

253. Ein Dreieck durch Gerade, welche einer gegebenen Geraden parallel sind, in Theile zu theilen, die sich wie gegebene Zahlen $p_1, p_2, \ldots$ verhalten.

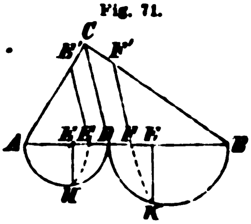
Analysis. Es seien $EE'$ und $FF'$ die beiden ersten Theilungslinien, $CD \parallel$ der gegebenen Geraden, also $EE'$ und $FF' \parallel DC$. Nun ist

$$AEE' : ADC = \overline{AE}^2 : \overline{AD}^2 = AE_1 : AD,$$

wenn $AH = AE$, $HE_1 \perp AD$ ist,

also $AEE' : ABC = AE_1 : AB$.

Fig. 71.



Soll daher $AEE' = \frac{1}{n} ABC$ sein, so muss $AE_1 = \frac{1}{n} AB$ sein.

Ferner ist

$$ADC - AEE' : ADC = AD - AE_1 : AD$$

oder

$$EDCE' : ADC = E_1D : AD$$

$$EDCE' : ABC = E_1D : AB.$$

Ebenso ist $DFF'C : ABC = DF_1 : AB$,

also durch Addition $EFF'CE' : ABC = E_1F_1 : AB$.

Soll daher $EFF'CE' = \frac{1}{n} ABC$ sein,

so muss $E_1F_1 = \frac{1}{n} AB$.

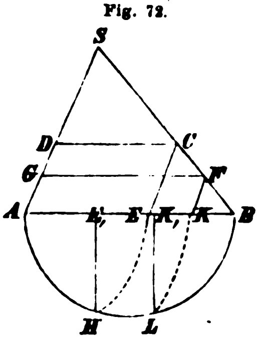
Man erhält daher folgende Lösung:

Man ziehe $CD$ parallel der gegebenen Geraden, theile die Seite $AB$ in $E_1, F_1, \cdots$ so, dass sich die Theile verhalten wie $p_1, p_2, \ldots$.

Man beschreibe über $AD$ und $BD$ zwei Halbkreise, errichte in den Puncten $E_1, F_1, \cdots$ Senkrechte auf $AB$ bis zu den Durchschnittspuncten mit den Umfängen. Hierauf trage man die dadurch bestimmte Sehne in dem einen Halbkreise vom Puncte $A$, in dem anderen vom Puncte $B$ aus auf der Seite $AB$ ab. Diese Puncte bestimmen die gesuchten Theilungslinien.

254. Ein Trapez in gleiche, oder gegebenen Theilen proportionale Theile zu theilen, so dass die Theile wieder Trapeze sind.

Fig. 72.



Man theile jede der Grundlinien in der angegebenen Art und verbinde die entsprechenden Theilpuncte.

255. Ein Trapez durch Gerade, welche den Grundlinien parallel sind, in Theile nach gegebenen Verhältnissen zu theilen.

Analysis. Es sei im Trapez $ABCD$ die Gerade $FG$ eine Theilungslinie.

Ist $CE \parallel DA$ und $S$ der Durchschnittspunct der nicht parallelen Seiten $AD$ und $BC$, so ist

$$ABS : DCS = \overline{AB}^2 : \overline{AE}^2 = AB : AE_1,$$

wo $AH = AE$ und $HE_1 \perp AB$ ist.

**Daraus folgt:**

$$ABS : ABCD = AB : E_1 B,$$

und analog

$$ABS : ABFG = AB : BK_1,$$

wenn $\quad FK \parallel DA, \quad AL = AK$ und $LK_1 \perp AB$

ist, also $\quad ABFG : ABCD = BK_1 : BE_1.$

Dasselbe gilt für die übrigen Theilungslinien.

Man theile daher $BE_1$ von $B$ aus nach den gegebenen Verhältnissen der Theile, beschreibe über $AB$ einen Halbkreis, u. s. w.

### Flächenberechnung der Vielecke.

256. Um eine begrenzte Ebene zu messen, bedient man sich als Einheit eines Quadrates, dessen Seite gleich der Längeneinheit ist, dessen Fläche dann die Flächeneinheit ist.

1) Die Fläche eines Rechtecks ist gleich dem Producte (der Masszahlen) zweier in einer Ecke zusammenstossender Seiten.

2) Die Fläche eines Parallelogramms ist gleich dem Producte von Grundlinie und Höhe. Ist $a$ die Grundlinie, $h$ die zugehörige Höhe, so ist die Fläche $f$

$$f = ah.$$

Sind $a$ und $b$ zwei in eine Ecke zusammenstossende Seiten, $\varphi$ der eingeschlossene Winkel, so folgt wegen $h = b \sin \varphi$

$$f = ab \sin \varphi.$$

Die Fläche eines Dreiecks ist gleich der Hälfte dieses Productes, also

$$f = \tfrac{1}{2}\, ab \sin C.$$

Setzt man in $\sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$ statt $\sin \frac{C}{2}$ und $\cos \frac{C}{2}$ die in Art. 216 gefundenen Werthe, so erhält man

$$f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

257. Die Vielecke zerlegt man durch Diagonalen in Dreiecke und addirt die Masszahlen ihrer Flächen.

a) Trapez. Wegen der gleichen Höhen der beiden Dreiecke oder nach Art. 68 erhält man: Die Fläche eines Trapezes ist gleich der Hälfte des Productes der Summe der Grundlinien in die Höhe, oder gleich dem Producte der Geraden, welche die Mitten der nicht parallelen Seiten verbindet, mit der Höhe.

b) Für das Viereck $A_1 A_2 A_3 A_4$ ziehe man die Diagonale $A_1 A_3$; man erhält dann für die Fläche $f$

$$2f = a_1 a_2 \sin \varphi_2 + a_3 a_4 \sin \varphi_4.$$

Wegen

$$a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + a_3 \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) = 0$$
$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 4R,$$

ist
$$a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - a_3 \sin \varphi_4 = 0.$$

Substituirt man in $2f$ den Werth für $a_3 \sin \varphi_4$, so erhält man

$$2f = a_4 a_1 \sin \varphi_1 + a_4 a_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + a_1 a_2 \sin \varphi_2.$$

Zusatz. Sind $p$ und $q$ die beiden Diagonalen, $\alpha$ ihr Winkel, so ist
$$f = \tfrac{1}{2} pq \sin \alpha.$$

c) Allgemein ist für ein $n$ Eck

$$\begin{aligned}2f = {} & a_1 a_2 \sin \varphi_2 + a_1 a_3 \sin(\varphi_2 + \varphi_3) + \cdots + a_1 a_{n-1} \sin(\varphi_2 + \cdots \varphi_{n-1}) \\ & + a_2 a_3 \sin \varphi_3 + a_2 a_4 \sin(\varphi_3 + \varphi_4) + \cdots a_2 a_{n-1} \sin(\varphi_3 + \cdots \varphi_{n-1}) \\ & \vdots \\ & + a_{n-2} a_{n-1} \sin \varphi_{n-1},\end{aligned}$$

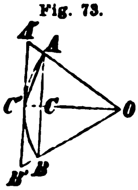
welcher Satz auch gültig ist, wenn das Vieleck einspringende Winkel hat.

## Eigenschaften der regelmässigen Vielecke.

258. Ist das Vieleck ein reguläres $n$ Eck, so wird es durch Gerade aus dem Mittelpuncte nach den Ecken in $n$ congruente Dreiecke zerlegt. Ist $s$ die Seite des Vielecks, $r$ der Abstand des Mittelpunctes, so ist die Fläche eines solchen Dreiecks $= \frac{sr}{2}$, also die des ganzen Vielecks $n \frac{sr}{2} = \frac{ur}{2}$, wo $u$ den Umfang bedeutet; $r$ ist der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises.

Zwischen den Umfängen und Flächen der einem Kreise ein- und umschriebenen $n$ Ecke und $2n$ Ecke finden folgende Beziehungen statt:

Fig. 73.




