



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

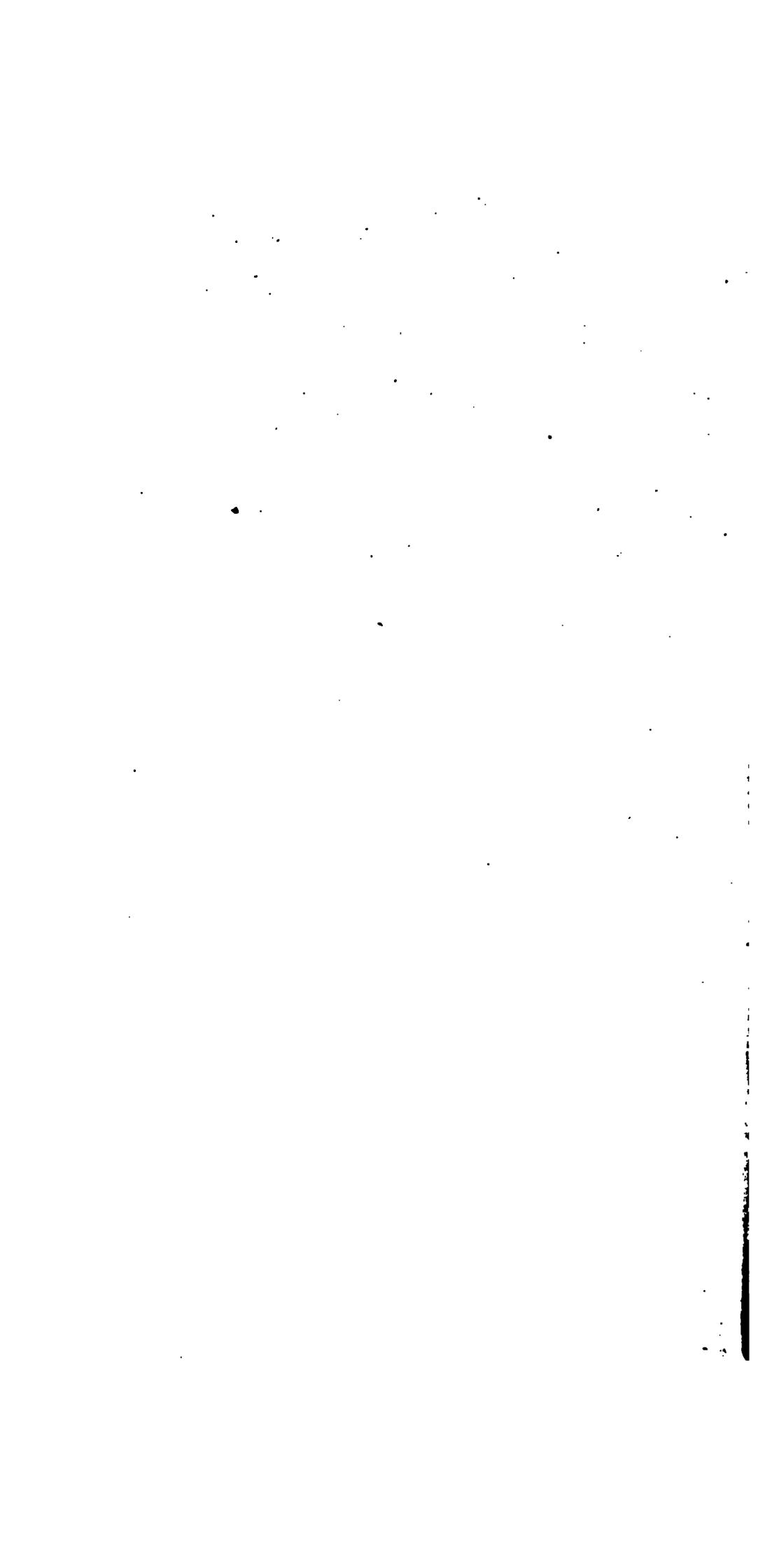
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.











2508

ELEMENTE
DER
REINEN MECHANIK

ALS VORSTUDIUM

FÜR DIE ANALYTISCHE UND ANGEWANDTE MECHANIK
UND

FÜR DIE MATHEMATISCHE PHYSIK

AN UNIVERSITÄTEN UND TECHNISCHEN HOCHSCHULEN

SOWIE ZUM SELBSTUNTERRICHT

VON

DR. JOS. FINGER,

D. Ö. PROFESSOR DER REINEN MECHANIK AN DER K. K. TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN WIEN.

*Quidquid ex phaenomenis non deductur, hypo-
thesis vocanda est: et hypothesis seu metaphysica,
seu physica, seu qualitatum occularum, seu mechanica,
in philosophia naturali locum non habent.*

*Newton phil. nat. princ. math.
London 1686.*

ZWEIFTE VERBESSERTE UND VERMEHRTE AUFLAGE.

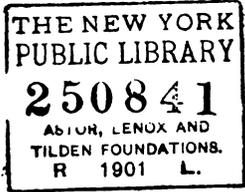
MIT 210 FIGUREN IM TEXTE.

WIEN, 1901.

ALFRED HÖLDER

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTS-BUCHHÄNDLER
I, ROTHENTHURMSTRASSE 13.

(Finger)



ALLE RECHTE, INSBESONDERE AUCH DAS DER ÜBERSETZUNG, VORBEHALTEN.

NOY WEN
BLICH
VIA BEL

Druck von Adolt Holzhausen,
k. und k. Hof- und Universitäts-Buchdrucker in Wien.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Da die erste Auflage dieses Lehrbuches schon seit einigen Jahren im Buchhandel vollständig vergriffen ist, so sieht sich der Verfasser — einem Wunsche des Verlegers entsprechend — veranlasst, eine zweite, in fast allen Paragraphen geänderte Auflage erscheinen zu lassen. Es enthält dieses Lehrbuch jenen Lehrstoff, der in seinem wesentlichen Theile an der Wiener technischen Hochschule in den Vorlesungen über die Elemente der reinen Mechanik und der graphischen Statik, welche für die Hörer der Bauingenieurschule, der Hochbauschule und der Maschinenbauschule im Studienplane des ersten Jahrganges normiert sind, zum Vortrage gelangt.

In dieser zweiten Auflage wurde zunächst der Text der ersten Auflage einer vollständigen Umarbeitung unterzogen, ferner wurden alle jene Paragraphen der ersten Auflage, deren Einbeziehung in den Lehrgang der für das erste Studium an der Hochschule bestimmten Elemente der theoretischen Mechanik wegen ihrer größeren Schwierigkeit sich nicht empfiehlt oder die eine geringere Wichtigkeit haben, wie auch der rein mathematische Anhang, welcher in der früheren Auflage mehrere Druckbogen beansprucht, ganz eliminiert, dagegen wurde der Lehrstoff durch andere, besonders den Zwecken des Studiums an technischen Hochschulen entsprechende Lehren erweitert, so dass dadurch trotz der erwähnten Elimination der Umfang des Lehrbuches größer geworden ist.

Vor allem bezieht sich diese Erweiterung auf die Elemente der graphischen Statik, welche in dieser Auflage eine größere Berücksichtigung finden, als dies in der ersten Auflage geschehen ist.

Gewissenhaft wurden die vielfachen Erfahrungen benützt, welche der Verfasser in dem vieljährigen Unterrichte der reinen Mechanik gesammelt hat, den derselbe an der technischen Hochschule seit mehr als zwei Decennien erteilt und durch viele Jahre auch an der Wiener Universität erteilt hat.

Die Verbesserungen in dieser neuen Auflage betreffen nicht nur die Auswahl und systematische Gliederung der Lehrmaterie, sondern auch die Darstellung derselben, indem alle jene Deductionen, welche, wie die Erfahrung gelehrt hat, den Studierenden größere Schwierigkeiten bereitet haben, durch andere, leichter verständliche ersetzt worden sind und auch sonst überall eine größere Klarheit in den Auseinandersetzungen erstrebt wurde. Wenn dadurch die Darstellung an manchen Stellen etwas breiter geworden ist, als dies vielleicht nothwendig erscheinen dürfte, so möge dies durch dieses Streben entschuldigt werden.

Es war die ursprüngliche Absicht des Verfassers, in dieser zweiten Auflage das ganze Lehrsystem auf die in neuerer Zeit von dem leider dahingegangenen, genialen Forscher H. Hertz in seinen rühmlichst bekannten „Principien“ (H. Hertz, „Principien der Mechanik“. Leipzig 1894) aufgestellten Grundlagen zu stützen und von den letzteren ausgehend zu entwickeln. Der Umstand jedoch, dass es bisher nicht gelungen ist, das auf diesen Grundlagen aufgebaute Lehrsystem mit entsprechendem Erfolge auf sämtliche Körperarten und mechanische Probleme in Anwendung zu bringen, und der weitere Umstand, dass dasselbe für den ersten Unterricht in der Mechanik an der Hochschule viel zu große Schwierigkeiten sowohl dem Vortragenden, als auch insbesondere dem Studierenden bietet und daher für diesen Unterricht in den „Elementen“ der Mechanik sich nicht als vortheilhaft erweist, hat den Verfasser bewogen, die bisherigen, wohl bewährten Galilei-Newton'schen Grundlagen auch in dieser neuen Auflage beizubehalten.

Der Verfasser beabsichtigte fernerhin, in dieser neuen Auflage auch den wesentlichen Lehrstoff seiner seit mehreren Jahren an der technischen Hochschule gehaltenen Vorlesungen über die Mechanik elastischer Körper, welche von dem in den bestehenden Lehrbüchern

der Elasticitätstheorie üblichen Lehrgänge in manchen nicht unwesentlichen Punkten abweichen, aufzunehmen. Jedoch ist der Unterzeichnete von dieser Absicht, in besonderen Capiteln auch die Mechanik elastischer Körper zu behandeln, ganz abgekommen, da seinem Manuscript zufolge die Kinematik der elastischen Punktsysteme nahezu drei und die Elemente der allgemeinen Dynamik elastischer Körper, selbst wenn von allen Anwendungen auf besondere Fälle abgesehen worden wäre, zum mindesten fünf weitere Druckbogen beansprucht hätten, wodurch der Umfang dieses Lehrbuches die ursprünglich festgesetzten Grenzen weit überschritten hätte. Der Verfasser konnte sich zu dieser Restriction des Lehrstoffes um so leichter entschließen, als die diesbezüglichen selbständigen Untersuchungen des Verfassers in diesem Lehrgebiete zum großen Theile schon in den Sitzungsberichten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien publiciert sind, und zwar in folgenden Abhandlungen:

- „Über die Beziehungen der homogenen Deformationen fester Körper zur Reactionsfläche. Ein Beitrag zur graphischen Statik elastischer Körper.“ (Band LXXXIII, Abth. II a, Jahrgang 1881, S. 234—261.)
- „Über die gegenseitigen Beziehungen gewisser in der Mechanik mit Vortheil anwendbaren Flächen zweiter Ordnung.“ (Band CI, Abth. II a, Jahrgang 1892, S. 1105—1142.)
- „Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch-isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind.“ (1. Theil, Band CIII, Abth. II a, Jahrgang 1894, S. 163—200; 2. Theil ebendasselbst S. 231—250.)
- „Über die allgemeinsten Beziehungen zwischen endlichen Deformationen und den zugehörigen Spannungen in aëlotropen und isotropen Substanzen.“ (Band CIII, Abth. II a, Jahrgang 1894, S. 1073—1100.)
- „Über das innere Virial eines elastischen Körpers.“ (Band CVI, Abth. II a, Jahrgang 1897, S. 722—738.)

Schließlich möge nur noch erwähnt sein, dass die aus mehreren sehr geschätzten Fachkreisen nach dem Erscheinen der ersten Auflage dem Verfasser theils auf privatem Wege zugekommenen, theils in verschiedenen Recensionen geäußerten Wünsche und Anregungen, für welche der Unterzeichnete seinen wärmsten Dank ausspricht, in dieser neuen Auflage möglichst gewissenhafte Berücksichtigung fanden.

Eben am Achensee, im August 1901.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorwort zur zweiten Auflage	III

Capitel I. Einleitung.

§ 1. Die geometrischen Größen und die Zeitgrößen. Grundgesetz der Trägheit	1
§ 2. Die graphische Darstellung der Größen	6
§ 3. Bewegungszustand eines Punktes	7
§ 4. Kraft	12
§ 5. Princip der unveränderlichen relativen Wirkung. Princip der Wechselwirkung	16
§ 6. Arten der Körper	25
§ 7. Mechanik und deren Theile.	28

Capitel II. Statik des materiellen Punktes.

§ 8. Allgemeine Bemerkungen	30
A. Zusammensetzung und Gleichgewicht von Kräften, deren Richtungen in derselben Ebene gelegen sind und die auf einen freibeweglichen materiellen Punkt einwirken.	
§ 9. Zusammensetzung gleich- und entgegengesetzt-gerichteter Kräfte	31
§ 10. Einleitende allgemeine Sätze über die Resultante zweier beliebig gerichteter Kräfte	35
§ 11. Größe der Resultierenden zweier orthogonaler Componenten	38
§ 12. Richtung der Resultierenden zweier orthogonaler Componenten	40
§ 13. Zerlegung einer Kraft in zwei orthogonale Componenten	43
§ 14. Zusammensetzung zweier beliebiger Kräfte. Kräfdreieck und Kräfteparallelogramm	45
§ 15. Allgemeine Zerlegung einer Kraft in zwei Componenten	49
§ 16. Zusammensetzung beliebig vieler in derselben Ebene wirkender Kräfte	51
§ 17. Statische Momente von Kräften bezüglich eines Punktes (Polare Kräfte-momente)	55
§ 18. Gleichgewicht von Kräften, die in derselben Ebene wirken	60
B. Zusammensetzung und Gleichgewicht von Kräften im Raume, die auf einen freibeweglichen materiellen Punkt einwirken.	
§ 19. Graphische Zusammensetzung von Kräften im Raume, die auf denselben Punkt einwirken	62

	Seite
§ 20. Zusammensetzung dreier Kräfte und Zerlegung einer Kraft in drei Componenten auf dem Wege der Rechnung	63
§ 21. Zusammensetzung von beliebigen Kräften im Raume, die denselben Angriffspunkt haben, auf dem Wege der Rechnung. Drehungsmomente von Kräften in Bezug auf räumliche Achsen (Axiale Kräfte Momente)	67
§ 22. Gleichgewicht von Kräften im Raume, die auf denselben Angriffspunkt wirken	73
C. Statik des nicht freibeweglichen materiellen Punktes.	
§ 23. Gleichgewicht und Äquivalenz von Kräften, deren Angriffspunkt gezwungen ist, in einer gegebenen Fläche zu verbleiben	74
§ 24. Gleichgewichts- und Äquivalenzbedingungen von Kräften, die auf einen in einer vorgeschriebenen Bahn verharrenden materiellen Punkt einwirken	79
D. Anwendungen der Gesetze der Statik des materiellen Punktes auf die Statik der Schwere.	
§ 25. Empirische Sätze über die Schwerkraft	80
§ 26. Gleichgewicht eines schweren materiellen Punktes	82
Capitel III. Kinematik des Punktes.	
§ 27. Zusammensetzung von Bewegungen und Zerlegung der Bewegung eines Punktes	86
§ 28. Geschwindigkeit. Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten	87
§ 29. Dimension der Größenarten. Dimension der Geschwindigkeit. Symbolische Darstellung der Einheiten der Größenarten	96
§ 30. Die gleichförmige und die ungleichförmige Bewegung im allgemeinen. Beschleunigung einer geradlinigen Bewegung	98
§ 31. Die gleichförmig geänderte Bewegung im besonderen	104
§ 32. Beschleunigung einer krummlinigen Bewegung. Hodograph. Componenten der Beschleunigung	109
Capitel IV. Dynamik des materiellen Punktes.	
§ 33. Einleitung	118
A. Dynamik der geradlinigen Bewegung eines materiellen Punktes.	
§ 34. Beziehung zwischen der Kraft und der Beschleunigung. Absolutes Maßsystem. Mechanischer Antrieb. Mechanische Arbeit. Effect . .	121
§ 35. Anwendung der Gesetze der gleichförmig geänderten Bewegung eines materiellen Punktes auf die Dynamik der Schwere. Terrestrisches Maßsystem	131
§ 36. Reibungswiderstand	141
§ 37. Die Probleme der Dynamik der geradlinigen, ungleichförmig geänderten Bewegung	148
§ 38. Beispiel 1. Geradlinige schwingende Bewegung eines materiellen Punktes	151
§ 39. Beispiel 2. Geradlinige Bewegung, für welche die resultierende Kraft a) $P = -mg \frac{a^2 + v^2}{c^2}$, b) $P = -mg \frac{a^2 - v^2}{c^2}$, c) $P = -mg \frac{v^2}{c^2}$ ist	159

§ 40. Anwendung der Gesetze der ungleichförmig geänderten Bewegung auf die Dynamik der Schwere	165
[a) Freier Fall in die Tiefe,	
b) Freier Fall im luftgefüllten Raume,	
c) Wurfbewegung vertical nach aufwärts in widerstehender Luft,	
d) Bewegung längs einer horizontalen Bahn,	} bei Berücksichtigung der Reibung und des Luftwiderstandes]
e) Fall auf der schiefen Ebene,	
f) Bewegung längs der schiefen Ebene bergauf	

B. Dynamik der krummlinigen Bewegung.

§ 41. Kraftcomponenten bei einer krummlinigen Bewegung	171
§ 42. Princip der lebendigen Kraft und andere dynamische Gesetze der krummlinigen Bewegung eines Punktes	179
§ 43. Bewegung eines materiellen Punktes in einer vorgeschriebenen krummen Bahn	185
§ 44. Bewegung eines materiellen Punktes im Falle der Einwirkung einer constanten Kraft von constanter Richtung	194
§ 45. Potential	200
§ 46. Centralbewegung	209
[Allgemeine Gesetze und Anwendungen auf eine a) constante Centralkraft, b) Centrakraft, die dem Quadrate des Radius vectors invers proportional ist, c) Centralbewegung in einer Kegelschnittlinie, deren Brennpunkt der Centralpunkt ist, d) Centrakraft, die dem Radius vector proportional ist]	
§ 47. Anwendungen der Gesetze der krummlinigen Bewegungen auf die Dynamik der Schwere	227
[a) Wurfbewegung im luftleeren Raume, b) einfaches Kreispendedel, c) Cykloidenpendel, d) Centrifugalpendel]	

Capitel V. Statik des linearen materiellen Punktsystems.

§ 48. Einleitung. Kräfte eines materiellen Punktsystems. Das lineare Punktsystem. Kettenlinien	247
§ 49. Allgemeine Gleichgewichtsgesetze für Kettenlinien	252
[Anwendungen auf Fachwerk, Kettenlinie für Wasserdruck, fixe und bewegliche Rolle u. s. w.]	
§ 50. Kettenlinien und Belastungslinien für parallele äußere Kräfte im allgemeinen	280
§ 51. Die gemeine Kettenlinie und jene Kettenlinien überhaupt, deren Belastungslinie geradlinig ist, nebst Anwendung auf analoge kinetische Probleme	293
§ 52. Die parabolische Kettenlinie und die Kettenbrückenlinie nebst deren kinetischen Analogien	305

Capitel VI. Allgemeine Grundprincipien der Mechanik räumlicher materieller Punktsysteme.

§ 53. Die inneren Kräfte eines räumlichen Punktsystems	311
§ 54. Die nothwendigen Gleichgewichtsbedingungen für ein räumliches Punktsystem. Princip der virtuellen Verschiebungen.	313

		Seite
§ 55.	Kinetische Grundgleichungen. D'Alemberts Princip. Princip der Erhaltung der Flächen. Princip der lebendigen Kräfte. Princip der Constanz der Energie	318
§ 56.	Massenmittelpunkt eines materiellen Punktsystems	329
§ 57.	Bewegung des Massenmittelpunktes. Gesetz der Erhaltung der Bewegungsquantität. Kinetische Energie eines Punktsystems	332
§ 58.	Spannungen in einem continuierlichen räumlichen Punktsystem. Innere Kräfte eines starren Systems	336

Capitel VII. Elemente der Kinematik eines starren Punktsystems.

§ 59.	Einleitung	342
§ 60.	Die fortschreitende Bewegung und die Rotation um eine Achse	343
§ 61.	Rotation eines starren Körpers um einen fixen Punkt. Zusammensetzung von Rotationen, deren Achsen sich schneiden	349
§ 62.	Bewegung parallel zu einer fixen Ebene. Zusammensetzung von Rotationen um parallele Achsen. Zusammensetzung einer Rotation mit einer zur Rotationsachse senkrechten fortschreitenden Bewegung	356
§ 63.	Allgemeinste Bewegung eines starren Körpers	363

Capitel VIII. Statik des starren Körpers.

A. Einleitung.

§ 64.	Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen. Äquivalenz von zwei Kräften	367
-------	---	-----

B. Statik der Kräfte, die in derselben Ebene auf einen freibeweglichen starren Körper wirken.

§ 65.	Zusammensetzung zweier Kräfte im besonderen	373
§ 66.	Zusammensetzung eines Kräftepaares mit einer Einzelkraft und jene der Kräftepaare mit einander	385
§ 67.	Allgemeine Methode der Zusammensetzung von Kräften in derselben Ebene auf dem Wege der Rechnung [a) Reduction auf eine resultierende Einzelkraft, b) Gleichgewicht der Kräfte, c) Reduction auf ein Kräftepaar]	387
§ 68.	Graphostatische Zusammensetzung von Kräften in derselben Ebene im allgemeinen. Graphische Reduction der Momente [Seilpolygon. a) Reduction auf eine Einzelkraft, b) Gleichgewicht, c) Reduction auf ein Kräftepaar. Mittelkraftlinie. Methode des Polwechsels. Momentenbasis. Reduciertes Moment.]	395
§ 69.	Gleichgewicht von drei Kräften im besonderen	406
§ 70.	Zusammensetzung paralleler, in derselben Ebene wirkender Kräfte im besonderen. Graphische Reduction der Momente paralleler Kräfte	407
§ 71.	Zerlegung einer Kraft in zwei oder mehrere in derselben Ebene wirkende Componenten	413

C. Statik der Kräfte im Raume, die auf einen freibeweglichen starren Körper einwirken.

§ 72.	Äquivalenz, Zusammensetzung und Zerlegung der Kräftepaare im Raume	423
-------	--	-----

Seite

- § 73. Allgemeine Methode der Zusammensetzung beliebiger Kräfte im Raume (Reductionsresultante, Centralachse, Invariante, Nullsystem) 431
- § 74. Zusammensetzung paralleler Kräfte im Raume. Mittelpunkt der Kräfte. Kräfte Momente bezüglich einer Ebene 444

D. Statik des nicht freibeweglichen starren Körpers.

- § 75. Einleitung. Einfache Maschinen 450
- § 76. Statik des um einen fixen Punkt drehbaren oder in einem Punkte unterstützten starren Körpers 452
- § 77. Statik des um eine fixe Achse drehbaren Körpers und andere einfache Fälle der beschränkten Beweglichkeit 457

E. Statik der Schwere.

- § 78. Schwerpunkt. Gewicht und Masse. Allgemeine Sätze über die Schwerpunktslage 467
- § 79. Specificisches Gewicht. Relative und absolute Dichte (Dichtigkeit). Mittlere Dichte der Erde. Beziehung der kosmischen Massen- und Kräfteinheiten zu den absoluten und terrestrischen Einheiten 472
- § 80. Schwerpunkte der Linien (Gerade, Polygonalzug, Kreisbogen) 480
- § 81. Schwerpunkte der Flächen im allgemeinen und der polygonalen ebenen Flächen im besonderen (Dreieck, Trapez, Trapezoid, Polygon) 485
- § 82. Schwerpunkte ebener Flächen, die ganz oder zum Theile von Curven begrenzt sind (Kreissector, Kreissegment, Ringsector, Parabelsegment u. s. w. Näherungsweise Schwerpunktsbestimmung) 494
- § 83. Schwerpunkte unebener Flächen (Mantelflächen von Prismen, Pyramiden u. s. w. Schwerpunkt einer Rotationsfläche, Kugelzone, Kugelcalotte, eines sphärischen Dreiecks u. s. w.) 507
- § 84. Schwerpunkte der Volumina im allgemeinen und der Polyeder im besonderen 513
[Prisma, Pyramide, Pyramidalstumpf, Prismaatoid u. s. w.]
- § 85. Schwerpunkte der von krummen Flächen begrenzten Volumina. Guldin'sche Regeln 524
[Schwerpunkt eines Cylinders, Kegels, Kegelstumpfes, des Segments einer Kugel, eines Ellipsoids, Paraboloids. Schwerpunkt eines Kugelsectors, eines Rotationskörpers, einer Kugelschichte u. s. w.]
- § 86. Gleichgewicht eines schweren starren Körpers 536

Capitel IX. Dynamik des starren Punktsystems.

- § 87. Einleitung 541

A. Dynamik der fortschreitenden Bewegung.

- § 88. Dynamische Bedingung für eine fortschreitende Bewegung 542
- § 89. Mechanische Arbeit und lebendige Kraft im Falle einer fortschreitenden Bewegung 546

B. Dynamik der rotierenden Bewegung.

- § 90. Dynamische Bedingung für eine Rotation um eine fixe Achse mit der Winkelbeschleunigung γ . Druck auf die fixen Punkte 548

	Seite
§ 91. Mechanische Arbeit der äußeren Kräfte bei einer Rotation um eine fixe Achse.	556
§ 92. Bedeutung des Trägheitsmoments. Trägheitshalbmesser. Trägheitsmomente in Bezug auf die Coordinatenachsen und auf parallele Achsen. Reducierte Länge	559
§ 93. Trägheitsellipsoid. Trägheitshauptachsen. Centraellipsoid	566
§ 94. Folgesätze über die Lage und die Eigenschaften der Trägheitshauptachsen. Mittelpunkt des Stoßes. Freie Achsen	572
§ 95. Trägheitsmomente, Deviationsmomente und Trägheitshauptachsen ebener Linien und ebener Flächen im allgemeinen	579
§ 96. Trägheitsmomente und Hauptachsen besonderer homogener ebener materieller Linien	595
§ 97. Trägheitsmomente und Hauptachsen besonderer homogener ebener materieller Flächen. [Kreisscheibe, Kreisring, Halbkreis, Kreissector, Parallelogramm, Rechteck, Dreieck, reguläres Polygon, Parabelsegment, Trapez, unregelmäßiges Polygon, Ellipse u. s. w. Näherungsweise Bestimmung der Trägheitsmomente und die graphischen Methoden nach Nehls und nach Mohr].	598
§ 98. Trägheitsmomente von Rotationsflächen	621
§ 99. Trägheitsmomente besonderer homogener Körper [Kreiscylinder, Hohlcyliner, rechtwinkliges Parallelepipid, senkrecht Prisma, abgekürzte Pyramide, schief abgeschnittenes Prisma, Ellipsoid, elliptisches Paraboloid, Trägheitsmoment eines Umdrehungskörpers, eines Kugelsegments u. s. w.]	623
§ 100. Anwendung der Dynamik der rotierenden Bewegung auf die Bewegung eines unter der alleinigen Einwirkung der Schwerkraft um eine fixe Achse rotierenden starren Körpers. Physisches Pendel. Reversionspendel. Bewegung durch Überwucht	638
C. Elemente der Dynamik der allgemeinsten Bewegung starrer Körper und der Bewegung eines Systems fester Körper.	
§ 101. Allgemeine Bewegungsgleichungen. Beziehung der Bewegung eines starren Körpers zur Bewegung des Schwerpunktes	651
§ 102. Mechanische Arbeit continuiertlicher Kräfte und kinetische Energie bei der allgemeinsten Bewegung der starren Körper und der Körperverbindungen	659
§ 103. Stoß der Körper	669
a) Gerader centraler Stoß freibeweglicher Körper	671
b) Schiefer centraler Stoß freibeweglicher Körper	681
c) Excentrischer Stoß freibeweglicher Körper.	684
d) Stoß unfreier Körper.	693

Capitel X. Principien der Hydromechanik.

§ 104. Allgemeine Gesetze des Gleichgewichts der Flüssigkeiten	697
§ 105. Gleichgewicht schwerer Flüssigkeiten (Hydrostatischer Druck schwerer compressibler und incompressibler Flüssigkeiten. Archimedisches	

	Seite
Gesetz. Stabilität des Schwimmens. Mittelpunkt des Druckes. Barometrische Höhenformel. Relatives Gleichgewicht schwerer Flüssigkeiten.)	718
§ 106. Hydrodynamische Grundgleichungen	750
§ 107. Antrieb und mechanische Arbeit der auf eine strömende Flüssigkeit einwirkenden Kräfte. Potential der inneren Kräfte	756
§ 108. Geschwindigkeit des Ausflusses einer unter der Einwirkung gegebener äußerer Kräfte befindlichen Flüssigkeiten aus Gefäßen	762
a) Ausflussgeschwindigkeit incompressibler Flüssigkeiten im besonderen	770
b) Ausflussgeschwindigkeit compressibler Flüssigkeiten	776
§ 109. Hydrodynamischer Druck und die aus diesem resultierende Einwirkung auf die die strömende Flüssigkeit berührenden Wände	783
[Reaction der ausströmenden Flüssigkeit. Druck eines isolierten Flüssigkeitsstrahles u. s. w.]	



Capitel I.

Einleitung.

§ 1. Die geometrischen Grössen und die Zeitgrössen. Grundgesetz der Trägheit.

Die geometrischen Größenarten: Linien, Flächen, Volumina, Winkel u. s. w., haben ihren Ursprung in der ersten Grundform der menschlichen Sinnenerkenntnis, nämlich in dem Raumbegriffe.

Die Raumvorstellung ist die einzige Grundlage der geometrischen Wissenschaften, welche lediglich die Untersuchung der gegenseitigen Abhängigkeit der Größen der Linien, Flächen, Rauminhalte u. s. w. und auch jene der gegenseitigen Lage der Raumgebilde, die in letzter Linie durch die gegenseitige Lage der einzelnen Punkte derselben bestimmt ist, zum Gegenstande haben.

Die Bestimmung der gegenseitigen Lage dieser Punkte lässt sich zurückführen auf die Bestimmung der Lage jedes einzelnen Punktes in Bezug auf ein im allgemeinen räumliches Achsensystem A , und zu dieser Determination dienen gewisse, den Namen „*Coordina-*ten“ führende geometrische Größen (Strecken, Winkel u. s. w.).

In den geometrischen Wissenschaften werden diese *Coordina-*ten eines jeden einzelnen Punktes als unveränderlich angenommen, so daß sich weder die Lage der einzelnen Punkte des in Betracht gezogenen geometrischen Gebildes (z. B. des Körpers) zu dem *Coordina-*tenachsensystem A und daher auch weder die Lage bezüglich irgend eines mit dem Achsensystem A in unveränderlicher Verbindung gedachten Systems S von Punkten, beziehungsweise Körpern, noch auch die Form des ersteren Gebildes ändert.

In diesem Falle bezeichnet man die einzelnen Punkte (den Körper) als ruhend in Bezug (relativ) zu dem Achsensystem A und dem Punktsystem (Körpersystem) S .

Setzt man aber voraus, dass die *Coordina-*ten eines beliebigen in Betracht gezogenen Punktes M nicht einen unveränderlichen Wert haben, sondern sich stetig ändern, so wird sich auch die Lage dieses Punktes in Bezug (relativ) zu dem Achsensystem A und dem Punkt-

system S und im allgemeinen auch die Form des räumlichen Gebildes (Körpers), dem der Punkt M angehört, stetig ändern.

Die stetige Änderung der Lage des Punktes M in Bezug (relativ) zu einem Achsensystem A (resp. Punktsystem S) bezeichnet man als (relative) Bewegung des Punktes M in Bezug zu diesem Achsensystem (resp. Punktsystem.)

Wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich hervorgehoben wird, soll in den folgenden Untersuchungen stillschweigend vorausgesetzt werden, dass sich die Ruhe, beziehungsweise Bewegung aller der in Betrachtung gezogenen Punkte auf dasselbe Achsensystem A , beziehungsweise Punktsystem (Körpersystem) S beziehe, und demnach zumeist nur von Ruhe und Bewegung überhaupt die Rede sein.

Jene Linie des Punktsystems S , in welcher alle jene Punkte liegen, mit welchen der bewegliche Punkt M bei seiner Bewegung nach und nach zur Coincidenz gelangt, nennt man die Bahn des Punktes M in Bezug (relativ) zu dem Achsensystem, respective Punktsystem S .

In der Beobachtung dieser Änderung der gegenseitigen Lage der sinnlich wahrnehmbaren Körper der Aussenwelt und im allgemeinen in der beobachteten Veränderlichkeit der sinnlichen wahrnehmbaren Naturerscheinungen hat die zweite Grundform des menschlichen Erkennens, die Zeitvorstellung, ihren Ursprung.

Würden keine Änderungen, weder in der gegenseitigen Lage der Körper, in ihrer Form, noch auch überhaupt Änderungen in den Zuständen der Objecte der Sinnenerkenntnis wahrgenommen werden, so könnte es im menschlichen Geiste zu einer Entwicklung des Begriffes der Zeit gar nicht kommen.

Von diesen Änderungen kommt in der Mechanik bloß die veränderliche räumliche gegenseitige Lage der Körper und Körperelemente, welche auch im allgemeinen eine Änderung der Form der Körper zur Folge hat, zur Betrachtung. Diese Änderung der gegenseitigen Lage ist, wie dies später des weiteren auseinandergesetzt werden soll, stets bedingt durch den gegenseitigen Einfluss gewisser Zustände dieser Körper, beziehungsweise Körperelemente.

Auf der Zeitvorstellung fußt eine besondere Größenart, die nicht minder wichtig ist wie die geometrischen Größenarten, nämlich jene der Zeitgrößen.

Die Zeit ist insoferne eine Größenart, als man auf die Zeit jene beiden Grundbegriffe der Größenlehre, aus denen sich als aus ihrem gemeinsamen Ursprunge alle mathematischen Rechnungsoperationen deducieren lassen, nämlich den Grundbegriff der Gleichheit und jenen des Theiles in Anwendung bringen kann.

Um dies zu zeigen, sei zunächst ein Körperelement m in Betracht gezogen, dessen räumliche Dimensionen so gering sind, dass

die zur selben, jedoch beliebigen Zeit von den einzelnen geometrischen Punkten desselben durchlaufenen Bahnen stets als parallel und congruent angesehen werden können, so dass der Bewegungszustand eines jeden Punktes dieses Körperelementes m , demnach auch der Bewegungszustand des ganzen Körperelements m , durch den Bewegungszustand eines einzigen geometrischen Punktes desselben bestimmt ist. Man bezeichnet ein solches Körperelement m als einen materiellen Punkt.

Wenn auch im allgemeinen unter der Einwirkung bestimmter Zustände (z. B. des magnetischen, elektrischen Zustandes u. s. w.) der auf die Lage des materiellen Punktes m Einfluss nehmenden Körper, beziehungsweise Körperelemente K (vergl. § 4) sich die Lage des in Betracht gezogenen materiellen Punktes m ändert, so kann sich, wie die Erfahrung lehrt, doch der materielle Punkt in gewissen Lagen trotz des Einflusses der auf denselben einwirkenden Körper K und deren Zustände in dauernder Ruhe befinden. In diesem Falle sagt man, der materielle Punkt m befinde sich in dieser Lage, die man als Gleichgewichtslage bezeichnet, unter dem gleichzeitigen Einflusse dieser Zustände des Körpersystems K im Gleichgewichte, oder diese Einflüsse halten sich das Gleichgewicht.

So befindet sich z. B. ein auf der vollkommen glatt gedachten horizontalen Oberfläche f eines auf der Erdoberfläche ruhenden Körpers k irgendwo unterstützter materieller Punkt m erfahrungsmäßig unter der gleichzeitigen Einwirkung der Erde und dieses Körpers k im Gleichgewichte bezüglich eines mit der Erde in fester Verbindung gedachten Achsensystems (A) und bezüglich der Erde (S) selbst, und jede in dieser horizontalen Ebene f gezogene Gerade enthält lauter Gleichgewichtslagen. (In diesem Falle besteht das auf den materiellen Punkt einwirkende Körpersystem K , dessen Einflüsse sich das [relative] Gleichgewicht halten, aus dem Körper k , dem Erdkörper u. s. w.)

Sind alle Punkte irgend einer Geraden im Raume (wie im letzten Beispiele) Gleichgewichtslagen eines materiellen Punktes m , und wird der letztere längs dieser Geraden irgendwie in Bewegung gesetzt, so beharrt, wie dies durch inductive Schlüsse aus Thatsachen der Erfahrung als fundamentales Gesetz erkannt wurde, der materielle Punkt in steter Bewegung, ohne diese Gerade je zu verlassen (falls nämlich die Zustände der auf den materiellen Punkt einwirkenden Körper während der Ruhe genau dieselben sind, wie jetzt während der Bewegung).

So würde in dem früheren Beispiele der nach irgend einer horizontalen Richtung in Bewegung gesetzte materielle Punkt längs der Oberfläche f (z. B. längs einer glatten horizontalen Eisfläche) sich stetig in dieser Richtung bewegen, wenn nicht infolge der Bewegung

der Einfluss der Reibung und des Luftwiderstandes sich geltend machen würde, also wenn die Bewegung längs einer absolut glatten Bahn und im vollkommen luftleeren Raume stattfinden würde. Ebenso beschaffen sind aus gleichen Gründen die in verticalen Richtungen nach abwärts, beziehungsweise nach aufwärts im luftleeren Raume vor sich gehenden Bewegungen zweier sich das Gleichgewicht haltenden Gewichte, die sich an den beiden Enden eines um eine fixe Rolle, die sich ohne Reibung dreht, geschlungenen äusserst feinen Fadens befinden (Atwoods Fallmaschine).

Bei dieser denkbar einfachsten Bewegungsform, bei welcher von verschiedenen materiellen Punkten, die sich gleichzeitig in geraden Bahnen durch lauter Gleichgewichtslagen bewegen, in derselben Zeit auch verschiedene Wege zurückgelegt werden können, werden zudem erfahrungsmäßig in solchen Zeiten, in welchen von dem einen materiellen Punkte gleiche Wege zurückgelegt werden, auch von jedem anderen materiellen Punkte gleiche (wenn auch im allgemeinen von den Wegen der anderen Punkte verschiedene) Wege zurückgelegt, und es werden demnach solche Zeiten, innerhalb welcher diese gleichen Wegstrecken von irgend einem dieser materiellen Punkte durchlaufen werden, als gleiche Zeiten bezeichnet (d. h. als ersetzbar, und zwar zunächst bezüglich der Länge der durchlaufenen Wegstrecken irgend eines materiellen Punktes unter den angeführten Umständen).

Eine solche Bewegung von der einfachsten Form, bei welcher stets in beliebigen gleichen Zeiten auch gleiche Wege zurückgelegt werden, bezeichnet man als eine gleichförmige Bewegung. Fasst man die angeführten beiden empirisch gewonnenen fundamentalen Wahrheiten zusammen, so gelangt man zu dem Grundgesetze der Trägheit (des Beharrungsvermögens), das als erstes Fundamentalgesetz (Princip) der Mechanik anzusehen ist. Dieses Princip lautet demgemäß: „Halten sich die auf einen materiellen Punkt einwirkenden Einflüsse in jeder der auf einander folgenden Lagen des Punktes das Gleichgewicht, so muss sich derselbe, wofern er in Bewegung gesetzt wird, stets in derselben Geraden, in demselben Sinne, und zwar gleichförmig bewegen, — und umgekehrt: „Ist die Bewegung eines materiellen Punktes eine geradlinige und gleichförmige, so halten sich die auf denselben einwirkenden Einflüsse in jeder Lage des Punktes das Gleichgewicht.“ Newton, der große Reformator der theoretischen Mechanik und der Astronomie, der Erfinder der Fluxionsrechnung (d. i. des höheren Calculs) (geb. 1642, gest. 1726) drückt*) dieses erste Grundgesetz in folgender Form aus: *Lex mo-*

*) in seinem unsterblichen Werke „*Philosophiae naturalis principia mathematica*“ (London 1686).

tus I (Axioma I): Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare = Jeder Körper verharrt in seinem Ruhestande oder in dem Zustande der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wofern er nicht durch einwirkende Kräfte genöthigt wird, seinen Zustand zu ändern. — Dieses Trägheitsgesetz hat schon der berühmte Begründer der Dynamik, Galilei*) (geb. 1564, gest. 1642), gekannt, wenn er auch demselben noch nicht in der erforderlichen Genauigkeit, Klarheit und Allgemeinheit Ausdruck gegeben hat.

Anmerkung. Streng genommen hat das Grundgesetz der Trägheit seine volle Giltigkeit nicht für die relativen Bewegungen in Bezug auf die Erde, sondern nur für die Bewegungen in Bezug auf ein gewisses Achsensystem, das an der Rotation der Erde und an der Bewegung des Erdmittelpunktes in der Ekliptik nicht theilnimmt. Da jedoch die relativen Bewegungen bezüglich der Erde, welche nahezu lediglich in diesem Lehrbuche zur Betrachtung gelangen, alle aus dem für diese relativen Bewegungen als strenggiltig vorausgesetzten Trägheitsprincipe abgeleiteten Gesetze und Schlussfolgerungen wegen der verhältnismässig geringen Dauer und Ausdehnung der bei weitem meisten in diesem Lehrbuche behandelten irdischen Bewegungen derart geringe Abweichungen von den thatsächlichen Bewegungserscheinungen darbieten, dass von denselben füglich vollständig abgesehen werden kann, so soll auf die subtilen Untersuchungen über die strenge Giltigkeit des Trägheitsgesetzes hier nicht weiter eingegangen werden.

Um auch zum Theilbegriffe für die Zeitgrößen zu gelangen, denke man sich von zwei beliebigen Zeiten a und b irgend eine — gleichgiltig welche — etwa b ersetzt durch eine ihr gleiche, jedoch der Zeit a unmittelbar folgende Zeit c , so dass $b = c$ ist; man gelangt dadurch zu einer zwischen dem Anfange der Zeit a und dem Ende der Zeit c gelegenen Zeit s , als deren Theile oder — was dasselbe heißt — Summanden man die Zeiten a und b bezeichnet, während man die Zeit s die Summe von a und b nennt, so dass dann $s = a + b$ ist.

Es entspricht also bei der oben betrachteten gleichförmigen Bewegung eines Punktes der Summe der Wege stets auch die Summe der Zeiten.

Da demnach sowohl der Gleichheitsbegriff als auch der Begriff der Summe, respective des Theiles, und zwar in der von der allgemeinen Größenlehre geforderten Weise auf die Zeiten anwendbar ist, so ist dadurch nachgewiesen, dass jede Zeit eine Größe und folglich als solche auch durch entsprechende Zeiteinheiten messbar ist. Als gewöhnlichste Zeiteinheit dient eine Secunde (1^s) mittlerer Sonnenzeit.**)

*) Galilei, „Discorsi e dimonstracioni matematiche“ (Leyden 1638).

**) In der früheren Auflage dieses Lehrbuches ist hier ein Abschnitt eingeschaltet, welcher die Zeitmessung und die gegenseitigen Beziehungen von Sternzeit, wahrer und mittlerer Sonnenzeit behandelt.

§ 2. Die graphische Darstellung der Grössen.

So wie man sich zur bildlichen Darstellung der äußeren Natur- und Kunstgegenstände der graphischen Methoden bedient, welche zu einer mehr oder weniger klaren Vorstellung des durch dieselben versinnlichteten Gegenstandes führen, sobald nur der Maßstab, in welchem das Bild angefertigt ist, also die Beziehung zwischen der Länge irgend einer Linie des Bildes zu dem durch diese Linie dargestellten Gegenstande bekannt ist, so bedient man sich auch in analoger Weise in der Mechanik und den anderen angewandten mathematischen Disciplinen meistens der graphischen Darstellung, beziehungsweise Versinnlichung der verschiedenen zur Behandlung kommenden Grössen. Man stellt nämlich irgend eine der darzustellenden Grössen a (z. B. die Zeit a , die Kraft a u. s. w.) durch irgend eine willkürlich gewählte geometrische Grösse l (z. B. Strecke, Winkel, Fläche) und alle anderen darzustellenden Grössen der ersten Art (Zeiten, Kräfte u. s. w.) durch proportionale geometrische Grössen der zweiten Art (Strecken, Winkel) dar, so dass, wenn die beliebige Grösse der ersten Art A durch L dargestellt ist, das Verhältnis $A:a$ gleich ist dem entsprechenden Verhältnisse $L:l$, also stets die Proportion besteht:

$$A : a = L : l.$$

Je nachdem die Grössen A und a , respective die Grössen L und l , commensurabel oder incommensurabel sind, ist das Verhältnis $A:a$ eine rationale (ganze oder gebrochene) oder aber eine irrationale Zahl.

Wenn man die willkürlich gewählte Grösse a zur Einheit der darzustellenden Grössenart und die ebenfalls willkürlich gewählte Grösse l zur Einheit der zur Darstellung dienenden geometrischen Grössen wählt, so hat die letztere Proportion (Gleichung) keinen anderen Sinn als den, dass die Maßzahl der beliebigen Grösse A gleich ist der Maßzahl der geometrischen Grösse L .

Zur graphischen Darstellung der verschiedenen Grössen irgend einer beliebigen Art haben demnach solche geometrische Grössen zu dienen, die den ersteren direct proportional sind oder — was bei entsprechender Wahl der Einheiten dasselbe besagt — solche Grössen, die dieselbe Maßzahl haben.

Vor allen anderen geometrischen Darstellungen wird die Darstellung der Grössen durch gerade Linien (Strecken) benützt, da diese die einfachste und deutlichste ist.

So wird z. B. die Zeiteinheit a , etwa 1 Secunde durch eine willkürliche Länge l dargestellt und eine beliebige andere Zeit A von t Secunden durch eine Länge L , die aus der Proportion $A:a = L:l$ sich ergibt, so dass die Maßzahl von L , wofern l zur Längeneinheit und eine Secunde zur Zeiteinheit gewählt wird, ebenfalls t

ist, also z. B. die Secundenanzahl t mit der Anzahl der in L enthaltenen Längeneinheiten l (z. B. Centimetern) identisch ist.

Anmerkung. So wie es offenbar nicht gestattet ist, ein Bild mit dem abgebildeten Gegenstande zu identificieren, so ist es auch absolut nicht gestattet, die Größe (Zeit, Kraft u. s. w.) A zu identificieren mit der Länge L . Nichtsdestoweniger wird gerade so, wie man in der allgemeinen Sprachweise von einem Bilde stets so spricht, als wäre dies der dargestellte Gegenstand selbst, auch hier meist zur Abkürzung der Rede statt der strenggenommen anzuwendenden Ausdrücke „die durch die Länge L dargestellte Zeit, Kraft u. s. w.“ oder der gleichbedeutenden Ausdrücke „die Zeit, Kraft u. s. w., welche dieselbe Maßzahl hat wie die Länge L “, „die Zeit, Kraft u. s. w., welche sich zu der Zeiteinheit, beziehungsweise Kräfteinheit a so verhält wie die Länge L zur Längeneinheit l “, „die der Länge L proportionale Zeit, Kraft“ u. s. w. kurzweg der minder richtige Ausdruck angewendet „die Zeit L , die Kraft L u. s. w.“ Auch wir werden uns dieser kürzeren Ausdrucksweise, da dieselbe allgemein üblich ist, bedienen, jedoch stets unter dem Vorbehalte des in diesem Paragraphen erörterten Sinnes.

§ 3. Bewegungszustand eines Punktes.

Ist die — im allgemeinen krummlinige — Bahn eines Punktes bekannt, was hier vorausgesetzt werden soll, so ist die augenblickliche Lage M dieses Punktes zu irgend einer Zeit t (t von tempus = Zeit) offenbar bestimmt durch den Weg s (s von spatium = Raum, Weg) desselben, d. i. durch die Länge des Bahntheiles, der zwischen dieser Lage und einem bestimmten Punkte O der Bahn, dem sogenannten Anfangspunkte des Weges, der willkürlich gewählt werden kann, gelegen ist — vorausgesetzt, dass durch das Vorzeichen des Weges s gekennzeichnet ist, ob sich M auf jener Seite des Anfangspunktes O , die als die positive angenommen wird, oder aber auf der entgegengesetzten, negativen Seite des letzteren befindet.

Die Zeit t wird meist positiv in Rechnung gebracht und am einfachsten, wie wir es auch meist thun wollen, von dem Momente — dem Zeitanfangspunkte — an gerechnet, in welchem sich der bewegliche Punkt in O befindet, so dass für $t = 0$ auch $s = 0$ ist.

Anmerkung. Durch t und s , τ und σ u. s. w. sind hier und auch stets in der Folge unbenannte, theils rationale, theils irrationale Zahlen, nämlich die Maßzahlen der Zeit und des Weges bezeichnet, wobei stets angenommen werden muss, dass die entsprechenden Einheiten, also die Zeiteinheit, die Längeneinheit u. s. w. ein- für allemal gegeben und für alle in derselben Untersuchung vorkommenden Zeiten, Wege u. s. w. dieselbe ist. Bloß der Kürze der Rede wegen sollen stets künftighin statt der correcten Ausdrücke: Maßzahl der Zeit, des Weges, der Geschwindigkeit, der Kraft u. s. w. kurzweg die minder correcten Worte: Zeit, Weg, Geschwindigkeit, Kraft u. s. w. zur Anwendung gelangen.

Als Bewegungsrichtung des Punktes M zur Zeit t bezeichnet man die Richtung von M nach jenem Nachbarpunkte der Bahn, in welchem sich das Bewegliche in dem der Zeit t unmittelbar

folgenden Zeitpunkte befindet: dieselbe stimmt demnach bei einer geradlinigen Bewegung mit einer der beiden Richtungen der geraden Bahn, bei einer krummlinigen Bewegung mit einer der beiden Richtungen der an die krumme Bahn im Punkte M geführten Tangente Mu (Fig. 1) überein.

Nimmt bei der Bewegung der algebraische Wert des Weges s zu, so dass sich der bewegliche Punkt entweder auf der negativen Seite von O dem Punkte O nähert oder auf der positiven Seite von demselben entfernt, so nennt man die Bewegungsrichtung positiv, im gegentheiligen Falle aber negativ.

So ist (Fig. 1), wenn OA als die positive, OA' als die negative Seite des Punktes O angenommen wird, bei der Bewegung von A'

über O nach A die Bewegungsrichtung z. B. Mu stets positiv, bei der Bewegung von A über O nach O' aber stets negativ.

Fig. 1.



Die Vergleichung

des Weges s mit der Zeit t führt zum Begriffe der Geschwindigkeit der Bewegung. Da nämlich bei irgend einer als gegeben vorausgesetzten Bewegungsform jeder Zeit t ein einziger, genau bestimmter Weg s entspricht, der mit t sich ändert, so ist s eine eindeutige Function von t , etwa $s = f(t)$, und es ist, wenn die Gestalt und Lage der Bahn und die Functionsform f , also die Art der Abhängigkeit des s von t gegeben ist, durch diese Gleichung $s = f(t)$ das Gesetz der Bewegung genau bestimmt. So ist z. B. beim freien Falle im luftleeren Raume, wie wir später sehen werden, $s = 4,9 t^2$, wofern die Secunde zur Zeiteinheit und 1 Meter zur Längeneinheit gewählt und die relative Bewegung zur Erde in Betracht gezogen wird.

Hat die Zeit t um das — naturgemäße positive — Zeitelement τ zugenommen, so ist das Bewegliche etwa nach M' gelangt, und der Weg s hat sich um σ geändert, wo σ positiv oder negativ ist, je nachdem die Bewegung innerhalb dieses Zeitelementes τ in positiver oder negativer Richtung stattfindet.

Da demnach bei der — in ihrem ganzen Verlaufe durch die Gleichung $s = f(t)$ charakterisierten — Bewegung der Zeit $t + \tau$ der Weg $s + \sigma$ entspricht (da man bei der Anwendung der letzten Gleichung $s = f(t)$, wenn für $t = 0$ auch $s = 0$ ist, Weg und Zeit stets von O aus zu rechnen hat), so muss auch $s + \sigma = f(t + \tau)$ sein. Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{f(t + \tau) - f(t)}{\tau}$$

Führt man nun, da die Functionsform $f(t)$ für die ins Auge gefasste besondere Bewegungsform als bekannt vorausgesetzt werden muss, die in dem rechten Theile der Gleichung angedeuteten Operationen aus, so ergibt sich für $\frac{\sigma}{\tau}$ ein Ausdruck, in welchem t und τ vorkommen. Nimmt man nun in diesem Ausdrücke τ immer kleiner und kleiner an, so dass τ gegen Null convergiert, so nähert sich dieser Ausdruck einem bestimmten, bloß von t allein abhängigen Grenzwerte v , den man als die Maßzahl der Geschwindigkeit des Beweglichen zur Zeit t bezeichnet. So ergibt sich z. B. für den freien Fall aus $s = 4.9 t^2$ auf die angeführte Weise die Gleichung

$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{4.9 (t + \tau)^2 - 4.9 t^2}{\tau} = 9.8 t + 4.9 \tau$$

und als Grenzwert (limes) dieses Ausdruckes für $\tau = 0$

$$v = \lim \frac{\sigma}{\tau} = 9.8 t.$$

Demgemäß hat man bei irgend einer Bewegung eines Punktes als Geschwindigkeit v (v von *velocitas* = Geschwindigkeit) zu irgend einer Zeit t zu bezeichnen „das Verhältnis des Wegelementes σ , welches in dem der Zeit t unmittelbar folgenden (oder unmittelbar vorangehenden) unendlich kleinen Zeitelemente τ zurückgelegt wird, zur Größe dieses Zeitelementes τ “ oder in Worten der höheren Analysis gesprochen „den Differentialquotienten (die erste Ableitung oder Derivation) des Weges genommen nach der Zeit, d. i. $v = \frac{ds}{dt}$ “.

Dieser Geschwindigkeitswert ist offenbar bei einer in positiver Richtung stattfindenden Bewegung, da in diesem Falle der algebraische Wert von s stets zunimmt, positiv, bei einer Bewegung in negativer Richtung dagegen negativ und behält für einen ruhenden Punkt den Wert Null. Außer diesem letzteren Falle erlangt eine veränderliche Geschwindigkeit den Wert Null beim Übergange aus dem positiven ins negative Gebiet oder umgekehrt, d. i. in dem Momente, in welchem die Bewegungsrichtung in die entgegengesetzte übergeht.

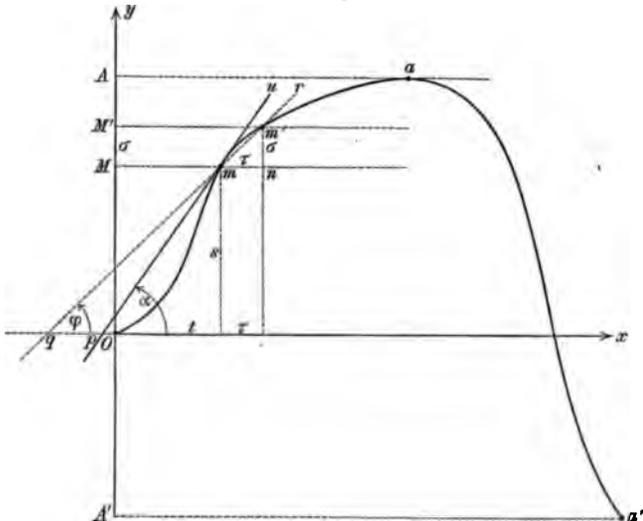
Es ist auch klar, dass im Falle einer gleichförmigen Bewegung, d. i. einer solchen, bei welcher in gleichen Zeiten gleiche Wege zurückgelegt werden, bei welcher sonach s der Zeit t direct proportioniert ist, der Quotient $\frac{\sigma}{\tau}$, daher auch die Geschwindigkeit v einen constanten Wert haben müsse, der in der Folge meist durch c (*celeritas constans* = constante Geschwindigkeit) bezeichnet sei, zum Unterschiede von v (*variabilis velocitas* = veränderliche Geschwindigkeit).

Dass der Geschwindigkeitswert v , da die Maßzahlen s und t wesentlich von der Wahl der Zeit- und Längeneinheit abhängen, auch von beiden diesen Einheiten abhängig ist, bedarf keiner näheren Auseinandersetzung. Gewöhnlich bezieht man die Geschwindigkeit auf die Secunde als Zeiteinheit und fügt, wenn eine andere Zeiteinheit bei der Bestimmung des Geschwindigkeitswertes zugrunde gelegt wird, die nähere Bezeichnung derselben hinzu und spricht so von der „Geschwindigkeit pro Minute“ u. s. w.

Unter Geschwindigkeitsrichtung versteht man die Richtung der Bewegung.

Um den für die Mechanik besonders wichtigen Begriff der „Geschwindigkeit“ noch klarer zu machen, sei das durch die Gleichung

Fig. 2.



$s = f(t)$ determinierte Bewegungsgesetz durch eine einfache Construction versinnlicht. Zu diesem Zwecke construere man jene ebene Curve, bei der im Sinne des § 2 die Zeit t durch die laufende Abscisse x dargestellt ist, so dass, wenn die die Zeiteinheit darstellende Strecke zur Längeneinheit gewählt wird, $x = t$ ist, während der der Zeit t entsprechende Weg s durch die zugehörige Ordinate y dargestellt, also $y = s$ ist. Die so erhaltene Curve, deren Gleichung $y = f(x)$, resp. $s = f(t)$ ist, ist die graphische Darstellung der in Rede stehenden Bewegung. Am einfachsten kann man diese Curve in folgender Weise erhalten: Man denke sich die thatsächliche Bahn $A'OMA$ (Fig. 1) ohne Änderung ihrer Länge gerade gestreckt und wähle die so erhaltene Gerade $A'OMA$ (Fig. 2) zur Ordinatenachse und O zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems;

während nun die wirkliche Bewegung längs der Ordinatenachse wie früher etwa von O über M nach A und zurück über O nach A' stattfindet, denke man sich die y -Achse stetig parallel zu sich fortbewegt, so zwar, dass der Punkt O derselben längs der positiven Hälfte der Abscissenachse sich gleichförmig fortbewegt und in jeder Zeiteinheit einen Weg, der der Längeneinheit gleich ist, zurücklegt. Es beschreibt dann offenbar das Bewegliche jene Curve $Omaa'$ (Fig. 2), deren Gleichung $y = f(x)$, resp. $s = f(t)$ ist.

Wir wollen diese Curve, da die Abscissen derselben die Zeiten und die Ordinaten die Wege darstellen, künftighin kürzlicher als „Zeitwegcurve“ bezeichnen. Diese Curve gestattet nun, nicht nur die Lage des Beweglichen zu jeder Zeit, sondern auch die Geschwindigkeit desselben zur beliebigen Zeit t auf einfache Weise zu bestimmen. Sind nämlich m und m' (Fig. 2) die den Zeiten t und $t + \tau$, also den Punkten M und M' der Fig. 1 entsprechenden Punkte der Zeitwegcurve und φ der Winkel, den die Secante $qmm'r$ mit der positiven Abscissenachse einschließt, so ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreiecke $m'mn$, dass $\frac{\sigma}{\tau} = \text{tg}(m'mn) = \text{tg } \varphi$ ist. Der Grenzwert des Winkels φ , wenn τ gegen Null convergiert, ist aber der Winkel α , den die im Punkte m der Zeitwegcurve an die letztere geführte Berührungsgerade pmu mit der x -Achse bildet. Wenn man demnach in der letzten Gleichung zu den Grenzwerten übergeht, so gelangt man zu der Gleichung $v = \lim_{\tau=0} \frac{\sigma}{\tau} = \text{tg } \alpha$, welche lehrt, dass stets die trigonometrische Tangente des Richtungswinkels α der Berührungsgeraden in einem beliebigen Punkte der Zeitwegcurve den Geschwindigkeitswert für den entsprechenden Punkt der Bahn angibt. Dadurch ist der Geschwindigkeitsbegriff klar veranschaulicht.

So ist die dem freien Falle von O aus längs der verticalen Achse Oy (Fig. 3) entsprechende Zeitwegcurve, deren Gleichung, wie früher, $s = 4.9 t^2$ ist, eine Parabel, deren Scheitel O , deren Achse die Bahn des Punktes und deren Parameter $\frac{1}{4.9} = 0.204$ Meter ist. Die Geschwindigkeit im Punkte M ist in diesem Falle ausgedrückt durch $\text{tg } \alpha = v = 9.8 t$, woraus sich α und v für jeden Wert der Zeit t berechnen lassen.

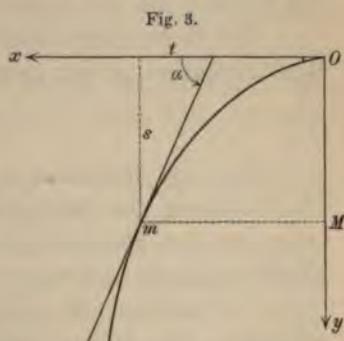


Fig. 3.

Anmerkung. Die Zeitwegcurve findet mannigfache Anwendung bei physikalischen Messungen, wo man mit Hilfe entsprechender Apparate den beweglichen Punkt diese Curve in Wirklichkeit construieren lässt, um aus der erhaltenen

Construction die Bewegungsgesetze kennen zu lernen; so ist dies z. B. der Fall bei den Phonautographen, Chronographen, den selbstregistrierenden Fallapparaten, Barometrographen u. s. w. Mit Hilfe dieser Curve lässt sich auch z. B. der Gang aller der auf irgend einer Strecke gleichzeitig verkehrenden Eisenbahnzüge, der Zeitpunkt und Ort ihres Zusammentreffens, ihre Geschwindigkeit u. s. w. sehr genau in einer leicht ersichtlichen Weise im entsprechend verkleinerten Maßstabe durch ein Diagramm graphisch darstellen.

Ist die Geschwindigkeit v constant, also $v = c$, so behält auch α für einen jeden Punkt der Zeitwegcurve den gleichen Wert, was offenbar nur dann möglich ist, wenn die Curve in eine Gerade übergeht, die, weil für $s = 0$ auch $t = 0$ ist, zudem durch den Anfangspunkt O geht. Es ist dann $y = x.tg \alpha = x.c$, daher auch $s = c.t$, somit s direct proportional zu t , d. h. während der ganzen Bewegung werden in gleichen Zeiten stets gleiche Wege zurückgelegt, die Bewegung ist mit anderen Worten eine gleichförmige.

Den in irgend einer Zeit t durch die augenblickliche Bewegungsrichtung (Geschwindigkeitsrichtung) und den augenblicklichen Geschwindigkeitswert v charakterisierten Zustand des Beweglichen bezeichnet man als den Bewegungszustand desselben zur Zeit t .

Demgemäß bleibt der Bewegungszustand eines Punktes nur dann ungeändert, wenn sich weder die Bewegungsrichtung, noch die Geschwindigkeit desselben ändert, sich also der Punkt längs einer Geraden und zudem gleichförmig bewegt.

Wenn sich aber entweder die Bewegungsrichtung stetig ändert, sich also der Punkt in einer krummen Bahn bewegt — oder wenn sich die Geschwindigkeit stetig ändert, die Bewegung des Punktes also eine ungleichförmige ist — oder aber, was meist stattfindet, wenn beides der Fall ist, der Punkt sich nämlich in einer Curve und zudem ungleichförmig bewegt, so muss auch der Bewegungszustand des Punktes als ein veränderlicher bezeichnet werden.

Der Bewegungszustand eines Körpers ist bestimmt durch den Bewegungszustand der einzelnen materiellen Punkte desselben.

§ 4. Kraft.

Wie aus dem im § 1 erörterten Principe der Trägheit folgt, ist die Änderung des Bewegungszustandes eines materiellen Punktes m stets nur den gleichzeitigen sich nicht das Gleichgewicht haltenden Einflüssen eines oder mehrerer anderer gleichzeitig anwesender Körper (oder Körperelemente) $a b c$ u. s. w. eines Körpersystems K zuzuschreiben, die infolge gewisser (hier nicht näher zur Erörterung kommender) Zustände auf den materiellen Punkt m im allgemeinen derart einwirken, dass entweder dessen Geschwindigkeit oder dessen Bewegungsrichtung oder in den meisten Fällen beides, nämlich sowohl die Größe, als auch die Richtung der Geschwindigkeit sich ändert.

Die besondere Art und Weise dieser Änderung des Bewegungszustandes ist abhängig nicht nur von dem materiellen Punkte m , sondern kann auch bei demselben materiellen Punkte m sehr mannigfaltig sein — je nach der Anzahl, ferner je nach der relativen Lage der Körper (oder Körperelemente) $a b c$ u. s. w. zueinander und zum Achsensystem A (Punktsystem S), auf welches die Lagen bezogen werden, und je nach der besonderen Art und dem Grade der Zustände (z. B. der magnetischen, elektrischen Zustände, der Bewegungszustände u. s. w.) dieser Körper. Diesen von der Einwirkung eines oder mehrerer Körper (oder Körperelemente) $a b c$ u. s. w. eines Systems K und ihrer besonderen Zustände herrührenden Einfluss auf die Änderung des Bewegungszustandes eines materiellen Punktes m bezeichnet man als „bewegende Kraft“ oder kurzweg als die auf den Punkt m einwirkende „Kraft“ und den materiellen Punkt m als deren Angriffspunkt. Die Richtung, in welcher sich der materielle Punkt m , wenn derselbe ruhend wäre, unter der alleinigen Einwirkung dieser Kraft zu irgend einer Zeit t in Bewegung setzen würde, indem er dann längs irgend einer Bahn sich bewegen würde, also jene Richtung, welche, wenn auch diese Bahn krummlinig sein sollte, mit einer Richtung der an die Bahn des ursprünglich ruhenden Punktes im Ausgangspunkte derselben geführten Tangente übereinstimmen würde, nennt man die Richtung der Kraft zur Zeit t .

Den in einer bestimmten Änderung des Bewegungszustandes des Angriffspunktes sich manifestierenden Einfluss mehrerer gleichzeitig auf den Angriffspunkt m einwirkender Körper (oder Körperelemente) $a b c$ u. s. w. und deren Zustände bezeichnet man als die resultierende Kraft, Mittelkraft oder kurzweg die Resultierende (Resultante) R im Gegensatze zu den Einflüssen der einzelnen Körper (Körperelemente) $a b c$ u. s. w. oder deren einzelner Zustände, wenn dieselben (oder einige derselben) für sich allein vorhanden sind, demnach allein einwirken, welche einzelnen Einflüsse den Namen: Componenten der Kraft R , die componentalen Kräfte oder Seitenkräfte der Kraft R führen.

Am anschaulichsten werden diese Begriffe, wenn man sich diese durch die Körper $a b c$ u. s. w. bewirkte Änderung des Bewegungszustandes des materiellen Punktes m etwa hervorgerufen denkt durch die Einwirkung eines entsprechenden fingierten (blos angenommenen) Zustandes eines einzigen fingierten materiellen Punktes m' , der etwa in der Richtungslinie der Kraft R gelegen ist, und ebenso erleichtert man sich anderseits in den meisten Fällen die Untersuchungen, wenn man statt der thatsächlich einwirkenden Kräfte (beziehungsweise ihrer Resultanten) fingierte Zustände gewisser anderer in passenden Lagen gewählter materieller Punkte $a' b' c'$ u. s. w. annimmt, die — voraus-

gesetzt, dass deren Einflüsse den später zu deducierenden Gesetzen entsprechen — infolge ihrer gleichzeitigen Einwirkung auf den Bewegungszustand des Punktes m denselben Einfluss nehmen würden, wie die thatsächlichen Kräfte, wobei man z. B. den Vortheil hat, dass die Richtungen dieser fingierten Componenten, von welchen in der Mechanik ein ausgedehnter Gebrauch gemacht wird, dem Zwecke einer einfachen Behandlung entsprechend gewählt werden können.

Den Inbegriff mehrerer gleichzeitig auf denselben Angriffspunkt oder auf die einzelnen materiellen Punkte desselben Körpers einwirkender Kräfte nennt man ein Kraftsystem (Kräftesystem).

Im Falle der gleichzeitigen Einwirkung mehrerer Kräfte eines Kräftesystems kann es aber (vergl. § 1) vorkommen, dass die Wirkung einer Kraft auf den ruhenden Körper durch die Wirkung der anderen Kräfte des Kräftesystems derart paralysiert wird, dass sich trotz des Vorhandenseins von Kräften der Ruhezustand der einzelnen Punkte des Körpers nicht ändert. In diesem Falle sagt man (vergl. § 1): „die Kräfte des Kraftsystems halten sich an dem Körper das Gleichgewicht“.

Bewirken zwei verschiedene Kräftesysteme (bezw. Kräfte) dieselbe Änderung desselben Bewegungszustandes eines Punktes, beziehungsweise der einzelnen Punkte desselben Körpers, oder halten sich sowohl die Kräfte des einen Kräftesystems, als auch jene des zweiten Kräftesystems an demselben Körper das Gleichgewicht, so werden diese beiden Kräftesysteme (bezw. Kräfte) äquivalente (gleichwertige) Kräftesysteme (bezw. äquivalente Kräfte) genannt.

Zwei Kräfte werden dann als gleich bezeichnet, wenn sie, wofern sie auf denselben materiellen Punkt desselben Körpers nach derselben Richtung einwirken, einander äquivalent sind. Wirken jedoch die Kräfte auf verschiedene Angriffspunkte m und m' ein, so ist die Annahme der Gleichheit jedenfalls dann gerechtfertigt, wenn die in folgender Erklärung ausgesprochene besondere Bedingung erfüllt ist:

Sind zwei auf verschiedene materielle Punkte m und m' einwirkende gleichgerichtete Kräfte P und P' einzeln imstande, dasselbe System von — auf einander und auf den Punkt m , bez. m' einwirkenden — materiellen Punkten (bezw. Körpern), deren Zustände in beiden Fällen dieselben sind, in derselben relativen Lage der Punkte dieses Systems zu einander und zum Punkte m , bez. m' im Gleichgewichte zu erhalten, so dass nach einfacher Ersetzung von m durch m' das Gleichgewicht in keiner Weise gestört wird, so sind die Kräfte P und P' als gleich zu bezeichnen. (Im übrigen sei auf spätere Entwicklungen hingewiesen.)

So sind z. B. die Gewichte zweier Körper m und m' gleich zu nennen, wenn sie bei derselben Wage und demselben Gegengewichte

an demselben Orte der Erde (im Ruhestande der Wage) den gleichen Ausschlag bedingen — oder, falls die Wage eine Federwage ist, die Feder derselben in genau gleicher Weise auszudehnen, beziehungsweise zusammenzudrücken, kurz dieselbe Deformation der elastischen Feder hervorzubringen imstande sind.

Der Begriff der Gleichheit schließt keinesfalls jenen der Identität in sich, denn es können die beiden gleichen Kräfte verschiedenen Ursprungs und die durch die Zustände der Körper mitbedingten anderen gleichzeitigen Erscheinungen (z. B. die etwaigen Licht-, Wärmeerscheinungen u. s. w.) verschieden sein; so kann z. B. eine magnetische oder elektrische Kraft gleich sein einer Schwerkraft, die fernwirkende Kraft des den metallischen Schließungsdraht erwärmenden elektrischen Stromes gleich dem hydrostatischen Drucke einer ruhenden Wassersäule u. s. w.

Auch in dem Falle, in welchem die Kräfte eines Kräftesystems auf verschiedene materielle Punkte desselben Körpers einwirken, gibt es mitunter eine dem Kräftesystem äquivalente Einzelkraft, die man dann ebenfalls als Resultante der Kräfte des Kräftesystems und diese als die Componenten der ersteren bezeichnet.

Die Aufgabe der Bestimmung der Resultante R , wenn die Componenten gegeben sind, führt den Namen der Zusammensetzung der letzteren Kräfte zu einer Resultierenden, während die umgekehrte Aufgabe die „Zerlegung der Kraft R in ihre Componenten“ heißt.

Die bei der letzteren Aufgabe zu bestimmenden Componenten sind zumeist, wie dies schon früher bemerkt wurde, fictive Kräfte, und die Einführung derselben hat bloß den Zweck der Vereinfachung der Untersuchungen.

Auch die Kräfte bilden eine Größenart, indem auf dieselben nicht nur, wie dies gezeigt wurde, der Begriff der Gleichheit, sondern auch der Begriff des Theiles in Anwendung gebracht werden kann.

Wirken nämlich auf denselben Angriffspunkt m nach derselben Richtung gleichzeitig mehrere Kräfte ein, so bezeichnet man ihre Resultierende als die Summe derselben und diese einzelnen Kräfte selbst als die Theile oder Summanden der resultierenden Kraft.

Kräfte addieren hat demnach keinen anderen Sinn, als dieselben *a)* gleichzeitig, *b)* nach derselben Richtung und *c)* auf denselben Angriffspunkt wirken zu lassen.

Da nach dem Gesagten eine jede Kraft als eine Größe zu betrachten ist, so sind die Kräfte auch durch eine beliebige Kraft, die dann als Krafteinheit zu bezeichnen ist, messbar, und zwar soll stets vorausgesetzt werden, dass sich die Maßzahlen aller Kräfte, die in irgend einer der folgenden Untersuchungen zur Betrachtung kommen, auf dieselbe Krafteinheit beziehen. Je nachdem die zu

messende Kraft P (P von Pondus = Gewicht) und die Kräfteinheit commensurabel sind oder nicht, ist die Maßzahl von P rational oder irrational.

Zur Bestimmung der Kraft dienen drei Merkmale: *a*) ihr Angriffspunkt, *b*) ihre Richtung, *c*) ihre Intensität oder Größe, welche bei gegebener Kräfteeinheit durch die Maßzahl der Kraft bestimmt ist.

Zur graphischen Darstellung der Kraft in dem im § 2 erörterten Sinne dienen fast ausschließlich gerade Linien, zumal da diese außer den im § 2 erwähnten Vortheilen noch weiterhin gestatten, in ihrer vom Anfangspunkt der Linie (Strecke) nach deren Endpunkte gehenden Richtung auch die Krafrichtung darzustellen. Gebraucht man für die gleichzeitig einwirkenden Kräfte, wie es der Einfachheit halber meist geschieht, die Zeichen $P_1 P_2 P_3$ u. s. w., so wird der Endpunkt jener Strecke, welche die Kraft P_n repräsentiert, meist mit jener ganzen Zahl n bezeichnet, die dem Index der Kraft gleich ist, und der Anfangspunkt mit der um 1 kleineren Zahl $n-1$. Zudem wird bei der Benennung der Strecke, um sofort die Krafrichtung erkennen zu lassen, der Anfangspunkt zuerst genannt, so dass z. B. die Linien 01 und 10 die entgegengesetzt gerichteten an Größe gleichen Kräfte P_1 und $-P_1$ repräsentieren. Öfters wird auch der Anfangspunkt der die Kraft repräsentierenden Linie in den Angriffspunkt der Kraft verlegt, so dass dann die graphische Darstellung alle drei Merkmale der Kraft erkennen lässt.

Eine Kraft kann entweder ihre Größe (daher auch ihre Maßzahl) während der Bewegung des materiellen Punktes stets beibehalten, und dieselbe wird dann eine constante Kraft genannt, oder es ändert sich die Intensität derselben auf irgend eine Weise — zumeist nach einem bestimmten Gesetze — und es wird dann die Kraft als nicht constante, als veränderliche (variable) Kraft bezeichnet.

§. 5. Princip der unveränderlichen relativen Wirkung. Princip der Wechselwirkung.

a) Princip der unveränderlichen relativen Wirkung.

Bisher wurde stets vorausgesetzt, dass die Bewegung des materiellen Punktes m , die stets durch die Änderung der Coordinaten bestimmt ist, sich immer auf dasselbe an der Bewegung des materiellen Punktes nicht theilnehmende Achsensystem A (bez. Punktsystem S) beziehe.

Die Art und Weise dieser Bewegung, demnach auch die Art und Weise der aufeinander folgenden Bewegungszustände ist bei einer und derselben Bewegung desselben Punktes offenbar wesentlich bedingt

durch die Wahl dieses Achsen-, beziehungsweise Punktsystems. Für ein anderes Achsensystem a (bezw. Punktsystem s) werden die zur selben Zeit stattfindenden Bewegungszustände desselben Punktes m sicherlich dann andere sein, wenn sich die gegenseitige Lage des Achsensystems A zum Achsensystem a während der Bewegung des materiellen Punktes ändert, also das Achsensystem A sich bezüglich des Achsensystems a in Bewegung befindet.

Es ist demnach der Begriff der Kraft, da derselbe auf jenen des Bewegungszustandes gegründet ist, bloß ein relativer Begriff — ebenso wie jener der Bewegung — und es wird die Kraft, zu deren Determination das bewegliche System A (bezw. S) gewählt wurde, als relative Kraft (in Bezug auf A , bezw. S) bezeichnet, um sie von der auf ein anderes System, z. B. das System a (bezw. s) bezüglichen Kraft zu unterscheiden.

Die Bewegung des Punktes m bezüglich des Systems a (bezw. s) bezeichnet man als eine zusammengesetzte oder resultierende Bewegung aus der relativen Bewegung des Punktes m bezüglich des Systems A (bezw. S) und aus der Bewegung dieses Achsensystems A (bezw. Punktsystems S) in Bezug auf das System a (bezw. s) und bedient sich, um diese Thatsache kurz auszudrücken, der Ausdrucksweise „es nehme der Punkt m an den beiden letzteren (componentalen) Bewegungen gleichzeitig theil“.

Die relative Bewegung bezeichnet man oft als scheinbare Bewegung, weil dieselbe einem Beobachter, der an der Bewegung des Punktsystems S theilnimmt, als wirkliche Bewegung erscheint.

So ist z. B. die Bewegung eines fallenden Steines bezüglich des Fixsternsystems s als zusammengesetzt anzusehen aus der relativen Bewegung des Steines bezüglich der Erde S (d. i. aus der scheinbaren Bewegung des freien Falles) und aus der Bewegung der Erde S in Bezug zu dem Fixsternsystem s — und diese letztere ist wiederum zusammengesetzt aus der rotierenden Bewegung der Erde um ihre Achse, deren Periode ein Sterntag ist, ferner aus der der Bewegung des Erdmittelpunktes in der Ekliptik entsprechenden Bewegung u. s. w.

Es werde nun die relative Bewegung eines materiellen Punktes m — statt auf das beliebige Punktsystem S — auf jenen Körper, beziehungsweise jenes Körpersystem K (vergl. § 1 und 4) bezogen, welches infolge gewisser Zustände desselben die im vorigen Paragraph besprochene resultierende Einwirkung auf den Bewegungszustand des materiellen Punktes äußert. Im allgemeinen wird auch dieses Körpersystem K seine Lage zu dem zugrunde gelegten Achsensystem a nicht stets beibehalten, sondern wird verschiedene Lagen zu demselben annehmen oder sich bezüglich dieses Achsensystems bewegen.

In diesen Fällen nun besteht ein aus der Erfahrung auf dem Wege der Induction gewonnenes Grundgesetz, welches wir das Princip der unveränderlichen relativen Wirkung nennen wollen, und zwar lautet dieses: „Die relative Bewegung eines ursprünglich in relativer Ruhe befindlichen materiellen Punktes m bezüglich eines Körpersystems K , welches infolge seiner besonderen Zustände diese Bewegung des Punktes m beeinflusst, sonach auch die relative Kraft ist, wenn nur diese auf die Bewegungszustände des materiellen Punktes m Einfluss nehmenden Zustände des Körpersystems K die gleichen bleiben, bloß von der **relativen** Lage des Punktes m zu dem Körpersystem K abhängig und völlig unabhängig von der räumlichen Lage des Systems K und des materiellen Punktes m zu irgend einem beliebigen anderen Punkt, beziehungsweise Achsensystem.“

So ist z. B. die relative Bewegung des freien Falles, welche die Folge der Einwirkung der Erde K auf den fallenden Körper m ist, nicht abhängig von der Lage der Erde K und des fallenden Körpers m bezüglich der Sonne, der Fixsterne u. s. w., demnach auch nicht abhängig von der Jahres- und Tageszeit des freien Falles, sondern bloß abhängig von der relativen Lage des fallenden Körpers m zur Erde K , also von dem Orte an der Erdoberfläche, an welchem der freie Fall vor sich geht, von seiner geographischen Breite, seiner Höhe über der Meeresfläche u. s. w.

Das hier angeführte allgemeine Princip ist strenggenommen nur ein allgemeinerer Ausdruck des Gesetzes von der gegenseitigen Unabhängigkeit gleichzeitiger Bewegungen und des „zweiten Bewegungsgesetzes (lex motus)“ Newtons, welches letztere (in dem oberen allgemeineren Princip enthaltene) Gesetz Newton in seinem hochberühmten Werke „*Philosophiae naturalis principia*“ (1686) in folgende Worte kleidet: *Lex II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur.* Die Änderung der Bewegung ist der bewegenden Kraft proportional und geht längs der Geraden vor sich, in welcher die Kraft wirkt. — (Bezüglich der Ableitung des ersten Theiles dieses Gesetzes aus dem Principe der Trägheit und dem Principe der unveränderlichen relativen Wirkung sei auf § 34 verwiesen.)

Anmerkung. Aus dem Principe der unveränderlichen relativen Wirkung lässt sich sofort das im Laufe der historischen Entwicklung der Mechanik (vergl. Die Mechanik in ihrer Entwicklung, historisch-kritisch dargestellt von Dr. Ernst Mach, 3. Aufl., Leipzig 1897) oft zum Nachweise der Gesetze der Mechanik herangezogene Symmetriepincip folgern, welches letztere strenggenommen nichts anderes besagt, als dass, wenn zwei Kraftsysteme symmetrisch bezüglich einer Achse oder Ebene wirken, auch die resultierende Bewegung in beiden Fällen in gleicher Weise symmetrisch zu dieser Symmetriachse oder Symmetrieebene vor sich gehen müsse.

Mit Hilfe des Princips der unveränderlichen relativen Wirkung wird es möglich, die Bewegung eines materiellen Punktes, welcher der gleichzeitigen Einwirkung zweier oder mehrerer Kräfte oder dem gleichzeitigen Einflusse einer anfänglichen Geschwindigkeit und einer continuierlichen Kraft unterworfen ist, zu untersuchen.

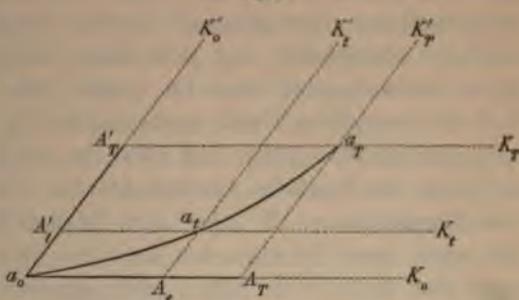
Es seien zu diesem Zwecke $a_o A_t, a_o A_T \dots$ (Fig. 4) die Wege, welche der ursprünglich zur Zeit $t = o$ in a_o ruhend (oder vielleicht im Besitze einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit von der Richtung $a_o A_t$) gedachte materielle Punkt in den Zeiten $t, T \dots$ unter der Einwirkung einer von

irgend einem Zustande des Körpersystems K herrührenden Kraft P zurücklegen würde, wenn diese Kraft allein einwirken würde (α) — und analog seien $a_o, A'_t, A'_T \dots$ die Lagen des materiellen Punktes in den Zeiten $o, t, T \dots$ wenn derselbe sich vom Ruhezustande

aus (oder mit irgend einer Anfangsgeschwindigkeit, deren Richtung $a_o A'_t$ ist) nur unter dem Einflusse einer von einem beliebigen zweiten Körpersysteme K' stammenden Kraft P' allein bewegen würde (β). — Es fragt sich nun, welche Bewegung resultieren wird, wenn beide Kräfte gleichzeitig einwirken.

Um diese Frage zu beantworten, denke man sich zunächst jene Bewegung (γ) des materiellen Punktes, die sich ergeben würde, wenn derselbe sowohl an der Bewegung eines Achsensystems A , bei welcher jeder Punkt desselben in den Zeiten $t, T \dots$ mit den früheren Bahnen $a_o A_t, a_o A_T$ parallele und congruente Bahnen beschreibt, theilnehmen, als auch gleichzeitig sich in Bezug zu dem Achsensystem A derart bewegen würde, dass die mit der früher genannten Bewegung $a_o A'_t A'_T$ übereinstimmende Bewegung seine relative Bewegung wäre. Es würde dann offenbar der Eckpunkt a_t des Parallelogramms $A'_t a_o A'_t$ die Lage des Beweglichen zur Zeit t und der Eckpunkt a_T des Parallelogramms $A'_T a_o A'_T$ die Lage desselben zur Zeit T sein und auf diese Weise aus der relativen Bewegung $a_o A'_T$ und der Bewegung $a_o A_T$ des Achsensystems A im allgemeinen eine Bewegung längs einer Curve $a_o a_t a_T$ resultieren (vergl. § 27). Zugleich werde vorausgesetzt, dass auch das Körpersystem K' gleichzeitig die Bewegung des Achsensystems A theilen würde, wodurch K' in den Zeitpunkten $o t T$ in gewisse Lagen $K'_o K'_t K'_T$ gelangt.

Fig. 4.



Genau dieselbe resultierende Bewegung längs der Curve $a_o a_t a_T$ würde sich für den materiellen Punkt auch ergeben, wenn ein Achsensystem A' , und zwar — wie hier vorausgesetzt werden soll — zugleich mit dem Körpersystem K sich parallel zu $a_o A'_t A'_T$ in einer der früheren analogen Weise bewegt, wodurch K in irgend welche Lagen $K_o K_t K_T \dots$ gelangt, während der bewegliche Punkt sich gleichzeitig bezüglich dieses Achsensystems A' so bewegt, dass die andere Bahn $a_o A_t A_T$ zur relativen Bahn des Punktes wird (δ).

Da bei dieser fingierten resultierenden Bewegung (δ) längs der Bahn $a_o a_t a_T \dots$ die relative Lage des Körpersystems K zum materiellen Punkte in jedem Zeitpunkte dieselbe wäre, wie bei der ursprünglichen Bewegung (α) in der Geraden $a_o A_t A_T \dots$ in dem analogen Zeitpunkte und sich diese beiden letzteren Fälle lediglich darin unterscheiden, dass im ersten Falle (δ) das Körpersystem K und der bewegliche Punkt beide gleichzeitig nur noch an einer zweiten progressiven Bewegung, und zwar des Achsensystems A' theilnehmen, so muss die fragliche thatsächliche relative Bewegung bezüglich des Körpersystems K (also auch bezüglich des Achsensystems A'), die nach dem Principe der unabhängigen relativen Wirkung bloß von der relativen Lage des materiellen Punktes zum Körpersysteme K und keineswegs von der veränderlichen Lage beider zu den anderen Körper- und Punktsystemen abhängig ist, auch mit der oben fingierten relativen Bewegung (δ) identisch sein. Ganz ebenso lässt sich nachweisen, dass die oben ganz willkürlich angenommene relative Bewegung (γ) bezüglich des Achsensystems A übereinstimmen muss mit der wirklichen relativen Bewegung zu diesem Achsensystem A , so dass die aus den obigen Annahmen (γ) oder (δ) sich ergebende Bewegung in der Curve $a_o a_t a_T$ auch die thatsächliche resultierende Bewegung ist, wofern nur, wie oben (für γ) vorausgesetzt wurde, das Körpersystem K an der Bewegung des Achsensystems A theilnimmt, so wie auch (bei δ) K die Bewegung von A' theilt. Diese beiden letzteren Annahmen schließen offenbar, wenn die Kräfte P und P' continuierliche Kräfte sind, keine andere Bedingung in sich, als dass die Kraft P in dem beliebigen Punkte a_t dieselbe Richtung und Größe habe wie im entsprechenden Punkte A_t der ursprünglichen Bahn, und dass ebenso die Richtung und Größe der Kraft P' in dem beliebigen Punkte a_t dieselbe sei wie in A'_t u. s. w.

Dies letztere ist unter anderem sicher dann der Fall, wenn beide Kräfte P und P' — wenigstens für die Dauer der in Betracht gezogenen Bewegung — constante Kräfte von constanter Richtung sind. Unter dieser besonderen oder der früheren allgemeineren Bedingung ist demnach die Bewegung, die bei gleichzeitiger Einwirkung der Kräfte P und P' stattfindet, die aus den beiden

componentalen Bewegungen $a_o A_t A_T$ und $a_o A'_t A'_T$ zusammengesetzte Bewegung $a_o a_t a_T$, und man kann sich zur Bestimmung der Lage a_t des Beweglichen zu einer beliebigen Zeit t des in Fig. 4 verzeichneten Parallelogramms $a_o a_t$ des sogenannten Bewegungsparallelogramms oder Wegparallelogramms bedienen (vergl. § 27 und Fig. 40).

Dies ist das Grundgesetz der Zusammensetzung gleichzeitiger Bewegungen. Dasselbe lehrt, dass die gleichzeitigen Bewegungen von einander völlig unabhängig sind.

Wenn nun auch oben im besonderen vorausgesetzt wurde, dass die Kräfte P und P' ihre Richtungen nicht ändern, und dass die componentalen Bewegungen geradlinig sind, so kann doch das gewonnene Grundgesetz auch auf krummlinige Bewegungen und auf alle anderen continuierlichen Kräfte, deren Richtungen jedoch sich nicht sprungweise, sondern stetig ändern, in Anwendung gebracht werden, wofern man nur die Zeit in der früheren Betrachtung unendlich klein wählt; denn unter dieser Voraussetzung darf man auch die unendlich kleinen componentalen Wege als geradlinige Bahnelemente und die Richtungen der Kräfte während dieser unendlich kleinen Zeit als zu der ursprünglichen Richtung parallel bleibend betrachten. So kann man dann z. B. annehmen, dass das Körpersystem K die Lage K_o beibehalte, und dass trotzdem die Einwirkung von K_o auf a_t dieselbe sei wie von K_t auf a_t , sonach auch dieselbe wie jene von K_o auf A_t , ebenso dass K' in der Lage K'_o verharre und die Einwirkung von K'_o auf a_t dieselbe sei wie von K'_t auf a_t , demnach dieselbe wie die von K'_o auf A'_t u. s. w.

In ganz analoger Weise ist der Fall zu behandeln, in welchem der materielle Punkt unter dem gleichzeitigen Einflusse einer anfänglichen Geschwindigkeit c , deren Richtung $a_o A'_T$ (Fig. 4) ist, und der früheren continuierlichen Kraft P , die von dem Körpersystem K herührt, steht. In diesem Falle hat man nur unter K' sich das System der auf den materiellen Punkt einwirkenden Körper zu denken, deren Einflüsse sich das Gleichgewicht halten, so dass die unter diesen Einflüssen allein stattfindende Bewegung längs $a_o A'_t A'_T$ nach dem Trägheitsgesetze eine gleichförmige geradlinige Bewegung mit der constanten Geschwindigkeit c wäre, während $a_o A_t A_T$ die Bahn des Beweglichen darstellt, wenn dasselbe ursprünglich in Ruhe und nur durch die Kraft P allein beeinflusst sein würde. Im übrigen sind die früheren Untersuchungen und Folgerungen in gleicher Weise auch hier in Anwendung zu bringen. Es wird demnach auch in diesem Falle die stattfindende Bewegung die aus den beiden componentalen Bewegungen auf die früher besprochene Weise resultierende Bewegung längs der Curve $a_o a_t a_T$ sein, wofern nur die Zeit so klein ange-

nommen wird, dass man voraussetzen kann, dass sich die Kräfte des Körpersystems K' nicht nur in a_o, A'_t, A'_T , sondern auch in a_t und a_T das Gleichgewicht halten, dass ferner die Einwirkung von K_o auf a_t (bez. a_T) übereinstimmt mit jener von K_o auf A_t (bez. A_T).

Anmerkung. Das soeben aus dem Principe der unveränderlichen relativen Wirkung deducierte Grundgesetz der Zusammensetzung gleichzeitiger Bewegungen war schon Galilei bekannt, der dasselbe schon zur Untersuchung der Bahn geworfener Körper in Anwendung brachte (Galilei, „Discorsi e dimostrazioni matematiche“ etc., Leyden 1638).

Wie auf Grund der gewonnenen Ergebnisse in analoger Weise vorzugehen ist, wenn mehr als zwei Kräfte gleichzeitig auf den beweglichen materiellen Punkt einwirken oder noch zu diesen mehreren Kräften der Einfluss einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit hinzutritt, bedarf wohl keiner weiteren Auseinandersetzung. Stets ist das frühere Princip anwendbar.

Ist z. B. die resultierende Bewegung aus drei geradlinigen Bewegungen im Raume zusammengesetzt — welchen Fall man erhält, wenn man etwa die Gerade a_o, A_t in Fig. 4 zur x -Achse, a_o, A'_t zur y -Achse eines räumlichen Coordinatensystems annimmt und die Ebene der Fig. 4 (die $x y$ -Ebene), während der Punkt die frühere krumme Bahn a_o, a_t, a_T zurücklegt, parallel zu sich selbst derart bewegt, dass jeder Punkt dieser Ebene geradlinige Bahnen zurücklegt, die zu einer willkürlich im Raume angenommenen z -Achse, welche die beiden andern Achsen im Anfangspunkte a_o schneidet, parallel sind, so dass die x - und y -Achse parallel zu sich selbst sich verschieben — so wird die resultierende Bewegung, die dann im allgemeinen in einer räumlichen Curve a_o, a_t, a_T vor sich geht, analog zu behandeln sein wie in Fig. 4. Nur muss man ein drittes einwirkendes Punktsystem K'' für die componentale Bewegung parallel zur z -Achse voraussetzen, welches sich während der Bewegung der Punkte gleichzeitig parallel zur Curve a_o, a_t, a_T (Fig. 4) bewegt, während das Punktsystem K sich parallel zu jener Curve bewegt, die man erhält, wenn man die resultierende Bahn a_o, a_t, a_T durch parallel zur x -Achse geführte Gerade in die $y z$ -Ebene projiciert, und während sich ebenso K' parallel zur analogen Projection in die $z x$ -Ebene bewegt. Soll demnach die in Rede stehende Bewegung aus der gleichzeitigen Einwirkung der drei Systeme K, K' und K'' oder der analogen componentalen Kräfte X, Y und Z resultieren, so müssen diese drei Componenten stets zu den Richtungen der entsprechenden Achsen parallel bleiben und die X -Componente bei der componentalen Bewegung längs der x -Achse im Punkte A_t , dessen Coordinaten $(x o o)$ sind, genau denselben Wert haben, wie bei der resultierenden Bewegung im Punkte a_t , dessen Coordinaten $(x y z)$ sind; ebenso müssen die Y -Componenten in den

Punkten A_i und a_i , d. i. für $(o y o)$ und $(x y z)$ die gleichen sein und schließlich die Z -Componenten in den Punkten $(o o z)$ und $(x y z)$.

Wie umgekehrt bei der Zerlegung einer krummlinigen Bewegung in zwei oder mehrere geradlinige vorzugehen ist, ergibt sich aus dem Gesagten sofort.

Folgesätze: 1. Die Resultierende zweier oder mehrerer gleichgerichteter Kräfte, die auf denselben materiellen Punkt wirken, hat dieselbe Richtung wie die Componenten, und der resultierende Weg in einer beliebigen Zeit ist gleich der Summe der gleichzeitigen componentalen Wege.

2. Sind zwei auf einen materiellen Punkt m einwirkende Kräfte in einem besonderen Falle gleich, d. h. ist die im §. 4 besprochene Wirkung beider Kräfte in einem bestimmten Falle, etwa wenn der Punkt m ursprünglich in Ruhe ist, dieselbe, so muss sie auch in allen anderen Fällen die gleiche sein, d. h. in allen Fällen muss dann die durch die eine Kraft bewirkte Änderung des Bewegungszustandes des materiellen Punktes m völlig übereinstimmen mit der durch die andere Kraft bewirkten Zustandsänderung des Punktes m .

3. Halten sich von den n -Kräften eines Kraftsystems, die auf denselben materiellen Punkt einwirken, gewisse (etwa n') Kräfte das Gleichgewicht, so kann man unbeschadet der Wirkung der $(n-n')$ anderen Kräfte diese (n') Kräfte je nach Bedarf zu den letzteren hinzufügen oder aber als gar nicht vorhanden annehmen.

Anmerkung. Bevor noch auf das folgende Princip der Gegenwirkung übergegangen wird, sollte hier strenggenommen die Statik und Dynamik des freibeweglichen materiellen Punktes, deren Gesetze aus den beiden bisher erörterten Principen allein, wie dies der folgende Lehrgang zeigt, vollständig deduciert werden können, ihren Platz finden. Es behandelt nämlich das Gegenwirkungsprincip die Gleichheit zweier auf verschiedene materielle Punkte wirkende Kräfte, was (vergl. § 34) die Gleichheit der Producte aus Masse und Beschleunigung, also strenggenommen den Massenbegriff voraussetzt, der erst in der Dynamik des materiellen Punktes gewonnen wird. Es ist somit in dem nun folgenden zweiten Abschnitte *b*) dieses Paragraphs der Vorbehalt gemacht, dass der strenge Begriff der Gleichheit der Action und Reaction erst späterhin (nach dem § 34) zur vollkommenen Klarheit gelangt.

b) Princip der Gegenwirkung (Wechselwirkung).

Es wurde bisher bloß der Einfluss P der Zustände der auf denselben materiellen Punkt m einwirkenden anderen materiellen Punkte $m' m'' \dots$ auf den Bewegungszustand des ersteren allein in Betracht gezogen. Nun hat sich in allen den uns bekannt gewordenen unzähligen Thatsachen der Erfahrung das fundamentale Gesetz bewahrt, dass jeder Einfluss (Action) P irgend eines materiellen Punktes m' auf den Punkt m stets begleitet ist von einer Gegenkraft (Reaction) P' , mit welcher anderseits der Punkt m auf den Punkt m'

wirkt, und dass die letztere Kraft P' der ersteren Kraft P stets an Größe gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt ist.

Dieses Grundgesetz — das Princip der Gegenwirkung (*P. d. Wechselwirkung, P. d. Gleichheit von Action und Reaction*) genannt — wurde von Newton in folgender Weise ausgesprochen: *Lex III. Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi* = Der Wirkung ist immer entgegengesetzt und gleich die Gegenwirkung: oder die Wirkungen je zweier Körper aufeinander sind immer wechselweise gleich und nach entgegengesetzten Seiten gerichtet.

Dieses Naturgesetz war, bevor dasselbe von Newton in dessen „*Principia philosophiae naturalis*“ in dieser Allgemeinheit ausgesprochen wurde, in einzelnen seiner besonderen zahlreichen Erscheinungsformen Hooke (1674), Huyghens (geb. 1629, gest. 1695) u. a. bekannt.

Diesem Princip zufolge ist z. B. die Kraft, mit welcher die Erde von der Sonne, der fallende Stein von der Erde u. s. w. angezogen wird, der Gegenkraft gleich, mit der im ersten Falle die Sonne von der Erde, im zweiten die Erde vom fallenden Steine u. s. w. in entgegengesetzter Richtung gezogen wird; mit jener Kraft, mit welcher das Eisen vom Magnet angezogen, ein Magnetpol n von einem gleichnamigen zweiten Magnetpole n' , eine elektrische Masse e von einer gleichnamigen zweiten elektrischen Masse e' abgestoßen wird, wird auch umgekehrt der Magnet vom Eisen angezogen, der Pol n' von n , e' von e abgestoßen; mit der Intensität, mit welcher das Gewicht eines Körpers auf seine Unterlage drückt oder den Faden eines Senkels spannt, erfährt dieser Körper einen Gegendruck von der Unterlage, einen Gegenzug seitens des Fadens; stößt ein Körper a gegen einen ruhenden zweiten Körper b , so ist die Kraft des Stoßes stets entgegengesetzt gleich der Gegenkraft (Reaction), mit welcher der gestoßene Körper b auf den stoßenden a zurückwirkt u. s. w.

Sind m und m' zwei aufeinander gegenseitig einwirkende materielle Punkte, so sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden, nämlich es fallen entweder die Richtungen der beiden entgegengesetzt gerichteten Kräfte P und P' in eine und dieselbe Gerade, die dann mit der Geraden mm' übereinstimmt, und in diesem Falle sei die Wechselwirkung in der Folge stets als eine Wechselwirkung der ersten Art bezeichnet — oder aber die Richtungen der beiden gleichen Kräfte sind zwar entgegengesetzt, sie fallen aber mit mm' nicht in dieselbe Gerade, und in diesem Falle möge von einer Wechselwirkung der zweiten Art die Rede sein. Beispiele der ersten Art waren die früher erwähnten; dass es aber auch Wechselwirkungen

der zweiten Art geben kann, lehrt unter anderen das Beispiel der Einwirkung eines von einem elektrischen Strome durchflossenen geradlinigen unendlich kleinen Leiters (Stromelementes) auf den Pol einer Magnetnadel, in welchem Falle die Kräfte senkrecht zu der durch das Stromelement und den Magnetpol gelegten Ebene gerichtet sind.

Die Wechselwirkungen der ersten Art sind entweder Anziehungen (Attractionen) oder Abstoßungen (Repulsionen), je nachdem die beiden Kräfte P und P' die materiellen Punkte einander zu nähern oder aber von einander zu entfernen suchen.

Die Größe dieser Kräfte ist, wie schon im § 4 bemerkt wurde, wesentlich bedingt durch die gegenseitige Lage der materiellen Punkte, die Art und den Grad gewisser Zustände derselben u. s. w. und muss daher diesen variablen Umständen entsprechend auch im allgemeinen als variabel angesehen werden.

Die zwischen den materiellen Punkten eines und desselben Punktsystems wirkenden Kräfte bezeichnet man als innere Kräfte dieses Punktsystems im Gegensatze zu den äußeren Kräften dieses Punktsystems, welche zwar auf die materiellen Punkte dieses Systems einwirken, jedoch von materiellen Punkten oder Körpern herrühren, die nicht dem Punktsysteme angehören.

So sind z. B. die zwischen den magnetischen Elementen derselben Magnetnadel eines Galvanometers wirkenden, theils anziehenden, theils abstoßenden Kräfte, die sich das Gleichgewicht halten, für diese Magnetnadel als innere Kräfte, die auf die letztere einwirkenden Kräfte des elektrischen Stromes und des Erdmagnetismus als äußere Kräfte zu bezeichnen; für das Sonnensystem ist die kosmische Anziehung zwischen Sonne und Erde eine innere Kraft, dagegen ist diese Sonnenanziehung für die Erde allein eine äußere Kraft u. s. w.

Entsprechend der früheren Unterscheidung der Wechselwirkungen sind auch die inneren Kräfte eines Punktsystems im allgemeinen theils solche der ersten, theils solche der zweiten Art.

Die drei bisher behandelten Grundgesetze, nämlich das Princip der Trägheit, das Princip der unveränderlichen relativen Wirkung und das Princip der Wechselwirkung sind die drei Grundpfeiler, auf welchen das ganze Lehrsystem der Mechanik aufgebaut ist. Aus diesen drei Grundprincipien entspringen als aus ihrer gemeinsamen Quelle die anderen Principe und alle Gesetze der Mechanik, wie in dem folgenden Lehrgange gezeigt werden soll.

§ 6. Arten der Körper.

Die Wirkungen der äußeren Kräfte, die auf die verschiedenen materiellen Punkte desselben Punktsystems, beziehungsweise desselben

Körpers einwirken, erstrecken sich nicht nur auf Änderungen in der Lage dieser materiellen Punkte in Bezug auf andere Körper und andere Raumbilde (Coordinatenachsen), sondern auch in den bei weitem meisten Fällen auf — durch diese Bewegungen meist mit bedingten — Änderungen der gegenseitigen Lage der Punkte desselben Punktsystems, demnach auch auf Änderungen der äußeren Form und des Volums der Körper, mit einem Worte: sie sind im allgemeinen von Deformationen begleitet.

Würden absolut keine Deformationen stattfinden, so müsste man die relative Lage der materiellen Punkte des Punktsystems, beziehungsweise des Körpers als absolut unveränderlich annehmen. Ein solches ideelles Punktsystem, beziehungsweise einen solchen ideellen Körper, dessen materielle Punkte stets in unveränderlicher Verbindung sich befinden, nennt man ein starres (unveränderliches) Punktsystem, beziehungsweise einen starren Körper. In diesem Falle wäre demgemäß im strengen Sinne des Wortes sowohl das Volum des Körpers, als auch dessen äußere Form unveränderlich, selbständig (d. h. unabhängig von den einwirkenden Kräften).

In den verschiedenen Gleichgewichtslagen irgend eines Körpers halten sich die auf die verschiedenen materiellen Punkte des Körpers einwirkenden äußeren Kräfte, die dann aber bestimmten später zu erörternden Bedingungen genügen müssen, durch Vermittlung der inneren Kräfte das Gleichgewicht, indem nämlich bei einem jeden materiellen Punkte zwischen den auf diesen Punkt einwirkenden inneren Kräften des Punktsystems und den äußeren Kräften, die auf denselben Punkt einwirken, das Gleichgewicht stattfindet.

Bei den starren Punktsystemen muss offenbar vorausgesetzt werden, dass die variablen inneren Kräfte alle möglichen, den einwirkenden äußeren Kräften und den hervorgerufenen Bewegungszuständen entsprechenden Größen und Richtungen, die jedoch stets dem Gesetze der Wechselwirkung genügen müssen, erlangen können, ohne dass irgend eine Änderung der relativen Lage der Punkte eintritt.

Finden jedoch, wie dies bei den Körpern der Natur der Fall ist, Deformationen statt, infolge welcher im Gleichgewichtszustande die inneren Kräfte solche Intensitäten erlangen, dass sie den äußeren Kräften das Gleichgewicht halten können, so sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden.

Denkt man sich nämlich in dem deformierten Körper K eine beliebige Fläche F , welche denselben im allgemeinen in einen Theil A und einen zweiten Theil a theilt, welcher letztere Theil in dem besonderen Falle verschwindet, wenn die Fläche F der Oberfläche des Körpers K angehört, so sind entweder die inneren Kräfte derart, dass entweder:

a) nach entsprechender Deformation für eine jede beliebige Richtung der resultierenden äußeren Kraft, die auf irgend ein unendlich klein zu denkendes Flächenelement f der Oberfläche F des Körpers A einwirkt, und die im allgemeinen theils von der Einwirkung des zweiten Theiles a auf A , theils von anderen äußeren auf die Oberfläche F des Körpers A wirkenden Kräften herrührt, in diesem Körper A durch Vermittlung der inneren Kräfte des Körpers A bis zu einer gewissen äußersten Deformation das Gleichgewicht hergestellt werden kann, ohne dass irgend eine Trennung des Zusammenhanges der kleinsten Theile des Körpers A eintritt. In diesem Falle nennt man den Körper einen festen Körper, und die erwähnte äußerste Deformation bestimmt die Grenze der Festigkeit, oder

b) es ist ohne Aufhebung des Zusammenhanges infolge der Vermittlung der inneren Kräfte des Körpers A das Gleichgewicht nur unter der Einwirkung solcher äußeren Kräfte möglich, deren Resultierende normal zum Flächenelemente f , und zwar nach der inneren Seite des Körpers A gerichtet ist, kurz, nur im Falle eines zu den Flächenelementen f normalen Druckes. Einen derartigen Körper bezeichnet man als eine vollkommene Flüssigkeit, als einen absolut flüssigen Körper.

Während also bei festen Körpern bis zur Festigkeitsgrenze die Resultierende der inneren Kräfte je nach der Beschaffenheit der einwirkenden äußeren Kräfte infolge entsprechender Deformationen eine jede beliebige Richtung zum Flächenelemente f annehmen und so den äußeren Kräften das Gleichgewicht halten kann, sind bei vollkommenen Flüssigkeiten nur solche innere Kräfte möglich, deren Resultierende zwar variable Werte annehmen kann, jedoch zum Flächenelemente f normal, und zwar nach außen hin gerichtet ist, demnach nur einem äußeren normalen Druck das Gleichgewicht halten kann. Hat demnach die auf das Flächenelement f einer Flüssigkeit A einwirkende äußere Kraft eine andere Richtung, z. B. parallel zu dem Flächenelemente f , so findet, und zwar, wenn man die Flüssigkeit zunächst, wie es auch oben geschehen ist, in ihrem idealen Zustande der Vollkommenheit betrachtet, schon bei der geringsten derartigen Kraft sofort eine Trennung des Zusammenhanges, eine Verschiebung der Theilchen aneinander statt, bis die Oberfläche F , also auch die äußere Form der Flüssigkeit, wofern dies überhaupt möglich ist, sich derart gestaltet, dass sie der obangeführten Gleichgewichtsbedingung entspricht. Aus diesem letzteren Grunde bezeichnet man die idealen (vollkommenen) Flüssigkeiten als absolut leicht verschiebbar.

Solche ideale Flüssigkeiten, bei denen die inneren Kräfte einen jeden beliebigen, den variablen äußeren Druckkräften entsprechenden Wert erlangen können, ohne dass longitudinale Deformationen, oder mit anderen Worten, ohne dass eine Verringerung des Volums

der Flüssigkeit durch den äußeren Druck stattfindet, nennt man *incompressible* (unzusammendrückbare) Flüssigkeiten im Gegensatze zu den *compressiblen* (zusammendrückbaren) Flüssigkeiten, bei welchen das Volum dem Drucke entsprechend sich ändert.

Während also bei absolut starren Körpern die Form und das Volum selbständig sind, haben *incompressible* Flüssigkeiten wohl ein selbständiges Volum, jedoch, da sie absolut leicht verschiebbar sind, keine selbständige Form und die *compressiblen* Flüssigkeiten weder eine selbständige Form, noch ein selbständiges Volumen.

Wenn die Deformationen der festen und flüssigen Körper gewisse Grenzen nicht überschritten haben, so verschwinden erfahrungsgemäß die Deformationen der Körper der Natur vollständig, nachdem die äußeren Kräfte, welche diese Deformationen veranlassten, zu wirken aufgehört haben; man nennt dann die Körper innerhalb dieser Grenzen „vollkommen elastisch“ und diese Grenzen selbst die „Elasticitätsgrenzen“.

Bei den meisten festen Körpern der Natur sind die Deformationen so gering, dass die äußere Form dieser Körper und das Volum derselben sich trotz der Einwirkung selbst bedeutender äußerer Kräfte kaum merklich ändert und man daher diese Körper annäherungsweise als starre Körper ansehen kann.

So wie es in der Natur keinen absolut starren Körper gibt, so gibt es auch strenggenommen keinen absolut flüssigen Körper, sondern es nähern sich die Flüssigkeiten der Natur, die mehr oder weniger zähflüssig sind, dem idealen hier vorausgesetzten Zustande der absoluten Verschiebbarkeit in größerem oder geringerem Maße.

Bei den sogenannten tropfbaren Flüssigkeiten der Natur sind die den gewöhnlichen Druckkräften entsprechenden longitudinalen Deformationen und die dadurch bedingten Volumcontractionen bei gleichbleibender Temperatur erfahrungsmäßig so gering, dass man diese Flüssigkeiten näherungsweise als unzusammendrückbar und demnach ihr Volum, so lange die Temperatur dieselbe bleibt, als constant annehmen kann.

Von den *compressiblen* Flüssigkeiten seien jene besonders hervorgehoben, deren Volum bei gleichbleibender Temperatur dem jeweiligen auf die Flächeneinheit entfallenden Drucke *invers proportional* ist. Man bezeichnet dieselben als ideale (vollkommene) Gase. Die Gase der Natur befolgen das letztere unter dem Namen des Mariotte'schen Gesetzes bekannte Gesetz nur annäherungsweise.

§ 7. Mechanik und deren Theile.

Die Einwirkungen der Kräfte auf die Lage der Körper und der Körperelemente (der materiellen Punkte) sowohl gegeneinander als

in Bezug zu anderen Punktsystemen — also die im § 4—6 behandelten Wirkungen — nennt man auch mechanische Wirkungen der Kräfte.

Dieselben können von magnetischen, elektrischen, thermischen, optischen u. s. w. Erscheinungen begleitet sein, welche Erscheinungen auch nur durch die gegenseitigen Einwirkungen der Körper und ihrer besonderen Zustände hervorgerufen werden. Die Erörterung aller dieser Erscheinungen (einschließlich der Bewegungserscheinungen) und ihres qualitativen und quantitativen Zusammenhanges, der in den Naturgesetzen seinen Ausdruck findet, gehört in das Gebiet der Physik im weiteren Sinne des Wortes, welche die Mechanik als einen ihrer wichtigsten Theile in sich fasst.

Mechanik ist die Wissenschaft von den Bewegungen und den Kräften (ihren mechanischen Wirkungen).

Jener Theil der Mechanik, der — ausgehend von wenigen einfachen allgemeinen obersten Grundgesetzen — mit Zuhilfenahme der mathematischen Theoreme auf streng deductivem Wege die Bewegungen der Körper im allgemeinen, also die allgemeine Lehre von den Kräften und ihren mechanischen Wirkungen behandelt, wird die reine oder theoretische Mechanik genannt — im Gegensatze zu der angewandten Mechanik, welche die Anwendung der Gesetze der reinen Mechanik auf die besonderen Arten der Bewegungen und Kräfte und auf die besonderen für technische (technische Mechanik) und andere Zwecke wichtigeren mechanischen Wirkungen der Kräfte zum Gegenstande hat.

Wenn auch die besonderen Kräftearten aus der reinen Mechanik strenggenommen ausgeschlossen werden sollen, so wird doch hier, wie es auch allgemein geschieht, die Lehre von einer besonderen, vor allen anderen wichtigen Kräfteart, nämlich die Lehre von der irdischen Schwere, welche gewisse besondere Erfahrungsthatfachen voraussetzt, in den Lehrgang mit einbezogen. Um nun die entsprechenden, die Mechanik der Schwere behandelnden Lehren, welche nur Anwendungen der allgemeinen Lehren der reinen Mechanik sind, von den letzteren gehörig abzusondern, sind denselben durchwegs eigene Paragraphe gewidmet.

Vier Probleme sind es, mit deren Beantwortung sich die Mechanik befasst, und zwar:

a) die Frage nach der Äquivalenz der Kräfte und der Kräftesysteme, nämlich die Erörterung der Bedingungen, unter welchen zwei Kräftesysteme, die auf denselben Körper einwirken, äquivalent (gleichwertig) sind. Gestattet es die besondere Art der Aufgabe, eine dem Kräftesystem gleichwertige einfache Kraft zu finden, so ist es eine Aufgabe der Zusammensetzung der Kräfte zu einer Resultierenden;

b) die Frage nach dem Gleichgewichte der Kräfte, nämlich die Untersuchung der Bedingungen, unter welchen sich die Kräfte eines auf denselben Körper wirkenden Kräftesystems das Gleichgewicht halten;

c) die Untersuchung der möglichen Bewegungen der Körper ohne Rücksichtnahme auf die Kräfte, durch welche diese Bewegungen hervorgerufen werden;

d) die Untersuchung der Abhängigkeit der Bahnen und der Bewegungszustände der einzelnen Punkte eines Körpers von den auf den Körper einwirkenden Kräften.

Jenen Theil der Mechanik, der die beiden ersten Fragen behandelt, also die Lehre von der Äquivalenz und dem Gleichgewichte der Kräftesysteme, nennt man die Statik, jener Theil der Mechanik, der das dritte Problem c) behandelt, also — kurz gesagt — die Geometrie der Bewegung heißt die Phoronomie oder Kinematik (von *κίνημα* = Bewegung als Zustand), und schließlich jener Theil der Mechanik, der sich mit dem letzten Problem d) befasst, wird Dynamik (von *δύναμις* — die Kraft) oder besser Kinetik (von *κίνησις* = Bewegung als Thätigkeit) genannt. Ist die Methode der Statik nicht jene der mathematischen Deduction, sondern die graphische, indem sie die Aufgaben der Statik ohne Rechnung, bloß auf constructivem Wege zu lösen bestrebt ist, so wird sie als graphische Statik bezeichnet.

Je nach der Art der Körper, auf welche die Kräfte wirken, zerfällt wieder sowohl die Statik, als die Dynamik in die entsprechenden Unterabtheilungen. Die Statik und Dynamik des starren Körpers bezeichnet man mitunter als Geostatik und Geodynamik (von *γη* — die Erde — als Repräsentant des Festen), die Statik und Dynamik der flüssigen Körper bezeichnet man als Hydrostatik und Hydrodynamik (von *ὕδωρ* — das Wasser — als Repräsentant des Flüssigen). Die Mechanik der Gase, die einen Theil der Hydromechanik bildet, führt mitunter den Namen Aëromechanik (von *ἀήρ* — die Luft).

Die Grundlage aller dieser Lehren bildet die Mechanik des materiellen Punktes.

Capitel II.

Statik des materiellen Punktes.

§ 8. Allgemeine Bemerkungen.

In diesem Capitel II soll stets vorausgesetzt sein, dass alle Kräfte, die hier zur Betrachtung kommen, gleichzeitig auf denselben materiellen Punkt einwirken, dass sie also einen gemeinsamen Angriffspunkt *O* haben. Bei der Zusammensetzung dieser Kräfte können sich nur zwei Fälle ergeben, nämlich

a) die Kräfte halten sich das Gleichgewicht, oder

b) die Kräfte lassen sich auf eine Resultante zurückführen;

denn, wenn der materielle Punkt, auf welchen die Kräfte wirken, etwa ursprünglich als ruhend vorausgesetzt wird, so verbleibt derselbe entweder trotz der Wirksamkeit der Kräfte in Ruhe, und es halten sich dann die Kräfte das Gleichgewicht — oder aber, der Angriffspunkt setzt sich infolge der Wirksamkeit des Kräftesystems in irgend einer Richtung Ou in Bewegung, wobei sich die Geschwindigkeit desselben in einer gewissen Weise von Null an ändert. In diesem zweiten Falle gibt es nach den Erörterungen des § 4 eine resultierende Kraft R , deren Richtung die ursprüngliche Bewegungsrichtung Ou ist, und deren Größe einen der besonderen Art der Geschwindigkeitsänderung des Punktes O entsprechenden Wert hat.

Aus den Erklärungen des § 4 ergibt sich weiter, dass zwei äquivalente Kräfte, die auf denselben frei beweglichen Angriffspunkt einwirken, nothwendigerweise dieselbe Richtung haben und an Größe gleich sein müssen.

A. Zusammensetzung und Gleichgewicht von Kräften, deren Richtungen in derselben Ebene gelegen sind und die auf einen frei beweglichen materiellen Punkt einwirken.

§ 9. Zusammensetzung gleich- und entgegengesetzt-gerichteter Kräfte.

a) Wirken mehrere gleichgerichtete Kräfte auf denselben Angriffspunkt ein, so besitzen diese, wie sich aus dem Begriffe der Kräftesumme (§ 4) unmittelbar ergibt, eine Resultierende R , die der Summe der Componenten gleich ist ($R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$), und zwar ist die Resultierende dem ersten Folgesatze des § 5 a) S. 23 zufolge gleichgerichtet mit den Componenten.

Daraus ergibt sich sofort, dass man bei der graphischen Zusammensetzung der gleichgerichteten Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots P_n$ die dieselben darstellenden Strecken $01, 12, 23, \dots, n-1 n$ (Fig. 5) in irgend einer Reihenfolge so aneinander zu fügen hat, dass immer der Endpunkt der früheren Strecke mit dem Anfangspunkte der folgenden zusammenfällt; es ist dann die Resultierende durch die aus dieser Zusammensetzung der Theilstrecken resultierende Linie on ihrer Richtung und Größe nach gegeben.

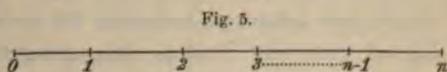
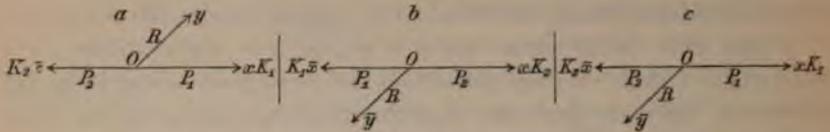


Fig. 5.

b) Wirken auf denselben materiellen Punkt O zwei gleiche entgegengesetzt-gerichtete Kräfte, so halten sich dieselben

das Gleichgewicht, wie sich indirect leicht beweisen lässt. Würde nämlich das Gleichgewicht nicht stattfinden, so müssten die zwei gleichen Kräfte P_1 und P_2 (Fig. 6 a), die nach den entgegengesetzten Richtungen Ox und Ox wirken, eine Resultierende R von irgend einer Richtung Oy haben. Denkt man sich nun die Fig. 6 a in der durch Ox und Oy gelegten Ebene um den Punkt O um 180° gedreht, und zwar sammt den Körper-, beziehungsweise Punktsystemen K_1 und K_2 , von denen die Einwirkungen P_1 und P_2 ausgehen, so gelangt man bei Beachtung des Principis der unveränderlichen relativen Wirkung zu dem in Fig. 6 b dargestellten Falle, in welchem man wegen der

Fig. 6.



Gleichheit der Kräfte die Kraft P_1 durch P_2 und P_2 durch P_1 (also auch K_1 durch K_2 und umgekehrt) ersetzen kann (vergl. § 4), wodurch man nunmehr zu dem in Fig. 6 c versinnlichten Falle gelangt, welcher lehrt, dass dasselbe Kraftsystem der Kräfte P_1 und P_2 und dasselbe Körpersystem K_1 und K_2 , wie in Fig. 6 a, dessen resultierende Kraft die Richtung Oy hat, auch eine Resultierende R von der gerade entgegengesetzten Richtung $O\bar{y}$ haben müsste, so dass diese beiden entgegengesetzt gerichteten Resultanten in Fig. 6 a und Fig. 6 c äquivalent sein müssten, was unmöglich ist, indem sonst der materielle Punkt O sich, wenn er ursprünglich in Ruhe wäre, zugleich in der Richtung Oy und in der Richtung $O\bar{y}$ in Bewegung setzen müsste.

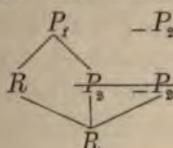
Übrigens lässt sich der zu beweisende Satz auch direct auf leicht ersichtliche Weise aus dem Principe der Zusammensetzung gleichzeitiger Bewegungen deducieren.

Um diesen Lehrsatz b) [und auch die folgenden c) und d)] auf den früheren Lehrsatz a), welchem zufolge die Resultierende R der Summe der Componenten gleich ist, zurückzuführen und hiedurch den letzteren Lehrsatz zu verallgemeinern, muss man offenbar irgend eine der beiden entgegengesetzten Richtungen, etwa Ox , als positiv annehmen und die in entgegengesetzter Richtung wirkenden Kräfte negativ in Rechnung bringen, so dass im vorliegenden Falle $P_2 = -P_1$ zu setzen ist. Die algebraische Summe der Componenten ist dann im vorliegenden Falle Null, und es ist demgemäß, wenn der erwähnte Lehrsatz des § 9 a auf den vorliegenden Fall ausgedehnt werden soll, die Gleichung $R = 0$ das mathematische Kennzeichen

des Gleichgewichtes von Kräften, die auf denselben Angriffspunkt wirken. Künftighin sollen zwei solche entgegengesetzt gerichtete Kräfte P_1 und $-P_1$ von gleicher Größe als „entgegengesetzt gleiche Kräfte“ bezeichnet sein.

Bei der graphischen Zusammensetzung der entgegengesetzt gleichen Kräfte P_1 und P_2 in der im § 9a besprochenen Weise muss der Endpunkt 2 der aus 01 und 12 resultierenden Strecke 02 (Fig. 7) mit dem Anfangspunkte 0 derselben zusammenfallen. Dieser letztere Umstand ist daher für unseren Fall das graphische Kennzeichen des Gleichgewichtes.

c) Wirken auf denselben Angriffspunkt O zwei entgegengesetzt gerichtete, jedoch einander nicht gleiche Kräfte ein — etwa die größere Kraft P_1 in der positiven Richtung Ox (Fig. 6 a) und die kleinere Kraft, deren absoluter Zahlwert P_2 ist, in der negativen Richtung Ox , so dass, wenn man das unter § 9 b Gesagte beachtet, der algebraische Wert der letzteren Kraft ($-P_2$) ist — so lässt sich offenbar P_1 als Summe von P_2 und irgend einer anderen Kraft R ($P_1 = P_2 + R$) darstellen, somit die Kraft P_1 zufolge § 9 a in die Kräfte P_2 und R , welche beide die gleiche Richtung Ox haben, zerlegen und durch dieselben ersetzen. Von den drei nun wirkenden Kräften $R, P_2, -P_2$ halten sich die beiden letzteren das Gleichgewicht, so dass (nach § 5, Folg. 3, S. 23) diese ohne Änderung des Bewegungszustandes auch entfernt werden können und demnach die drei Kräfte $R, P_2, -P_2$, die den ursprünglichen Kräften P_1 und $-P_2$ gleichwertig sind, auch der einen Kraft R äquivalent sind. Es ist daher R auch die Resultierende der beiden ursprünglichen Kräfte P_1 und $-P_2$. Das entsprechende Schema der äquivalenten Kräftesysteme, das dem Gange des Beweises zugrunde liegt, möge hier beigefügt sein:



(Die Zeichen \wedge | und \vee deuten hier und künftighin die Äquivalenz der entsprechenden Kräfte an, während der Querstrich, der mehrere Kräftezeichen durchschneidet, andeutet, dass die entsprechenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten, daher ohne Änderung des Bewegungszustandes entfernt werden können.)

Aus der oberwähnten Relation $P_1 = P_2 + R$ ergibt sich sofort $R = P_1 - P_2 = P_1 + (-P_2)$ (vergl. Fig. 7 a).

Die Resultierende zweier entgegengesetzt gerichteter Kräfte von ungleicher Größe ist demnach ebenfalls gleich der algebraischen Summe der Componenten. Ihre Richtung ist durch das Zeichen der Summe bestimmt.

Es ist sofort einzusehen, wie sich der Beweis dieses Lehrsatzes in ganz analoger Weise für den Fall führen lässt, wenn die Richtung der größeren Kraft die negative ist (Fig. 7 *b*). In diesem Falle ergibt sich — entsprechend der negativen Richtung der Resultierenden — für die algebraische Summe ein negativer Wert.

Aus dem eben nachgewiesenen Satze erhellt, dass die graphische Zusammensetzung der die Kräfte P_1 und P_2 repräsentierenden Strecken 01 und 12 , wenn sie in der in § 9 *a* erwähnten Weise vorgenommen wird (siehe Fig. 7 *a* und *b*) auch hier zu einer resultierenden Strecke $02 = 01 + 12$ führt, welche der Richtung und Größe nach die Resultierende darstellt.

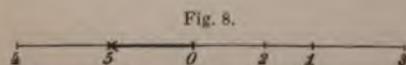
d) Auch die Resultierende beliebig vieler theils in der einen (als positiv angenommenen), theils in der entgegengesetzten (negativen) Richtung wirkenden Kräfte ist der Richtung und Größe nach durch die algebraische Summe aller Kräfte bestimmt.

Um dies zu beweisen, braucht man offenbar bloß die Resultierende irgend welcher zwei Kräfte zu bestimmen, diese zusammzusetzen mit irgend einer dritten Kraft u. s. w. und stets von dem einen für alle möglichen Fälle unter *a*) *b*) *c*) nachgewiesenen gleichlautenden Satze Anwendung zu machen.

Sollte die algebraische Summe den Wert Null ergeben, so müsste die Summe der negativen Kräfte der Summe der positiven, daher auch die Resultierende der ersteren Kräfte der Resultierenden der letzteren Kräfte entgegengesetzt gleich sein, so dass die beiden letzteren Resultierenden (nach § 9 *b*), demnach auch die ihnen äquivalenten ursprünglichen Kräfte sich das Gleichgewicht halten — und ebenso umgekehrt. Es ist daher die Gleichung $R = 0$ auch hier das nothwendige und hinreichende mathematische Kennzeichen des Gleichgewichtes.

Anmerkung. Jene Gerade, in welcher der Angriffspunkt einer Kraft P gelegen ist und deren eine Richtung mit der Krafrichtung übereinstimmt, sei in der Folge stets die Richtungslinie oder Richtlinie (Angriffslinie, Wirkungslinie) der Kraft P genannt.

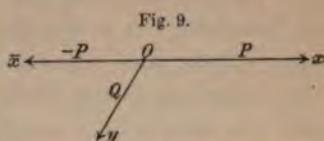
Die in der früher erwähnten Weise vorzunehmende graphische Zusammensetzung der die theils gleich-, theils entgegengesetztgerichteten Kräfte repräsentierenden Strecken $01, 12, 23, 34, 45$ führt offenbar auch in dem allgemeinsten Falle *d*) bei genauer Beachtung der Kräfterichtungen zu der die Resultierende der Richtung und Größe nach darstellenden Strecke 05



(siehe Fig. 8). Verschwindet diese letztere Strecke, d. h. fällt der Anfangspunkt der ersten Theilstrecke mit dem Endpunkte der letzten zusammen, so halten sich die Kräfte das Gleichgewicht.

§ 10. Einleitende allgemeine Sätze über die Resultierende zweier beliebig gerichteter Kräfte.

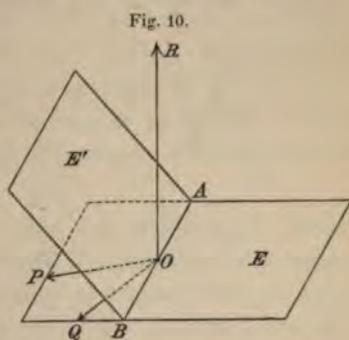
a) Zwei auf denselben Angriffspunkt einwirkende Kräfte P und Q , deren Richtungen Ox und Oy (Fig. 9) nicht entgegengesetzt sind, müssen eine Resultierende haben; denn würden sich P und Q das Gleichgewicht halten, so müsste, dem Folgesatze 3 S. 23 zufolge, nach Hinzufügung einer der Kraft P entgegengesetzt gleichen Kraft $-P$ das erhaltene Kräftesystem $(PQ - P)$ dieser hinzugefügten Kraft $-P$, aber zugleich wegen des Gleichgewichtes der beiden Kräfte P und $-P$ auch der Kraft Q , daher die Kraft $-P$ der Kraft Q äquivalent sein, was nach § 8 unmöglich ist.



b) Sind zwei auf denselben Angriffspunkt O wirkende Kräfte nach derselben Seite einer durch O gelegten Ebene gerichtet, so ist auch die Resultierende dieser Kräfte nach derselben Seite der Ebene gerichtet. — Dieser Satz ergibt sich als einfache Folgerung aus § 5 S. 19, wofern der Einfachheit halber der Angriffspunkt O etwa ursprünglich ruhend angenommen wird.

c) Die Richtung der Resultierenden R zweier Kräfte P und Q liegt in der Ebene E der Kräfterichtungen der Componenten.

Würde nämlich die Richtung der Resultierenden R die Ebene E im Angriffspunkte O schneiden (Fig. 10), so ließe sich zunächst durch O in der Ebene E eine außerhalb der Winkelfläche des hohlen Winkels, den die Richtungen der Kräfte P und Q einschließen, gelegene Gerade AB führen und durch AB zwischen der Richtung der Resultierenden R und der Ebene E eine neue Ebene E' legen, was dem Satze b) widerspricht.



Unabhängig vom Satze b) ließe sich der Satz c) leicht auch derart nachweisen, dass man außer den Kräften P und Q die diesen das Gleichgewicht haltenden entgegengesetzt gleichen Kräfte (s. § 9 b) $-P$ und $-Q$ gleichzeitig wirkend sich denkt, deren Resultierende $-R$ nach dem Principe der unabhängigen relativen Wirkung jene Richtung haben müsste, in welche die Richtung von R kommen würde, wenn man das Kräftesystem PQR (bezw. das entsprechende

Körpersystem) um eine durch den gemeinsamen Angriffspunkt O senkrecht zur Ebene E gelegte Achse um 180° drehen würde. Da nun wegen des Gleichgewichtes der Kräfte $(P, Q, -P, -Q)$ sich auch die diesen äquivalenten Kräfte R und $-R$ das Gleichgewicht halten müssten, so muss die Richtung von R (daher auch jene von $-R$) in der Ebene E gelegen sein, indem sonst (nach § 10a) R und $-R$ eine Resultierende haben müssten.

Man bezeichnet die Ebene E , in der alle Kräfterichtungen gelegen sind, als die „Kräfteebene“. Den hohlen Winkel, den die Richtungen der Kräfte P und Q einschließen, nennt man den „Kräftewinkel“ der Kräfte P und Q ; er sei stets von nun an durch das Zeichen (PQ) bezeichnet.

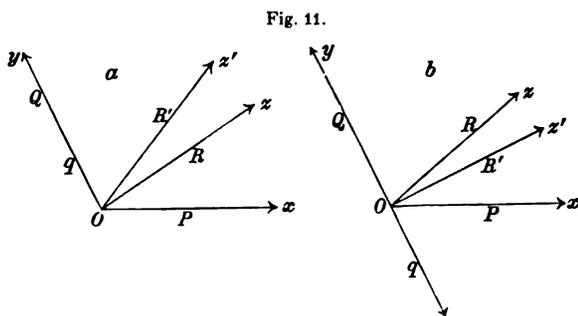
d) Die Richtung des Resultierenden R zweier Kräfte P und Q ist innerhalb der Winkelfläche des Kräftewinkels (PQ) gelegen.

Würde dies nämlich nicht der Fall sein, so ließe sich durch eine außerhalb dieser Winkelfläche in der Kräfteebene geführte Gerade eine die Kräfteebene schneidende Ebene derart legen, dass die Richtung von R auf einer, die Richtungen von P und Q auf der anderen Seite dieser Ebene (bezw. Geraden) gelegen sind, was dem Lehrsatz *b*) widerspricht.

Übrigens lässt sich dieser Satz offenbar auch direct aus dem Principe der Zusammensetzung der Bewegungen (S. 21) folgern.

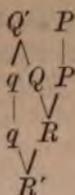
e) Wenn bei gegebenem Kräftewinkel (PQ) die Größe der einen Componente Q zu-, beziehungsweise abnimmt, so nähert, beziehungsweise entfernt sich die Richtung der Resultierenden von der Richtung dieser Componente, so dass der Winkel (QR) ab-, beziehungsweise zunimmt.

Beweis: Es sei Oz die Richtung der Resultierenden R der Kräfte P und Q (Fig. 11). Erhält nun die Kraft Q den um q größeren Wert Q' , so lässt sich Q' in die gleichgerichteten Kräfte Q und q (Fig. 11a)



zerlegen; P und Q haben zur Resultierenden R , welche, mit q zusammengesetzt, zur Resultierenden R' hat, deren Richtung Oz' in dem Kräftewinkel (qR) gelegen, also der Richtung der Kraft Q näher ist.

Das entsprechende Kräfteschema ist:



Erhält dagegen die Kraft Q den um q kleineren Wert Q' , so muss die Richtung Oz' der Resultierenden R' der Kräfte P und Q' zunächst in dem Kräftewinkel $(PQ') = (PQ)$ liegen; es lässt sich aber auch Q' zerlegen in die entgegengesetzt gerichteten Kräfte Q und q (Fig. 11 b), so dass, wie in dem früheren Kräfteschema, die Resultierende R' der Kräfte Q' und P identisch ist mit der Resultierenden von q und R und ihre Richtung Oz' daher andererseits auch in dem Kräftewinkel (qR) enthalten sein, demnach von der Richtung der Kraft Q weiter entfernt sein muss.

f) Ist die gegenseitige Lage der Richtungen der beiden Componenten und der Resultierenden in zwei Kräftesystemen dieselbe [demnach $(PQ) = (P'Q')$, $(PR) = (P'R')$, $(QR) = (Q'R')$] und sind irgend welche zwei analog gerichtete Componenten in beiden Systemen gleich, so sind auch die beiden anderen Componenten einander gleich und ebenso die beiden Resultierenden.

(Als analog gerichtete Componenten sind hier und in den folgenden Lehrsätzen solche zu verstehen, deren Richtungen gegen die Richtung der entsprechenden Resultierenden gleich geneigt sind, also die gleiche relative Lage haben.)

Man denke sich zunächst beide Kräftesysteme mit Zuhilfenahme des Principis der gleichbleibenden relativen Wirkung in die gleiche räumliche Lage gebracht. Ist nun etwa $P = P'$, so könnte nach dem letzten Lehrsatz e) weder $Q' > Q$ noch $Q' < Q$ sein, da sonst im ersteren Falle $(Q'R') < (QR)$ und im letzteren Falle $(Q'R') > (QR)$ sein müsste. Da sonach $Q' = Q$ ist, so stimmen in beiden Kräftesystemen die Componenten und deren Kräftewinkel überein, und es ist daher auch $R' = R$.

g) Ist die gegenseitige (relative) Lage der Richtungen zweier Kräfte und ihrer Resultierenden in mehreren Kräftesystemen dieselbe, so entspricht stets der Summe zweier analog gerichteter Componenten P und P' sowohl die Summe der Componenten der zweiten Richtung, als auch die Summe der Resultanten.

Sind nämlich PQR und $P'Q'R'$ zwei derartige Kräftesysteme, die gewissen einwirkenden Körpersystemen entsprechen, so führt die Incinanderlegung dieser beiden Systeme, die trotz der etwa verschiedenen räumlichen Lage nach dem Princip der unveränderlichen

relativen Wirkung gestattet ist, zu dem in Fig. 12 dargestellten Kräftesysteme. In diesem Systeme der vier Kräfte $PP'QQ'$ sind einerseits P und Q der Kraft R , P' und Q' der Kraft R' , daher das Kräftesystem

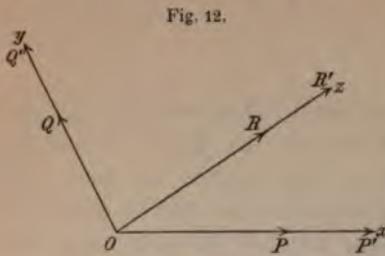


Fig. 12.

$PP'QQ'$ den beiden gleichgerichteten Kräften R und R' , demnach auch ihrer mit diesen Kräften gleichgerichteten Resultierenden $R'' = R + R'$ äquivalent; andererseits sind in demselben Kräftesysteme die Kräfte P und P' der mit ihnen gleichgerichteten Kraft $P'' = P + P'$, ferner Q und Q' der gleichgerichteten Kraft $Q'' = Q + Q'$ äquivalent, so dass in der That die Kraft R'' die Resultierende der beiden Kräfte P'' und Q'' ist. Dass nun $Q'' = \overline{Q + Q'}$ die einzige zweite Componente und $R'' = R + R'$ die einzige Resultierende ist, die der Kraft $P'' = P + P'$ entspricht, ergibt sich aus dem Lehrsatze *f*).

h) Bei gleicher gegenseitiger Lage der Richtungen zweier Componenten und ihrer Resultierenden in mehreren Kräftesystemen sind die analog gerichteten Componenten der einen Richtung den analog gerichteten Componenten der zweiten Richtung und den zugehörigen Resultanten direct proportional oder — was dasselbe besagt — es ist das Verhältnis zweier beliebiger Kräfte des einen Kräftesystems gleich dem Verhältnisse der beiden analog gerichteten Kräfte eines beliebigen von diesen Kräftesystemen.

Dieser Lehrsatz ergibt sich unmittelbar aus den beiden vorhergehenden *f*) und *g*), wenn man einen bekannten mathematischen Satz über die Proportionalität von Grössenarten in Anwendung bringt.

§ 11. Grösse der Resultierenden zweier orthogonaler Componenten.

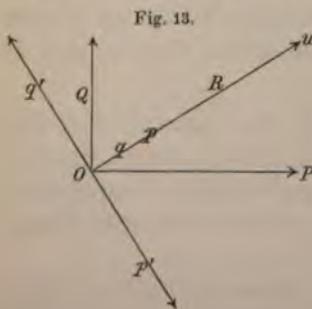


Fig. 13.

Es seien P und Q die auf dieselbe Krafteinheit bezogenen Maßzahlen zweier orthogonaler Componenten, d. i. solcher Componenten, deren Kräftewinkel ein rechter Winkel ist (Fig. 13). Es sei ferner Ou die in die Winkelfläche dieses rechten Winkels fallende Richtung der Resultierenden, deren unbekannte — auf dieselbe Krafteinheit bezogene — Maßzahl R sei.

Man denke sich nun sowohl P als Q zerlegt in je eine Componente, deren Richtung Ou ist, und je eine zweite Componente, deren

Richtung auf Ou senkrecht steht. Die entsprechenden Maßzahlen der Komponenten von Q seien durch q und q' , jene der Komponenten von P durch p und p' bezeichnet.

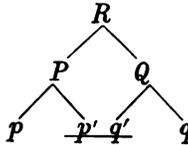
Da die Kräftewinkel (PR) und $(q'Q)$, deren Schenkel aufeinander senkrecht stehen, einander gleich sind und aus gleichem Grunde $(QR) = (p'P)$ ist, so sind die Lagen der Kräftesysteme PQR , $q'qQ$ und $pp'P$ von der in § 10 unter f, g, h vorausgesetzten Eigenschaft, so dass nach dem Satze § 10h die Gleichungen stattfinden:

$$\frac{q'}{P} = \frac{q}{Q} = \frac{Q}{R}$$

$$\frac{p}{P} = \frac{p'}{Q} = \frac{P}{R}$$

aus welchen sich ergibt, dass $p' = \frac{PQ}{R} = q'$ und $p = \frac{P^2}{R}$, $q = \frac{Q^2}{R}$ ist.

Das Kräfteschema:



in welchem sich p' und q' als entgegengesetzt gleiche Kräfte das Gleichgewicht halten, lehrt, dass R den Kräften p und q äquivalent, daher nach § 9

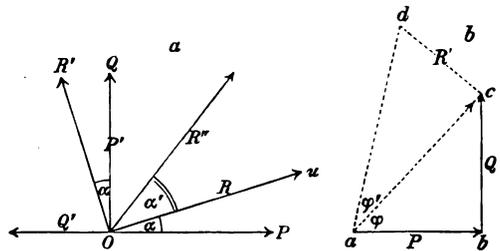
$$R = p + q = \frac{P^2}{R} + \frac{Q^2}{R}$$

also schließlich $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$ ist.

Anmerkung. Der eben geführte Beweis rührt von dem berühmten Mathematiker Daniel Bernoulli (geb. 1700, gest. 1782) her.

Wendet man das in § 9a angeführte constructive Verfahren auf den vorliegenden Fall an, d. h. reiht man die die beiden Componenten P und Q (Fig. 13) der Größe und Richtung nach darstellenden Strecken ab und bc (Fig. 14b) mit Beibehaltung ihrer Richtung, indem man dieselben parallel zu sich selbst verschiebt, so aneinander, dass der Endpunkt der vorhergehenden Strecke mit dem Anfangspunkte der folgenden zusammenfällt, so gelangt man zu dem gebrochenen Linienzuge abc .

Fig. 14.



Verbindet man nun den Anfangspunkt a desselben mit dessen Endpunkte c durch die Schlusseite ac , als deren Anfangspunkt der Anfangspunkt a des Linienzuges anzu-

sehen ist, so erhält man das Dreieck abc , das man das „Kräfte-dreieck“ nennt.

Bei entsprechender Wahl der Längen- und Krafteinheit (vergl. § 2) hat die Seite ab des Kräftedreieckes dieselbe Maßzahl wie die entsprechende Kraft — nämlich die Maßzahl P , die Seite bc die Maßzahl Q , und es hat somit die Hypothense des Kräftedreieckes nach dem pythagoräischen Lehrsatz die Maßzahl $\sqrt{P^2 + Q^2}$, die, wie nachgewiesen wurde, auch die Maßzahl der Resultierenden ist.

Es stellt also bei orthogonalen Componenten die Schlusseite des Kräftedreieckes der Größe nach die Resultierende dar.

§ 12. Richtung der Resultierenden zweier orthogonaler Componenten.

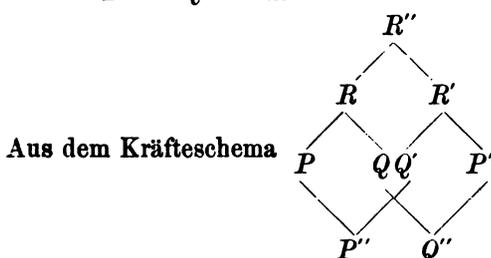
Es sei Ou (Fig. 14 a) die unbekannte Richtung der Resultierenden R der beliebigen orthogonalen Componenten P und Q und φ der dem Kräftewinkel $(PR) = \alpha$ entsprechende Winkel des Kräftedreieckes abc (Fig. 14 b).

Kommen nun in mehreren derartigen Kräftesystemen PQR , $P_1Q_1R_1$, $P_2Q_2R_2$ u. s. w., in welchen die Componenten orthogonal sind, auch die gleichen Kräftewinkel $(PR) = (P_1R_1) = (P_2R_2) = \dots = \alpha$ vor, so müssen nach dem Lehrsatz § 10 h) folgende Verhältnisse gleich sein: $\frac{Q}{P} = \frac{Q_1}{P_1} = \frac{Q_2}{P_2} = \dots$. Da aber in den entsprechenden Kräftedreiecken die letzteren Verhältnisse den trigonometrischen Tangenten der spitzen Dreieckswinkel φ , welche den ersteren Kräftewinkeln α entsprechen, gleichkommen, so müssen auch diese Tangenten, daher alle Dreieckswinkel φ einander gleich sein. Es entsprechen also gleichen Kräftewinkeln α in allen bei demselben Winkel α möglichen Kräftesystemen stets auch gleiche Kräftedreieckswinkel φ .

Wenn man demnach für α einen willkürlichen Wert gewählt hat und ebenso für eine der Componenten, etwa für P , so ist die zweite Componente Q und die Resultante R bestimmt, denn, wie eben bewiesen wurde, ist dann φ bestimmt, somit auch $Q = P \operatorname{tg} \varphi$ und $R = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P^2 + P^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} = P \operatorname{sec} \varphi$ mitbestimmt.

Es sei nun α' ein beliebiger anderer spitzer Kräftewinkel, der jedoch so gewählt ist, dass auch $\alpha + \alpha'$ nicht größer als 90° ist und diesem Kräftewinkel α' entspreche der bestimmte Kräftedreieckswinkel φ' . Wählt man ferner für ein Kräftesystem mit dem Kräftewinkel α' die frühere Resultierende R als die nun dem Winkel α' zugehörigen Componente (Fig. 14), so ist die zweite auf Ou senkrecht gerichtete Componente R' bestimmt durch $R' = R \operatorname{tg} \varphi'$ und die neue Resultierende R'' durch $R'' = R \operatorname{sec} \varphi'$.

Zerlegt man nun die Kraft R'' in zwei nach der Richtung der ursprünglichen Componenten P und Q wirkende Kräfte P'' und Q'' , so gelangt man zu einem Kräftesystem $P''Q''R''$ mit dem Kräftewinkel $\alpha'' = \alpha + \alpha'$. Zu demselben Kräftesystem gelangt man auch auf folgende Weise: Man zerlege (Fig. 14 a) die Kraft R' in eine Componente P' , deren Richtung jene der Kraft Q ist, und eine Componente Q' , deren Richtung jener der Kraft P entgegengesetzt ist. Wegen der senkrechten Lage der entsprechenden Richtungen in den Kräftesystemen PQR und $P'Q'R'$ ist $(PR) = (P'R')$ und $(QR) = (Q'R')$, somit nach § 10 h) $\frac{P'}{P} = \frac{Q'}{Q} = \frac{R'}{R}$, daher $P' = P \cdot \frac{R'}{R}$ und $Q' = Q \cdot \frac{R'}{R}$.



ergibt sich sofort, dass die früher erwähnte Kraft P'' die Resultierende von P und Q' , ferner Q'' die Resultierende von Q und P' , sonach $P'' = P - Q' = P - Q \cdot \frac{R'}{R}$ und $Q'' = Q + P' = Q + P \cdot \frac{R'}{R}$ sei.

Bezeichnet man den dem Kräftewinkel $\alpha'' = \alpha + \alpha'$ entsprechenden Winkel des Kräftedreiecks, das dem Kräftesystem $P''Q''R''$ zugehört, mit φ'' , so ist offenbar

$$\text{tang } \varphi'' = \frac{Q''}{P''} = \frac{Q + P \cdot \frac{R'}{R}}{P - Q \cdot \frac{R'}{R}}$$

Setzt man in diese Gleichung die früher gefundenen Werte $Q = P \cdot \text{tang } \varphi$ und $R' = R \cdot \text{tang } \varphi'$ ein, so ergibt sich

$$\text{tang } \varphi'' = \frac{\text{tang } \varphi + \text{tang } \varphi'}{1 - \text{tang } \varphi \text{ tang } \varphi'}$$

Da nun dieser letzte Ausdruck nichts anderes als $\text{tang } (\varphi + \varphi')$ ist, so ist auch $\text{tang } \varphi'' = \text{tang } (\varphi + \varphi')$, daher auch, da φ'' ein spitzer Winkel ist, $\varphi'' = \varphi + \varphi'$.

Anmerkung. Diese unstreitig geistreiche Beweisführung ist im wesentlichen schon zu finden in J. H. Lamberts „Beiträge zum Gebrauch der Mathematik“ (Berlin 1770, II. Theil, S. 470–474).

Es entsprechen demnach bei orthogonalen Kräftecomponenten nicht nur gleichen Kräftewinkeln α auch gleiche Kräftedreieckswinkel φ , sondern auch einem Kräftewinkel $\alpha'' = \alpha + \alpha'$ für einen

jeden Wert des α und α' stets ein Dreieckswinkel $\varphi'' = \varphi + \varphi'$; sonach sind nach einem bekannten Proportionalitätssatze die Kräfte-
winkel α den entsprechenden Winkeln φ des Kräftedreiecks direct
proportional, so dass $\alpha = k \cdot \varphi$ ist, wo k einen constanten Factor be-
deutet.

Um den Wert des constanten Factors k zu ermitteln, braucht
man bloß ein einfaches Kräftesystem, bei welchem sich der Wert des
constanten Factors k anderweitig ermitteln lässt, in Betracht zu ziehen.
Dies Kräftesystem ist jenes, bei welchem die orthogonalen Compo-
nenten P und Q einander gleich sind. In diesem besonderen Falle
muss die Richtung der Resultanten den rechten Kräfte-
winkel der
Componenten halbieren, was sich indirect auf dieselbe Weise wie in
§ 9 b nachweisen lässt, wofern man nämlich nur die entsprechende
Figur mit dem entsprechenden einwirkenden Körpersysteme um die
den rechten Kräfte-
winkel halbierende Symmetrieachse um 180° umge-
dreht sich denkt. Es ist demnach in diesem besonderen Falle $\alpha = \frac{\pi}{4}$,
wofern die Winkel, wie wir es von nun an fast durchwegs thun wollen,
im Bogenmaße ausgedrückt sind — aber es ist dann auch $\varphi = \frac{\pi}{4}$,
da in diesem Falle das entsprechende Kräftedreieck offenbar ein
gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck ist. Setzt man diese beson-
deren Werte in die allgemeine Gleichung $\alpha = k \cdot \varphi$ ein, so ersieht man,
dass $k = 1$, somit in allen Fällen auch $\alpha = \varphi$ ($\alpha' = \varphi'$ u. s. w.) ist.

Wegen der Gleichheit der Winkel α und φ ist die Richtung Ou
(Fig. 14) der Resultierenden zweier orthogonaler Componenten stets
übereinstimmend mit der vom Anfangspunkte a nach dem Endpunkte c
gehenden Richtung ac der Schlusseite des Kräftedreiecks. Es stellt
daher diese Schlusseite nach § 11 und 12 bei der graphischen Zu-
sammensetzung zweier orthogonaler Componenten die Resultierende
sowohl der Größe als der Richtung nach dar.

Wegen der Gleichheit des Dreieckswinkels φ mit dem Kräfte-
winkel (PR) ergeben sich aus dem Kräftedreiecke abc die Rela-
tionen:

$$\begin{aligned} P &= R \cdot \cos (PR) \\ Q &= R \cdot \sin (PR) \\ Q &= P \cdot \tan g (PR) \end{aligned}$$

welche, da R aus der Gleichung $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$ bestimmbar ist,
zur genauen Bestimmung des \cos , \sin , $\tan g$, kurz der gonyometri-
schen Functionen des Winkels (PR) und daher zur Bestimmung der
Größe dieses Winkels (PR) dienen. Analog ist auch

$$\begin{aligned} Q &= R \cos (QR) \\ P &= R \sin (QR) \end{aligned}$$

§ 13. Zerlegung einer Kraft in zwei orthogonale Componenten.

Aus den Entwicklungen des letzten Paragraphs ergibt sich, dass die orthogonalen Componenten immer kleiner als die Resultierende sein müssen und der Größe und Richtung nach graphisch durch die orthogonalen Projectionen der die resultierende Kraft darstellenden Strecke ac auf die Krafrichtungen der Componenten bestimmt sind, so dass die graphische Zerlegung einer Kraft in Componenten von gegebenen Richtungen mit Hilfe des rechtwinkligen Kräfte dreiecks abc (Fig. 14b), in welchem b die orthogonale Projection von c ist, sehr einfach auszuführen ist.

Ein für allemal sei hier die selbstverständliche Bemerkung beigefügt, dass man bei allen graphischen Lösungen schließlich jede Seite des gefundenen Kräfte dreiecks (resp. des später betrachteten Kräftepolygons) einzeln ohne Änderung ihrer Richtung parallel zu sich selbst verschoben zu denken hat, bis der Anfangspunkt derselben mit dem gegebenen Angriffspunkte O zusammenfällt, um so die wahren Kräfte richtungslinien zu erhalten.

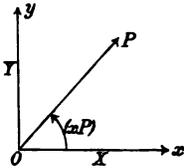
In den meisten Fällen handelt es sich, wie die späteren Entwicklungen lehren, darum, eine Kraft von beliebiger Richtung in eine parallel zur Abscissenachse und eine zweite parallel zur Ordinatenachse eines rechtwinkligen (oder auch schiefwinkligen) Achsensystems, in dessen Ebene die Richtung von P liegt, wirkende Componente zu zerlegen, welche Componenten stets kurzweg als die X -Componente (X) und Y -Componente (Y) bezeichnet werden mögen, und es ist dabei stets auch, da immer von dem allgemeinen Lehrsatz § 9d Anwendung gemacht wird, der algebraische Wert der entsprechenden Componenten in Rechnung zu ziehen, indem jene Componenten, die die positive Richtung der betreffenden Achse haben, als positiv, die entgegengesetzt gerichteten als negativ angesehen werden müssen.

Es sei hier ein für allemal bemerkt, dass stets, wenn von einer in einer bestimmten Richtung r wirkenden Componente P_r einer Kraft P (der „nach der Richtung r geschätzten Kraft“) die Rede ist, dabei stets stillschweigend vorausgesetzt ist, dass die zweite Componente in der durch die Richtung der Kraft P und die Richtung r gelegten Ebene senkrecht zur letzteren Richtung wirkt, also P_r nichts anderes als die X -Componente der Kraft P ist, wofern man die Richtung r zur positiven Richtung der x -Achse eines rechtwinkligen Achsensystems wählt, wobei ferner P_r positiv oder negativ ist, je nachdem P_r die Richtung r oder die dieser entgegengesetzte hat.

Der Richtungswinkel der Richtung einer Kraft P bezüglich der x -Achse eines rechtwinkligen Achsensystems, der stets durch das Zeichen (xP) bezeichnet werden möge, soll, wenn derselbe positiv

ist, stets durch eine von der positiven Richtung der x -Achse an beginnende positive Drehung entstanden gedacht werden, d. h. durch eine solche, welche die positive Richtung der x -Achse auf kürzestem Wege — nämlich durch eine Drehung von 90° — in die positive Richtung der y -Achse überführen würde. Welche Drehung demgemäß als positiv oder negativ zu bezeichnen ist, hängt bloß von der Wahl der positiven Achsenrichtungen der Koordinatenachsen ab.

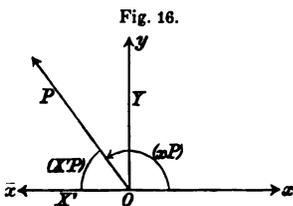
Fig. 15.



Der Einfachheit halber sei der Anfangspunkt des Koordinatensystems in den gemeinsamen Angriffspunkt O der Kräfte verlegt.

Ist der derart bestimmte Richtungswinkel (xP) ein Winkel des ersten Quadranten, also ein spitzer, so sind offenbar beide Komponenten X und Y (Fig. 15) positiv und $(xP) = (XP)$, daher (nach § 12) $X = P \cos (XP) = P \cos (xP)$ und $Y = P \sin (XP) = P \sin (xP)$.

Ist der Richtungswinkel (xP) ein Winkel des zweiten Quadranten (Fig. 16), so ist die Komponente X negativ, Y aber positiv; ist demnach der absolute Zahlwert der X -Komponente durch X' bezeichnet, so ist $X = -X'$, und



(nach § 12) $X' = P \cos (X'P)$, somit $X = -X' = -P \cos (X'P) = -P \cos [\pi - (xP)] = P \cos (xP)$ und ebenso $Y = P \sin (X'P) = P \sin [\pi - (xP)] = P \sin (xP)$. Für einen Richtungswinkel im dritten Quadranten (Fig. 17) findet man analog, da die X - und Y -Komponenten, deren absolute Zahlwerte durch X' und Y' bezeichnet seien, negativ sind:

$$X = -X' = -P \cos (X'P) = -P \cos [(xP) - \pi] = P \cos (xP)$$

$$Y = -Y' = -P \sin (X'P) = -P \sin [(xP) - \pi] = P \sin (xP)$$

und für einen Richtungswinkel des vierten Quadranten (Fig. 18)

Fig. 17.

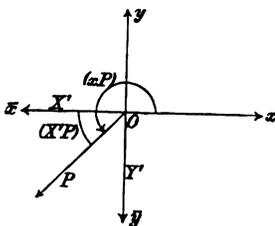
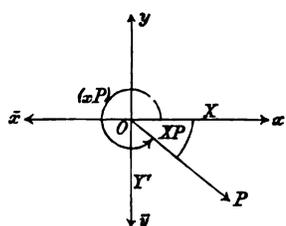


Fig. 18.



$$X = P \cos (XP) = P \cos [2\pi - (xP)] = P \cos (xP)$$

$$Y = -Y' = -P \sin (XP) = -P \sin [2\pi - (xP)] = P \sin (xP).$$

Man ersieht daraus, dass, mag der Richtungswinkel (xP) welchen Wert immer haben, stets die algebraischen Werte der X - und Y -Componenten durch die Gleichungen: $X = P \cdot \cos(xP)$, $Y = P \cdot \sin(xP)$ und allgemein die in der Richtung r wirkende Componente einer Kraft P (nach dieser Richtung geschätzte Kraft) dem Zeichen und Zahlwerte nach durch $P_r = P \cos(rP)$ bestimmt ist.