Ist $AB = s$ die Seite eines eingeschriebenen $n$ Eckes, $A'B' = S$ die Seite des umgeschriebenen $n$ Eckes, so folgt, wenn $CO \perp AB$ ist, und $AO = r$, $CO = \varrho$ gesetzt wird

$$s^2 = 4(r^2 - \varrho^2), \quad S : s = r : \varrho.$$

Da $AC' = s'$ die Seite eines eingeschriebenen $2n$ Eckes ist, so folgt, wenn $\varrho'$ und $S'$ die zugehörigen Grössen bedeuten,

$$s'^2 = \frac{s^2}{4} + (r - \varrho)^2 = 2r(r - \varrho)$$
$$\varrho'^2 = r^2 - \frac{s'^2}{4} = \tfrac{1}{2} r(r + \varrho), \quad S' = \frac{s'r}{\varrho'},$$

oder, wenn statt $s'$ und $\varrho'$ der Werth gesetzt wird,

$$S' = 2r\sqrt{\frac{r-\varrho}{r+\varrho}}.$$

Sind $\frac{u}{u'}$ und $\frac{U}{U'}$ die Umfänge, $\frac{f}{f'}$ und $\frac{F}{F'}$ die Flächen der ein- und umschriebenen $\frac{n}{2n}$ Ecke, so ist

$$u = ns,\quad U = nS,\quad f = \frac{u\varrho}{2},\quad F = \frac{Ur}{2}\quad \text{u. s. w.,}$$

also

$$u = 2n\sqrt{r^2-\varrho^2},\qquad U = \frac{2nr}{\varrho}\sqrt{r^2-\varrho^2},$$

$$u' = 2n\sqrt{2r(r-\varrho)},\quad U' = 4nr\sqrt{\frac{r-\varrho}{r+\varrho}};$$

$$f = n\varrho\sqrt{r^2-\varrho^2},\qquad F = \frac{nr^2}{\varrho}\sqrt{r^2-\varrho^2},$$

$$f' = nr\sqrt{r^2-\varrho^2},\qquad F' = 2nr^2\sqrt{\frac{r-\varrho}{r+\varrho}}.$$

Aus diesen Formeln folgt:

$$U' = \frac{2uU}{u+U},\quad u'^2 = uU'$$

$$F' = \frac{2Ff'}{F+f'},\quad f'^2 = fF.$$

Diese Formeln dienen zur successiven Berechnung der Umfänge und der Flächen der Vielecke.

Zusatz. Aus den obigen Formeln folgt:

$$\frac{U'-u}{U-u} = \frac{\varrho}{r+\varrho};\quad \frac{F'-f'}{F-f} = \frac{r\varrho}{(r+\varrho)^2}.$$

Wegen $\varrho < r$ ist $\frac{\varrho}{r+\varrho} < \frac{1}{2}$, also $U' - u < \frac{1}{2}(U-u)$, mithin auch $U' - u' < \frac{1}{2}(U-u)$.

Wegen $(\varrho + r)^2 = (r-\varrho)^2 + 4r\varrho$ ist $(r+\varrho)^2 > 4r\varrho$ oder $\frac{r\varrho}{(r+\varrho)^2} < \frac{1}{4}$, also $F' - f' < \frac{1}{4}(F-f)$.

Die resp. Unterschiede der Umfänge und Flächen der ein- und umschriebenen Vielecke nehmen rascher ab, als die Glieder der Reihen

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \ldots \text{ und } \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{16}, \tfrac{1}{64}, \ldots$$

**Construction und Berechnung der regelmässigen Vielecke.**

259. Der Halbmesser eines Kreises ist gleich der Seite eines einbeschriebenen Sechsecks.

Durch Verbindung der nicht auf einander folgenden Spitzen erhält man das einbeschriebene Dreieck.

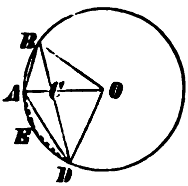
Ist $r$ der Radius, $s$ die Seite, so folgt aus $h = \frac{s}{2}\sqrt{3}$, $r = \frac{2}{3}h$, $s = r\sqrt{3}$.

Zwei auf einander senkrechte Durchmesser bestimmen ein einbeschriebenes Quadrat.

260. In einen Kreis ein Zehneck und Fünfeck zu beschreiben.

Analysis. Ist $AB$ die Seite des Zehnecks, so ist im Dreieck $ABO$, $O = 36°$, also $A = B = 72°$.

Fig. 74.



Halbirt man daher den Winkel $B$ durch die Gerade $BC$, so ist im Dreieck $ACB$

$$C = A, \text{ also } AB = CB = CO,$$

und $$\triangle ABO \sim \triangle ACB,$$

mithin $$AO : AB = AB : AC$$

oder $$AO : CO = CO : AC.$$

Theilt man daher den Halbmesser nach dem äussern und mittlern Verhältnisse, so ist der grössere Abschnitt die Seite des Zehnecks.

Verlängert man $BC$ bis zum Durchschnitte $D$ mit dem Umfange, so ist, wegen $AOD = 2\,ABC$, die Sehne $AD$ die Seite des eingeschriebenen Fünfecks.

261. Berechnung der Seiten.

Sind $S$, $s$ die Seiten des Fünf- und Zehnecks, so folgt aus $s^2 = r(r-s)$,

$$s^2 + rs = r^2 \text{ und } s = -\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{5}.$$

Ist $E$ die Mitte des Bogens $AD$, so folgt nach dem Ptolemäischen Satze für das Sehnenviereck $ABDE$

$$AB \cdot DE + AE \cdot BD = AD \cdot BE,$$

d. h. $$s^2 + s(s+r) = S^2 \text{ oder } s^2 + r^2 = S^2;$$

d. h. das Quadrat der Fünfecksseite ist gleich der Summe der Quadrate der Zehnecksseite und des Radius.

262. a) Aus dem Dreieck, Viereck und Fünfeck kann man durch fortgesetztes Halbiren der Bogen die Vielecke von

$$3 \cdot 2^n,\ 2^n,\ 5 \cdot 2^n$$

Seiten erhalten.

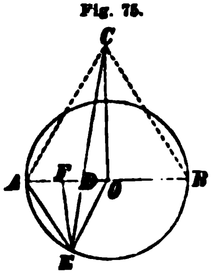
b) Beschreibt man in einem Kreise von demselben Puncte $A$ aus ein $m$ Eck mit der Seite $AM$, und ein $n$ Eck mit der Seite $AN$, so enthält der Bogen $MN$, wegen $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{m-n}{m.n}$, $m-n$

Theile, deren jeder $\frac{1}{mn}$ des Umfanges ist. Ist nun $m - n = 2^r$, so kann man durch $r$-maliges Halbiren dieses Bogens das $mn$Eck erhalten. Z. B. Für $m = 5$, $n = 3$ ist $MN$ der doppelte Bogen eines Fünfzehnecks.

**Anmerkung.** Die Construction der hier angegebenen Vielecke war schon im Alterthume bekannt. Gauss hat in seinen „*Disquisitiones arithmeticae*" gelehrt, dass sich alle Vielecke, deren Seitenzahl die ungeraden Primfactoren nur in der Form $2^\alpha + 1$ und nur in der ersten Potenz enthält, streng geometrisch construiren lassen.

**263. Ein regelmässiges $n$ Eck näherungsweise in den Kreis zu beschreiben.**

Fig. 75.




a) Man beschreibe über den Durchmesser $AB$ ein gleichseitiges Dreieck $ABC$, hierauf theile man den doppelten Durchmesser in $n$ gleiche Theile, trage von $A$ aus auf $AB$ einen solchen Theil $AD = \frac{2\,AB}{n}$ ab, verbinde den Punct $C$ mit $D$, verlängere $CD$ bis zum Durchschnitt $E$ mit dem Umfange, so ist $AE$ entweder genau oder näherungsweise die Seite des $n$ Ecks.

Zieht man $EF \perp AB$, so ist

$$\triangle ODC \sim \triangle FDE,$$
$$CO : OD = EF : FD.$$

Setzt man $AO = 1$, $AOE = \alpha$, so ist:

$$CO = \sqrt{3},\ OD = AO - AD = 1 - \frac{4}{n} = \frac{n-4}{n},$$

$$EF = \sin\alpha,\ FD = FO - OD = \cos\alpha - \frac{n-4}{n}.$$

$$\sqrt{3} : \frac{n-4}{n} = \sin\alpha : \cos\alpha - \frac{n-4}{n}$$

oder $$p \sin\alpha = \sqrt{3}\,(\cos\alpha - p),\ \text{wo}\ p = \frac{n-4}{n}.$$

Setzt man $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos\alpha^2}$, und löst die quadratische Gleichung auf, so erhält man

$$\cos\alpha = \frac{p\,(3 + \sqrt{3 - 2p^2})}{3 + p^2}.$$

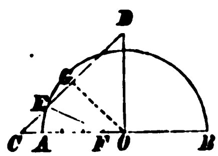
Für $n = 3$, 4, 6, erhält man genaue Werthe; für $n = 5$, 10, 17 betragen die Fehler 2′40″, 21′21″, 37′13″.

**Anmerkung.** Diese Regel wurde von dem italienischen

Mathematiker C. Renaldini (gest. 1700) angegeben. Bis auf Jacob Bernoulli hielt man das Verfahren für vollkommen strenge.

b) Ein neueres Verfahren besteht in Folgendem:

Fig. 76.




Man theile den Durchmesser $AB$ in $n$ gleiche Theile, verlängere um einen solchen Theil $OA$ bis $OC$, und den darauf senkrechten Halbmesser bis $OD = OC$. Nun ziehe man die Gerade $CD$, welche den Umfang zunächst in $E$ schneidet. Der Punct $E$ mit dem dritten Theilpuncte $F$ auf $AB$, von $A$ aus gerechnet, verbunden, gibt die gesuchte Sehne $EF = s$.

Um $s$ zu rechnen, ziehe man $OG \perp CD$. Man erhält dann: $CD = 2\,CG$, $OG$, $EG$, $CE$ und schliesslich aus $\triangle CFE$ mit Berücksichtigung von $C = 45^0$, $\cos C = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$,

$$s = \frac{1}{n}\sqrt{(n-4)^2 + 32 - (n-6)\sqrt{(n-2)^2 - 8}},$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{s}{2}.$$

Dieses Verfahren ist für $n = 3$ und 4 unmöglich, für $n = 5$ beträgt der Fehler von $\alpha$ $40'$, für $n = 6$ erhält man einen genauen Werth; von $n = 7$ an so genäherte Werthe, dass deren Fehler für Zeichnungen verschwindend klein ist.