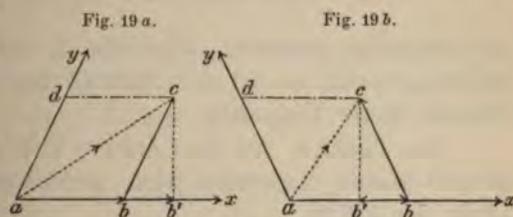
Übrigens ließe sich dieser Lehrsatz auch sofort aus dem bekannten Umstande, dass die X - und Y -Componente graphisch durch die Projectionen der die Kraft P darstellenden Strecke auf die x - und y -Achse dem Zeichen und Zahlwerte nach bestimmt sind, und aus dem bekannten Satze der Trigonometrie folgern, demzufolge der algebraische Wert der orthogonalen Projection einer Strecke auf die Haupt-, beziehungsweise Nebenachse (letztere Projection auch Antiprojection, Gegenprojection oder Nebenprojection genannt) gegeben ist durch das Product aus der Strecke und dem \cos , beziehungsweise \sin des Projectionswinkels, d. i. hier des Richtungswinkels (xP) .

Anmerkung. Ein negativer Richtungswinkel setzt eine negative Drehung voraus, nämlich eine Drehung, die zwar gleichfalls von der positiven x -Richtung aus beginnt, aber der positiven Drehung entgegengesetzt ist. Statt eines jeden positiven Richtungswinkels (xP) kann man ohne weiteres als Richtungswinkel (xP) in den früheren Gleichungen $X = P \cdot \cos(xP)$ und $Y = P \cdot \sin(xP)$ jenen Winkel verwenden, der den ersten (positiven) Winkel zu einem vollen Winkel ergänzt, vorausgesetzt, dass man denselben negativ in Rechnung bringt, also z. B. statt eines Winkels $(+210^\circ)$ den Winkel (-150°) , statt $(+290^\circ)$ den Winkel (-70°) , statt $(+3\frac{\pi}{2})$ den Winkel $(-\frac{\pi}{2})$ u. s. w.

§ 14. Zusammensetzung zweier beliebiger Kräfte. Kräftedreieck und Kräfteparallelogramm.

Es sei die Resultierende zweier Kräfte P und Q , die der Richtung und Größe nach durch ab und $ad = bc$ dargestellt sind, und deren Richtungen ax und ay entweder einen spitzen (Fig. 19 a) oder einen stumpfen (Fig. 19 b) Kräftewinkel einschließen, zu bestimmen.

Um auf graphischem Wege die Kräfte zusammenzusetzen, construirt man in derselben Weise, wie dies in § 11 S. 39 bei orthogonalen Componenten geschehen ist, das Kräftedreieck abc (Fig. 19 a und b); durch die Schlusseite ac des Kräftedreiecks ist auch hier in derselben Weise wie früher der Größe und Richtung nach die Resultierende bestimmt. Um dies nachzuweisen,



zerlege man die Kraft bc^*) nach § 13 mit Hilfe des rechtwinkligen Kräfte dreiecks $bb'c$ in zwei orthogonale Componenten, deren eine bb' die Richtung der Kraft ab (Fig. 19a), beziehungsweise die entgegengesetzte Richtung (Fig. 19b) hat, und deren zweite $b'c$ ist. Die Componenten ab und bb' führen nach § 9a, beziehungsweise § 9c zur Resultierenden ab' , und diese mit $b'c$ zusammengesetzt, ergibt nach § 12 S. 42 zur Schlussresultierenden ac .

Führt man von c eine Parallele zur Seite ab und vom Anfangspunkte a eine Parallele zur Richtung der zweiten Kraft bis zum Durchschnittspunkte d , so erhält man das Parallelogramm $abcd$, das den Namen „Kräfteparallelogramm“ führt. Unter dem Kräfteparallelogramm ist demnach jenes Parallelogramm zu verstehen, dessen Seiten ab und $ad = bc$ zwei auf denselben Angriffspunkt wirkende Componenten graphisch darstellen, d. h. die von einem Eckpunkte a ausgehenden Seiten desselben haben dieselben Richtungen ax und ay , wie die Componenten und sind diesen Componenten direct proportional (siehe § 2), so dass, wenn P und Q diese Componenten sind, $ab : ad = P : Q$ ist — oder, was bei entsprechender Wahl der Kraft- und Längeneinheit dasselbe besagt: es haben die Seiten dieselbe Maßzahl wie die gleichgerichteten Componenten. Damit letzteres stattfindet, muss, wenn S die zur Krafteinheit gewählte beliebige Kraft ist, und wenn die die Kraft P darstellende Seite ab willkürlich gewählt ist, die Längeneinheit l der Gleichung $P : S = ab : l$ Genüge leisten; es ist dann auch $Q : S = ad : l$.

Auf die frühere Beweisführung stützt sich das bekannte Gesetz des Kräfteparallelogramms, nämlich der Lehrsatz, dass in einem Kräfteparallelogramm die vom Anfangspunkte a geführte Diagonale die Resultierende der Kräfte graphisch darstellt, also dieselbe Richtung hat, und zudem die Größe der Resultierenden R mit Hilfe der Relation

$$ac : ab : ad = R : P : Q, \text{ bez. } R : S = ac : l$$

zu bestimmen gestattet. Wird also S zur Kraft- und l zur Längeneinheit gewählt, so ist die Maßzahl der Resultierenden gleich der Maßzahl dieser Diagonale.

Den Punkt a , von dem aus das Kräfte dreieck, respective Kräfteparallelogramm construirt wird, verlegt man öfters in den Angriffspunkt der Kräfte.

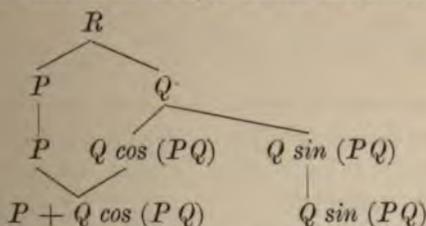
Anmerkung. Es ist wohl zu beachten, dass die gesammte in § 10 bis § 14 durchgeführte, scheinbar rein statische Deduction des Kräfteparallelogrammgesetzes auf dem einen unscheinbaren Satze § 10 d) basiert ist, welcher

*) Es sei von nun an erlaubt, statt des strengrichtigen Ausdruckes „die Kraft, welche durch die Strecke l dargestellt ist“, der Kürze halber in den meisten Fällen (siehe § 2) uns des Ausdruckes „die Kraft l “ zu bedienen.

aber das Princip der Zusammensetzung der Bewegungen (§. 5) zur Voraussetzung hat. Aus diesem letzteren Principe lässt sich nun, nachdem in der Dynamik die Beziehung zwischen Kraft und Beschleunigung festgestellt worden sein wird, der Satz des Parallelogramms der Kräfte auch auf einfacherem, kürzerem Wege deducieren (s. § 31 Anm.). Zu dem Satze des Kräfteparallelogramms ist zuerst der Holländer Sim. Stevin (geb. 1548, gest. 1620) bei seinen Untersuchungen über das Gleichgewicht an der schiefen Ebene gelangt. Klar ausgesprochen wurde das Princip des Kräfteparallelogramms zuerst von Newton in den „Principia philosophiae naturalis“ (1686) und in demselben Jahre auch (unabhängig von Newton) von Varignon (1654—1722).

Um durch Rechnung — unabhängig vom graphischen Verfahren — die Resultierende R der Kräfte, deren Maßzahlen P und Q seien, der Richtung und der Maßzahl (R) nach zu bestimmen, werde derselbe Weg wie früher eingeschlagen.

Die Richtung der Kraft P sei zur positiven Richtung der x -Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt, dessen Ebene die Kräfteebene und dessen Anfangspunkt der Angriffspunkt O der Kräfte ist, und als positive Drehung sei jene Drehung angenommen, welche die Richtung der Kraft P auf kürzestem Wege in jene der Kraft Q überführt, wodurch auch die positive Richtung der y -Achse mitbestimmt ist. Zerlegt man nun Q in ihre X - und Y -Componenten, so ist nach § 13 der algebraische Wert der ersteren durch $Q \cos(xQ) = Q \cos(PQ)$ und jener der letzteren durch $Q \cdot \sin(xQ) = Q \cdot \sin(PQ)$ bestimmt. Die erstere gibt mit P zusammengesetzt nach § 9 zur Resultierenden $P + Q \cos(PQ)$, die mit $Q \sin(PQ)$ zusammengesetzt zur Resultierenden R führt. Das entsprechende Kräfteschema ist folgendes:



Da demgemäß $P + Q \cos(PQ)$ die X -Komponente und $Q \sin(PQ)$ die Y -Komponente der Kraft R ist und diese Componenten nach § 13 auch durch $R \cos(xR) = R \cos(PR)$ bez. $R \sin(xR) = R \sin(PR)$ ausgedrückt sind, so ist

$$\left. \begin{aligned} R \cos(PR) &= P + Q \cos(PQ) \\ R \sin(PR) &= Q \sin(PQ) \end{aligned} \right\} (1)$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen vollständig die Größe R und die durch den Winkel (PR) gegebene Richtung der Resultierenden. Wenn man nämlich diese beiden Gleichungen quadriert und addiert, so erhält man die Maßzahl R der Resultierenden aus der Richtung

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos(PQ)} \quad (2)$$

und nachdem man den so gefundenen Wert in die beiden früheren Gleichungen (1) einsetzt, $\sin(PR)$ und $\cos(PR)$. Da der zu suchende Kräftewinkel (PR) ein spitzer oder stumpfer Winkel sein kann, so ist derselbe zwar nicht durch $\sin(PR)$, aber jedenfalls durch $\cos(PR)$ oder auch durch $\tan(PR)$ unzweideutig bestimmt. Diese letztere Function ergibt sich aber unmittelbar durch Division der Gleichungen (1); es ist nämlich

$$\tan(PR) = \frac{Q \sin(PQ)}{P + Q \cos(PQ)} \quad (3)$$

Den Gleichungen (1) und (3) analog würde man, wenn man die Richtung der Kraft Q zur positiven Richtung der x -Achse annehmen und im übrigen wie früher verfahren würde, finden:

$$\left. \begin{aligned} R \cos(QR) &= Q + P \cos(PQ) \\ R \sin(QR) &= P \sin(PQ) \\ \tan(QR) &= \frac{P \sin(PQ)}{Q + P \cos(PQ)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Zur wirklichen numerischen Berechnung hat man nur in der aus der ebenen Trigonometrie bekannten Weise diese Formeln so umzugestalten, dass sie für den Gebrauch der Logarithmen tauglicher werden.

Aus der zweiten Gleichung in (1) und in (4) ergibt sich der bemerkenswerte Satz:

$$\frac{P}{\sin(QR)} = \frac{Q}{\sin(PR)} = \frac{R}{\sin(PQ)} \quad (5)$$

d. h. in jedem aus zwei Kräften und ihrer Resultante bestehenden Kräftesysteme ist das Verhältnis einer jeden Kraft zu dem Sinus des Kräftewinkels der beiden anderen Kräfte für alle drei Kräfte dasselbe.

Es erhellt ohneweiters, dass die hier durchgeführte Deduction besonders in den Gleichungen (2) und (5) einen zweiten Nachweis des Lehrsatzes vom Kräftedreieck, beziehungsweise Kräfteparallelogramm in sich schließt, und dass man auch umgekehrt aus diesem Lehrsatz alle Gleichungen (1)—(5) ohneweiters trigonometrisch ableiten könnte.

Die Lehrsätze des § 9—12 sind offenbar in dem allgemeinen Satze des Kräfteparallelogramms mit inbegriffen, es übergeht nur im Falle des § 9 das Kräfteparallelogramm in eine „Kräftelinie“, im Falle des § 11 und 12 in ein „Kräfterechteck“.

Der Lehrsatz über das Kräftedreieck, beziehungsweise Kräfteparallelogramm lehrt auch sofort, dass zwei auf denselben Angriffspunkt wirkende Kräfte nur dann sich das Gleichgewicht halten

können, wenn dieselben entgegengesetzt gerichtet und gleich sind — was sich übrigens schon aus § 10 a und § 9 ergibt. — Eine weitere Folgerung aus diesem Lehrsatz ist die, dass die Differenz der beiden Componenten, und zwar sowohl $P-Q$, als $Q-P$, kleiner als die Resultierende, diese dagegen kleiner als die Summe der Componenten sein müsse, also

$$\begin{pmatrix} P-Q \\ Q-P \end{pmatrix} < R < P + Q.$$

Eines der Zeichen der Ungleichheit kann in das Gleichheitszeichen übergehen, und zwar findet dies nur in den im § 9 erörterten Fällen statt.

Sind die Componenten P und Q an Größe gleich, so wird das Kräftedreieck ein gleichschenkliges, und das Kräfteparallelogramm wird ein Rhombus. Es ist dann nach Gleichung (2)

$$R = P \sqrt{2 [1 + \cos (PQ)]} = 2 P \cos \frac{1}{2} (PQ),$$

was auch direct aus dem gleichschenkligen Kräftedreiecke leicht abgeleitet werden kann. Die Richtung der Resultierenden halbiert hier aus bekannten Gründen den Kräftewinkel der Componenten.

Soll die Resultierende R an Größe den Componenten gleich, also $P = Q = R$ sein, so muss der letzten Gleichung zufolge $\cos \frac{1}{2} (PQ) = \frac{1}{2}$, daher $\frac{1}{2} (PQ) = \frac{\pi}{3}$, somit $(PQ) = \frac{2}{3} \pi$ sein, d. h. der Kräftewinkel (PQ) muss die Größe von 120° haben. Das entsprechende Kräftedreieck ist dann ein gleichseitiges.

Je nachdem der Kräftewinkel (PQ) größer oder kleiner ist als 120° , ist $\cos \frac{1}{2} (PQ) < \frac{1}{2}$ oder $> \frac{1}{2}$, daher $R < P$ oder $R > P$.

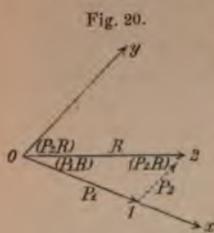
§ 15. Allgemeine Zerlegung einer Kraft in zwei Componenten.

Die Aufgabe der Zerlegung einer gegebenen Kraft R in zwei Componenten überhaupt ist eine unbestimmte, da durch die Resultierende R nur eine Seite ac des Kräftedreieckes abc (Fig. 19) gegeben ist und alle die unzähligen Kräftedreiecke, die über dieser Seite ac construiert werden können, der Aufgabe entsprechen.

Soll die Aufgabe der Zerlegung, demnach das Kräftedreieck, nicht unbestimmt sein, so müssen außerdem zwei Bestimmungen gegeben sein, und zwar können gegeben sein:

a) die Richtungen ox und oy beider Componenten P_1 und P_2 ,
 b) die Größe und Richtung der einen Componente P_1 , c) die Größe der einen Componente P_1 und die Richtung der anderen, oder d) die Größe beider Componenten. Stets ist die Aufgabe auf eine Aufgabe der Trigonometrie zurückzuführen.

Ad a) Diese Aufgabe der Zerlegung kommt am häufigsten, ja fast ausschließlich vor. Soll diese Aufgabe lösbar sein, so muss nach einem früheren Satze die Richtung 02 (Fig. 20) der Resultierenden R innerhalb des hohlen Winkels, den die gegebenen Richtungen ox und oy der Componenten einschließen, gelegen sein. Bei der graphischen Zerlegung ist offenbar derart zu verfahren, dass man von dem Endpunkte 2 der die Resultierende R darstellenden Strecke 02 etwa eine Parallele zu oy führt bis zum Durchschnitte 1 mit ox .



Die Seiten 01 und 12 des dadurch erhaltenen Kräfte-dreieckes stellen dann die Componenten P_1 und P_2 graphisch dar.

Bei der Berechnung der Werte von P_1 und P_2 hat man von der Gleichung (5) des früheren Paragraphs Anwendung zu machen, aus der sich, wenn $P_1 = P$ und $P_2 = Q$ gesetzt wird, ergibt

$$P_1 = R \cdot \frac{\sin(P_2 R)}{\sin(P_1 P_2)}, \quad P_2 = R \cdot \frac{\sin(P_1 R)}{\sin(P_1 P_2)} \quad (1)$$

Fallen die Richtungen ox und oy in die Richtung 02 , oder ist ox gleichgerichtet mit 02 , oy aber entgegengesetzt gerichtet, so ist die Aufgabe nach § 9 unbestimmt, da jeder der unzähligen Werte von P_1 und P_2 , die der Gleichung $R = P_1 + P_2$, bzw. $R = P_1 - P_2$ entsprechen, der Aufgabe Genüge leistet.

Ist eine Kraft P zu zerlegen in zwei Componenten X und Y , die parallel zu den Achsen eines im allgemeinen schiefwinkligen Achsensystems gerichtet sind, so sind, wie sich aus dem Gesagten sofort ergibt, diese Componenten dem Zeichen und Zahlwerte nach durch die Coordinaten x und y des Endpunktes der die Kraft P darstellenden Strecke bestimmt, wofern man den Anfangspunkt derselben auch zum Anfangspunkte des Coordinatensystems wählt. Hat aber der Anfangspunkt dieser Strecke die Coordinaten (x_1, y_1) , der Endpunkt die Coordinaten (x_2, y_2) , so sind die algebraischen Werte der beiden Componenten, wofern, wie bisher, die die Kräfteeinheit darstellende Strecke zur Längeneinheit gewählt wird, offenbar durch $X = x_2 - x_1$, $Y_2 = y_2 - y_1$ bestimmt.

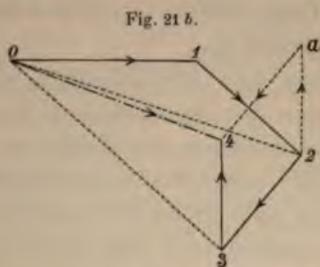
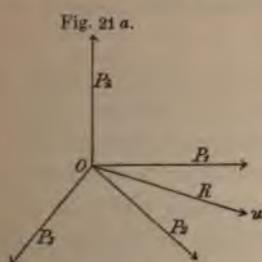
Sowohl die graphische, als die trigonometrische Lösung der Aufgaben b) c) d) können als Lösungen der Aufgabe, aus drei gegebenen Bestimmungsstücken eines Dreieckes (des Kräfte-dreieckes) die anderen zu bestimmen, als bekannte Probleme der Planimetrie und Trigonometrie vorausgesetzt und demgemäss hier übergangen werden.*)

*) In der ersten Auflage dieses Lehrbuches sind diese Probleme ausführlich behandelt.

§ 16. Zusammensetzung beliebig vieler in derselben Ebene wirkender Kräfte.

Wirken auf denselben Angriffspunkt O (Fig. 21 a) die Kräfte $P_1 P_2 P_3 P_4$ ein, deren Richtungen in derselben Ebene (der Ebene der Zeichnung) gelegen sind, so könnte man offenbar so vorgehen, dass man etwa von P_1 und P_2 nach § 14 die Resultierende P_{12} bestimmt, diese in gleicher Weise mit der dritten Kraft P_3 zu der Resultierenden P_{123} und letztere mit der Kraft P_4 zusammensetzt u. s. w. Die schliesslich erhaltene Resultierende R ist die Resultierende aller Kräfte.

Wendet man bei dieser Zusammensetzung das in § 14 erörterte graphische Verfahren an, und bezeichnet man die die Kräfte darstellenden Strecken in der in § 4 S. 16 angeführten Art und Weise, so gelangt man (Fig. 21 b) nach und nach zu den Kräftedreiecken 012 , 023 , 034 , in welchen 02 die Kraft P_{12} , 03 die Kraft P_{123} und 04



die Resultierende R aller Kräfte darstellt. Da es sich nur um die letztere handelt, so ist es nicht nothwendig, die punktierten Diagonalen $02, 03 \dots$ zu ziehen, so dass nur der Polygonalzug 01234 sowie in früheren Fällen derart zu construieren ist, dass man die die einzelnen Kräfte $P_1 P_2$ u. s. w. darstellenden Strecken $01, 12, \dots$ in der Weise aneinandertzufügen hat, dass der Endpunkt der früheren Strecke stets mit dem Anfangspunkte der folgenden zusammenfällt. Die den Anfangspunkt 0 dieses Polygonalzuges mit dem Endpunkte 4 desselben verbindende Schlusseite des Polygons 01234 stellt in ihrer vom Anfangspunkte 0 nach dem Endpunkte 4 gehenden Richtung oder in der zu dieser parallelen $0u$ (Fig. 21 a) die Richtung und in ihrer Länge 04 die Größe der Resultierenden R aller Kräfte dar. Das auf die eben angeführte Weise erhaltene Polygon 01234 nennt man das „Kräftepolygon“ und bezeichnet dasselbe, wenn, wie hier vorausgesetzt wurde, der Endpunkt n des den n Kräften $P_1 P_2 \dots P_n$ entsprechenden Polygonalzuges $0123 \dots n$ vom Anfangspunkte 0 desselben verschieden ist, in der graphischen Statik gewöhnlich als ein „offenes Kräftepolygon“.

Die Ordnung, in welcher die Kräfte zusammengesetzt werden, demnach auch die Reihenfolge, in welcher die Seiten des Polygonalzugcs in der erwähnten Art und Weise aneinandergereiht werden, ist eine ganz beliebige, wie sich dies schon aus dem Gesagten ergibt; übrigens lässt sich auch leicht direct zeigen, dass man bei dieser Anreihung die Reihenfolge zweier beliebiger unmittelbar aufeinander folgenden Seiten, etwa der Seiten 23 und 34, wie dies das Parallelogramm 234 *a* sofort lehrt, unkehren kann, wodurch man durch entsprechende Permutationen zu jeder möglichen Aufeinanderfolge der Seiten gelangen kann.

Das Kräftepolygon gestattet nicht nur die Resultierende aller überhaupt einwirkenden, sondern auch jene einer beliebigen Zahl der in der angenommenen Reihenfolge aufeinander folgenden Kräfte zu bestimmen, indem offenbar eine jede Diagonale des Kräftepolygons, z. B. 13, die den Anfangs- und Endpunkt eines Linienzuges 123 dieses Polygons verbindet, die Resultierende jener Kräfte darstellt, deren Componenten durch die Seiten 12 und 23 dieses Linienzuges repräsentiert sind.

Aus dem hier Gesagten ist sofort zu ersehen, dass man das Verfahren der geometrischen Summation von Vektoren ohne weiteres auf die Größenart der Kräfte in Anwendung bringen kann.

Als Vectorgröße oder kurzweg als Vector bezeichnet man nämlich eine jede Größe, für deren Charakterisierung nicht nur ihr Zahlenwert, sondern auch eine bestimmte Richtung im Raume massgebend ist, die sonach durch eine Strecke von bestimmter Länge und Richtung darstellbar ist. In diesem Sinne ist demgemäß auch eine jede Kraft eine Vectorgröße. Fügt man nun die einzelnen Vektoren darstellenden Strecken, wie dies im Früheren wiederholt schon geschehen ist, in irgend einer Reihenfolge, jedoch mit Beibehaltung ihrer Länge und Richtung, also durch einfache Parallelverschiebung derart aneinander, dass immer der Endpunkt einer jeden vorangehenden Strecke (Seite) zugleich auch der Anfangspunkt der folgenden Strecke (Seite) wird, und zieht vom Anfangspunkte (0) der ersten Seite des so gebildeten Polygonalzugcs $\overline{012\dots n}$ eine Gerade nach dem Endpunkte (*n*) der letzten Seite, so nennt man den durch diese von 0 nach *n* gerichtete Schlusseite $\overline{0n}$ dargestellten Vector allgemein die geometrische Summe oder die Resultante (resultierender Vector) der durch die einzelnen Seiten des Polygonalzugcs $\overline{012\dots n}$ dargestellten Vectorgrößen, welche letzteren Summanden man allgemein als Componenten (componentale Vektoren) dieser Resultanten bezeichnet. Als Operationszeichen der geometrischen Summation (Addition) sei zum Unterschiede von dem Zeichen + der algebraischen Addition in der Folge das Zeichen $\hat{+}$ angewendet. Als Zeichen der geo-

metrischen Gleichheit, d. h. der Übereinstimmung zweier Vektoren sowohl in ihrer Größe, als auch in ihrer Richtung soll stets zum Unterschiede von dem Zeichen (\equiv) der algebraischen Gleichheit das Zeichen ($\hat{=}$) zur Anwendung kommen. Demgemäß ist in dem früheren Beispiele (Fig. 21 a und b)

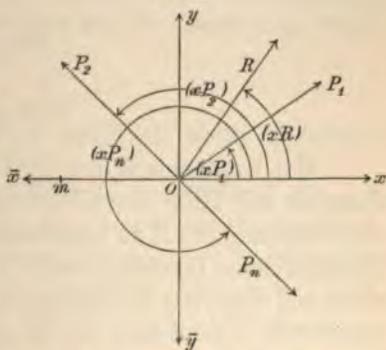
$$\begin{aligned} R &\hat{=} P_1 \hat{+} P_2 \hat{+} P_3 \hat{+} P_4 \\ \overline{04} &\hat{=} \overline{01} \hat{+} \overline{12} \hat{+} \overline{23} \hat{+} \overline{34} \end{aligned}$$

In dem besonderen Falle, dass alle Kräfte in derselben Geraden, theils in der einen, theils in der entgegengesetzten Richtung wirken (§ 9 d), ist die geometrische Summe identisch mit der algebraischen Summe, bei welcher die Qualitätszeichen der einzelnen Summanden zu beachten sind, und das Zeichen $\hat{=}$ ist dann ersetzbar durch das algebraische Gleichheitszeichen $=$; sind zudem alle Kräfte gleichgerichtet (§ 9 a), so wird die geometrische und auch die algebraische Summe zu der gewöhnlichen arithmetischen Summe, d. h. es sind bloß die absoluten Zahlwerte der einzelnen Kräfte zu addiren.

Anmerkung. Sind P_1 und P_2 die durch $\overline{01}$ und $\overline{12}$ dargestellten Componenten von R (Fig. 20), so ist $R \hat{=} P_1 \hat{+} P_2$, beziehungsweise $\overline{02} \hat{=} \overline{01} \hat{+} \overline{12}$, sonach P_2 , beziehungsweise $\overline{12}$ die geometrische Differenz aus dem Minuenden R , beziehungsweise $\overline{02}$ und dem Subtrahenden P_1 , beziehungsweise $\overline{01}$, so dass, wenn man das Operationszeichen $\hat{=}$ als Zeichen der geometrischen Subtraction anwendet, $P_2 \hat{=} R \hat{-} P_1$, beziehungsweise $\overline{12} \hat{=} \overline{02} \hat{-} \overline{01}$. Addirt man nun im früher betrachteten geometrischen Sinne auf beiden Seiten der früheren Gleichung $R \hat{=} P_1 \hat{+} P_2$, beziehungsweise $\overline{02} \hat{=} \overline{01} \hat{+} \overline{12}$ den dem Vector P_1 , beziehungsweise $\overline{01}$ entgegengesetzt gleichen Vector ($-P_1$, beziehungsweise $\overline{10}$ hinzu, so gelangt man, da die entgegengesetzt gerichteten Vektoren P_1 und ($-P_1$), beziehungsweise $\overline{01}$ und $\overline{10}$ zur geometrischen (und auch algebraischen) Summe Null ergeben, zu der Gleichung $P_2 \hat{=} R \hat{+} (-P_1)$, beziehungsweise $\overline{12} \hat{=} \overline{02} \hat{+} \overline{10}$. Die Vergleichung dieser Gleichung für P_2 , beziehungsweise $\overline{12}$ mit der früheren Gleichung für dieselbe Größe lässt sofort ersehen, dass es auf dasselbe hinauskommt, ob man von irgend einer Vectorgröße R , beziehungsweise $\overline{02}$ eine beliebige zweite Vectorgröße P_1 , beziehungsweise $\overline{01}$ geometrisch subtrahiert oder aber zu der ersten R , beziehungsweise $\overline{02}$, die dem Subtrahenden P_1 , beziehungsweise $\overline{01}$ entgegengesetzt gleiche Vectorgröße ($-P_1$), beziehungsweise $\overline{10}$ geometrisch hinzuaddiert.

Um durch Rechnung die Resultierende R der auf den Punkt O einwirkenden, der Größe und Richtung nach gegebenen Kräfte $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ (Fig. 22) zu bestimmen, verfährt man gewöhnlich derart, dass man in der Kräfteebene ein beliebiges Achsensystem annimmt,

Fig. 22.



dessen Anfangspunkt etwa der Punkt O ist, und eine jede der Kräfte nach der früher auseinandergesetzten Art und Weise in ihre X - und Y -Componente zerlegt, alle X -Componenten zu einer Kraft R_x , alle Y -Componenten zu einer Kraft R_y und schließlich die beiden Kräfte R_x und R_y zur Gesamtresultierenden R zusammensetzt. Werden zur Unterscheidung der X - und Y -Componenten der einzelnen Kräfte die Indices dieser Kräfte gewählt, so ist stets nach § 9 *d* der algebraische Wert von R_x und R_y bestimmt durch $R_x = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \Sigma X^*$, $R_y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \Sigma Y$.

Ist das Coordinatensystem ein orthogonales, so ist nach § 13

$$\begin{aligned} X_1 &= P_1 \cdot \cos(x P_1), & X_2 &= P_2 \cos(x P_2) \dots X_n = P_n \cos(x P_n) \\ Y_1 &= P_1 \cdot \sin(x P_1), & Y_2 &= P_2 \sin(x P_2) \dots Y_n = P_n \sin(x P_n) \end{aligned}$$

wo die Richtungswinkel $(x P)$ bei der Wahl des in Fig. 22 verzeichneten Achsensystems, wenn dieselben positiv in Rechnung gebracht werden, in dem in Fig. 22 angedeuteten Drehungssinne, wenn negativ, im entgegengesetzten Drehungssinne angenommen werden müssen.

Demnach ist

$$\begin{aligned} R_x &= \Sigma X = P_1 \cos(x P_1) + P_2 \cos(x P_2) + \dots + P_n \cos(x P_n) = \left. \begin{aligned} &\Sigma [P \cos(x P)]^* \\ R_y &= \Sigma Y = P_1 \sin(x P_1) + P_2 \sin(x P_2) + \dots + P_n \sin(x P_n) = \end{aligned} \right\} (1) \\ &\Sigma [P \sin(x P)] \end{aligned}$$

Da R die Resultierende der beiden orthogonalen Componenten, deren algebraische Werte R_x und R_y durch die Gleichungen (1) bestimmt sind, ist, so ist zufolge des § 13 auch

$$R_x = R \cdot \cos(x R) \text{ und } R_y = R \cdot \sin(x R) \text{ und demnach}$$

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (2) \text{ und} \\ \left. \begin{aligned} \cos(x R) &= \frac{R_x}{R} \\ \sin(x R) &= \frac{R_y}{R} \\ \text{tang}(x R) &= \frac{R_y}{R_x} \end{aligned} \right\} (3) \end{aligned}$$

Man hat demnach, um die Größe der Resultierenden zu bestimmen, zunächst mit Hilfe der Gleichungen (1) R_x und R_y und hierauf aus der Gleichung (2) R zu berechnen; zur Bestimmung der Richtung der Resultierenden berechnet man dann mittels der Gleichungen (3) den Cosinus und Sinus des Richtungswinkels $(x R)$, durch welche beiden gonyometrischen Functionen der Winkel $(x R)$ unzweideutig bestimmt ist.

*) Die Summe aller Glieder von der Form $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ sei stets kürzlicher durch $\sum_1^n u_x$ oder einfacher durch Σu bezeichnet.

Offenbar genügt es auch, außer einer der Functionen, nämlich des Cosinus oder des Sinus oder der Tangente, nur noch das Zeichen einer zweiten zu kennen, um den Winkel (xR) vollkommen zu bestimmen.

Sollte sich der besondere Fall ergeben, dass entweder R_x , d. i. ΣX oder R_y , d. i. $\Sigma Y = 0$ ist, so ist dies ersichtlicherweise ein Zeichen, dass R_y , bezw. R_x die Resultierende ist, diese also zur y -Achse, bezw. x -Achse parallel gerichtet ist. Jedenfalls muss aber, falls eine Resultierende sich ergeben soll, wenigstens eine der Summen ΣX und ΣY von Null verschieden sein, also die Bedingung $(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 > 0$ erfüllt werden.

Zu denselben Gleichungen (1), (2), (3) würde man auch durch Gleichsetzung der orthogonalen Projection der Schlusseite 04 (Fig. 21 b) des Kräftepolygons einerseits und jener des offenen Kräftepolygonalzuges 01234 andererseits auf die x - und y -Achse gelangen, wenn man die bekannten Sätze in Anwendung bringen würde, dass die orthogonale Projection einer Strecke auf die Haupt-, beziehungsweise Nebenachse ihrem algebraischen Werte nach durch das Product aus dieser Strecke in den Cosinus, beziehungsweise Sinus des Projectionswinkels gegeben ist, und dass die Projection eines continuierlichen Polygonalzuges gleich kommt der algebraischen Summe der Projectionen der einzelnen Seiten desselben.

Es empfiehlt sich, für die positive Richtung der x -Achse bei Anwendung der Gleichungen (1), (2), (3) die Richtung irgend einer der gegebenen Kräfte, etwa P_1 zu wählen, so dass dann etwa $(xP_1) = 0$ ist.

Die Zerlegung einer Kraft in mehrere, etwa n -Componenten führt auf die Aufgabe, ein Polygon von $(n + 1)$ Seiten, nämlich das Kräftepolygon, zu construieren, dessen eine Seite gegeben ist. Diese Aufgabe ist offenbar höchst unbestimmt und wird erst bestimmt, wenn außerdem etwa die Größe und Richtung von $(n - 1)$ Seiten, demnach die Größe und Richtung von $(n - 1)$ Componenten oder überhaupt $2(n - 1) = 2n - 2$ Bestimmungsstücke für die gesuchten n -Componenten gegeben sind.

§ 17. Statische Momente von Kräften bezüglich eines Punktes m .

Es sei m ein beliebiger, in der Kräfteebene der Kräfte $P_1 P_2 \dots P_n$ (Fig. 23) gelegener Punkt und die Richtung von m nach dem gemeinsamen Angriffspunkte O sei zur positiven Richtung der Abcissenachse eines orthogonalen Coordinatensystems gewählt. Als positive Richtung der Ordinatenachse y sei irgend eine der beiden Richtungen der auf mO senkrechten Achse angenommen, so dass im Sinne des § 13 die Drehung, die als positive zu bezeichnen ist, durch jene Drehung, durch welche die positive Richtung der x -Achse auf kürzestem Wege

in die positive Richtung der y -Achse übergeführt wird, bestimmt, also bloß durch die Wahl der positiven Richtung der y -Achse bedingt ist.

Die positive Maßzahl der Strecke mO sei r .

Bestimmt man aus den Gleichungen in (1) und (3) (§ 16) die Werte von R_y , so ergibt sich aus der Gleichsetzung derselben, dass

$$R \cdot \sin(xR) = P_1 \cdot \sin(xP_1) + P_2 \cdot \sin(xP_2) + \dots + P_n \cdot \sin(xP_n)$$

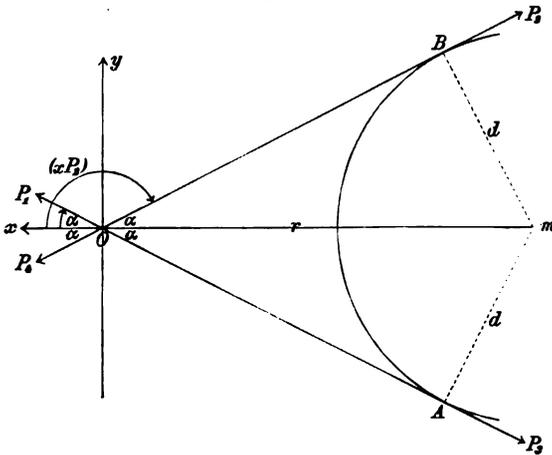
ist. Multipliziert man diese Gleichung mit r und bezeichnet man durch M_P ein Product von der Form

$$M_P = P \cdot r \sin(xP) \quad (1)$$

so findet man

$$M_R = M_{P_1} + M_{P_2} \dots + M_{P_n} = \Sigma M_P \quad (2)$$

Fig. 23.



Um die Bedeutung von M_P festzustellen, seien die einzelnen möglichen Fälle, in welchen der Winkel (xP) ein Winkel des ersten, zweiten, dritten oder vierten Quadranten ist, welche Fälle durch die entsprechenden Indices 1 2 3 4 unterschieden seien, einzeln in Betrachtung gezogen. Der Gleichung (1) und der Figur 23 entsprechend ist, wenn durch d der absolute Zahlwert des Abstandes des Punktes m von der Richtungslinie der Kraft und durch α der spitze Winkel bezeichnet ist, den r mit der Richtungslinie der Kraft in irgend einem dieser vier Fälle einschließt,

$$M_{P_1} = P_1 \cdot r \sin(xP_1) = P_1 \cdot r \sin \alpha = P_1 d$$

$$M_{P_2} = P_2 \cdot r \sin(xP_2) = P_2 \cdot r \sin(\pi - \alpha) = P_2 \cdot r \sin \alpha = P_2 d$$

$$M_{P_3} = P_3 \cdot r \sin(xP_3) = P_3 \cdot r \sin(\pi + \alpha) = -P_3 \cdot r \sin \alpha = -P_3 d$$

$$M_{P_4} = P_4 \cdot r \sin(xP_4) = P_4 \cdot r \sin(2\pi - \alpha) = -P_4 \cdot r \sin \alpha = -P_4 d$$

Würde man die Kraft P nach dem Fußpunkte A , bez. B der Normalen d ohne Änderung ihrer jeweiligen Größe und Richtung

versetzen und den Momentenpunkt m für einen Augenblick festhalten, so würde in den beiden ersten Fällen, in denen M_P den positiven Wert $P_1 d$, bez. $P_2 d$ hat, die Kraft P_1 , bez. P_2 die Normale $m A$, bez. $m B$ im positiven Sinne (nämlich bei der in Fig. 23 getroffenen Wahl für die positive Richtung der x - und y -Achse im Sinne des Uhrzeigers) drehen, dagegen in den beiden letzten Fällen, in denen M_P den negativen Wert $-P_3 d$, bez. $-P_4 d$ hat, würde eine Drehung im negativen Sinne stattfinden.

Dieses Product $M_P = \pm P d$ aus der Kraft P in den senkrechten Abstand d ihrer Richtungslinie vom Punkte m — positiv oder negativ genommen, je nachdem unter den eben angeführten Umständen eine Drehung dieser Normalen d im positiven und negativen Sinne stattfinden würde — bezeichnet man als das statische Moment, Drehungsmoment oder kurz als das Moment der Kraft P bezüglich des Punktes m .

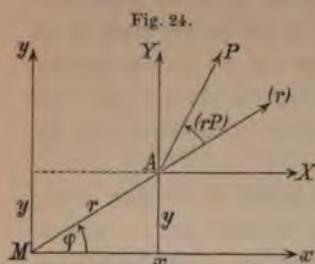
Den Punkt m nennt man den Momentenpunkt, Momentenpol oder das Momentencentrum, die Senkrechte $m A$, bez. $m B$ den Arm oder Hebelarm der Kraft P für den Momentenmittelpunkt m .

Es bedarf nicht erst einer näheren Auseinandersetzung, dass bei der in Fig. 22 getroffenen Wahl des Achsensystems die Drehung im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers als positive bezeichnet werden müsste, demnach die Momente der Kräfte, denen eine Drehung des Armes im Sinne des Uhrzeigers entspricht, negativ in Rechnung kommen müssten.

Der früheren Definition des Kraftmomentes entsprechend, kann zur graphischen Darstellung desselben die Fläche jenes Dreieckes dienen, dessen Spitze der Momentenpunkt, dessen Basis die die Kraft darstellende Strecke und dessen Höhe der Kraftarm ist. Dieses Dreieck bezeichnet man als das Momentendreieck. Die Maßzahl dieser Dreiecksfläche — positiv oder negativ genommen, je nach dem früheren Drehungssinn — kommt stets, wofern die Kräfteeinheit durch die Längeneinheit dargestellt ist, der halben Maßzahl des Drehungsmomentes gleich. In der Fig. 25 ist MOB das Momentendreieck für die Kraft P , MOD jenes für die Kraft Q , wenn M der Momentenpunkt ist.

Die Gleichung (2) drückt den wichtigen — schon von Varignon*) gefundenen — Satz, den sogenannten Momentensatz, aus, demzufolge stets das statische Moment (Drehungsmoment) M_R der resultierenden Kraft bezüglich eines beliebigen Punktes der Kräfteebene gleich ist der algebraischen Summe der Momente (der Drehungsmomente) der einzelnen Componenten bezüglich desselben Punktes, wofern alle Kräfte in derselben Ebene wirken.

*) Varignon, „Projet d'une nouvelle mécanique“ (Paris 1687).



Wenn man nicht die Richtung des Radius r , d. i. jene vom Momentenpunkte M nach dem Angriffspunkte A der Kräfte (Fig. 24) gehende Richtung zur Richtung der positiven Abscissenachse annimmt, sondern ein beliebiges orthogonales Achsensystem wählt, dessen Anfangspunkt der Momentenpol M ist, so lässt sich das Moment M_P durch die Koordinaten x und y des Angriffspunktes und die X - und Y -Komponente der Kraft P folgendermaßen bestimmen: Zuzufolge der Gleichung (1) ist für den vorliegenden Fall, wenn man die positive Richtung MA des Radius vectors r auch kurzweg durch r und den Polarwinkel (xP) durch φ bezeichnet:

$$M_P = P \cdot r \sin (rP) = P \cdot r \sin [(xP) - (xr)] = P \cdot r \sin [(xP) - \varphi]$$

Entwickelt man in bekannter Weise den Sinus der Differenz $(xP) - \varphi$ und setzt nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie der Ebene $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, so erhält man:

$$M_P = x \cdot P \sin (xP) - y \cdot P \cos (xP) = xY - yX \quad (3)$$

Dass diese Relation nicht nur für den der Fig. 24 zugrunde liegenden einfachen Fall, sondern ganz allgemein gültig ist, ergibt sich aus der eben durchgeführten, von der Fig. 24 ganz unabhängigen Deduction. In Fig. 24 sind x , y , X , Y sämtlich positiv, ferner x der Arm von Y , y der Arm von X , sonach xY das statische Moment der Komponente Y und $(-yX)$ jenes der Komponente X , also in der That dem früheren Momentensatze entsprechend $M_P = xY - yX$.

Die Einheit für die statischen Momente der Kräfte ergibt sich, wenn man die Maßzahl des Momentes, nämlich $M_P = \pm Pd = 1$ setzt, also etwa die Maßzahlen $P = 1$ und $d = 1$ annimmt, d. h. als Momenteneinheit ist das statische Moment der Kräfteinheit anzunehmen, sofern ihre Richtungslinie vom Momentpole einen Abstand hat, der der Längeneinheit gleich ist. Wählt man zur Kräfteinheit 1 Kilogramm und zur Längeneinheit 1 Meter, so heißt die entsprechende Momenteneinheit, d. i. das Moment einer Kraft von 1 Kilogramm, deren Arm 1 Meter ist, kurzweg das Moment eines „Kilogrammeters“ (oder mitunter auch „Meterkilogramms“).

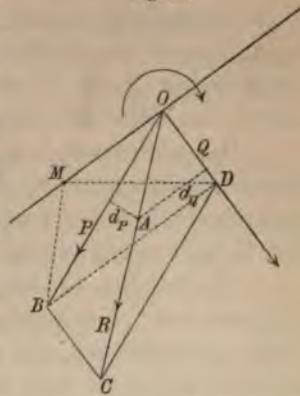
Ist der Arm der Resultierenden R durch D bezeichnet, so ist $M_R = \pm R \cdot D$. Ist demnach $D = 0$, so ist $M_R = 0$, daher der Gleichung (2) zufolge auch $M_{P_1} + M_{P_2} + \dots + M_{P_n} = 0$, d. h. die algebraische Summe der statischen Momente (Drehmomente) aller Komponenten für einen in der Richtungslinie der Resultierenden gelegenen Punkt ist in jedem Falle gleich Null.

Von diesem Lehrsatz ist aber die Umkehrung nicht allgemein gültig; denn ist $\sum M_P = 0$, so ist nach (2) auch M_R oder $\pm RD = 0$; es kann aber das letztere Product in zwei Fällen Null werden, wenn entweder $R = 0$ oder aber $D = 0$ ist; nur wenn der erste Fall ausgeschlossen ist, die Kräfte sich also nicht das Gleichgewicht halten, ist mit Bestimmtheit $D = 0$, d. h. halten sich mehrere auf denselben Angriffspunkt wirkende Kräfte nicht das Gleichgewicht und ist die Momentsumme derselben für einen Punkt M gleich Null, so liegt dieser Punkt in der Richtungslinie der Resultierenden dieser Kräfte.

Bringt man die beiden letzten Lehrsätze auf den besonderen Fall, in welchem zwei Kräfte P und Q (Fig. 25), die nicht entgegengesetzt gleich sind, auf denselben Angriffspunkt O einwirken, in Anwendung und bezeichnet man durch M_P und M_Q die Momente der Kräfte bezüglich irgend eines Punktes A , der in der Richtungslinie der Resultierenden R liegt, so ergibt sich zunächst, dass $M_P + M_Q = 0$ oder $M_P = -M_Q$ ist. Wählt man demnach etwa den durch den Pfeil angedeuteten Sinn der Drehung zum positiven und bezeichnet durch d_P und d_Q die senkrechten Abstände der Richtungslinien der beiden Kräfte P und Q von dem Punkte A , so ist $Q \cdot d_Q + (-P \cdot d_P) = 0$ oder $P : Q = d_Q : d_P$, d. h. die Momente M_P und M_Q zweier Kräfte bezüglich eines beliebigen Punktes der Richtungslinie ihrer Resultierenden sind entgegengesetzt gleich oder — was dasselbe besagt — es sind die Kräfte P und Q den Entfernungen ihrer Richtungslinien von diesem Punkte invers proportional. Ebenso ist umgekehrt, wenn die Momente zweier nicht entgegengesetzt gerichteter Kräfte P und Q (Fig. 25) bezüglich irgend eines Punktes entgegengesetzt gleich sind, dieser Punkt ein Punkt der Richtungslinie der Resultierenden.

Sind die Momente M_P und M_Q der beiden Kräfte P und Q (Fig. 25) bezüglich eines Punktes M einander gleich (dem Zahlwerte und dem Zeichen nach), so darf der Punkt M nicht innerhalb der Winkelfläche des Kräftewinkels (PQ) oder seines Scheitelwinkels gelegen sein, da sonst die Momente M_P und M_Q entgegengesetzt bezeichnet sein müssten, ferner muss dann, wenn $OBCD$ das entsprechende Kräfteparallelogramm ist, das Momentendreieck MOB , dessen Fläche die Maßzahl des halben Moments M_P hat, dem Momentendreiecke MOD , dessen Fläche zur Maßzahl $\frac{1}{2} M_Q$ hat, flächen-

Fig. 25.



gleich sein, daher müssen, da man MO als die gemeinsame Basis der Dreiecke betrachten kann, die Punkte B und D von der Basis MO gleich weit entfernt, somit $MO \parallel BD$ sein, d. h. es liegt, wenn $M_P = M_Q$ ist, der Momentenpunkt in einer durch den Angriffspunkt O zur zweiten Diagonale BD des Kräfteparallelogramms geführten Parallelen.

§ 18. Gleichgewicht von Kräften, die in derselben Ebene wirken.

In § 16 wurde bei der graphischen Zusammensetzung der Kräfte $P_1 P_2 \dots P_n$ bloß der Fall untersucht, in welchem der Endpunkt n des diesen Kräften entsprechenden Kräftepolygonzuges $0123\dots n$ eine von dem Anfangspunkte 0 desselben verschiedene Lage hat, so nach das Kräftepolygon ein offenes ist. In diesem Falle ergab sich eine durch $0n$ dargestellte Resultierende. Sollte nun der zweite noch mögliche Fall eintreten, dass für ein bestimmtes Kräftesystem n mit 0 zusammenfällt, so ist die durch die Seite $0 \overline{n-1}$ dargestellte Resultierende der Kräfte $P_1 P_2 \dots P_{n-1}$ der letzten durch $n-1 \overline{n}$ dargestellten Kraft P_n entgegengesetzt gleich, so dass sich diese Kräfte das Gleichgewicht halten.

Das nothwendige und hinreichende graphische Kennzeichen des Gleichgewichtes der Kräfte $P_1 P_2 \dots P_n$ ist sonach das Zusammenfallen des Endpunktes n des diesen Kräften entsprechenden Kräftepolygonzuges $012\dots n$ mit dessen Anfangspunkte.

Ein solches Kräftepolygon wird dann gewöhnlich als ein „geschlossenes“ Kräftepolygon bezeichnet. Hat man demnach jene Kraft zu bestimmen, die einem gegebenen Kraftsystem $P_1 P_2 \dots P_n$ das Gleichgewicht hält, so hat man nur den Endpunkt n des entsprechenden Kräftepolygonzuges mit dem Anfangspunkte 0 zu verbinden, $n0$ stellt dann die gesuchte Kraft dar. So repräsentiert in dem der Fig. 21 b zugrunde liegenden Kräftesystem $P_1 P_2 P_3 P_4$ die Seite 40 die diesem Kräftesystem das Gleichgewicht haltende Kraft.

Um auch auf dem Wege der Rechnung zu untersuchen, wann sich die Kräfte des Kraftsystems $P_1 P_2 \dots P_n$ das Gleichgewicht halten, hat man dem § 8 zufolge nur zu bestimmen, wann sich keine Resultierende ergibt, und demnach zurückzugehen auf die Grundgleichungen des § 16 S. 54, nämlich $R_x = \Sigma X$, $R_y = \Sigma Y$. Da sich aus den Componenten R_x und R_y , deren Richtungen einen jedenfalls von 180° verschiedenen Winkel einschließen, dann, aber nach § 10 a auch nur dann, keine Resultierende ergibt, wenn sowohl ΣX als ΣY Null ist, so drücken die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \Sigma X = X_1 + X_2 + \dots + X_n \\ 0 &= \Sigma Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \end{aligned} \right\} 1a$$

oder, wenn das Achsensystem ein orthogonales ist, die analogen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} O = \Sigma [P \cos(xP)] &= P_1 \cos(xP_1) + P_2 \cos(xP_2) + \dots + P_n \cos(xP_n) \\ O = \Sigma [P \sin(xP)] &= P_1 \sin(xP_1) + P_2 \sin(xP_2) + \dots + P_n \sin(xP_n) \end{aligned} \right\} 1b$$

die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen des Gleichgewichtes aus.

Diese Gleichgewichtsbedingungen sind von der Lage der Coordinatenachsen ganz unabhängig.

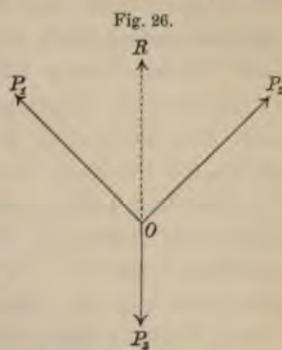
Wählt man einen beliebigen in der Kräfteebene gelegenen Punkt m zum Momentenpunkte und die Richtung von diesem Punkte m nach dem Angriffspunkte O der Kräfte zur positiven Richtung der Abscissenachse, so ergibt sich durch die Multiplication der letzten Gleichung mit der Maßzahl r des Abstandes mO auf eine jener im § 17 ganz analogen Weise, dass auch

$$\Sigma M_P = M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3} + \dots + M_{P_n} = 0 \quad (2)$$

sei, d. h. halten sich die Kräfte eines Kräftesystems das Gleichgewicht, so ist die algebraische Summe der Momente derselben bezüglich irgend eines beliebigen in der Kräfteebene gelegenen Punktes gleich Null.

Der Umstand, dass diese Summe $\Sigma M_P = 0$ sei, ist demnach für das Bestehen des Gleichgewichtes wohl nothwendig, jedoch nicht hinreichend, denn zufolge der Lehrsätze des § 17 kann ΣM_P auch dann Null werden, wenn die Kräfte eine Resultierende haben und der gewählte Momentenpunkt m zufällig in der Richtungslinie dieser Resultierenden gelegen ist. Da demnach in diesem Falle die Gerade, die den Punkt m mit dem Angriffspunkte O verbindet, die Richtungslinie der etwa stattfindenden Resultierenden sein könnte, so braucht man, wenn man schon die Gleichung (2) zur Prüfung des Gleichgewichtszustandes benützen will, nur einen zweiten Momentenpunkt m' zu wählen, der nicht in der Geraden mO liegt, und zu untersuchen, ob nicht nur für den früher gewählten Punkt m , sondern auch für diesen neuen Momentenpol m' die algebraische Momentensumme Null ist. Ist letzteres der Fall, so müssen, da die sich schneidenden Geraden mO und $m'O$ unmöglich beide gleichzeitig die Richtungslinien der einen Resultierenden sein können, die Kräfte sich nothwendigerweise das Gleichgewicht halten.

Soll in dem besonderen Falle, dass nur drei Kräfte P_1 , P_2 und P_3 (Fig. 26) auf den Punkt O einwirken, das Gleichgewicht herrschen,



so müssen, da dann die Resultierende R zweier beliebiger Kräfte, z. B. P_1 und P_2 , deren Richtung in den Kräftewinkel $(P_1 P_2)$ hineinfällt, der dritten Kraft P_3 das Gleichgewicht halten muss, demnach dieser Kraft entgegengesetzt gerichtet und ihr gleich sein muss, 1. alle Kräfte in derselben Ebene wirken, und 2. muss eine jede der drei Kräfte in den Scheitelwinkel des hohlen Kräftewinkels der beiden anderen Kräfte zu liegen kommen. Außerdem muss 3. nach der Gleichung (5) des § 14 S. 48 die Beziehung stattfinden:

$$\frac{P_1}{\sin(P_2 R)} = \frac{P_2}{\sin(P_1 R)} = \frac{R}{\sin(P_1 P_2)}$$

Da nun $R = P_3$ und $(P_3 P_1) + (P_1 R) = \pi$, ferner $(P_3 P_2) + (P_2 R) = \pi$, daher $\sin(P_2 R) = \sin(P_3 P_2)$ und $\sin(P_1 R) = \sin(P_3 P_1)$ ist, so lehrt die letzte Proportion, dass auch

$$\frac{P_1}{\sin(P_3 P_2)} = \frac{P_2}{\sin(P_3 P_1)} = \frac{P_3}{\sin(P_1 P_2)}$$

ist, d. h. auch wenn drei Kräfte sich das Gleichgewicht halten, ist das Verhältnis einer jeden Kraft zum Sinus des Kräftewinkels der beiden anderen Kräfte für alle drei Kräfte dasselbe.

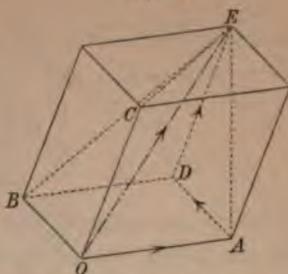
B. Zusammensetzung und Gleichgewicht von Kräften im Raume, die auf einen freibeweglichen materiellen Punkt einwirken.

§ 19. Graphische Zusammensetzung von Kräften im Raume, die auf denselben Punkt einwirken.

Die im § 16 angeführte graphische Methode der Zusammensetzung von Kräften kann aus denselben Gründen, die daselbst auseinandergesetzt wurden, auch bei Kräften im Raume Anwendung finden. Dieselbe Beweisführung führt auch hier zu einem in bekannter Weise zu konstruierenden Kräftepolygonzuge, dessen vom Anfangspunkte O nach dem Endpunkte n geführte Schlussseite in der Richtung von O nach n die Richtung der Resultierenden und in ihrer Länge die Größe der Resultierenden bestimmt. Es ist sonach auch bei Kräften im Raume die Resultante derselben die geometrische Summe der Componenten, also $R \equiv P_1 \hat{+} P_2 \hat{+} P_3 + \dots \hat{+} P_n$. Der einzige Unterschied ist hier der, dass, während früher das Kräftepolygon ein ebenes Polygon war, dasselbe jetzt ein räumliches ist, indem nicht mehr alle Seiten desselben in derselben Ebene gelegen sind. So z. B. ergibt sich durch Zusammensetzung dreier Kräfte, die durch die in einem Punkte des Parallelepipeds zusammenstoßenden Kanten OA ,

OB und OC (Fig. 27) dargestellt sind, der räumliche Polygonzug $OADE$, dessen Anfangspunkt O und dessen Endpunkt E ist, und die Diagonale OE des Parallelepipedes stellt dann die Resultierende dieser Kräfte dar. Das Parallelepiped (Fig. 27), zu dem man bei der Zusammensetzung dreier nicht in derselben Ebene wirkender Kräfte gelangt, wenn man durch die Endpunkte $OADE$ des entsprechenden räumlichen Kräftepolygonzuges Ebenen führt, die zu je zwei Seiten des letzteren parallel sind, nennt man das Kräfteparallelepiped.

Fig. 27.



Wie man umgekehrt eine gegebene Kraft OE graphisch in drei Componenten, deren Richtungslinien durch drei im Punkte O sich schneidende, nicht in derselben Ebene gelegene Gerade gegeben sind, mittels der Anwendung der gleichen constructiven Methode (des Kräfteparallelepipedes) zerlegen kann, ersieht man aus Fig. 27 sofort (s. S. 64).

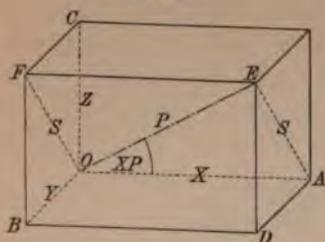
Wenn man das früher erwähnte räumliche (etwa n -seitige) Kräftepolygon $O12\dots n$ in zwei senkrechte Ebenen (etwa eine Horizontal- und eine Verticalebene) orthogonal projiziert, so erhält man als Projectionen zwei ebene Polygone, deren Seiten nach der bekannten Methode der descriptiven Geometrie der Reihe nach die einzelnen Seiten des räumlichen Kräftepolygons, demnach die räumlichen Kräfte bestimmen. Die Projectionen der gesuchten Schlusseite on des räumlichen Kräftepolygons, welche die Resultierende bestimmen, sind auch die Schlusseiten der ebenen in den beiden Projectionsebenen gelegenen Polygonalzüge. Daraus ergibt sich eine einfache Methode, die nicht näher auseinandergesetzt zu werden braucht, welche mittels der in der darstellenden Geometrie gebräuchlichen Methoden auf graphischem Wege die Resultierende von Kräften im Raume zu bestimmen gestattet.

§ 20. Zusammensetzung dreier Kräfte und Zerlegung einer Kraft in drei Componenten auf dem Wege der Rechnung.

Sind drei orthogonale Kräfte XYZ , deren jede senkrecht zur Ebene der beiden anderen gerichtet ist, zusammensetzen, so ergibt das im letzten Paragraph besprochene graphische Verfahren einen orthogonalen Polygonzug $OADE$, beziehungsweise ein rechtwinkliges Parallelepiped (Fig. 28), in welchem XYZ die Maßzahlen der Kanten OA, OB, OC sind. Ist P die Maßzahl der Resultierenden, demnach auch jene der Hauptdiagonale OE des Kräfteparallelepipedes, und S die Maßzahl der durch die Diagonale OF der Seitenfläche OCF

dargestellten Resultanten der Kräfte Y und Z , so ist in dem bei A rechtwinkligen Dreiecke OEA offenbar $X = P \cdot \cos(XP)$ und $P^2 =$

Fig. 28.



$= X^2 + S^2$, ferner in dem Rechtecke $OBCF$ ist $S^2 = Y^2 + Z^2$, daher auch $P^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$. Analog ergeben sich die Beziehungen $Y = P \cdot \cos(YP)$ und $Z = P \cdot \cos(ZP)$. Hat man demnach drei orthogonale Komponenten XYZ zusammensetzen, so bestimme man aus $P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ die Resultierende P derselben und dann mit Hilfe der Gleichungen $\cos(XP) = \frac{X}{P}$, $\cos(YP) = \frac{Y}{P}$, $\cos(ZP) = \frac{Z}{P}$ die Richtungswinkel derselben bezüglich der drei gegebenen orthogonalen Kräfte-

richtungen.

Ist umgekehrt eine Kraft P in drei Componenten XYZ zu zerlegen, deren Richtungen zu den drei Achsen eines räumlichen und im allgemeinen schiefwinkligen Achsensystems (xyz) parallel sind, so hat man der Fig. 27 entsprechend durch den Angriffspunkt O parallele Gerade zu den drei Coordinatenachsen zu führen und durch den Endpunkt E der die Kraft P darstellenden Linie OE parallele Ebenen zu den Coordinatenebenen zu legen, welche die früheren, zu xyz parallelen Geraden in den Punkt ABC schneiden, oder, was auf das Gleiche hinauskommt, man projiciere E durch die zu den Coordinatenebenen parallelen, projicierenden Geraden (bezw. Ebenen) EA, EB, EC auf diese Achsen, OA, OB, OC sind dann die gesuchten Componenten.

Die algebraischen Werte XYZ dieser Componenten stimmen demgemäß mit den algebraischen Werten der Coordinaten xyz des Punktes E überein, wenn der Punkt O zum Anfangspunkte des Achsensystems gewählt wird. Sollte dies nicht der Fall sein und sind $(x_1 y_1 z_1)$ die Coordinaten von O und $(x_2 y_2 z_2)$ jene des Punktes E , so ist offenbar dem Zeichen und Zahlwerte nach $X = x_2 - x_1$, $Y = y_2 - y_1$, $Z = z_2 - z_1$.

Ist das Coordinatensystem ein orthogonales, so ist der graphische Weg ein äußerst einfacher, da, wie aus der Fig. 28 sofort sich ergibt, jede Componente der Größe und Richtung nach durch die orthogonale Projection der die Resultierende darstellenden Strecke OE auf die entsprechende Achse gegeben ist.

Um auch die algebraischen Werte der Componenten in dem letzteren Falle zu bestimmen, zerlege man zunächst die Kraft P in die X -Componente und in eine zweite in der Ebene der beiden anderen Componenten wirkende Kraft S und dann erst die letztere in die Com-

ponenten Y und Z . Wir haben dann immer jedenfalls einen der im § 13 behandelten Fälle vor uns, und es ist demgemäß die X -Komponente dem Zeichen und Zahlwerte nach ganz allgemein gegeben durch $X = P \cdot \cos(xP)$ und $S = P \cdot \sin(xP)$.

Was von der einen Achse gilt, gilt auch von einer jeden der drei Achsen, demnach ist ganz allgemein:

$$\left. \begin{aligned} X &= P \cdot \cos(xP) \\ Y &= P \cdot \cos(yP) \\ Z &= P \cdot \cos(zP) \end{aligned} \right\} (1)$$

und da P^2 der früheren Deduction zufolge der Summe der Quadrate der absoluten Zahlwerte der X -, Y - und Z -Komponenten gleich ist, und da ferner das Quadrat einer reellen Zahl von dem Zeichen der letzteren unabhängig ist, so ist auch, mag XYZ positiv oder negativ sein,

$$P^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \quad (2)$$

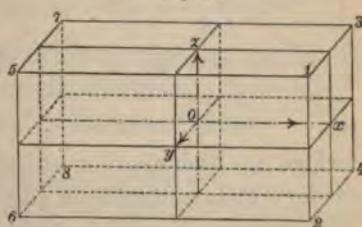
Anmerkung. Setzt man die Werte von X , Y , Z aus der Gleichung (1) in diese Gleichung (2) ein, so ergibt sich der wichtige, von nun an stets als bekannt vorauszusetzende Satz aus der analytischen Geometrie des Raumes, demzufolge für jede Richtung P die Gleichung $\cos^2(xP) + \cos^2(yP) + \cos^2(zP) = 1$ besteht. Die Winkel (xP) , (yP) , (zP) nennt man die Richtungswinkel der Richtung P bezüglich der drei orthogonalen Achsen und die Cosinus derselben die Richtungscosinus.

In den Gleichungen (1) kommen nur die bald positiven, bald negativen Cosinus der Richtungswinkel, nicht auch, wie in früheren Gleichungen, die Sinus derselben vor; es haben aber zwei Winkel α und α' , die sich zu einem vollen Winkel ergänzen, für welche also $\alpha + \alpha' = 2\pi$ ist, bekanntlich denselben Cosinus, und es ist demnach gestattet, für die Richtungswinkel (xP) , (yP) , (zP) bei Kräften im Raume bloß die hohlen Winkel, welche die positiven Achsenrichtungen mit der Krafrichtung bilden, also bloß Winkel des ersten und des zweiten Quadranten in Betracht zu ziehen.

Es gibt im ganzen acht Fälle, in welchen die Componenten XYZ einer Kraft P denselben absoluten Zahlwert haben, so dass diese Fälle sich nur durch das Zeichen dieser Componenten unterscheiden. Die Krafrichtungen in diesen acht Fällen entsprechen, wenn man den Angriffspunkt O zum Mittelpunkte eines Parallelepipeds, dessen Kanten zu den drei Coordinatenachsen parallel laufen (Fig. 29), wählt, und wenn die Kraft P durch die Gerade dargestellt

ist, die diesen Mittelpunkt O mit einem der Eckpunkte des Parallelepipeds verbindet, den acht Eckpunkten (1—8) (Fig. 29) des Parallel-

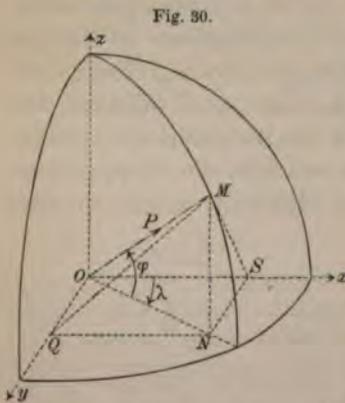
Fig. 29.



epipeds. Den in der ersten Colonne der folgenden Tabelle angeführten Eckpunkten entsprechen die in der zweiten Colonne angegebenen Zeichen der Componenten und, falls das Achsensystem ein orthogonales ist, ein Richtungswinkel, der in dem in der dritten Colonne angeführten Quadranten gelegen ist. Die letzten drei Colonnen beziehen sich auf den besonderen Fall, in welchem für die Richtung $O1$ beispielsweise $(xP) = 60^\circ$, $(zP) = 45^\circ$, also $\cos(yP) = \sqrt{1 - \cos^2 60^\circ - \cos^2 45^\circ} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ und demgemäß $(yP) = 60^\circ$ ist.

Eckpunkt	X	Y	Z	(xP)	(yP)	(zP)	(xP)	(yP)	(zP)
1	+	+	+	1	1	1	60°	60°	45°
2	+	+	-	1	1	2	60°	60°	135°
3	+	-	+	1	2	1	60°	120°	45°
4	+	-	-	1	2	2	60°	120°	135°
5	-	+	+	2	1	1	120°	60°	45°
6	-	+	-	2	1	2	120°	60°	135°
7	-	-	+	2	2	1	120°	120°	45°
8	-	-	-	2	2	2	120°	120°	135°

Statt durch die Richtungswinkel (xP) , (yP) , (zP) wird auch die Richtung OM (Fig. 30) einer Kraft öfter bestimmt durch den Neigungswinkel φ dieser Richtung gegen eine bestimmte Ebene, etwa die xy -Ebene



und durch den Winkel λ , den die Ebene dieses Neigungswinkels φ — oder was dasselbe besagt, den die Normalprojection ON der Kraftrichtung auf die xy -Ebene — mit einer bestimmten Richtung Ox einschließt, die in der letzten Ebene (der xy -Ebene) gelegen ist. Hierbei ist der Winkel λ durch eine bei der Richtung Ox beginnende Drehung entstanden zu denken und positiv, beziehungsweise negativ in Rechnung zu ziehen, je nachdem diese Drehung gleichgerichtet oder entgegengesetzt-gerichtet jener Drehung ist, durch welche die Richtung Ox auf kürzestem Wege in eine zweite gegebene, in der Fundamentelebene (der xy -Ebene) gelegene, zu Ox senkrechte Richtung Oy überführt wird — und ferner ist der Winkel φ , dessen Anfangsschenkel die Richtung ON hat, positiv zu nehmen, wenn die Drehung, durch welche derselbe entsteht, gegen eine bestimmte Rich-

tung Oz der Normalen der gegebenen Fundamentalebene gerichtet ist, und zwar wird gewöhnlich λ zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ und φ zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ angenommen. Führt man von der Projection N des Punktes M der Krafrichtung die Normale NS auf die x -Achse und die Normale NQ auf die y -Achse, so ist bekanntlich $MS \perp Ox$ und $MQ \perp Oy$, daher $OS = OM \cdot \cos(SOM) = OM \cdot \cos(xP)$ und anderseits $OS = ON \cdot \cos \lambda = OM \cos \varphi \cdot \cos \lambda$, somit $\cos(xP) = \cos \varphi \cos \lambda$. Ebenso ist $OQ = OM \cdot \cos(QOM) = OM \cdot \cos(yP)$ und auch $OQ = SN = ON \cdot \sin \lambda = OM \cdot \cos \varphi \sin \lambda$, daher $\cos(yP) = \cos \varphi \sin \lambda$ und schließlich $(zP) = \frac{\pi}{2} - \varphi$, sonach $\cos(zP) = \sin \varphi$. Dieselben Beziehungen würden sich auch ergeben, wenn φ negativ, ebenso wenn λ ein stumpfer Winkel wäre oder negativ angenommen würde. Die Beziehungen zwischen den früheren Richtungswinkeln (xP) , (yP) , (zP) und den Winkeln φ und λ sind demnach allgemein

$$\cos(xP) = \cos \varphi \cos \lambda$$

$$\cos(yP) = \cos \varphi \sin \lambda$$

$$\cos(zP) = \sin \varphi$$

So entsprechen z. B. in jenem besonderen Falle, auf welchen sich die letzten drei Columnen der vorhergehenden Tabelle S. 66 beziehen, den Kräften $P_1 P_2 \dots P_8$, die von O nach einem der acht Eckpunkte 1—8 des Parallelepipedes (Fig. 29) gerichtet sind, folgende besondere Werte von (φ, λ) : der Kraft P_1 : $(45^\circ, 45^\circ)$, P_2 : $(-45^\circ, 45^\circ)$, P_3 : $(45^\circ, -45^\circ)$, P_4 : $(-45^\circ, -45^\circ)$, P_5 : $(45^\circ, 135^\circ)$, P_6 : $(-45^\circ, 135^\circ)$, P_7 : $(45^\circ, -135^\circ)$, P_8 : $(-45^\circ, -135^\circ)$.

Anmerkung. Würde man den Punkt O in das Erdcentrum und M in die Erdoberfläche verlegen, ferner zur z -Achse die Erdachse und zur positiven Richtung Oz derselben die Richtung nach dem Nordpole annehmen, ferner die positive x -Richtung mit jener Richtung in der Äquatorebene übereinstimmen lassen, die vom Erdmittelpunkte nach jenem Punkte der Erdoberfläche hin geht, in welchem der erste Meridianhalbkreis (von Greenwich) den Äquatoralkreis schneidet, so würde φ die geographische nördliche oder südliche (d. i. positive oder negative) Breite und λ die östliche oder westliche (d. i. positive oder negative) Länge des Ortes M der Erde bedeuten.

§ 21. Zusammensetzung von beliebigen Kräften im Raume, die denselben Angriffspunkt haben, auf dem Wege der Rechnung. Drehungsmomente von Kräften in Bezug auf räumliche Achsen.

Sind die beliebig im Raume gerichteten Kräfte $P_1, P_2 \dots P_n$, deren gemeinsamer Angriffspunkt der Punkt O ist, zusammzusetzen, so wähle man ein beliebiges räumliches Achsensystem, dessen Anfangspunkt etwa O ist, und zerlege jede Kraft nach der im § 20 auseinandergesetzten Methode in ihre XYZ-Componenten, setze alle

X-Komponenten zur Kraft R_x , die Y-Komponenten zur Kraft R_y , die Z-Komponenten zur Kraft R_z zusammen und bestimme schließlich die Resultierende von R_x, R_y, R_z . In jedem Falle ist dem Zeichen und Zahlwerte nach zufolge § 9

$$\begin{aligned} R_x &= X_1 + X_2 + \dots + X_n = \Sigma X \\ R_y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \Sigma Y \\ R_z &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \Sigma Z \end{aligned}$$

Ist das Achsensystem ein rechtwinkliges und sind die Richtungen der Kräfte durch die Richtungswinkel $(xP), (yP), (zP)$ einer jeden Kraft bezüglich der drei orthogonalen Achsen, respective durch die Winkel λ und φ (Fig. 30) gegeben, so ist nach § 20

$$\begin{aligned} X_1 &= P_1 \cos(xP_1), & Y_1 &= P_1 \cos(yP_1), & Z_1 &= P_1 \cos(zP_1) \\ X_2 &= P_2 \cos(xP_2), & Y_2 &= P_2 \cos(yP_2), & Z_2 &= P_2 \cos(zP_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_n &= P_n \cos(xP_n), & Y_n &= P_n \cos(yP_n), & Z_n &= P_n \cos(zP_n) \end{aligned}$$

Demnach ist

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \Sigma X = P_1 \cos(xP_1) + P_2 \cos(xP_2) + \dots + P_n \cos(xP_n) = \\ &\quad \Sigma [P \cos(xP)] \\ R_y &= \Sigma Y = P_1 \cos(yP_1) + P_2 \cos(yP_2) + \dots + P_n \cos(yP_n) = \\ &\quad \Sigma [P \cos(yP)] \\ R_z &= \Sigma Z = P_1 \cos(zP_1) + P_2 \cos(zP_2) + \dots + P_n \cos(zP_n) = \\ &\quad \Sigma [P \cos(zP)] \end{aligned} \right\} (1)$$

Statt $\cos(xP), \cos(yP), \cos(zP)$ können auch die Werte $\cos \varphi \cos \lambda, \cos \varphi \sin \lambda, \sin \varphi$ aus dem letzten Paragraph eingesetzt werden.

Die Resultierende R der letzterhaltenen drei orthogonalen Kräfte R_x, R_y, R_z ist offenbar auch die gesuchte Resultierende der ursprünglichen Kräfte $P_1, P_2 \dots P_n$. Die Größe derselben ist nach Gleichung (2) § 20 S. 65 bestimmt durch die Gleichung

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (2)$$

und zufolge der Gleichung (1) § 20 S. 65 ist

$$\left. \begin{aligned} R_x &= R \cos(xR) \\ R_y &= R \cos(yR) \\ R_z &= R \cos(zR) \end{aligned} \right\} (3)$$

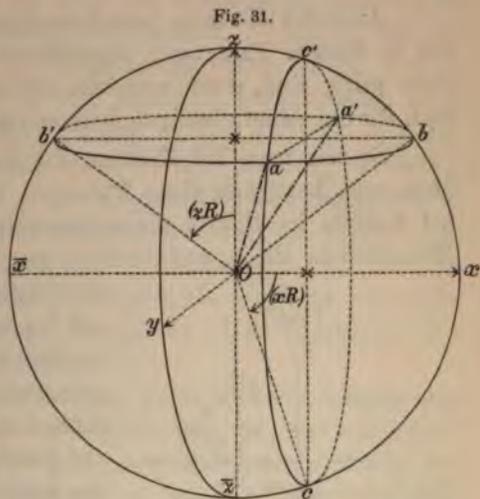
Demnach lassen sich, nachdem R durch (2) bestimmt worden ist, die unbekanntenen Richtungswinkel $(xR), (yR), (zR)$ durch die Gleichungen:

$$\cos(xR) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(yR) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(zR) = \frac{R_z}{R}$$

berechnen. Dass durch die so berechneten Winkel, welche nach § 20 als Winkel des ersten oder zweiten Quadranten anzusehen sind, die Richtung unzweideutig bestimmt ist, ergibt die folgende Betrachtung:

Alle Richtungen, die mit der positiven Richtung der z -Achse den aus der letzten Gleichung gefundenen Winkel (zR) einschließen, liegen offenbar in einer senkrechten halben Kreiskegelfläche $Obab'a'$ (Fig. 31), deren Spitze der Angriffspunkt O und deren Achse Oz oder $O\bar{z}$ ist, je nachdem R_z , d. i. $\Sigma [P \cos (zP)]$ und demnach auch $\cos (zR)$, d. i. $\frac{R_z}{R}$ positiv oder negativ oder mit anderen Worten der Winkel (zR) ein Winkel des ersten oder zweiten Quadranten ist. Ebenso entspricht dem aus der Gleichung $\cos (xR) = \frac{R_x}{R}$ berechneten Winkel (xR) eine

zweite senkrechte Halbkreiskegelfläche $Oca'c'a$, deren Spitze O und deren Achse Ox , bez. $O\bar{x}$ ist. Beide Halbkegelflächen durchdringen sich in zwei Erzeugenden Oa und Oa' . Welche dieser beiden Richtungen Oa und Oa' die gesuchte Richtung der Resultierenden ist, ergibt das Zeichen des dritten Richtungscosinus. Ist nämlich R_y , d. i. $\Sigma [P \cos (yP)]$, demnach auch $\cos (yR)$ positiv, so ist die Richtung der Resultierenden jene Richtung Oa , die mit Oy den spitzen Winkel einschließt, im entgegengesetzten Falle aber die Richtung Oa' , die mit Oy einen stumpfen Winkel bildet. Man hat daher nur nöthig,



den algebraischen Wert zweier Richtungscosinus und das Zeichen des dritten zu kennen, wie sich dies übrigens schon aus der allgemeinen, stets giltigen Beziehung $\cos^2 (xR) + \cos^2 (yR) + \cos^2 (zR) = 1$ ergibt.

Wollte man die Richtung der Resultierenden durch die zugehörigen Winkel \mathcal{A} und Φ (den Längen- und Breitenwinkel, Azimut und Höhenwinkel) (Fig. 30) bestimmen, so hat man von den Schlussgleichungen des § 20 S. 67 Anwendung zu machen, nämlich

$$\left. \begin{aligned} \cos (xR) &= \cos \Phi \cos \mathcal{A} \\ \cos (yR) &= \cos \Phi \sin \mathcal{A} \\ \cos (zR) &= \sin \Phi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich nämlich, nachdem R_x, R_y, R_z mit Hilfe der Gleichungen (1) berechnet worden ist, bei Beachtung

der Gleichungen (2) und (3) $\sin \Phi = \frac{R_x}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}}$, wodurch der algebraische Wert des Winkels Φ unzweideutig bestimmt ist, indem Φ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ anzunehmen ist. Es ist dann $\cos \Phi = +\sqrt{1 - \sin^2 \Phi} = \sqrt{\frac{R_x^2 + R_y^2}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}}$, also $R \cos \Phi = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ und zufolge (4) und (3) $\cos \mathcal{A} = \frac{R_x}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2}}$ und $\sin \mathcal{A} = \frac{R_y}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2}}$, aus welchen beiden letzten Gleichungen der zwischen $-\pi$ und $+\pi$ gelegene Winkel \mathcal{A} sich genau bestimmen lässt.

Nebenbei sei erwähnt, dass man zu den Gleichungen (1), (2) und (3) auch hier auf ganz analoge Weise wie im § 16 S. 55 durch die Projection des räumlichen Kräftepolygonzuges auf die drei Coordinatenachsen gelangen könnte.

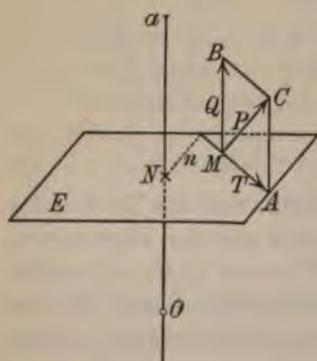
Ausdrücklich muss jedoch nochmals hervorgehoben werden, dass die in diesem Paragraph abgeleiteten Gleichungen (1) (2) (3) nur dann gültig sind, wenn man ein orthogonales Achsensystem zugrunde legt, für ein schiefwinkliges Achsensystem aber ihre Gültigkeit verlieren.

So wie man bei Kräften, die in derselben Ebene wirken, von Momenten bezüglich eines Punktes Anwendung macht, so gelangen bei Kräften im Raume die sogenannten Drehungsmomente (statische Momente) in Bezug auf Achsen zur Anwendung. Um zum Begriffe

des Drehungsmomentes einer Kraft P , die auf irgend einen Angriffspunkt M wirkt, bezüglich irgend einer im Raume beliebig gelegenen Achse a (Fig. 32) zu gelangen, führe man durch den Angriffspunkt M eine zur Achse a senkrechte Ebene E , welche die Achse a in einem Punkte N schneidet, und zerlege die Kraft P etwa mittels des Kräfteparallelogramms $MABC$ (Fig. 32) in eine zur Achse a parallele, also zur Ebene E normale Komponente Q und eine zweite zu dieser senkrechte Komponente T , deren Richtungslinie jene Gerade ist, in

welcher die durch die Richtung der Kraft P senkrecht zur Ebene E gelegte Ebene die Ebene E schneidet. Das Moment der Komponente T bezüglich des Punktes N (also bezüglich der orthogonalen Projection des Angriffspunktes M auf die Achse a) wird als das statische Moment (Drehungsmoment) der Kraft P in Bezug auf die Achse a bezeichnet. Ist also $M_a^{(P)}$ das Zeichen für dasselbe zum Unterschiede von $M_o^{(P)}$, welches Zeichen das statische

Fig. 32.



Moment der Kraft P bezüglich irgend eines beliebigen Punktes O bedeuten möge, so ist $M_a^{(P)} = M_N^{(T)}$, sonach, wenn n die von N auf die Richtungslinie der Kraftkomponente T geführte Normale ist, $M_a^{(P)} = \pm T \cdot n$. In zwei Fällen ist demgemäß das statische Moment $M_a^{(P)}$ einer Kraft P bezüglich einer Achse a Null, nämlich, wenn entweder $T = 0$ oder $n = 0$ ist, d. h., wenn entweder die Kraft P mit der Komponente Q identisch, d. h. zur Achse a parallel ist, oder wenn die Richtungslinie der Kraft die Achse a schneidet, kurz jedesmal dann, wenn die Achse a und die Richtungslinie der Kraft P in derselben Ebene gelegen sind.

Wählt man die Achse a zur z -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so ist Q die Z -Komponente der Kraft P und T die aus den Komponenten X und Y resultierende Kraft. Wirken daher auf denselben Angriffspunkt M mehrere Kräfte $P_1 P_2 \dots P_n$ ein, deren Resultierende R ist, so muss die aus allen X - und Y -Komponenten oder — was auf dasselbe hinauskommt — aus R_x und R_y resultierende Kraft R_t auch die Resultierende aller Kräfte T sein, demnach, da alle diese Kräfte in der Ebene E wirken, nach § 17 das statische Moment der Kraft R_t bezüglich des Punktes N gleich sein der algebraischen Summe der Momente aller Kräfte T bezüglich desselben Punktes; es ist also — der obigen Definition entsprechend — das Drehungsmoment der Resultierenden R (deren den obigen Kräften Q und T entsprechende Komponenten R_z und R_t sind) bezüglich einer beliebigen Achse a stets gleich der algebraischen Summe der Drehungsmomente aller Komponenten $P_1 P_2 \dots P_n$ bezüglich derselben Achse.

Um das Drehungsmoment $M_z^{(P)}$ einer Kraft P , deren orthogonale Komponenten XYZ sind, und deren Angriffspunkt M die Koordinaten xyz bezüglich eines orthogonalen Achsensystems hat, in Bezug auf die z -Achse auszudrücken, hat man nur zu beachten, dass stets $M_z^{(P)}$ das Moment der aus X und Y resultierenden Kraft T bezüglich jenes Punktes N der z -Achse, dessen Koordinaten (o, o, z) sind, bedeutet. Würde man diesen Punkt N zum Koordinatenanfangspunkte und die Koordinatenachsen parallel zu den früheren wählen, so würde bloß z in Null übergehen, dagegen würden die Koordinaten x und y des Angriffspunktes M dieselben bleiben, und es ist demnach der algebraische Wert des Moments von T bezüglich des Punktes N nach Gleichung (3) des § 17 S. 58 und somit auch $M_z^{(P)}$ allgemein bestimmt durch

$$M_z^{(P)} = xY - yX \quad (5)$$

Aus gleichen Gründen bestehen für die beiden anderen Achsen die aus dieser Gleichung durch cyklische Vertauschung der Elemente xyz , beziehungsweise XYZ sich ergebenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} M_x^{(P)} &= yZ - zY \\ M_y^{(P)} &= zX - xZ \end{aligned} \right\} (6)$$

Da der Gleichung (5) nach § 17 die Voraussetzung zugrunde liegt, dass bezüglich der x -Achse jene Drehung als die positive zu bezeichnen ist, welche die positive x -Achse auf kürzestem Wege in die positive y -Achse überführt, so bestehen auch die beiden letzten Gleichungen, wie die cyklische Vertauschung von xyz lehrt, nur unter der Voraussetzung, dass bezüglich der x -Achse die kürzeste Drehung von der positiven y -Achse gegen die positive z -Achse und für die y -Achse die Drehung von der positiven z -Achse gegen die positive x -Achse als eine positive Drehung anzusehen ist.

Sowohl für ein rechtwinkliges Achsensystem, als auch, wenn das Achsensystem ein schiefwinkliges ist, bestehen, wenn im letzteren Falle $M_x^{(P)}$ $M_y^{(P)}$ $M_z^{(P)}$ durch die Gleichungen (5) und (6) definiert werden, und wenn durch $M_x^{(R)}$ $M_y^{(R)}$ $M_z^{(R)}$ die analog gebildeten Ausdrücke für die Resultierende R bezeichnet sind, die Relationen

$M_x^{(R)} = yR_z - zR_y = y \cdot \Sigma Z - z \cdot \Sigma Y = \Sigma (yZ - zY) = \Sigma M_z^{(P)}$
und ebenso $M_y^{(R)} = \Sigma M_y^{(P)}$ und $M_z^{(R)} = \Sigma M_z^{(P)}$, wodurch auch ein neuer Beweis des früheren Lehrsatzes über das Drehungsmoment der Resultierenden geliefert ist.

Ist $M_o^{(P)}$ das (hier dem absoluten Zahlwerte nach in Rechnung zu bringende) Moment einer Kraft P bezüglich irgend eines Punktes O einer Achse, etwa der z -Achse, so ist das Drehungsmoment $M_z^{(P)}$ dieser Kraft in Bezug auf diese Achse selbst durch die doppelte Fläche jenes Momentendreieckes bestimmt, das sich als die orthogonale Projection des ursprünglichen Momentendreieckes (vergl. § 17) von dem Flächeninhalte $\frac{M_o^{(P)}}{2}$, dessen Spitze O und dessen Grundlinie die die Kraft P darstellende Strecke MC (Fig. 32) ist, auf irgend eine zur Achse senkrechte Projectionsebene ergibt; denn legt man diese letztere Ebene E etwa durch den Angriffspunkt M der Kraft, so ist die Projection der die Kraft P repräsentierenden Grundlinie offenbar die die frühere Kraft T darstellende Strecke MA , die zugleich die Basis des neuen Momentendreieckes ist, und die Projection des Punktes O , d. i. der Spitze des ursprünglichen Dreieckes, ist der frühere Punkt N , und da die Normalprojectionen irgend einer Fläche auf parallele Ebenen stets congruent sind, so ist es gleichgültig, durch welchen Punkt der Achse man die senkrechte Ebene legt. Nun ist die Projection einer ebenen Fläche auf irgend eine Ebene stets gleich dem Producte aus der projicierten Fläche in den Cosinus des Neigungswinkels der beiden Ebenen, und dieser Winkel ist stets gleich dem Neigungswinkel der Normalen dieser Ebenen; es ist sonach, wenn man durch (xn) , (yn) , (zn) die hohlen Winkel bezeichnet, welche mit den positiven Coordinatenachsen einschließt die nach jener Seite der Ebene des ursprünglichen Momentendreieckes $\frac{M_o^{(P)}}{2}$ von O aus geführte Normale n , von welcher Seite gesehen die Kraft P den Kraftarm im positiven Sinne (also z. B. bei der in Fig. 29 getroffenen Wahl der positiven Coordinatenachsen im Sinne des Uhrzeigers) um O zu drehen sucht, $\frac{M_z^{(P)}}{2} = \frac{M_o^{(P)}}{2} \cdot \cos(zn)$, also auch $M_z^{(P)} = M_o^{(P)} \cos(zn)$.

Analog ist

$$\left. \begin{aligned} M_x^{(P)} &= M_o^{(P)} \cos(xn) \\ M_y^{(P)} &= M_o^{(P)} \cos(yn) \\ M_z^{(P)} &= M_o^{(P)} \cos(zn) \end{aligned} \right\} (7)$$

Ist nun a irgend eine durch den Koordinatenanfangspunkt O gelegte Achse, so ist wie früher $M_a^{(P)} = M_o^{(P)} \cdot \cos(an)$, und da stets $\cos(an) = \cos(xn) \cos(xa) + \cos(yn) \cos(ya) + \cos(zn) \cos(za)$ ist, so ergibt sich aus dieser Gleichung durch Multiplication mit $M_o^{(P)}$

$$M_a^{(P)} = M_x^{(P)} \cos(xa) + M_y^{(P)} \cos(ya) + M_z^{(P)} \cos(za) \quad (8)$$

Durch die letzte Gleichung kann man, wenn die Momente einer Kraft bezüglich der drei orthogonalen Achsen gegeben sind, das Drehungsmoment bezüglich einer jeden anderen durch den Koordinatenanfangspunkt geführten Achse a bestimmen. Wirken die Kräfte $P_1 P_2 \dots P_n$ gleichzeitig auf denselben Angriffspunkt, so ergibt die Summation der n den einzelnen Kräften entsprechenden Gleichungen von der Form (8)

$$\Sigma M_a^{(P)} = \cos(xa) \cdot \Sigma M_x^{(P)} + \cos(ya) \cdot \Sigma M_y^{(P)} + \cos(za) \cdot \Sigma M_z^{(P)} \quad (9)$$

§ 22. Gleichgewicht von Kräften im Raume, die auf denselben Angriffspunkt wirken.

Aus denselben Gründen, die im § 18 erörtert wurden, ist das graphische Kennzeichen des Gleichgewichtes von Kräften auch in dem Falle, wenn sie im Raume beliebig gerichtet sind, wofern sie nur denselben Angriffspunkt O haben, aus dem Umstande zu entnehmen, dass der Anfangspunkt des räumlichen Kräftepolygonzuges mit dem Endpunkte desselben zusammenfällt, oder mit anderen Worten, dass das entsprechende Kräftepolygon ein geschlossenes ist. Daraus ergibt sich unter anderem sofort, dass drei Kräfte, deren Richtungen nicht in derselben Ebene gelegen sind, unmöglich sich das Gleichgewicht halten können.

Um auf dem Wege der Rechnung zu den Bedingungen, unter denen die Kräfte $P_1 P_2 \dots P_n$ sich das Gleichgewicht halten, zu gelangen, hat man nur ein beliebiges, etwa orthogonales Achsensystem zugrunde zu legen und aus bekannten Gründen zu untersuchen, wann sich für die Resultierende R dieses Kräftesystems der Wert Null ergibt. Da zufolge der Gleichung (2) S. 68 R^2 gleich der Summe der drei nothwendigerweise positiven Werte R_x^2 , R_y^2 und R_z^2 ist, so kann R^2 nur dann und muss verschwinden, wenn jeder einzelne dieser Summanden den Wert Null hat.

Demgemäß sind die nothwendigen und hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen, wie sich durch Einführung der Werte von R_x , R_y , R_z aus den Gleichungen (1) S. 68 ergibt, durch folgende drei Gleichungen ausgedrückt:

$$\left. \begin{aligned} P_1 \cos(xP_1) + P_2 \cos(xP_2) + \dots + P_n \cos(xP_n) &= \Sigma[P \cos(xP)] = 0 \\ P_1 \cos(yP_1) + P_2 \cos(yP_2) + \dots + P_n \cos(yP_n) &= \Sigma[P \cos(yP)] = 0 \\ P_1 \cos(zP_1) + P_2 \cos(zP_2) + \dots + P_n \cos(zP_n) &= \Sigma[P \cos(zP)] = 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

Dass dann für eine jede andere beliebig im Raume gelegte Achse u die Gleichung $\Sigma(P \cos uP) = 0$ besteht, erhellt aus dem Gesagten sofort.

Ist das Achsensystem kein orthogonales, so müssen statt dieser Gleichungen folgende allgemeineren zur Anwendung kommen.

$$\begin{aligned} \Sigma X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0, & \Sigma Y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = 0 \\ & & \Sigma Z &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = 0. \end{aligned}$$

Sind xyz die Coordinaten des gemeinsamen Angriffspunktes M bezüglich eines beliebigen Achsensystems, so ist, wenn die auf diesen Angriffspunkt M wirkenden Kräfte P sich das Gleichgewicht halten und demnach die Gleichungen

$$\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma Z = 0$$

bestehen, auch

$$\left. \begin{aligned} \Sigma M_x^{(P)} &= \Sigma(yZ - zY) = y \cdot \Sigma Z - z \cdot \Sigma Y = 0 \\ \Sigma M_y^{(P)} &= \Sigma(zX - xZ) = z \cdot \Sigma X - x \cdot \Sigma Z = 0 \\ \Sigma M_z^{(P)} &= \Sigma(xY - yX) = x \cdot \Sigma Y - y \cdot \Sigma X = 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

Ist das Achsensystem ein orthogonales, so drücken diese Gleichungen das Gesetz aus, dass im Zustande des Gleichgewichtes von Kräften im Raume die algebraische Summe der Drehungsmomente aller Kräfte bezüglich einer jeden beliebigen durch den beliebigen Coordinatenanfangspunkt geführten Achse gleich Null ist.

Diese letzteren drei Gleichungen (2) sind für das Bestehen des Gleichgewichtes zwar nothwendig, jedoch keineswegs hinreichend, da diese Gleichungen den Gleichungen (7) S. 73 und dem Momentensatze des § 21 S. 71 zufolge auch dann stattfinden, wenn die Kräfte eine Resultierende R haben, für welche $M_o^{(R)} = 0$ ist, d. h. eine Resultante, die in der einen oder anderen Richtung jener Geraden MO wirkt, die den Angriffspunkt M mit dem Coordinatenanfangspunkte O verbindet.

C. Statik des nicht frei beweglichen materiellen Punktes.

§ 23. Gleichgewicht und Äquivalenz von Kräften, deren Angriffspunkt gezwungen ist, in einer gegebenen Fläche zu verbleiben.

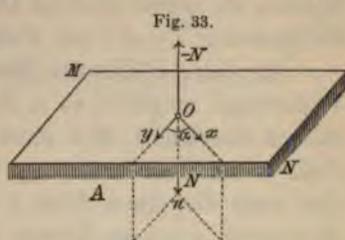
Bisher wurde angenommen, dass der materielle Punkt in seiner Bewegung durch keinen Umstand gehindert werde, kurz, dass derselbe ein vollkommen frei beweglicher, ein sogenannter freier

Punkt sei. In vielen Fällen ist aber die Bewegung eines Punktes durch gewisse Umstände beschränkt, so dass er in einem Zwangszustande sich befindet und nicht nach jeder Richtung des Raumes sich frei bewegen kann. Es wird ein solcher Punkt als ein nicht freier materieller Punkt bezeichnet.

Ein solcher Fall tritt unter anderem ein, wenn der Punkt gezwungen ist, bei seiner Bewegung stets in einer bestimmten Fläche F zu verbleiben, so dass die einzig mögliche Bahn desselben in dieser Fläche F gelegen sein muss, in welcher er sich aber, wie wenigstens vorläufig angenommen werden soll, nach jeder Richtung vollkommen frei (ohne Reibung) bewegen kann. Ein solcher Fall tritt z. B. ein, wenn sich der materielle Punkt O zwischen zwei parallelen, unveränderlich festgelegten starren, absolut glatten Platten befindet, deren Entfernung unendlich klein ist.

Es sei zunächst diese Fläche F eine ebene Fläche MN (Fig. 33). In diesem Falle kann eine beliebige Kraft N , deren Richtung On senkrecht zur Ebene MN ist, keinen Einfluss auf die Änderung des Ruhezustandes des Punktes O nehmen, wie dies auf indirectem Wege unschwer nachgewiesen werden kann. Denn nimmt man den Punkt O vor der Einwirkung dieser Kraft als ruhend an, so müsste die Kraft N , wenn das Gegentheil der eben erwähnten Behauptung richtig wäre, — infolge der Einflüsse der Zustände jenes Körpersystems K , von welchem diese Kraft N herrührt, die den Punkt O , wenn derselbe frei

beweglich wäre, in der Richtung On in Bewegung setzen würde — eine Bewegung des unfreien Punktes O in irgend einer Richtung Ox , die in der Ebene MN gelegen ist, bewirken. Würde man nun das ganze Körpersystem K und mit diesem die Zeichnung Fig. 33 um die Achse On um einen beliebigen Winkel α herumdrehen, wodurch die Bewegungsrichtung Ox in die gleichfalls in der Ebene MN gelegene Richtung Oy gelangen würde, so wäre die relative Lage des Körpersystems K nach erfolgter Umdrehung sowohl gegen die Ebene MN , als auch gegen die Krafrichtung On und gegen die Bewegungsrichtung genau dieselbe wie früher, und es müsste demgemäß nach dem Principe der unveränderlichen relativen Wirkung aus denselben Gründen, aus welchen die Bewegung in der Richtung Ox erzeugt wurde, jetzt die Bewegung in der Richtung Oy eingeleitet werden, und doch ließe sich wegen der Gleichheit der Kräfte N in der früheren und jetzigen Lage des Körpersystems K die jetzige Lage von K durch die frühere



unbeschadet der Wirkung ersetzen. Es müsste demnach — eine etwa mögliche Bewegung durch die Einwirkung des Körpersystems K vorausgesetzt — eine Bewegung sowohl in der Richtung Ox , als auch in der Richtung Oy , sonach, da α beliebig ist, in allen möglichen, in der Ebene MN von O aus gezogenen Richtungen stattfinden, was undenkbar ist. Da zu dieser unmöglichen Folgerung bloß die Annahme des Gegentheiles der zu erweisenden Behauptung nothwendig geführt hat, so muss diese Annahme unrichtig sein, wodurch die ursprüngliche Behauptung erwiesen ist.

Da die zur Ebene MN normal gerichtete Kraft N eine Änderung des Ruhezustandes nicht erzeugen kann, so muss dieselbe nothwendigerweise durch eine entgegengesetzte gleiche Gegenkraft $-N$ in ihrer Wirkung aufgehoben werden. Diese Kraft kann nur von der Einwirkung der Ebene MN — oder besser gesagt: jenes Körpers K' , der den materiellen Punkt zwingt, in dieser Ebene zu verbleiben — herrühren. Es ist dies die dem Principe der Gegenwirkung entsprechende Reaction der Ebene MN , beziehungsweise des letzteren Körpers K' auf den materiellen Punkt, und man bezeichnet dieselbe auch als den normalen Widerstand der Ebene MN . Diese Reaction $-N$ kann variable Werte annehmen, und zwar stets entsprechend der Kraft N , die man den normalen Druck auf die Ebene MN (beziehungsweise auf den Körper K') nennt.

In dem eben behandelten Falle wurde vorausgesetzt, dass diese normal zur Ebene wirksame Reaction nach beiden Seiten der Ebene möglich ist, indem auch ein Druck ($-N$) aus den angeführten Gründen die Reaction ($+N$) zur Folge hätte.

In vielen Fällen der Natur ist aber nur ein einseitiger normaler Widerstand möglich; so z. B. wenn ein materieller Punkt m auf der ebenen Oberfläche MN eines starren Körpers K' aufruht, in welchem Falle wohl eine Bewegung in den vom Körper K' erfüllten Raum, also nach der einen Seite A der Ebene MN unmöglich ist, da diese Bewegung, wenn der Körper diesen Raum stetig erfüllt, eine Aufhebung des Zusammenhanges, eine Trennung der Theilchen dieses Körpers zur Voraussetzung haben müsste; wohl ist aber eine Bewegung nach der entgegengesetzten Seite der Ebene MN möglich, da der Punkt nach dieser Seite vollkommen frei beweglich ist. Demnach würde nur, wie sich auf eine der früheren analogen Weise indirect nachweisen lässt, ein normaler Druck N , der nach der Seite A (nach innen) gerichtet ist, durch einen Widerstand $-N$ aufgehoben, nicht aber der Druck in entgegengesetzter Richtung (nach außen), dem der materielle Punkt vollkommen frei folgen kann. In diesem Falle sagt man, der materielle Punkt m sei durch die Ebene MN unterstützt, und man nennt diese Ebene die Unterstützungsfläche.

Dem Gesagten zufolge müssen nicht nur solche äußere Kräfte, die sich schon an dem frei beweglich gedachten materiellen Punkt m das Gleichgewicht halten würden, für welche also die Bedingungen des § 18, bzw. § 22 Giltigkeit haben, sondern auch solche Kräfte $P_1 P_2 \dots P_n$ eines Kräftesystems (infolge des Hinzutretens des Widerstandes) sich das Gleichgewicht halten, deren Resultante eine Kraft N ist, die normal zur Ebene MN , und zwar nach einer beliebigen Seite derselben gerichtet ist, falls ein beiderseitiger Widerstand möglich ist, oder aber die im Falle einer bloßen Unterstützung nach der Seite A der Ebene gerichtet sind.

Da nun die Resultierende auf graphischem Wege durch die Schlusseite On des den Kräften $P_1 P_2 \dots P_n$ entsprechenden Kräftepolygons bestimmt ist, so ist das graphische Kennzeichen des Gleichgewichtes dadurch gegeben, dass On senkrecht zur Ebene MN gerichtet ist, und dass im Falle eines einseitigen Widerstandes überdies der Punkt n , wofern man den Anfangspunkt O des Kräftepolygons im Angriffspunkte O annimmt, auf der Seite A der Ebene gelegen ist. *)

Um auch die Äquivalenz zweier Kräfte zu beurtheilen, zerlege man jede Kraft R (Fig. 34) etwa mit Hilfe des Kräfterechteckes $OUVW$ in eine zur Ebene MN normal gerichtete Componente N und eine in der Ebene MN nach der Richtung OU wirkende Componente T , in welcher letzterer Richtung, die sich als die orthogonale Projection der Richtung der Kraft R auf die Ebene MN ergibt, sich der Punkt O vollkommen frei bewegen kann. Die erstere Componente N wird durch den Widerstand $-N$ der Ebene vollkommen aufgehoben, während der materielle Punkt der Einwirkung der zweiten Componente T vollkommen unbehindert folgen kann, wofern man von jedem tangentialen Widerstande (dem Reibungswiderstande) absieht (vergl. § 36), also die Fläche als vollkommen glatt voraussetzt. Die Kraft R ist sonach der Componente T äquivalent. Es werden daher auch alle Kräftesysteme äquivalent sein, deren Resultierenden $R, R', R'' \dots$ bei der früheren Zerlegung dieselbe Componente T ergeben.

Das graphische Kennzeichen der Äquivalenz wird demzufolge dadurch bestimmt sein, dass die Endpunkte $V, V', V'' \dots$ (Fig. 34) der den Kräftesystemen entsprechenden Kräftepolygonzüge, wenn

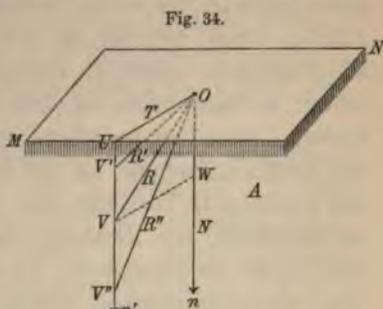


Fig. 34.

*) In der früheren Auflage ist an dieser Stelle das allgemeine analytische Kennzeichen des Gleichgewichtes für den hier behandelten Fall abgeleitet.

man zu dem Anfangspunkte derselben den Punkt O wählt, in einer zur Ebene MN senkrechten, sonst aber beliebig gewählten Geraden Un' gelegen sind. Im Falle eines einseitigen Widerstandes müssen überdies diese Endpunkte $V, V', V'' \dots$ auf der Seite A der Ebene MN gelegen sein.

Wählt man die Ebene MN zur xy -Ebene eines orthogonalen Koordinatensystems, so ist N die Z -Komponente der Resultierenden, also $N = R_z = \Sigma [P \cos (zP)]$ und T offenbar die aus R_x und R_y resultierende Kraft, zu deren Bestimmung der Größe und Richtung nach die Werte von R_x und R_y nothwendig, aber auch hinreichend sind. Sollen daher zwei Kräftesysteme äquivalent sein, so müssen sich bei beiden dieselben aus den Gleichungen $R_x = \Sigma [P \cos (xP)]$ und $R_y = \Sigma [P \cos (yP)]$ bestimmbar Werte von R_x und R_y ergeben.

Die Kräfte halten sich sicher dann, aber auch nur dann das Gleichgewicht, wenn $R_z = N$ die Resultante R der Kräfte ist, also wenn R_x und R_y verschwinden, d. h. sowohl $\Sigma [P \cos (xP)] = 0$, als auch $\Sigma [P \cos (yP)] = 0$ ist. Im Falle eines einseitigen Widerstandes müsste überdies, wenn die positive z -Achse nach der Seite A der Ebene gerichtet ist, sich ein positiver Wert des normalen Druckes R_z ergeben, also $\Sigma [P \cos (zP)] > 0$ sein.

Besteht der Zwangszustand des Punktes O darin, dass derselbe gezwungen ist, bei seiner Bewegung stets in einer gegebenen krummen Fläche, längs welcher er sich aber vollkommen frei bewegen kann, zu verbleiben, oder ist derselbe durch eine krumme Fläche unterstützt, so kann man, da jede krumme Fläche aus ebenen, unendlich kleinen Elementen bestehend gedacht werden kann, deren Lage durch die Berührungsebene an die krumme Fläche in der jeweiligen Lage des Punktes O bestimmt ist, diesen Fall auf den eben behandelten zurückführen; die Richtung On ist dann die Richtung der Normalen der Fläche im Punkte O . Es sind demnach die Gleichgewichts- und Äquivalenzbedingungen durch die früheren Bedingungen gegeben, wofern man die frühere Ebene MN mit der Tangentialebene im Punkte O identificiert, beziehungsweise diese zur xy -Ebene wählt. Der Druck auf die Fläche, beziehungsweise der normale Widerstand ist, falls wir annehmen, dass der Punkt in Ruhe ist, auch hier durch die früheren Werte bestimmt. Der hier behandelte Fall tritt z. B. ein, wenn der Punkt auf der inneren, concaven Seite einer Kugelschale (Hohlkugel) oder auf der convexen Seite einer massiven, feststehenden Kugel ruht. Die Normale On hat dann aus bekannten Gründen die Richtung des Kugelradius, und die Seite A der Tangentialebene ist im zweiten Falle jene Seite derselben, auf welcher sich das Kugelcentrum befindet, im ersten Falle aber die entgegengesetzte.

§ 24. Gleichgewichts- und Äquivalenzbedingungen von Kräften, die auf einen in einer vorgeschriebenen Bahn verharrenden materiellen Punkt einwirken.

Ist der Zwang eines Punktes O dadurch bedingt, dass derselbe genöthigt ist, in einer vorgeschriebenen geraden Bahn AB sich zu bewegen, ohne jedoch bei dieser Bewegung irgendwie behindert zu sein, so lässt sich auf eine der früheren ganz analoge Weise darthun, dass eine Kraft N , die normal zur Bahn gerichtet ist, keinen Einfluss auf den Bewegungszustand nehmen kann. Man hat nur bei der früheren indirecten Beweisführung eine Drehung des Körpersystems K , von dessen Einwirkung die Normalkraft N herrührt, ohne jedoch die relativen Lagen der Körper des Systems K zu ändern, um die Richtungslinie der Kraft N , und zwar eine Drehung um 180° zu vollführen, um auf Grund des Principes der unveränderlichen relativen Wirkung sofort einzusehen, dass der etwa ruhend angenommene Punkt O sich gleichzeitig nach gerade entgegengesetzten Richtungen bewegen müsste, was unmöglich ist. Es wird demnach auch hier durch den normalen Druck N , den man den Druck auf die Bahn nennt, ein Gegendruck, eine normale Reaction — N (vergl. § 5b) erzeugt, die als der normale Bahnwiderstand bezeichnet werden soll.

Ein solcher Fall tritt z. B. ein, wenn sich längs eines festen geradlinigen ungemein dünnen Stabes ein kleiner Körper, der eine dem Querschnitte des Stabes entsprechende Bohrung hat, ohne Reibung bewegen kann, oder wenn sich innerhalb einer geradlinigen ungemein dünnen Röhre ein Körper befindet, der sich bloß längs der Röhre ohne Reibung verschieben kann.

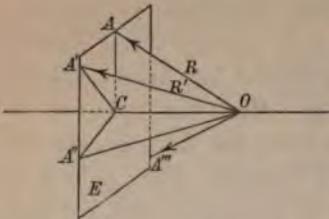
Es ist strenggenommen, wie dies eine einfache Überlegung sofort lehrt, ein jeder derartige Fall auf den im früheren § 23 behandelten Fall zurückzuführen (man hat sich z. B. die innere Wand der letzterwähnten Röhre aus unendlich vielen, die innere Cylinderfläche berührenden ebenen Elementen bestehend zu denken u. s. w.).

Für das Bestehen des Gleichgewichtes zwischen den äußeren Kräften $P, P_2 \dots P_n$, die auf den materiellen Punkt O einwirken, ist dem Gesagten zufolge die Bedingung erforderlich und hinreichend, dass, falls diese Kräfte eine Resultierende N haben, diese senkrecht zur geradlinigen Bahn gerichtet ist. Das graphische Kennzeichen des Gleichgewichtes ist also daraus zu entnehmen, dass, wenn der Anfangspunkt des Kräftepolygonalzugcs in O angenommen wird, der Endpunkt n desselben in der durch O normal zur geraden Bahn gelegten Ebene sich befindet. *)

*) In der früheren Auflage ist hier die Ableitung des allgemeinen analytischen Kennzeichens des Gleichgewichtes bei vorgeschriebener Bahn eingeschaltet.

Um die Äquivalenz zweier Kräftesysteme, deren Resultierenden R und R' sind, zu untersuchen, hat man offenbar nur jede dieser Kräfte R und R' (Fig. 35) in zwei Componenten zu zerlegen, deren eine die Richtung der geraden Bahn hat und die zweite auf dieser

Fig. 35.



Bahn senkrecht gerichtet ist. Da die letzteren Componenten CA, CA' (Fig. 35) durch den Widerstand der Bahn aufgehoben werden, so ist die Übereinstimmung der beiden ersteren Componenten für die Äquivalenz der beiden Kräftesysteme nothwendig und hinreichend. Nimmt man demnach die Anfangspunkte der entsprechenden Kräfte-

polygonalzüge im Punkte O an, so ist die Bedingung der Äquivalenz die, dass die Endpunkte $AA'A''$ u. s. w. derselben sämtlich in einer zur geraden Bahn senkrechten Ebene E gelegen sind. So sind z. B. in der Figur 35 die durch OC, OA, OA', OA'' u. s. w. dargestellten Kräfte äquivalent.

Nimmt man die gerade Bahn zur x -Achse eines Coordinatensystems an, so ist analytisch die einzige nothwendige und hinreichende Gleichgewichtsbedingung offenbar durch $R_x = \Sigma [P \cos (xP)] = 0$ und die Äquivalenzbedingung zweier Kräftesysteme durch $\Sigma [P \cos (xP)] = \Sigma [P' \cos (xP')]$ bestimmt.

Ist die vorgeschriebene Bahn des materiellen Punktes eine Curve, so hat man dieselbe aus geradlinigen, unendlich kleinen Elementen, deren Lage durch die Lage der Tangenten an die Curve in den entsprechenden Punkten der Bahn bestimmt ist, zusammengesetzt zu betrachten und die frühere Untersuchung auf diese Tangenten in Anwendung zu bringen. Dies ist z. B. der Fall, wenn die Röhre, in welcher sich ein entsprechend kleiner Körper zu bewegen gezwungen ist, gebogen ist.

D. Anwendungen der Gesetze der Statik des materiellen Punktes auf die Statik der Schwere.

§ 25. Empirische Sätze über die Schwerkraft.

Die Grundlage der Statik der Schwere bilden gewisse, einzig und allein aus der Erfahrung entnommene Sätze, deren Kenntniss vor allem nothwendig ist.

Die Erfahrung lehrt, dass ein jeder in der Nähe der Erdoberfläche befindliche freibewegliche Körper und demnach auch jeder freibewegliche materielle Punkt sich, wenn er ursprünglich ruhig fest-

gehalten und dann, ohne dass ihm ein Stoß ertheilt worden ist, losgelassen wird, im luftleeren Raume in bestimmter, für alle Körper an demselben Orte der Erdoberfläche gleichbleibender Richtung geradlinig nach abwärts gegen die Erdoberfläche mit stetig zunehmender Geschwindigkeit hin bewegt; man nennt diese Bewegung den freien Fall.

Anmerkung. Sowohl hier, wie in allen folgenden von der Schwere handelnden Paragraphen soll, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich hervorgehoben ist, unter Bewegung, beziehungsweise Ruhe stets nur die relative Bewegung, beziehungsweise relative Ruhe in Bezug auf die Erde zu verstehen sein.

Aus dieser Erfahrungsthatsache muss nothwendigerweise der Schluss gezogen werden, dass auf jeden Körper und ein jedes Körperelement in der Nähe der Erdoberfläche eine stetige Kraft einwirken muss, deren Richtung mit der Bewegungsrichtung beim freien Falle übereinstimmt, demnach sich nicht ändert, und zwar sich an demselben Orte weder ändert beim Übergange von einem materiellen Punkte zum anderen, noch auch im Laufe der Zeiten, noch auch während der Bewegung desselben materiellen Punktes, oder dass die Krafrichtung doch zum mindesten während des freien Falles sich so wenig ändert, dass man die Abweichung der Bahn des freien Falles von einer geraden Linie nicht wahrzunehmen imstande ist. Man nennt diese Fallrichtung bekanntlich die verticale oder lothrechte Richtung und jede auf dieser Richtung senkrechte die horizontale oder wagrechte. Die Kraft, welche die Bewegung des freien Falles veranlasst, nennt man die Schwerkraft oder auch die Schwere. Um auszudrücken, dass die Körper der Schwerkraft unterworfen sind, bezeichnet man dieselben als schwere Körper. Es sind demnach alle Körper und Körperelemente schwer.

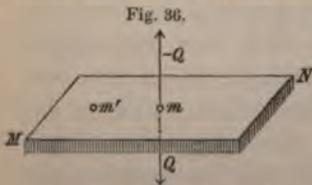
Weiterhin lehrt die Erfahrung, dass die Fallrichtungen an Orten der Erdoberfläche, die nicht sehr weit von einander entfernt sind, zu einander parallel, also gleichgerichtet sind. Daraus schließen wir weiter, dass unter der erwähnten Beschränkung alle Schwerkräfte parallele und gleichgerichtete Kräfte sind. In voller Strenge sind die Schwerkräfte nicht parallel gerichtet, indem ihre Richtungen für alle Orte desselben nördlichen, beziehungsweise südlichen Parallelkreises nach einem zwischen dem Erdmittelpunkte und dem Südpole, beziehungsweise dem Nordpole gelegenen, jedoch dem Erdcentrum sehr nahe liegenden Punkte der Erdachse convergieren, so dass man näherungsweise annehmen kann, dass alle Fallrichtungen gegen das Erdcentrum convergieren. An solchen Orten, deren Entfernung gegen die Dimensionen der Erde verschwindend klein ist, ist demnach der gegenseitige Neigungswinkel der Fallrichtungen so gering, dass man dieselben füglich als parallel ansehen kann.

Schließlich lehrt die Erfahrung, dass die Größe der Schwerkraft, wenn dieselbe auch im allgemeinen von einem Körper zum anderen variiert, dennoch bei einem und demselben Körper nicht nur vollkommen unabhängig ist von dessen Zustande und dem Zeitpunkte der Wirksamkeit der Kraft, sondern auch während der Bewegung des Körpers in welcher Bahn immer einen constanten, unveränderlichen Wert beibehält. Auch dies ist im strengen Sinne des Wortes nicht der Fall, indem die Intensität der Schwerkraft nicht nur in derselben Verticalen variiert, nämlich von der jeweiligen Höhe des Körpers über der Erdoberfläche abhängig ist, und zwar mit abnehmender Höhe zunimmt, sondern selbst auch bei gleicher Höhe (z. B. für die verschiedenen Orte der Meeresoberfläche) von der geographischen Breite des betreffenden Ortes der Erde, an welchem sich der Körper befindet, abhängig ist, indem sie nämlich an den Polen den größten, am Äquator den kleinsten Wert hat und mit zunehmender geographischer Breite zunimmt. Es sind jedoch diese Variationen, solange die Höhe und die geographische Breite sich nicht sehr beträchtlich ändern, so gering, dass man die Schwerkraft, die auf einen in Bewegung begriffenen Körper einwirkt, solange (was ja fast bei allen späterhin zu betrachtenden Bewegungen der Körper der Fall ist) während der Bewegung nicht sehr beträchtliche Höhenänderungen der Lage über der Erdoberfläche oder bemerkbare Änderungen der geographischen Breite stattfinden, als eine constante Kraft ansehen kann.

§ 26. Gleichgewicht eines schweren materiellen Punktes.

Aus den im § 25 angeführten Erfahrungsthatfachen folgt zunächst, dass ein in der Nähe der Erdoberfläche befindlicher materieller Punkt nur dann in Ruhe erhalten werden kann, wenn die Schwerkraft Q durch eine entgegengesetzt gleiche Kraft $-Q$, etwa durch den vertical nach aufwärts gerichteten normalen Widerstand einer ruhenden Fläche, durch welche etwa der materielle Punkt unterhalb unterstützt ist, aufgehoben wird.

Ist diese Unterstützungsfläche eben, so muss dieselbe, da der Widerstand vertical nach aufwärts wirken soll und die Fläche (wenn dieselbe absolut glatt ist) nur einen normal zu derselben wirkenden Widerstand äußern kann, senkrecht zur verticalen Richtung, also mit anderen Worten eine Horizontalebene sein. Man hat dann den Fall der Fig. 36 vor sich.



Den infolge der Schwere vertical nach abwärts gerichteten Druck Q auf die unterstützende Fläche MN , der der Schwerkraft an

Größe gleich ist, bezeichnet man als das Gewicht des Körpers, beziehungsweise des materiellen Punktes m .

Würde man den materiellen Punkt durch dessen Verschiebung aus seiner Gleichgewichtslage in einen beliebigen anderen in der horizontalen Unterstützungsebene gelegenen Ort m' versetzen, so würden sich auch in dieser neuen Lage das Gewicht Q und die durch das letztere hervorgerufene Reaction (der Widerstand) $-Q$ das Gleichgewicht halten. Der materielle Punkt verharrt sonach, wofern er, ohne dass ihm eine gewisse Geschwindigkeit ertheilt wird, in welche Lage in der Ebene MN auch immer gebracht wird, in jeder Lage in Ruhe. Einen derart beschaffenen Gleichgewichtszustand bezeichnet man als „indifferentes oder neutrales Gleichgewicht“.

Ist die unterstützende Fläche eine krumme Fläche, so hat man zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der materielle Punkt sich auf der concaven oder convexen Seite dieser krummen Fläche befindet, die man sich, wie früher die Ebene MN , da sie als Unterstützungsfäche nur einen einseitigen Widerstand $-Q$ äußern kann und, da dieser im Falle des Gleichgewichtes vertical nach aufwärts angenommen werden muss, stets unterhalb des materiellen Punktes denken muss.

Im ersten Falle, der durch Fig. 37 dargestellt ist (z. B. wenn der materielle Punkt innerhalb einer ruhenden Kugelschale beweglich ist), kann der materielle Punkt nur dann in Ruhe verharran, wenn derselbe im tiefsten Punkte der krummen Fläche, nämlich in jenem Punkte m sich befindet, in welchem das benachbarte unendlich kleine Flächenelement, beziehungsweise die Berührungsebene MN

Fig. 37.

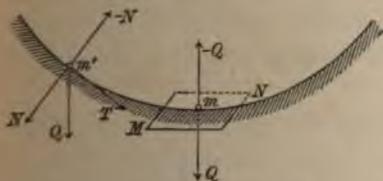
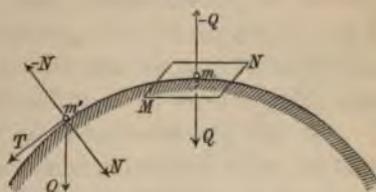


Fig. 38.



horizontal ist, indem nur in diesem Punkte das Gewicht Q der normal zur Fläche wirkenden Reaction $-Q$ entgegengesetzt gerichtet ist. Ist die Fläche etwa sphärisch, so befindet sich dementsprechend die Gleichgewichtslage vertical unterhalb des Kugelcentrums. Bringt man den Körper, ohne ihm einen Stoß, mit anderen Worten eine gewisse Geschwindigkeit zu ertheilen, in eine beliebige andere nahe, demnach in eine höhere Nachbarlage m' in der krummen Fläche, so wird offenbar (vergl. S. 77, Fig. 34) nur jene normale Componente N , die sich bei der Zerlegung der Schwerkraft Q in eine zur Fläche im

Punkte m' normal gerichtete Komponente N und eine zweite in der Ebene von N und Q wirkende, zur ersteren senkrechte, demnach zur Fläche tangential gerichtete Komponente T ergibt, durch den normalen Widerstand $-N$ der Fläche aufgehoben, daher der Punkt infolge der Wirksamkeit der Komponente T , nach deren Richtung er, wenn von der Reibung abgesehen wird, ungehindert sich bewegen kann, sich von selbst gegen seine ursprüngliche Gleichgewichtslage m in Bewegung setzen. Einen derartigen Gleichgewichtszustand bezeichnet man als „stabiles Gleichgewicht“.

Befindet sich dagegen der materielle Punkt m auf der convexen Seite einer ihn unterstützenden krummen Fläche (Fig. 38) (ruht er z. B. auf einer feststehenden massiven Kugel), so kann er aus analogen Gründen nur dann im Gleichgewichte sein, wenn derselbe sich in dem höchsten Punkte m der krummen Fläche, in welchem die Tangentialebene MN horizontal ist, befindet. Ist die unterstützende Fläche z. B. kugelförmig, so liegt diese Gleichgewichtslage des Punktes m , da der zum Berührungspunkte geführte Radius stets senkrecht zur horizontalen Tangentialebene gerichtet ist, vertical über dem Kugelcentrum. Befindet sich der materielle Punkt in einem beliebigen anderen benachbarten, also tieferen Nachbarpunkte m' dieser Fläche (Fig. 38), so lehrt die der früheren analoge Zerlegung, dass die tangential Componente T der Schwerkraft, wenn die Fläche absolut glatt ist, denselben derart in Bewegung setzen muss, dass er sich von seiner ursprünglichen Gleichgewichtslage m noch mehr entfernt. Ein derart beschaffenes Gleichgewicht heißt ein labiles Gleichgewicht.

Bleibt demnach bei einer sehr kleinen Verrückung eines unterstützten schweren materiellen Punktes aus seiner Gleichgewichtslage derselbe in gleicher Höhe, also in demselben Horizont (Fig. 36), so ist das Gleichgewicht ein neutrales, kommt derselbe in eine höhere Lage (Fig. 37), so ist dasselbe stabil, gelangt er aber in eine tiefere Lage (Fig. 38), so ist dasselbe labil.

Ist das Flächenelement, in welchem der materielle Punkt unterstützt ist, nicht horizontal, sondern unter irgend einem spitzen Winkel α gegen den Horizont geneigt, so nennt man das ebene Flächenelement, beziehungsweise die entsprechende Tangentialebene eine schiefe Ebene und den Winkel α (Fig. 39) den Neigungswinkel derselben.

In diesem Falle kann der materielle Punkt, wie wir in Fig. 37 und Fig. 38 gesehen haben, durch den alleinigen normalen Widerstand $-N$ der schiefen Ebene nicht im Gleichgewichte erhalten werden, sondern es muss, um das Gleichgewicht herbeizuführen, noch irgend eine Kraft P hinzutreten, deren Richtung nach S. 61 (Fig. 26) in der Ebene der Kräfte Q und $-N$, d. h. in einer sowohl die Verticale, als auch die Normale der schiefen Ebene enthaltenden Ebene,

mit anderen Worten in einer zur schiefen Ebene senkrechten Verticalebene (der Ebene des Neigungswinkels α , welche die Ebene der Zeichnung Fig. 39 ist) gelegen sein muss. Überdies darf nach § 18 S. 62 keine der Richtungen der sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte P , $-N$ und Q in den Kräftewinkel der beiden anderen Kräfte hineinfallen. N ist der durch die Kräfte P und Q hervorgebrachte normale Druck. Da N die Resultierende aus P und Q und da ferner (wegen der senkrechten Lage der Schenkel) $(QN) = \alpha$ ist, so ist nach S. 48, Gl. 5

$$\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{N}{\sin [\alpha + (NP)]} = \frac{Q}{\sin (NP)},$$

daher

$$\left. \begin{aligned} P &= Q \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin (NP)} \\ N &= Q \cdot \frac{\sin [\alpha + (NP)]}{\sin (NP)} \end{aligned} \right\} \text{(a)}$$

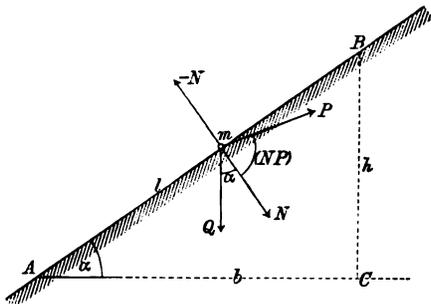
aus welchen Gleichungen sich, wenn der Winkel (NP) gegeben ist, die Größe der der Schwerkraft das Gleichgewicht haltenden Kraft P und der Druck N auf die schiefe Ebene leicht berechnen lassen. Ist die Kraft P parallel zur schiefen Ebene gerichtet, so ist offenbar $(NP) = \frac{\pi}{2}$ zu setzen und, da $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ und $\sin (\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos \alpha$ ist, so nehmen die Gleichungen (a) die einfache Form an:

$$\left. \begin{aligned} P &= Q \sin \alpha \\ N &= Q \cos \alpha \end{aligned} \right\} \text{(b)}$$

Nimmt man in der Durchschnittslinie der schiefen Ebene mit der zur schiefen Ebene normalen Verticalebene zwei beliebige Punkte A und B (Fig. 39) an, führt durch den höher liegenden Punkt B eine Verticale und durch den tiefer liegenden Punkt A in der Ebene des Neigungswinkels α eine horizontale Gerade, so erhält man das rechtwinklige Dreieck ABC , in welchem man gewöhnlich die Hypotenuse AB die Länge (l), die verticale Kathete BC die Höhe (h) und die horizontale Kathete AC die Basis (b) der schiefen Ebene nennt. Da nun $\sin \alpha = \frac{h}{l}$ und $\cos \alpha = \frac{b}{l}$ ist, so ergeben sich aus den Gleichungen (b) die leicht in Worte zu kleidenden bekannten Sätze:

$$P : Q = h : l \text{ und } N : Q = b : l.$$

Fig. 39.



Ist die Kraft P horizontal gerichtet, so ist $\alpha + (NP) = \frac{\pi}{2}$, daher $\sin(NP) = \cos \alpha$. Demnach ergeben sich für diesen Fall aus den allgemeinen Gleichungen (a) die einfachen Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} P &= Q \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = Q \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ N &= Q \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = Q \cdot \operatorname{sec} \alpha \end{aligned} \right\} (c)$$

Da ferner $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{b}$ und $\operatorname{sec} \alpha = \frac{l}{b}$ ist, so bestehen in diesem Falle die bekannten Proportionen

$$P : Q = h : b \quad \text{und} \quad N : Q = l : b.$$

Capitel III.

Kinematik des Punktes.

§ 27. Zusammensetzung von Bewegungen und Zerlegung der Bewegung eines Punktes.

Es befinde sich dasjenige Achsensystem A , auf welches die die jeweilige Lage eines beweglichen materiellen Punktes bestimmenden Coordinaten sich beziehen, bezüglich eines zweiten Achsensystems a in Bewegung, und es sei, um dies auszudrücken, die durch die Änderung dieser (auf A sich beziehenden) Coordinaten bestimmte Bewegung des materiellen Punktes ausdrücklich als relative Bewegung und diese Coordinaten seien als relative Coordinaten bezeichnet — wodurch jedoch nicht im mindesten in Abrede gestellt werden soll, dass strenggenommen alle überhaupt zur Betrachtung kommenden Bewegungen nur relative Bewegungen sind. Zugleich denke man sich das Achsensystem A in starrer Verbindung mit einem unveränderlichen (starrten) Punktsysteme S , dessen Bewegung durch die Bewegung des Achsensystems A mitbestimmt ist. Bildet etwa unsere Erde das System S , so kann man als das System A der beweglichen Coordinatenachsen die in der letzten Anmerkung des § 20 S. 67 erwähnten Achsen ansehen; es erscheinen dann der zum Erdcentrum führende Radius, ferner die geographische Breite und Länge als die relativen (scheinbaren) Coordinaten.

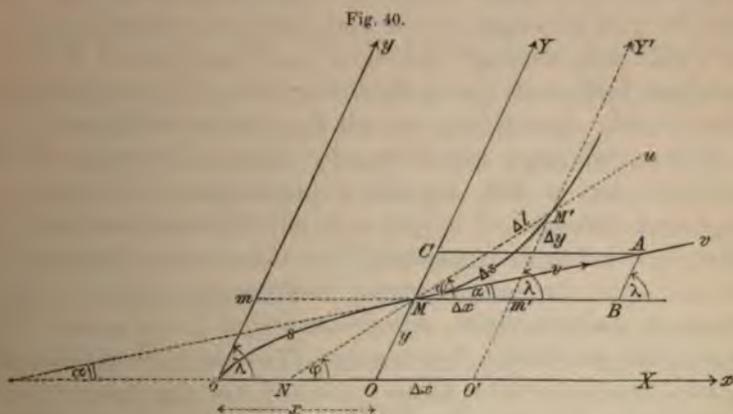
Dass die relative Bewegung auch scheinbare Bewegung genannt wird, weil dieselbe einem Beobachter, der an der Bewegung des Punktsystems S theilnimmt, als die wirkliche Bewegung des Punktes erscheint, wurde schon im § 5 erwähnt. So sind z. B. die geradlinige Bewegung des freien Falles, die von uns beobachtete Bewegung der Fixsterne u. s. w. nur relative, scheinbare Bewegungen, welche

uns, die wir an der Rotation der Erde um ihre Achse theilnehmen, als wirkliche Bewegungen erscheinen.

Die relative Bewegung und die Bewegung des Punktsystems S bilden die componentalen Bewegungen (Seitenbewegungen), aus denen die Bewegung bezüglich des Achsensystems a sich zusammensetzt (resultiert) (vergl. § 5).

Der einfachste Fall der Zusammensetzung zweier Bewegungen und der Zerlegung einer in einer Ebene vor sich gehenden Bewegung in zwei componentale Bewegungen tritt dann ein, wenn die beiden letzteren geradlinige Bewegungen sind.

Um eine gegebene Bewegung, die in der beliebigen krummen ebenen Bahn oMM' (Fig. 40) vor sich geht, in zwei componentale Bewegungen von gegebenen Richtungen, die den beliebigen Winkel λ einschließen, zu zerlegen, führe man etwa durch die der Zeit $t = 0$ entsprechende Lage o des bewegten Punktes parallel zu den Richtungen der componentalen Bewegungen die Geraden ox und oy und wähle dieselben zu den Achsen eines im allgemeinen schiefwinkligen Achsensystems a , dessen Coordinatenwinkel $(xy) = \lambda$ ist. Man denke



sich nun ein zweites bewegliches Achsensystem A , dessen Y -Achse mit der Achse oy gleichgerichtet ist und durch die jeweilige Lage des materiellen Punktes hindurchgeht, dessen Coordinatenanfangspunkt ferner der Durchschnittspunkt O dieser Y -Achse mit der früheren x -Achse ist und dessen X -Achse mit der x -Achse die gleiche Richtung hat. Dementsprechend ist die Lage der beweglichen Y -Achse zur beliebigen Zeit t , in welcher sich der materielle Punkt etwa in M befindet, durch OMY und zur Zeit $t' = t + \Delta t$, zu welcher sich der Punkt in M' befindet, durch $O'M'Y'$ bestimmt. Während der Bewegung des Punktes in der Curve oMM' bewegt sich somit das System (A) und etwa ein mit diesem in unveränderlicher Ver-

bindung befindliches Punktsystem (S) stets parallel zu sich selbst derart, dass der Ursprung O längs der x -Achse sich verschiebt und die Bahn desselben, sowie auch die Bahn jedes anderen Punktes dieses Punktsystems S , z. B. des Punktes m in der beliebigen Zeit t durch die Abscisse $x = oO = mM$ und während des Zeitintervalls Δt , innerhalb dessen die Bewegung des materiellen Punktes von M nach M' stattfindet, durch $OO' = Mm' = \Delta x$ gegeben ist.

Da der materielle Punkt stets in der Y -Achse bleibt, so findet seine relative Bewegung längs der Y -Achse statt, und zwar ist in der Zeit t die relative Bahn offenbar durch die Ordinate $OM = om = y$ und in dem folgenden Zeitelement Δt durch die Änderung dieser Ordinate, nämlich durch $m'M' = \Delta y$ bestimmt. Es ist dementsprechend die Bewegung längs der im allgemeinen krummen Bahn $oM = s$ in der Zeit t zusammengesetzt aus zwei gleichzeitigen geradlinigen Bewegungen, nämlich der fortschreitenden Bewegung des Punktsystems S , bei welcher der Weg $oO = x$ ist, und der gleichzeitigen relativen Bewegung, bei welcher der gleichzeitige Weg $OM = y$ ist. (Man denke sich das Punktsystem S etwa versinnlicht durch eine Glasröhre, deren Ende O längs der x -Achse sich verschiebt, und die stets parallel zur y -Achse fortgeschoben wird, während gleichzeitig ein materieller Punkt sich innerhalb derselben von O nach M u. s. w. bewegt, in welchem Falle man die resultierende Bahn in der Curve oMM' , da das Glasrohr durchsichtig ist, mit den Augen verfolgen kann.)

Ebenso, wie man die Bewegung längs der Bahn oM durch Construction der zu den gegebenen Richtungen der componentalen Bewegungen Parallelen OM und mM mit Hilfe des Parallelogramms $oOMm$ — des Bewegungsparallelogramms oder Wegparallelogramms — in die componentalen Bewegungen zerlegen kann, so kann man in analoger Weise, wie dies schon im § 5a) gezeigt wurde, zwei gegebene geradlinige Bewegungen, für welche die gleichzeitigen, der Zeit t entsprechenden Bahnen oO und om gegeben sind, durch die Construction desselben Parallelogramms $oOMm$, dessen Seiten oO und om sind, zusammensetzen; der durch die Construction bestimmte Eckpunkt M dieses Parallelogramms bestimmt dann die wirkliche Lage des Beweglichen in der resultierenden Bahn zur Zeit t , ohne dass man jedoch sich zu dem ungerechtfertigten Schlusse verleiten lassen darf, dass die resultierende Bewegung stets längs der Diagonale oM dieses Parallelogramms stattfinden müsse, denn, wie schon die frühere Betrachtung lehrt, ist die aus zwei geradlinigen Bahnen resultierende Bahn oM im allgemeinen eine krummlinige.

Nur in besonderen Fällen resultiert aus zwei gleichzeitigen geradlinigen Bewegungen abermals eine geradlinige — und zwar zunächst, was keiner weiteren Auseinandersetzung bedarf, wenn beide Be-

wegungen nach derselben oder nach entgegengesetzten Richtungen stattfinden; aber auch wenn die Bewegungen in verschiedenen, irgend einen Winkel λ einschließenden Geraden (den Coordinatenachsen) vor sich gehen, kann mitunter die resultierende Bewegung geradlinig sein. Sind nämlich die Bewegungsgesetze (siehe § 3) für die zwei componentalen Bewegungen durch zwei Gleichungen von der Form $x=f(t)$ und $y=\varphi(t)$ bestimmt, also bei beiden Bewegungen die Wege x und y als bestimmte Functionen der Zeit gegeben, so ergibt sich durch Elimination der Zeit t aus diesen beiden Gleichungen eine Gleichung zwischen der Ordinate y und der zugehörigen Abscisse x eines beliebigen Punktes der resultierenden Bahn, mit anderen Worten die Gleichung der gesuchten Bahn. Ist nun die so gefundene Gleichung bezüglich der Variablen x und y vom ersten Grade, so dass sie, wenn die Lage des Punktes zur Zeit $t=0$ zum Coordinatenanfangspunkte angenommen wird, die Form $y=ax$ hat (wo a eine Constante bedeutet), so gehört sie bekanntlich einer geraden Linie an; sonach ist in diesem besonderen, und zwar nur in diesem Falle die resultierende Bewegung geradlinig. Bedeuten demnach x' und y' die componentalen Wege (Coordinaten) zu irgend einer anderen Zeit t' , so muss auch $y'=ax'$, also $\frac{y}{x}=\frac{y'}{x'}$ oder $\frac{f(t)}{\varphi(t)}=\frac{f(t')}{\varphi(t')}$ sein, d. h. die nothwendige und hinreichende Bedingung, die erfüllt sein muss, wenn die resultierende Bewegung eine geradlinige sein soll, ist die directe Proportionalität der gleichzeitigen geradlinigen componentalen Bewegungen für eine jede Zeit. In diesem Falle ist der bei der resultierenden Bewegung in der beliebigen Zeit t zurückgelegte Weg die Diagonale $oM=s$, kurz der resultierende Weg ist die geometrische Summe der gleichzeitigen componentalen Wege $oO=x$ und $OM=y$, also $s\equiv x\hat{+}y$ und ebenso $MM'=As\equiv Ax\hat{+}Ay$.

Würde man sich während der Bewegung in der Curve oMM' die Ebene der Zeichnung (Fig. 40) parallel zu sich selbst, etwa derart continuierlich verschoben denken, dass dabei alle Punkte der Ebene in derselben Zeit gleiche und parallele geradlinige Bahnen zurücklegen und dass der Anfangspunkt O sich längs einer dritten gegen die Ebene der Zeichnung geneigten Achse, der s -Achse bewegt, welche letztere Bewegung etwa nach dem Gesetze $s=\psi(t)$ vor sich gehen möge, so würde die resultierende Bewegung des materiellen Punktes M in einer im allgemeinen nicht ebenen, also einer Curve doppelter Krümmung vor sich gehen. Diese Bewegung, von der schon in § 5 die Rede war, ist als zusammengesetzt aus der Bewegung $s=\psi(t)$ und der früher erörterten Bewegung in der ebenen Curve oMM' , oder, da letztere aus den Bewegungen $x=f(t)$ und $y=\varphi(t)$ resultiert, als eine aus den drei geradlinigen Bewegungen

$x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$ zusammengesetzte anzusehen, und so lässt sich auch umgekehrt in einer analogen leicht ersichtlichen Weise eine jede Bewegung in einer beliebigen räumlichen Curve in drei componentale geradlinige Bewegungen, welche parallel zu drei beliebigen räumlichen Achsen xyz vor sich gehen, zerlegen. Um irgend eine dieser drei componentalen Bewegungen, etwa jene parallel zur z -Achse kennen zu lernen, hat man nur dem Gesagten zufolge durch die jeweilige Lage des Punktes eine Ebene parallel zu den beiden anderen Achsen x und y zu führen und den Durchstoßpunkt dieser Ebene mit der z -Achse zu bestimmen. Die Bewegung dieses Durchstoßpunktes, der als Projection des beweglichen Punktes auf die z -Achse anzusehen ist, ist die zu bestimmende componentale Bewegung.

Ein- für allemal möge hier erwähnt werden, dass, wenn in der Folge von der Projection auf eine von den drei Achsen eines räumlichen, schief- oder rechtwinkligen Achsensystems die Rede ist, stets vorausgesetzt ist, dass die projicierende Ebene zu der Ebene der beiden anderen Achsen parallel ist.

Es muss jedoch ausdrücklich hervorgehoben werden, dass die bisher behandelte Zerlegung einer Bewegung in zwei oder mehrere andere, beziehungsweise die Zusammensetzung zweier oder mehrerer Bewegungen, bei welchen das erwähnte Parallelogramm (Fig. 40 oder Fig. 4) zur Anwendung gelangt, nothwendigerweise, wie aus der ganzen bisherigen Untersuchung sich ergibt, voraussetzt, dass die componentalen Bewegungen relative Bewegungen bezüglich eines Punktsystems S sind, das in fortschreitender Bewegung sich befindet, so dass also die einzelnen Punkte von S stets in derselben Zeit gleiche und parallele Bahnen zurücklegen.*)

§ 28. Geschwindigkeit. Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten.

Die Vergleichung des Weges s mit der Zeit t führte im § 3 zum Begriffe der Geschwindigkeit v . Bezeichnet man die in dem beliebigen Zeitintervalle $\tau = \Delta t$, welches der Zeit t (die letztere vom Zeitanfangspunkte $t = 0$ aus gerechnet) unmittelbar folgt (oder vorangeht), zurückgelegte Bahn (etwa MM' in der Fig. 40) durch $\sigma = \Delta s$, so wird das in § 3 in Betracht gezogene Verhältnis zwischen Weg und Zeit (beziehungsweise Quotient aus dem Wege und der Maßzahl der Zeit), nämlich $\frac{\sigma}{\tau} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_m$ als die mittlere oder durchschnittliche Geschwindigkeit innerhalb dieses Zeitintervalles $\tau = \Delta t$ bezeichnet. Dieselbe hängt im allgemeinen bei einer gegebenen Bewegung, wie dies schon das in § 3 behandelte besondere

*) In der früheren Auflage ist an dieser Stelle die relative Bewegung eines Punktes in Bezug auf ein rotirendes Punktsystem S behandelt.

Beispiel des freien Falles, wo $\frac{\sigma}{\tau} = 9.8t + 4.9\tau$ war, lehrt, nicht nur von der Dauer des Zeitintervalls τ , sondern auch von der Zeit t ab, in welcher das Zeitintervall τ beginnt (bzw. endet).

Der bestimmte Grenzwert v , dem der eben betrachtete Differenzenquotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ für ein gegebenes t sich ins Unendliche nähert, wenn Δt gegen Null convergiert, so dass schließlich der Unterschied zwischen v und $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ kleiner als jede noch so kleine Größe werden kann, wenn Δt entsprechend klein angenommen wird, kurz der Differentialquotient $\frac{ds}{dt}$ des Weges genommen nach der Zeit wurde schon im § 3 als die „Geschwindigkeit zur Zeit t “ bezeichnet. Auch wurde daselbst eine einfache, leicht fassliche Definition für diesen Begriff aufgestellt. So ergab sich bei dem freien Falle für $v = \frac{ds}{dt}$ der Wert $9.8t$. Das Qualitätszeichen der Geschwindigkeit, der Begriff der Geschwindigkeitsrichtung, die Zeitwegcurve u. s. w. kann aus § 3 als bekannt vorausgesetzt werden. Aus der Zeitwegcurve (Fig. 2) ergab sich neben $v = \tan \alpha$ auch $\frac{\sigma}{\tau} = \tan \varphi$. Es ist demnach die durchschnittliche Geschwindigkeit bei einer Bewegung in dem bestimmten Zeitintervalle τ graphisch durch die trigonometrische Tangente des Winkels φ bestimmt, welche die dem Zeitintervalle τ entsprechende Secante mm' der Zeitwegcurve mit der Abscissenachse einschließt (s. Fig. 2).

Durch die Differentiation der Bewegungsgleichung $s = f(t)$ nach der Zeit t ergibt sich die Geschwindigkeit v offenbar abermals als eine eindeutige Function der Zeit, nämlich $v = f'(t)$. Man kann demnach zur Darstellung dieser neuen Function sich einer zweiten ebenen Curve bedienen, in welcher die Zeit t durch die Abscisse und die Geschwindigkeit v durch die zugehörige Ordinate dargestellt sind, so dass $x = t$ und $y = v$ ist. Diese Curve, die Galilei schon benutzte, wollen wir die Zeitgeschwindigkeitscurve nennen.

Die Geschwindigkeit der relativen (scheinbaren) Bewegung bezüglich irgend eines Punktsystems S wird die relative (scheinbare) Geschwindigkeit bezüglich dieses Systems S genannt.

Ist eine Bewegung eines Punktes M aus mehreren anderen zusammengesetzt, so bezeichnet man die Geschwindigkeit bei der zusammengesetzten Bewegung als die zusammengesetzte (resultierende) Geschwindigkeit und die gleichzeitigen Geschwindigkeiten dieses Punktes M bei den componentalen Bewegungen (also bei zwei componentalen Bewegungen die relative Geschwindigkeit des Punktes M und die Geschwindigkeit des mit M eben coincidierenden Punktes

des Systems S) als die componentalen Geschwindigkeiten (Seitengeschwindigkeiten, Geschwindigkeitscomponenten).

In dem früher behandelten allgemeinen Falle (Fig. 40) der Zerlegung einer längs einer ebenen Curve stattfindenden Bewegung in zwei geradlinige, parallel zu den im allgemeinen schiefwinkligen Achsen Ox und Oy vor sich gehende Bewegungen sind, da x und y die in der beliebigen Zeit t bei den componentalen Bewegungen zurückgelegten Wege angeben, die Seitengeschwindigkeit v_x der parallel zur x -Achse stattfindenden Bewegungscomponente durch $v_x = \frac{dx}{dt}$ und die Geschwindigkeit der zweiten Seitenbewegung durch $v_y = \frac{dy}{dt}$ bestimmt. Nun ergibt sich, wenn man die Sehne MM' durch Δl bezeichnet und im übrigen die Bezeichnungen der Fig. 40 beibehält, aus dem Dreiecke $MM'm'$:

$$\frac{\Delta x}{\sin(\lambda - \varphi)} = \frac{\Delta y}{\sin \varphi} = \frac{\Delta l}{\sin \lambda}$$

Somit ist auch, mag auch Δt wie immer klein sein:

$$\frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{\sin(\lambda - \varphi)} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\sin \varphi} = \frac{\frac{\Delta l}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}}{\sin \lambda}$$

Da diese Doppelgleichung für jedes Δt gültig ist, so behält sie ihre Gültigkeit auch, wenn man zu den Grenzwerten für $\Delta t = 0$ übergeht. Beachtet man nun, dass der Grenzwert des Verhältnisses $\frac{\Delta s}{\Delta l}$ des Bogenelementes einer beliebigen continuierlich gekrümmten Curve zu der entsprechenden Sehne immer 1 ist, dass ferner die Grenzwerte von $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, und von φ beziehungsweise die Größen $\frac{dx}{dt} = v_x$, $\frac{dy}{dt} = v_y$, $\frac{ds}{dt} = v$ und der Richtungswinkel α der Tangente sind, so findet man aus der früheren Doppelgleichung, dass

$$v_x = v \cdot \frac{\sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} \quad v_y = v \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \lambda}$$

ist. Schneidet man nun in der Richtung der resultierenden Geschwindigkeit, d. i. in der Richtung der Tangente an die resultierende Bahn, etwa von M aus die Strecke $MA = v$ ab und führt von den Endpunkten M und A Parallele zu den Geschwindigkeits-, d. i. Bewegungsrichtungen der componentalen Bewegungen, so erhält man das Parallelogramm $MBAC$, beziehungsweise das Dreieck MBA , in welchem dem Sinussatze zufolge

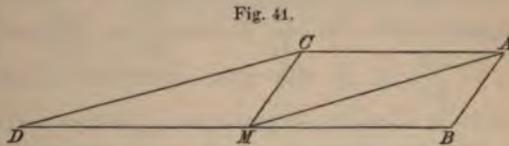
$$MB = v \cdot \frac{\sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda}$$

$$MC = BA = v \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \lambda} \text{ ist.}$$

Durch Vergleichung dieser Werte mit den früheren ergibt sich sofort, dass $MB = v_x$ und $MC = v_y$ ist. Man kann demnach bei der Zerlegung einer Geschwindigkeit in zwei Geschwindigkeitscomponenten zur Bestimmung derselben und also auch umgekehrt bei der Zusammensetzung der etwa gegebenen Geschwindigkeitscomponenten MB und $MC = BA$ genau so, wie bei der Zerlegung und Zusammensetzung von Kräften sich eines Parallelogramms $MBAC$ — des Geschwindigkeitsparallelogramms — beziehungsweise eines Dreiecks MBA — des Geschwindigkeitsdreiecks — bedienen.

Ist die resultierende Geschwindigkeit $v = MA$ und eine der componentalen Geschwindigkeiten, etwa die Geschwindigkeit $v_x = MB$ (Fig. 40) jenes Punktsystems S bekannt, auf welches sich die zu suchende relative Geschwindigkeit $v_y = MC$ bezieht, so kann man statt des früheren Parallelogramms $MBAC$ ein zweites Parallelogramm benützen. Verlängert man nämlich MB nach entgegengesetzter Richtung über M hinaus

(Fig. 41) und führt von C eine Parallele CD zu MA , so erhält man ein zweites Parallelogramm $MACD$, dessen Diagonale MC die gesuchte relative Geschwindigkeit v_y darstellt. Da nun in diesem Parallelogramm $AC = MD$ und im ursprünglichen Parallelogramm $CA = MB$ ist, so ist auch $DM = MB$, d. h. man kann auch die relative Geschwindigkeit MC bezüglich eines Punktsystems derart bestimmen, dass man die resultierende Geschwindigkeit MA mit jener Geschwindigkeit MD , die der des Punktsystems, nämlich MB , entgegengesetzt gleich ist, mittels des Parallelogramms $MDCA$ zusammensetzt. Auf diese Art kann man z. B. leicht die scheinbare Geschwindigkeit und die scheinbare Bewegungsrichtung der vertical herabfallenden Regentropfen für einen in einem Waggon mit der Geschwindigkeit MB fahrenden Beobachter u. s. w. bestimmen.



Ebenso wie sich auf alleiniger Grundlage des Lehrsatzes vom Kräfteparallelogramm, beziehungsweise Krätedreieck die graphische Zusammensetzung beliebiger Kräfte mittels des Kräftepolygons, des Kräfteparallelepipeds u. s. w. ergab, so muss auch hier aus analogen Gründen die aus beliebig vielen Geschwindigkeitscomponenten resultierende Geschwindigkeit als die Schlusseite eines in analoger Weise zu construirenden Polygons — des Geschwindigkeitspolygons — und bei drei beliebig im Raume gerichteten Componenten als Diagonale eines Parallelepipeds — des Geschwindigkeitsparallelepipeds — sich ergeben.

In dem letzteren schon früher behandelten Falle, in welchem drei geradlinige Bewegungen, die parallel zu den drei Achsen eines im allgemeinen schiefwinkligen räumlichen Achsensystems stattfinden, zusammengesetzt sind, also wenn etwa die Ebene der Fig. 40 während der früher betrachteten Bewegung des Punktes M parallel zu sich selbst derart fortschreitet, dass der Punkt o längs der z -Achse sich bewegt, ist, da z der Weg für diese Bewegungscomponente ist, die Geschwindigkeit der letzteren durch $v_z = \frac{dz}{dt}$, jene der anderen componentalen Bewegungen durch $v_x = \frac{dx}{dt}$ und $v_y = \frac{dy}{dt}$ bestimmt.

Stimmt der Anfangspunkt des Coordinatensystems nicht mit der Lage des beweglichen Punktes zur Zeit $t = 0$ überein, sondern hat diese Anfangslage bezüglich eines beliebig gewählten Achsensystems xyz , dessen Anfangspunkt willkürlich angenommen ist, die Coordinaten $x_0 y_0 z_0$, so dass $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ die componentalen Wege in der Zeit t sind, so ist, da die nach der Zeit t genommenen Ableitungen der constanten Anfangscoordinaten $x_0 y_0 z_0$ den Wert Null haben, $v_x = \frac{d(x - x_0)}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt} = \frac{dx}{dt}$ und ebenso $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$, d. h. die drei Geschwindigkeitscomponenten sind auch in diesem allgemeinen Falle die Differentialquotienten der laufenden Coordinaten — nach der Zeit genommen.

All das Gesagte, das bezüglich der Zusammensetzung geradliniger componentaler Bewegungen nachgewiesen wurde, hat, da man eine jede krummlinige Bewegung für eine unendlich kleine Zeit als eine geradlinige ansehen kann, für jedes Zeitelement auch auf krummlinige Bewegungscomponenten volle Giltigkeit, nur ändern sich dann von einem Zeitelement zum anderen nicht nur die Größen, sondern auch die Richtungen der Geschwindigkeitscomponenten.

Da eine jede Geschwindigkeit durch eine Strecke von bestimmter Größe und Richtung dargestellt werden kann, so sind die Geschwindigkeiten Vectorgrößen, und aus den bisherigen Untersuchungen über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten ergibt sich sofort, dass die resultierende Geschwindigkeit eines Punktes in jedem Falle die geometrische Summe aus den einzelnen componentalen Geschwindigkeiten dieses Punktes ist. So ist z. B. bei der Bewegung in einer ebenen Bahn $v \equiv v_x \hat{+} v_y$ und bei der Bewegung längs einer beliebigen Curve im Raume $v \equiv v_x \hat{+} v_y \hat{+} v_z$ u. s. w. Aus der geometrischen Gleichheit $v \equiv v_x \hat{+} v_y$ oder $MA \equiv MB \hat{+} BA$ (Fig. 40) ergibt sich sofort $v_y \equiv v \hat{-} v_x = v \hat{+} (-v_x)$ (vergl. Anm. auf S. 53), also der durch Fig. 41 dargestellte Lehrsatz über die Bestimmung der relativen Geschwindigkeit $v_y = MC$ durch Zusammensetzung von v mit $(-v_x)$.

In ganz analoger Weise, wie dies bei Kräften geschehen ist, lässt sich nachweisen, dass, falls die Bewegung in einer ebenen Bahn vor sich geht, die Geschwindigkeitscomponenten v_x und v_y , die zu den Achsen eines rechtwinkligen Achsensystems parallel sind, dem Zeichen und Zahlwerte nach durch die entsprechenden orthogonalen Projectionen der Geschwindigkeit v , also durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = v \cdot \cos(xv) \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = v \cdot \sin(xv) \\ v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \end{aligned} \right\} (1)$$

bestimmt sind, was sich übrigens schon daraus ergibt, dass $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot v$ und $dx = ds \cdot \cos(x, ds) = ds \cdot \cos(xv)$ u. s. w. ist, und eine Schlussfolgerung, die mit jener des § 16 völlig analog ist, lehrt, dass auch hier bei der Zusammensetzung mehrerer Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 u. s. w. in derselben Ebene von ähnlichen Gleichungen Anwendung gemacht werden kann wie die Gleichungen (1) auf S. 54, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = v_1 \cos(xv_1) + v_2 \cos(xv_2) + v_3 \cdot \cos(xv_3) + \dots \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = v_1 \sin(xv_1) + v_2 \sin(xv_2) + v_3 \cdot \sin(xv_3) + \dots \end{aligned} \right\} (2)$$

welche im Vereine mit der Gleichung (1) die resultierende Geschwindigkeit v und ihren Richtungswinkel (xv) zu bestimmen gestatten.

Ebenso wie im § 20 lässt sich leicht nachweisen, dass bei der Zerlegung einer Geschwindigkeit v in drei zu den drei orthogonalen Coordinatenachsen im Raume parallelen Componenten v_x, v_y, v_z die algebraischen Werte der letzteren durch die Gleichungen gegeben sind

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = v \cdot \cos(xv) \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = v \cdot \cos(yv) \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = v \cdot \cos(zv) \\ v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \end{aligned} \right\} (3)$$

In diesem und in dem vorerwähnten Falle drücken die Geschwindigkeitscomponenten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ offenbar jene Geschwindigkeiten aus, mit denen sich die orthogonalen Projectionen des beweglichen Punktes M auf die drei Achsen längs dieser Achsen bewegen, so dass, um kurz zu sprechen, die Geschwindigkeiten dieser

Projectionen zugleich die Projectionen der Geschwindigkeit v sind. Bei der Zusammensetzung beliebiger Geschwindigkeiten $v_1, v_2, v_3 \dots$ im Raume hat man offenbar aus analogen Gründen wie in § 21 von den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_1 \cos(xv_1) + v_2 \cos(xv_2) + v_3 \cos(xv_3) + \dots \\ v_y &= v_1 \cos(yv_1) + v_2 \cos(yv_2) + v_3 \cos(yv_3) + \dots \\ v_z &= v_1 \cos(zv_1) + v_2 \cos(zv_2) + v_3 \cos(zv_3) + \dots \end{aligned} \right\} (4)$$

und hierauf von den Gleichungen (3) Anwendung zu machen, um die resultierende Geschwindigkeit v zu bestimmen. Soll der Ruhezustand resultieren, also $v = 0$ werden, so müssen zufolge der letzten Gleichung in (3) alle drei Summen in (4) sich auf Null reducieren.

§ 29. Dimensionen der Grössenarten. Dimension der Geschwindigkeit. Symbolische Darstellung der Einheiten der Grössenarten.

Im § 3 wurde schon betont, dass die Maßzahl der Geschwindigkeit wesentlich durch die Wahl der Längeneinheit, auf welche sich die Maßzahlen $s, \Delta s, ds$ des Weges und der Wegelemente, und durch die Wahl der Zeiteinheit, auf welche sich die Maßzahlen $t, \Delta t, dt$ der zugehörigen Zeiten beziehen, bedingt ist. Alle die früheren Gleichungen $\frac{s}{t} = c, \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_m, \frac{ds}{dt} = v$ setzen nämlich voraus, dass, wenn sowohl die Maßzahl des Weges, als auch jene der Zeit den Wert 1 hat, auch die Maßzahl der Geschwindigkeit 1 werde, dass also jene Geschwindigkeit die Geschwindigkeitseinheit sei, bei welcher in jeder Zeiteinheit ein der Längeneinheit gleicher Weg zurückgelegt wird.