### Inhaltsverhältnisse der Polyeder.

264. Die Inhalte zweier Prismen von:

a) gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen;

b) gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen;

c) ungleichen Grundflächen und ungleichen Höhen verhalten sich wie die Producte der Masszahlen der Grundflächen und Höhen.

Beweis wie in 242.

Dieselben Beziehungen gelten auch für die Pyramide.

265. Die Inhalte zweier ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie die dritten Potenzen zweier entsprechender Kanten.

Sind $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ die Masszahlen der Inhalte beider Pyramiden, $g$, $g'$ die ihrer Grundflächen, $h$, $h'$ die ihrer Höhen, so ist

$$\mathfrak{P} : \mathfrak{P}' = gh : g'h'.$$

Sind $d$, $d'$ zwei entsprechende Kanten, so ist:

$$g : g' = d^2 : d'^2,\ h : h' = d : d'$$
$$\mathfrak{P} : \mathfrak{P}' = d^3 : d'^3.$$

Allgemein. Die Inhalte zweier ähnlicher Polyeder verhalten sich wie die dritten Potenzen zweier entsprechender Strecken.

**Inhaltsberechnung der Polyeder.**

266. Um körperliche Räume zu messen, bedient man sich als Einheit eines Würfels, dessen Seite die Längeneinheit, dessen Grenzflächen also Quadrate von der Flächeneinheit sind. Dieser Würfel bildet die Masseinheit für die Inhaltsberechnungen.

1) Der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedon ist gleich dem Producte (der Masszahlen) der Grundfläche und der Höhe. Dasselbe gilt von jedem Parallelepipedon überhaupt.

2) Der Inhalt eines dreiseitigen Prismas ist gleich dem Producte der Grundfläche und der Höhe.

Dasselbe gilt auch von dem mehrseitigen Prisma.

3) Der Inhalt einer Pyramide ist ein Drittel des Productes der Grundfläche und der Höhe.

4) Die übrigen Polyeder zerlegt man in Pyramiden, z. B. Um den Inhalt $K$ eines Pyramidalstumpfes mit den Grundflächen $B$ und $b$, und der Höhe $h$ zu bestimmen, denke man sich denselben zur Pyramide ergänzt.

Ist $h + h'$ die Höhe dieser Pyramide, so ist

$$K = \tfrac{1}{3} B (h + h') - \tfrac{1}{3} bh' = \tfrac{1}{3} Bh + \tfrac{1}{3} (B - b) h'.$$

Nun ist

$$B : b = (h + h')^2 : h'^2, \text{ also } \sqrt{B} : \sqrt{b} = h + h' : h',$$

woraus

$$h' = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$$

und

$$K = \tfrac{1}{3} h (B + b + \sqrt{Bb})$$

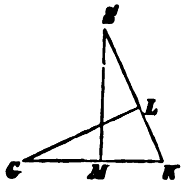
folgt; d. h. der Pyramidalstumpf ist gleich der Summe dreier Pyramiden, welche mit dem Stumpfe gleiche Höhen haben und deren Grundflächen resp. die Grundflächen und deren geometrisches Mittel des Stumpfes sind.

267. a) Es sei $SABCD$ eine Pyramide, deren Grundfläche $ABCD$ ein Trapez ist, ferner sei $SM$ die Höhe der Pyramide, $EF$ die durch die Mitte der nicht parallelen Seiten gezogene Gerade, $GH$ die durch $M$ gezogene Höhe des Trapezes, also $EF \cdot GH$ die Fläche desselben: der Inhalt $P$ der Pyramide ist

$$P = \tfrac{1}{3} EF \cdot GH \cdot SM.$$

Ist $K$ die Mitte von $GH$, und $GL \perp SK$, so ist

Fig. 77.




$$SK : SM = GK : GL$$

oder
$$SM \cdot GK = SK \cdot GL,$$

also
$$P = \tfrac{1}{6}\, EF \cdot SK \cdot GL.$$

Nun ist $EF \cdot SK$ die doppelte Fläche des Dreiecks $SEF$, $GL = h$ der Abstand jedes der vier Puncte $A$, $B$, $C$, $D$ von der Ebene dieses Dreiecks; mithin ist

$$P = \tfrac{1}{3}\, SEF \cdot h.$$

b) Ein Körper, begrenzt von zwei parallelen Vielecken $A$ und $B$ als Grundflächen und von Trapezen als Seitenflächen, heisst ein Obelisk.

Es seien $A$ und $B$ die beiden parallelen Grundflächen, $H = 2h$ deren Abstand, $C$ sei die Fläche des Schnittes in der Mitte zwischen $A$ und $B$, $S$ ein beliebiger Punct derselben. Man kann von $S$ aus den Obelisk in zwei Pyramiden mit den Grundflächen $A$ und $B$, und in Pyramiden, deren Grundflächen die obigen Seitenflächen-Trapeze sind, zerlegen.

Der Inhalt der beiden ersten Pyramiden ist $\tfrac{1}{3} Ah + \tfrac{1}{3} Bh$; der Inhalt der letzten Pyramiden ist nach a) $\tfrac{4}{3} Ch$, also der Inhalt des Obelisken $K$:

$$K = \tfrac{1}{6} H (A + B + 4C) \tag{1}$$

Sind $a$, $b$, $c$ zusammengehörige Seiten von $A$, $B$, $C$, so ist $2c = a + b$. Die Fläche $C$ heisst die Hauptfigur des Obelisken. Zieht man durch einen beliebigen Punct der Hauptfigur Gerade parallel den Seitenkanten, so erhält man in jeder der beiden Grundflächen eine Figur $D$, welche den Figuren $A$ und $B$ ebenfalls gleichwinklig ist, und Nebenfigur genannt wird.

Ist $d$ die zu $a$ und $b$ zugehörige Seite von $D$, so ist $2d = a - b$.

Wegen $2c = a + b$, $2d = a - b$ ist, wenn $a, b, c, d$ und $a', b', c', d'$ zusammengehörige Seiten bedeuten, $2(cc' + dd') = aa' + bb'$. Da nach 257 die doppelte Fläche eines Vieleckes durch eine Summe von Producten von je zwei Seiten mit einem Sinus ausgedrückt wird, so folgt aus der vorigen Gleichung und der Gleichheit der Winkel der Vielecke $A$, $B$, $C$, $D$

$$A + B = 2C + 2D,$$

mithin
$$K = H (C + \tfrac{1}{3} D) \tag{2}$$

d. h. der Inhalt eines Obelisken ist gleich der Summe eines Prismas und einer Pyramide, welche mit dem Obelisken gleiche Höhe haben, und von denen das Prisma die Hauptfigur, die Nebenfigur zur Grundfläche hat.

Zusätze.

a) Die Formel (1) gilt auch, wenn einzelne Trapeze in Dreiecke übergehen.

b) Sind die Grundflächen $A$ und $B$ zwei einander kreuzende Gerade $a$ und $b$, deren Winkel $\varphi$ ist, so ist der Körper eine dreiseitige Pyramide, wo $a$ und $b$ zwei gegenüberliegende Kanten sind. Die Fläche des mittleren Schnittes ist ein Parallelogramm, dessen Seiten $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}b$ mit dem eingeschlossenen Winkel $\varphi$ sind. Daraus folgt:

$$A = 0, \; B = 0, \; C = \tfrac{1}{2} a \cdot \tfrac{1}{2} b \sin\varphi = \tfrac{1}{4} ab \sin\varphi,$$

mithin

$$K = \tfrac{1}{6}\, ab\, H \sin\varphi.$$

### Berechnung der regelmässigen Polyeder.

268. Ein Polyeder, welches lauter congruente Flächen und congruente Ecken hat, heisst ein regelmässiges.

Es gibt nur fünf regelmässige Polyeder.

Erster Beweis aus 106.

Zweiter Beweis. Da in jeder Ecke mindestens drei Kanten zusammenstossen, und die Summe der Kantenwinkel kleiner als $4R$ ist, so folgt, dass jede Ecke nur gebildet werden kann:

a) Von drei Dreiecken — regelmässiges Tetraeder,
b) „ vier „ — „ Octaeder,
c) „ fünf „ — „ Icosaeder,
d) „ drei Quadraten — „ Hexaeder,
e) „ drei Fünfecken — „ Dodekaeder.