Hängt nun, wie hier, die Einheit einer bestimmten Grössenart, die „abgeleitete“ Einheit, von den Einheiten anderer Grundgrössenarten (Fundamentalgrößen), den „Grundeinheiten“ oder „Fundamenteinheiten“, z. B. hier die Einheit der Geschwindigkeiten von den Einheiten der Längen und der Zeiten ab, so dass man die auf diese Einheiten bezogenen Maßzahlen der letzten Grundgrössenarten, die hier im allgemeinen durch l , d. h. Maßzahl der Länge, und durch t , d. h. Maßzahl der Zeit, bezeichnet sein mögen, einer bestimmten Rechnungsoperation (z. B. hier in allen Fällen einer Division des l durch t) unterwerfen muss, um die entsprechende, auf die abgeleitete Einheit sich beziehende Maßzahl (v) der (abhängigen) Grössenart zu erhalten, so bezeichnet man nach Fourier (F. „Théorie analytique de la chaleur“ 1822) die allgemeine Form dieser Rechnungsoperation (die Functionsform) als die Dimension der letzteren Grössenart und drückt symbolisch die abgeleitete Einheit dadurch aus, dass man in der allgemeinen Functionsform die erwähnten Maßzahlen durch die entsprechenden Grundeinheiten sich ersetzt denkt, also diese Einheiten

scheinbar (symbolisch) denselben Rechnungsoperationen unterwirft. Dementsprechend ist die Dimension der Geschwindigkeit $\frac{l}{t} = l \cdot t^{-1}$, und die den Grundeinheiten: „Centimeter als Längeneinheit“ und „Secunde als Zeiteinheit“ entsprechende Geschwindigkeitseinheit ist symbolisch durch $\frac{\text{Centimeter}}{\text{Secunde}}$ ausgedrückt.

In der Folge soll stets die Dimension einer Größenart dadurch angedeutet werden, dass man das allgemeine Zeichen für die Maßzahl dieser Größenart — also bei der Größenart der Geschwindigkeiten das Zeichen v — innerhalb eckiger Klammern setzt, so dass z. B. $[v] = l \cdot t^{-1}$ folgendermaßen zu lesen ist: Die Dimension der Geschwindigkeit ist $l \cdot t^{-1}$ oder, da der Exponent eines jeden Factors angibt, von der wievielten Dimension die entsprechende abgeleitete Größe bezüglich jener Grundgrößenart ist, deren Maßzahl als Grundzahl des betreffenden Factors auftritt, so kann die letzte Gleichung auch gelesen werden: Eine jede Geschwindigkeit ist bezüglich der Größenart der Längen von der ersten, bezüglich der Zeit von der (-1)ten Dimension. Die Dimension irgend einer Fläche, deren Maßzahl im allgemeinen durch f angedeutet sein möge, ist nach dem Gesagten l^2 , also $[f] = l^2$, d. h. eine jede Fläche ist bezüglich einer Länge von der zweiten Dimension; ist V das allgemeine Zeichen für die Maßzahl eines Volums, so ist $[V] = l^3$, d. h. jedes Volum ist bezüglich der Grundgrößenart der Längen von der dritten Dimension. Demgemäß dient, wenn etwa ein Meter als Längeneinheit gewählt wird, zur Bezeichnung der Flächeneinheit der bekannte symbolische Ausdruck „Meter²“ (Quadratmeter) und für die Volumeinheit „Meter³“ (Cubikmeter). Die einfachen Verhältniszahlen zwischen zwei Größen derselben Art haben dem Gesagten zufolge die Dimension 1 oder sind, was dasselbe besagt, bezüglich einer jeden Grundgrößenart von der 0ten Dimension, so z. B. jedes Verhältnis zweier Längen, demnach z. B. der Sinus, Cosinus etc., kurz alle gonyometrischen Functionen, ebenso jeder Winkel im Bogenmaße gemessen, da ja auch in diesem Falle lediglich das Verhältnis eines Kreisbogens, d. i. einer Länge zum Radius, d. i. zu einer zweiten Länge in Frage kommt u. s. w.

So ist auch für die im § 17 S. 58 erwähnte Momenteneinheit die Bezeichnung Kilogramm \times Meter = Kilogramm \times Meter gestattet, und es ist $[M_P] = [P] \cdot l$, d. h. die Dimension der statischen Momente von Kräften ist das Product aus der Kräftedimension und der Längendimension.

Die stete Rücksichtnahme auf die Dimensionen der verschiedenen zur Anwendung kommenden Größenarten der Mechanik und Physik bietet bei den verschiedenen Problemen dieser Wissenschaften den

nicht zu unterschätzenden Vortheil, nicht nur in einem jeden Falle sich zu überzeugen, ob alle Glieder (Summanden) einer Gleichung homogen (von derselben Dimension) sind, d. h. alle Glieder Maßzahlen derselben Größenart (also die sämtlichen Summanden gleichartig) sind und sich auf dieselbe (abgeleitete) Einheit beziehen, sondern man kann auch leicht, was öfters nothwendig ist, Änderungen der Fundamenteinheiten vornehmen, indem man in den oberwähnten Symbolen jede Grundeinheit durch die neuen Grundeinheiten ausdrückt und die angeführten Zahlenoperationen ausführt. So ist z. B. aus leicht ersichtlichen Gründen, wenn man statt Meter und Secunde als neue Einheiten Kilogramm und Minute einführt,

$$\frac{\text{Meter}}{\text{Secunde}} = \frac{\frac{1}{1000} \text{Kilometer}}{\frac{1}{60} \text{Minute}} = 0.06 \frac{\text{Kilometer}}{\text{Minute}}, \text{ daher z. B. eine Geschwindigkeit von 9 Metern pro Secunde, d. i. } 9 \frac{\text{Meter}}{\text{Secunde}} = 9 \times 0.06 \frac{\text{Kilometer}}{\text{Minute}} = 0.54 \frac{\text{Kilometer}}{\text{Minute}}.$$

§ 30. Die gleichförmige und die ungleichförmige Bewegung im allgemeinen. Beschleunigung einer geradlinigen Bewegung.

Eine Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit stets einen constanten Wert c beibehält, nennt man eine gleichförmige Bewegung.

Es ist demnach $\frac{ds}{dt} = c$ und $ds = c \cdot dt$. Durch Integration dieser Gleichung findet man $s = ct + C$. Um die Integrationsconstante C zu bestimmen, wendet man diese für alle Punkte der Bahn gültige Gleichung für einen besonderen Punkt der Bahn an, in welchem s und t bekannt sind. Rechnet man nun, wie es meist geschieht, den Weg von jenem Punkte an, in welchem sich das Bewegliche zur Zeit o befindet, so ist für $t = o$ auch $s = o$, und es ergibt sich demnach aus der oberen Gleichung, dass $o = C$ ist, wodurch die allgemeine Gleichung die Form $s = ct$ (1) annimmt. Durch diese Gleichung ist somit das aus § 3 bekannte Bewegungsgesetz einer gleichförmigen Bewegung ausgedrückt.

Diese Gleichung (1) lehrt, dass bei einer gleichförmigen Bewegung der Weg der Zeit direct proportioniert ist oder, was dasselbe besagt, dass in gleichen Zeiten während der ganzen Bewegungsdauer stets auch gleiche Bahnstrecken zurückgelegt werden. Würde man, wie es meist geschieht, die letzte Eigenschaft zur Definition der gleichförmigen Bewegung wählen, so würde die umgekehrte Schlussfolgerung zu dem anfänglichen Satze führen, dass $\frac{ds}{dt} = c$, d. h. dass die Geschwindigkeit constant sei.

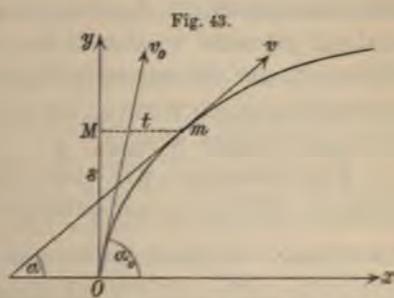
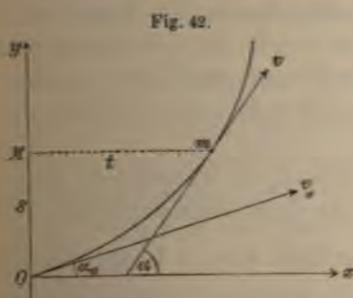
Aus der Gleichung (1) ergibt sich, dass das Verhältnis zwischen Weg und Zeit den constanten Wert c hat, dass also bei der gleichförmigen Bewegung — aber nur bei dieser — der Begriff der durchschnittlichen (mittleren) Geschwindigkeit mit jenem der eigentlichen Geschwindigkeit stets identisch sei. Man kann demnach als die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung auch geradezu das Verhältnis des Weges zur Zeit bezeichnen. Setzt man in $s = ct$ für $t = 1$, demnach $s = s_1$, so findet man $c = s_1$, d. h. man kann bei der gleichförmigen Bewegung — aber strenggenommen nur bei dieser — die Geschwindigkeit definieren als den Weg in der Zeiteinheit.

Die Zeitwegcurve für eine gleichförmige Bewegung ist — der Gleichung $s = ct$, bzw. $y = cx$ entsprechend — eine den Anfangspunkt in sich enthaltende Gerade, die mit der Abscissenachse einen Winkel α einschließt, für welchen $\tan \alpha = c$ ist.

Die Zeitgeschwindigkeitscurve, deren Gleichung hier offenbar $y = c$ ist, ist eine zur Abscissenachse im Abstände c parallele Gerade.

Aus zwei gleichförmigen componentalen Bewegungen, von denen die eine etwa parallel zur x -Achse, die zweite parallel zur y -Achse des in Fig. 40 verzeichneten beliebigen schiefwinkligen Achsensystems mit der Geschwindigkeit c_x , bzw. c_y vor sich geht, resultiert, da die Elimination von t aus den entsprechenden Bewegungsgleichungen $x = c_x t$ und $y = c_y t$ zu einer Gleichung des ersten Grades führt, wieder eine geradlinige Bewegung, und zwar ergibt sich, da sich weder die Richtung noch die Größe von c_x und c_y ändern, aus dem Parallelogramm $MBA C$ (Fig. 40) während der ganzen Bewegung stets dieselbe Diagonale, also stets dieselbe resultierende Geschwindigkeit; mit anderen Worten: die resultierende Bewegung ist eine geradlinige und gleichförmige.

Eine Bewegung, bei welcher sich die Geschwindigkeit stetig ändert, nennt man eine ungleichförmige Bewegung.



Da sich in diesem Falle bei der entsprechenden Zeitwegcurve die die Geschwindigkeit bestimmende trigonometrische Tangente des Richtungswinkels α der Berührungsgereaden (Fig. 42 und 43), daher

auch dieser Winkel α stetig ändern muss, so muss die Zeitwegcurve stetig gekrümmt sein.

Die ungleichförmige Bewegung kann wieder doppelter Art sein, und zwar:

a) eine beschleunigte (im engeren Sinne des Wortes), d. h. es nimmt der absolute Zahlwert der Geschwindigkeit stetig zu, demnach in der entsprechenden Zeitwegcurve auch der Zahlwert von $tg \alpha$ (siehe Fig. 42), was bei einer in der positiven Richtung Oy stattfindenden Bewegung, bei der auch der Weg s stets positiv bleibt, nur möglich ist, wenn die Zeitwegcurve der Abscissenachse ihre concave Seite zuwendet, oder

b) eine verzögerte, d. i. eine solche, bei welcher der absolute Zahlwert der Geschwindigkeit stetig abnimmt, in welchem Falle die Zeitwegcurve (siehe Fig. 43), wenn der Weg s und die Bewegungsrichtung positiv verbleiben, der Abscissenachse ihre concave Seite zuwendet.

Da bei einer ungleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit v variabel ist, und zwar sich mit der von einem beliebigen Zeitmomente an gerechneten Zeit t in bestimmter Weise ändert, also eine eindeutige Function der Zeit t ist (z. B. in dem auf S. 9 behandelten Beispiele $v = 9.8 t$), so lassen sich auf die Geschwindigkeit dieselben Untersuchungen in Anwendung bringen wie im § 3 und 28 auf den Weg, so dass, während früher die Verhältnisse $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ und $\frac{ds}{dt}$ betrachtet wurden, jetzt in analoger Weise die Verhältnisse $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ und $\frac{dv}{dt}$ in Betrachtung gezogen werden können. Mit anderen Worten: Während früher der Geschwindigkeitsbegriff — d. i. der Differenzen- und Differentialquotient nach der Zeit t genommen — bloß auf den Weg angewendet wurde, so kann derselbe, wie er ja auf alle im Laufe der Zeit sich ändernden messbaren Processe und Erscheinungen der Natur in Anwendung gebracht werden kann (es kann z. B. die Geschwindigkeit, mit der sich der Barometerstand, der Thermometerstand u. s. w. ändert, in Betracht gezogen werden), auch auf die Bewegungsgeschwindigkeit v selbst angewendet werden.

Man bezeichnet bei einer geradlinigen Bewegung den so erhaltenen Differentialquotienten der Geschwindigkeit v der Bewegung — genommen nach der Zeit t — d. i. $p = \frac{dv}{dt}$, als die Beschleunigung (Acceleration) des Beweglichen zur Zeit t .

Die Beschleunigung p zu irgend einer Zeit t ist somit bei einer geradlinigen Bewegung das Verhältnis, in welchem die unendlich kleine Änderung dv der Geschwindigkeit v , um welche sich nämlich

diese Geschwindigkeit in dem der Zeit t unmittelbar folgenden oder ihr unmittelbar vorhergehenden Zeitelemente dt geändert hat, zu diesem Zeitelement dt steht.

Da $v = \frac{ds}{dt}$ ist, so ist $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$, also auch $p = \frac{d^2s}{dt^2}$, d. h. man kann die Beschleunigung einer geradlinigen Bewegung auch definieren als den zweiten Differentialquotienten (die zweite Ableitung oder Derivation) des Weges s genommen nach der Zeit.

Das Verhältnis der endlichen Geschwindigkeitsänderung Δv zu dem endlichen Zeitintervall Δt , in welchem diese stattgefunden hat, bezeichnet man als die mittlere oder durchschnittliche Beschleunigung für dieses Zeitintervall. Diese ist offenbar nicht nur von der Art der Bewegung und dem Zeitintervalle Δt , sondern auch im allgemeinen von der Zeit t abhängig, in der das Zeitintervall Δt beginnt, beziehungsweise endet. So ergibt sich z. B. für eine Bewegung, deren Bewegungsgleichung $s = 3t + t^2 - t^3$ ist, als Geschwindigkeit v durch die Differentiation der letzten Gleichung

$$v = \frac{ds}{dt} = 3 + 2t - 3t^2$$

und durch abermalige Differentiation als Beschleunigung p zur Zeit t

$$p = \frac{dv}{dt} = 2 - 6t,$$

während die durchschnittliche Beschleunigung in dem der Zeit t folgenden Zeitintervalle Δt sich, da $v = 3 + 2t - 3t^2$ und $v + \Delta v = 3 + 2(t + \Delta t) - 3(t + \Delta t)^2$, sonach $\Delta v = 2 \cdot \Delta t - 6t \cdot \Delta t - 3(\Delta t)^2$ ist, als folgender Wert ergibt: $\frac{\Delta v}{\Delta t} = 2 - 6t - 3\Delta t$, welcher Wert sowohl von t , als auch von Δt abhängt.

Ist im allgemeinen durch die Gleichung $s = f(t)$ das Bewegungsgesetz der geradlinigen Bewegung bestimmt, so führt die wiederholte Differentiation dieser Gleichung zu den neuen Gleichungen $v = f'(t)$, $p = f''(t)$.

Der Gleichung $p = \frac{dv}{dt}$ entsprechend ist die Beschleunigung dann positiv in Rechnung zu bringen, wenn der algebraische Wert von v während der Bewegung zunimmt. Je nachdem sonach bei einer geradlinigen Bewegung v positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem die Bewegung in der positiven oder negativen Richtung stattfindet, muss, falls p positiv sein sollte, im ersten Falle der absolute Zahlwert der Geschwindigkeit zunehmen, im zweiten Falle dagegen abnehmen, daher die Bewegung im ersten Falle eine beschleunigte, im zweiten Falle eine verzögerte sein. Das Entgegengesetzte findet statt, falls die Beschleunigung p bei einer geradlinigen Bewegung negativ

ist. Das Zeichen der Beschleunigung ergibt sich sonach aus folgender Tabelle:

Bewegungsrichtung	Art der Bewegung	Beschleunigung
positiv	beschleunigt	positiv
negativ	beschleunigt	negativ
positiv	verzögert	negativ
negativ	verzögert	positiv

Bei einer gleichförmigen Bewegung behält v einen constanten Wert, daher ist die Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ stets gleich Null. Außer diesem Falle kann die Beschleunigung einer geradlinigen Bewegung den Wert Null nur erlangen in dem Momente des Überganges aus dem positiven ins negative Gebiet oder umgekehrt, also z. B. in dem Momente, in welchem die Bewegung, ohne dass sich ihre Richtung ändert, aus einer beschleunigten in eine verzögerte übergeht oder im umgekehrten Falle.

Bei einer verzögerten Bewegung bezeichnet man den absoluten Zahlwert der Beschleunigung häufig als Verzögerung oder als Retardation.

In genau derselben Weise, in welcher aus dem Umstande, dass $\frac{ds}{dt}$ die Endgeschwindigkeit und $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ die mittlere Geschwindigkeit ausdrückt, die bekannten graphischen Darstellungen der Endgeschwindigkeit und der durchschnittlichen Geschwindigkeit mittels der Neigungswinkel α und φ der Tangenten und Secanten der Zeitwegcurve (Fig. 2) abgeleitet wurden, lässt sich aus dem Umstande, dass $\frac{dv}{dt}$ die Beschleunigung zur Zeit t und $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ die mittlere Beschleunigung innerhalb des Zeitintervalls Δt bedeutet (wofern man hier die Zeitgeschwindigkeitscurve zugrunde legt), deducieren, dass bei einer geradlinigen Bewegung die Beschleunigung zur Zeit t bestimmt ist durch die trigonometrische Tangente jenes Winkels α (Fig. 44), den die in jenem Punkte m der Zeitgeschwindigkeitscurve, dessen Abscisse $x = t$ ist, an die Curve geführte Berührungsgerade mit der positiven Abscissenachse einschließt und die durchschnittliche Beschleunigung für das durch $n_0 n = t - t_0$ dargestellte Zeitintervall durch die Tangente des Neigungswinkels φ jener Secante $m_0 m$, die den Punkten n_0 und n entspricht.

Bezeichnet man durch $F(x) = F(t)$ oder kurz durch F diejenige variable Fläche $O\mu mn$, die durch die zwei Coordinatenachsen, die Zeitgeschwindigkeitscurve und die laufende Ordinate $y = nm = v$

begrenzt wird, so ist bekanntlich $dF = dF(x) = y \cdot dx$ und die Fläche $m_o n_o NM$, welche begrenzt wird durch die den beliebigen Zeiten $t_o = x_o$ und $T = X$ entsprechenden Ordinaten, ferner durch die Curve und die Abscissenachse, ist demnach bestimmt durch

$$(m_o n_o NM) = F(X) - F(x_o) = \int_{x_o}^X y dx.$$

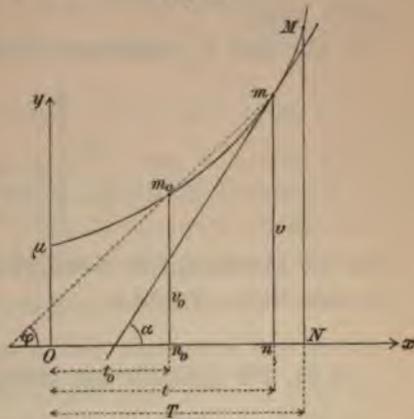
Da nun $y = v$ und $x = t$, ferner $ds = v dt$ ist, so ist $\int_{x_o}^X y dx = \int_{t_o}^T v dt = \int_{s_o}^S ds = S - s_o$, wenn man durch s_o den Weg in der

Zeit t_o und durch S den Weg in der Zeit T , demnach durch $S - s_o$ die in dem Zeitintervalle $T - t_o$, das durch $n_o N$ (Fig. 44) dargestellt ist, zurückgelegte Bahnstrecke bezeichnet. Es ist demnach diese letzte Strecke $S - s_o$ (wie dies schon Galilei für die Fallbewegung gezeigt hat) gegeben durch die Maßzahl der der Zwischenzeit $T - t_o$ entsprechenden Fläche $m_o n_o MN$, welche Fläche durch die Zeitgeschwindigkeitscurve mitbestimmt ist.

Es gestattet demnach die Zeitgeschwindigkeitscurve, deren sich schon, wie gesagt, Galilei zur graphischen Darstellung der Bewegungsverhältnisse bedient hat, eine einfache geometrische Darstellung sowohl der Beschleunigung, als der Geschwindigkeit und auch des Weges bei einer beliebigen geradlinigen Bewegung. Dass die auf der negativen Seite der x -Achse gelegenen Flächen bei der Bestimmung des Weges wegen der negativen Geschwindigkeiten (Ordinaten) $v = y$ auch negativ in Rechnung zu bringen sind, dies lehrt die Gleichung $dF = y \cdot dw$. Bei einer gleichförmigen Bewegung ist die Fläche $O \mu n m$ ein Rechteck, dessen Flächeninhalt $c \cdot t$ ist, wenn c die constante Geschwindigkeit der Bewegung bedeutet.

Da die Beschleunigung p ihrer Definition zufolge die Dimension $[p] = \frac{[v]}{t}$ besitzt, und da die Dimension der Geschwindigkeit nach S. 97 $[v] = lt^{-1}$ ist, so ist die Dimension der Beschleunigung $[p] = lt^{-2} = \frac{l}{t^2}$, d. h. die Beschleunigung ist bezüglich der Längen von der ersten, bezüglich der Zeit aber von der (-2) ten Dimension. Be-

Fig. 44.



zieht sich daher die Beschleunigung auf die Grundeinheiten Meter und Secunde, so ist die Einheit der Beschleunigung symbolisch durch $\frac{\text{Meter}}{\text{Secunde} \times \text{Secunde}}$, d. h. Meter pro Secunde auszudrücken. So ist z. B. die Beschleunigung des freien Falles, wie sich schon durch zweimalige Differentiation der Gleichung $s = 4.9 t^2$ ergibt, 9.8 Meter pro Secunde oder $9.8 \frac{\text{Meter}}{\text{Secunde} \times \text{Secunde}}$. Will man die Beschleunigung etwa in Kilometern pro Minute ausdrücken, so hat man nur in dem letzteren Ausdrucke Meter = 0.001 Kilometer und Secunde = $\frac{1}{60}$ Minute zu setzen. Man findet so $\frac{9.8 \cdot 60^2}{1000} \cdot \frac{\text{Kilometer}}{\text{Minute} \times \text{Minute}}$.

Durch Division der Gleichungen $v = \frac{ds}{dt}$ und $p = \frac{dv}{dt}$ ergibt sich die Gleichung $v dv = p ds$, welche man, wenn man dieselbe beiderseits mit 2 multipliciert, auch in der Form $d(v^2) = 2p ds$ darstellen kann.

Die drei so erhaltenen wichtigen Gleichungen

$$(a) \begin{cases} v = \frac{ds}{dt} \\ p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \\ v \cdot dv = p \cdot ds \end{cases}$$

sind die kinematischen Grundgleichungen der geradlinigen Bewegung des materiellen Punktes.

§ 31. Die gleichförmig geänderte Bewegung im besonderen.

Eine geradlinige Bewegung, bei welcher die Beschleunigung einen constanten, von Null verschiedenen Wert p stets beibehält, bezeichnet man als eine gleichförmig geänderte (oder veränderte) Bewegung oder auch als eine gleichförmig (gleichmäßig) beschleunigte (im weiteren Sinne des Wortes) im Gegensatze zu der ungleichförmig beschleunigten, bei welcher der Wert der Beschleunigung p sich ändert oder — was der Gleichung $p = \frac{dv}{dt}$ zufolge dasselbe besagt — die Geschwindigkeit v nicht eine lineare Function der Zeit t ist.

Je nachdem die gleichförmig geänderte Bewegung eine beschleunigte oder verzögerte ist, bezeichnet man dieselbe als eine gleichförmig (gleichmäßig) beschleunigte (im engeren Sinne des Wortes) oder gleichförmig (gleichmäßig) verzögerte.

Da bei der gleichförmig geänderten Bewegung p einen constanten Wert hat, so ergibt die Integration der zweiten kinematischen Grund-

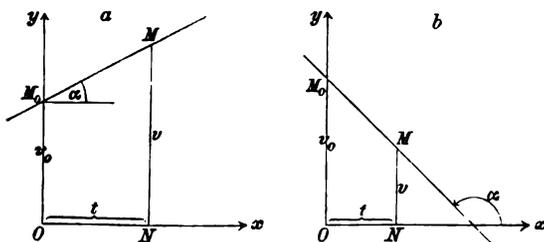
gleichung des letzten Paragraphs $dv = p dt$ die Beziehung $v = pt + C$. Um den Wert der Integrationsconstante C zu bestimmen, hat man bloß diese allgemeingiltige Gleichung auf den Zeitmoment, in welchem $t = 0$ und $s = 0$ angenommen wurde und v den als bekannt vorauszusetzenden Wert v_0 der Anfangsgeschwindigkeit hat, in Anwendung zu bringen, wodurch man findet, dass $v_0 = C$ ist. Setzt man daher v_0 für C in diese allgemeine Gleichung ein, so findet man

$$v = v_0 + p t \quad (1)$$

Bei der gleichförmig geänderten Bewegung ist sonach die in der beliebigen Zeit t stattfindende Geschwindigkeitsänderung $v - v_0$ stets der Zeit t direct proportioniert oder, was dasselbe besagt, es finden in gleichen Zeitintervallen stets dieselben Geschwindigkeitsänderungen statt. Wendet man diesen letzten Umstand als Definition der gleichförmig geänderten Bewegung an, wie es häufig geschieht, so ergibt die umgekehrte Schlussfolgerung, dass dann $v - v_0$ der Zeit direct proportioniert, daher $\frac{dv}{dt}$, d. i. die Beschleunigung constant sei.

Die Gleichung (1) lehrt, dass $p = \frac{v - v_0}{t}$ ist oder, da für $t = 1$ die Geschwindigkeit $v = v_1$ ist, dass $p = v_1 - v_0$ sei, d. h. man kann die Beschleunigung bei einer gleichförmig geänderten Bewegung — aber strenggenommen nur bei dieser — als die Geschwindigkeitsänderung $v_1 - v_0$ in der Zeiteinheit oder auch als das Verhältnis $\frac{v - v_0}{t}$ der Geschwindigkeitsänderung zur Zeit definieren, so dass hier die mittlere Beschleunigung $\frac{v - v_0}{t}$ stets mit der constanten Beschleunigung identisch ist. Ist die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$, d. h. erfolgt die gleichförmig beschleunigte Bewegung vom Ruhezustande aus, so ist $p = v_1$, also die Beschleunigung in diesem Falle gleich der Geschwindigkeit nach Verlauf der ersten Zeiteinheit.

Fig. 45.



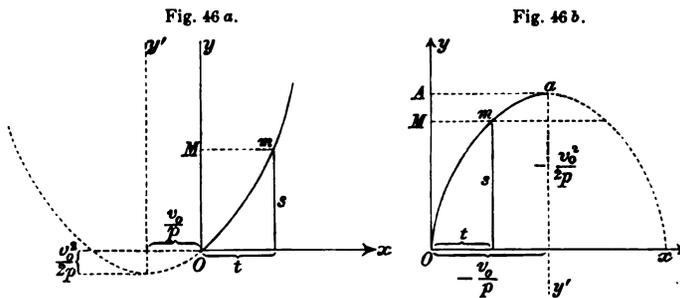
Der Gleichung (1) entsprechend hat die Zeitgeschwindigkeitscurve die Gleichung $y = v_0 + p x$ und ist sonach eine Gerade von der Form Fig. 45 a, wenn die in positiver Richtung stattfindende

Bewegung eine gleichförmig beschleunigte, und von der Form Fig. 45 b, wenn dieselbe eine gleichförmig verzögerte ist. In beiden Fällen ist die Tangente des Richtungswinkels $\tan \alpha = p$.

Setzt man in die Gleichung (1) $\frac{ds}{dt}$ statt v ein, so findet man $ds = v_0 \cdot dt + p t \cdot dt$. Durch Integration dieser Gleichung ergibt sich $s = v_0 t + \frac{p}{2} t^2 + C$, und da die Anwendung dieser Gleichung auf den Zeitanfangspunkt zu der Gleichung $0 = C$ führt, wofern der Zeitanfangspunkt dem Weganfangspunkte entspricht, so ist

$$s = v_0 t + \frac{p}{2} t^2 \quad (2)$$

Die Zeitwegcurve hat sonach die Gleichung $y = v_0 x + \frac{p}{2} x^2$ und ist dementsprechend ein Parabelbogen Om , und hat, wenn man die Bewegungsrichtung zur positiven Richtung wählt, die Form (Fig. 46 a) für eine gleichförmig beschleunigte und die Form (Fig. 46 b)



für ein negatives p , d. i. für eine gleichförmig verzögerte Bewegung. Die Achse y' der Parabel ist in beiden Fällen parallel zur y -Achse und der Parameter durch den absoluten Zahlwert von $\frac{2}{p}$ bestimmt. (Die Abscisse des Parabelscheitels a ist in beiden Fällen $= -\frac{v_0}{p}$ und die Ordinate $= -\frac{v_0^2}{2p}$.)

Durch Elimination der variablen Zeit t aus den Gleichungen (1) und (2) gelangt man zu der Gleichung

$$v^2 - v_0^2 = 2ps \quad (3)$$

zu der man überdies auch sofort durch Integration der dritten kinematischen Grundgleichung $v dv = p ds$ gelangen kann.

Die drei bisher abgeleiteten Gleichungen (1), (2) und (3), von denen die erste die allgemeine Beziehung zwischen der variablen Geschwindigkeit und Zeit, die zweite zwischen Weg und Zeit und die dritte zwischen Geschwindigkeit und Weg für eine jede gleich-

förmig geänderte Bewegung ausdrückt, sind für diese Bewegungsform von besonderer Wichtigkeit. Andere, minder wichtige Beziehungen ergeben sich auf folgende Art: Dividiert man die Gleichung (3) durch die in die Form $v - v_0 = pt$ gebrachte Gleichung (1), so findet man:

$$s = \frac{v + v_0}{2} t \quad (4)$$

welche Gleichung lehrt, dass das Verhältnis $\frac{s}{t}$, d. i. die durchschnittliche (mittlere) Geschwindigkeit für das beliebige Zeitintervall t , bei einer gleichförmig geänderten Bewegung stets dem arithmetischen Mittel $\frac{v + v_0}{2}$ aus der Anfangs- und Endgeschwindigkeit gleichkommt.

Die Elimination von v_0 aus (1) und (2) führt ferner zu der Gleichung $s = vt - \frac{p}{2} t^2$.

Um den Weg w_n in der n -ten Zeiteinheit (von der Zeit Null an gezählt), wo n eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, zu bestimmen, hat man offenbar von dem nach der Formel (2) zu berechnenden Wege $s_n = v_0 n + \frac{p}{2} n^2$, der während der n ersten Zeiteinheiten zurückgelegt wird, den nach der analogen Formel zu bestimmenden Weg s_{n-1} in den $(n-1)$ ersten Zeiteinheiten abzuziehen. Dadurch findet man:

$$w_n = v_0 + (2n-1) \frac{p}{2} \quad (5)$$

Setzt man in diese Formel für n nach und nach 1, 2, 3 . . . ein, so findet man für den in der ersten, zweiten, dritten u. s. w. Zeiteinheit zurückgelegten Weg (von der Zeit Null an gerechnet) die Werte $v_0 + \frac{p}{2}$, $v_0 + 3\frac{p}{2}$, $v_0 + 5\frac{p}{2}$ u. s. w. Es ändert sich daher der in einer Zeiteinheit zurückgelegte Weg von irgend einer zu der nächstfolgenden Zeiteinheit immer um die Beschleunigung p .

Zu den Gleichungen (2)–(5) könnte man übrigens aus der Grundgleichung (1) auch auf manchem anderen Wege gelangen. So z. B. könnte man aus der der Gleichung (1) entsprechenden Zeitgeschwindigkeitscurve Fig. 45 *a* und *b*, in welcher, wie früher nachgewiesen wurde, die Fläche OM_0MN (die hier ein Trapez ist) dieselbe Maßzahl F hat wie der Weg s , erschließen, dass $s = F = \frac{v + v_0}{2} t$ ist, und würde dadurch zur Gleichung (4) gelangen, und wenn man hierauf in dieser für v den Wert aus (1) substituieren würde, erhielte man die Gleichung (2) u. s. w. (Dies ist in der That im wesentlichen die Ableitung nach Galilei.)

Für $v_0 = 0$, d. h. wenn das Bewegliche sich vom Ruhezustande aus zur Zeit $t = 0$ in Bewegung setzt und die Bewegung eine gleich-

mäßig beschleunigte ist, nehmen die Gleichungen (1)—(5) die bekannte einfache Form an: $v = pt$, $s = \frac{p}{2} t^2$, so dass $s_1 = \frac{p}{2}$ ist, ferner $v^2 = 2ps$, $w_n = (2n - 1) \frac{p}{2}$ d. h. es bestehen dann die bekannten Gesetze, dass die Geschwindigkeit v der Zeit t , der Weg s dem Quadrate der Zeit und ebenso dem Quadrate der Geschwindigkeit v direct proportional ist, dass ferner der Weg s_1 in der ersten Zeiteinheit der halben Beschleunigung gleich ist und dass sich die in den aufeinander folgenden Zeiteinheiten zurückgelegten Wege w_n verhalten wie die Zahlen $(2n - 1)$, wenn man für n der Reihe nach 1, 2, 3 u. s. w. setzt, also wie die aufeinander folgenden ungeraden Zahlen 1, 3, 5 u. s. w. Es ist dann, was leicht durch Worte auszudrücken ist, $w_1 = \frac{p}{2}$, $v_1 = 2 \cdot \frac{p}{2}$, $w_2 = 3 \cdot \frac{p}{2}$, $v_2 = 4 \cdot \frac{p}{2}$, $w_3 = 5 \cdot \frac{p}{2}$, $v_3 = 6 \cdot \frac{p}{2} \dots$ und $s_2 = w_1 + w_2 = 2^2 \cdot \frac{p}{2}$, $s_3 = w_1 + w_2 + w_3 = 3^2 \cdot \frac{p}{2}$ u. s. w.

Nimmt man die Bewegungsrichtung des materiellen Punktes zur positiven Richtung an, so ist bekanntlich in den Formeln 1—5 bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung v , v_0 und p positiv, dagegen ist bei einer gleichförmig verzögerten Bewegung p negativ in Rechnung zu bringen. Bezeichnet man in dem letzteren Falle den absoluten Zahlwert der Beschleunigung, also die Retardation durch r , so ist $p = -r$ zu setzen, wodurch die früheren Gleichungen die Form $v = v_0 - rt$, $s = v_0 t - \frac{r}{2} t^2$, $v_0^2 - v^2 = 2rs$, $w_n = v_0 - (2n - 1) \frac{r}{2}$ u. s. w. annehmen.

Aus zwei geradlinigen gleichförmig geänderten Bewegungen kann unter Umständen abermals eine geradlinige Bewegung resultieren. Wählt man, um die Bedingung hiefür zu ermitteln, die Bewegungsrichtungen beider Bewegungen zu den positiven Achsenrichtungen eines im allgemeinen schiefwinkligen Coordinatensystems und nimmt den Anfangspunkt des Coordinatensystems in der resultierenden Bahn derart an, dass das Bewegliche zur Zeit $t = 0$ in diesem Punkte sich befindet, so ist nach Formel (2), wenn man die positiven Anfangsgeschwindigkeiten der componentalen Bewegungen durch c_x und c_y und ihre Beschleunigungen durch p_x und p_y bezeichnet, $x = c_x \cdot t + \frac{p_x}{2} t^2$ und $y = c_y t + \frac{p_y}{2} t^2$.

Durch Elimination des t (vergl. S. 89) ergibt sich aus den beiden Gleichungen eine Gleichung vom ersten Grade dann, wenn $\frac{c_x}{p_x} = \frac{c_y}{p_y}$ ist, worin offenbar auch der Fall, in welchem $c_x = 0$ und $c_y = 0$ ist,

subsumiert ist. Bezeichnet man nämlich durch k den Wert der beiden letzten Quotienten, so ist $x = p_x \left[kt + \frac{t^2}{2} \right]$ und $y = p_y \left[kt + \frac{t^2}{2} \right]$, daher in der That $y = \frac{p_y}{p_x} x$. Eine geradlinige Bewegung resultiert demnach, wenn entweder beide Bewegungen gleichförmig beschleunigt oder beide gleichförmig verzögert sind und außerdem die Anfangsgeschwindigkeiten beider Bewegungen Null oder aber den entsprechenden Beschleunigungen direct proportioniert sind.

Die in diesen Fällen resultierende geradlinige Bewegung ist ferner eine gleichförmig geänderte. Bezeichnet man nämlich den constanten Winkel, den die resultierende Bewegungsrichtung mit der x -Achse einschließt, durch (xs) und durch s die Größe der in der Zeit t zurückgelegten resultierenden Bahnstrecke, so ergibt sich aus dem Dreiecke $o O M$ (Fig. 40) (wo die Bahn $o M$ geradlinig zu denken ist), $s = y \cdot \frac{\sin(xy)}{\sin(xs)}$. Substituiert man für y den früheren

Wert $c_y t + \frac{p_y}{2} t^2$, so findet man $s = c_y \frac{\sin(xy)}{\sin(xs)} t + \frac{1}{2} p_y \frac{\sin(xy)}{\sin(xs)} t^2$,

woraus sich sofort ergibt, dass $\frac{d^2 s}{dt^2} = p_y \cdot \frac{\sin(xy)}{\sin(xs)}$ ist, dass sonach

in der That die Beschleunigung $\frac{d^2 s}{dt^2}$ der resultierenden geradlinigen Bewegung einen constanten Wert besitzt, und zwar ist die Anfangsgeschwindigkeit durch $c_y \frac{\sin(xy)}{\sin(xs)}$ bestimmt.

Anmerkung. Auf Grund dieser Thatsache ergibt sich sofort, wie leicht einzusehen ist, ein zweiter ganz einfacher (im wesentlichen schon von Newton in dieser Art geführter) Beweis des Satzes vom Kräftedreieck, beziehungsweise Kräfteparallelogramm für continuierliche Kräfte, wofern man nur $c_x = c_y = 0$ setzt, und den in einem späteren Paragraph erst zu erweisenden Satz der Proportionalität der continuierlich wirkenden Kräfte und der Beschleunigungen bei den Bewegungen desselben materiellen Punktes in Anwendung bringt.

§ 32. Beschleunigung einer krummlinigen Bewegung. Hodograph. Componenten der Beschleunigung.

Die Erklärungen des § 30 lehren, dass bei einer jeden geradlinigen Bewegung unter der zur beliebigen Zeit t stattfindenden Beschleunigung jener Grenzwert zu verstehen ist, welchem sich das Verhältnis $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ der in einem ungemein kleinen Zeitelemente $\tau = \Delta t$, welches der Zeit t unmittelbar benachbart ist, vor sich gehenden Änderung Δv der Geschwindigkeit v zu dem Zeitelemente τ ins Unendliche nähert, wenn dieses Zeitelement τ gegen Null convergiert.

Unter der Änderung der Geschwindigkeit wurde in § 30 die algebraische Änderung verstanden, nämlich die algebraische Differenz $v' - v = \Delta v$ zwischen der Geschwindigkeit v' zu Ende dieses Zeitelementes Δt , d. i. zur Zeit $t' = t + \Delta t$ und der Geschwindigkeit v zu Beginn desselben, d. i. zur Zeit t .

Dieselbe Definition für die Beschleunigung hat auch ihre Giltigkeit für eine jede krummlinige Bewegung, wofern man nur, da bei dieser die Richtung der Geschwindigkeit sich stetig ändert, statt der algebraischen Änderung die geometrische Änderung, d. i. die geometrische Differenz $v' \hat{=} v$ der als Vectorgrößen auftretenden Geschwindigkeiten v' und v in Betracht zieht. Als Richtung dieser Beschleunigung ist dann diejenige Grenzrichtung zu bezeichnen, welcher sich die Richtung jenes Vectors, durch welchen diese geometrische Differenz $v' \hat{=} v$ dargestellt ist, ins Unendliche nähert, wenn das Zeitelement Δt der Grenze Null zustrebt.

Demgemäß besteht für die Beschleunigung p einer krummlinigen Bewegung die Gleichung

$$p \equiv \lim_{\Delta t = 0} \frac{v' \hat{=} v}{\Delta t} \quad (1)$$

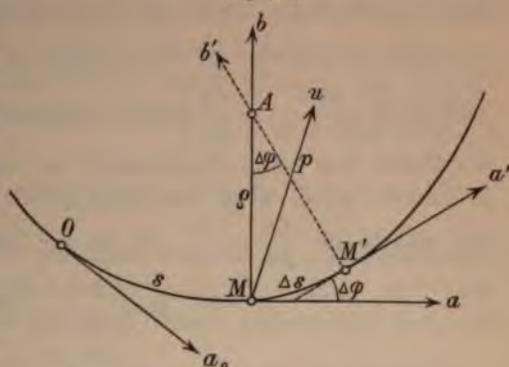
Am klarsten wird dieser Begriff der Beschleunigung einer krummlinigen Bewegung durch Zuhilfenahme einer Hilfscurve, welche W. B. Hamilton (geb. 1805, gest. 1865) in die Mechanik eingeführt hat, und die den Namen „Hodograph der Geschwindigkeit“ oder kurzweg „Hodograph“ (Geschwindigkeitscurve) führt.

Zieht man nämlich von einem beliebigen fixen Punkte C — dem sogenannten Pole des Hodographen — Leitstrahlen, welche die Geschwindigkeiten des betrachteten, in einer krummen Bahn sich bewegenden materiellen Punktes in den stetig aufeinander folgenden Zeitpunkten der Richtung und Größe nach darstellen, so liegen die Endpunkte aller dieser Leitstrahlen in einer bei gegebener Bahn und gegebener Bewegungsart des materiellen Punktes vollständig bestimmten Curve, und diese ist der Hamilton'sche Hodograph.

Ist die Bahn des materiellen Punktes und der zugehörige Hodograph gegeben, so ist es leicht möglich, mit Hilfe dieser beiden Curven die Bewegung des Punktes von Moment zu Moment zu verfolgen, nämlich die aufeinander folgenden Lagen des materiellen Punktes von einer gewissen Anfangslage aus immer nach Verlauf je eines ungewein kleinen Zeittheilchens $\tau = \Delta t$, z. B. 0.001 Secunde, und zwar mit beliebiger Annäherung, wofern τ entsprechend klein gewählt wird, zu bestimmen.

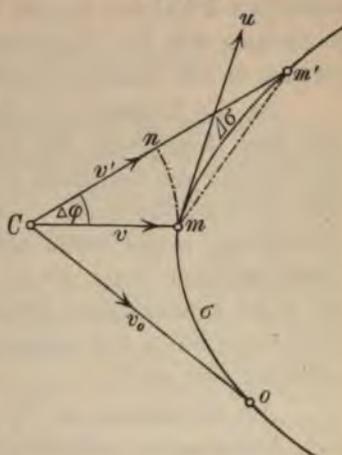
Ist nämlich OMM' (Fig. 47 a) die Bahn des betrachteten materiellen Punktes, ferner omm' (Fig. 47 b) der zugehörige Hodograph, dessen Pol C ist, so hat man nur, um z. B. die Geschwindigkeit im Punkte M der Bahn zu bestimmen, eine Tangente an die letztere in diesem Punkte M zu führen und zu dieser Tangente Ma einen parallelen Leitstrahl Cm vom Pole C aus zu führen bis zum Durchschnittspunkte m mit dem Hodographen. Cm stellt dann der Richtung und Größe nach die Geschwindigkeit v im Punkte M dar, so dass, wenn die Geschwindigkeit pro Zeiteinheit durch die Längeneinheit dargestellt ist,

Fig. 47 a.



$\overline{Cm} = v$ ist. Da nun $v = \frac{ds}{dt}$ ist, so ist die im nächsten Zeitelemente Δt zurückgelegte Bahnstrecke Δs , wenn Δt entsprechend klein gewählt wird, näherungsweise $\Delta s = v \cdot \Delta t = \overline{Cm} \cdot \Delta t$, also, wenn $\Delta t = 0.001$ ist, $\Delta s = 0.001 \cdot Cm$.

Fig. 47 b.



Trägt man diese Bahnstrecke Δs längs der Curve OMM' von M an bis M' auf, so erhält man die Lage des materiellen Punktes zur Zeit $t' = t + \Delta t$. Nun hat man in M' abermals die Bahntangente $M'a'$ zu bestimmen, zu derselben den parallelen Leitstrahl Cm' zu führen, der die Geschwindigkeit $v' = v + \Delta v$ zur Zeit $t' = t + \Delta t$ ergibt, und mittels derselben die Bahnstrecke im folgenden Zeitelement Δt wie früher zu bestimmen, nämlich näherungsweise $\overline{Cm'} \cdot \Delta t = 0.001 \overline{Cm'}$ u. s. w. Man

kann so die Bewegung des Punktes mit einem beliebigen Grade der Genauigkeit ermitteln, wofern nur Δt entsprechend klein gewählt wird.

Zur Zeit $t = 0$ sei der materielle Punkt in O , die zugehörige Tangente sei Oa_0 , so dass die Anfangsgeschwindigkeit v_0 bestimmt ist durch den zu Oa_0 parallelen Leitstrahl Co des Hodographen. Den Zeiten $0, t, t' \dots$ entsprechen sonach die Lagen $O, M, M' \dots$ und die Punkte $o, m, m' \dots$ des Hodographen. Den Wegstrecken $arc OM = s$

und $\text{arc } MM' = \Delta s$ des materiellen Punktes entsprechen im Hodographen die Bogenlängen $\text{arc } om = \sigma$ und $\text{arc } mm' = \Delta \sigma$.

Um nun die durch die Gleichung (1) definierte Beschleunigung p des materiellen Punktes zu bestimmen, hat man nur zu beachten, dass im Dreiecke Cmm' die Seite $Cm' \equiv Cm \hat{+} mm'$, also $v' \equiv v \hat{+} mm'$, sonach $mm' \equiv v' \hat{-} v$ und $p \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v' \hat{-} v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{mm'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{mm'}{\text{arc } mm'} \cdot \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} \right]$ ist. Da der Grenzwert des Verhältnisses der Sehne mm' zum Bogen mm' bei einer jeden continuierlich gekrümmten Curve, wenn mm' gegen Null convergiert, stets den Wert 1 hat, und da $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} = \frac{d\sigma}{dt}$, so ist der Zahlwert von p bestimmt durch

$$p = \frac{d\sigma}{dt} \dots (2)$$

Da ferner die Grenzrichtung des die geometrische Differenz $v' \hat{-} v$ darstellenden Vectors, d. i. der Sehne mm' , mit anderen Worten die Grenzrichtung der durch die Nachbarpunkte m und m' geführten Secante des Hodographen, wenn sich m' immer mehr dem Punkte m nähert, jene der Tangente mu im Punkte m ist, so ist dadurch nachgewiesen, dass die Richtung Mu der Beschleunigung des materiellen Punktes in der Lage M stets identisch ist mit der Richtung mu der Tangente in dem dem Punkte M zugehörigen Punkte m des Hodographen.

Da die Richtung der Sehne mm' , also auch ihre Grenzrichtung mu nach jener Seite des Leitstrahles $Cm = v$ gewendet sein muss, auf welcher der Leitstrahl $Cm' = v'$ gelegen ist, und da diese Seite, wie schon die Zeichnung lehrt und sich übrigens aus einer einfachen Überlegung ergibt, stets mit der concaven Seite des Bogens MM' übereinstimmen muss, so ist ersichtlich, dass die Beschleunigung p bei jeder krummlinigen Bewegung stets nach der inneren, d. i. concaven Seite des entsprechenden Bogenelementes MM' der Bahn gerichtet sein muss.

Am einfachsten ist es, sich außer dem in der Bahn $OMM' \dots$ sich bewegenden materiellen Punkte einen zweiten Hilfspunkt zu denken, der sich gleichzeitig längs des Hodographen $omm' \dots$ bewegt, und zwar zu jeder Zeit die den jeweiligen Lagen $O, M, M' \dots$ des materiellen Punktes zugehörigen Lagen $o, m, m' \dots$ einnimmt. σ ist die Bahn dieses Hilfspunktes in der Zeit t und $\Delta \sigma$ jene im Zeitelemente Δt . Es stellt dann $\frac{d\sigma}{dt}$ bekanntlich die Geschwindigkeit v dieses Hilfspunktes zur Zeit t dar, deren Richtung mu ist. Es ist sonach der Gleichung (2) zufolge die gesuchte Beschleuni-

gung p von gleichem Zahlwert wie diese Geschwindigkeit v des Hilfspunktes und mit derselben gleichgerichtet.

Es stimmen demnach auch die zu den Achsen eines beliebigen recht- oder schiefwinkligen Achsensystems $xy z$ parallelen Componenten (die geometrischen Summanden) $p_x p_y p_z$ des Vectors p mit den gleichgerichteten Componenten $v_x v_y v_z$ der Geschwindigkeit v überein.

Sind demgemäß $\xi \eta \zeta$ die auf das Achsensystem $xy z$ sich beziehenden Coordinaten des laufenden Punktes m des Hodographen, so ist

$$p_x = v_x = \frac{d\xi}{dt}, \quad p_y = v_y = \frac{d\eta}{dt}, \quad p_z = v_z = \frac{d\zeta}{dt} \dots (3)$$

Die zu den Achsen $xy z$ parallelen Projectionen des Leitstrahles $Cm = v$ sind die Geschwindigkeitscomponenten $v_x v_y v_z$ und sind, wenn $\xi_o \eta_o \zeta_o$ die Coordinaten des Poles C sind, andererseits bestimmt durch $\xi - \xi_o, \eta - \eta_o, \zeta - \zeta_o$, so dass

$$\xi - \xi_o = v_x, \quad \eta - \eta_o = v_y, \quad \zeta - \zeta_o = v_z \dots (4)$$

Differenziert man die letzteren Gleichungen nach der Zeit, so ersieht man, dass $\frac{d\xi}{dt} = \frac{dv_x}{dt}, \frac{d\eta}{dt} = \frac{dv_y}{dt}, \frac{d\zeta}{dt} = \frac{dv_z}{dt}$ ist; es ist so nach den Gleichungen (3) zufolge auch

$$p_x = v_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad p_y = v_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad p_z = v_z = \frac{dv_z}{dt} \dots (5)$$

Zerlegt man die Bewegung des Punktes M in die bekannten drei zu den Achsen $xy z$ parallelen componentalen Bewegungen, so stellen $v_x v_y v_z$ bekanntlich auch die Geschwindigkeiten dieser drei geradlinigen Bewegungen dar, und es sind daher $\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}$ die Beschleunigungen dieser drei componentalen Bewegungen. Die Gleichungen (5) lehren demnach, dass die zu den beliebigen Achsen $xy z$ parallelen Componenten der Beschleunigung einer jeden krummlinigen Bewegung zugleich auch die Beschleunigungen der zu diesen Achsen parallelen componentalen, geradlinigen Bewegungen sind, oder mit anderen Worten: die Projectionen der Beschleunigung p sind auch die Beschleunigungen der Projectionen des beweglichen Punktes auf die Achsen $xy z$.

Da nun, wenn $x y z$ die Coordinaten des laufenden Punktes M der Bahn $OMM' \dots$ sind, $v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$ ist, so können die drei zu den beliebigen Achsen $xy z$ parallelen Componenten der Beschleunigung p den letzten Gleichungen zufolge in folgender wichtigen Form ausgedrückt werden:

$$p_x = \frac{d^2 x}{dt^2}, p_y = \frac{d^2 y}{dt^2}, p_z = \frac{d^2 z}{dt^2} \dots (6)$$

d. h. diese drei Componenten der Beschleunigung sind bestimmt durch die zweiten Ableitungen der Coordinaten $x y z$ des materiellen Punktes — genommen nach der Zeit.

Es ist sonach stets

$$p \equiv \frac{dv_x}{dt} \hat{+} \frac{dv_y}{dt} \hat{+} \frac{dv_z}{dt} \equiv \frac{d^2 x}{dt^2} \hat{+} \frac{d^2 y}{dt^2} \hat{+} \frac{d^2 z}{dt^2} \dots (7)$$

Bilden die Achsen $x y z$ ein rechtwinkliges Achsensystem, so ist offenbar auch

$$\left. \begin{aligned} p_x &= p \cos (xp), p_y = p \cos (yp), p_z = p \cos (zp) \\ p^2 &= p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \end{aligned} \right\} (8)$$

Findet die Bewegung in einer ebenen Bahn statt, in deren Ebene die Achsen x und y eines ebenen rechtwinkligen Achsensystems gelegen sind, so ist $z = 0$, also auch

$$\left. \begin{aligned} p_z &= \frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \text{ und} \\ p &= p_x \hat{+} p_y \equiv \frac{dv_x}{dt} \hat{+} \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \hat{+} \frac{d^2 y}{dt^2} \\ p_x &= \frac{dv_x}{dt} = p \cos (xp), p_y = \frac{dv_y}{dt} = p \sin (xp) \end{aligned} \right\} (9)$$

In diesem Falle ist auch der Hodograph eine ebene Curve. So ist z. B. für eine gleichförmige Bewegung in einer beliebigen ebenen Curve der Hodograph eine Kreislinie und der Kreismittelpunkt der Pol desselben, für eine geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung ist der Hodograph eine gerade Linie, längs welcher der Hilfspunkt gleichförmig fortschreitet, für eine gleichförmige geradlinige Bewegung wird aus dem Hodograph ein einziger Punkt u. s. w.

Würde man statt der bisherigen Parallelcoordinaten xy für die Untersuchung der Bewegung eines Punktes längs einer ebenen krummen Bahn Polarcoordinaten zugrunde legen, so brauchte man nur die Polachse mit der Abscissenachse des früheren rechtwinkligen Achsensystems und den Pol mit dem früheren Coordinatenanfangspunkte O zu identificieren und von den dann stattfindenden bekannten allgemeinen Transformationsgleichungen $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, in welchen r den Radiusvector und φ den Polarwinkel der Lage des Punktes M zur Zeit t bedeutet, Anwendung zu machen. Durch Differentiation dieser beiden Gleichungen nach der Zeit ergibt sich dann:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}, & v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \\ p_x &= \frac{d^2x}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \cos \varphi - \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right] \sin \varphi \\ p_y &= \frac{d^2y}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \sin \varphi + \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right] \cos \varphi \end{aligned} \right\} (10)$$

In diesen Gleichungen stellt $\frac{dr}{dt}$ die Geschwindigkeit dar, mit welcher sich die Länge des Radiusvectors r ändert, und $\frac{d\varphi}{dt}$ jene Geschwindigkeit, mit welcher sich der Polarwinkel φ ändert, d. i. die sogenannte Winkelgeschwindigkeit; $d\varphi$ ist anzusehen als der unendlich kleine Neigungswinkel der zwei unmittelbar aufeinander folgenden Radienvectors r und $r' = r + dr$.

Bezeichnet man die vom Pole O nach dem Punkte M gehende Richtung des Leitstrahles, deren Richtungswinkel gegen die x -Achse $\varphi = (xr)$ ist, als die „Richtung r “ und die bei der weiteren positiven Drehung von r aus um einen rechten Winkel [im Sinne jener Drehung, durch welche die positive x -Richtung auf kürzestem Wege in die positive Richtung der y -Achse übergeführt würde] erhaltene Richtung als die „Richtung n “, so dass $(xn) = \varphi + \frac{\pi}{2}$, und bezeichnet ferner die diesen Richtungen r und n entsprechenden Componenten der Geschwindigkeit v durch v_r und v_n und die entsprechenden Componenten der Beschleunigung p durch p_r und p_n , so ist analog den Gleichungen $v_x = v \cos (xv)$, $v_y = v \sin (xv)$ auch

$$\begin{aligned} v_r &= v \cos (rv) = v \cos [(xv) - (xr)] = v \cos [(xv) - \varphi] = v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi \\ v_n &= v \sin (rv) = v \sin [(xv) - (xr)] = v \sin [(xv) - \varphi] = v_y \cos \varphi - v_x \sin \varphi \end{aligned}$$

und, wenn statt v in den letzten vier Gleichungen überall p gesetzt wird,

$$p_r = p_x \cos \varphi + p_y \sin \varphi, \quad p_n = p_y \cos \varphi - p_x \sin \varphi.$$

Setzt man nun in die so erhaltenen Gleichungen die Werte aus den Gleichungen (10) ein, so findet man

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \frac{dr}{dt} & v_n &= r \cdot \frac{d\varphi}{dt} \\ p_r &= \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \\ p_n &= 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) \end{aligned} \right\} (11)$$

Durch v_r ist die radiale und durch v_n die zum Radius r normale Componente der Geschwindigkeit bestimmt.

Anmerkung. Am einfachsten ersieht man die Bedeutung der Werte von v_r und v_n , wenn man sich in der jeweiligen Lage des Radiusvectors r ein Röhrenchen denkt, innerhalb dessen sich der materielle Punkt verschiebt, während sich gleichzeitig das Rohr mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ um den Pol O dreht, so dass die Geschwindigkeit v des Punktes zusammengesetzt ist aus der relativen Geschwindigkeit $v_r = \frac{dr}{dt}$ der erwähnten Verschiebung und aus der hierzu senkrechten Geschwindigkeit v_n , mit der sich der soeben mit der jeweiligen Lage des materiellen Punktes coincidierende Punkt des Rohres infolge der Rotation um O in dem Kreisbogenelemente $r \cdot \Delta\varphi$ bewegt, und die bestimmt ist durch $v_n = \lim \frac{r \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt}$.

Was nun von der Bewegung des Punktes M in einer beliebigen ebenen Bahn giltig ist, muss auch Giltigkeit haben auf die Bewegung des Hilfspunktes m längs des Hodographen, wofern dieser eine ebene Curve ist. Nur stellen dann die vom Pole C (Fig. 47 b) aus gezogenen Leitstrahlen r die Geschwindigkeiten v dar, und die Geschwindigkeit des Hilfspunktes ist $v = p$, d. h. ist identisch mit der Beschleunigung des Punktes M . Die Richtung von r stimmt dann mit der Richtung von v , also mit der augenblicklichen Bewegungsrichtung überein, ist daher auch die Richtung Ma (Fig. 47 a) der Tangente, und die Richtung n stimmt mit der zur Tangente Ma senkrechten Richtung Mb überein.

Die tangentielle und die dazu senkrechte Komponente der Geschwindigkeit v sind sonach identisch mit der tangentialen und der zu dieser in der Ebene der Bahn normalen Komponente der Beschleunigung p , die durch p_t und p_c bezeichnet seien, und zwar ist den beiden ersten Gleichungen in (11) zufolge, da nunmehr $r = v$ und $v = \frac{ds}{dt}$ ist,

$$p_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad p_c = v \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad \dots (12)$$

$d\varphi$ bedeutet hier den Zahlwert des unendlich kleinen Winkels, den die Geschwindigkeitsrichtungen v und $v' = v + dv$, d. h. die zwei Tangenten Ma und $M'a'$ zweier unmittelbar benachbarten Punkte M und M' einschließen, kurz des sogenannten Contingenzwinkels, und $\frac{d\varphi}{dt}$ ist die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich die Richtung der Tangente der Bahn während der Bewegung des Punktes ändert.

Da die Richtung von p nach der concaven Seite des Bogens MM' gekehrt ist, so muss auch die bei der Zerlegung der Beschleunigung in ihre tangentielle und die zu dieser normalen Komponente sich ergebende letztere Komponente p_c offenbar auch nach der concaven Seite der Curve MM' gerichtet sein, also die Richtung nach dem sogenannten Krümmungsmittelpunkte A des Bahnelementes MM' besitzen, und aus diesem Grunde führt diese Komponente p_c den Namen „centripetale Beschleunigung“, während p_t als „tan-

gentiale Beschleunigung^u bezeichnet wird. Je nachdem die Geschwindigkeit, deren absoluter Zahlwert bei einer Bewegung in der positiven Richtung $v = \frac{ds}{dt}$ ist, zu- oder abnimmt, also die Bewegung eine beschleunigte oder verzögerte ist, ist die tangentielle Beschleunigung $p_t = \frac{dv}{dt}$ positiv oder negativ, d. h. der Bewegungsrichtung gleich- oder aber entgegengesetzt gerichtet. Bei einer gleichförmigen Bewegung in einer krummen Bahn ist $p_t = \frac{dv}{dt} = 0$, also die Beschleunigung p nach dem Krümmungsmittelpunkte gerichtet und mit p_c identisch, $p = p_c = v \cdot \frac{d\varphi}{dt}$.

Würde man die Bewegungsrichtung Ma , welche, da sie mit der Richtung des Curvelementes ds übereinstimmt, durch ds bezeichnet sei, zur positiven Richtung der x -Achse wählen und die centripetale Richtung Mb der Normalen zur Richtung der y -Achse, so wäre p_t die x -Componente und p_c die y -Componente der Beschleunigung p . Es ist sonach den Gleichungen (9) zufolge auch

$$p_t = p \cos(ds, p) \cdot p_c = p \sin(ds, p) \dots (13)$$

In einfacher, wenn auch nicht streng genauer Weise ließen sich die wichtigen Gleichungen (12) aus der Fig. 47b in folgender Weise ableiten: Schneidet man auf dem Leitstrahle $Cm' = v' = v + \Delta v$ von C aus jene Strecke Cn ab, die dem Leitstrahle $Cm = v$ gleich ist, so kann man den Kreisbogen mn , dessen Mittelpunkt C ist, und dessen Länge das Product aus dem Radius v und dem Centriwinkel $\Delta\varphi$ ist, wofern M' ungemein nahe an M , also auch m' ungemein nahe an m angenommen wird, nahezu als eine Gerade ansehen, die die Richtung der Tangente dieses Kreisbogens hat, also auf Cm senkrecht steht, sonach die centripetale Richtung Mb hat. In dem Dreiecke $mm'n$ ist dann mm' die geometrische Summe, beziehungsweise die Resultante aus der centripetalen Componente $mn = v \cdot \Delta\varphi$ und der Componente $nm' = Cm' - Cn = v' - v = \Delta v$, deren Richtung, wenn $\Delta\varphi$ ungemein klein ist, mit der Richtung von v , also mit der Richtung Ma der Tangente übereinstimmt, sonach ist auch

$$\frac{mm'}{\Delta t} \equiv \frac{v \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} + \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Beim Übergange zum Grenzwerte ergibt sich dann, dass in der That der Grenzwert von $\frac{mm'}{\Delta t}$, d. i. die Beschleunigung p die Resultante ist aus der centripetalen Componente $v \frac{d\varphi}{dt}$ und der tangentialen Componente $\frac{dv}{dt}$.

Errichtet man im Punkte M' zur Tangente $M'a'$ die Normale $M'b'$ (Fig. 47a), so schneiden sich die benachbarten Normalen Mb und $M'b'$ in einem Punkte A , welchen man, wenn der Bogen $MM' = \Delta s$ entsprechend klein gewählt wird, als den Krümmungsmittelpunkt des Curvenelementes MM' ansehen kann, d. h. der Bogen MM' kann als ein Bogen jenes Kreises, des sogenannten Krümmungskreises betrachtet werden, der sich der Curve OMM' in der Nachbarschaft des Punktes M am meisten anschmiegt, dessen Mittelpunkt A der Krümmungsmittelpunkt und dessen Radius AM der sogenannte Krümmungshalbmesser ϱ ist. Da nun die Schenkel des Contingenzwinkels $d\varphi$ auf den Schenkeln des Centriwinkels des Kreissectors MAM' senkrecht stehen, so ist dieser Centriwinkel dem Contingenzwinkel $d\varphi$ gleich, sonach ist, wofern MM' unendlich klein angenommen wird, in dem Kreissector MAM'

$$ds = \varrho \cdot d\varphi \quad (14)$$

Setzt man den aus dieser Gleichung sich ergebenden Wert $d\varphi = \frac{ds}{\varrho}$ in (12) ein, so erhält man

$$p_c = \frac{v}{\varrho} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\varrho} \cdot v = \frac{v^2}{\varrho} \dots (15)$$

d. h. die centripetale Beschleunigung erhält man auch durch Division des Quadrates der Geschwindigkeit v durch den Krümmungshalbmesser ϱ .

Bisher wurde angenommen, dass die Bahn OMM' des Punktes eine ebene Curve sei. Da jedoch jedes unendlich kleine Element MM' auch bei einer jeden räumlichen Curve doppelter Krümmung als ein ebenes Curvenelement betrachtet werden kann, dessen Ebene nämlich die durch die Tangente Ma des Punktes M und durch den außerhalb dieser Tangente Ma gelegenen unmittelbar benachbarten Punkt M' der Curve hindurchgelegte Ebene, d. i. die Ebene des Krümmungskreises, die sogenannte Schmiegungeebene oder Osculationsebene ist, so lassen sich die bisherigen Untersuchungen ohne weiteres auch auf die Bewegung in einer beliebigen nicht ebenen Curve in Anwendung bringen, wofern nur die Ebene der Fig. 47a und 47b diese Schmiegungeebene der Curve für den Punkt M vorstellt.

Capitel IV.

Dynamik des materiellen Punktes.

§ 33. Einleitung.

Wirken auf einen frei beweglichen materiellen Punkt solche Kräfte ein, die sich das Gleichgewicht halten, so kann, wie

dies das Grundgesetz der Trägheit lehrt, die Bewegung desselben, falls überhaupt eine Bewegung stattfindet, nur eine geradlinige und gleichförmige sein, bei welcher sich weder die Bewegungsrichtung, noch auch die Größe der Geschwindigkeit ändert, also der Bewegungszustand des materiellen Punktes ein unveränderlicher ist.

Halten sich jedoch die den freibeweglichen materiellen Punkt angreifenden Kräfte nicht das Gleichgewicht, sondern ergeben dieselben eine Resultante P , die continuierlich wirkt, so muss dem Kraftbegriffe zufolge sich auch der Bewegungszustand continuierlich ändern. Um auch zu erkennen, in welcher Weise sich der Bewegungszustand ändert, hat man zunächst zwei Fälle zu unterscheiden:

a) ob die Richtung der Kraft P stetig gegen die Bewegungsrichtung des Punktes unter einem — sei es spitzen, rechten oder stumpfen — Winkel geneigt ist, oder aber

b) ob die Kraftrichtung mit der Bewegungsrichtung in dieselbe Gerade fällt, also mit der Bewegungsrichtung übereinstimmt oder ihr entgegengesetzt ist.

Im ersten Falle muss zufolge der Entwicklungen des § 5, die sich auf das Princip der unveränderlichen relativen Wirkung stützen, die Bewegungsrichtung (Geschwindigkeitsrichtung) sich stetig ändern, mit anderen Worten die Bewegung des materiellen Punktes muss längs einer krummlinigen Bahn vor sich gehen. Stimmt dagegen die Richtung der Kraft P stetig mit der Bewegungsrichtung überein, oder ist sie dieser stets entgegengesetzt, so muss die Bewegung des Punktes zufolge desselben § 5 eine geradlinige bleiben, nur muss sich dem Kraftbegriffe zufolge die Größe der Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ stetig ändern. Die geradlinige Bewegung ist sonach in diesem Falle eine ungleichförmige. Diese kann wiederum entweder eine beschleunigte oder verzögerte sein.

Es ist nun die Frage nach den dynamischen Bedingungen dieser beiden möglichen Bewegungsarten zu beantworten.

Es sei zu diesem Behufe durch s der Weg bezeichnet, der während der Zeit t zurückgelegt würde, wenn die continuierlich wirkende Kraft P , deren unveränderliche Richtung zur positiven Richtung gewählt sein möge, während dieser Zeit auf den ursprünglich (zur Zeit $t = 0$) als ruhend angenommenen, freibeweglichen materiellen Punkt einwirken würde. Es müsste dann nach § 4, wenigstens wenn t vorläufig entsprechend klein angenommen wird, die Bewegungsrichtung mit der Kraftrichtung identisch sein, sonach s mit t zunehmen, also $\frac{ds}{dt}$ positiv sein und für $t = 0$ auch Null werden.

Ist jedoch der materielle Punkt zur Zeit $t = 0$, wobei dieser Zeitpunkt ganz willkürlich gewählt ist, nicht in Ruhe, sondern besitzt derselbe in diesem Zeitpunkte eine gewisse Geschwindigkeit c , deren Richtung, die nunmehr als die positive angenommen sei, mit der Richtung der Kraft P entweder übereinstimmt oder aber dieser entgegengesetzt ist, so ist der nunmehr in der Zeit t zurückgelegte Weg S , wie sich aus den Auseinandersetzungen des § 5 ergibt, zusammengesetzt aus dem durch den Einfluss der Anfangsgeschwindigkeit c allein bedingten Wege ct und dem früheren Wege s , demnach $S = ct + s$, oder $S = ct - s$, je nachdem c und P gleichgerichtet oder entgegengesetzt gerichtet sind, und es ist sonach im ersten Falle $\frac{dS}{dt} = c + \frac{ds}{dt}$, im letzteren dagegen $\frac{dS}{dt} = c - \frac{ds}{dt}$, demnach die Geschwindigkeit $\frac{dS}{dt}$ zu Ende der beliebig klein wählbaren Zeit t im ersten Falle größer, im letzteren kleiner als die Geschwindigkeit c zu Beginn dieser Zeit.

Da man nun für den Zeitanfangspunkt $t = 0$ jeden Zeitmoment während des Verlaufes der Bewegung des Punktes wählen kann, so ist dadurch nachgewiesen, dass die geradlinige Bewegung eines frei beweglichen Punktes eine beschleunigte oder aber eine verzögerte sein muss, je nachdem die Richtung der stetig einwirkenden Kraft P mit der Bewegungsrichtung übereinstimmt oder dieser entgegengesetzt ist.

Die Differentiation der früheren Gleichung $\frac{dS}{dt} = c + \frac{ds}{dt}$, in welcher die Anfangsgeschwindigkeit c von t unabhängig ist, führt zu der Folgerung: $\frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}$, welche lehrt, dass die Beschleunigung $\frac{d^2S}{dt^2}$, die eine gegebene Kraft P , welche die Richtung der Bewegung hat, bei der beliebigen Anfangsgeschwindigkeit c hervorruft, der bei der Anfangsgeschwindigkeit Null von derselben Kraft erzeugten Beschleunigung $\frac{d^2s}{dt^2}$ gleich, dass demnach diese Beschleunigung $\frac{d^2S}{dt^2}$ von der Anfangsgeschwindigkeit c völlig unabhängig ist.

Es sei nunmehr vorausgesetzt, dass diese mit der als positiv angenommenen Bewegungsrichtung gleichgerichtete Kraft P , die auf den längs einer geraden Linie sich beschleunigt bewegendem materiellen Punkt einwirkt, eine constante Kraft sei. Da in diesem Falle die Intensität der Kraft von der Zeit ganz unabhängig wäre, so müsste, sofern der materielle Punkt stets der gleiche bleibt, der Weg s , der infolge der Einwirkung der Kraft in der beliebigen Zeit t (die etwa sehr klein angenommen sei) dann zurückgelegt würde, wenn der

materielle Punkt zu Anfang dieser Zeit, also zur Zeit $t = 0$, in Ruhe wäre, und daher auch $\frac{ds}{dt}$ und auch $\frac{d^2s}{dt^2}$ für dasselbe t stets den gleichen Wert haben, welchen Zeitmoment man auch immer, also auch, wenn man den Endpunkt der beliebigen Zeit T zum Anfangspunkte der Zeit t wählen würde.

Da nun, wie früher gezeigt wurde, die Beschleunigung $\frac{d^2S}{dt^2}$ der thatsächlichen Bewegung von der Geschwindigkeit c , die das Bewegliche zu dieser Zeit T während dieser thatsächlichen Bewegung besitzt, und die wohl von T , nicht aber von t abhängt, völlig unabhängig, also $\frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}$ ist, so ist dadurch nachgewiesen, dass nicht nur $\frac{d^2s}{dt^2}$, sondern auch das gleiche $\frac{d^2S}{dt^2}$, d. i. die Beschleunigung zur Zeit $T + t$ einen von T völlig unabhängigen Wert hat, dass sonach, da man T beliebig und t beim Übergange zu den Grenzwerten etwa gleich Null wählen kann, die Beschleunigung während der ganzen Bewegung einen stets gleichbleibenden, constanten, und zwar positiven Wert p beibehält, mit anderen Worten, dass eine constante, mit der Bewegungsrichtung gleichgerichtete Kraft stets eine gleichförmig beschleunigte Bewegung (im engeren Sinne des Wortes) hervorruft.

Würde die constante Kraft P stets eine der als positiv angenommenen Bewegungsrichtung entgegengesetzte Richtung haben, so wäre $S = ct - s$ und demnach $\frac{d^2S}{dt^2} = -\frac{d^2s}{dt^2}$, d. h. es würde auch dann die Beschleunigung $\frac{d^2S}{dt^2}$ einen constanten, jedoch negativen Wert beibehalten. Es erzeugt sonach eine constante Kraft, die der Bewegungsrichtung stetig entgegengesetzt gerichtet ist, eine gleichförmig verzögerte Bewegung.

A. Dynamik der geradlinigen Bewegung eines materiellen Punktes.

§ 34. Beziehung zwischen der Kraft und Beschleunigung. Absolutes Masssystem. Mechanischer Antrieb. Mechanische Arbeit. Effect.

Es sei vorausgesetzt, dass auf einen geradlinig sich bewegenden materiellen Punkt in der Bewegungsrichtung oder in der entgegengesetzten Richtung eine Kraft P stetig einwirkt oder auch gleichzeitig mehrere Kräfte einwirken, deren Resultante diese Kraft P ist.

Findet die Bewegung in jener Richtung statt, die zur positiven gewählt wurde, so ist, wie früher gezeigt wurde, die Beschleunigung

$p = \frac{d^2s}{dt^2}$ positiv oder negativ, je nachdem die Bewegung eine beschleunigte oder verzögerte ist. Da aber im ersten Falle dem § 33 zufolge die einwirkende Kraft P die Richtung der Bewegung, also die positive, im zweiten Falle aber die entgegengesetzte (negative) Richtung haben muss, demnach im ersten Falle positiv, im letzten Falle negativ in Rechnung kommen muss, so ist dadurch bewiesen, dass Kraft und Beschleunigung dasselbe Qualitätszeichen haben.

Das Gleiche lässt sich nachweisen, wenn die Bewegung in negativer Richtung stattfindet, da dann die Beschleunigung im Falle einer beschleunigten, beziehungsweise verzögerten Bewegung negativ, beziehungsweise positiv und die einwirkende Kraft gleich-, beziehungsweise entgegengesetzt gerichtet der Bewegung, daher gleichfalls negativ, beziehungsweise positiv sein muss. Es hat demnach in allen Fällen das Verhältnis zwischen der Maßzahl P der Kraft und der Maßzahl p der Beschleunigung einen positiven Wert.

Es sei nun die Kraft P zunächst als eine constante, also die Bewegung als eine gleichförmig geänderte angenommen.

Da nach § 33 die durch diese Kraft P hervorgerufene Beschleunigung von der Größe der Anfangsgeschwindigkeit völlig unabhängig ist, so kann man sich — unbeschadet der allgemeinen Giltigkeit der Folgerungen — den bewegten materiellen Punkt zur Zeit $t = 0$ ruhend, also die durch die beliebige Kraft P erzeugte gleichförmig beschleunigte Bewegung gleich vom Ruhezustande aus beginnend denken; es ist dann der in der beliebigen Zeit t zurückgelegte Weg $s = \frac{p}{2} t^2$.

Würde auf denselben materiellen Punkt statt der Kraft P eine ihr gleiche constante Kraft in derselben Richtung einwirken, so müsste diese nach § 4 der Kraft P äquivalent sein, demnach der Punkt in der gleichen Zeit t den gleichen Weg s zurücklegen, was der Gleichung $s = \frac{p}{2} t^2$ zufolge nur dann stattfinden kann, wenn auch die Beschleunigung p einen dem früheren gleichen Wert hat.

Würde eine beliebige andere Kraft P' in der früheren Richtung auf denselben materiellen Punkt einwirken, so würde der jetzt in der Zeit t zurückgelegte Weg $s' = \frac{p'}{2} t^2$ sein, wenn p' die der Kraft P' entsprechende Beschleunigung bedeutet.

Würden nun schließlich die beiden beliebigen Kräfte P und P' gleichzeitig in der früheren Richtung auf denselben materiellen Punkt einwirken, so müsste nach § 5 der in der beliebigen Zeit t zurückgelegte Weg $s'' = s + s'$, daher auch $s'' = \frac{p + p'}{2} t^2$ sein, so-

mit die Beschleunigung der resultierenden Bewegung den constanten Wert $\frac{d^2 s''}{dt^2} = p + p'$ haben.

Nun sind aber die gleichzeitig auf denselben materiellen Punkt nach derselben Richtung wirkenden Kräfte P und P' ersetzbar durch ihre Resultierende P'' , die ihrer Summe gleich ist und dieselbe Richtung hat, so dass diese Kraft $P'' = P + P'$ eine gleichförmig beschleunigte Bewegung desselben materiellen Punktes mit der Beschleunigung $\frac{d^2 s''}{dt^2} = p + p'$ erzeugen müsste.

Da demnach bei einem jeden beliebigen materiellen Punkte stets gleichen Kräften P auch gleiche Beschleunigungen p und der Summe zweier beliebiger Kräfte P und P' auch die Summe der zugehörigen Beschleunigungen p und p' entsprechen, so sind, so lange der materielle Punkt sich nicht ändert, Kraft und Beschleunigung stets direct proportioniert und daher ist das — wie früher bewiesen wurde, stets positive — Verhältnis zwischen der Maßzahl der Kraft P und jener der Beschleunigung p ein constantes. Dieses für denselben materiellen Punkt constante positive Verhältnis m der Kraft P zur erzeugten Beschleunigung p bezeichnet man als das Maß der ponderablen Masse oder schlechthin als Masse des materiellen Punktes.

Es ist also $m = \frac{P}{p}$ und demnach die Kraft P das Product aus der Masse m und der Beschleunigung p .

$$P = m \cdot p = m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (1)$$

Diese Verhältniszahl m , welche jedem materiellen Punkte specifisch zukommt, jedoch für die verschiedenen materiellen Punkte im allgemeinen verschieden ist, hängt offenbar ab von der Wahl der Krafteinheit, auf welche sich die Maßzahl P bezieht, und von der Wahl jener Längeneinheit und jener Zeiteinheit, welche bei der Bestimmung der Maßzahl p der Beschleunigung zugrunde gelegt wurden, und demnach ist auch die Masse jenes Körpers, für welche $m = 1$ ist, also die Masseneinheit durch diese drei Einheiten bestimmt; aber es ist auch umgekehrt die Krafteinheit durch die Wahl der Masseneinheit bestimmt, wofern man die letztere als die ursprünglich gegebene Grundeinheit annimmt, so dass dann die Längeneinheit, Zeiteinheit und die Masseneinheit die drei Grundeinheiten sind. Eine nähere diesbezügliche Erörterung sei der folgenden Untersuchung vorbehalten.

Es wurde zwar bei der Deduction der wichtigen Gleichung $P = mp$ vorausgesetzt, dass die Kraft P eine constante sei, jedoch hat diese Gleichung auch für eine ungleichförmig geänderte Bewegung, bei welcher sich der Wert P der Resultierenden der auf den Punkt m

einwirkenden Kräfte continuierlich ändert, volle Giltigkeit, da man sich jedenfalls die Kraft P während einer unendlich kleinen Zeit constant denken kann — entsprechend der allgemein giltigen Grundgleichung $dv = p \cdot dt$, die mit der für eine constante Kraft giltigen Grundgleichung für die gleichförmig geänderte Bewegung $v - v_0 = p t$ in Übereinstimmung steht —, nur wird in diesem Falle sich der Variation der Kraft P entsprechend auch die Beschleunigung p in demselben Verhältnisse von Moment zu Moment continuierlich ändern.

Für eine gleichförmige Bewegung lehrt die Differentiation von $\frac{ds}{dt} = c$ wegen der Unveränderlichkeit von c , dass $p = \frac{d^2s}{dt^2} = 0$, daher $P = m \cdot p = 0$ sei, was mit früheren Erörterungen in vollem Einklange steht.

Die Gleichung $P = m \cdot p$ gestattet, die Größe der auf einen Körper einwirkenden Kraft P mittels der durch diese Kraft erzeugten Beschleunigung p zu bestimmen, also eine Kraft — auf indirectem Wege — zu messen, wofern man anderweitig die Masse m dieses Körpers bestimmt hat. — Ebenso kann man umgekehrt die Beschleunigung p , die eine gegebene Kraft P bei einem Körper von bekannter Masse m hervorruft, aus $p = \frac{P}{m}$ bestimmen, und diese Bestimmungsweise soll von nun an häufige Anwendung finden.

Ist $m = 1$, so ist $p = P$; es kann demnach die Beschleunigung als eine auf die Masseneinheit wirkende Kraft angesehen werden, und daher wird in diesem Sinne die Beschleunigung p auch „beschleunigende Kraft“ genannt, im Gegensatze zu der auf die beliebige Masse m wirkenden Kraft $P = m p$, die schon von Newton als bewegende Kraft bezeichnet wird.

Als Masse eines Körpers (Punktsystems) bezeichnet man in allen Fällen die arithmetische Summe der Massen der einzelnen materiellen Punkte (Körperelemente) desselben.

Die Vergleichung der Massen der Körper unserer Erde geschieht am einfachsten, was hier gleich im voraus bemerkt werden möge, durch Vergleichung der (durch die Wägung bestimmbar) Gewichte dieser Körper, indem, wie später gezeigt werden wird, die Massen der Körper den Gewichten derselben an demselben Orte der Erde direct proportional sind.

Gewöhnlich basiert man bei wissenschaftlichen Untersuchungen nicht die Masseneinheit auf die irgendwie normierte Krafteinheit, sondern schlägt, wie schon oben bemerkt wurde, den umgekehrten Weg ein, indem man zur Bestimmung der Kräfteeinheit und ebenso auch zur Bestimmung der Einheiten aller der späterhin zu behandelnden Größenarten der Mechanik, sowie auch jener der Physik folgende Grundeinheiten oder Fundamenteinheiten zugrunde legt:

a) die Masseneinheit, für welche nach den fast allgemein in der wissenschaftlichen Welt acceptierten Beschlüssen des internationalen wissenschaftlichen Congresses (Paris 1881) die Masse eines Grammes gewählt wurde, d. i. der tausendste Theil der Masse des im internationalen Maßbureau in Breteuil (bei Paris) aufbewahrten Normkilogrammgewichtsstückes aus Platiniridium (Legierung aus Platin und Iridium), welche Grammasse nahezu der Masse eines Cubikcentimeters chemisch reinen Wassers von 4° C. gleich ist. Mitunter wählt man als Masseneinheit die erwähnte Kilogrammasse selbst;

b) die Zeiteinheit, als welche zumeist eine Secunde mittlerer Sonnenzeit (zuweilen auch Sternzeit) angenommen wird;

c) die Längeneinheit, für welche nach den erwähnten Congressbeschlüssen das Centimeter angenommen wurde, d. i. der hundertste Theil der Länge des in Breteuil aufbewahrten Etalons aus Platiniridium (bei 0° C.), welcher Urmaßstab eines Meters an Länge nahezu $\frac{1}{10^7}$ des Quadranten des Erdmeridians gleichkommt. Mitunter wählt man als Längeneinheit die Länge des Meteretalons selbst.

Man nennt die aus den eben erwähnten drei Grundeinheiten (den Einheiten der British Association): Centimeter, Grammasse und Secunde oder auch die aus Meter, Kilogrammasse und Secunde abgeleiteten Einheiten der verschiedenen Größenarten der Mechanik und Physik, bei welchen also das metrische System durchwegs festgehalten ist, die absoluten Einheiten (dieser Name stammt von Gauß, der zuerst die magnetischen Maße auf mechanische zurückgeführt hat) und nennt das durch die drei ersten Einheiten der British Association bestimmte (fast allgemein angewendete) Maßsystem das Centimeter-Gramm-Secunden-Maßsystem (C. G. S.), zum Unterschiede von dem zweiten, dem Meter-Kilogramm-Secunden-Maßsystem (M. K. S.).

Anmerkung. Das absolute Maßsystem, welches zuerst von den beiden berühmten Göttinger Gelehrten Gauß und Wilhelm Weber, jedoch mit den Grundeinheiten Millimeter ($\frac{1}{1000}$ Meter) und Milligramm ($\frac{1}{1000}$ Gramm) aufgestellt wurde, nennt man auch mitunter, weil es heutzutage in allen Zweigen der Physik, ganz besonders aber in der Elektrotechnik zur Anwendung gelangt, das physikalische Maßsystem. In der Technik wird zumeist noch immer das später zu behandelnde terrestrische Maßsystem, welches manche Autoren deshalb auch das technische Maßsystem nennen, angewendet.

Als absolute Kräfteinheit ist dementsprechend zufolge der Gleichung (1) jene Kraft zu bezeichnen, welche der Masse $m = 1$, also im (C. G. S.)-System jener eines Grammes (g) eine Beschleunigung $p = 1$, d. i. von 1 Centimeter (c) in der Zeiteinheit, d. i. pro Secunde (s) ertheilt. Dieselbe wird das *Dyn* (von dem griechischen Worte *dynamis* [δυναμις] = Kraft) genannt und sei durch D_{gs} und die auf Meter (m), Kilogramm (k) und Secunde (s) basierte absolute Kräfteinheit, die der Masse 1 Kilogrammes in 1 Secunde eine Be-

schleunigung von 1 Meter zu ertheilen vermag, und die das Megadyn (von *magale dynamis* [μαεγαλη δυναμις] = große Kraft) genannt wird, dagegen durch das Zeichen D_{mks} oder D_a bezeichnet.

Da zufolge des § 30 lt^{-2} die Dimension der Beschleunigung p ist, so hat die Kraft $P = mp$ die Dimension $[P] = m[p] = mlt^{-2}$, und es ist sonach die absolute Krafteinheit D_{cgs} , das „Dyn“ symbolisch durch $D_{cgs} = \frac{\text{Grammasse} \times \text{Centimeter}}{\text{Secunde} \times \text{Secunde}}$ ausgedrückt. Das Megadyn D_{mks} (D_a) ist

$$D_{mks} = \frac{\text{Kilogrammasse} \times \text{Meter}}{\text{Secunde} \times \text{Secunde}} = \frac{1000 \text{ Gramm} \times 100 \text{ Centimeter}}{\text{Secunde} \times \text{Secunde}} = 10^5 D_{cgs},$$

also Megadyn = 100000 Dyn.

Zwei auf verschiedene materielle Punkte von den Massen m_1 und m_2 einwirkende Kräfte sind der Gleichung (1) gemäß nur dann gleich zu nennen, wenn die durch diese Kräfte bewirkten Beschleunigungen p_1 und p_2 der beiden Massen m_1 und m_2 diesen Massen invers proportional sind, so dass $p : p_1 = m_1 : m_2$ ist (vergl. Princip der Gegenwirkung und die Anmerkung auf S. 23).

Multipliziert man die beiden in § 30 S. 104 deducierten allgemeinen Grundgleichungen für die geradlinige Bewegung $dv = pdt$ und $v dv = p ds$ mit der Masse m , so findet man: $P dt = m dv$ und $P ds = m v dv$.

Die Integration dieser Gleichungen ergibt, wenn zur Zeit $t = 0$, $s = 0$ und $v = v_0$ ist, dass für eine jede geradlinige Bewegung eines materiellen Punktes von der Masse m , welche unter der steten Einwirkung einer Kraft P (der Resultierenden) vor sich geht, die Relationen stattfinden:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^t P \cdot dt &= m v - m v_0 \\ \int_0^s P \cdot ds &= \frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} \end{aligned} \right\} (2)$$

Die in diesen Gleichungen vorkommenden Ausdrücke führen ihrer Wichtigkeit halber besondere Namen.

Das Product aus Masse m und Geschwindigkeit v nennt man nach Descartes (geb. 1596, gest. 1650), der — Galileis Anschauungsweise folgend — dieses Product (in den „Principia philosophiae“, Amsterdam 1644) als die „Kraft des bewegten Körpers“ betrachtet, die dieser Geschwindigkeit v entsprechende Quantität der Bewegung oder Bewegungsgröße.

Das halbe Product aus der Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit — mitunter, wiewohl selten, nach Leibniz (geb.

1646, gest. 1716) auch das einfache Product — wird die dieser Geschwindigkeit entsprechende lebendige Kraft genannt.

Anmerkung. Leibniz, der zuerst den Begriff der „lebendigen Kraft“, d. i. mv^2 in den „Acta eruditorum“ (1686 und 1695) in die Mechanik einführt und denselben zu dem Begriffe der „todten Kraft“ (d. i. dem normalen Drucke eines ruhenden Körpers auf die Unterstüztungsfläche (vergl. §. 23) in Gegensatz stellt, verflücht gegen Descartes' eben erwähnte Anschauung den Standpunkt, dass die „lebendige Kraft“ (mv^2) und nicht die „Bewegungsquantität“ (mv) als der wahre Ausdruck der „Kraft des bewegten Körpers“ anzusehen ist. Dadurch entbrennt ein heftiger, 57 Jahre lang dauernder wissenschaftlicher Streit zwischen den Anhängern Descartes' und jenen Leibnizens, der erst durch d'Alembert's (geb. 1717, gest. 1783) Ausführungen in dessen „Traité de dynamique“ (Paris 1743) geschlichtet wird. — Es bedarf nach dem Gesagten nicht erst besonders betont zu werden, dass „lebendige Kraft“ nur als Name für die mathematische Größe $\frac{mv^2}{2}$ anzusehen ist, wie auch „Bewegungsquantität“ als bloßer Name für mv . — Gegenwärtig wird, wie dies oben bemerkt wurde, behufs eines einfacheren Ausdruckes der Gesetze der Mechanik als „lebendige Kraft“ nach Coriolis' Vorgange meist die Hälfte des Ausdruckes mv^2 bezeichnet, wie es auch in diesem Lehrbuche geschieht.

Das Product aus der Kraft P in das unendlich kleine Zeitelement dt , während dessen man die Kraft P als constant annehmen kann, welches Product ferner positiv oder negativ anzunehmen ist, je nachdem die Kraft positiv oder negativ gerichtet ist, heißt „der elementare Antrieb der Kraft P für dieses Zeitelement“ und die Summe aller der elementaren Antriebe für alle die einzelnen Zeitelemente der endlichen Zeit t , also $\int_0^t P dt$ heißt der Gesamtantrieb oder kurzweg

Antrieb der (im allgemeinen veränderlichen) Kraft P für die Zeit t . (Es stellt gleichsam der Antrieb den Verbrauch an Kraft innerhalb der Zeit t dar.)

Anmerkung. Die Bezeichnung „Antrieb der Kraft“ für das Product aus Kraft und Zeit rührt von Belanger („Cours de mécanique“, Paris 1847) her.

Das Product aus der Kraft P und dem unendlich kleinen Wegelemente ds , innerhalb dessen die Kraft als constant betrachtet werden kann, wird bei einer geradlinigen Bewegung „elementare mechanische Arbeit $dA_P = P ds$ der Kraft P für dieses Wegelement“ genannt. Dieselbe ist positiv oder negativ in Rechnung zu ziehen, je nachdem P und ds , demnach auch P und die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt} = v$ gleich- oder ungleichbezeichnet sind, also die Kraftrichtung mit der Richtung der Bewegung übereinstimmt oder aber ihr entgegengesetzt ist. Die algebraische Summe aller jener elementaren mechanischen Arbeiten dA_P , die den einzelnen Elementen eines endlichen Weges s entsprechen, mit anderen Worten das bestimmte Integral $A_P = \int_0^s P ds$

nennt man die gesammte während der Zurücklegung des Weges s von der (im allgemeinen variablen) Kraft P geleistete mechanische Arbeit oder kurzweg die Arbeit der Kraft P für den Weg s . (Es drückt also die mechanische Arbeit gleichsam den Kraftverbrauch während eines gewissen Weges s aus.) Im vorhinein möge hier ausdrücklich erwähnt werden, dass, wie späterhin ausführlich auseinandergesetzt werden wird, bei einer krummlinigen Bewegung und überhaupt in allen Fällen, in welchen die Krafrichtung P weder mit der Bewegungsrichtung, die durch ds bezeichnet sei, gleichgerichtet, noch ihr entgegengesetzt gerichtet ist, $dA_P = P \cdot ds \cdot \cos(P, ds)$ und

$$A_P = \int_0^s P \cdot ds \cdot \cos(P, ds) \text{ ist.}$$

Anmerkung. Der Name „Arbeit“ für das Product aus Kraft und Weg wurde zuerst von Coriolis (geb. 1792, gest. 1843) gewählt und von Poncelet (geb. 1788, gest. 1867) in seinem bekannten Werke „Cours de mécanique“ (Metz 1826) beibehalten, wodurch dieser Name allgemeine Verbreitung fand.

Die durch die Gleichungen (2) ausgedrückten Gesetze haben demnach folgenden Wortlaut:

Bei jeder geradlinigen Bewegung eines freibeweglichen materiellen Punktes ist der Kraftantrieb der continuierlichen Kraft P , die aus allen einwirkenden Kräften resultiert, für eine beliebige Zeit t der gleichzeitigen Änderung der Bewegungsgröße und die mechanische Arbeit der Kraft P der gleichzeitigen Änderung der lebendigen Kraft gleich.

Wird die Art der Änderung der Kraft im Verlaufe der Zeit graphisch in bekannter Weise durch eine Curve versinnlicht, bei welcher die Kraft durch die Ordinate (auf ein orthogonales Achsen-system bezogen) und die entsprechende Zeit durch die zugehörige Abscisse des laufenden Punktes einer Curve dargestellt ist, welche Curve aus einleuchtenden Gründen als Zeitkraftcurve bezeichnet sei, so ist aus denselben Gründen wie in Fig. 44 S. 103 der Kraftantrieb in der Zeit von o bis t durch die von den beiden Coordinatenachsen, von der Curve und von der der Zeit t entsprechenden Ordinate eingeschlossene ebene Fläche und ebenso bei der Wegkraftcurve die mechanische Arbeit durch die in gleicher Weise begrenzte Fläche dargestellt.

Ist die Kraft P constant, so liefert die Integration $\int_0^t P dt$, bez. $\int_0^s P ds$ die einfachen Werte Pt , bez. Ps , und die Gleichungen (2) nehmen dann die aus den Elementarlehrbüchern bekannte einfache Form an: $Pt = mv - mv_0$ und $Ps = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$. Für eine con-

stante Kraft, aber auch nur für diese, ist also bei einer geradlinigen Bewegung der Kraftantrieb einfach durch das Product aus Kraft und Zeit und die mechanische Arbeit durch das Product aus Kraft und Weg bestimmt.

Den hier erörterten Begriffen zufolge sind sowohl die Bewegungsgröße mv , als auch der Kraftantrieb Pt von der Dimension mlt^{-1} und anderseits sowohl die lebendige Kraft $\frac{mv^2}{2}$, als auch die Arbeit Ps (und auch das Kraftmoment Pd) von der Dimension $[A_P] = [P] \cdot l = = ml^2t^{-2}$. Die absolute Arbeitseinheit ist im (C. G. S.-) Maßsystem dementsprechend: $\frac{\text{Grammasse} \times \text{Centimeter} \times \text{Centimeter}}{\text{Secunde} \times \text{Secunde}}$ und

wird das „Erg“ [nach dem griechischen Worte $\epsilon\rho\gamma\omega\nu$ (*ergon* = Werk, Arbeit)] genannt; dagegen ist die von Poncelet eingeführte, in der technischen Mechanik meist angewendete Einheit eines Kilogrammeters, d. i. die Arbeit eines Kilogrammewichtes während des freien Falles desselben durch eine Fallhöhe von 1 Meter auszudrücken durch Kilogrammewicht \times Meter (vergl. Momenteneinheit). Die absolute Arbeitseinheit im (M. K. S.-) Maßsystem wird auch „Joule“ (zu Ehren des bekannten englischen Physikers Joule) genannt, es ist also

$$\begin{aligned} 1 \text{ Joule} &= \frac{\text{Kilogrammasse} \times \text{Meter} \times \text{Meter}}{\text{Secunde} \times \text{Secunde}} = \\ &= \frac{1000 \text{ Grammasse} \times 100 \text{ Centimeter} \times 100 \text{ Centimeter}}{\text{Secunde} \times \text{Secunde}} = \\ &= 10^7 \times \frac{\text{Grammasse} \times \text{Centimeter} \times \text{Centimeter}}{\text{Secunde} \times \text{Secunde}}, \end{aligned}$$

also 1 Joule gleich 10^7 (10 Millionen) Erg. Das Erg = $D_{\text{cgs}} \times$ Centimeter ist demnach zu definieren als die Arbeit der absoluten Kräfteinheit eines Dyns während eines Weges von einem Centimeter, dagegen Joule = $D_{\text{mks}} \times$ Meter als die mechanische Arbeit, welche eine einem Megadyn gleiche Kraft während eines Weges von einem Meter leistet.

Die Arbeit $A_P = \int_0^s P ds$ einer continuierlichen Kraft P ändert

sich, wie aus den bisherigen Erörterungen hervorgeht, bei der Bewegung des materiellen Punktes, auf welchen diese Kraft wirkt, in bestimmter Weise im Laufe der Zeit t ; es ist mit anderen Worten A_P eine eindeutige Function der Zeit t , die sich, wenn das Gesetz, nach welchem die Größe der Kraft P sich im Verlaufe der Bewegung richtet, bekannt ist, im allgemeinen bestimmen lässt. Der Differential-

quotient e_P dieser Function, also der Differentialquotient $e_P = \frac{dA_P}{dt}$ der Arbeit der Kraft P — genommen nach der Zeit t — ist eine für die Beurtheilung der Leistung einer Kraft P besonders für technische Zwecke wichtige Größe und wird der Effect (Zeiteffect, wohl auch Arbeitskraft, Leistung u. s. w.) der Kraft P genannt. Da nun bei einer geradlinigen Bewegung die elementare mechanische Arbeit $dA_P = P \cdot ds$ ist, so ist der Effect $e_P = \frac{dA_P}{dt} = P \cdot \frac{ds}{dt} = P \cdot v$, d. h. der Effect einer Kraft P lässt sich bei einer geradlinigen Bewegung auch als das Product aus der Kraft P und der Geschwindigkeit v definieren.

Da nach der letzten Gleichung in (2) $A_P = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$ ist, so ist auch $e_P = \frac{dA_P}{dt} = \frac{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)}{dt}$, d. h. der Effect der resultierenden Kraft bei einer geradlinigen Bewegung eines materiellen Punktes ist auch gleich der Ableitung der lebendigen Kraft — nach der Zeit genommen.

Ist bei einer Bewegung der Effect e_P ein constanter, so ergibt die Integration der obigen Gleichung $dA_P = e_P \cdot dt$ für die Arbeit A_P der Kraft P in der beliebigen Zeit t den Wert $A_P = e_P \cdot t$, und es werden dieser Gleichung entsprechend in diesem Falle in gleichen Zeiten gleiche Arbeiten geleistet und ist der Effect dann $e_P = \frac{A_P}{t}$; die Maßzahl des Effects stimmt in diesem Falle demnach überein mit der Maßzahl der in der Zeiteinheit geleisteten mechanischen Arbeit.

Ist der Effect variabel, so bezeichnet man den Quotienten $\frac{A_P}{t}$ als den mittleren oder durchschnittlichen Effect innerhalb der Zeit t .

Die Dimension des Effects $e_P = P \cdot v$ ist, da die Kraft P (s. S. 126) die Dimension mlt^{-2} und die Geschwindigkeit v die Dimension lt^{-1} hat, bestimmt durch $[e_P] = [P] \cdot [v] = m^2t^{-3}$. Demnach ist im absoluten Maßsystem, und zwar im (C. G. S.-) Maßsystem die Einheit des Kräfteeffects, das „Secundenerg“, bestimmt durch

$$\frac{\text{Erg}}{\text{Secunde}} = \frac{\text{Grammasse} \times (\text{Centimeter})^2}{(\text{Secunde})^3},$$

d. i. durch den Effect eines Ergs pro Secunde und im (M. K. S.-) Maßsystem ist die Effecteinheit, die zu Ehren des Erfinders der Dampfmaschine „Watt“ genannt wird, $\text{Watt} = \frac{\text{Joule}}{\text{Secunde}} = \frac{\text{Kilogrammasse} \times (\text{Meter})^2}{(\text{Secunde})^3}$, d. h. der Effect eines Joules ($= 10^7$ Erg) pro Secunde.

§ 35. Anwendung der Gesetze der gleichförmig geänderten Bewegung eines materiellen Punktes auf die Dynamik der Schwere. Terrestrisches Maßsystem.

Im §. 25 wurde schon die Erfahrungsthatsache erwähnt, dass die Schwerkraft bei den nicht auf bedeutende Breitenunterschiede unserer Erde und auf nicht zu bedeutende Höhen sich erstreckenden Bewegungen der Körper mit sehr großer Annäherung als eine constante Kraft von constanter Richtung angesehen werden kann. In der That ist nämlich — entsprechend der Unveränderlichkeit der Schwere während des freien Falles — die Bewegung des freien Falles im luftleeren Raume eine gleichförmig beschleunigte Bewegung, wie dies alle Versuche bestätigen.

Die mit großer Sorgfalt angestellten Beobachtungen constatieren überdies die höchst bemerkenswerte Thatsache, dass an demselben Orte der Erde die Beschleunigung dieser Bewegung des freien Falles im luftleeren Raume, die man kurzweg als die Beschleunigung der Schwere bezeichnet, für alle Körper dieselbe, also völlig unabhängig von der materiellen Beschaffenheit der fallenden Körper, von ihrem Volum, ihrer Gestalt, ihren physikalischen Zuständen u. s. w. sei. Alle Körper fallen mit anderen Worten im luftleeren Raume an demselben Orte der Erde gleich schnell zur Erde.

Directe Fallversuche können ihrer Natur nach zu keinem genauen Resultate führen, doch ist durch Newtons, vor allem aber durch Bessels Pendelbeobachtungen die Übereinstimmung der Beschleunigung der Schwere bei den verschiedenen Körpern, und zwar von Newton bis auf 0.001 und von Bessel (s. Bessel, „Versuche über die Kraft, mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht“, in den Schriften der Berl. Akademie 1830) bis auf $\frac{1}{60000}$ mit Sicherheit dargethan worden.

Diese für alle Körper constante Beschleunigung der Schwere sei im Folgenden stets durch g (terrestrische Gravitation) bezeichnet. Dieselbe ändert sich jedoch streng genommen mit der Höhe, also mit dem Abstände vom Erdmittelpunkte, und zwar nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze im verkehrten quadratischen Verhältnisse dieses Abstandes, und ferner ändert sich dieselbe mit der geographischen Breite (wie beides auch die Pendelversuche gelehrt haben).

In unseren Breiten beträgt dieselbe in der Nähe der Erdoberfläche etwa $g = 9.81$ Meter pro Secunde, und an einem beliebigen Orte der Erdoberfläche von der geographischen Breite φ ist für die Höhe der Meeresoberfläche genauen, und zwar den neuesten Pendelversuchen zufolge $g = 9.83193 \left(1 - \frac{\cos^2 \varphi}{189.3} \right) = 9.7800$ $(1 + 0.005310 \sin^2 \varphi)$ in Metern pro Secunde gefunden worden. Für

die Breite von Paris ist z. B. $g = 9.80989$, für die Breite von 45° ist $g = 9.80597$, für Wien 9.80831 u. s. w.

Bezeichnet man durch q das Gewicht eines materiellen Punktes, dessen Masse m ist, so ist nach der Gleichung (1) S. 123 stets

$$q = mg \quad (1),$$

d. h. das Gewicht eines jeden Körpers ist stets gleich dem Producte aus der Masse m desselben und der Beschleunigung der Schwere g .

Mit Hilfe dieser Gleichung, welche lehrt, dass an demselben Orte der Erde das Gewicht q der Masse m stets direct proportioniert ist, lässt sich die Masse m eines materiellen Punktes, dessen Gewicht q bekannt ist, auf sehr einfachem Wege bestimmen. Ist z. B. n die Maßzahl des Gewichtes eines Körpers K bei Zugrundelegung des Grammgewichtes als Gewichtseinheit, so ist n auch die Maßzahl der Masse des Körpers K , wenn die Grammmasse als Masseneinheit angenommen wird, sofern die Messungen an demselben Orte der Erde vorgenommen sind. Nach Gleichung (1) ist $m = \frac{q}{g}$, also z. B. für Paris, wenn man ein Meter zur Längeneinheit und eine Secunde zur Zeiteinheit wählt, $m = \frac{q}{9.80989}$. Dementsprechend ist die Beschleunigung p , die eine bekannte Kraft P bei einem Körper von dem Gewichte q bedingt, bestimmbar aus

$$p = \frac{P}{m} = \frac{P}{q} \times g$$

Es wurde schon im § 34 erwähnt, dass man bei der Feststellung der Einheiten der Mechanik — anstatt von einer Grundeinheit der Massen — auch ausgehen kann von einer genau bestimmten Kräfteinheit, in welchem Falle dann umgekehrt die Masseneinheit durch diese Kräfteinheit, ferner durch die Längen- und Zeiteinheit bestimmt ist. Diese Kräfteinheit pflegt man dann der terrestrischen Schwere zu entnehmen, und zwar muss man, da die Schwere sich mit der Höhe und der geographischen Breite des Ortes ändert, das Gewicht eines genau bestimmten Körpers an einem genau bestimmten Orte der Erde als Kräfteinheit zugrunde legen. Bei diesem sogenannten terrestrischen Maßsystem, das im Gegensatze zu dem bisher behandelten absoluten Maßsystem steht, pflegt man als Kräfteinheit diejenige Schwerkraft anzunehmen, die auf das im früheren Paragraph erwähnte Pariser Kilogrammgewichtsstück aus Platin, und zwar in Paris einwirkt. Durch diese terrestrische Kräfteinheit D , ferner durch die Längeneinheit = 1 Meter und die Zeiteinheit = 1 mittlere

Secunde ist das terrestrische Maßsystem, also auch die terrestrische Masseneinheit M_t bestimmt. Sind nun sowohl die in der Gleichung (1) vorkommenden Maßzahlen q und m , als auch die entsprechenden, durch D (Krafteinheit) und M (Masseneinheit) bezeichneten Einheiten, und zwar im absoluten (a) Meter-Kilogramm-Secunden-Maßsystem durchwegs durch den Index a , dagegen im terrestrischen (t) Maßsystem durch den Index t gekennzeichnet, so ist, da g in beiden Maßsystemen dieselbe Zahl ist, zufolge (1) $q_t = m_t \cdot g$ und $q_a = m_a \cdot g$. Die Beziehung zwischen den absoluten und terrestrischen Einheiten ergeben sich aus folgender Betrachtung: Auf das Pariser Kilogramm-gewichtsstück, dessen Masse die Masseneinheit M_a ist, wirkt in Paris die Krafteinheit D_t und erzeugt beim freien Falle in Paris die Beschleunigung, deren Maßzahl 9·80989 ist. Da nun die Maßzahl der Einheit stets 1 ist, sonach für diesen freien Fall sowohl q_t , als auch m_a gleich 1 ist, so folgt aus den beiden letzten numerischen Gleichungen $q_a = 9\cdot80989$ und $m_t = \frac{1}{9\cdot80989}$. Nun ist q_a die Maßzahl der hier wirkenden Kraft D_t im absoluten Maße, welchem die Kräfteinheit D_a zugrunde liegt; mit anderen Worten es ist q_a das Verhältnis $D_t : D_a$, und es ist sonach $D_t = 9\cdot80989 D_a$, also die terrestrische Krafteinheit D_t das 9·809fache, also nahezu das 10fache der absoluten Einheit D_a im Meter-Kilogramm-Secunden-Maßsystem, die im früheren Paragraphe durch D_{mks} bezeichnet wurde. Da nun dem letzten Paragraphe zufolge $D_a = D_{mks} = 10^5 \cdot D_{cgs} = 10^5$ Dyn ist, so ist ferner $D_t = 9\cdot80989 \times 10^5$ Dyn = 980989 Dyn. (Für Wien ist das Gewicht derselben Kilogramm-masse 980831 Dyn). Ferner ist nach Obigem $m_t = \frac{1}{9\cdot80989}$ die Maßzahl der in Betracht gezogenen Kilogramm-masse M_a in terrestrischem Maße, also bezogen auf die terrestrische Masseneinheit M_t —, und es ist daher $M_a : M_t = \frac{1}{9\cdot80989}$, daher $M_t = 9\cdot80989 M_a$, d. h. die terrestrische Masseneinheit ist 9·810 Kilogramm, also nahezu 10 Kilogramm.

In einfacher Weise lassen sich die wichtigen Beziehungen $D_t = 9\cdot81 D_a = 9\cdot81$ Megadyn und $M_t = 9\cdot81 M_a = 9\cdot81$ Kilogramm auch folgendermaßen nachweisen: Da die Kraft $D_a = 1$ Megadyn ihrer Definition zufolge bloß imstande ist, der Masse M_a von einem Kilogramm die Beschleunigung von $1 \frac{\text{Meter}}{\text{Secunde}^2}$ zu ertheilen, während die Kraft D_t , d. i. das Gewicht eines Kilogramms bei freiem Falle derselben Masse von 1 Kilogramm die Beschleunigung von $9\cdot81 \frac{\text{Meter}}{\text{Secunde}^2}$ ertheilt, so muss die letztere Kraft D_t das 9·81fache der früheren Kraft D_a sein (zufolge der Gleichung 1 des § 34). Da

ferner $q = m \cdot g$ ist und die Maßzahl g sowohl im terrestrischen System, als auch im (M. K. S.-) System denselben Zahlwert, nämlich 9·81 besitzt, so müssen bei derselben Masse und derselben Kraft die Maßzahlen q der Kraft in beiden Systemen sich genau so verhalten wie die Maßzahlen der Masse in diesen Systemen, was offenbar nur dann möglich ist, wenn auch die Einheiten in diesen beiden Systemen dasselbe Verhältnis haben, also wenn das Verhältnis $D_t : D_a$, d. i. 9·81 gleich ist dem Verhältnisse $M_t : M_a$, d. h. auch die Masseneinheit M_t des terrestrischen Systems ist 9·81 $M_a = 9·81$ Kilogramm.

Anmerkung. Da die Worte Kilogramm, Gramm etc. im gewöhnlichen Sprachgebrauche leider eine zweifache Bedeutung haben, indem man durch dieselben zwei grundverschiedene Begriffe ausdrückt, nämlich bald die Masse M_a eines Kilogramms (Gramms) etc., bald das Gewicht D_t eines Kilogramms etc., so hat man in jedem einzelnen Falle sorgfältig zu beachten und aus dem Sinne der Rede wohl zu entnehmen, ob diese Worte die Masse M_a u. s. w. oder aber die Kraft D_t u. s. w. bedeuten.

Die Arbeitseinheit im terrestrischen System ist, wie wiederholt erwähnt wurde, das Kilogrammometer = Kilogrammgewicht \times Meter, also ist für Paris 1 Kilogrammometer = $D_t \times$ Meter = 9·80989 $\cdot D_{mks}$ Meter =
 $= 9·80989 \cdot \frac{\text{Kilogramm} \times \text{Meter} \times \text{Meter}}{\text{Secunde} \times \text{Secunde}} = 9·80989 \text{ Joule} =$
 $= 9·80989 \times 10^7 \text{ Erg}$, also 1 Kilogrammometer nahezu 10 „Joule“ oder 98 Millionen „Erg“. Für Wien ist 1 Kilogrammometer = 98·0831 Millionen Erg, wofern man nämlich unter Kilogrammgewicht das Gewicht, welches die Kilogrammsee in Wien hat, versteht.

Auch der Effect der Kräfte wird sehr häufig, besonders in der technischen Praxis nicht in absoluten, sondern in terrestrischen Einheiten ausgedrückt. Entweder ist diese terrestrische Effectseinheit das Secunden-Kilogrammometer = $\frac{\text{Kilogramm} \times \text{Meter}}{\text{Secunde}}$, d. i. der

Effect, der geleistet wird, wenn das Gewicht eines Kilogramms mit constant bleibender Geschwindigkeit 1 Meter hoch in einer Secunde gehoben wird, so dass ein Secunden-Kilogrammometer in absoluten Einheiten dem eben Gesagten zufolge für Paris 9·80989 (und für Wien 9·80831)

$\frac{\text{Joule}}{\text{Secunde}}$ oder 9·81 Watt beträgt, oder es wird bei der Bestimmung größerer Kräfteeffecte (besonders bei Maschinen) der Effect in sogenannten Pferdekraften ausgedrückt. Unter Pferdekraft (*HP*) oder Pferdestärke ist ein Effect von 75 Secunden-Kilogrammometern, also für Paris $75 \times 9·80989$ und für Wien $75 \times 9·80831$ Watt, d. i. ein Effect von 735·7, somit nahezu von 736 Watt zu verstehen.

Die bisher behandelten wichtigsten Maßeinheiten und ihre Beziehungen sind sonach aus folgender Tabelle zu entnehmen:

Maßsystem	Längeneinheit	Zeiteinheit	Masseneinheit	Kräfteinheit	Arbeits- einheit	Effect- einheit
(C. G. S.-) System	Centimeter (<i>cm</i>) = 0·01 Meter	Secunde	Gramm- masse = 0·001 Kilo- gramm	Dyn	Erg	Secunden- erg
(M. K. S.-) System	Meter (<i>m</i>)	Secunde	Kilo- gramm- masse (<i>M_a</i>)	Megadyn (<i>D_a</i>) = 10 ⁶ Dyn	Joule = 10 ⁷ Erg	Watt = 10 ⁷ $\frac{\text{Erg}}{\text{Secunde}}$
Terrestri- sches Maß- system	Meter (<i>m</i>)	Secunde	<i>M_t</i> = 9·81 Kilo- gramm = 9·81 <i>M_a</i>	<i>D_t</i> = Kilo- gramm- gewicht = 9·81 <i>D_a</i>	Kilo- gramm- meter = 9·81 Joule	Secunden- kilogramm- meter = 9·81 Watt und <i>HP</i> = 736 Watt

$$\text{Hiernach ist ein Grammgewicht} = \frac{1}{10^3} D_t = \frac{1}{10^3} \cdot 9\cdot81 D_a = \\ = \frac{1}{10^3} \cdot 9\cdot81 \cdot 10^5 \text{ Dyn} = 981 \text{ Dyn.}$$

Anmerkung. Es ist wohl zu beachten, dass in einer jeden algebraischen Gleichung, die in diesem Lehrbuche vorkommt, alle Buchstaben lediglich die Maßzahlen der betreffenden Größen bedeuten, und dass bei der Anwendung irgend einer dieser Gleichungen auf einen besonderen Fall die numerischen Werte aller dieser Maßzahlen sich auf solche Einheiten beziehen müssen, die durchwegs demselben Maßsystem entnommen sind. Man darf ja nicht etwa die Masseneinheit aus dem einen und die Kräfteinheit aus einem zweiten Maßsystem entlehnen, z. B. die Masseneinheit aus dem M. K. S.-System und die Kräfteinheit gleichzeitig aus dem terrestrischen System, also als Masseneinheit etwa die Kilogramm-*M_a* und gleichzeitig als Kräfteinheit das Kilogramm-gewicht *D_t* wählen. Wenn z. B. die Frage lautet: Welche Beschleunigung erzeugt eine Kraft von 5 Kilogramm, welche auf eine Masse von 3 Kilogramm einwirkt, so dass die Gleichung $p = \frac{P}{m}$ zur Anwendung gelangt, so kann man zur Lösung dieser einfachen Aufgabe sich irgend eines der drei Maßsysteme bedienen:

a) Im C. G. S.-System müsste man die Kraft in Dynen, die Masse in Grammen ausdrücken, indem man etwa folgenderweise schließt: Eine Kraft von 5 Kilogramm = 5000 Grammgewichte = 5000×981 Dyn, die Masse von 3 Kilogramm = 3000 Grammassen, sonach ist $P = 5000 \times 981$ und $m = 3000$, also die Beschleunigung $p = \frac{P}{m} = \frac{5000 \times 981}{3000}$ ausgedrückt in $\frac{\text{Centimeter}}{\text{Secunde} \times \text{Secunde}}$.

b) Im M. K. S.-System wären *D_a* und *M_a* die Einheiten. Nun ist die Kraft $5 D_t = 5 \times 9\cdot81 D_a$ und die gegebene Masse $3 M_a$, sonach $P = 5 \times 9\cdot81$ und $m = 3$ und $p = \frac{5 \times 9\cdot81}{3}$ ausgedrückt in $\frac{\text{Meter}}{\text{Secunde} \times \text{Secunde}}$.

- c) Im terrestrischen System sind D_i und M_i die Maßeinheiten. Da nun die gegebene Kraft 5 D_i und die gegebene Masse 3 $M_i = 3 \cdot \frac{1}{9.81} M_i$ ist, so ist $P = 5$ und $m = \frac{3}{9.81}$ zu setzen, sonach ist $p = \frac{P}{m} = \frac{5 \times 9.81}{3}$ wie früher.

Wenn umgekehrt die Aufgabe z. B. lautet: Wie groß ist die Kraft, welche der Masse von 7 Gramm eine Beschleunigung von 4 Kilometer pro Minute verleiht, so ist zu beachten, dass eine Grammmasse = $0.001 M_i = 0.001 \times \frac{1}{9.81} M_i$ und dass die Beschleunigung: $\frac{\text{Kilometer}}{\text{Minute} \times \text{Minute}} = \frac{10^3 \text{ Meter}}{60 \text{ Sekunden} \times 60 \text{ Sekunden}} = \frac{10^3}{60^2} \cdot \frac{\text{Meter}}{\text{Secunde}^2} = \frac{10^3}{60^2} \cdot \frac{\text{Centimeter}}{\text{Secunde}^2}$, sonach

- a) Im C.G.S.-System $m = 7$, $p = 4 \cdot \frac{10^3}{60^2}$, also $P = mp = 7 \times 4 \times \frac{10^3}{60^2}$ (ausgedrückt in Dynen).
 b) Im M.K.S.-System $m = 7 \times 0.001$, $p = 4 \times \frac{10^3}{60^2}$, also $P = mp = \frac{7 \times 4}{60^2}$ (ausgedrückt in Megadynen).
 c) Im terrestrischen System $m = 7 \times \frac{0.001}{9.81}$, $p = 4 \cdot \frac{10^3}{60^2}$, also $P = mp = \frac{7 \times 4}{9.81 \times 60^2}$ [ausgedrückt in Kilogrammgewichten (D_i)].

Da beim freien Falle $v_0 = 0$ ist und die Beschleunigung p für den Fall im luftleeren Raume g ist, so ist nach § 31 bekanntlich $s_1 = w_1 = \frac{g}{2}$, $v_1 = 2 \cdot \frac{g}{2}$, $w_2 = 3 \cdot \frac{g}{2}$, $v_2 = 4 \cdot \frac{g}{2}$, $w_3 = 5 \cdot \frac{g}{2}$, $v_3 = 6 \cdot \frac{g}{2}$ u. s. w. Ferner $s_2 = 4 \cdot \frac{g}{2}$, $s_3 = 9 \cdot \frac{g}{2}$ u. s. w., überhaupt im allgemeinen $v = gt$, $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$, $v^2 = 2gs$, $w_n = (2n - 1) \frac{g}{2}$.

Anmerkung. Der Entdecker der Gesetze des freien Falles und des Falles auf der schiefen Ebene ist bekanntermaßen Galilei.

Die Zeitwegcurve, die der drittletzten Gleichung gemäß durch die Gleichung $y = \frac{g}{2} x^2$ bestimmt ist, ist demnach eine Parabel, deren Achse die verticale Bewegungsrichtung, deren Scheitel der Anfangspunkt der Bewegung und deren Parameter $\frac{2}{g}$ ist (siehe Fig. 3). Der Abstand des Brennpunktes und der horizontalen Leitlinie vom Scheitel ist $\frac{1}{2g}$.

Mit Hilfe der Formel $v^2 = 2gs$ kann man jene Höhe $s = h$ bestimmen, durch welche ein Körper frei fallen muss, um eine gegebene Geschwindigkeit v zu erlangen; es ist nämlich

$$h = \frac{v^2}{2g} \quad (2)$$

Diese Höhe $\frac{v^2}{2g}$ bezeichnet man als die der Geschwindigkeit v entsprechende Geschwindigkeitshöhe.

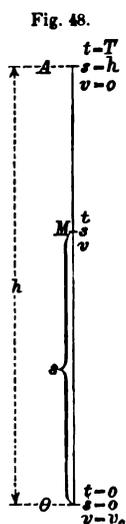
Wird ein Körper mit der Geschwindigkeit v_0 vertical nach abwärts geworfen, so ist nach den Formeln (1)—(5) des § 31 $v = v_0 + g t$, $s = v_0 t + \frac{g}{2} t^2$, $v^2 = v_0^2 + 2 g s$, $w_n = v_0 + (2 n - 1) \frac{g}{2}$ u. s. w. Die Zeitwegcurve ist der drittletzten Gleichung entsprechend ein Parabelbogen von der Form der Fig. 46 a, wenn man dieselbe um die x -Achse um 180° umgedreht sich denkt und $p = g$ setzt.

Die mechanische Arbeit beim freien Falle des Gewichtes q durch die Höhe h ist nach § 34 einfach durch das Product $q h$ bestimmt.

Wird ein materieller Punkt von der Masse m im Punkt O (Fig. 48) vertical nach aufwärts mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 (zur Zeit $t = 0$) geworfen, so muss die ganze nun folgende Bewegung eine geradlinige sein, wofern bei dieser Bewegung keine andere Kraft außer der Schwerkraft q , deren Richtung der Bewegungsrichtung entgegengesetzt, beziehungsweise ihr während der späterhin folgenden Fallbewegung gleichgerichtet ist, auf den Punkt einwirkt.

Nimmt man die Richtung vertical nach aufwärts als die positive an, so ist $P = -q = -m g$, daher $p = \frac{P}{m} = -g$ zu setzen.

Da demnach die Beschleunigung p den constanten negativen Wert $-g$ beibehält, so ist die nun folgende Bewegung eine gleichförmig geänderte, und zwar während des Steigens eine gleichförmig verzögerte, während des darauf folgenden Fallens eine gleichförmig beschleunigte. Es ist sonach den Gleichungen 1—5 im § 31 zufolge



$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 - g t \\ s &= v_0 t - \frac{g}{2} t^2 \\ v^2 &= v_0^2 - 2 g s \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

u. s. w. Im höchsten Punkte A , wo die Geschwindigkeit aus einer positiven in eine negative übergeht, ist $v = 0$. Ist nun die diesem Punkte entsprechende Zeit (die Steigdauer) durch T und der entsprechende Weg (die Steighöhe) durch h bezeichnet, so ergibt die erste und dritte der Gleichungen (3)

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{v_0}{g} \\ h &= \frac{v_0^2}{2g} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Sonach ist die Steighöhe h gleich der der Anfangsgeschwindigkeit v_0 entsprechenden Geschwindigkeitshöhe, was zu einer neuen Erklärung des Begriffes der Geschwindigkeitshöhe dienen kann.

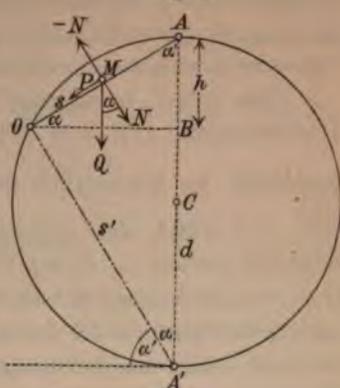
Aus der zweiten Gleichung in (3), welche bezüglich der Zeit t eine quadratische von der Form $t^2 - 2 \frac{v_0}{g} t + 2 \frac{s}{g} = 0$ ist, ergibt sich, dass dem beliebigen Punkte M (mit Ausnahme des Punktes A) der Bahn zwei Zeiten t_1 und t_2 entsprechen, nämlich die beiden Wurzelwerte dieser Gleichung $t_1 = \frac{v_0}{g} - \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - 2 \frac{s}{g}}$ und $t_2 = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - 2 \frac{s}{g}}$, und zwar ist stets $t_1 + t_2 = 2 \frac{v_0}{g} = 2 T$, somit $t_2 - T = T - t_1$, d. h. der Weg MA beim Steigen und der Weg AM beim Fallen (Fig. 48) sind gleichzeitige Wege, daher auch der Weg OA und AO . Ferner ergibt sich aus der letzten Gleichung in (3), dass $v = \pm \sqrt{v_0^2 - 2gs}$, d. h. die Geschwindigkeit, die das Bewegliche im Punkte M während der Steigbewegung hat, ist entgegengesetzt gleich der Geschwindigkeit in demselben Punkte während des Fallens, was auch für den Punkt O Giltigkeit hat u. s. w.

Die graphische Darstellung der ganzen Bewegung ist durch die Parabel Fig. 46b gegeben, wo nur $p = -g$ zu setzen ist (der punktierte Theil der Parabel [Zeitwegcurve] entspricht der Fallbewegung); der Parameter der Parabel ist $\frac{2}{g}$. Wie sich aus der symmetrischen Lage der Parabelhälften zur Achse ay' sofort zeigen lässt, dass, wie oben gefunden wurde, $t_2 - T = T - t_1$ sei, und dass die den Zeiten t_1 und t_2 entsprechenden Geschwindigkeiten entgegengesetzt gleich seien, bedarf wohl keiner weiteren Auseinandersetzung.

Ist der materielle Punkt nicht frei beweglich, sondern genöthigt, sich infolge der Schwerkraft längs einer schiefen, gegen den Horizont unter dem Winkel α geneigten Ebene zu bewegen, so ist derselbe stets dem gleichzeitigen Einflusse der Schwerkraft $Q = mg$ und des normalen Widerstandes $-N$ der schiefen Ebene unterworfen, befindet sich somit unter der Einwirkung der aus Q und $-N$ resultierenden, zur schiefen Ebene parallelen Kraft P , deren Richtung in der durch die Richtungen von Q und $-N$ gelegten Ebene gelegen ist, also in der durch den materiellen Punkt zur schiefen Ebene senkrecht gelegten Verticalebene, welche die Ebene der Fig. 49 (die Ebene des Neigungswinkels α) sein möge. Soll sich demnach der materielle Punkt geradlinig bewegen, so muss schon die anfängliche Bewegungsrichtung in der zur schiefen Ebene senkrechten Verticalebene (der Ebene der Zeichnung, welche die schiefe Ebene in der Gerade AO schneidet) gelegen sein oder aber der Punkt die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$

haben. Zerlegt man aus bekannten Gründen (siehe Fig. 49) Q in die Componenten N und P , so ist $N = Q \cos \alpha$ und $P = Q \sin \alpha$; die Kraft N wird durch die gleiche Gegenkraft (Reaction) $-N$ aufgehoben, und es nimmt die Kraft P als Resultierende der einwirkenden Kräfte Q und $-N$ einzig und allein Einfluss auf den Bewegungszustand. Da diese Kraft $P = Q \sin \alpha$, indem sich weder Q noch α ändern, eine constante Kraft ist, so ist, falls die anfängliche Bewegungsrichtung mit ihrer Richtung übereinstimmt oder ihr entgegengesetzt ist, die Bewegung eine gleichförmig geänderte, und zwar im ersten Falle eine gleichförmig beschleunigte Bewegung, die dann als „Fall auf einer schiefen Ebene“ bezeichnet wird.

Fig. 49.



Nimmt man in diesem Falle die Bewegungsrichtung von A nach O zur positiven an, so ist

$$p = \frac{P}{m} = \frac{Q \sin \alpha}{m} = g \sin \alpha$$

daher nach den bekannten Formeln des § 31 $s = v_0 t + \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2$,

$v^2 = v_0^2 + 2 g \cdot \sin \alpha \cdot s$ u. s. w. Für $v = v_0$ ist $s = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$

und $v = \sqrt{2 g \cdot s \sin \alpha}$. Ist demnach AO der Weg s in der Zeit t und $AB = h$ die Höhe der schiefen Ebene, so ist die Geschwindigkeit in O auch gegeben durch $v = \sqrt{2 g h}$.

Es ist also die Geschwindigkeit v bei gegebener Höhe h von dem Neigungswinkel α ganz unabhängig, und zwar, wenn der materielle Punkt von A nach B durch die Höhe der schiefen Ebene frei herabfiele, so würde er, wie dies die Übereinstimmung dieser Formel mit der entsprechenden des freien Falles lehrt, dieselbe Geschwindigkeit in B erlangen wie in O , jedoch die Zeit würde bei dem freien Falle einen anderen Wert t' haben, der sich aus $h = \frac{1}{2} g t'^2$ bestimmen lässt. Dividirt man diese Gleichung durch die

frühere Gleichung $s = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$ und beachtet, dass $h = s \sin \alpha$ ist, so findet man, dass $\sin \alpha = \frac{t'^2}{t^2 \sin \alpha}$, also $\frac{t'}{t} = \sin \alpha = \frac{h}{s}$ ist, d. h.

die Zeiten t' und t verhalten sich wie die entsprechenden Wege h und s .

Anmerkung. Von der hier angeführten Gleichung $s = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$ machte Galilei, der die Gesetze des Falles längs einer schiefen Ebene entdeckte, Anwendung, um durch Messung von s und α und durch Beobachtung der entsprechenden Zeit t die Beschleunigung der Schwere $g = \frac{2s}{t^2 \sin \alpha}$ zu berechnen, eine Methode, die freilich nicht zu sehr genauen Resultaten führen konnte (vergl. Bestimmung des g aus Pendelbeobachtungen).

Die Zeit T , in welcher ein materieller Punkt längs des verticalen Durchmessers $AA' = d$ (Fig. 49) einer beliebigen Kugelfläche frei herabfällt, ist bekanntlich durch $T = \sqrt{\frac{2d}{g}}$ bestimmt. Denkt man sich nun durch den Anfangs- oder Endpunkt dieses Durchmessers beliebige Sehnen in dieser Kugelfläche gezogen, z. B. $AO = s$, bezw. $OA' = s'$ und längs dieser Sehnen als den vorgeschriebenen Bahnen materielle Punkte unter der Einwirkung der Schwerkraft in Bewegung, so zwar, dass die Anfangsgeschwindigkeit in dem jeweiligen oberen Endpunkte der entsprechenden Sehne, d. i. in A , bezw. O , nämlich $v_0 = 0$ ist, so wäre zufolge der obigen Formel $s = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$, bezw. $s' = \frac{1}{2} g \sin \alpha' \cdot t^2$ (wenn α' der Neigungswinkel von $A'O$ gegen den Horizont ist), oder, da $s = d \sin \alpha$, bezw. $s' = d \sin \alpha'$ ist, so ist stets $d = \frac{1}{2} g t^2$, daher $t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$, sonach $t = T$, d. h. alle durch den Anfangs- oder Endpunkt des verticalen Durchmessers einer beliebigen Kugelfläche geführten Sehnen derselben werden von den längs dieser Sehnen herabfallenden materiellen Punkten in derselben Zeit durchlaufen, wie der Durchmesser beim freien Falle; es sind sonach alle diese unzähligen Sehnen der Kugelfläche gleichzeitige Bahnen. Würden sich demnach unzählige materielle Punkte vom Ruhezustande aus längs der unzähligen, von A ausgehenden Strahlen unter der Einwirkung der Schwere gleichzeitig in Bewegung setzen, so würden sie in ihrer Gesamtheit zu jeder Zeit auf einer Kugelfläche gelegen sein, deren höchster Punkt A ist, und deren Durchmesser d stetig zunimmt, die sich sonach stetig erweitert.

Ertheilt man einem materiellen Punkte eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 , die die Richtung von O gegen M hin (siehe Fig. 49) hat, so bewegt sich derselbe zunächst längs der schiefen Ebene, und zwar längs der Geraden OMA , die der Durchschnitt mit der zur schiefen Ebene senkrechten Verticalebene ist, bergauf. Nimmt man diese ursprüngliche Bewegungsrichtung zur positiven an, so ist offenbar die aus der Schwerkraft Q und dem normalen Widerstande $-N$ resultierende Kraft P negativ in Rechnung zu bringen, daher $p = -\frac{P}{m} = -\frac{Q \sin \alpha}{m} = -g \sin \alpha$. Es werden dann für diese Bewegung

von O über M bis zu einem gewissen höchsten Punkt A (wo $v = 0$ und $t = T$ ist), welche, da p einen constanten, und zwar negativen Wert hat, eine gleichförmig verzögerte Bewegung ist, und für die darauf folgende gleichförmig beschleunigte Bewegung bergab offenbar dieselben Gesetze wie für die analoge, durch Fig. 48 dargestellte Bewegung Giltigkeit haben, wofern man nur in den entsprechenden Formeln überall statt g einsetzt: $g \sin \alpha$. So ist z. B. $T = \frac{v_0}{g \sin \alpha}$, $L = OA = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}$, $t_2 - T = T - t_1$ u. s. w.

§ 36. Reibungswiderstand.

Die Erfahrung lehrt, dass während der Bewegung eines jeden schweren festen Körpers M längs irgend einer horizontalen Fläche E , welche die Grenzebene eines zweiten etwa ruhenden festen Körpers K ist, wegen der unvermeidlichen Rauheit sowohl dieser Fläche E , als auch der Berührungsfläche des Körpers M die Geschwindigkeit des Körpers M , wenn auch allen Punkten desselben die gleiche parallel zu dieser Fläche E gerichtete Anfangsgeschwindigkeit ertheilt wird, nicht die gleiche bleibt, wie dies unter der Voraussetzung eines bloßen normalen Widerstandes sein müsste, indem ja das Gewicht oder auch irgend eine andere auf den Körper während dessen Bewegung etwa wirkende, zur Ebene E normale Druckkraft N durch den entgegengesetzt gleichen normalen Widerstand $-N$ der Fläche E aufgehoben würde. Man muss im Gegentheile, wie die Erfahrung lehrt, um den Körper in geradliniger gleichförmiger Bewegung zu erhalten, auf den Körper M in der Richtung der Bewegung noch eine gewisse Kraft R wirken lassen, und man ist demnach nach § 33 bemüht, auch einen stets der Bewegungsrichtung entgegengesetzten, von der Einwirkung des Körpers K auf den Körper M herrührenden, zu der Unterstütsungsfläche E parallelen, also tangentialen Widerstand $-R$ der rauhen Berührungsflächen vorauszusetzen, den man, wenn alle Berührungspunkte des Körpers M , wie hier vorausgesetzt wird, zur Unterstütsungsebene parallele Bahnen beschreiben, den kinetischen Reibungswiderstand der gleitenden Reibung nennt. Nach dem Principe der Gegenwirkung wirkt dann auf den Körper K infolge der Gegenwirkung des Körpers M die Gegenkraft $+R$.

Es ist demnach, um den längs der Ebene gleitenden Körper M wie einen freibeweglichen behandeln zu können, nothwendig, außer dem normalen Widerstande $-N$ noch diesen tangentialen Widerstand $-R$ zu den einwirkenden äußeren Kräften hinzuzufügen. Würden die Gleitungsflächen vollkommen glatt und eben sein, wie dies auch früher stets vorausgesetzt wurde, so wäre $R = 0$. Ist der Körper K

in Bewegung, so hat man nur die relative Bewegung des Körpers M in Bezug auf den Körper K in Betracht zu ziehen; der Reibungswiderstand $-R$ ist der Richtung dieser relativen Bewegung entgegengesetzt. Dies ist auch für die relative Bewegung des Körpers K , bezüglich des Körpers M , die der früheren entgegengesetzt ist, und bei welcher sonach die Gegenkraft $+R$ als Reibungswiderstand auftritt, gültig. Stimmen die Bewegungen der Körper K und M überein, so dass die Körper in relativer Ruhe sind, so ist $R = 0$.

Nach den von Coulomb durch Versuche ermittelten Gesetzen ist diese Kraft R , beziehungsweise der Reibungswiderstand $-R$ wohl von der Beschaffenheit der gleitenden Fläche des Körpers M und jener der Grenzfläche E des Körpers K , längs welcher das Gleiten stattfindet (also von der materiellen Beschaffenheit der Körper K und M und der Rauheit der erwähnten Flächen) und von der Größe des normalen Druckes N abhängig, aber nahezu sowohl von der Größe der Berührungsflächen (Reibungsflächen), als auch von der Geschwindigkeit der Bewegung (wenn dieselbe nicht zu gering ist) unabhängig, und zwar ist, so lange sich die Beschaffenheit der erwähnten Reibungsflächen nicht ändert, die Kraft R dem normalen Drucke N annähernd direct proportional, so dass das Verhältnis $\frac{R}{N} = f$ einen nahezu constanten Wert hat. Diese Verhältniszahl bezeichnet man als den Coefficienten der kinetischen Reibung (im Gegensatze zu dem an Zahlwert etwas größeren Coefficienten der statischen Reibung, der dem Übergange von der relativen Ruhe in den Bewegungszustand entspricht).

Ist der Körper M bloß (während der Bewegung) dem Einflusse seines eigenen Gewichtes Q unterworfen und die unterstützende Grenzfläche E des ruhenden Körpers K schief geneigt, und ist ϱ jener durch Versuche bestimmbare Neigungswinkel der Ebene E gegen den Horizont, bei welchem der Körper M , wenn man demselben irgend eine Geschwindigkeit ertheilt, gleichförmig herabgleitet, so ist in diesem Falle die früher erwähnte, zur Erhaltung der gleichförmigen Bewegung nothwendige Kraft R keine andere als die mit der Bewegungsrichtung gleichgerichtete Componente des Gewichtes Q , also $R = Q \sin \varrho$, während der Normaldruck N (d. i. die zweite Componente) durch $N = Q \cos \varrho$ bestimmt ist, so dass $f = \frac{R}{N} = \frac{Q \sin \varrho}{Q \cos \varrho} = \tan \varrho$ ist. Den so bestimmten Winkel ϱ nennt man den (kinetischen) Reibungswinkel, und es ist der letzten Gleichung entsprechend der Reibungscoefficient stets gleich der trigonometrischen Tangente des Reibungswinkels.

Wenn hier und auch späterhin (in der Dynamik des materiellen Punktes) von der Bewegung eines Körpers die Rede ist, so ist darunter streng genommen

stets nur die Bewegung des sogenannten Massenmittelpunktes zu verstehen, indem, wie späterhin nachgewiesen werden soll, sich der Massenmittelpunkt eines jeden Körpers stets so bewegt, wie sich ein materieller Punkt, dessen Masse der gesamten Masse des Körpers gleich ist, bewegen würde, wofern denselben solche Kräfte angreifen würden, die den sämtlichen auf den Körper wirkenden Kräften gleich und mit denselben gleichgerichtet sind.

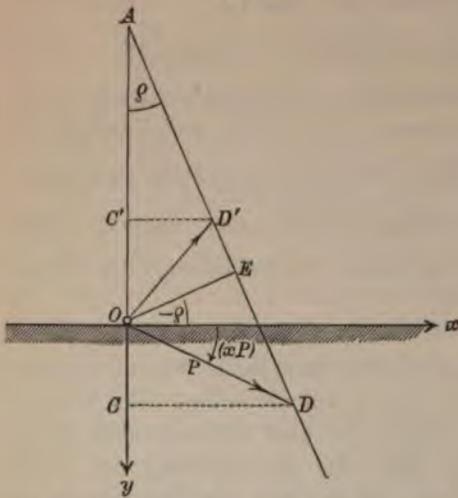
1. Bewegt sich demnach ein schwerer Körper vom Gewichte Q bloß unter dem Einflusse des Reibungswiderstandes $-R$ längs einer horizontalen Unterstützungsebene, so ist, wenn die Bewegungsrichtung zur positiven gewählt wird, die bewegende Kraft $P = -R = -fQ$, daher $p = -\frac{fQ}{m} = -fg$. Seine Bewegung ist demgemäß, so lange der Reibungcoefficient f , demnach auch die Beschleunigung p als constant vorausgesetzt werden kann, eine gleichförmig verzögerte, also $v = v_0 - fgt$, $v^2 = v_0^2 - 2fgs$, $s = v_0t - \frac{1}{2}fgt^2$, wenn durch v_0 die Anfangsgeschwindigkeit bezeichnet wird. Der Körper kommt daher nach der Zeit $T = \frac{v_0}{fg}$ und nach Zurücklegung des Weges $L = \frac{v_0^2}{2fg}$ zur Ruhe.

2. Soll sich dieser Körper gleichförmig längs der horizontalen Unterstützungsebene bewegen, so muss auf denselben eine Kraft P einwirken, deren horizontale Componente dem Reibungswiderstande $-R = -fN$ das Gleichgewicht hält, also die Richtung der Bewegung und die Größe $R = fN$ hat. Nimmt man die Bewegungsrichtung zur Richtung der positiven x -Achse und die Richtung der Schwerkraft Q zur positiven Richtung der y -Achse an (Fig. 50), so ist die Verticalcomponente der Kraft P durch $P \sin(xP)$, daher der zur Ebene normale, vertical nach abwärts gerichtete Druck durch $N = Q + P \sin(xP)$ und die Horizontalcomponente der Kraft P durch $R = P \cos(xP)$ bestimmt, demnach ist $P \cos(xP) = f(Q + P \sin(xP))$ und $P = \frac{fQ}{\cos(xP) - f \sin(xP)}$. Setzt man $f = tg \varrho$, wo ϱ den Reibungswinkel bedeutet, so findet man $P = \frac{Q \sin \varrho}{\cos[(xP) + \varrho]}$, woraus sich der zu einer gleichförmigen Bewegung nothwendige Wert der Kraft P bestimmen lässt. Da P den absoluten Zahlwert der Kraft bezeichnet und ϱ ein spitzer Winkel ist, so muss, wenn eine gleichförmige Bewegung erfolgen soll, $(xP) + \varrho$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ gelegen sein, und da R nicht negativ sein darf, so darf auch (xP) nicht kleiner als $-\frac{\pi}{2}$ sein. Das Minimum für P , nämlich $P = Q \sin \varrho$, ergibt sich für $\cos[(xP) + \varrho] = 1$, also für $(xP) + \varrho = 0$, somit für $(xP) = -\varrho$. Der Winkel $(x, OE) = -\varrho$ (Fig. 50) ist daher der

vorteilhafteste Richtungswinkel der Zugkraft, und deshalb bezeichnet man den Reibungswinkel ϱ mitunter auch als den „Zugwinkel“.

Graphisch lässt sich diese Aufgabe sehr einfach lösen. Stellt nämlich AO (Fig. 50) die Größe des Gewichtes und OC , bzw. OC' die beliebig angenommene Verticalcomponente der Kraft P , somit AC , bzw. AC' den Normaldruck dar, so muss die Horizontalcomponente, die den Reibungswiderstand überwinden und demselben daher an Größe gleich sein muss, durch die Länge

Fig. 50.



sein muss, durch die Länge $f. AC = AC \cdot \operatorname{tg} \varrho$, bzw. $AC' \cdot \operatorname{tg} \varrho$ dargestellt sein. Construirt man daher im Punkte A eine Gerade $AD'D$, die unter dem Winkel ϱ gegen die Verticale Ay geneigt ist, und im Punkte C , bzw. C' die horizontale Kathete $CD = AC \cdot \operatorname{tg} \varrho$, bzw. $C'D' = AC' \cdot \operatorname{tg} \varrho$, so muss dieselbe die Horizontalcomponente der Kraft P darstellen. Durch Zusammensetzung von OC und CD (bzw. OC' und $C'D'$) ergibt sich die Linie

OD , bzw. OD' , welche die Kraft P darstellt. Der kleinste Wert der Linie OD ist durch die Senkrechte auf AD , nämlich OE gegeben, und in diesem Falle ist der Neigungswinkel der Krafrichtung OE gegen die Horizontale durch $-\varrho$ bestimmt, da $Ox \perp Oy$ und $OE \perp AD$ ist. In diesem Falle ist der Minimalwert der Kraft P aus dem Dreiecke AOE bestimmbar durch $OE = AO \cdot \sin \varrho$, also wie früher $P = Q \sin \varrho$. In allen Fällen muss der Endpunkt D der die Kraft P darstellenden Strecke OD unterhalb A in der Geraden $AD'D$ gelegen sein, wenn eine gleichförmige Bewegung stattfinden soll.

3. Es möge schließlich die Bewegung längs einer schiefen Ebene untersucht werden, wenn die Reibung mit in Rechnung gezogen und der Reibungscoefficient als constant angenommen wird. Der Neigungswinkel der schiefen Ebene gegen den Horizont sei α .

Wirkt außer dem Gewichte Q des Körpers noch eine äußere Kraft, deren absoluter Zahlwert P sei, auf den Körper ein, so kann aus bekannten Gründen eine geradlinige Bewegung längs der Länge der schiefen Ebene nur dann erfolgen, wenn die Richtung der Kraft P in einer zur schiefen Ebene senkrechten Verticalebene (der Ebene der Zeichnung Fig. 51) gelegen ist.

Es sei die Längsrichtung der schiefen Ebene, und zwar jene nach aufwärts zur positiven Richtung der x -Achse und die Richtung normal zur schiefen Ebene nach abwärts (die Richtung des normalen Druckes N) zur positiven Richtung der y -Achse eines orthogonalen Achsensystems gewählt; es ist dann offenbar

$$(xQ) = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Der Reibungswiderstand fN hat stets die der Bewegungsrichtung entgegengesetzte Richtung. Bezeichnet man demnach

durch R_x die X -Komponente der Resultierenden aus den Kräften P , Q und fN und durch R_y die Y -Komponente derselben (d. i. den Normaldruck N), so ist

$$\begin{aligned} R_x &= P \cos (xP) + Q \cos (xQ) + fN \cos \left(\frac{\pi}{0}\right) = \\ &= P \cos (xP) - Q \sin \alpha \mp fN, \end{aligned}$$

wo das obere Zeichen sich hier und auch späterhin stets auf die Bewegung von O nach M (also bergauf), das untere Zeichen aber stets auf die Bewegung längs der schiefen Ebene nach abwärts bezieht. Ferner ist

$$R_y = N = P \sin (xP) + Q \sin (xQ) = P \sin (xP) + Q \cos \alpha \quad (4)$$

Setzt man diesen Wert in die vorletzte Gleichung ein, so findet man

$$R_x = P [\cos (xP) \mp f \sin (xP)] - Q [\sin \alpha \pm f \cos \alpha] \quad (5)$$

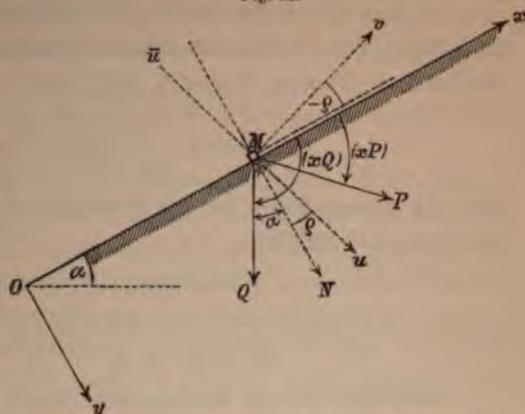
Die Kraft $R_y = N$ wird durch den entgegengesetzten Widerstand $-N$ der schiefen Ebene aufgehoben, so dass R_x die resultierende Kraft darstellt und, wenn m die Masse des Körpers bezeichnet, die resultierende Beschleunigung p gegeben ist durch

$$p = R_x : m = R_x : \frac{Q}{g} = \frac{R_x}{Q} \cdot g \quad (6)$$

Setzt man in (5) statt f die trigonometrische Tangente des Reibungswinkels ϱ ein, setzt also $f = \tan \varrho = \frac{\sin \varrho}{\cos \varrho}$, so ergibt sich

$$R_x = \frac{P \cos ([xP] \pm \varrho) - Q \sin [\alpha \pm \varrho]}{\cos \varrho} \quad (7)$$

Fig. 51.



Die Bedingung für eine gleichförmige Bewegung längs der schiefen Ebene ist die, dass die Resultierende R_x stets den Wert Null beibehalten müsse.

a) Soll also zunächst ein gleichförmiges Herabgleiten längs der Länge MO der schiefen Ebene erfolgen, so muss der Gleichung (7) zufolge

$$P \cos [(xP) - \varrho] = Q \sin (\alpha - \varrho), \text{ also}$$

$$P = Q \frac{\sin (\alpha - \varrho)}{\cos [(xP) - \varrho]} \quad (8)$$

sein. In diesem Falle ist der Normaldruck auf die schiefe Ebene der Gleichung (4) zufolge

$$\begin{aligned} N &= P \sin (xP) + Q \cos \alpha = \\ &= Q \frac{\sin (xP) \sin (\alpha - \varrho) + \cos \alpha \cos [(xP) - \varrho]}{\cos [(xP) - \varrho]} = Q \frac{\cos \varrho \cos [(xP) - \alpha]}{\cos [(xP) - \varrho]} \end{aligned}$$

Weil die aus (8) bestimmbare Kraft P , um das geringste vergrößert, ein Hinabgleiten verhindert, bezeichnet man dieselbe in der technischen Mechanik meist als „erhaltende Kraft“.

Der Minimalwert der Kraft P entspricht nach (8) dem Falle, in welchem $(xP) = \varrho$ ist, und zwar ist dann $P = Q \sin (\alpha - \varrho)$, wobei vorausgesetzt ist, dass $\alpha > \varrho$ ist.

Wirkt die Kraft P parallel zur schiefen Ebene bergauf, beziehungsweise bergab, so ist $(xP) = 0$, bezw. $(xP) = \pi$ zu setzen, somit nach (8)

$$P = Q \frac{\sin (\alpha - \varrho)}{\cos \varrho}, \text{ bezw. } P = Q \frac{\sin (\varrho - \alpha)}{\cos \varrho} \text{ und } N = Q \cos \alpha.$$

Es muss P diesen Wert haben (und offenbar $\alpha > \varrho$, bezw. $\varrho > \alpha$ sein), wenn das Herabgleiten ein gleichförmiges sein soll.

Wirkt die Kraft P horizontal, so ist $(xP) = \alpha$ zu setzen, und demnach ist dann $P = Q \operatorname{tg} (\alpha - \varrho)$ und $N = Q \frac{\cos \varrho}{\cos (\alpha - \varrho)}$. Ist $\varrho > \alpha$, so muss für diesen Fall $(xP) = \pi + \alpha$ und nach (8) $P = Q \operatorname{tg} (\varrho - \alpha)$ gesetzt werden.

Für $\alpha = \varrho$ ist nach (8) $P = 0$, d. h. das gleichförmige Herabgleiten findet schon infolge der Schwerkraft allein statt.

b) Soll ein gleichförmiges Aufsteigen längs der Länge der schiefen Ebene erfolgen, so ist der Gleichung (7) und (4) zufolge

$$\left. \begin{aligned} P \cos [(xP) + \varrho] &= Q \sin (\alpha + \varrho), \\ \text{also } P &= Q \frac{\sin (\alpha + \varrho)}{\cos [(xP) + \varrho]} \\ \text{und } N &= Q \frac{\cos \varrho \cos [(xP) - \alpha]}{\cos [(xP) + \varrho]} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Jedenfalls muss in diesem Falle, da P hier stets positiv anzunehmen ist, $\cos [(xP) + \varrho]$ positiv, also $-\frac{\pi}{2} < (xP) + \varrho < \frac{\pi}{2}$ sein, somit in Fig. 51 die Kraft P nach der rechten Seite der Geraden $u\bar{u}$, die gegen die Normale der schiefen Ebene unter dem Reibungswinkel ϱ geneigt ist, gerichtet sein. Diese Kraft P nennt man bei technischen Anwendungen im Gegensatze zur früheren „erhaltenden Kraft“ mitunter $\alpha\alpha'$ $\epsilon\xi\sigma\chi\eta\nu$ „bewegende Kraft“.

Die Kraft P hat zufolge (9) ihren kleinsten Wert, wenn $\cos [(xP) + \varrho] = 1$, also $(xP) = -\varrho$ ist. Es hat dann die Kraft P die Richtung Mv (Fig. 51). Also auch bei der schiefen Ebene ist wie bei der Bewegung längs einer horizontalen Ebene (siehe Fig. 50) der vortheilhafteste Richtungswinkel der „bewegenden“ Kraft P gegen die Ebene ein dem Reibungswinkel ϱ gleicher Winkel, weshalb dieser Winkel, wie schon früher erwähnt wurde, auch „Zugwinkel“ genannt wird.

Wirkt die Kraft parallel zur Länge der schiefen Ebene nach aufwärts, so ist $(xP) = 0$ zu setzen, also nach (9) $P = Q \frac{\sin(\alpha + \varrho)}{\cos \varrho}$ und $N = Q \cos \alpha$.

Ist die Richtung der den Körper bergauf bewegenden Kraft P die horizontale, so ist $(xP) = \alpha$, demnach nach (9)

$$P = Q \cdot \text{tang}(\alpha + \varrho) \text{ und } N = Q \frac{\cos \varrho}{\cos(\alpha + \varrho)}$$

Jedenfalls ist in diesem Falle eine gleichförmige Bewegung nach aufwärts nur dann möglich, wenn $\alpha + \varrho < \frac{\pi}{2}$, also $\alpha < \frac{\pi}{2} - \varrho$ ist.

c) Hat die Anfangsgeschwindigkeit v_0 die positive Richtung Ox , oder ist $v_0 = 0$ und ist $R_x = \frac{P \cos [(xP) + \varrho] - Q \sin(\alpha + \varrho)}{\cos \varrho}$ positiv, also $P \cos [(xP) + \varrho] > Q \sin(\alpha + \varrho)$, so ist die Bewegung nach aufwärts eine beschleunigte, und zwar, wenn sowohl P , als auch (xP) constant ist, eine gleichförmig beschleunigte und ihre Beschleunigung zufolge (6)

$$p = g \cdot \frac{\frac{P}{Q} \cos [(xP) + \varrho] - \sin(\alpha + \varrho)}{\cos \varrho} \quad (10)$$

d) Hat die Anfangsgeschwindigkeit v_0 wieder die positive Richtung, ist aber R_x negativ, also $P \cos [(xP) + \varrho] < Q \sin(\alpha + \varrho)$, so ist die Bewegung nach aufwärts eine gleichförmig verzögerte und die Retardation durch den absoluten Zahlwert von p in (10) bestimmt.

Wirkt keine äußere Kraft außer der Schwerkraft ein, ist also $P = 0$, so ist

$$p = -g \cdot \frac{\sin(\alpha + \varrho)}{\cos \varrho};$$

es kommt also der Körper bei dieser gleichförmig verzögerten Bewegung nach der Zeit $T = -\frac{v_0}{p} = \frac{v_0}{g} \cdot \frac{\cos \varrho}{\sin(\alpha + \varrho)}$ und nach Zurücklegung des Weges $L = -\frac{v_0^2}{2p} = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \frac{\cos \varrho}{\sin(\alpha + \varrho)}$ entweder dauernd oder für einen Augenblick zur Ruhe, um im letzteren Falle seine Bewegung nach abwärts zu beginnen (vergl. *e* und *f*).

e) Hat die Anfangsgeschwindigkeit v_0 die negative Richtung von M gegen O hin oder findet das Hinabgleiten vom Ruhezustande aus statt, so ist nach (7)

$$R_x = \frac{P \cos[(xP) - \varrho] - Q \sin(\alpha - \varrho)}{\cos \varrho}$$

zu setzen. Ist demnach R_x negativ, also $P \cos[(xP) - \varrho] < Q \sin(\alpha - \varrho)$, so ist die Bewegung nach abwärts eine gleichförmig beschleunigte und ihre Beschleunigung nach (6) durch

$$p = g \frac{\frac{P}{Q} \cos[(xP) - \varrho] - \sin(\alpha - \varrho)}{\cos \varrho} \quad (11)$$

bestimmt.

Ist $P = 0$, so ist $p = -g \frac{\sin(\alpha - \varrho)}{\cos \varrho}$, also ein beschleunigtes Hinabgleiten mit dieser Beschleunigung nur dann möglich, wenn $\alpha > \varrho$ ist.

f) Ist die Anfangsgeschwindigkeit abermals negativ und ist R_x positiv, also $P \cos[(xP) - \varrho] > Q \sin(\alpha - \varrho)$, so ist das Hinabgleiten ein gleichförmig verzögertes und die Retardation durch (11) bestimmt.

Ist $P = 0$, so ist nach (11) $p = -g \frac{\sin(\alpha - \varrho)}{\cos \varrho} = g \frac{\sin(\varrho - \alpha)}{\cos \varrho}$.

Es findet demnach im letzten Falle ein gleichförmig verzögertes Gleiten nach abwärts dann statt, wenn $\varrho > \alpha$ ist, und zwar kommt der Körper nach Zurücklegung des Weges $L = \frac{v_0^2}{2p} = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \frac{\cos \varrho}{\sin(\varrho - \alpha)}$ zur Ruhe.

§ 37. Die Probleme der Dynamik der geradlinigen, ungleichförmig geänderten Bewegung.

Der für eine jede geradlinige Bewegung giltigen Gleichung $P = mp = m \cdot \frac{dv}{dt}$ entsprechend kann eine ungleichförmig geänderte Bewegung, für welche bekanntlich die Beschleunigung $p = \frac{dv}{dt}$ einen

variablen Wert hat, nur dann stattfinden, wenn die resultierende Kraft P , die auf den materiellen Punkt von der constanten Masse m entweder in der Richtung der Bewegung oder in der entgegengesetzten continuierlich einwirkt, einen veränderlichen Wert hat. Je nachdem der algebraische Wert von P zu- oder abnimmt, nimmt auch in demselben Verhältnisse die Beschleunigung p zu oder ab, und zwar ist nach § 33 die Bewegung eine ungleichförmig beschleunigte oder eine ungleichförmig verzögerte, je nachdem die Richtung der Kraft und die Bewegungsrichtung übereinstimmen, also P und v gleich bezeichnet sind, oder aber die beiden Richtungen entgegengesetzt, also P und v ungleich bezeichnet sind.