269. Verbindet man die Mittelpuncte $M$ und $N$ zweier aneinander stossender Polyederflächen mit der Mitte $C$ ihrer gemeinsamen Kante $AB$, so ist der Winkel $MCN$ das Mass des Keiles an der Kante $AB$. Die in $M$ und $N$ in der Ebene dieses Winkels auf $MC$ und $NC$ errichteten Senkrechten schneiden sich in einem Puncte $O$, welcher von allen Flächen und Ecken des Polyeders gleichweit entfernt ist und daher Mittelpunct des Polyeders heisst. Eine aus $O$ mit dem Halbmesser $OM = r$ oder $OA = \varrho$ beschriebene Kugel ist dem Polyeder resp. ein- oder umgeschrieben. Da $AB$ senkrecht ist auf der Ebene $MNC$, so bilden die Durchschnittslinien der drei durch die Geraden $OA$, $OC$, $OM$ bestimmten Ebenen mit einer aus $O$ beschriebenen Kugelfläche ein bei $C$ rechtwinkliges sphärisches Dreieck $ACM$. Stossen in jeder Ecke $m$ Kanten zusammen, so bilden die durch $OA$ und jede durch $A$ gehende Kante gelegten Ebenen $m$ Keile $= \frac{4R}{m}$; und ist jede Fläche von $n$ Kanten begrenzt, so bilden die durch $OM$

und jede der Ecken der Fläche gelegten Ebenen $n$ Keile $= \frac{4R}{n}$. Es ist daher

$$A = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{4R}{m}, \quad M = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{4R}{n}.$$

Aus 228 folgt

$$\cos a = \frac{\cos A}{\sin M}.$$

Ist $i = MCN$, so ist $a = \tfrac{1}{2}(2R - i)$, also

$$\sin \tfrac{1}{2} i = \frac{\cos \frac{2R}{m}}{\sin \frac{2R}{n}}.$$

Aus $\cos c = \cot A \cdot \cot M$, und $OM : OA = \cos AOM$ folgt

$$\frac{r}{\varrho} = \cot \frac{2R}{m} \cdot \cot \frac{2R}{n}.$$

Ist die Kante $AB = s$, so ist

$$AC = \frac{\frac{1}{2} s}{\sin \frac{2R}{n}}, \quad \varrho^2 = r^2 + \frac{\frac{1}{4} s^2}{\sin^2 \frac{2R}{n}}.$$

Für das Octaeder und Hexaeder hat das Verhältniss $r : \varrho$ denselben Werth; ebenso für das Icosaeder und Dodekaeder.

---

# II. Krumme Gebilde.

### Grenzbegriffe.

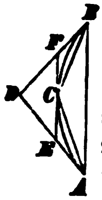
270. Um die bei krummen Gebilden vorkommenden Massbegriffe: Länge einer krummen Linie, Grösse der Fläche einer von krummen Linien begrenzten ebenen Figur, Grösse der Oberfläche und des Inhaltes eines von einer (oder mehreren) krummen Fläche (n) begrenzten Körpers aufzustellen; bedient man sich des Begriffes der „Grenze“.

Nähert sich eine veränderliche Grösse $A$ durch fortdauerndes Zu- oder Abnehmen einer andern unveränderlichen Grösse $L$ immer mehr und mehr, ohne dieselbe jemals zu erreichen oder gar übertreffen zu können; so heisst diese zweite Grösse $L$ die Grenze der ersten, und zwar die Wachsthums- oder Verminderungs-Grenze, je nachdem sich die Grösse $A$ durch Zu- oder Abnehmen der Grösse $L$ nähert.

In den hier vorkommenden Untersuchungen ist die Existenz einer Grenze immer in der Anschauung selbst gegeben.

**271.** Jede ebene krumme Linie kann in Stücke zerlegt werden, deren jedes, etwa $ACB$, von einer Geraden in nur zwei Puncten geschnitten werden kann, z. B. ein Stück einer Kreislinie. Beschreibt man in das Linienstück $ACB$ ein Dreieck $ABC$, so ist

Fig. 78.



$$AC + BC > AB.$$

Zieht man in den Puncten $A$ und $B$ Tangenten an die krumme Linie, welche sich in $D$ schneiden; zwischen $A$ und $B$, etwa in $C$, eine dritte Tangente $EF$, so ist

$$ED + FD > EF,$$

also auch, indem man beiderseits $AE$ und $BF$ dazu addirt,

$$AD + BD > AE + EC + CF + FB.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man:

a) Beschreibt man in eine krumme Linie fortgesetzt gebrochene Linien, so wächst deren Umfang mit der Seitenzahl fortwährend. Diesem fortgesetzten Wachsthume ist durch den Bogen $ACB$ eine Werthgrenze $L$ gesetzt, welche nicht überschritten werden kann.

b) Beschreibt man fortgesetzt um die krumme Linie gebrochene Linien, so nimmt deren Umfang mit der Seitenzahl fortwährend ab. Dieser fortgesetzten Abnahme ist durch den Bogen $ACB$ eine Werthgrenze $L'$ gesetzt, unter welche die fortgesetzt sich vermindernden Umfänge nicht herabsinken.

Die beiden Werthgrenzen $L$ und $L'$ sind einander gleich, da derselbe Bogen $ACB$ der fortgesetzten Zunahme der Umfänge der einbeschriebenen und fortgesetzten Abnahme der Umfänge der umschriebenen Vielecke ein (ideales) Ende setzt.

Dasselbe gilt auch von einer beliebigen ebenen krummen Linie, indem man dieselbe in solche erwähnte Theile zerlegen kann.

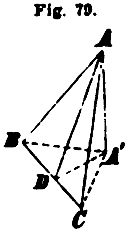
Die gemeinsame Grenze, der sich die Masszahlen der Umfänge der ein- und umschriebenen Linien ohne Ende nähern, wird die **Länge** der krummen Linie genannt. Ebenso wird die gemeinsame Grenze, der sich die Masszahlen der Flächen der in die krumme Linie ein- und umschriebenen Vielecke ohne Ende nähern, die **Grösse** der von der krummen Linie begrenzten **Fläche** genannt.

Aehnliches gilt von der **Länge** räumlicher krummer Linien.

**Anmerkung.** Die eben erwähnte Betrachtung der Länge einer krummen Linie führt zur Voraussetzung, dass alle Linien aus congruenten Linien-Elementen zusammengesetzt sind. Nach dieser Vorstellung ist die Gerade durch die Eigenschaft bestimmt, dass zwischen je zwei Puncten die kleinste Anzahl von Elementen enthalten ist, der Kreis dadurch, dass immer je zwei auf einander folgende Elemente denselben Winkel bilden, u. s. w.

272. Hülfssatz. Projicirt man das Dreieck $ABC$ orthogonal auf eine durch $BC$ gelegte Ebene, so stellt, wenn $A'$ die Projection von $A$ ist, das Dreieck $A'BC$ die Projection des Dreiecks $ABC$ dar. Zieht man $AD \perp BC$, so ist $A'D \perp BC$. Wegen $AD > A'D$ ist das Dreieck $ABC > A'BC$*).

Fig. 79.



Daraus folgt: In jeder Pyramide ist die Summe der Seitenflächen grösser als die Grundfläche.

Beschreibt man in das Innere eines von einer solchen krummen Fläche, welche von einer Geraden in höchstens zwei Puncten geschnitten werden kann, begrenzten Körpers fortgesetzt Polyeder von immer grösserer Flächenzahl, so wächst die Oberfläche der Polyeder mit der Flächenzahl fortwährend.

Beschreibt man fortgesetzt Polyeder von immer grösserer Flächenzahl um den Körper, so nimmt die Oberfläche mit der Flächenzahl fortwährend ab.

Die gemeinsamen Grenzen, denen sich die Masszahlen der Oberflächen und der Inhalte der ein- und umschriebenen Polyeder fortwährend nähern, werden die Masszahlen der Oberfläche und des Inhaltes des von der krummen Fläche begrenzten Körpers genannt.

Anmerkung. Analog wie in Art. 271 kann man sich alle Flächen aus congruenten Flächen-Elementen (die von Linien-Elementen begrenzt sind) und den Raum aus congruenten Raum-Elementen (die von Flächen-Elementen begrenzt sind) bestehend denken. Die auf dieser Betrachtungsweise beruhenden Rechnungsmethoden sind unter dem Namen „Methode des Unendlichkleinen" bekannt.

---

*) Man kann das Verhältniss der beiden Dreiecke leicht angeben. Bezeichnet man mit $\alpha$ den Neigungswinkel der Ebene $ABC$ mit ihrer Projection $A'BC$, so ist $\alpha = A'DA$ und

$$ABC : A'BC = AD : A'D = 1 : \cos \alpha .$$

Da jedes Dreieck in zwei Dreiecke der angegebenen Art und jedes Vieleck in Dreiecke zerlegt werden kann, so folgt: Die orthogonale Projection eines Vielecks auf eine Ebene ist gleich der Fläche des Vielecks multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkel der beiden Ebenen.

### Anwendungen.

273. Durch Anwendung des Grenzbegriffes auf ähnliche krumme Gebilde erhält man folgende Sätze:

a) Die Umfänge oder entsprechenden Theile der Umfänge zweier ähnlicher krummer Linien verhalten sich wie zwei entsprechende Linienstücke.

Insbesondere: Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie ihre Halbmesser.

b) Die Flächen zweier ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate zweier entsprechender Linienstücke.

Insbesondere: Die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

Die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser.

c) Die Inhalte zweier ähnlicher Körper verhalten sich wie die dritten Potenzen zweier entsprechender Linienstücke.

Insbesondere: Die Inhalte zweier Kugeln verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser.

### Kreisrechnung.

274. Für die Bestimmung des Umfanges $u$ eines Kreises vom Durchmesser $d = 2r$ genügt es den Umfang $\pi$ eines Kreises vom Durchmesser 1 zu kennen; denn aus

$$u : \pi = d : 1, \text{ folgt } u = \pi d = 2\pi r.$$

Da man den Kreis als die gemeinsame Grenze der ein- und umschriebenen regulären Vielecke von immer grösserer Seitenzahl betrachten kann, so kann man durch Berechnung der Umfänge dieser Vielecke die Zahl $\pi$ näherungsweise bestimmen.

Für die Fläche des Kreises erhält man durch Anwendung des Grenzbegriffes nach Art. 258

$$f = \tfrac{1}{2} ur = \pi r^2;$$

man kann daher auch aus den Flächen dieser Vielecke die Zahl $\pi$ finden.

Für die Berechnung dieser Vielecke dienen die in Art. 258 entwickelten Formeln.

Die Berechnung der Umfänge beginnt man am bequemsten mit dem einem Kreise eingeschriebenen Sechseck, dessen Umfang also $= 6r = 3 \cdot 2r$ ist. Der Umfang des umschriebenen Sechseckes ist $= 3.46410 \times 2r$. Damit erhält man die Umfänge der ein- und umschriebenen 12 Ecke, 24 Ecke, $\cdot\cdot$

Die Berechnung der Flächen beginnt man mit dem einem Kreise eingeschriebenen Quadrate, für welches $f = 2r^2$, $F = 4r^2$ ist, woraus dann die Flächen der ein- und umschriebenen 8 Ecke, 16 Ecke, · · erhalten werden.

Man erhält dadurch folgende Tafel:

| Seitenzahl | Umfang für $2r$ als Einheit | |
|---|---|---|
| | Innerer | Aeusserer |
| 6 | 3 | 3.4641016 |
| 12 | 3.1058285 | 3.2153903 |
| 24 | 3.1326286 | 3.1596599 |
| 48 | 3.1393502 | 3.1460862 |
| 96 | 3.1410319 | 3.1427146 |
| 192 | 3.1414524 | 3.1418730 |
| 384 | 3.1415576 | 3.1416627 |
| 768 | 3.1415838 | 3.1416101 |
| 1536 | 3.1415904 | 3.1415970 |

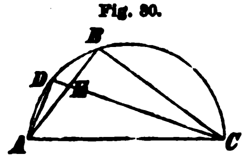
u. s. w.

| Seitenzahl | Fläche für $r^2$ als Einheit | |
|---|---|---|
| | Innere | Aeussere |
| 4 | 2 | 4 |
| 8 | 2.8284271 | 3.3137085 |
| 16 | 3.0614674 | 3.1825978 |
| 32 | 3.1214451 | 3.1517249 |
| 64 | 3.1365484 | 3.1441183 |
| 128 | 3.1403311 | 3.1422236 |
| 256 | 3.1412772 | 3.1417503 |
| 512 | 3.1415138 | 3.1416321 |
| 1024 | 3.1415729 | 3.1416025 |
| 2048 | 3.1415877 | 3.1415951 |

u. s. w.

mithin auf fünf Stellen genau $\pi = 3.14159$.

Fig. 30.




275. Die erste Berechnung der Zahl $\pi$ wurde von Archimedes durch Berechnung der Umfänge des ein- und umschriebenen regulären 96 Eckes ausgeführt.

a) Halbirt man in dem einem Halbkreis eingeschriebenen Dreiecke $ABC$ den Winkel $C$ durch die Gerade $CD$, welche die Seite $AB$ in $E$ schneidet, so ist

$$AE : EB = AC : BC$$

und

$$\triangle ADE \sim \triangle CDA,$$

also

$$AD : AE = CD : CA.$$

Daraus folgt
$$AE : AC = AB : AC + BC,$$
$$AE : AC = AD : DC.$$

Ist nun $C = \frac{1}{3} R$, so ist $AB : AC = 1 : 2$, mithin auch $AB : BC$ und $AB : AC + BC$ bekannt. Damit ist auch $AD : DC$ also auch $AD : AC$ gegeben. $AD : AC$ ist das Verhältniss der Seite des einbeschriebenen 12 Eckes zum Durchmesser.

b) Ebenso erhält man aus dem Verhältnisse $BA : BC$ das Verhältniss
$$BE : BC = BA : BC + AC.$$

Daraus folgt: Ist das Dreieck $ABC$ bei $B$ rechtwinklig und Winkel $C = \frac{1}{3} R$, so stellt, wenn man aus $C$ mit $BC$ als Halbmesser einen Kreis beschreibt, $BA : BC$ das Verhältniss der Seite des umschriebenen 6 Eckes zum Durchmesser, und $BE : BC$ das Verhältniss der Seite des umschriebenen 12 Eckes zum Durchmesser dar.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man das Verhältniss der Seite des 96 Eckes zum Durchmesser.

Für die einbeschriebenen Vielecke setzt Archimedes die Seite des 6 Eckes $= 780$ und nimmt bei der Berechnung der für die späteren Vielecke vorkommenden Quadratwurzeln die grösseren Zahlen; damit findet er, dass das Verhältniss der Seite des 96 Eckes zum Durchmesser grösser als $\frac{66}{2017\frac{1}{4}}$, also das des Umfanges zum Durchmesser grösser als $\frac{2017\frac{1}{4}}{6336}$ ist, welche letztere Zahl grösser als $3\frac{10}{71}$ ist.

Für die umschriebenen Vielecke setzt Archimedes die Seite des 6 Eckes $= 153$ und nimmt bei der Berechnung der Quadratwurzeln die kleineren Zahlen; damit findet er das Verhältniss des 96 Eckes zum Durchmesser kleiner als $\frac{153}{4673\frac{1}{2}}$, also das des Umfanges zum Durchmesser kleiner als $\frac{14688}{4673\frac{1}{2}}$, welche letztere Zahl kleiner als $3\frac{1}{7}$ ist. Das Verhältniss des Kreis-Umfanges zum Durchmesser, d. i. die Zahl $\pi$, liegt also zwischen den Grenzen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{1}{7}$.

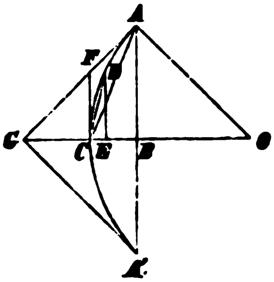
Durch **Vieta** (um 1579) wurde die Zahl $\pi$ bis zu 10 Decimalen, durch **Ludolf von Ceulen** (um 1586) bis auf 20 und später bis auf 35 Stellen berechnet. Nach ihm wurde $\pi$ die **Ludolf'sche Zahl** genannt. Auf 10 Stellen genau ist
$$\pi = 3{\cdot}1415926536.$$

**Anmerkung.** Das Verhältniss $\pi = 3\frac{1}{7}$ heisst das Archimedische. Für die Praxis meist ausreichend ist der Werth $\pi = \frac{355}{113} = 3.14159292$, welcher von Metius, einem Zeitgenossen Ludolfs, angegeben wurde.

276. Die oben angeführte Berechnung lässt sich durch die Huyghens'schen Sätze bedeutend abkürzen.

a) Beschreibt man in einen Kreisabschnitt (der kleiner als der Halbkreis ist) ein gleichschenkliges Dreieck, und in die durch dessen Schenkel gebildeten Kreisabschnitte wiederum gleichschenklige Dreiecke, so ist die vierfache Summe der letzteren grösser als das erstere.

Fig. 81.




Ist $OC \perp AA'$, $D$ die Mitte des Bogens $AC$, $DE \perp OC$, so ist das Dreieck $ABC$ die Hälfte des Dreiecks $AA'C$, und das Dreieck $DEC$ die Hälfte eines der beiden in die Kreisabschnitte über $CA$ und $CA'$ beschriebenen Dreiecke.

Nun ist $$ABC : DEC = AB \cdot CB : DE \cdot CE.$$

Da nach Art. 161, 1) $\overline{AC}^2 : \overline{DC}^2 = CB : CE$ ist, so folgt
$$ABC : DEC = AB \cdot \overline{AC}^2 : DE \cdot \overline{DC}^2.$$

Wegen $AB < AC = 2\,DE$, $AC < 2\,DC$ folgt
$$ABC : DEC < 8 : 1.$$

Setzt man dieses Verfahren fort und bezeichnet das ursprüngliche Dreieck $AA'C$ mit $\triangle$, die erhaltenen neuen Dreiecke mit $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3, \cdots$, so ist die Fläche $S$ des Kreisabschnittes
$$S = \triangle + 2\triangle_1 + 4\triangle_2 + 8\triangle_3 + \cdots$$
$$\triangle_1 > \tfrac{1}{8}\triangle, \quad \triangle_2 > \tfrac{1}{8}\triangle_1, \quad \text{also } \triangle_2 > \frac{1}{8^2}\triangle \text{ u. s. w.}$$
$$S > \triangle\left(1 + \tfrac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right),$$
oder
$$S > \tfrac{4}{3}\,AA'C.$$

b) Beschreibt man über der Grundlinie des ersten gleichschenkligen Dreieckes ein zweites, dessen Seiten Tangenten an den Kreis sind, so schneidet die Tangente, welche den Kreis in der Spitze des ersten Dreieckes berührt, von dem zweiten ein Dreieck ab, welches grösser ist als die Hälfte des ersten.