Die bei einer jeden ungleichförmig geänderten geradlinigen Bewegung zur Anwendung kommenden Gesetze finden in den im § 34 abgeleiteten drei allgemeinen dynamischen Grundgleichungen, nämlich:

$$P = m p, \int_0^t P dt = m v - m v_0, \int_0^s P ds = \frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} \text{ und den drei}$$

kinematischen Grundgleichungen (a) S. 104, nämlich: $ds = v \cdot dt$,

$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, v \cdot dv = p \cdot ds \text{ ihren Ausdruck. Ist demnach — was}$$

bei den meisten zur Untersuchung gelangenden besonderen Bewegungen der Fall ist — das Gesetz, nach welchem die Intensität der resultierenden, auf einen materiellen Punkt von bekannter Masse m einwirkenden Kraft P im Verlaufe der Bewegung sich ändert, durch eine Gleichung ausgedrückt, welche die Art der Abhängigkeit der Kraft von einer oder zweien der anderen veränderlichen, bei jeder Bewegung zur Betrachtung kommenden Größen (nämlich der Zeit t , dem Wege s und der Geschwindigkeit v) kennen lernt, und ist ferner (um die Integrationsconstanten zu bestimmen) der Bewegungszustand in irgend einem bestimmten Punkte der Bahn (für welchen man gewöhnlich die Zeit gleich Null annimmt) bekannt, so lässt sich mittels der Anwendung der oben angeführten allgemeinen Gleichungen die besondere Bewegung, wofern die entsprechenden Integrationen überhaupt ausführbar sind, in allen ihren Phasen genau verfolgen.

Am klarsten ist der Bewegungsmodus, wie dies schon im § 3 auseinandergesetzt wurde, durch die Beziehungsgleichung zwischen dem Wege s und der Zeit t bestimmt, und es geht daher meist das Streben dahin, mit Zuhilfenahme der obigen Gleichungen — nach Ausführung der entsprechenden Integrationen — für s schließlich einen Ausdruck zu erhalten, in welchem die Zeit t allein als Variable enthalten ist, kurz s als eine bestimmte Function der Zeit t auszudrücken.

Es mögen hier nun im allgemeinen die Methoden, nach welchen man in den verschiedenen möglichen Fällen zu diesem Ziele gelangt, besprochen werden.

a) Ist zunächst das Gesetz der besonderen in Betracht zu ziehenden Bewegungsform durch eine bestimmte Beziehung zwischen Kraft und Weg bestimmt, also P als eine eindeutige Function von s gegeben, etwa $P = F(s)$, so wende man jene der sechs allgemeinen Grundgleichungen an, in welchen diese Variablen P und s enthalten

sind, nämlich: $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_0^s P ds = \int_0^s F(s) ds$. Durch Ausführung

der letzteren Integration ergibt sich, wofern v_0 gegeben ist, v als Function von s , also $v = f(s)$. Zu demselben Resultate würde man übrigens auch gelangen, wenn man von der kinematischen Grundgleichung $v dv = p \cdot ds = \frac{P}{m} ds = \frac{F(s) ds}{m}$ ausgeht und dieselbe integriert.

Nachdem $v = f(s)$ bestimmt wurde, hat man von jener der Grundgleichungen Anwendung zu machen, in welcher diese Variablen s und v vorkommen, nämlich $ds = v dt$. Es ist demnach nach Sonderung der Variablen $dt = \frac{ds}{f(s)}$, und die Integration dieser Gleichung führt, nachdem die Integrationsconstante (hier, wie auch in allen späteren Fällen) durch die Anwendung des gefundenen allgemeinen Resultats auf den bestimmten Punkt der Bahn, für welchen der Bewegungszustand gegeben ist, bestimmt worden ist, zu der Schlussgleichung von der Form $t = \varphi(s)$, aus welcher sich im allgemeinen auch umgekehrt s als Function von t bestimmen lässt.

b) Ist die Kraft P , daher auch $\frac{P}{m}$, d. i. p als eine eindeutige Function der Geschwindigkeit v gegeben, also $p = \Phi(v)$, so kann man die kinematische Gleichung $v \cdot dv = p \cdot ds = \Phi(v) \cdot ds$ benutzen, derzufolge $ds = \frac{v}{\Phi(v)} dv$ ist; durch die Integration der letzten Gleichung ergibt sich $v = f(s)$, und weiterhin hat man so zu verfahren wie in a) — oder aber man geht von der Grundgleichung $dv = p \cdot dt$ aus, aus welcher sich ergibt $dt = \frac{dv}{p} = \frac{dv}{\Phi(v)}$, durch deren Integration $v = \psi(t)$ gefunden wird, und man bestimmt aus den so gefundenen Gleichungen $v = f(s)$ und $v = \psi(t)$ durch Gleichsetzung von $f(s)$ und $\psi(t)$ schließlich s als Function von t .

Übrigens kann man auch direct aus der letztgefundenen Gleichung $v = \psi(t)$, indem $ds = v dt = \psi(t) dt$ ist, durch Integration s als Function von t finden.

c) Ist $P = f(t)$ gegeben, so ist etwa zu benutzen $mv - mv_0 = \int_0^t P dt = \int_0^t f(t) dt$. Aus dieser Gleichung ergibt sich dann $v = \psi(t)$, und im übrigen hat man so vorzugehen wie im letzten Falle.

d) Ist die Kraft P als eine für alle vorkommenden Werte der Variablen s, v, t einwertige Function des Weges s und der Geschwindigkeit v bestimmt, also auch $p = F(v, s)$ gegeben, so ist zu setzen $v dv = p ds$, also $v dv = F(v, s) ds$. Durch die Integration der letzteren Differentialgleichung findet man $v = f(s)$, und weiterhin hat man zu verfahren wie bei *a*).

e) Ist die Kraft als eine einwertige Function der Geschwindigkeit v und der Zeit, also auch $p = f(v, t)$ gegeben, so setze man $dv = p dt$, demnach $dv = f(v, t) dt$, woraus sich durch Integration $v = \psi(t)$ ergibt, und verfähre weiterhin wie in *b*).

f) Ist schließlich die Kraft, daher auch die Beschleunigung p ausgedrückt durch den Weg und die Zeit oder im allgemeinsten Falle durch Weg, Geschwindigkeit und Zeit, also $p = \varphi(s, t)$, bezw. $p = \psi(s, t, v)$, so ist auch $\frac{d^2 s}{dt^2} = \varphi(s, t)$, bezw. $\frac{d^2 s}{dt^2} = \psi(s, t, \frac{ds}{dt})$, wo die Function ψ für alle vorkommenden Systeme der Werte von s, t, v einwertig ist; durch Integration der letzten Differentialgleichung zweiter Ordnung ergibt sich dann s als Function von t , nachdem die zwei Integrationsconstanten mittels des bekannten Bewegungszustandes in einer bestimmten Lage gefunden worden sind.

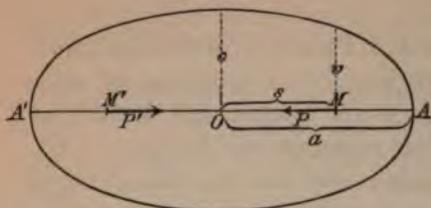
Einige in den nächsten Paragraphen behandelte Beispiele mögen die hier im allgemeinen angedeuteten Methoden veranschaulichen.

§ 38. I. Beispiel. Geradlinige schwingende Bewegung eines materiellen Punktes.

Eine continuierliche Kraft P , die bei jeder Lage des beweglichen materiellen Punktes M stets gegen einen Punkt von unveränderlicher Lage, mit anderen Worten gegen einen fixen Punkt O hin- oder von demselben weggerichtet ist, also stets die Richtung MO oder die Richtung OM hat, bezeichnet man als Centralkraft und den Punkt O als den Centralpunkt. Im ersten Falle ist die Centralkraft eine anziehende und der Punkt O heißt das Attractionscentrum, im zweiten Falle aber ist die Centralkraft eine abstoßende, und der Punkt O ist das Repulsionscentrum. Findet nun eine Attraction statt und fällt die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit in die Gerade, die den materiellen Punkt in dieser Anfangslage mit den Attractionscentrum O verbindet, oder aber ist die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null, so muss sich das Bewegliche, da die anfängliche Bewegungsrichtung dann mit der Richtung der Kraft P übereinstimmt, beziehungsweise ihr entgegengesetzt ist, stetig längs dieser Geraden bewegen. Entfernt sich der materielle Punkt M bei dieser geradlinigen Bewegung vom Punkte O , wie dies bei der Bewegung von O

nach A oder von O nach A' (Fig. 52) der Fall ist, so muss, weil dann die Bewegung und die Kraft P entgegengesetzt gerichtet sind, die Bewegung eine verzögerte sein, bis im allgemeinen in einem gewissen Punkte A , bezw. A' die Geschwindigkeit für einen Augenblick

Fig. 52.



Null wird; nähert sich aber bei der hierauf folgenden Bewegung der Punkt M dem Attractionscentrum, mag diese Bewegung von A nach O oder von A' nach O stattfinden, so stimmt die Richtung der Kraft stets mit der Bewegungsrichtung überein, und die Bewegung

ist daher eine beschleunigte. Es muss demnach stets, mag die Anfangsgeschwindigkeit welche der beiden Richtungen immer haben, oder mag sie auch (z. B. im Punkte A oder A') Null sein, eine hin- und hergehende geradlinige Bewegung von A über die Gleichgewichtslage O nach A' und zurück über O gegen A hin u. s. w. sich ergeben, bei welcher die Geschwindigkeit im Punkte O stets ihren Maximalwert c erlangt, mit welchem der materielle Punkt infolge der Trägheit stets von der einen Seite des Punktes O nach der anderen Seite hinübergeht. Eine solche hin- und hergehende Bewegung in einer bestimmten Bahn nennt man eine schwingende oder oscillierende (vibrierende) Bewegung, den Punkt O (die Gleichgewichtslage) den Mittelpunkt der Bewegung, die Bewegung von A nach A' und zurück nach A (mitunter auch z. B. bei einem Pendel bloß die hin-, beziehungsweise bloß die hergehende Bewegung allein) heißt eine Schwingung oder Oscillation (Vibration) und die zu einer Schwingung nothwendige Zeit T die Schwingungsperiode oder Schwingungszeit (Oscillationsdauer). Die variable Entfernung MO vom Bewegungscentrum O (also der Weg s , wenn s , wie hier stets vorausgesetzt werden soll, im Punkte O gleich Null angenommen wird) heißt die Elongation des Punktes. Jedem algebraischen Werte der Elongation und der Geschwindigkeit für irgend eine Zeit t entspricht eine bestimmte Schwingungsphase des schwingenden Punktes. Die größte Elongation OA , bezw. OA' , die bei der Schwingung erreicht wird, heißt die Schwingungsamplitude oder Schwingungsweite (welchen Namen man auch manchmal, wie wohl selten, der Entfernung der beiden äußersten Lagen AA' beilegt). Das Geschwindigkeitsmaximum c , das der materielle Punkt stets im Punkte O erlangt, wird öfters als Schwingungsintensität bezeichnet.

Die Kraft P und die Elongation (der Weg) s sind stets entgegengesetzt bezeichnet, denn befindet sich M auf der etwa als positiv

angenommenen Seite OA des Punktes O — gleichgiltig, ob sich der materielle Punkt dabei in positiver oder negativer Richtung bewegt — so hat die Kraft die negative Richtung, nämlich gegen O hin, und ist umgekehrt die Elongation negativ, z. B. in M' , so hat die Kraft P' eine positive Richtung.

Die Art der schwingenden Bewegung hängt ab von der einwirkenden Kraft P . Behielte diese z. B., wenn das Bewegliche sich auf der positiven Seite von O befindet, stets den constanten Wert $-P$, dagegen den constanten Wert $+P$ bei der Bewegung auf der negativen Seite von O , so wäre die Bewegung gegen O hin stets eine gleichförmig beschleunigte und während der Entfernung von O eine gleichförmig verzögerte; ist dagegen die Kraft P veränderlich, so erfolgt stets eine ungleichförmig beschleunigte Bewegung gegen O hin und eine ungleichförmig verzögerte Bewegung von O weg.

Die denkbar einfachste Art, in welcher sich die Kraft P mit der Elongation s ändert, findet offenbar dann statt, wenn die Kraft P der jeweiligen Elongation s stets direct proportional ist, und diese einfachste Art der schwingenden Bewegung, die man eine einfache (pendelartige) Schwingung, einfache harmonische Bewegung (Sinusbewegung) nennt, möge hier nach einer der im § 37 angeführten Methoden, und zwar (wegen ihrer Wichtigkeit für die theoretische Physik) eingehend untersucht werden.

Da $p = \frac{P}{m}$ ist und die Masse m des schwingenden materiellen Punktes als unveränderlich vorausgesetzt werden muss, so ist in unserem Falle auch die Beschleunigung $p = \frac{P}{m}$ dem Wege s direct proportioniert, also das Verhältniss $\frac{p}{s} = \frac{P}{ms}$ ein constantes, und zwar hat dasselbe, da P und s stets ungleich bezeichnet sind, einen negativen Wert. Bezeichnet man daher die Quadratwurzel aus dem absoluten Zahlwerte dieses Verhältnisses durch k , so ist

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{ms} &= -k^2 \\ p &= -k^2 s \end{aligned} \right\} (1)$$

Anmerkung. Der vorletzten Gleichung entsprechend ist die Wegkraftcurve eine durch den Punkt O gehende Gerade und demnach die mechanische Arbeit bei dieser Bewegung durch die Fläche eines zum Theile von dieser Geraden und von der Abscissenachse begrenzten rechtwinkligen Dreiecks, beziehungsweise Trapezes darstellbar.

Da in unserem Falle die Kraft P als eine Function des Weges s gegeben ist, so ist das vorliegende Beispiel nach der Methode des § 37 a zu behandeln.

Wählt man zum Anfangspunkte der Zeit t jenen Moment, in welchem der schwingende Punkt eben durch O nach der positiven Seite OA (Fig. 52) sich bewegt, so ist $v_o = c$, daher

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = \int_0^s P ds = - \int_0^s m k^2 s ds = - m \frac{k^2 s^2}{2},$$

somit

$$v^2 = c^2 - k^2 s^2 \quad (2)$$

Anmerkung. Zu derselben Gleichung würde man von der Grundgleichung $p \cdot ds = v dv$ ausgehend gelangen, wenn der Wert von p aus (1) in dieselbe eingesetzt und hierauf die einfache Integration ausgeführt würde, oder auf elementarem Wege, wenn man bei der Anwendung des Principes der lebendigen Kraft die oben erwähnte Fläche des Dreiecks, das den Wert der in der Zeit t geleisteten mechanischen Arbeit darstellt, dessen Basis nämlich s und dessen Höhe $P = -mk^2 s$ ist, in Rechnung bringt.

Die Gleichung (2) lehrt, dass während des ganzen Verlaufes der schwingenden Bewegung gleichen Zahlwerten von s auch gleiche Zahlwerte von v entsprechen und umgekehrt. Es kehrt demnach in den Punkten M und M' (Fig. 52), welche die gleiche Entfernung von O haben, stets der gleiche absolute Geschwindigkeitswert wieder, mag die Bewegung in welcher Richtung immer vor sich gehen, ferner muss dieselbe Schwingungsintensität (für welche nämlich $s = o$ ist) stets in O wiederkehren; auch muss, weil in den Punkten A und A' die Geschwindigkeit stets den Wert Null erhält, die Entfernung dieser beiden äußersten Punkte von O , d. i. die Amplitude stets die gleiche bleiben und beiderseits die gleiche sein. Bezeichnet man durch a den absoluten Zahlwert dieser constanten Amplitude, so lehrt die Anwendung der allgemeinen Gleichung (2) auf die Punkte A und A' dass

$$o = c^2 - k^2 a^2, \text{ also} \\ c = ka \quad (3)$$

sei. Es ist demnach die Schwingungsintensität bei den verschiedenen unter der Einwirkung derselben Kraft vor sich gehenden Bewegungen stets der Amplitude direct proportioniert. Durch Substitution von (3) in (2) ergibt sich

$$v = \pm k \sqrt{a^2 - s^2}, \quad (4)$$

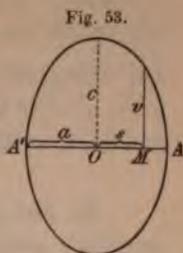
und durch Division von (4) und (3) findet man

$$\frac{s^2}{a^2} + \frac{v^2}{c^2} = 1 \quad (5)$$

Die Weggeschwindigkeitscurve ist demnach eine Ellipse von der Form Fig. 52, wenn $a > c$, also nach (3) $k < 1$, oder von der Form Fig. 53, wenn $a < c$, also $k > 1$ ist.

Von der Gleichung (4) ausgehend, kann man nun nach § 37 a mit Zuhilfenahme der Grundgleichung $ds = v \cdot dt$ durch Integration s als Function von t ausdrücken, oder aber man gelangt auf folgendem einfacheren und instructiveren Wege zu demselben Ziele:

Da das variable s^2 stets kleiner ist als a^2 , so lässt sich stets ein mit s sich ändernder Hilfswinkel φ derart bestimmen, dass $\sin \varphi = \frac{s}{a}$, somit zufolge der Gleichung (5) $\cos^2 \varphi = \frac{v^2}{c^2}$ ist. Da nun durch den

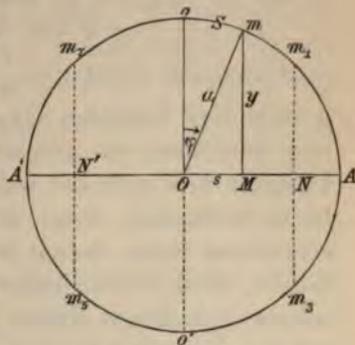


Sinus allein ein Winkel φ noch nicht vollkommen bestimmt ist, sondern zur Determination von φ noch das Zeichen des $\cos \varphi$ bekannt sein muss, so sei die Bestimmung hinzugefügt, dass das Zeichen von $\cos \varphi$ mit dem Zeichen von v übereinstimmen, demnach $\cos \varphi = \frac{v}{c}$ sein möge. Es bestehen dann die den Hilfswinkel φ bestimmenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} s &= a \sin \varphi \\ v &= c \cos \varphi \end{aligned} \right\} (6)$$

Bei der der Zeit $t = 0$ (für welche, da auch $s = 0$ ist, in Übereinstimmung mit (6) $\varphi = 0$ angenommen sei) unmittelbar folgenden Bewegung von O nach A (Fig. 52), wo s und v positiv bleiben, ist demnach φ ein Winkel des ersten Quadranten, bei der darauffolgenden Bewegung von A nach O , wo s positiv, v negativ ist, ein Winkel des zweiten, bei der Bewegung von O nach A' , wo s und v negativ sind, des dritten Quadranten u. s. w. Beschreibt man daher mit dem Radius $OA = OA' = a$ einen Kreis, dessen Centrum O ist, und nimmt als Anfangsschenkel des Winkels φ den nach der positiven Seite der Geraden AA' geführten, auf AA' senkrechten Radius Oo (Fig. 54) an, so bewegt sich der auf der Kreislinie gelegene Endpunkt m des zweiten Schenkels, je nachdem die Bewegung des schwingenden Punktes von O nach A , bzw. von A über O nach A' , bzw. von A' nach O u. s. w. stattfindet, in der Kreisperipherie von o nach A , bzw. von A über o' nach A' , bzw. von A' nach o u. s. w.

Fig. 54.



Zugleich ersieht man aus der ersten der Gleichungen (6), dass die jeweilige Lage M des schwingenden Punktes stets durch die orthogonale Projection dieses Endpunktes m des beweglichen Schenkels auf die Bahn AA' des schwingenden Punktes bestimmt ist.

Durch Differentiation der ersten Gleichung in (6) ergibt sich, dass $v = \frac{ds}{dt} = a \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}$ ist, welche Gleichung, mit der zweiten Gleichung (6) verglichen, lehrt, dass $c = a \cdot \frac{d\varphi}{dt}$, also $d\varphi = \frac{c}{a} \cdot dt = k \cdot dt$ ist.

Die Integration dieser letzten Gleichung, bei welcher, da für $t = 0$ auch $\varphi = 0$ ist, die Integrationsconstante Null ist, führt zu dem einfachen Resultat

$$\varphi = kt \quad (7)$$

Es ändert sich sonach der Winkel φ (das Argument der Bewegung) proportional der Zeit t (φ stellt daher die Zeit graphisch dar) und der Endpunkt m des Endschenkels desselben oder ein mit der jeweiligen Lage dieses Endpunktes m übereinstimmender fingierter Punkt m , dessen in der Zeit t zurückgelegte Bahn $S = a \cdot \varphi = a \cdot kt = ct$ ist, bewegt sich demnach in der Kreisperipherie gleichförmig mit jener Geschwindigkeit c , die der Schwingungsintensität stets an Größe gleichkommt.

Dieser ideelle Punkt, der während einer jeden Periode (Schwingungsdauer) T die ganze Kreisperipherie in gleichförmiger Bewegung zurücklegt, kann mit Vortheil dazu verwendet werden, um auf constructivem Wege die Lage des schwingenden Punktes zu einer beliebigen Zeit zu bestimmen. Will man z. B. diese für die Zeiten $\frac{1}{8} T, \frac{3}{8} T, \frac{5}{8} T, \frac{7}{8} T$ u. s. w. bestimmen, so hat man nur die vier Kreisquadranten $oA, Ao', o'A', A'o$ in den Punkten m_1, m_3, m_5, m_7 zu halbieren und die orthogonalen Projectionen dieser Punkte auf AA' , d. i. die Punkte N und N' (Fig. 54) zu ermitteln.

Da $v = c \cos \varphi$ und die Ordinate des Punktes m , nämlich $y = a \cos \varphi$ ist, so ist $v = \frac{c}{a} y = k \cdot y$; es ist demnach die Ordinate y stets der variablen Geschwindigkeit direct proportioniert und dient somit zur graphischen Darstellung dieser Geschwindigkeit. Übrigens ließe sich der wahre Wert der Geschwindigkeit constructiv leicht bestimmen, wenn man einen zweiten mit dem früheren concentrischen Kreis, dessen Radius der Schwingungsintensität c gleichkommt, construieren, ferner den früheren Radius Om bis zum Durchschnitte mit diesem Kreise verlängern und diesen Durchschnittspunkt auf den Nebendurchmesser oOo' projicieren würde. Ist μ diese Projection, so ist durch $O\mu$ die Geschwindigkeit dem Zeichen und Zahlwerte nach gegeben.

Substituiert man den Wert (7) in die Gleichungen (6), so findet man

$$\left. \begin{aligned} s &= a \sin kt \\ v &= \frac{ds}{dt} = c \cdot \cos kt = ka \cdot \cos kt \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Die Bezeichnung „Sinusbewegung“ für die harmonische Bewegung ist dadurch gerechtfertigt, dass zufolge (8) der Weg s stets proportional ist dem Sinus eines Vielfachen (nämlich des k -fachen) der Zeit t .

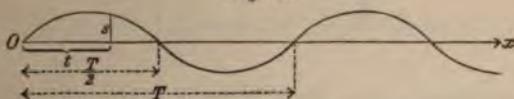
Die Gleichungen (8) drücken den Weg und die Geschwindigkeit als Function der Zeit t aus. Man könnte, wie früher erwähnt wurde, zu diesen Gleichungen, wie es gewöhnlich geschieht, auch direct von der Gleichung (4) aus, nämlich durch Integration von

$$dt = \pm \frac{ds}{k \sqrt{a^2 - s^2}} = \pm \frac{1}{k} \cdot \frac{d\left(\frac{s}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{s}{a}\right)^2}}$$

gelangen, jedoch müssen bei dieser Integration entsprechend dem Doppelzeichen zwei auf die positive und negative Bewegungsrichtung bezügliche Fälle unterschieden werden, welche aber beide dann nach erfolgter Bestimmung der beiden entsprechenden Integrationsconstanten zu demselben Resultate führen, nämlich zu der Gleichung $t = \frac{1}{k} \arcsin \frac{s}{a}$, welche mit der ersten Gleichung in (8) übereinstimmt.

Die Zeitwegcurve (Fig. 55), deren Gleichung nach (8) $y = a \cdot \sin kx$ ist, ist eine sogenannte Sinoide (Sinuslinie oder einfache Wellenlinie).

Fig. 55.



Die Oscillationsdauer T ist zugleich die Zeit, innerhalb welcher der fingierte Punkt m (Fig. 54) bei seiner gleichförmigen, mit der Geschwindigkeit c vor sich gehenden Bewegung die Kreisperipherie, also den Weg $2a\pi$ zurücklegt; es ist demnach $T = \frac{2a\pi}{c}$, oder da $c = ka$ ist, so findet man

$$T = \frac{2\pi}{k} \quad (9)$$

Wenn die Zeit von irgend einem beliebigen Werte t an um $T = \frac{2\pi}{k}$ sich ändert, so ändert sich zufolge (7) das Argument φ um $kT = k \cdot \frac{2\pi}{k} = 2\pi$; ändert sich aber ein Winkel um 2π , so muss bekanntlich derselbe Sinus und Cosinus wiederkehren, und es muss sonach den Gleichungen (6) zufolge auch dasselbe s und v wiederkehren. Man kann daher die Schwingungsperiode T auch als die kürzeste Zeit definieren, nach welcher dieselben (algebraischen) Werte der Elongation und Geschwindigkeit, kurz dieselben Schwin-

gungszustände stets wiederkehren, was übrigens schon aus Fig. 54 sofort ersehen werden kann.

Die Gleichung (9), in welcher die Amplitude a und die Schwingungsintensität c nicht enthalten ist, lehrt, dass bei der in Betracht gezogenen harmonischen Bewegung die Schwingungsperiode T von der Größe der Schwingungsweite und der Schwingungsintensität völlig unabhängig ist, sondern bloß abhängig ist von der Art der einwirkenden Kraft, nämlich nur von dem constanten Factor k der Gleichung (1). Dies lässt sich einfach erklären; denn, ertheilt man dem materiellen Punkte einen bei derselben Attractionskraft kräftigeren Impuls, demnach auch eine größere Schwingungsweite, so ist wohl der in derselben Zeit t zurückgelegte Weg $s = a \cdot \sin kt$ ein größerer, aber genau in demselben Verhältnisse wird den Gleichungen $c = ka$ und $v = c \cdot \cos kt$ entsprechend auch die Geschwindigkeit v in jedem Zeitmomente größer, so dass die Schwingungsperiode dadurch keine Änderung erleidet.

Substituiert man den aus (9) sich ergebenden Wert $k = \frac{2\pi}{T}$ in die Gleichungen (8), so bekommen diese die in der Wellenlehre, Akustik, Optik, der Theorie der elektrischen Ströme u. s. w. gebräuchlichere Form

$$\left. \begin{aligned} s &= a \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} \\ v &= \frac{2a\pi}{T} \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Der Überschuss ε des Verhältnisses $\frac{t}{T}$ über die nächst kleinere ganze Zahl n , welche nämlich angibt, wie oft die ganze Schwingungsperiode T in der Zeit t noch enthalten ist, wird die Schwingungsphase genannt. Für zwei beliebige Zeiten, denen dieselbe Schwingungsphase ε entspricht, haben nach dem oben Gesagten die Elongationen s denselben algebraischen Wert und desgleichen die Geschwindigkeiten v .

Für die Zeit $t' = t + \frac{T}{2}$ ergibt sich aus den Gleichungen (10) $s' = -a \sin 2\pi \frac{t}{T} = -s$ und $v' = -\frac{2a\pi}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T} = -v$. Solche Schwingungszustände, denen entgegengesetzt gleiche Werte der Elongationen und der Geschwindigkeiten entsprechen, nennt man entgegengesetzte Schwingungszustände.

Die Phasendifferenz, die zwei entgegengesetzten Schwingungszuständen entspricht, ist demnach $\frac{1}{2}$, d. i. die Hälfte einer Schwingungsperiode.

Verlegt man den Zeitanfangspunkt in jenen Moment, in welchem die Geschwindigkeit des schwingenden Punktes Null ist, derselbe also

in A , d. i. im größten Abstände a von O sich befindet, und bezeichnet man die von diesem Momente gerechnete Zeit durch τ , so ist offenbar in (10) $t = \frac{T}{4} + \tau$ zu setzen, wodurch die Gleichungen (10) die Form

$$\left. \begin{aligned} s &= a \cdot \cos 2\pi \frac{\tau}{T} = a \cdot \cos k\tau \\ v &= -\frac{2a\pi}{T} \sin 2\pi \frac{\tau}{T} = -ka \cdot \sin k\tau \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

annehmen.

Anmerkung. Wird die schwingende Bewegung dadurch eingeleitet, dass dem Punkte ein Impuls derart ertheilt wird, dass zur Zeit $\tau = 0$ der algebraische Wert der Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist, während die zugehörige Elongation s_0 ist, und bedeutet τ die Zeit von diesem Momente an gerechnet, so denke man sich etwa analog den Formeln 1–10 die schwingende Bewegung schon vor diesem Momente stattfindend, so dass für diesen Moment die Schwingungsphase, also auch die diesem Momente zugehörige Zeit t' — von dem den Formeln 1–10 zugrunde liegenden Zeitanfangspunkte aus gerechnet — durch die aus (8) sich ergebenden Werte von v_0 und s_0 bestimmt ist; es ist dann offenbar das frühere t um t' größer als τ , sonach

$$\begin{aligned} t &= t' + \tau \\ s_0 &= a \sin kt' \\ v_0 &= ak \cdot \cos kt' = \pm k \sqrt{a^2 - s_0^2} \end{aligned}$$

Es ist daher

$$a = \sqrt{s_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} \quad (12)$$

Aus dieser Gleichung ist die Amplitude bestimmbar und dann durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin kt' &= \frac{s_0}{a} \\ \cos kt' &= \frac{v_0}{ak} \end{aligned}$$

kt' , somit t' selbst leicht zu bestimmen, so dass dann von den Gleichungen

$$(13) \begin{cases} s = a \sin k(t' + \tau) = a \sin kt' \cos k\tau + a \cos kt' \sin k\tau = s_0 \cos k\tau + \frac{v_0}{k} \sin k\tau \\ v = ak \cos k(t' + \tau) = ak \cos kt' \cos k\tau - ak \sin kt' \sin k\tau = v_0 \cos k\tau - ks_0 \sin k\tau \end{cases}$$

Anwendung gemacht werden kann.

Die Schwingungsintensität c und Schwingungsdauer T sind gegeben durch

$$(14) \begin{cases} c = ka = \sqrt{v_0^2 + k^2 s_0^2} \\ T = \frac{2\pi}{k} \end{cases}$$

§ 39. 2. Beispiel. Geradlinige Bewegung, für welche die resultierende Kraft a) $P = -mg \frac{a^2 + v^2}{c^2}$, b) $P = mg \frac{a^2 - v^2}{c^2}$, c) $P = -mg \frac{v^2}{c^2}$ ist.

Unter g ist in diesen Ausdrücken die Beschleunigung des freien Falles zu verstehen, a und c sind bestimmte Constante. Als positive Richtung sei die Bewegungsrichtung angenommen.

Die in diesen drei Fällen stattfindenden Bewegungen, bei welchen für den als gegeben anzusehenden Anfangszustand $t = 0$, $s = 0$ und $v = v_0$ ist, sind nach der Methode des § 37 b zu behandeln.

a) Es sei $P = -mg \frac{a^2 + v^2}{c^2}$, daher

$$p = \frac{P}{m} = -g \frac{a^2 + v^2}{c^2} \dots (1)$$

Da die Kraft P der positiven Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist, so ist die Bewegung eine verzögerte, und zwar, da P mit der variablen Geschwindigkeit v sich ändert, eine ungleichförmig verzögerte. Der absolute Zahlwert der Kraft wird mit abnehmender Geschwindigkeit immer geringer und nähert sich, je weniger sich v von Null unterscheidet, desto mehr dem Grenzwerte $-mg \frac{a^2}{c^2}$.

Um die Beziehung zwischen Weg und Geschwindigkeit zu ermitteln, hat man auszugehen von der Grundgleichung $v dv = p \cdot ds$. Es ist demnach

$$v dv = -g \frac{a^2 + v^2}{c^2} ds \text{ und}$$

$$ds = -\frac{c^2}{g} \frac{v dv}{a^2 + v^2} = -\frac{c^2}{2g} \frac{d(v^2)}{a^2 + v^2}$$

Da im letzten Bruche der Zähler das Differential des Nenners ist, so ergibt die Integration

$$s = -\frac{c^2}{2g} \cdot \log \text{nat} (a^2 + v^2) + C$$

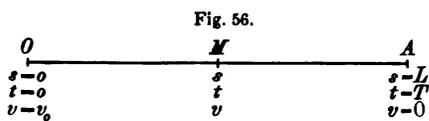
Für den Anfangszustand im Punkte O (Fig. 56) ist somit

$$0 = -\frac{c^2}{2g} \log \text{nat} (a^2 + v_0^2) + C.$$

Bestimmt man aus der letzten Gleichung den Wert der Integrationsconstante C und substituiert denselben in die vorletzte allgemeine Gleichung, so findet man

$$s = \frac{c^2}{2g} \log \text{nat} \frac{a^2 + v_0^2}{a^2 + v^2} \dots (2)$$

Der bewegliche Punkt komme in A (Fig. 56), nachdem derselbe bei einer ungleichförmig verzögerten Bewegung den Weg $OA = L$ in der Zeit T zurückgelegt hat, für einen Augenblick zur Ruhe, so dass $v = 0$ wird.



Durch Specialisierung der allgemeinen Gleichung (2) für diesen Punkt A findet man

$$L = \frac{c^2}{2g} \cdot \log \text{nat} \left(1 + \frac{v_0^2}{a^2} \right) \dots (3)$$

Drückt man mittels der Gleichung (2) umgekehrt die Geschwindigkeit v durch den Weg s aus, so ergibt sich

$$v^2 = (a^2 + v_0^2) \cdot e^{-\frac{2gs}{c^2}} - a^2 \dots (4)$$

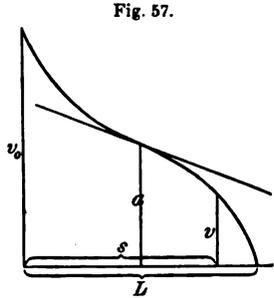
wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Die Discussion der Gleichung (4) lehrt, dass die Weggeschwindigkeitscurve die Form der Fig. 57 hat, es hat nämlich die Curve, wenn $v_0 > a$ ist, einen Wendepunkt, und zwar dort, wo die Geschwindigkeit den Wert a hat.

Um die Beziehung zwischen der Geschwindigkeit v und der Zeit t auf Grund der Gleichung (1) zu ermitteln, bringe man die Grundgleichung $dv = p \cdot dt$ zur Anwendung. Es ist demgemäß

$$dv = -g \frac{a^2 + v^2}{c^2} \cdot dt \text{ und } dt = -\frac{c^2}{g} \frac{dv}{a^2 + v^2}$$

daher auch $dt = -\frac{c^2}{ag} \frac{d\left(\frac{v}{a}\right)}{1 + \left(\frac{v}{a}\right)^2}$. Die Integration



dieser Gleichung ergibt

$$t = -\frac{c^2}{ag} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v}{a} + C, \text{ somit}$$

$$\frac{v}{a} = \operatorname{tg} \left(\frac{ag}{c^2} C - \frac{ag}{c^2} t \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{ag}{c^2} C - \operatorname{tg} \frac{ag}{c^2} t}{1 + \operatorname{tg} \frac{ag}{c^2} C \cdot \operatorname{tg} \frac{ag}{c^2} t}$$

Für den Punkt O (Fig. 56) ist somit $\frac{v_0}{a} = \operatorname{tg} \frac{ag}{c^2} C$.

Durch Substitution des letzten Wertes in die vorletzte Gleichung wird die Integrationskonstante eliminiert, und man findet

$$v = a \cdot \frac{\frac{v_0}{a} - \operatorname{tg} \frac{ag}{c^2} t}{1 + \frac{v_0}{a} \operatorname{tg} \frac{ag}{c^2} t} \dots (5)$$

Wendet man diese allgemeine Gleichung auf den Punkt A an, so findet man $\frac{v_0}{a} - \operatorname{tg} \frac{ag}{c^2} T = 0$, daher

$$T = \frac{c^2}{ag} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v_0}{a} \dots (6)$$

Die Beziehung zwischen dem Wege s und der Zeit t würde durch Substitution von (5) in (2) sich ergeben. Man kann aber auch direct — von der Gleichung (5) (vergl. §. 37 b) ausgehend — durch Einsetzung in die dynamische Grundgleichung $ds = v dt$ den Weg durch die Zeit ausdrücken. Multipliziert man zu diesem Zwecke Zähler und Nenner in (5) mit $\cos \frac{ag}{c^2} t$, so wird

$$ds = v \cdot dt = a \cdot \frac{\frac{v_0}{a} \cos \frac{ag}{c^2} t - \sin \frac{ag}{c^2} t}{\frac{v_0}{a} \sin \frac{ag}{c^2} t + \cos \frac{ag}{c^2} t} \cdot dt$$

Bezeichnet man den Nenner des letzten Bruches durch x , so dass $x = \frac{v_0}{a} \sin \frac{ag}{c^2} t + \cos \frac{ag}{c^2} t$ ist, so ist $dx = \left[\frac{v_0}{a} \cdot \frac{ag}{c^2} \cdot \cos \frac{ag}{c^2} t - \frac{ag}{c^2} \sin \frac{ag}{c^2} t \right] dt$ daher der frühere Zähler $\left(\frac{v_0}{a} \cdot \cos \frac{ag}{c^2} t - \sin \frac{ag}{c^2} t \right) \cdot dt = \frac{c^2}{ag} \cdot dx$ und dem-

nach $ds = \frac{c^2}{g} \cdot \frac{dx}{x}$. Integriert man die letzte Gleichung und beachtet, dass für $t = 0$ auch $s = 0$ und $x = 1$, somit $\log \text{nat } x = 0$ wird, so dass die Integrationsconstante verschwindet, so ergibt sich als das gesuchte Schlussresultat

$$s = \frac{c^2}{g} \log \text{nat } x = \frac{c^2}{g} \cdot \log \text{nat} \left[\frac{v_0}{a} \sin \frac{ag}{c^2} t + \cos \frac{ag}{c^2} t \right] \dots (7)$$

b) Es sei $P = mg \frac{a^2 - v^2}{c^2}$, wo a verschieden von Null ist.

Ist $v_0 > a$, so ist P zur Zeit $t = 0$ negativ, demnach die Bewegung eine verzögerte, die Geschwindigkeit nimmt daher ab und nähert sich dem Werte a , auch der absolute Wert der Kraft P nimmt immer mehr ab, so dass sich die Bewegung immer weniger von einer gleichförmigen unterscheidet.

Ist $v_0 = a$, so ist der Anfangswert von $P = 0$, die Bewegung ist eine gleichförmige, die Geschwindigkeit ändert sich nicht, P behält also den Wert Null, so dass die Bewegung stets gleichförmig mit der Anfangsgeschwindigkeit a vor sich gehen muss.

Ist dagegen $v_0 < a$, so ist P positiv und die Bewegung eine beschleunigte; je näher die zunehmende Geschwindigkeit dem Werte a kommt, desto weniger unterscheidet sich P von Null, demnach desto weniger die Bewegung von einer gleichförmigen.

Die Beschleunigung p ist bestimmt durch

$$p = g \cdot \frac{a^2 - v^2}{c^2} \dots (8)$$

Es ist demnach

$$v dv = p ds = g \cdot \frac{a^2 - v^2}{c^2} ds \text{ und}$$

$$ds = \frac{c^2}{g} \frac{v dv}{a^2 - v^2} = - \frac{c^2}{2g} \frac{d(a^2 - v^2)}{a^2 - v^2}$$

Durch Integration ergibt sich

$$s = - \frac{c^2}{2g} \cdot \log \text{nat} (a^2 - v^2) + C$$

Für den Anfangszustand ist

$$0 = - \frac{c^2}{2g} \log \text{nat} (a^2 - v_0^2) + C$$

Durch Subtraction der beiden letzten Gleichungen, wodurch die Integrationsconstante C eliminiert wird, erhält man

$$s = \frac{c^2}{2g} \log \text{nat} \frac{a^2 - v_0^2}{a^2 - v^2} \dots (9)$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung v^2 , so findet man

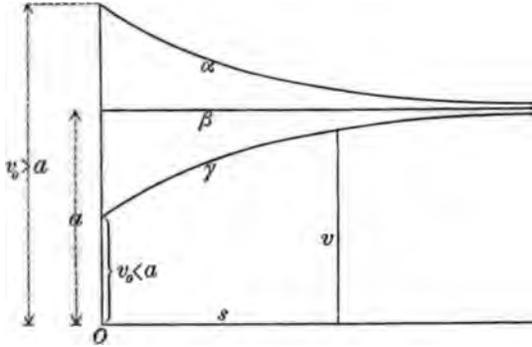
$$v^2 = a^2 - (a^2 - v_0^2) \cdot e^{-\frac{2gs}{c^2}} = a^2 + (v_0^2 - a^2) \cdot e^{-\frac{2gs}{c^2}} \dots (10)$$

Da s der ursprünglichen Voraussetzung zufolge stets positiv bleibt, so ist aus dieser Gleichung zu ersehen, dass, wenn $v_0 \geq a$ ist, v den Grenzwert a für keinen Wert des s erreichen kann; wohl ist in beiden Fällen für $\lim s = \infty$ der Grenz-

wert des letzten Factors

$\lim e^{-\frac{2gs}{c^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$, daher $\lim v = a$. Nur für $v_0 = a$ behält v stets den Wert a , wie dies schon oben erwähnt wurde. Die Weggeschwindigkeitscurven haben demnach die Form der Fig. 58 α, β oder γ , je nachdem $v_0 > a, v_0 = a$ oder $v_0 < a$ ist. Für die Curven α und γ ist die zur Abscissenachse parallele Gerade β die Asymptote.

Fig. 58.



Durch Substitution von (10) in (8) findet man

$$p = g \frac{(a^2 - v_0^2) \cdot e^{-\frac{2gs}{c^2}}}{c^2} \dots (11)$$

Aus $dv = p dt = g \frac{a^2 - v^2}{c^2} \cdot dt$ ergibt sich

$$dt = \frac{c^2}{g} \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{c^2}{2ga} \left[\frac{1}{a+v} + \frac{1}{a-v} \right] \cdot dv = \frac{c^2}{2ga} \left[\frac{d(a+v)}{a+v} - \frac{d(a-v)}{a-v} \right]$$

somit

$$t = \frac{c^2}{2ga} \left[\log \text{nat} (a+v) - \log \text{nat} (a-v) \right] + C$$

für den Anfangszustand ist

$$0 = \frac{c^2}{2ga} \left[\log \text{nat} (a+v_0) - \log \text{nat} (a-v_0) \right] + C$$

Durch Subtraction der beiden letzten Gleichungen findet man

$$t = \frac{c^2}{2ga} \log \text{nat} \frac{(a+v)(a-v_0)}{(a-v)(a+v_0)} \dots (12)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$e^{\frac{2 \frac{ag}{c^2} t}{e}} = \frac{e^{\frac{ag}{c^2} t}}{-\frac{ag}{c^2} t} = \frac{(a+v)(a-v_0)}{(a-v)(a+v_0)}$$

daher

$$v = a \cdot \frac{(a+v_0) e^{\frac{ag}{c^2} t} - (a-v_0) e^{-\frac{ag}{c^2} t}}{(a+v_0) e^{\frac{ag}{c^2} t} + (a-v_0) e^{-\frac{ag}{c^2} t}} \dots (13)$$

Durch diese Gleichung ist die Geschwindigkeit als Function der Zeit ausgedrückt.

Um schließlich auch den Weg s durch die Zeit auszudrücken, hat man entweder (13) in (9) einzusetzen oder aber die Grundgleichung anzuwenden:

$$ds = v dt = a \cdot \frac{(a + v_0) e^{\frac{ag}{c^2} t} - (a - v_0) e^{-\frac{ag}{c^2} t}}{(a + v_0) e^{\frac{ag}{c^2} t} + (a - v_0) e^{-\frac{ag}{c^2} t}} dt$$

Bezeichnet man den Nenner des letzten Bruches durch x , so ist $dx =$

$$= (a + v_0) e^{\frac{ag}{c^2} t} \cdot \frac{ag}{c^2} dt - (a - v_0) e^{-\frac{ag}{c^2} t} \cdot \frac{ag}{c^2} dt, \text{ daher}$$

$$ds = a \cdot \frac{c^2}{ag} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{c^2}{g} \cdot \frac{dx}{x}$$

somit

$$s = \frac{c^2}{g} \log \text{nat} \left[(a + v_0) e^{\frac{ag}{c^2} t} + (a - v_0) e^{-\frac{ag}{c^2} t} \right] + C$$

Für $t = 0$ ist $s = 0$, daher

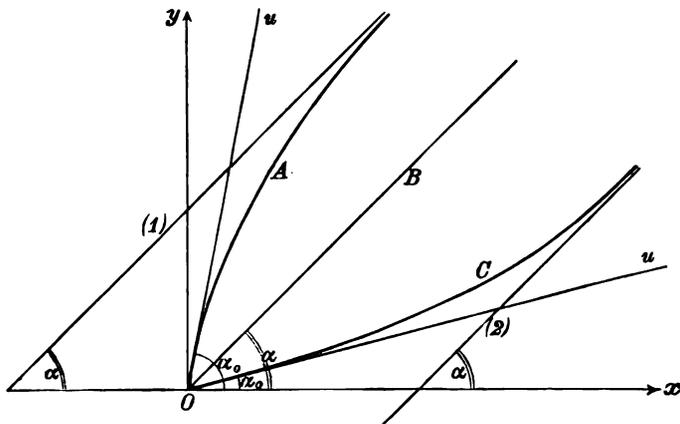
$$0 = \frac{c^2}{g} \log \text{nat} 2a + C$$

Subtrahiert man die beiden letzten Gleichungen, so wird

$$s = \frac{c^2}{g} \log \text{nat} \frac{(a + v_0) e^{\frac{ag}{c^2} t} + (a - v_0) e^{-\frac{ag}{c^2} t}}{2a} \dots (14)$$

Die Zeitwegcurve hat dieser Gleichung gemäß die Gestalt der Curve A , B oder C in der Figur 59, je nachdem $v_0 > a$, $v_0 = a$ oder $v_0 < a$ ist.

Fig. 59.



Die Winkel α_0 und α in dieser Figur entsprechen den Gleichungen $\alpha_0 = \text{arc tg } v_0$ und $\alpha = \text{arc tg } a$. Die zu der Geraden B parallelen Geraden (1) und (2) berühren asymptotisch die entsprechenden Curven.

Die Geraden u sind Tangenten an die Zeitwegcurven für den Punkt O . Den Beziehungen $v_0 > a$, $v_0 = a$, $v_0 < a$ entsprechend, ist für die Curve A $\alpha_0 > \alpha$ und für die Curve C $\alpha_0 < \alpha$. Die Asymptote (1), beziehungsweise (2) schneidet die Ordinatenachse in einem Punkte, dessen Ordinate $\frac{c^2}{g} \log \text{nat} \frac{v_0 + a}{2a}$ ist.

c) Es sei $P = -mg \frac{v^2}{c^2}$.

Da die Bewegungsrichtung positiv, die resultierende Kraft P aber negativ und variabel ist, so ist die Bewegung in diesem Falle eine ungleichförmig verzögerte, nähert sich aber mit abnehmender Geschwindigkeit immer mehr einer gleichförmigen.

Es ist die Beschleunigung

$$p = \frac{P}{m} = -g \frac{v^2}{c^2} \dots (15)$$

Demnach ist $v dv = p ds = -g \frac{v^2}{c^2} ds$ und $ds = -\frac{c^2}{g} \frac{dv}{v}$ und $s = -\frac{c^2}{g} \log \text{nat } v + C$ und da $v = v_0$ für $s = 0$ wird, so ist $\frac{c^2}{g} \log \text{nat } v_0 = C$, somit

$$s = \frac{c^2}{g} \log \text{nat } \frac{v_0}{v} \dots (16)$$

und daher

$$v = v_0 \cdot e^{-\frac{gs}{c^2}} \dots (17)$$

Man sieht sofort, dass $\lim v = 0$ für $\lim s = \infty$ wird.

Es ist ferner $dv = p dt = -g \frac{v^2}{c^2} dt$, somit

$$dt = -\frac{c^2}{g} \frac{dv}{v^2} = -\frac{c^2}{g} \cdot v^{-2} \cdot dv$$

Die Integration liefert die Gleichung

$$t = \frac{c^2}{g} \cdot \frac{1}{v} + C \text{ und da für}$$

den Anfangszustand $0 = \frac{c^2}{g} \cdot \frac{1}{v_0} + C$ ist, so führt die Subtraction der beiden letzten Gleichungen zu dem Resultat

$$t = \frac{c^2}{g} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right) \dots (18)$$

Durch Elimination der Geschwindigkeit v aus den Gleichungen (16) und (18) findet man schließlich

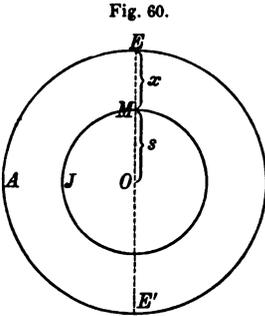
$$s = \frac{c^2}{g} \log \text{nat} \left(1 + \frac{g v_0}{c^2} t \right) \dots (19)$$

§ 40. Anwendungen der Gesetze der ungleichförmig geänderten Bewegung auf die Dynamik der Schwere.

Der freie Fall, die geradlinige Wurfbewegung und die Bewegung längs der schiefen Ebene werden als ungleichförmig geänderte Bewegungen zu betrachten sein, sobald man auf die Veränderlichkeit der Schwerkraft Rücksicht nimmt, oder wenn außer der Schwerkraft solche Kräfte, wie z. B. der Luftwiderstand wirkend angenommen werden, deren Intensität sich ändert. Die in diesen Fällen stattfindenden Bewegungen sind dann nach den bisher erläuterten Methoden zu behandeln.

a) Freier Fall in die Tiefe.

Man denke sich in der Richtung des Durchmessers EOE' (Fig. 60) der als kugelförmig angenommenen Erde einen Schacht, in welchem ein Körper herabfällt.



Denkt man sich weiter durch den beliebigen Punkt M der Bahn eine mit der Erdoberfläche concentrische Kugelfläche J gelegt und nimmt an, dass die Erde aus concentrischen Kugelschalen besteht, von denen jede in ihrer ganzen Ausdehnung die gleiche Dichte hat, so lässt sich als eine einfache Folgerung aus dem Newton'schen Gravitationsgesetze nachweisen, dass die ganze Anziehung der zwischen J und der äußersten Kugelfläche A gelegenen Schale auf den im Punkte M befindlichen Körper und überhaupt auf jeden innerhalb der Kugelfläche J befindlichen Punkt sich auf Null reducire.

Demnach ist die Anziehung P der ganzen Erde auf den Körper in M dieselbe wie die Anziehung der inneren Kugel von dem Halbmesser OM , deren Richtung MO ist.

Denkt man sich zudem die Erde gleichförmig dicht (homogen), also die ganze Erdkugel von einer Dichte, die gleich ist der mittleren Dichte der Erde (etwa $5\frac{1}{2}$ bezogen auf Wasser), so kann man aus dem Newton'schen Gesetze folgern, dass die Anziehung P der Erde auf den Körper in M , welche der Anziehung der inneren Kugel vom Radius OM gleich ist, sich so verhalten müsse wie die Masse m des fallenden Körpers, ferner wie die Größe dieser Kugel von dem Radius $OM = s$, also wie der Cubus von s und umgekehrt wie das Quadrat dieses Radius, so dass demnach P diesem Radius s direct proportioniert sein müsse. (Vom Luftwiderstande werde abgesehen.)

Es ist somit, wenn die Richtung von O nach E zur positiven gewählt wird und durch k^2 eine positive Constante bezeichnet wird,

$$P = -mk^2s \text{ und } p = -k^2s$$

Im Punkte E , wo $s = r$ ist, ist $p = -g = -9\cdot8$, daher $g = k^2r$, sonach

$$\left. \begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{g}{r}} \\ p &= -\frac{g}{r} \cdot s \end{aligned} \right\} (1)$$

Es ist demzufolge unter den angeführten Voraussetzungen die Bewegung des fallenden Körpers eine Bewegung von der im § 38 behandelten Art.

Ist in E $v = 0$, $s = r$ (Erdradius) und die Zeit $\tau = 0$, so ist den Gleichungen (1) S. 59 entsprechend

$$\left. \begin{aligned} s &= r \cdot \cos 2\pi \frac{\tau}{T} = r \cdot \cos k\tau = r \cos \tau \sqrt{\frac{g}{r}} \\ v &= -\frac{2r\pi}{T} \sin 2\pi \frac{\tau}{T} = -kr \sin k\tau = -r \sqrt{\frac{g}{r}} \sin \tau \sqrt{\frac{g}{r}} \end{aligned} \right\} (2)$$

daher ist die Fallhöhe

$$x = r - s = r \left[1 - \cos \tau \sqrt{\frac{g}{r}} \right] = 2r \left[\sin \frac{\tau}{2} \sqrt{\frac{g}{r}} \right]^2$$

Ist τ so klein, dass statt des Sinus der Winkel gesetzt werden kann, so ist $x = 2r \cdot \left(\frac{\tau}{2} \sqrt{\frac{g}{r}}\right)^2 = \frac{g}{2} \cdot \tau^2$ in Übereinstimmung mit § 35 S. 136.

Würde der Schacht die ganze Erde durchsetzen, so würde nach § 38 die Bewegung eine schwingende Bewegung mit der Amplitude $a = r$ sein, deren Centralpunkt der Erdmittelpunkt wäre. Der Körper würde im Erdcentrum mit einer Geschwindigkeit $c = ak = r \cdot \sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{rg}$ anlangen, also wenn $g = 9.8$ Meter und $r = 6370000$ Meter gesetzt wird, mit der Geschwindigkeit von 7900 Meter pro Secunde, und zwar würde er daselbst anlangen nach $\frac{1}{4}$ der Schwingungszeit $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, also nach der Zeit von $\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}}$, d. i. nach 1265 Sec. = 21 Min. 22 Sec. Wäre schon in E die Geschwindigkeit V vorhanden, so müsste zufolge der Formeln (13) und (14) S. 159, in welchen $v_0 = V$ und $s_0 = r$ zu setzen ist, $s = r \cos \tau \sqrt{\frac{g}{r}} + V \sqrt{\frac{r}{g}} \sin \tau \sqrt{\frac{g}{r}}$, $c = \sqrt{V^2 + gr}$ und $v = V \cos \tau \sqrt{\frac{g}{r}} - \sqrt{rg} \sin \tau \sqrt{\frac{g}{r}}$ u. s. w. sein.

b) Freier Fall im luftgefüllten Raume.

Der Luftwiderstand W kann (s. Hydrodynamik) als eine der Bewegungsrichtung entgegenwirkende Kraft angesehen werden, welche von der Dichte der Luft, der Gestalt des bewegten Körpers, vor allem anderen aber von der Geschwindigkeit v des Körpers abhängt. Ist die Geschwindigkeit des Beweglichen weder einerseits zu groß, noch auch andererseits zu klein, so kann man unter sonst gleichen Umständen, also bei derselben Luftdichte, derselben Körperform u. s. w. den Luftwiderstand mit großer Annäherung dem Quadrate der Geschwindigkeit direct proportioniert annehmen. Wird dies Gesetz in den hier zu behandelnden Fällen als strengrichtig angenommen, so ist dementsprechend

$$W = kv^2 \quad (3)$$

zu setzen. Dabei ist nicht nur immer die gleiche Luftdichte und Körperform angenommen, sondern auch, damit das k das gleiche bleibt, vorausgesetzt, dass der Körper stets der widerstehenden und zur Seite entweichenden Luft die gleiche Fläche darbietet. Würde nun dieser Körper mit einer solchen Geschwindigkeit c vertical nach abwärts geworfen werden, dass der entsprechende Wert des Luftwiderstandes, nämlich kc^2 dieselbe Größe erlangt wie das Gewicht des Körpers Q , so dass der letzten Gleichung zufolge $Q = kc^2$ ist, so würden sich die Kräfte Q und W das Gleichgewicht halten und das Fallen dann (vergl. § 39 b für $v_0 = a = c$) mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit c vor sich gehen. Diese Geschwindigkeit des gleichförmigen Falles c ist demnach bei derselben Körperform und derselben Dichte — der Gleichung $Q = kc^2$ zufolge — der Quadratwurzel aus dem Gewichte des Körpers direct proportional, also bei einem 4mal, 9mal u. s. w. schwereren Körper 2mal, 3mal u. s. w. größer, woraus sich sofort erklären lässt, dass Körper von größerem Gewichte unter sonst gleichen Umständen im luftgefüllten Raume schneller fallen. Bis zum Schlusse des 16. Jahrhunderts, nämlich bis zu Galileis Zeiten, glaubte man — gestützt auf die Autorität des Aristoteles, dessen Lehren das ganze naturwissenschaftliche Wissen des Mittelalters in sich begriffen —, dass unter allen Umständen (auch im luftleeren Raume) die Körper um so schneller fallen, je größer ihr Gewicht ist. Der Venetianer Benedetti (1585) war der erste, der die Behauptung auf-

stellte, dass die Fallgeschwindigkeit für alle Körper am selben Orte der Erde die gleiche sei, doch wurde diese Thatsache erst durch Galilei bekannt (der die Meinung der Aristoteliker durch Versuche und logische Gründe widerlegte) und durch die Pendelmessungen Huyghens', Newtons und besonders Bessels außer allen Zweifel gestellt (s. S. 131).

Setzt man in die Gleichung (3) den Wert $k = \frac{Q}{c^2} = \frac{mg}{c^2}$ aus der letzten Gleichung ein, so ist

$$W = mg \cdot \frac{v^2}{c^2} \dots (4)$$

Nimmt man bei dem in Betracht zu ziehenden freien Falle, beziehungsweise verticalen Wurf nach abwärts, für welch letzteren Fall die Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist, die Fallrichtung zur positiven an, so ist die bewegende Kraft P

$$P = Q - W = mg - mg \frac{v^2}{c^2} = mg \cdot \frac{c^2 - v^2}{c^2} \dots (5)$$

Es ist diese Fallbewegung demnach von der in § 39b betrachteten Bewegungform, wo nur in den Formeln 8–14 statt a die Geschwindigkeit c des gleichförmigen Falles zu setzen ist.

Ist also $v_0 > c$, so ist die Fallbewegung eine ungleichförmig verzögerte, und zwar ist, wenn die Zeit t ins Unendliche zunimmt, $\lim v = c$; ist dagegen $v_0 = c$, so ist die Fallbewegung, wie schon früher erwähnt wurde, gleichförmig; ist $v_0 < c$ wie z. B. beim freien Falle, wo $v_0 = 0$ ist, so ist die Bewegung ungleichförmig beschleunigt und wie früher $\lim v = c$. Ferner ist zufolge der Gleichung (14) S. 164

$$s = \frac{c^2}{g} \log \text{nat} \frac{(c + v_0) e^{\frac{g}{c} t} + (c - v_0) e^{-\frac{g}{c} t}}{2c} \dots (6)$$

u. s. w.

c) Wurfbewegung vertical nach aufwärts in widerstehender Luft.

Wählt man die Bewegungsrichtung zur positiven Richtung, so dass die Schwerkraft Q und der durch die Formel (4) ausgedrückte Luftwiderstand W negativ in Rechnung kommen, so ist

$$\left. \begin{aligned} P &= -Q - W = -mg - mg \frac{v^2}{c^2} = -mg \cdot \frac{c^2 + v^2}{c^2} \\ p &= \frac{P}{m} = -g \frac{c^2 + v^2}{c^2} \end{aligned} \right\} (7)$$

Die Bewegung ist sonach von der in § 39a untersuchten Art, nämlich eine ungleichförmig verzögerte, für welche nach der Formel (7), in welcher im vorliegenden Falle man $a = c$ zu setzen hat,

$$s = \frac{c^2}{g} \cdot \log \text{nat} \left[\frac{v_0}{c} \sin \frac{g}{c} t + \cos \frac{g}{c} t \right] (8)$$

ist. Ebenso gelten alle anderen Formeln des § 39a, wenn nur $a = c$ gesetzt wird.

Der Körper steigt z. B. zufolge (3) S. 160 bis zu einer Steighöhe $H = \frac{c^2}{2g} \log \text{nat} \left(1 + \frac{v_0^2}{c^2} \right)$, so dass $H < \frac{v_0^2}{2g}$, also kleiner ist als die der Wurfgeschwindigkeit v_0 entsprechende Geschwindigkeitshöhe, und zwar ist die entsprechende Steigdauer nach (6) $T = \frac{c}{g} \text{arc tg} \frac{v_0}{c}$. Nach Verlauf der Zeit T erfolgt der freie Fall nach der Formel (6) § 40, in welcher nur statt v_0 Null zu

setzen ist und statt t und s zu setzen ist $t - T$ und $H - s$, wofern t und s sich auf denselben Anfangspunkt der Zeit und des Weges beziehen sollen wie in der Formel (8), so dass

$$H - s = \frac{c^2}{g} \cdot \log \text{nat} \frac{e^{\frac{g}{c}(t-T)} - \frac{g}{c}(t-T)}{2} \quad (9)$$

Es hat sonach die Formel (8) Giltigkeit für $t < T$ und die Formel (9) für $t > T$. Die Weggeschwindigkeitscurve für die beiden aufeinanderfolgenden Bewegungen des Steigens und Fallens ergibt sich durch entsprechende Combination der Fig. 57 und Fig. 58 (letztere für $v_0 = 0$ und negative Ordinaten), so dass dieselbe die Form der

Fig. 61.

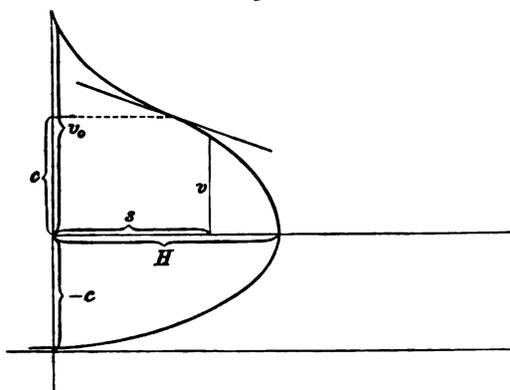


Fig. 61 annimmt, wo der oberhalb der Abscissenachse gelegene Curventheil der Steigbewegung, dagegen der unterhalb derselben gelegene der Fallbewegung entspricht. Aus der Formel (9) lässt sich leicht erschließen, dass die Zeit des Fallens, nach welcher wieder $s = 0$ wird, größer ist als die Steigdauer T , beide sind aber kleiner als $\frac{v_0}{g}$, d. i. als die Steigdauer im luftleeren Raume; die Schlussgeschwindigkeit ist

ferner, wie die Formeln des § 39 a) und b) für $a = c$ lehren, kleiner als die Wurfgeschwindigkeit v_0 u. s. w. Die Zusammenfassung der Formeln (8) und (9) setzt, wofern c in beiden als gleich angenommen wird, voraus, dass der Körper bezüglich einer horizontalen Mittelebene symmetrisch geformt ist und sich während der Bewegung nicht dreht.

Wollte man von diesen Formeln auf die des §. 35 übergehen, so müsste man den Luftwiderstand $W = 0$, demnach der Gleichung (4) zufolge $c = \infty$ setzen.

d) Bewegung eines schweren Körpers längs einer horizontalen Bahn bei Berücksichtigung der Reibung und des Luftwiderstandes.

Bezeichnet man durch R den kinetischen Reibungswiderstand und durch f den Reibungscoefficienten der gleitenden Reibung, so ist den Reibungsgesetzen zufolge im vorliegenden Falle $R = fQ = fmg$.

Nimmt man ferner die Bewegungsrichtung zur positiven Richtung an, so ist, weil der Reibungs- und Luftwiderstand stets der Bewegung entgegengesetzt gerichtet sind,

$$P = -R - W = -fmg - mg \frac{v^2}{c^2} = -mg \cdot \frac{fc^2 + v^2}{c^2}$$

daher

$$p = \frac{P}{m} = -g \cdot \frac{fc^2 + v^2}{c^2}$$

Es bestehen demnach in diesem Falle die in §. 39a) abgeleiteten Gesetze, wofern nur $a^2 = fc^2$, also $a = c\sqrt{f}$ gesetzt wird. Die Bewegung ist also eine ungleichförmig verzögerte, für welche zufolge (7) S. 162

$$s = \frac{c^2}{g} \log \text{nat} \left[\frac{v_0}{c\sqrt{f}} \sin \frac{g\sqrt{f}}{c} t + \cos \frac{g\sqrt{f}}{c} t \right]$$

ist, und für welche ebenso alle anderen in § 39a abgeleiteten Gleichungen Giltigkeit haben. Der Körper kommt nach der Zeit $T = \frac{c}{g\sqrt{f}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v_0}{c\sqrt{f}}$ und nach Zurücklegung des Weges $L = \frac{c^2}{2g} \log \operatorname{nat} \left(1 + \frac{v_0^2}{fc^2} \right)$ zur Ruhe.

Würde man von der Reibung absehen, so wäre $P = -W = -mg \frac{v^2}{c^2}$ und $p = -g \frac{v^2}{c^2}$, so dass dann die im § 39c deducierten Gleichungen zur Anwendung kommen.

e) Fall auf der schiefen Ebene bei Berücksichtigung der Reibung R und des Luftwiderstandes W .

In diesem Falle ist der Normaldruck gegeben durch $N = Q \cos \alpha$ (s. Fig. 51), daher der Reibungswiderstand $R = fN = fQ \cos \alpha$.

Die tangentielle Komponente der Schwerkraft ist $Q \sin \alpha$. Nimmt man die Bewegungsrichtung von M nach O (Fig. 51) zur positiven an, so ist

$$P = Q \sin \alpha - R - W = mg \left[\sin \alpha - f \cos \alpha - \frac{v^2}{c^2} \right]$$

Setzt man $f = \operatorname{tg} \varrho$, wo ϱ den kinetischen Reibungswinkel bedeutet, so ist demnach

$$P = mg \frac{c^2 \frac{\sin(\alpha - \varrho)}{\cos \varrho} - v^2}{c^2} \dots (10)$$

Man hat demzufolge folgende Fälle zu unterscheiden:

1. Es sei $\alpha > \varrho$, d. h. der Neigungswinkel der schiefen Ebene gegen den Horizont größer als der Reibungswinkel, so dass $\sin(\alpha - \varrho)$ positiv ist und $c \sqrt{\frac{\sin(\alpha - \varrho)}{\cos \varrho}}$ einen positiven reellen Wert hat, der durch a bezeichnet sei,

$$a = c \sqrt{\frac{\sin(\alpha - \varrho)}{\cos \varrho}}$$

Es hat dann die Gleichung (10) die Form $P = mg \frac{a^2 - v^2}{c^2}$

Es findet demgemäß die im § 39b untersuchte Bewegung statt, welche, je nachdem $v_0 > a$, $v_0 = a$ oder $v_0 < a$ ist, eine ungleichförmig verzögerte, gleichförmige oder ungleichförmig beschleunigte ist. Der besondere Fall, in welchem $v_0 = 0$ ist, ist im letzteren Falle mit inbegriffen.

Auch wenn der Luftwiderstand allein berücksichtigt wird, demnach $R = 0$, daher auch $f = 0$ und $\varrho = 0$ zu setzen ist, ist die obige Bedingung $\alpha > \varrho$ erfüllt, nur ist dann $a = c \sqrt{\sin \alpha}$.

2. Es sei $\alpha = \varrho$. In diesem Falle ist der Gleichung (10) zufolge $P = -mg \frac{v^2}{c^2}$

Die Bewegung ist die im §. 39c untersuchte verzögerte Bewegung, bei welcher $\lim v = 0$ ist.

3. Es sei $\alpha < \varrho$. In diesem Falle hat $c \sqrt{\frac{\sin(\varrho - \alpha)}{\cos \varrho}}$ einen positiven, durch a zu bezeichnenden Wert, so dass

$$a = c \sqrt{\frac{\sin(\varrho - \alpha)}{\cos \varrho}}$$

Es ist dann die resultierende Kraft P nach (10) $P = -mg \frac{a^2 + v^2}{c^2}$, welche Gleichung übereinstimmt mit der Grundgleichung des § 39a. Die Bewegung ist in diesem Falle eine ungleichförmig verzögerte, für welche die Gleichungen 1—7 des § 39 Giltigkeit haben. Der Körper kommt zufolge der

Gleichungen (3) und (6) dieses § 39 nach der Zeit $T = \frac{c^2}{ag} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v_0}{a}$ und nach Zurücklegung des Weges $L = \frac{c^2}{2g} \log \operatorname{nat} \left(1 + \frac{v_0^2}{a^2} \right)$ zur Ruhe.

f) Bewegung längs der schiefen Ebene bergauf bei Berücksichtigung der Reibung R und des Luftwiderstandes W .

Wählt man auch hier die Bewegungsrichtung, d. i. nunmehr die Richtung von O nach M (Fig. 51) zur positiven Richtung, so ist offenbar

$$P = -Q \sin \alpha - R - W = -mg \left[\sin \alpha + f \cos \alpha + \frac{v^2}{c^2} \right]$$

Setzt man für den Reibungscoefficienten f die trigonometrische Tangente des Reibungswinkels ϱ ein, so bekommt die letzte Gleichung die Form:

$$P = -mg \frac{c^2 \frac{\sin(\alpha + \varrho)}{\cos \varrho} + v^2}{c^2}$$

Bezeichnet man demnach durch a den reellen Wert

$$a = c \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \varrho)}{\cos \varrho}}, \text{ so ist } P = -mg \frac{a^2 + v^2}{c^2}$$

Die Bewegung erfolgt also nach den im § 39a erörterten Gesetzen. Die Geschwindigkeit des Körpers wird stetig abnehmen, bis derselbe nach der Zeit $T = \frac{c^2}{ag} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v_0}{a}$ und nach Zurücklegung des Weges $L = \frac{c^2}{2g} \log \operatorname{nat} \left(1 + \frac{v_0^2}{a^2} \right)$ zur Ruhe gelangt.

Sieht man von der Reibung ab, so ist nur $\varrho = 0$, daher $a = c \sqrt{\sin \alpha}$ zu setzen.

Es sei schließlich kurz bemerkt, dass, wenn in einem der in diesem Paragraph unter $b-f$ behandelten Fälle noch irgend eine äußere constante Kraft von constanten Richtung hinzutritt, die Behandlung dieses Falles in ganz analoger Weise durchzuführen ist; stets wird die Bewegung auf eine der im § 39 untersuchten Bewegungen zurückgeführt werden können.

B. Dynamik der krummlinigen Bewegung.

§ 41. Kraftcomponenten bei einer krummlinigen Bewegung.

Als die nothwendige und hinreichende Bedingung für eine geradlinige Bewegung ergaben frühere Untersuchungen (vergl. § 33), dass die Resultierende P der auf den materiellen Punkt einwirkenden Kräfte stets gleich- oder entgegengesetzt gerichtet sein müsse der Richtung der Bewegung (worunter der besondere Fall $P = 0$ mit einbegriffen ist).

Sobald die Richtung der Resultierenden P mit der Richtung der Bewegung einen Winkel ε einschließt, der von 0 und π verschieden ist, so muss die augenblickliche Richtung der Bewegung des materiellen Punktes abgeändert werden, so dass, wenn diese Kraft P stetig wirkt, auch eine stetige Ablenkung von der Bewegungs-

richtung erfolgt oder — mit anderen Worten — der materielle Punkt sich in einer stetig gekrümmten Bahn bewegt.

Im § 28 wurde nachgewiesen, dass aus zwei geradlinigen Bewegungen, die man sich stets parallel zur x -Achse und zur y -Achse eines im allgemeinen schiefwinkligen Coordinatensystems vor sich gehend denken kann, eine im allgemeinen krummlinige Bewegung in einer ebenen Curve resultiert, deren Ebene die xy -Ebene ist. Da die Beschleunigungen dieser componentalen Bewegungen, welche zugleich nach § 32 die componentalen Beschleunigungen sind, durch $p_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $p_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$ ausgedrückt sind, so müssen die zur Erzeugung dieser componentalen Bewegungen, wofern nämlich jede dieser Bewegungen für sich allein längs der entsprechenden Achse stattfinden würde, nothwendigen Kräfte P_x und P_y nach § 34 zur Zeit t den Gleichungen $P_x = mp_x = m \frac{d^2x}{dt^2}$ und $P_y = mp_y = m \frac{d^2y}{dt^2}$ Genüge leisten, wo m die Masse des beweglichen materiellen Punktes bedeutet. Wofern man nun in jedem Punkte der Bahn Kräfte, die diesen beiden Kräften P_x und P_y gleich sind, gleichzeitig auf den im Punkte (x, y) seiner Bahn befindlichen materiellen Punkt wirkend annimmt, so muss — nach dem im § 5 aus dem Princip der unveränderlichen relativen Wirkung deducierten Grundgesetze der Zusammensetzung gleichzeitiger Bewegungen — dieselbe (früher bloß vom kinematischen Gesichtspunkte betrachtete) aus den beiden oberrwähnten componentalen Bewegungen resultierende krummlinige Bewegung stattfinden. Denn es ist die Bedingung, welche der Giltigkeit dieses letzteren Grundgesetzes für Bewegungen in endlichen Zeiten (vergl. § 5) zugrunde liegt, hier erfüllt, indem dann die Kraft P_x in der That in dem beliebigen Punkte a_i der resultierenden Bahn (Fig. 4), dessen Coordinaten nämlich x und y sind, dieselbe Richtung und Größe hat wie im entsprechenden Punkte A_i der x -Achse, dessen Abscisse x ist, nämlich den Wert $m \frac{d^2x}{dt^2}$, und indem ferner die Kraft P_y im Punkte (x, y) dieselbe Richtung und Größe hat wie im Punkte (o, y) , d. h. wie im Punkte A'_i der Fig. 4, nämlich den Wert $m \frac{d^2y}{dt^2}$.

Aus diesen zwei im Punkte (x, y) der krummlinigen Bahn auf den materiellen Punkt einwirkenden Kräften $P_x = m \frac{d^2x}{dt^2}$ und $P_y = m \frac{d^2y}{dt^2}$ (welche im Sinne der Ausführungen des § 4 im allgemeinen als fingierte Componenten anzusehen sind) resultiert demgemäß jene Kraft P , die zur Erzeugung der resultierenden krummlinigen Bewegung in der betrachteten ebenen Curve bei gegebenem Anfangszustande nothwendig und hinreichend ist, und die auch anderseits

aus den thatsächlich einwirkenden, durch den thatsächlichen Einfluss der Zustände der umgebenden Körper bedingten Kräften $P_1, P_2, P_3 \dots$ resultieren muss.

Sind umgekehrt nicht die componentalen Bewegungen, beziehungsweise nicht die entsprechenden, zu ihrer Erzeugung nothwendigen Kräfte P_x und P_y , wohl aber — außer der Anfangslage und des anfänglichen Bewegungszustandes des Beweglichen — für eine jede Zeit die resultierende Kraft P der Richtung und Größe nach bekannt, welche den freibeweglichen Punkt in einer als unbekannt anzusehenden ebenen Bahncurve bewegt und die Geschwindigkeit in einer unbekanntenen Art und Weise beeinflusst, so lehrt die Umkehrung der früheren Beweisführung, dass man durch Zerlegung der gegebenen Kraft P in zwei zu der x - und y -Achse eines beliebigen in der Ebene der Bahn gelegenen Achsensystems parallel gerichtete Kräfte jene Componenten P_x und P_y bestimmt, die zur Erzeugung der entsprechenden parallel zu denselben Achsen stattfindenden componentalen Bewegungen nothwendig und hinreichend sind, so dass dementsprechend zwischen den so gefundenen Componenten P_x und P_y und den Coordinaten x, y der Bahn und der Zeit t stets die Grundgleichungen stattfinden:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= m \cdot p_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ P_y &= m \cdot p_y = m \frac{d^2 y}{dt^2} \end{aligned} \right\} (1)$$

Da nun $P_x \parallel p_x \parallel x$ und $P_y \parallel p_y \parallel y$, ferner zufolge (1) $P_x : P_y = \frac{d^2 x}{dt^2} : \frac{d^2 y}{dt^2} = p_x : p_y$ ist, so ist das den Vektoren P_x, P_y und deren Resultanten P zugehörige Kräfdreieck demjenigen Dreieck, das den Vektoren p_x, p_y und der resultierenden Beschleunigung p entspricht, ähnlich und die Seiten P_x und P_y des einen Dreiecks den Seiten p_x und p_y des zweiten Dreiecks parallel, sonach auch die Resultante P der einwirkenden Kräfte nicht nur gleichgerichtet mit der Richtung der Beschleunigung p der krummlinigen Bewegung (vergl. § 32), sondern es muss überdies wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $\frac{P}{p} = \frac{P_x}{p_x} = \frac{P_y}{p_y}$, also den Gleichungen (1) zufolge $\frac{P}{p} = m$, sonach

$$P = m p \dots (2)$$

sein, also zwischen der resultierenden Kraft P und der resultierenden Beschleunigung bei einer krummlinigen Bewegung dieselbe Beziehung stattfinden, die im § 34 für eine geradlinige Bewegung nachgewiesen wurde.

Würde man statt Parallelcoordinaten Polarcoordinaten für die Untersuchung der früher betrachteten Bewegung des materiellen

Punktes m längs einer ebenen krummen Bahn zugrunde legen, so brauchte man nur in ähnlicher Weise, wie im § 32 die Beschleunigung p in eine radiale Componente p_r und eine zum Radiusvector r normale, in der Richtung n wirkende Componente p_n zerlegt wurde, auch in diesem Falle die mit p gleich errichtete Kraft $P = mp$ in die mit den früheren Componenten p_r und p_n gleichgerichteten Componenten P_r und P_n zu zerlegen. Aus der durch den Parallelismus der Seiten bedingten Ähnlichkeit der entsprechenden Vektorendreiecke würde auch hier zu folgern sein, dass $\frac{P_r}{p_r} = \frac{P_n}{p_n} = \frac{P}{p} = m$, also $P_r = mp_r$ und $P_n = mp_n$ ist, sonach den Gleichungen (11) des § 32 zufolge

$$\left. \begin{aligned} P_r &= mp_r = m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \\ P_n &= mp_n = m \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right] = \frac{m}{r} \frac{d \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right)}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Durch Zusammensetzung von drei parallel zu den drei Achsen eines räumlichen, und zwar im allgemeinen schiefwinkligen Achsensystems stattfindenden Bewegungen (im Sinne des § 27) resultiert, wie früher gezeigt wurde, meist eine Bewegung in einer räumlichen Curve doppelter Krümmung, und ebenso lässt sich umgekehrt eine jede Bewegung in einer räumlichen Curve stets in drei componentale Bewegungen parallel zu den Achsen eines beliebigen räumlichen Achsensystems zerlegen.