Ist $CF \perp OC$, so ist das Dreieck $CGF$ die Hälfte des von der Tangente in $C$ vom Dreieck $AA'G$ abgeschnittenen Dreieckes.

Nun ist

$$ABC : ABG = BC : BG$$
$$ABG : FCG = \overline{BG}^2 : \overline{CG}^2,$$

also
$$ABC : FCG = BC . BG : \overline{CG}^2.$$

Da $BC < CG$ (wegen $AF = FC < FG$), also $BG < 2\ CG$ ist, so folgt

$$ABC : FCG < 2 : 1.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man den Satz: Sind $S$ und $S'$ die beiden Flächen, in welche das Dreieck $AA'G$ von dem Kreisbogen zerlegt wird, wo $S'$ der von beiden Tangenten begrenzte Theil ist, so ist

$$S' > \tfrac{1}{2} S, \text{ also } S + S' < \tfrac{3}{2} S,$$

oder
$$S < \tfrac{2}{3} AA'G.$$

Vermittelst der beiden Sätze in a) und b) lassen sich engere Grenzen angeben, innerhalb welcher die Kreisfläche liegt.

Ist die Sehne $AA'$ die Seite eines eingeschriebenen regulären $n$ Eckes, so erhält man durch Addition der Fläche dieses $n$ Eckes zur Summe der Flächen der Kreisabschnitte und zur Summe der zugehörigen Dreiecke, wenn die Fläche des Kreises mit $F$, die des ein- und umschriebenen $n$ Eckes mit $f_n$ und $F_n$ bezeichnet werden, mit Berücksichtigung, dass

$$nS + f_n = F,$$
$$nAA'C = f_{2n} - f_n, \quad nAA'G = F_n - f_n,$$

aus a)
$$F > f_{2n} + \tfrac{1}{3}(f_{2n} - f_n),$$

aus b)
$$F < \tfrac{2}{3} F_n + \tfrac{1}{3} f_n = F_n - \tfrac{1}{3}(F_n - f_n);$$

oder, was dasselbe ist,

$$f_{2n} + \tfrac{1}{3}(f_{2n} - f_n) < F < F_{2n} - \tfrac{1}{3}(F_{2n} - f_{2n}).$$

Aus der in Art. 274 gegebenen Tafel erhält man für die Zahl $\pi$ die Grenzen:

| Seitenzahl | Untere G. | Obere G. | |
|---|---|---|---|
| 4,8 | 3.10 | 3.15 | |
| 8,16 | 3.139 | 3.142 | |
| 16,32 | 3.1414 | 3.1416 | |
| 32,64 | 3.14158 | 3.14160 | u. s. w. |

also aus dem 32 und 64 Eck bereits dieselbe Genauigkeit wie aus dem 2048 Eck. Aus dem 128 und 256 Eck erhält man $\pi$ bereits auf sieben Stellen genau.

277. Ist $l$ die Länge des Kreisbogens für den im Graden ausgedrückten Mittelpunctswinkel $\alpha$, so folgt aus

$$l : 2r\pi = \alpha^0 : 360^0$$

$$l = \frac{2r\pi}{360^0} \cdot \alpha^0.$$

Die Zahl $l : r$ nennt man den in Theilen des Halbmessers ausgedrückten Mittelpunctswinkel $\alpha$. Ist der Mittelpunctswinkel resp. in Minuten, Secunden gegeben, was durch $\alpha'$, $\alpha''$ bezeichnet werden soll, so ist

$$l : r = \frac{2\pi}{360 \cdot 60} \cdot \alpha' = \frac{2\pi}{360 \cdot 60^2} \cdot \alpha''.$$

Die Zahl $\frac{2\pi}{360 \cdot 60^2} = 0.000004848136811$ weicht sehr wenig von $\sin 1''$ ab, es ist daher

$$\alpha = \sin 1'' \cdot \alpha'', \text{ und } \alpha'' = \alpha : \sin 1'',$$

wo $$1 : \sin 1'' = 206264.8062 \text{ ist.}$$

Ist $f$ die Fläche des zugehörigen Kreissectors, so folgt aus

$$f : r^2\pi = \alpha^0 : 360^0$$

$$f = \frac{r^2\pi}{360} \cdot \alpha^0 = \tfrac{1}{2}\, l\, r.$$

## Kegel und Cylinder.

278. Die Seiten(Mantel)fläche eines geraden Kegels ist gleich einem Kreisausschnitte, dessen Halbmesser gleich der Seite des Kegels und dessen Bogen gleich dem Umfange der Grundfläche des Kegels ist. Ist $s$ die Seite, $r$ der Radius der Grundfläche, so ist der Mantel $M$

$$M = \pi r s.$$

Die Seitenfläche eines geraden Cylinders ist gleich dem Producte des Umfanges der Grundfläche mit der Seite.

279. Um die Seitenfläche eines geraden Kegelstumpfes zu bestimmen, denke man sich denselben zum Kegel ergänzt und bilde den Unterschied der beiden Seitenflächen.

Ist $s$ die Seite des Stumpfes, $S = s + s'$ die Seite des ergänzten Kegels, also $s'$ die Seite des Ergänzungskegels, $r$ der Radius der grösseren, $r'$ der Radius der kleineren Grundfläche, so ist die Seitenfläche $M$ des Stumpfes

$$M = \pi r S - \pi r' s'.$$

Nun ist

$$S : s' = r : r', \qquad S = s + s',$$

also

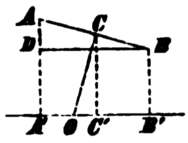
$$S = \frac{rs}{r - r'}, \qquad s' = \frac{r's}{r - r'},$$

$$M = \pi(r + r')\, s = 2\pi\varrho s,$$

wo $2\varrho = r + r'$ der Durchmesser des durch die Mitte der Axe parallel zur Grundfläche gelegten Schnittes ist.

280. Denkt man sich den Kegelstumpf durch Umdrehung der Strecke $AB$ um die Gerade $A'B'$ als Axe erzeugt, so ist, wenn $C$ die Mitte von $AB$ ist, die Seitenfläche des Kegelstumpfes

Fig. 82.



$$M = 2\pi CC' \cdot AB.$$

Ist $CO \perp AB$ und $BD \perp AA'$ also $BD = B'A'$, so ist $\triangle ABD \sim \triangle OCC'$, mithin

$$AB : A'B' = OC : CC' \text{ oder } AB \cdot CC' = A'B' \cdot OC,$$

also

$$M = 2\pi \cdot OC \cdot A'B'.$$

281. Der Inhalt eines Cylinders ist gleich dem Producte aus dessen Grundfläche und Höhe.

Der Inhalt eines Kegels ist gleich dem dritten Theile des Productes aus der Grundfläche und Höhe.

Der Inhalt eines Kegelstumpfes ist gleich dem dreier Kegel, welche die beiden Grundflächen und das geometrische Mittel derselben zu Grundflächen und die Höhe des Stumpfes zu Höhen haben. Ist $K$ der Inhalt, so ist

$$K = \tfrac{1}{3}\pi(r^2 + r'^2 + rr')\, h.$$

Vergl. Art. 266.

## Die Kugel.

282. Denkt man sich in ein Stück eines Halbkreises, etwa $AL$, eine gebrochene Linie $ABC \cdots L$, deren geradlinige Stücke $AB$, $BC$, $\cdots$ beliebig klein vorausgesetzt werden können, eingezeichnet, und die ganze Figur um den Durchmesser des Halbkreises gedreht, so beschreibt das Bogenstück $AL$ eine **Kugelzone**, und jedes der geradlinigen Stücke $AB$, $BC$, $\cdots$ der gebrochenen Linie die Seitenfläche eines Kegelstumpfes.

Sind $r_1, r_2, r_3, \cdots r_n$ die Abstände der Mitten der Seiten vom Mittelpuncte und $h_1, h_2, h_3, \cdots$ die Höhen der Kegelstumpfe, so ist die Summe $Z$ der Seitenflächen dieser Kegelstumpfe nach Art. 280

$$Z = 2\pi r_1 h_1 + 2\pi r_2 h_2 + \cdots + 2\pi r_n h_n.$$

Lässt man $h_1, h_2, \cdots\cdots h_n$ immer mehr und mehr abnehmen, so nähert sich $Z$ immer mehr der Seitenfläche der Zone; $r_1, r_2, r_3, \cdots r_n$ dem Halbmesser $r$ der Kugel: man erhält daher

$$Z = 2\pi r h,$$

wo $h$ die Höhe der Zone bedeutet, d. h.:

Die Seitenfläche einer Kugelzone ist gleich dem Producte aus dem Umfange eines grössten Kreises und der Höhe der Zone. Ist $h = 2r$, so ist $Z = 4\pi r^2$ die Oberfläche der Kugel; d. h.:

Die Oberfläche der Kugel ist gleich der vierfachen Fläche eines grössten Kreises.

283. Der Körper, welcher einen beliebigen Theil der Kugelfläche als Grundfläche und den Inbegriff der zum Umfange derselben gezogenen Halbmesser zur Seitenfläche hat, heisst eine sphärische Pyramide.

Denkt man sich in die Grundfläche dieser Pyramide eine gebrochene Fläche beschrieben, so kann man die sphärische Pyramide als die Grenze der Summe von eingeschriebenen Pyramiden mit dem Kugelmittelpuncte als Spitze betrachten; man erhält den Satz:

Der Inhalt einer sphärischen Pyramide ist gleich dem dritten Theile der Grundfläche multiplicirt mit dem Halbmesser der Kugel. Ist also $B$ die Grundfläche, so ist $K = \frac{1}{3} B r$.

Ist $B = 4 r^2 \pi$, d. i. gleich der Oberfläche der Kugel, so erhält man den Inhalt der Kugel

$$K = \tfrac{4}{3} \pi r^3.$$

Ist die Umfangslinie der sphärischen Pyramide ein Kreis, so heisst die Kugelpyramide ein Kugelkegel.

Ist $h$ die Höhe des Kugelabschnitts, so ist der Inhalt des Kugelkegels

$$= 2\pi r h \cdot \frac{r}{3} = \tfrac{2}{3} r^2 \pi h.$$

284. Der Inhalt des kleineren Kugelabschnittes ist gleich dem Unterschiede des Kugelkegels und des Kegels mit dem Schnittkreise als Grundfläche. Ist $\varrho$ der Radius der Grundfläche, so ist der Kugelabschnitt

$$= \tfrac{2}{3} \pi r^2 h - \tfrac{1}{3} \pi \varrho^2 (r - h).$$

Wegen $\varrho^2 = h(2r - h)$ ist der Kugelabschnitt

$$= \tfrac{1}{3} \pi h^2 (3r - h).$$

285. Die Kugelschicht ist der Unterschied zweier Abschnitte.

Sind $h$, $h'$ die Höhen der Abschnitte, $\varrho$, $\varrho'$ die Halbmesser der Schnittflächen, so ist die Kugelschicht

$$= \tfrac{1}{3}\pi h^2 (3r - h) - \tfrac{1}{3}\pi h'^2 (3r - h')$$
$$= \pi (h - h') [rh + rh' - \tfrac{1}{3} (h^2 + hh' + h'^2)].$$

Aus $2rh = \varrho^2 + h^2$, $2rh' = \varrho'^2 + h'^2$ folgt

$$rh + rh' = \tfrac{1}{2} (\varrho^2 + \varrho'^2) + \tfrac{1}{2} (h^2 + h'^2);$$

also die Kugelschicht

$$= \frac{\pi}{2} (h - h') (\varrho^2 + \varrho'^2) + \frac{\pi}{6} (h - h')^3$$
$$= \frac{\pi}{2} H (\varrho^2 + \varrho'^2) + \frac{4\pi}{3} \left(\frac{H}{2}\right)^3,$$

wo $H = h - h'$ die Höhe der Schicht bedeutet.

Die Kugelschicht ist daher gleich der mit der Höhe der Schicht als Durchmesser beschriebenen Kugel vermehrt um das arithmetische Mittel der Cylinder, welche der Schicht ein- und umschrieben sind.

286. Die Fläche des sphärischen Zweieckes verhält sich zur ganzen Kugelfläche, wie sich der sphärische Winkel an einer der Spitzen des Zweieckes zum vollen.

287. Sind $A$, $B$, $C$ die drei Winkel eines sphärischen Dreieckes, und werden dessen Seiten zu Halbkreisen verlängert, so erhält man drei sphärische Zweiecke $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ mit den Winkeln $A$, $B$, $C$.

Wegen $\alpha : F = A : 360$ u. s. w. und $F = 4\pi r^2$ folgt

$$f = \frac{\pi (A + B + C - 180^\circ) r^2}{180^\circ}.$$

Der Unterschied $A + B + C - 180^0$ wird sphärischer Ueberschuss genannt; bezeichnet man denselben mit $E$, so ist in Graden ausgedrückt

$$E = \frac{180 F}{\pi r^2}.$$

Zusatz. Die Fläche eines sphärischen Zweieckes, dessen Winkel $1^0$ beträgt, nennt man einen Flächengrad; die Kugelfläche enthält 360 Flächengrade. Drückt man $f$ in Flächengraden aus, so ist

$$2f = A + B + C - 180^0,$$

also die Grösse $2f$ mit dem sphärischen Ueberschuss identisch.

# Anhang.

## Entwickelung der goniometrischen Functionen und Kreisbögen in Reihen.

1. Eine unendliche Reihe mit fallenden Gliedern von der Eigenschaft, dass sich die Summe von $n$ Gliedern bei fortwährender Zunahme der Zahl $n$ ohne Ende einer bestimmten, endlichen Zahl nähert, heisst **convergent**. Z. B. Eine fallende geometrische Reihe ist (nach Art. 157 der Arithmetik) convergent.

Sind zwei unendliche convergente Reihen

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots \text{ und } B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots,$$

wo $A_0, A_1, \cdots B_0, B_1, \cdots$ constante Coefficienten bedeuten, für jeden Werth von $x = 0$ bis $x = x_1$ einander gleich und innerhalb dieses Werth-Intervalles convergent, so müssen die Coefficienten der gleichen Potenzen von $x$ einander gleich sein, d. h.

$$A_0 = B_0, \; A_1 = B_1, \; A_2 = B_2, \text{ u. s. w.}$$

Denn setzt man $x = 0$, so folgt $A_0 = B_0$ und damit

$$x(A_1 + A_2 x + \cdots) = x(B_1 + B_2 x + \cdots),$$

welche Gleichung auch für Werthe von $x$, die von Null verschieden sind, bestehen soll; daraus folgt

$$A_1 + A_2 x + \cdots = B_1 + B_2 x + \cdots$$

Setzt man $A_1 x + \cdots = a$, $B_2 x + \cdots = b$, so kann der Unterschied $A_1 - B_1 = b - a$ zugleich mit $x$ beliebig klein gemacht werden, was nur möglich ist, wenn $A_1 - B_1 = 0$, also $A_1 = B_1$ ist. Ebenso folgt $A_2 = B_2$, u. s. w.

2. Ist $\alpha$ ein in Theilen des Halbmessers ausgedrückter kleiner Winkel, so kann man

$$\sin\alpha = A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \cdots$$
$$\cos\alpha = B_0 + B_1\alpha + B_2\alpha^2 + \cdots$$

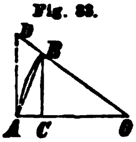
setzen, wo $A_0, A_1, \cdots B_0, B_1, \cdots$ noch zu bestimmende Coefficienten sind.

Da $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ und $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ ist, so folgt: dass die Reihe für $\sin\alpha$ nur ungerade Potenzen von $\alpha$, und die Reihe für $\cos\alpha$ nur gerade Potenzen von $\alpha$ enthalten kann; also

$$\sin\alpha = A_1\alpha + A_3\alpha^3 + A_5\alpha^5 + \cdots$$
$$\cos\alpha = B_0 + B_2\alpha^2 + B_4\alpha^4 + \cdots$$

Ist $AB$ der Bogen zum Mittelpunctswinkel $\alpha$, $r$ der zugehörige Radius, so sind

Fig. 22.




$$r^2\tan\alpha,\ r^2\alpha,\ r^2\sin\alpha$$

das Doppelte des Dreieckes $AOD$, Sectors $AOB$ und Dreieckes $AOB$, mithin

$$\tan\alpha > \alpha > \sin\alpha,$$

woraus

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha \text{ und } 1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} \text{ folgt.}$$

Es liegt daher der Quotient $\frac{\sin\alpha}{\alpha} = A_1 + A_3\alpha^2 + \cdots\cdots$ zwischen den Grenzen $\cos\alpha$ und 1. Wird $\alpha$ immer kleiner, so nähert sich also $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ immer mehr der Einheit und für $\alpha = 0$ ist $\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1 = A_1$.

Die Reihe für $\sin\alpha$ hat also die Form

$$\sin\alpha = \alpha + a\alpha^3 + b\alpha^5 + \cdots$$

Für die Cosinusreihe erhält man:

$$\text{Ist } \alpha = 0, \text{ so wird } \cos\alpha = B = 1.$$

Man kann ausserdem noch den Coefficienten $B_2$ bestimmen. Aus $\cos\alpha^2 = 1 - \sin\alpha^2$ folgt, wenn man die Reihen setzt,

$$1 + 2B_2\alpha^2 + \cdots = 1 - \alpha^2 - \cdots,$$

mithin

$$B_2 = -\tfrac{1}{2}.$$

Die Reihe für $\cos\alpha$ hat also die Form

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + a_1\alpha^4 + b_1\alpha^6 + \cdots$$

Um die übrigen Coefficienten zu bestimmen, beachte man, dass

$$2\cos\alpha^2 = 1 + \cos 2\alpha$$
$$2\sin\alpha^2 = 1 - \cos 2\alpha$$

ist. Aus den obigen Reihen erhält man

$$\cos\alpha^2 = 1 - \alpha^2 + (\tfrac{1}{4} + 2\,a_1)\,\alpha^4 + (-\,a_1 + 2\,b_1)\,\alpha^6 + \cdot\cdot$$
$$\sin\alpha^2 = \alpha^2 + 2\,a\,\alpha^4 + (a^2 + 2\,b)\,\alpha^6 + \cdots$$
$$\cos 2\,\alpha = 1 - \frac{(2\,\alpha)^2}{2} + a_1\,(2\,\alpha)^4 + b_1\,(2\,\alpha)^6 + \cdot\cdot$$

Setzt man diese Werthe in die erste Gleichung, so erhält man

$$2 - 2\,\alpha^2 + 2\,(\tfrac{1}{4} + 2\,a_1)\,\alpha^4 + 2\,(-\,a_1 + 2\,b_1)\,\alpha^6 + \cdot\cdot$$
$$= 2 - 2\,\alpha^2 + 16\,a_1\,\alpha^4 + 64\,b_1\,\alpha^6 + \cdot\cdot,$$

woraus

$$\tfrac{1}{4} + 2\,a_1 = 8\,a_1\,, \quad -\,a_1 + 2\,b_1 = 32\,b_1\,, \cdot\cdot$$
$$a_1 = \frac{1}{24} = \frac{1}{2.3.4}, \quad b_1 = -\frac{1}{720} = -\frac{1}{2.3.4.5.6}, \cdot\cdot$$
$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4} - \frac{\alpha^6}{2.3.4.5.6} + \cdot\cdot$$

folgt.

Die zweite Gleichung geht über in

$$2\alpha^2 + 4a\alpha^4 + 2\,(a^2 + 2b)\,\alpha^6 + \cdot\cdot = 2\,\alpha^2 - 16\,a_1\,\alpha^4 - 64\,b_1\,\alpha^6 + \cdot\cdot,$$

woraus

$$a = -\frac{1}{6} = -\frac{1}{2.3}, \quad b = \frac{1}{120} = \frac{1}{2.3.4.5}, \cdot\cdot$$
$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{2.3} + \frac{\alpha^5}{2.3.4.5} - \cdot\cdot$$

folgt.

Durch Division erhält man

$$\tan\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2}{15}\,\alpha^5 + \cdot\cdot$$

3. Um aus $\sin\alpha$ den Bogen $\alpha$ zu bestimmen, setze man

$$\alpha = \sin\alpha + a\,\sin\alpha^3 + b\,\sin\alpha^5 + \cdots.$$

Die Form dieser Reihe folgt unmittelbar aus dem Vorhergehenden. Dieser Werth von $\alpha$ in die Reihe für $\sin\alpha$ gesetzt, muss derselben Genüge leisten. Dies giebt

$$\sin\alpha = \sin\alpha + \left(a - \frac{1}{6}\right)\sin\alpha^3 + \left(b - \frac{a}{2} + \frac{1}{120}\right)\sin\alpha^5 + \cdot\cdot,$$

mithin

$$a - \frac{1}{6} = 0, \quad b - \frac{a}{2} + \frac{1}{120} = 0 \quad \text{u. s. w.}$$
$$a = \frac{1}{2.3}, \quad b = \frac{3}{40} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}, \cdot\cdot$$
$$\alpha = \sin\alpha + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sin\alpha^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\sin\alpha^5}{5} + \cdot\cdot$$

Auf ähnliche Art erhält man

$$\alpha = \tan\alpha - \frac{\tan\alpha^3}{3} + \frac{\tan\alpha^5}{5} - \cdots$$

Setzt man in dieser Gleichung $\tan\alpha = 1$, so ist $\alpha = \frac{\pi}{4}$, mithin

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots$$

Setzt man $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, so folgt aus

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 1\,,\ \tan\beta = \frac{1}{3}\,,$$

mithin

$$\frac{\pi}{4} = \begin{cases} \ \ \frac{1}{2} - \frac{1}{3\,2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \cdots \\ + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \cdots \end{cases}$$

welche Reihe zur Berechnung der Zahl $\pi$ ganz bequem ist.

Anmerkung 1. Ist $h$ sehr klein, so folgt für $\sin(\alpha + h)$ und $\cos(\alpha + h)$, indem man $\cos h = 1$ und $\sin h = h$ setzt,

$$\sin(\alpha + h) = \sin\alpha + \cos\alpha \cdot h\,,$$
$$\cos(\alpha + h) = \cos\alpha - \sin\alpha \cdot h\,.$$

Anmerkung 2. Ist $\alpha$ klein, so kann man näherungsweise

$$\sin\alpha = \alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right),\ \tan\alpha = \alpha\left(1 + \frac{\alpha^2}{3}\right)$$

setzen.

Wegen $\alpha = \alpha'' \sin 1''$ folgt:

$$\log\sin\alpha = \log\alpha'' + \log\sin 1'' + \log\left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right),$$

$$\log\tan\alpha = \log\alpha'' + \log\sin 1'' + \log\left(1 + \frac{\alpha^2}{3}\right).$$

Setzt man

$$S = \log\sin 1'' + \log\left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right)$$

$$T = \log\sin 1'' + \log\left(1 + \frac{\alpha^2}{3}\right)$$

so wird

$$\log\sin\alpha = \log\alpha'' + S$$
$$\log\tan\alpha = \log\alpha'' + T.$$

Wegen der Kleinheit von $\alpha$ sind $S$ und $T$ von $\log\sin 1''$ nicht viel verschieden. Diese Formeln dienen zur Berechnung der Logarithmen von Sinus und Tangens kleiner Winkel und umgekehrt.

**Auflösung eines sphärischen Dreieckes, dessen Seiten im Verhältnisse zum Halbmesser der Kugel sehr klein sind.**

1. Setzt man in

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

für Sinus und Cosinus der Seiten die Reihen, und vernachlässigt die Glieder über die vierte Potenz, so erhält man

$$\cos A = \frac{\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{1}{24}(a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2)}{bc\left[1 - \frac{1}{6}(b^2 + c^2)\right]}.$$

Setzt man, wegen $\frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{1-x^2}$ nahe $= 1 + x$, für $\frac{1}{1 - \frac{1}{6}(b^2 + c^2)}$ den Werth $1 + \frac{1}{6}(b^2 + c^2)$, so erhält man

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{24bc}.$$

Sind $A'$, $B'$, $C'$ die Winkel eines ebenen Dreieckes mit denselben Seiten $a$, $b$, $c$, so ist

$$\cos A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

mithin $\sin A'^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2}.$

Es ist daher

$$\cos A = \cos A' - \frac{bc}{6} \sin A'^2.$$

Setzt man $A = A' + x$, und vernachlässigt die höheren Potenzen von $x$, so wird

$$\cos A = \cos A' - x \sin A'.$$

Durch Vergleichung erhält man

$$x = \frac{bc}{6} \sin A' = \frac{F}{3},$$

wo $F$ die Fläche des ebenen Dreieckes bedeutet.

Es ist daher

$$A = A' + \frac{F}{3},$$

und ebenso $B = B' + \frac{F}{3}$

$$C = C' + \frac{F}{3},$$

also $A + B + C = \pi + F$ und $F = A + B + C - \pi$ der in Theilen des Halbmessers ausgedrückte sphärische Ueberschuss $E$.

Bei dieser Ableitung wurde die Voraussetzung gemacht, dass die Seiten $a$, $b$, $c$ in Theilen des Radius der Kugel gegeben sind. Sind, wie gewöhnlich, die Seiten in einem anderen Masse (etwa in Klaftern) gegeben, und ist $r$ der Halbmesser der Kugel, so ist statt $a$, $b$, $c$ resp. $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ zu setzen. Es ist dann

$$E = \frac{F}{r^2} \text{ und } E'' = \frac{E}{\sin 1''}.$$

Vermindert man daher jeden sphärischen Winkel um ein Drittel des sphärischen Ueberschusses, so erhält man die Winkel eines ebenen Dreieckes, dessen Seiten mit denen des sphärischen Dreieckes gleiche Länge haben.

2. Die Anwendung dieses (Legendre'schen) Satzes geschieht nun derart, dass man zunächst die Winkel des sphärischen Dreieckes als die des ebenen betrachtet, damit den Flächeninhalt und aus diesem den sphärischen Ueberschuss (in Secunden ausgedrückt) rechnet. Damit erhält man die genauen Werthe der entsprechenden Winkel des ebenen Dreieckes und aus diesem die gesuchten Stücke des sphärischen.

Beispiel. Für das sphärische Dreieck

$$\begin{aligned} a &= 2^0\,20' & A &= 48^0\,12'\,25''.33 \\ b &= 2^0\,40' & B &= 58^0\,25'\,45''.19 \\ c &= 3^0\,\;0' & C &= 73^0\,24'\,56''.88 \end{aligned}$$

findet man nach dem Legendre'schen Satze, wenn die drei Seiten gegeben sind, für den Ueberschuss $E = 3'\,7''.328$, und damit für $A$, $B$, $C$ Werthe, welche von den obigen um $0''.03$, $0''.05$, $0''.03$ verschieden sind.

Aus $a$, $b$, $C$ findet man für den Ueberschuss $E = 3'\,7''.350$.