Wenn auch hier die auf den materiellen Punkt m im Punkte (x, y, z) der resultierenden krummen Bahn parallel zu den Coordinatenachsen wirkenden Kräfte P_x, P_y, P_z von gleicher Größe angenommen werden wie die entsprechenden Kräfte in den correspondierenden Punkten während der längs der Achsen stattfindenden componentalen Bewegungen, nämlich wie P_x im Punkte $(x, 0, 0)$, P_y im Punkte $(0, y, 0)$ und P_z im Punkte $(0, 0, z)$, so lässt sich auf Grund der im § 5 deducierten Gesetze genau so, wie dies kurz zuvor für die Bewegung in einer ebenen Curve geschehen ist, auch hier nachweisen, dass dann die thatsächliche Bewegung mit der aus den drei componentalen geradlinigen Bewegungen im Sinne des § 27 resultierenden Bewegung übereinstimmen müsste. Es müssen demnach zwischen den parallel zu den x, y, z -Achsen gerichteten Componenten der Resultierenden P aller jener Kräfte, die auf den materiellen Punkt von der Masse m , der sich in der erwähnten Curve bewegt, einwirken, einerseits, und den Coordinaten x, y, z der resultierenden Bahn und der Zeit t andererseits ganz allgemein die Beziehungen stattfinden:

$$P_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad P_y = m \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad P_z = m \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (4)$$

P_x, P_y und P_z sind die (im allgemeinen fingierten) zur Erzeugung der entsprechenden drei componentalen Bewegungen nothwendigen Kräfte und

$$p_x = \frac{P_x}{m} = \frac{d^2 x}{dt^2}, p_y = \frac{P_y}{m} = \frac{d^2 y}{dt^2}, p_z = \frac{P_z}{m} = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

sind die Beschleunigungen dieser componentalen Bewegungen, die „componentalen Beschleunigungen“.

Diese Beschleunigungen lassen sich auch als Kräfte betrachten, nämlich, wie schon im § 34 S. 124 erwähnt wurde, als jene Kräfte, die zur Erzeugung derselben hier betrachteten Bewegungen nothwendig wären, wenn die Masse des materiellen Punktes gleich der Masseneinheit wäre, mit anderen Worten als „beschleunigende Kräfte“, der componentalen Bewegungen.

Die Resultante p dieser beschleunigenden Kräfte p_x, p_y, p_z , mit anderen Worten die resultierende Beschleunigung p der krummlinigen Bewegung muss wegen der Gleichheit der Verhältnisse $\frac{P_x}{p_x} = \frac{P_y}{p_y} = \frac{P_z}{p_z} = m$ bekanntlich dieselbe Richtung haben wie die Resultante P der Kräfte P_x, P_y, P_z , und es muss ferner $\frac{P}{p}$ den früheren Verhältnissen gleich, also auch in diesem allgemeinen Falle $\frac{P}{p} = m$, somit wie bei der geradlinigen Bewegung $P = m p$ sein.

Da nach (4) $P_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = m \frac{dv_x}{dt}$ ist, so ist auch $P_x \cdot dt = d(m v_x)$. Bezeichnet man demgemäß durch c_x, c_y, c_z die Geschwindigkeitscomponenten parallel zu den drei Achsen zur Zeit $t = 0$, so folgt aus den Gleichungen (4)

$$\left. \begin{aligned} \int_0^t P_x dt &= m v_x - m c_x \\ \int_0^t P_y dt &= m v_y - m c_y \\ \int_0^t P_z dt &= m v_z - m c_z \end{aligned} \right\} (5)$$

Statt, wie dies bisher geschehen ist, die Kraft P zu zerlegen in solche Componenten P_x, P_y, P_z , die parallel sind zu den Achsen eines zugrunde gelegten, an der Bewegung des materiellen Punktes nicht theilnehmenden Achsensystems $x y z$, empfiehlt es sich in vielen Fällen, so wie in § 32 die Beschleunigung p in ihre tangentielle Componente $p_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$ und ihre centripetale Componente $p_c = v \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v^2}{\rho}$ zerlegt wurde, auch die mit p gleichgerichtete Kraft

$P = m \cdot p$ in analoger Weise zu zerlegen in eine tangential zur Bahn des Punktes und mit p_t übereinstimmend gerichtete Componente P_t und eine zur Tangente der Bahn normale, mit p_c gleichgerichtete Componente P_c . Wegen der Ähnlichkeit der den Vektoren p p_t p_c und den Vektoren $P = m p$, P_t , P_c entsprechenden Dreiecke ist offenbar

$$\left. \begin{aligned} P_t &= m \cdot p_t = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2s}{dt^2} \\ P_c &= m \cdot p_c = m v \cdot \frac{d\varphi}{dt} = m \cdot \frac{v^2}{\rho} \end{aligned} \right\} (6)$$

Es ergibt sich daraus folgende Regel:

Soll irgend eine Bewegung in einer krummen Linie stattfinden, so muss aus allen auf den materiellen Punkt m einwirkenden Kräften P_1 P_2 P_3 u. s. w. eine Kraft P resultieren, deren orthogonale Componenten, wofern man nämlich diese Kraft P wiederum in zwei Seitenkräfte, und zwar eine zur Bahn tangentiale und eine zweite zur Bahn normale zerlegt, folgenden Bedingungen genügen müssen:

Die erste, nämlich die tangentiale Componente, die künftighin stets durch P_t bezeichnet werden soll, hat den algebraischen Wert $P_t = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2s}{dt^2}$ und hat die Richtung der Bewegung, wenn die Bewegung eine beschleunigte, die entgegengesetzte, wenn die Bewegung eine verzögerte ist. Sie wird die Tangentialkraft genannt.

Die zweite zur Bahn normale Componente, die stets durch P_c bezeichnet werden möge, wirkt in der Ebene des Krümmungskreises (der Schmiegungeebene, Osculationsebene) der Curve und hat demnach die Richtung des Krümmungshalbmessers ρ der Bahn, und zwar stets jene gegen den Krümmungsmittelpunkt, mit anderen Worten sie ist stets nach der concaven Seite der Bahn gerichtet. Ihr absoluter Zahlwert ist durch $P_c = \frac{mv^2}{\rho}$ bestimmt, wenn ρ den Krümmungshalbmesser für den betreffenden Punkt der Bahn bedeutet. Diese Kraft P_c wird wegen ihrer steten Richtung gegen den jeweiligen Krümmungsmittelpunkt die Centripetalkraft (von *centrum* = Mittelpunkt und *petere* = erstreben) genannt.

Sind die einwirkenden Kräfte und die Gestalt der Bahn bekannt, so kann man leicht sofort bestimmen, welcher Art die Bewegung längs des irgend einem Punkte M benachbarten Elementes dieser Bahn ist. Man bestimmt nämlich zunächst die Richtung der Resultierenden P der in diesem Punkte M einwirkenden Kräfte P_1 P_2 P_3 u. s. w., sucht dann die centripetale Richtung des Krümmungshalbmessers ρ dieser Bahn, legt durch diese und die Richtung der Kraft P eine Ebene und bestimmt in dieser Ebene diejenige der beiden möglichen Richtungen der Tangente, die mit der centripetalen Richtung jenen rechten Winkel

einschließt, in dessen Winkelfläche die Richtung der Kraft P gelegen ist. Stimmt die so gefundene Richtung der Tangentialkraft mit der Bewegungsrichtung überein, so ist die Bewegung in dem betrachteten Bahnelemente beschleunigt, im gegentheiligen Falle aber verzögert. Aus diesem Grunde ist z. B. die Bewegung der Erde in der Ekliptik und jene eines jeden Planeten vom Perihelium (der Sonnennähe) zum Aphelium (Sonnenferne) eine verzögerte, vom Aphelium zum Perihelium aber eine beschleunigte, indem in diesem Falle die resultierende Kraft P (die anziehende Kraft der Sonne) stets gegen das in einem der beiden Brennpunkte der elliptischen Bahn gelegenen Sonnenzentrum gerichtet ist und die centripetale Richtung bei einer Ellipse den Neigungswinkel der beiden Radienvectoren stets halbieren muss.

Worin der besondere Einfluss der Tangential- und jener der Centripetalkraft auf den Bewegungszustand eines materiellen Punktes beruht, lässt sich aus den gefundenen Formeln $P_t = m \frac{dv}{dt}$ und $P_c = \frac{mv^2}{\rho}$ sofort entnehmen.

Findet nämlich die Bewegung in einer geraden Bahn statt, so muss während des ganzen Verlaufes der Bewegung $\rho = \infty$, daher stets $P_c = 0$ sein — und ebenso umgekehrt, denn ist während der ganzen Bewegung keine Centripetalkraft vorhanden, also $P_c = \frac{mv^2}{\rho} = 0$, so muss, da m und v jedenfalls von 0 verschieden sind, ρ stets den Wert ∞ haben, daher die Bewegung eine geradlinige sein.

Findet dagegen die Bewegung in einer krummen Bahn statt, so hat ρ , daher auch P_c einen endlichen, von Null verschiedenen Wert, und zwar ist dieser Wert wesentlich von der Krümmung der Bahn (d. i. dem reciproken Krümmungshalbmesser) abhängig, nämlich bei gegebenem m und v dem sogenannten Krümmungsmaße (d. i. dem reciproken Krümmungshalbmesser) $\frac{1}{\rho}$ direct proportioniert — und ebenso umgekehrt, denn ist eine Centripetalkraft P_c vorhanden, so muss $\rho < \infty$ sein, daher die Bewegung in einer krummen Bahn vor sich gehen, deren Gestalt von der Größe dieser Kraft insofern abhängig ist, als ihre Krümmung bei gegebener Masse und Geschwindigkeit der einwirkenden Centripetalkraft direct proportioniert ist.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für eine geradlinige Bewegung ist demgemäß das Nichtvorhandensein einer Centripetalkraft (also einer zur Bewegungsrichtung senkrechten Componente), für eine krummlinige Bewegung das Dasein einer Centripetalkraft. Mit anderen Worten: Es ist die Krümmung der Bahn, d. i. die stetige Änderung der Bewegungsrichtung des Punktes der Einwirkung dieser Kraft, der Centripetalkraft allein zuzuschreiben.

Dagegen äußert sich der Einfluss der Tangentialkraft bloß in der Änderung der Größe der Geschwindigkeit.

Ist nämlich die Bewegung, mag sie in welcher Bahn immer erfolgen, eine gleichförmige, daher v constant, so ist stets $\frac{dv}{dt} = 0$, daher $P_t = m \frac{dv}{dt}$ auch Null, also keine Tangentialkraft wirksam — und ebenso umgekehrt, denn ist die Resultierende P der einwirkenden Kräfte stets normal zur Bahn gerichtet, also $P_t = 0$, so muss der Gleichung $P_t = m \frac{dv}{dt}$ zufolge $\frac{dv}{dt}$ stets gleich Null, also v constant, d. h. die Bewegung gleichförmig sein.

Ist dagegen die Bewegung in welcher Bahn immer ungleichförmig, so ist $\frac{dv}{dt}$ somit auch P_t von Null verschieden und ebenso umgekehrt, und zwar hat, wie dies oben auseinandergesetzt wurde, wenn der Zahlwert der Geschwindigkeit zunimmt, die Tangentialkraft die Richtung der Bewegung, dagegen bei einer verzögerten Bewegung die entgegengesetzte Richtung; das Maß der Geschwindigkeitsänderung, d. i. $\frac{dv}{dt}$ ist bloß von dieser Kraft abhängig, nämlich derselben proportional.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für eine gleichförmige Bewegung ist demnach stets das Nichtvorhandensein, für eine ungleichförmige Bewegung das Einwirken einer Tangentialkraft, oder mit anderen Worten: Es ist die Änderung des Geschwindigkeitswertes, und zwar nur diese dem Einflusse der Tangentialkraft allein zuzuschreiben.

Es sind sonach die im § 4 bei der Begriffsbestimmung der Kraft unterschiedenen beiden Arten, in welchen sich die Änderung des Bewegungszustandes manifestieren kann, nämlich die Änderung der Bewegungsrichtung einerseits, jene der Geschwindigkeit andererseits gesondert auf Rechnung je einer der beiden hier erörterten Kräfte zu setzen.

Ist während der ganzen Bewegung $P_t = 0$ und $P_c = 0$, daher auch $P = 0$, so ist die Bewegung des Punktes eine gleichförmige und geradlinige; ist P_t bei einer krummlinigen Bewegung constant, so ist auch $\frac{dv}{dt} = \frac{P_t}{m} = p_t$ constant, daher $v = v_0 + p_t \cdot t$, d. h. die Bewegung eine gleichförmig geänderte u. s. w.

Erfolgt eine gleichförmige Bewegung in einer Kreisbahn vom Radius r mit der constanten Geschwindigkeit c , so ist $P_t = 0$, und die mit der Centripetalkraft identische resultierende Kraft P hat dann stets die Richtung gegen den Kreismittelpunkt, ist demnach in diesem besonderen Falle auch eine Centrakraft und hat die Größe

$P = \frac{m c^2}{r}$. Ist T die Umlaufszeit des Beweglichen, d. i. die zur Zurücklegung der Peripherie $2r\pi$ nothwendige Zeit, so ist wegen der Gleichförmigkeit der Bewegung $c = \frac{2r\pi}{T}$, daher

$$P = 4\pi^2 \cdot \frac{m r}{T^2} \quad (7)$$

Anmerkung. Die Gesetze und die Bedeutung der Centrifugalkraft und insofern auch mittelbar jene der entgegengesetzt gleichen Centripetalkraft — und zwar für die gleichförmige Bewegung in einer Kreisbahn — entdeckte der große Nachfolger Galileis und Vorgänger Newtons, der geniale Holländer Christian Huyghens (geb. 1629, gest. 1695) (H. Horologium oscillatorium 1673). Die allgemeine Formel für die Centripetal- und Tangentialkraft leitete auf synthetischem Wege Newton ab.*)

§ 42. Princip der lebendigen Kraft und andere dynamische Gesetze der krummlinigen Bewegung eines Punktes.

Aus den für eine jede krummlinige Bewegung giltigen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt}, p_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \\ P_t &= m p_t = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2s}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

in welchen p_t die tangentielle Beschleunigung und P_t die Tangentialkraft bedeuten, lassen sich auf dieselbe Art, wie dies aus den analogen Gleichungen der geradlinigen Bewegung geschehen ist, andere Gesetze deducieren.

Zunächst lehrt die Division der beiden letzten Gleichungen durch die erste, dass

$$\left. \begin{aligned} v dv &= p_t \cdot ds \\ P_t &= m p_t = m v \frac{dv}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

sei. Integriert man die letzten Gleichungen in (1) und (2), nämlich

$$\begin{aligned} m dv &= m p_t dt = P_t dt \text{ und} \\ m v dv &= m p_t ds = P_t ds \end{aligned}$$

für ein Zeitintervall, für welches dem Anfangspunkte die Werte $t = 0$, $s = 0$, $v = v_0$ und dem Endpunkte die variablen Werte t , s , v entsprechen, so findet man

*) In der früheren Auflage folgt an dieser Stelle in einem besonderen Paragraphe eine ausführliche Behandlung der Componenten der relativen Kraft nach Coriolis, vor allem der „zusammengesetzten Centrifugalkraft“.

$$\left. \begin{aligned} \int_0^t P_t \cdot dt &= m v - m v_0 \\ \int_0^s P_t \cdot ds &= \frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} \end{aligned} \right\} (3)$$

d. h. das einer beliebigen Zeit t entsprechende Zeitintegral (mechanischer Antrieb) der Tangentialkraft P_t ist stets gleich der gleichzeitigen Änderung der Bewegungsgröße, dagegen das Wegintegral der Tangentialkraft P_t gleich der gleichzeitigen Änderung der lebendigen Kraft (kinetischen Energie).

Die Gleichungen (1), (2), (3) haben genau dieselbe Form wie die für die geradlinige Bewegung gültigen Gleichungen, mit dem einzigen Unterschiede, dass hier überall statt p und P zu setzen ist: p_t und P_t . Daher haben auch alle die auf Grund dieser Gleichungen für die geradlinige Bewegung deducierten Gesetze und Methoden volle Giltigkeit auch für die krummlinige Bewegung, wofern man nur überall statt des Wortes „Beschleunigung“ die Bezeichnung „tangentielle Beschleunigung“, statt „resultierende Kraft“ hier die Bezeichnung „Tangentialkraft“ anwendet.

Wählt man die Bewegungsrichtung des materiellen Punktes in der der beliebigen Zeit t entsprechenden Lage M (Fig. 61) — mit anderen Worten: die Richtung des unendlich kleinen Wegelementes ds , welche zugleich auch die Richtung der Tangente ist — zur positiven Richtung der x -Achse und die centripetale Richtung des Krümmungshalbmessers zur positiven Richtung der y -Achse eines orthogonalen

Fig. 61 b.

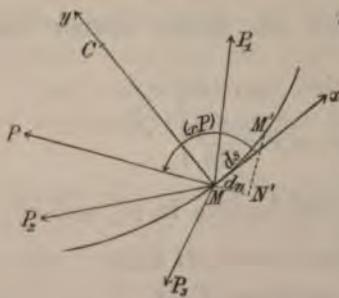
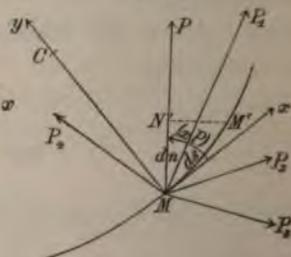


Fig. 61 a.



Achsensystems, so ist, früheren Entwicklungen zufolge, die Tangentialkraft $P_t = m \frac{dv}{dt}$ dem Zeichen und Zahlwerte nach gleich der X-Komponente P_x der Resultierenden P der einwirkenden Kräfte, und zwar sowohl wenn, wie in Fig. 61 a, die Bewegung eine beschleunigte ist, also P_t positiv ist, als auch wenn, wie in Fig. 61 b, die X-Com-

ponente P_t negativ, also die Bewegung eine verzögerte ist; die Y -Komponente P_y der Kraft P ist die Centripetalkraft. Es ist daher nach § 13

$$P_t = P \cos(xP) = P \cos(P, ds) \text{ und } P_c = P \cdot \sin(xP)$$

Setzt man den Wert von P_t in die obige Gleichung $m v dv = P_t ds$ ein, so findet man

$$P \cdot ds \cos(xP) = P \cdot ds \cdot \cos(P, ds) = m v dv.$$

Nun stellt $ds \cos(P, ds) = dn$ (Fig. 61) die Projection des unendlich kleinen Bahnelementes ds auf die Richtung der Kraft P vor, und zwar positiv genommen, wenn, wie in Fig. 61 *a*, der Winkel (P, ds) ein spitzer ist, also die Projection dn in die Richtung der Kraft P fällt, dagegen negativ genommen, wenn (P, ds) ein Winkel des zweiten Quadranten ist (Fig. 61 *b*), also die Projection in die Verlängerung der Krafrichtung nach entgegengesetzter Seite über den Angriffspunkt M hinaus zu liegen kommt.

Dieses künftighin stets durch dA_P zu bezeichnende Product $dA_P = P \cdot dn$ aus irgend einer Kraft P und der Projection dn des Wegelementes ds auf die durch den Anfangspunkt des letzteren geführte Krafrichtung, wo P stets dem absoluten Zahlwerte nach und dn mit dem eben angeführten Zeichen in Rechnung zu bringen ist, bezeichnet man als die während des Wegelementes ds von der Kraft P geleistete elementare mechanische Arbeit dA_P , so dass die im § 34 S. 127 für die geradlinige Bewegung gegebene Definition dieses Begriffes in dieser allgemeineren Definition mit enthalten ist.

Der obigen Gleichung entsprechend ist, wenn P die Resultierende ist,

$$dA_P = P \cdot dn = P \cdot ds \cos(P, ds) = m v dv \quad (4)$$

Das Integral $A_P = \int dA_P = \int P dn = \int_0^s P \cdot ds \cdot \cos(P, ds)$ stellt

die Summe aller während irgend eines Weges s geleisteten elementaren mechanischen Arbeiten dA_P der beliebigen Kraft P , also die gesammte mechanische Arbeit der Kraft P für den Weg s dar.

Demgemäß ist die mechanische Arbeit $A_P = \int_0^s P \cos(P, ds) \cdot ds$

irgend einer Kraft P für welche Bewegung auch immer zu definieren als das Wegintegral der tangentialen Componente $P \cdot \cos(P, ds)$ dieser Kraft P , und die elementare mechanische Arbeit dA_P einer Kraft ist das Product aus drei Factoren, nämlich aus der Kraft P , aus dem in dem Zeitelemente dt zurückgelegten Bahnelemente ds und aus dem Cosinus jenes spitzen oder stumpfen Winkels (P, ds) , welchen die Richtungen der beiden eben genannten

Größen, nämlich die Krafrichtung P und die Bewegungsrichtung ds einschließen.

Die auf den in der Zeit t zurückgelegten Weg s sich erstreckende Integration der Gleichung (4) lehrt, dass

$$A_P = \int_0^s P \cos(P, ds) \cdot ds = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \quad (5)$$

ist, d. h. auch bei einer krummlinigen Bewegung ist die von der resultierenden Kraft während irgend eines Weges s geleistete mechanische Arbeit stets gleich der gleichzeitigen Änderung der lebendigen Kraft (kinetischen Energie) des materiellen Punktes.

Sind nun $P_1, P_2, P_3 \dots$ (Fig. 61) die thatsächlich auf den materiellen Punkt im Punkte M der Bahn einwirkenden Kräfte, deren Resultierende P ist, so ist nach dem bekannten Satze des § 21 $P_x = \Sigma X$, also

$$P \cdot \cos(xP) = P_1 \cos(xP_1) + P_2 \cos(xP_2) + P_3 \cos(xP_3) + \dots$$

oder

$$P \cdot \cos(P, ds) = P_1 \cos(P_1, ds) + P_2 \cos(P_2, ds) + P_3 \cos(P_3, ds) + \dots$$

Multipliziert man diese Gleichung mit dem Wegelemente ds und berücksichtigt die obenangeführte Definition für die elementare mechanische Arbeit dA_P irgend einer Kraft P , so erhält die Gleichung die Form

$$dA_P = dA_{P_1} + dA_{P_2} + dA_{P_3} + \dots$$

Integriert man diese Gleichung für einen beliebigen endlichen Weg s des materiellen Punktes, so findet man

$$A_P = A_{P_1} + A_{P_2} + A_{P_3} + \dots \quad (6)$$

Es ist demnach stets die mechanische Arbeit der Resultierenden P gleich der algebraischen Summe der gleichzeitigen Arbeiten der Componenten derselben.

Halten sich demnach mehrere Kräfte eines Kräftesystems, die auf einen materiellen Punkt einwirken, das Gleichgewicht, so dass ihre Resultante $P = 0$, also auch $A_P = 0$ ist, so ist die algebraische Summe der mechanischen Arbeiten dieser Kräfte gleich Null.

Durch Zusammenfassung der Gleichungen (5) und (6) ergibt sich das unter dem Namen des Gesetzes der lebendigen Kraft (in der Anwendung auf einen materiellen Punkt) bekannte Grundgesetz

$$A_{P_1} + A_{P_2} + A_{P_3} + \dots = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \quad (7)$$

d. h. die Summe der mechanischen Arbeiten, die von allen den einzelnen auf einen materiellen Punkt m während seiner Bewegung einwirkenden Kräften geleistet werden, ist stets gleich der gleichzeitigen Änderung der lebendigen Kraft (kinetischen Energie).

Der obigen Definition der mechanischen Arbeit entsprechend ist die Arbeit solcher Kräfte, deren Richtung stets auf der Bewegungsrichtung senkrecht steht, Null, so z. B. die Arbeit der Centripetalkraft, des normalen Bahnwiderstandes, der Schwerkraft bei der Bewegung in einer beliebigen horizontalen Bahn u. s. w.

Die mechanische Arbeit einer constanten Kraft R von constanter Richtung bei irgend einer krummlinigen Bewegung lässt sich für eine beliebige endliche Zeit leicht derart bestimmen, dass man den innerhalb dieser Zeit zurückgelegten Weg s einfach auf die constante Kraft-Richtung orthogonal projiziert und diese Projection n mit der constanten Kraft R multipliciert, und zwar dieses Product positiv oder negativ annimmt, je nachdem die von der Projection des Anfangspunktes der Bahn s nach der Projection des Endpunktes derselben hingehende Richtung die Richtung der Kraft hat oder die entgegengesetzte, denn es ist zufolge der Definition der Arbeitsgröße $A_R = \int dA_R = \int R dn$ und, da R constant ist, $A_R = R \cdot \int dn$, und da ferner die algebraische Summe der Projectionen dn aller Wegelemente auf die constante Krafrichtung, nämlich $\int dn = n$ ist,

$$A_R = R \cdot n \quad (8)$$

Sind die Intensitäten und Richtungen der Kräfte P_1, P_2 u. s. w., die auf einen materiellen Punkt von bekannter Masse m einwirken, somit auch ihre Resultante P und deren im § 41 betrachteten Componenten als Functionen der jeweiligen Coordinaten des materiellen Punktes oder aber als Functionen der Zeit oder im allgemeinsten Falle als Functionen der Coordinaten und der Zeit gegeben, so lässt sich die Art der durch diese Kräfte hervorgerufenen Bewegung und die Gestalt der Bahn — vorausgesetzt, dass die Lage des Beweglichen und dessen Bewegungszustand für irgend eine bestimmte Zeit bekannt ist — mit Hilfe der im § 41 abgeleiteten Formeln folgendermaßen untersuchen:

Legt man ein Parallelcoordinatensystem zugrunde, so hat man von den drei Gleichungen (4) des § 41 S. 174, nämlich

$$P_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad P_y = m \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad P_z = m \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (9)$$

auszugehen, in welchen, da die Masse m eine gegebene Constante ist und P_x, P_y und P_z durch $x y z$ und t ausgedrückt erscheinen, nur die letzteren vier Variablen vorkommen. Durch Integration dieser drei Gleichungen (9), welche vier Variable enthalten, ist es nun im allgemeinen möglich, drei Variable durch die vierte auszudrücken,

also zu Gleichungen von der Form $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$, $z = \psi(t)$ zu gelangen, durch welche dann die Lage des Beweglichen für jede Zeit t , ferner die Geschwindigkeitscomponenten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, daher auch die resultierende Geschwindigkeit v für jeden Moment bestimmbar sind. Die Gleichungen der Bahn bestimmt man durch Elimination der variablen Zeit t aus den drei letzten Gleichungen, wodurch man zwei Gleichungen zwischen den variablen Coordinaten x, y, z , mit anderen Worten die Gleichungen der Bahn erhält. — Zur Bestimmung der sechs Integrationsconstanten bei den früher erwähnten Integrationen der drei Differentialgleichungen (9) von zweiter Ordnung reicht die Kenntnis der durch die drei Coordinaten bestimmten Anfangslage des Beweglichen und des durch die drei Geschwindigkeitscomponenten charakterisierten Bewegungszustandes für irgend eine bestimmte Zeit hin, und zwar ist gewöhnlich die Lage und der Bewegungszustand für die Zeit $t = 0$ als gegeben zu betrachten.

Sind die Richtungen der einwirkenden Kräfte P_1, P_2, \dots oder zum mindesten die Richtung der Resultanten P stets parallel zu irgend einer Ebene, die zur xy -Ebene gewählt sei, ist also stets $P_z = 0$, so muss zufolge der Gleichung $P_z = m \frac{d^2 z}{dt^2}$ auch stets $\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$, somit $\frac{dz}{dt}$ constant sein. Ist nun auch die Anfangsgeschwindigkeit des Beweglichen parallel zu dieser Ebene gerichtet, so ist $\frac{dz}{dt}$ zu Anfang gleich Null, also auch andauernd $\frac{dz}{dt} = 0$, daher z constant, d. h. die Bahn des Punktes ist dann eine ebene, und zwar zur xy -Ebene parallele Bahn, was sich übrigens auch sofort aus dem Principe der Zusammensetzung der Bewegungen folgern lässt.

In diesem Falle einer Bewegung in einer ebenen Bahn ist es am einfachsten, die Ebene dieser Bahn zur xy -Ebene selbst, mit anderen Worten $z = 0$ zu wählen und von den zwei Gleichungen (1) des § 41 S. 173 Anwendung zu machen, so dass man dann aus diesen zwei Gleichungen, welche die drei Variablen x, y, t enthalten, wie früher $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$ und durch Elimination des t die Gleichung der Bahn zu bestimmen hat.

Würde man ein Polarcoordinatensystem zugrunde legen, so hätte man bei der Bewegung in einer ebenen Bahn die Gleichungen (3) des § 41 S. 174, nämlich

$$\left. \begin{aligned} P_r &= m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \\ P_n &= m \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right] = \frac{m}{r} \frac{d \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right)}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

zu benutzen, mittels welcher zwei Gleichungen, welche die drei Variablen r , φ , t enthalten, man im allgemeinen durch Integration r und φ als Functionen von t und durch Elimination des t auch r als Function von φ ausdrücken, d. i. die Gleichung der Bahn bestimmen kann.

In manchen Fällen ist bei der Ermittlung des Bewegungsmodus die Anwendung der Formeln für die Centripetalkraft P_c und die Tangentialkraft P_t

$$\left. \begin{aligned} P_t &= m \frac{dv}{dt} = m v \frac{dv}{ds} = m \frac{d^2 s}{dt^2} \\ P_c &= m \frac{v^2}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

und besonders auch des Princip der lebendigen Kraft von Vortheil.

Im Folgenden soll bald von der einen, bald von der anderen Methode Gebrauch gemacht werden.

Sind umgekehrt die Bahn und die Bewegungszustände des Beweglichen in jedem Punkte der Bahn bekannt, so können mit Hilfe der Gleichungen (9), (10), (11) die Kräfte bestimmt werden, die zur Erzeugung dieser Bewegung nothwendig sind.

Ist die in einer Ebene gelegene Bahn des Beweglichen bekannt und die Richtung der resultierenden Kraft P in jedem Punkte der Bahn bestimmt, so lassen sich sowohl die Größe der die Bewegung in dieser Bahn erzeugenden Kraft P , als auch die Bewegungszustände in jedem Punkte der Bahn bei einem gegebenen Anfangszustande mit Zuhilfenahme derselben Gleichungen ermitteln (vergl. § 46, Centralbewegung in einer gegebenen Bahn).

Anmerkung. Die Zerlegung der Kräfte bei den krummlinigen Bewegungen eines Punktes in Tangential- und Normalkräfte ist noch die Methode Eulers (geb. 1707, gest. 1783), des berühmten Begründers der analytischen Mechanik (*Mechanica sive motus scientia*. Petersburg 1736), während Maclaurin (geb. 1698, gest. 1746) zuerst die Zerlegungen parallel zu unveränderlichen Achsen vornimmt (*A complete system of fluxions*. Edinburgh 1742).

§ 43. Bewegung eines materiellen Punktes in einer vorgeschriebenen krummen Bahn.

Bisher wurde vorausgesetzt, dass der materielle Punkt vollkommen frei beweglich sei. Ist jedoch der materielle Punkt m genöthigt, bei seiner Bewegung in einer bestimmten Fläche F , z. B. der Oberfläche eines etwa irgendwie festgehaltenen starren Körpers K zu verbleiben oder aber längs einer ganz bestimmten Curve, z. B. innerhalb einer gekrümmten dünnen Röhre K (welcher letztere Fall auf den früheren zurückzuführen ist) unter der Einwirkung gewisser äußerer Kräfte

$P_1 P_2 P_3 \dots$, deren Resultierende durch R bezeichnet sei, sich zu bewegen, so treten infolge der Wechselwirkung zwischen dem Körper K , der den materiellen Punkt m nöthigt, sich in dieser bestimmten Bahn zu bewegen, und dem materiellen Punkte m neue Kräfte hinzu, die auf m einwirken, und zwar früheren Entwicklungen zufolge im allgemeinen zwei Kräfte, nämlich ein zur Fläche F , beziehungsweise zu der erwähnten Curve senkrechter Widerstand W_n , der als Normalwiderstand der Fläche F , beziehungsweise normaler Bahnwiderstand bezeichnet wird, und ein tangentialer Widerstand W_t , d. i. der Reibungswiderstand, dessen Richtung bekanntlich der Bewegungsrichtung stets entgegengesetzt ist und näherungsweise durch das Product aus dem Reibungscoefficienten f und der Kraft W_n bestimmt ist. Wenn man demnach den materiellen Punkt auch in diesem Falle wie einen frei beweglichen behandeln, nämlich die in den früheren Paragraphen deducierten Gesetze auf denselben in Anwendung bringen will, so muss man offenbar zu dem System der Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$, beziehungsweise zu ihrer Resultierenden R noch diese zwei Kräfte W_n und $W_t = fW_n$ hinzufügen, da ja die in Rede stehende Einwirkung des Körpers K (z. B. der früher erwähnten Röhre) nur in der Hervorrufung dieser zwei Kräfte besteht, so dass also die in den früheren Paragraphen betrachtete Resultante P sich aus den Kräften R , W_n und W_t zusammensetzt.

Aus den Kräften W_n und W_t resultiert ein Widerstand W , für welchen, da der Kräftewinkel der Componenten ein rechter ist, nach § 12 $tg (W_n W) = W_t : W_n = f = tg \varrho$ ist, wo ϱ den Reibungswinkel bedeutet, so dass $(W_n W) = \varrho$ ist, d. h. die Richtung des resultierenden Widerstandes W ist gegen jene des normalen Widerstandes stets unter dem Reibungswinkel geneigt.

Es sei in den folgenden Untersuchungen, wenn nicht das Gegentheil hervorgehoben wird, zunächst vom Reibungswiderstande W_t abgesehen, also die Fläche F als vollkommen glatt angenommen. (Im gegentheiligen Falle soll dieser Reibungswiderstand unter den Kräften $P_1 P_2 P_3 \dots$ subsumiert sein).

Halten sich die Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$ in jeder Lage des beweglichen materiellen Punktes das Gleichgewicht, so dass, da $R = 0$ ist, nur der Normalwiderstand W_n allein in Betracht kommt, so ist die resultierende Kraft P der früheren Paragraphe mit W_n identisch, daher die tangentielle Componente P_t derselben während der ganzen Bewegung gleich Null, somit zufolge der Gleichung (11) des § 42 stets $P_t = m \frac{dv}{dt} = 0$, also v constant und $W_n = P_c = \frac{m v^2}{e}$. Es ist sonach die Bewegung in diesem Falle eine gleichförmige, mag die vorgeschriebene Bahn des Beweglichen wie immer gestaltet sein.

Dasselbe muss aus bekannten Gründen auch der Fall sein, wenn die Kräfte $P_1 P_2 \dots$ eine Resultante R haben, die in jedem Punkte der Bahn zu dieser senkrecht gerichtet ist (s. S. 178). Dieselbe Schlussfolgerung würde sich übrigens aus dem Principe der lebendigen Kraft ergeben. So ist z. B. die Bewegung eines schweren materiellen Punktes in einer ebenen, wie immer gekrümmten, absolut glatten Rinne, wenn die Ebene derselben horizontal ist, und wenn außer der Schwerkraft und dem Widerstande W_n keine anderen Kräfte einwirken, nothwendigerweise eine gleichförmige.

Halten sich die Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$ bei der Bewegung des materiellen Punktes, dessen Masse durch m bezeichnet sei, in einer irgendwie gekrümmten vorgeschriebenen Bahn nicht das Gleichgewicht, so kann man zur Bestimmung der Geschwindigkeit v bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit v_0 von dem Principe der lebendigen Kraft Gebrauch machen, nämlich von der Gleichung

$$A_{P_1} + A_{P_2} + A_{P_3} + \dots + A_{W_n} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Da nun aus bekannten Gründen $A_{W_n} = 0$ ist, so ist die Kenntnis der Größe des Widerstandes W_n bei der Bestimmung der Geschwindigkeit v nicht nothwendig und v aus der Gleichung

$$A_{P_1} + A_{P_2} + A_{P_3} + \dots = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \quad (1)$$

dennach genau so zu bestimmen, als würden die Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$ auf einen frei beweglichen Punkt einwirken (s. Gl. 7 S. 182).

Kommen unter diesen Kräften überdies solche Kräfte vor, die sich untereinander das Gleichgewicht halten, oder die zur Bewegungsrichtung normal gerichtet sind, so hat man aus gleichen Gründen auch von diesen bei der Bildung der Gleichung (1) abzusehen.

Sind die Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$ oder ihre Resultierende R als Functionen des Weges s ausdrückbar, so ist auch $A_{P_1} + A_{P_2} + A_{P_3} + \dots$ im allgemeinen als Function von s bestimmbar, so dass mittels der Gleichung (1) (ohne den Widerstand W_n in Rechnung ziehen zu müssen) sich v als Function von s , sonach mit Hilfe der Grundgleichung $ds = v dt$ auch s als Function von t sich im allgemeinen bestimmen lässt.

Ist der materielle Punkt genöthigt, sich in einer derartigen vorgeschriebenen krummen Fläche F zu bewegen, die durch irgend eine Ebene, die zur xy -Ebene gewählt sei, in einer Curve so geschnitten wird, dass die Ebene in jedem Elemente dieser Durchschnittscurve auf dem diesem Curvenelemente benachbarten Flächenelemente senkrecht steht, wie dies z. B. der Fall ist, wenn irgend eine Rotations-

fläche F durch eine durch die Rotationsachse gelegte Meridianebene geschnitten wird, und sind ferner die Kräfte $P_1, P_2, P_3 \dots$ oder zum mindesten die Resultante R derselben zu dieser Ebene stets parallel gerichtet, so kann, wenn auch die Anfangsrichtung der Bewegung (Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v_0) in dieser Ebene gelegen ist, oder aber wenn $v_0 = 0$ ist, der Punkt bei seiner Bewegung aus dieser Ebene nie heraustreten und muss sich längs der besagten Durchschnittscurve bewegen, denn im ersten Zeitelemente muss infolge des Einflusses der Geschwindigkeit v_0 , der Kraft R und des wegen der normalen Lage der Ebene gleichfalls in der letzteren wirkenden Widerstandes W_n der Punkt (nach dem Principe des § 5) in dieser Ebene verbleiben, somit muss auch die Richtung der Endgeschwindigkeit am Ende dieses Zeitelementes, welche zugleich auch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit für das folgende Zeitelement ist, in dieser Ebene gelegen sein, so dass aus denselben Gründen wie früher auch in dem zweiten Zeitelemente die Bewegung in dieser Ebene stattfinden muss — und so kann man dieselbe Betrachtung von Zeitelement zu Zeitelement wiederholen, also auf die ganze Zeit der Bewegung ausdehnen. Es ist somit in der That der materielle Punkt genöthigt, sich längs der ebenen Schnittcurve zu bewegen.

Findet nun die Bewegung längs einer solchen ebenen Curve statt, so ist es leicht, die Größe und Richtung des Widerstandes W_n in jedem beliebigen Punkte der Bahn zu bestimmen. Zu diesem Behufe zerlege man die Resultante der Kräfte $P_1, P_2, P_3 \dots$, deren absoluter Wert durch R bezeichnet sei, in zwei orthogonale Componenten, deren eine P_t die Richtung der Tangente der Bahn hat, deren andere P_n zur Fläche F , daher auch zur Bahn senkrecht wirkt, und deren Richtung daher der ursprünglichen Voraussetzung zufolge in der Ebene der Bahn gelegen sein muss. Wählt man die nach der concaven Seite der Bahn gekehrte (centripetale) Richtung des Krümmungshalbmessers ϱ , die gleichfalls durch ϱ bezeichnet sei, zur positiven Richtung der x -Achse und die augenblickliche Bewegungsrichtung zur positiven Richtung der y -Achse eines orthogonalen Achsensystems, so dass $(xR) = (\varrho R)$ ist, so ist, da der normale Widerstand W_n keine tangentielle Componente hat, P_t nicht nur die Y -Componente der Kraft R , sondern auch der aus W_n und R resultierenden Kraft P und ist sonach zugleich die Tangentialkraft, also $P_y = R \sin(\varrho R) = -P_t = m p_t = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2 s}{dt^2}$, und zwar ist die Bewegung beschleunigt oder verzögert, je nachdem die Richtung von P_t die Richtung der Bewegung hat oder die entgegengesetzte. Die Größe der X -Componente der Kraft R , d. i. der Kraft P_n ist dem Zeichen und Zahlwerte nach durch $P_n = R \cos(\varrho R)$ bestimmt.

Da nothwendigerweise aus den beiden in normaler Richtung wirkenden Kräften P_n und W_n die jedenfalls positive, nämlich nach dem Krümmungsmittelpunkte gerichtete Centripetalkraft $P_x = P_c = \frac{m v^2}{\rho}$ resultieren muss, so muss $P_c = P_n + W_n = R \cos(\varrho R) + W_n$, daher

$$W_n = P_c - P_n = \frac{m v^2}{\rho} - R \cos(\varrho R) \quad (2)$$

sein, wodurch die Größe und Richtung des normalen Widerstandes W_n bestimmt ist.

Würde man auch auf die Reibung Rücksicht nehmen, so müsste der Reibungswiderstand W_t durch die Gleichung $W_t = f W_n$ (wo f den Reibungscoefficienten bedeutet) bestimmt werden, und es würde durch Zusammensetzung dieser Kraft W_t (als einer der Bewegungsrichtung y entgegengesetzt gerichteten Kraft) mit der tangentialen Componente von R , nämlich mit der Kraft $R \sin(\varrho R)$ sich die Tangentialkraft $P_y = P_t = m \frac{dv}{dt}$ als Resultante ergeben. Demnach würde in diesem Falle die Gleichung bestehen

$$m \frac{dv}{dt} = R \sin(\varrho R) - W_t = R \sin(\varrho R) - f W_n$$

oder, wenn man den Wert von W_n aus (1) einsetzt:

$$m \frac{dv}{dt} = R \sin(\varrho R) - f \left[\frac{m v^2}{\rho} - R \cos(\varrho R) \right] \dots \quad (3)$$

Aus dieser Gleichung kann man die tangentiale Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ berechnen, und durch Integration dieser Gleichung ließe sich, wofern die Richtung und Größe der Kraft R und überdies die Gleichung der Bahncurve, also auch die Richtung und Größe des Krümmungshalbmessers ρ für jeden Punkt der Bahn gegeben ist, auch die Geschwindigkeit v , sonach auch s als eine Function von t ermitteln.

Aus der Gleichung (2) folgt, dass der Widerstand W_n in zwei Fällen positiv ist, d. h. die centripetale Richtung hat, und zwar erstens, wenn $\cos(\varrho R)$ negativ ist, also der Winkel, den die Richtung der Resultierenden R der Kräfte $P_1, P_2, P_3 \dots$ mit der centripetalen Richtung einschließt, ein stumpfer Winkel, die Kraft R also nach der convexen Seite der Curve gerichtet ist, und zweitens, wenn diese Kraft wohl nach der convexen Seite gerichtet ist, aber $\frac{m v^2}{\rho} > R \cos(\varrho R)$ ist.

Der Widerstand W_n ist dagegen nach der convexen Seite der Bahn gerichtet, also W_n negativ, wenn die Kraft R nach der concaven Seite der Curve gerichtet ist und überdies der Winkel (ϱR) so gering ist, dass $\frac{m v^2}{\rho} < R \cos(\varrho R)$ ist.

Ist schließlich $\frac{m v^2}{\rho} = R \cos(\varrho R)$, so ist $W_n = 0$, d. h. es leistet die Fläche F in diesem Falle gar keinen normalen Widerstand, so dass sich, wenn diese Bedingungsgleichung für einen jeden Punkt der Bahn erfüllt wird, der materielle

Punkt unter dem Einflusse derselben Kräfte $P_1, P_2, P_3 \dots$ und derselben Anfangsgeschwindigkeit auch dann in derselben Bahn bewegen würde, wenn derselbe vollkommen frei beweglich wäre.

Ist die betrachtete Fläche F nur imstande, einen einseitigen Normalwiderstand W_n zu leisten, wie dies der Fall ist, wenn sich der materielle Punkt m etwa längs der Oberfläche eines feststehenden starren Körpers K bewegt, so hat man nach dem Gesagten zu unterscheiden, ob diese Oberfläche concav oder convex gekrümmt ist. Im ersten Falle (Fig. 62a), wenn sich also m in der concaven Höhlung eines Körpers K , etwa innerhalb einer irgendwie gekrümmten Schale bewegt, kann der Widerstand nur nach der inneren, concaven Seite dieser Schale gerichtet sein und muss daher der Natur der Sache nach im obigen Sinne ein positiver sein. Es kann demnach eine Bewegung längs dieser Oberfläche nur so lange erfolgen, als die Resultierende R der äußeren Kräfte nach der convexen Seite, d. h. in das Innere des Körpers gerichtet ist, z. B. nach Mu (Fig. 62a) oder falls die Kraft R nach auswärts, z. B. nach Mu' gerichtet ist, so lange als der spitze Winkel (ϱR) so groß ist, dass $\cos(\varrho R) < \frac{mv^2}{\varrho R}$ ist.

Sobald $\cos \varrho R > \frac{mv^2}{\varrho R}$ würde, wäre eine Bewegung längs dieser Oberfläche des Körpers K unmöglich, der materielle Punkt müsste demnach diese Oberfläche verlassen und sich frei im Raume in einer anderen Bahn bewegen. Das Verlassen dieser Oberfläche findet in jenem Momente und jenem Punkte der Bahn statt, in welchem $\cos(\varrho R) = \frac{mv^2}{\varrho R}$ wird.

Bewegt sich dagegen der materielle Punkt längs der convexen Oberfläche F eines festen Körpers K (Fig. 62b), so kann W_n der Natur der Sache nach nur

Fig. 62a.

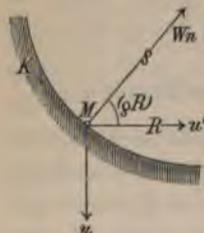
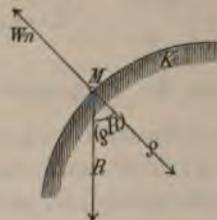


Fig. 62b.



negativ sein, daher ist eine Bewegung längs dieser Fläche F nur so lange möglich, als die Kraft R in das Innere des Körpers K gerichtet ist und der Winkel (ϱR) so klein ist, dass $\cos(\varrho R) > \frac{mv^2}{\varrho R}$ ist. Sobald der Winkel größer wird, bewegt sich der materielle Punkt außerhalb der Oberfläche F frei im Raume

und hebt sich in dem Momente, in welchem $\cos(\varrho R) = \frac{mv^2}{\varrho R}$ ist, von der Fläche F ab.

Die bei der Bewegung in einer vorgeschriebenen Bahn zu den äußeren Kräften $P_1, P_2, P_3 \dots$, respective zu deren Resultierenden R neu hinzutretenden beiden Kräfte, die auf den materiellen Punkt m einwirken, nämlich der normale Widerstand W_n und der Reibwiderstand W_t , deren Resultante durch W bezeichnet sei, rühren von der Einwirkung des Körpers K , der die freie Beweglichkeit des materiellen Punktes verhindert, auf den materiellen Punkt m her. Nach dem Principe der Gegenwirkung muss dementsprechend der Körper K andererseits seitens des materiellen Punktes m eine der Kraft W entgegengesetzte gleiche Einwirkung ($-W$) erfahren, deren normale Komponente ($-W_n$) und deren tangentielle Komponente

($-W_t$) ist. Diese Kraft $-W$ nennt man den Druck auf die Bahn, und die Kraft $-W_n$, die dem normalen Bahnwiderstande entgegengesetzt gleich ist, bezeichnet man als den von dem materiellen Punkte m ausgeübten normalen Druck auf die Bahn.

Handelt es sich nun darum, diese infolge der Bewegung in der vorgeschriebenen Bahn auf den Körper K einwirkende Kraft $-W$, beziehungsweise ihre Componenten $-W_n$ und $-W_t$ zu bestimmen, so ist bloß zu beachten, dass, wie früher auseinandergesetzt wurde, sich die resultierende Kraft P aus den Kräften R , W_n und W_t , somit auch aus R und W zusammensetzt. Nun ist aber P zufolge des § 41 auch anzusehen als die Resultante der Tangentialkraft P_t und der Centripetalkraft P_c , und es sind daher die Kräfte R und W den Kräften P_t und P_c äquivalent. Fingiert man demgemäß zwei den Kräften P_t und P_c entgegengesetzt gleiche Kräfte, die durch $-P_t$ und $-P_c$ bezeichnet seien, so müsste ihre Resultierende $-P$ (der Trägheitswiderstand — force d'inertie) den Kräften R und W das Gleichgewicht halten, daher die Kraft $-W$ sich als Resultierende der Kräfte R und $-P$ oder, was dasselbe heißt, der Kräfte R , $-P_c$ und $-P_t$ ergeben. Übrigens ersieht man dies in einfacherer Weise daraus, dass aus der ursprünglichen geometrischen Gleichheit $P \equiv R \hat{+} W$ oder, was dasselbe besagt, aus $P_c \hat{+} P_t \equiv R \hat{+} W$ unmittelbar gefolgert werden kann die Gleichung $(-W) \equiv R \hat{+} (-P_c) \hat{+} (-P_t)$, wofern man die Anmerkung auf S. 53 beachtet. Um demnach die auf den Körper K während der Bewegung eines materiellen Punktes m (z. B. längs der Oberfläche dieses Körpers K) einwirkende Kraft $-W$ (also den Druck auf die Bahn) auf die einfachste Weise zu bestimmen, hat man nur zu der Kraft R oder, was dasselbe heißt, zu den äußeren auf den materiellen Punkt einwirkenden Kräften P_1 , P_2 , $P_3 \dots$ zwei fictive Kräfte hinzugefügt zu denken, nämlich eine Kraft $-P_c$, die der Centripetalkraft entgegengesetzt gleich ist, die also auch die Größe $\frac{m v^2}{\rho}$ hat, jedoch die centrifugale Richtung (die Richtung nach der convexen Seite der Bahn) hat, und eine der Tangentialkraft entgegengesetzt gleiche Kraft $-P_t$. Jene Kraft, die aus den Kräften P_1 , P_2 , $P_3 \dots$, beziehungsweise ihrer Resultierenden R und den fictiven Kräften $-P_c$ und $-P_t$ sich zusammensetzt, ist dann der gesuchte Druck auf die Bahn, d. i. die Kraft $(-W)$. Die erste fictive Kraft $F = -P_c$, deren absoluter Wert $\frac{m v^2}{\rho}$ und deren Richtung der centripetalen Richtung des Krümmungshalbmessers entgegengesetzt, also centrifugal ist, führt den Namen Centrifugalkraft (Fliehkraft), die zweite fictive Kraft $-P_t$, die als entgegengesetzte Tangentialkraft bezeichnet werden

kann, hat die Größe $-m \frac{dv}{dt}$ und ist, je nachdem die Bewegung beschleunigt oder verzögert ist, der Bewegungsrichtung entgegengesetzt oder mit derselben gleichgerichtet. Der normale Druck auf die Bahn ergibt sich demnach stets durch Zusammensetzung der zur Bahn normalen Componenten der äußeren Kräfte (beziehungsweise der Normalcomponente der Kraft R) mit der Fliehkraft $\frac{mv^2}{\rho}$. Derselbe darf bei einseitigem Widerstande z. B. in Fig. 62 *a* und *b* nicht nach der äußeren Seite des Körpers K gerichtet sein, wenn die Bewegung längs der Fläche F (längs der Oberfläche des Körpers K) erfolgen soll. Ist die Bewegung in der vorgeschriebenen Bahn eine gleichförmige, also v constant, so verschwindet die Kraft $-P_t = -m \frac{dv}{dt}$, so dass dann der Druck auf die Bahn bloß aus der einwirkenden Kraft R und aus der Fliehkraft $F = \frac{mv^2}{\rho}$ resultiert.

Der letzte Fall tritt z. B. ein bei der Rotation unserer Erde, indem jeder auf der Erdoberfläche in relativer Ruhe zur Erde befindlicher Körper genöthigt ist, infolge dieser gleichförmigen Rotation sich in einer vorgeschriebenen Bahn, nämlich im entsprechenden Parallelkreise gleichförmig zu bewegen. Der Druck auf die Bahn ist in diesem Falle der Druck auf die horizontale Unterlage, welche den Körper in relativer Ruhe erhält, also identisch mit dem Gewichte q des Körpers oder dessen relativer Schwere q , welche wohl zu unterscheiden von der Kraft $R = Q$, mit welcher die Erde den Körper, dessen Masse m sei, infolge der Gravitation (Massenanziehung) anzieht, d. i. der absoluten Schwere Q , und zwar ist den früheren Auseinandersetzungen zufolge die relative Schwere oder das Gewicht q des Körpers die Resultante aus der absoluten Schwere Q und aus der Fliehkraft $F = \frac{mv^2}{\rho}$, wo ρ den Krümmungshalbmesser der kreisförmigen Bahn, d. i. den Radius des entsprechenden Parallelkreises bedeutet. Ist durch T die Umdrehungszeit der Erde, also die Secundenzahl eines Sterntages $T = 86164$ bezeichnet, so ist $v = \frac{2\rho\pi}{T}$, sonach $F = mqv^2$, wenn $w = \frac{2\pi}{T} = 0.000\ 072\ 921$, d. i. der Wert von v für $\rho = 1$, mit anderen Worten die Geschwindigkeit eines Punktes in dem Abstände 1 von der Erdachse, die sogenannte Winkelgeschwindigkeit der Erde ist. An den Erdpolen ist $\rho = 0$, also $F = 0$, sonach Q identisch mit dem Gewichte des Körpers an den Erdpolen, wofern man auf der ganzen Erdoberfläche Q als constant, sonach die Erde als kugelförmig, und zwar aus homogenen concentrischen Kugelschalen zusammengesetzt annimmt, in welchem Falle Q überall die Richtung gegen das Erd-

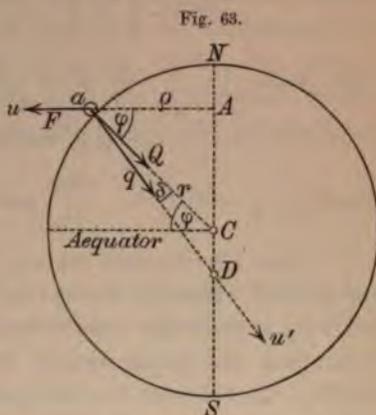
centrum C (Fig. 63) hätte. Durch $G = \frac{Q}{m}$ sei die Beschleunigung der Schwere an den Erdpolen ($G = 9.83193$) und durch $g = \frac{q}{m}$ die messbare Beschleunigung des freien Falles an dem betrachteten Orte der Erdoberfläche, dessen geographische Breite φ sei, bezeichnet. Die Richtung der Fliehkraft F fällt offenbar in die Verlängerung au (Fig. 63) des Radius ρ des betreffenden Parallelkreises, dessen Mittelpunkt A in der Erdachse gelegen ist. Ist r der mittlere Erdradius, d. i. nahezu $\frac{40000000}{2\pi} = 6,367.000$ Meter, so ist

offenbar $\rho = r \cos \varphi$, also $F = m r w^2 \cdot \cos \varphi$. Die Richtungen au' (Fig. 63) der relativen Schwerkraft q (somit auch jene des freien Falles), d. i. die verticalen Richtungen fallen stets in den Kräftewinkel

$(QF) = \sphericalangle u a C = \pi - \varphi$ der beiden Componenten und convergieren sonach für alle Orte desselben Parallelkreises auf der nördlichen (bezw. südlichen) Hemisphäre gegen einen Punkt D der Erdachse NS , der zwischen dem Erdcentrum und dem Südpole (bezw. Nordpole) liegt, jedoch muss D wegen der geringen relativen Größe von F gegen Q , d. i. von $\frac{F}{Q} = \frac{m r w^2 \cos \varphi}{m G} = \frac{r w^2}{G} \cos \varphi = \frac{1}{290.4} \cos \varphi$ sehr nahe dem Erdcentrum C gelegen sein (vergl. S. 81). Da $F : Q = \sin (Qq) : \sin (qF)$ (s. Gl. 5, S. 48), so ist, wenn man (Qq) , d. i. die Abweichung der verticalen Richtung au' vom Erdradius aC durch δ bezeichnet, $F : Q = \sin \delta : \sin [\pi - \varphi - \delta] = \sin \delta : \sin (\varphi + \delta)$, oder wenn man die beiden letzten Glieder durch $\cos \delta$ dividiert, $F : Q = \operatorname{tg} \delta : (\sin \varphi + \cos \varphi \operatorname{tg} \delta)$, so dass, wenn man dies Verhältniß dem früher gefundenen Verhältniß $F : Q = r w^2 \cos \varphi : G$ gleichsetzt, für $\operatorname{tg} \delta$ gefunden wird: $\operatorname{tg} \delta = \frac{r w^2}{G} \sin \varphi \cos \varphi : \left[1 - \frac{r w^2}{G} \cos^2 \varphi \right]$ oder, wenn man $\frac{r w^2}{G} = \frac{1}{290}$ gegen 1 vernachlässigt und wegen der Kleinheit des so bestimmten Winkels $\operatorname{tg} \delta = \delta$ setzt,

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{r w^2}{G} \sin 2\varphi = \frac{1}{581} \sin 2\varphi.$$

Durch diese Formel lässt sich mit großer Annäherung die Abweichung δ der Verticalen au' vom Erdradius aC , welche eine Folge der Erddrehung ist, berechnen.



Nach Gleichung (2), S. 48 ist ferner

$q = \sqrt{Q^2 + F^2 + 2QF \cos(QF)}$, oder da $\cos(QF) = -\cos \varphi$ und $F^2 = F^2 \cos^2 \varphi + F^2 \sin^2 \varphi$ ist,

$$q = \sqrt{(Q - F \cos \varphi)^2 + F^2 \sin^2 \varphi} = \\ = Q \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{F}{Q} \cos \varphi\right)^2 + \left(\frac{F}{Q}\right)^2 \sin^2 \varphi}$$

oder wenn $\left(\frac{F}{Q}\right)^2 \sin^2 \varphi = \frac{1}{290^2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$ vernachlässigt wird,

$q = Q \left(1 - \frac{r w^2}{G} \cos^2 \varphi\right)$, somit, wenn man diese Gleichung durch m

dividiert, $g = G \left(1 - \frac{r w^2}{G} \cos^2 \varphi\right) = 9.83193 \left(1 - \frac{1}{290.4} \cos^2 \varphi\right)$

Diese Gleichungen lehren, dass die Fliehkraft F am Äquator (d. i. für $\varphi = 0$), nämlich $m r w^2$ der 290ste Theil der absoluten Schwerkraft ($Q = m G$) ist, dass ferner g mit φ zunimmt, und dass das hier theoretisch abgeleitete Gesetz der Abhängigkeit der beschleunigenden Kraft g der Schwere von der geographischen Breite φ der Form nach völlig mit der aus Pendelversuchen abgeleiteten Formel (s. S. 131) übereinstimmt. Nur der constante Coefficient $\cos^2 \varphi$ ist nicht, wie hier theoretisch gefunden wurde, $1/290.4$, sondern hat thatsächlich den größeren Wert $1/189.3$. Dies hat seinen Grund darin, dass die Erde nicht, wie hier angenommen wurde, die Form einer Kugel, sondern nahezu eines an den Polen abgeplatteten Rotationsellipsoides, dessen Abplattung $1/299$ beträgt, hat, so dass der Unterschied der Schwere am Äquator und an den Polen durch diesen Umstand, der im selben Sinne auf die Schwerkraft verringern einwirkt, wie die Fliehkraft, noch mehr vergrößert wird, als dies die frühere theoretische Formel bedingen würde.

§ 44. Bewegung eines materiellen Punktes im Falle der Einwirkung einer constanten Kraft von constanter Richtung.

Einfache Folgerungen aus den bisher entwickelten Gesetzen für die Bewegung längs einer vorgeschriebenen Bahn $OMNM'$ (Fig. 64) ergeben sich, wenn von der Reibung abgesehen wird, für den Fall, dass die Resultante R der Kräfte $P_1, P_2, P_3 \dots$ eine constante Kraft von constanter Richtung ist. Es sei diese constante Krafrichtung zur positiven Richtung der x -Achse eines orthogonalen Achsensystems und zum Anfangspunkte O dieses Achsensystems (Fig. 64) irgend ein beliebiger Punkt der Bahn gewählt, in welchem der materielle Punkt m die Geschwindigkeit v_0 besitzen möge. In einem beliebigen zweiten Punkte M der Bahn, wohin das Bewegliche nach Verlauf

einer Zeit t gelangt, wird dasselbe eine Geschwindigkeit v erlangen, die der Gleichung (1) des letzten Paragraphs zufolge bestimmt ist durch die Relation

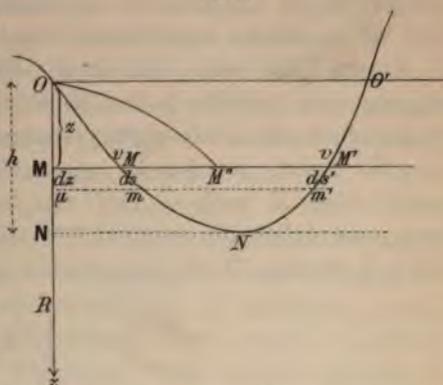
$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = A_R$$

wo A_R die während der Bewegung von O nach M geleistete mechanische Arbeit der Kraft R bezeichnet. Sind xyz die Coordinaten des Punktes M , so ist nach der Gleichung (8), S. 183, $A_R = Rz$, indem z dem Zeichen und Zahlwerte nach in der That die algebraische Summe der Projectionen der einzelnen Elemente der Bahn OM auf die Kraft-richtung darstellt. Es ist sonach

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = Rz \quad (1)$$

Diese Gleichung lehrt, dass die Geschwindigkeit v vollkommen unabhängig ist von der Gestalt der im allgemeinen als eine beliebige räumliche Curve anzusehenden Bahn. Wenn auch die Bewegung in irgendwelcher zweiten Curve OM'' , die mit der Curve OM denselben Anfangspunkt O besitzt und deren Endpunkt M'' dasselbe z hat, also mit M in derselben zur Kraft-richtung senkrechten Ebene gelegen ist, stattfindet, so hat auch der Gleichung (1) zufolge die Endgeschwindigkeit in M und M'' , wenn nur die Anfangs-

Fig. 64.



geschwindigkeit v_0 in beiden Fällen die gleiche ist, denselben, und zwar jenen Wert, den sie auch besitzen würde, wenn der Punkt frei beweglich wäre und sich geradlinig längs der Richtung der Kraft R durch die Wegstrecke z , d. i. von O bis M unter der Einwirkung derselben Kraft (dieselbe Anfangs-geschwindigkeit vorausgesetzt) bewegen würde.

Wird bei der weiteren Bewegung z. B. von M über N nach M' u. s. w. (Fig. 64) z. B. in M' der algebraische Wert des z wieder der gleiche, so muss der Gleichung (1) zufolge auch dasselbe v wiederkehren, d. h. es kehrt dieselbe Geschwindigkeit stets wieder, sobald das Bewegliche in dieselbe zur Kraftrichtung senkrechte Ebene wieder gelangt. Sonach ist auch die Geschwindigkeit in O dieselbe wie in O' u. s. w.

Während der Bewegung von O über M nach N , bei welcher die Bewegungsrichtung mit der Kraftrichtung stets einen spitzen Winkel

einschließt, also z zunimmt, muss nach (1) auch die Geschwindigkeit v zunehmen, die Bewegung ist demnach eine beschleunigte; wenn dagegen die Krafrichtung einen stumpfen Winkel mit der Bewegungsrichtung einschließt, sonach z abnimmt, so ist die Bewegung eine verzögerte, z. B. die Bewegung von N über M' nach O' u. s. w.

In jenem Punkte N der Curve, in welchem die Tangente senkrecht zur Krafrichtung steht, also (wenn man den besonderen Fall eines Wendepunktes ausschließt) wo z einen größten, bezw. kleinsten Wert $\pm h$ hat, findet demnach, falls es überhaupt einen solchen Punkt gibt, ein Geschwindigkeitsmaximum, bezw. -minimum c statt, das nach (1) bestimmt ist durch die Gleichung $\frac{m c^2}{2} - \frac{m v_o^2}{2} = \pm R h$.

Enthält die Curve einen solchen Punkt N , zu dessen Tangente die Krafrichtung normal und für welchen z ein Maximum ist (wie z. B. in Fig. 64), so muss dementsprechend stets die Bewegung gegen diesen Punkt hin eine beschleunigte, dagegen bei der Entfernung von demselben eine verzögerte sein. Bei dieser letzteren Bewegung kommt es im allgemeinen in einem Punkte dahin, dass v endlich Null wird, und die Lage dieses Punktes lässt sich aus (1) bestimmen. In diesem Falle wird offenbar die Bewegung eine schwingende Bewegung sein, und die äußersten Punkte, in welchen $v = 0$ ist, sind in derselben zur Krafrichtung senkrechten Ebene gelegen.

So findet, wenn z. B. $v_o = 0$ ist, die schwingende Bewegung von O über N nach O' und von da wieder zurück bis O u. s. w. statt, mag dabei die Curve ONO' wie immer gestaltet sein. Im beliebigen Punkte M ist dann nach (1)

$$v = \sqrt{2 \frac{R}{m} z} \quad (2)$$

Die Geschwindigkeit in irgend einem Punkte M oder M' der Bahn hat dann denselben Wert wie die Geschwindigkeit, welche ein vom Ruhezustande, und zwar von O aus längs der z -Achse unter der Einwirkung der Kraft R geradlinig bewegter freibeweglicher Punkt in der Projection \mathbf{M} des früheren Punktes M auf die z -Achse erlangt hätte, wobei offenbar vorausgesetzt werden muss, dass bei der weiteren Bewegung im Momente des Anlangens in der Projection \mathbf{N} des Punktes N (Fig. 64) die Geschwindigkeit c in die entgegengesetzt gleiche plötzlich übergehen würde.

Wenn auch bei dieser schwingenden Bewegung in der Bahn ONO' bei der Wiederkehr derselben z auch dieselbe Geschwindigkeit v wiederkehrt, so ist doch die Zeit der Bewegung von O bis N (Fig. 64) im allgemeinen verschieden von der Zeit der Bewegung von N bis O' , und zwar hängt dieselbe von der Form der Bahn ab.

Legt man, um diese Zeit zu bestimmen, im Punkte μ der z -Achse, für welchen die z -Ordinate $z + dz$ ist, eine zur Krafrichtung senkrechte Ebene, welche die Bahn des Punktes in m und m' durchschneidet, und bezeichnet durch ds und ds' die Bahnelemente Mm und $m'M'$, so ist bekanntlich $ds = v dt$ und $ds' = v dt'$, wo v in beiden Gleichungen denselben Wert hat. Es ist demgemäß die Zeit T für den

Weg ON bestimmt durch $T = \int_0^T dt = \int_0^{\text{arc } ON} \frac{ds}{v}$ und für den Weg NO'

durch $T' = \int_0^{T'} dt' = \int_0^{\text{arc } NO'} \frac{ds'}{v}$. Diese beiden Zeiten T und T' sind sicher

dann einander gleich, wenn stets $ds = ds'$ ist, also die Curventheile ON und $O'N$ congruent sind, was sicher dann der Fall ist, wenn die Bahn ONO' des Punktes bezüglich einer durch den Punkt N zur Krafrichtung parallel gezogenen Achse symmetrisch ist.

Wird der Reibungswiderstand bei der bisher untersuchten schwingenden Bewegung berücksichtigt, so muss, da dieser als eine der Bewegung entgegengesetzt gerichtete Kraft anzusehen ist, die Geschwindigkeit in jedem Punkte einen kleineren Wert haben, als der Formel (1) entspricht, daher wird auch der Punkt der Bahn, in welchem wieder $v = 0$ wird, nicht der Punkt O' , sondern ein Punkt sein, dessen $z > 0$ ist; beim Zurückschwingen kommt der schwingende Körper in eine äußerste Lage O'' anderseits, dessen z einen noch größeren Wert hat, und so wird die Amplitude der Schwingungen immer kleiner und kleiner, bis der Körper in N oder (wegen der statischen Reibung) in einem Nachbarpunkte von N zur Ruhe gelangt.

Ist die Bahn des Punktes eine ebene Curve, wie z. B. bei der Bewegung längs der krummen Oberfläche eines starren Körpers K unter den auf S. 188 angeführten Bedingungen, so ist der Gleichung (2), S. 189 zufolge der normale Widerstand W_n gegeben durch die Gleichung $W_n = \frac{mv^2}{\rho} - R \cos(\varrho R)$, oder wenn man den Wert von v aus (1) einführt (wobei vom Reibungswiderstande abgesehen wird)

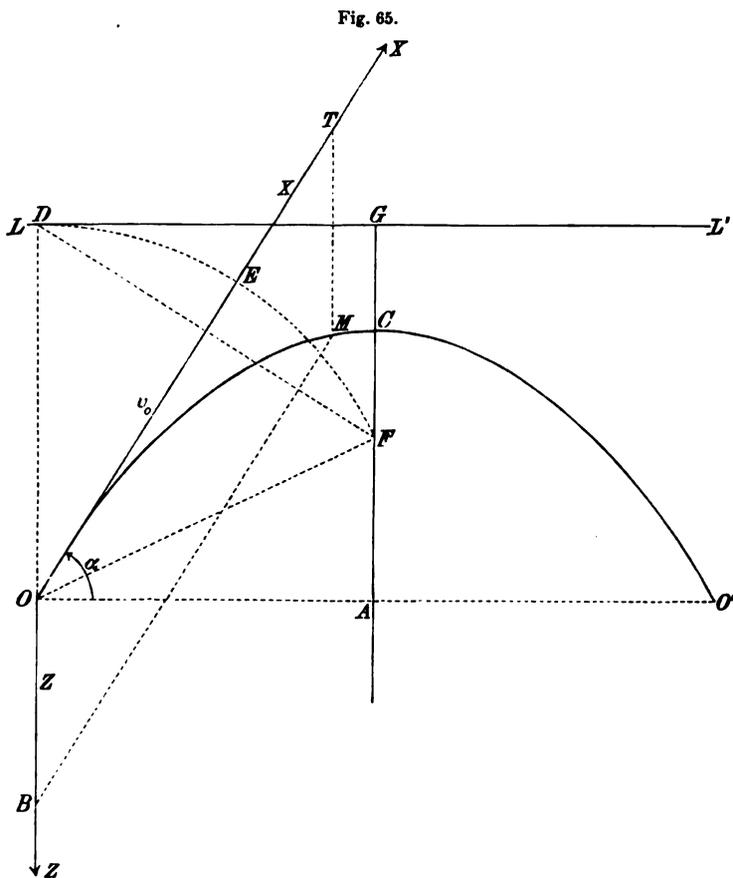
$$W_n = R \left[2 \frac{z}{\rho} - \cos(\varrho z) \right] + \frac{mv_0^2}{\rho} \quad (3)$$

wo W_n positiv oder negativ in Rechnung kommt, je nachdem dieser Widerstand die centripetale oder die centrifugale Richtung hat, also nach der concaven oder convexen Seite der Curve gerichtet ist.

Für $W_n = 0$ würde sich aus der Gleichung (3) die Gleichung jener Bahn ergeben, bei welcher in keinem Punkte ein normaler Druck stattfindet, so dass auch ein freibeweglicher materieller Punkt,

dessen Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist, unter der alleinigen Einwirkung der Kraft R dieselbe Bahn zurücklegen müsste.

Um die Gleichung der Bahn für diesen besonderen Fall eines freibeweglichen materiellen Punktes, der unter dem Einflusse einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 , deren die Bahncurve tangierende Richtung etwa zur positiven X -Achse (Fig. 65) gewählt sei, und unter dem Einflusse einer in der Richtung der positiven Z -Achse wirkenden



constanten Kraft R sich bewegt, in einfacherer Form zu erhalten, braucht man nur etwa von den Gleichungen 9, S. 183 auszugehen und die dort angeführte Methode zu befolgen. In dem vorliegenden Falle ist $P_Z = R$, $P_X = P_Y = 0$; da ferner die Richtung von v_0 in der ZX -Ebene gelegen ist und $P_Y = 0$ ist, so muss die Bewegung aus den auf S. 184 erörterten Gründen stets in der ZX -Ebene vor sich gehen.

Durch Integration der Gleichungen $P_Z = R = m \frac{d^2 Z}{dt^2}$ und $P_X = m \frac{d^2 X}{dt^2} = 0$ ergibt sich, wenn man die constante Beschleunigung

nigung $\frac{R}{m}$ durch r bezeichnet und bei der Bestimmung der Integrationsconstanten beachtet, dass der Anfangswert der Geschwindigkeit $\frac{dZ}{dt}$ Null, jener von $\frac{dX}{dt}$ aber v_0 ist, $\frac{dZ}{dt} = rt$ und $\frac{dX}{dt} = v_0$. Integriert man abermals, so findet man $OB = Z = r \frac{t^2}{2}$ und $OT = X = v_0 t$. Die Integrationsconstanten sind Null, weil für $t = 0$ auch $X = 0$ und $Z = 0$ ist.

Übrigens hätte man diese Gleichungen für $OB = Z$ und für $OT = X$ auch sofort hinschreiben können, da von den beiden componentalen Bewegungen längs OT und OB die erste eine (aus bekannten Gründen) gleichförmige, die zweite aber eine gleichförmig beschleunigte Bewegung ist.

Nach Elimination der Zeit t aus den Formeln $Z = r \frac{t^2}{2}$ und $X = v_0 t$ für die laufenden Coordinaten des Punktes M der Bahn findet man als Gleichung der Bahn $X^2 = 2 \frac{v_0^2}{r} Z$. Diese Gleichung kann aber bekanntlich nur einer Parabel angehören, deren X -Achse eine Tangente derselben und deren Z -Achse der zu dieser Tangente conjugierte Diameter ist, welcher bekanntlich stets zur Parabelachse CA parallel ist. Es erfolgt demnach die Bewegung des Punktes längs des Bogens einer Parabel, deren Achse zur Krafrichtung parallel ist. Da der constante Coefficient des Z in der Parabelgleichung, nämlich $2 \frac{v_0^2}{r}$ dem vierfachen Werte der Entfernung OD (Fig. 65) des Anfangspunktes O von der Leitlinie gleichkommt, so lässt sich die Leitlinie LL' und der Brennpunkt F derart bestimmen, dass man zunächst längs der Z -Achse von O aus in negativer Richtung $OD = \frac{v_0^2}{2r}$ aufträgt, in D die Normale LL' zur Krafrichtung führt, mit OD als Radius von O aus einen Kreisbogen construirt, der die gegebene Parabeltangente in E schneidet und schließlich $arc EF = arc DE$ macht. Von dem so erhaltenen Brennpunkte F hat man nur die Parallele $GCF A$ zur Krafrichtung zu führen, um so die Parabelachse zu bestimmen und ferner die Entfernung FG des Brennpunktes F von der Leitlinie im Punkte C zu halbieren, um den Scheitel C der Parabel zu erhalten. Da die durch den Scheitel C zur Krafrichtung (Parabelachse) geführte Senkrechte die Parabel tangiert, so hat die Geschwindigkeit früheren Erörterungen zufolge in diesem Punkte, falls überhaupt der materielle Punkt dahin gelangt, also $(ZX) > \frac{\pi}{2}$ ist, einen Minimalwert, und da die durch diesen Punkt gehende, zur Krafrichtung parallele Parabelachse eine Symmetrie-Achse der Parabel ist, so werden, wenn O und O' zwei Punkte sind, die in derselben

zur Krafrichtung senkrechten Ebene gelegen sind, die Bahnen OC und CO' in gleichen Zeiten zurückgelegt (siehe S. 197) und es muss $OA = AO'$ sein.

Die Lage LL' der Leitlinie ist der Gleichung $OD = \frac{v_o^2}{2r} = \frac{m v_o^2}{2R}$ zufolge von dem Winkel, den die Anfangsgeschwindigkeitsrichtung mit der Krafrichtung einschließt, d. i. von dem Coordinatenwinkel (ZX) völlig unabhängig.

Bezeichnet man den letzteren Winkel durch $\frac{\pi}{2} + \alpha$, also durch α den positiven oder negativen Winkel $O'OX$, den die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit mit der zur Krafrichtung Normalen OO' bildet, so ist $\sphericalangle OFG = 2\alpha$, da sowohl $\sphericalangle OFD$, als $\sphericalangle DFG$ dem $\sphericalangle ODF$ gleich sind und die Schenkel des letzten Winkels auf jenen des Winkels α senkrecht stehen. Folglich ist $\sphericalangle OFA = \pi - 2\alpha$, somit die halbe Parabelsehne $OA = OF \cdot \sin(\pi - 2\alpha) = OD \cdot \sin 2\alpha$ und $AF = OF \cdot \cos(\pi - 2\alpha) = -OD \cdot \cos 2\alpha$. Es ist demnach

$$OO' = 2 \cdot OA = 2 \cdot OD \sin 2\alpha = \frac{v_o^2}{r} \sin 2\alpha$$

$$FG = AG - AF = OD + OD \cos 2\alpha = 2 OD \cdot \cos^2 \alpha = \frac{v_o^2}{r} \cos^2 \alpha$$

$$FC = CG = \frac{FG}{2} = OD \cdot \cos^2 \alpha = \frac{v_o^2 \cos^2 \alpha}{2r}$$

$$AC = AG - CG = OD - OD \cos^2 \alpha = OD \sin^2 \alpha = \frac{v_o^2 \sin^2 \alpha}{2r}$$

Es ist somit der Parameter der Parabel, d. i. $2FG = 2 \frac{v_o^2}{r} \cos^2 \alpha$ und, je nachdem der Winkel α (falls derselbe positiv, also $(ZX) > \frac{\pi}{2}$ ist) $\alpha > \frac{\pi}{4}$ oder $\alpha < \frac{\pi}{4}$ oder α gleich der Hälfte des rechten Winkels ist, liegt F zwischen A und C oder A zwischen F und C oder ist F mit A identisch. Im letzten Falle liegt auch G in der Richtung OX und ist $OFGD$ ein Quadrat, dessen zur Krafrichtung parallele Seite FG durch den Parabelscheitel halbiert wird; ist $(ZX) = \frac{\pi}{2}$, so ist O selbst der Parabelscheitel und OZ die Parabelachse; ist $(ZX) < \frac{\pi}{2}$, so liegt der Parabelscheitel C auf der linken (negativen) Seite der Z -Achse, und die diesen Scheitel bestimmenden Strecken OA und AC haben den gleichen Zahlwert wie früher u. s. w.

§ 45. Potential.

Die in der Natur wirkenden Kräfte sind in den weitaus meisten Fällen bloß Functionen der relativen Coordinaten des materiellen

Punktes m , auf welchen sie einwirken (nicht auch zugleich Functionen der Zeit), d. h. sie ändern sich bloß mit der Änderung der relativen Lage dieses Punktes zu jenen Körpern, beziehungsweise Punktsystemen, welche auf diesen Punkt einwirken, so dass, wenn man das Coordinatensystem derart wählt, dass sich diese Körper in relativer Ruhe zu demselben befinden, die Richtung und Größe der Kräfte, also auch jene der resultierenden Kraft R bloß von den Coordinaten des Punktes m abhängig sind.

Denkt man sich in einem solchen Falle durch den Punkt m eine beliebige Curve gelegt, deren relative Lage zu dem Achsensystem als unveränderlich vorausgesetzt ist, und nimmt man in derselben einen beliebigen Punkt zum Anfangspunkte an, so dass die jeweilige Lage des materiellen Punktes m in dieser Linie statt durch die Coordinaten auch durch den zwischen m und diesem Anfangspunkte gelegenen (positiven oder negativen) Curventheil s bestimmt ist, so kann man Richtung und Größe der Kraft P offenbar als eine eindeutige Function von s allein ansehen, indem durch s die Coordinaten mit bestimmt sind.

Sehr häufig ist nun dieses Abhängigkeitsverhältnis derart beschaffen, dass, mag die erwähnte Curve welche räumliche Curve immer sein, es eine Function ($-U$) von der Beschaffenheit gibt, dass der Differentialquotient $\left(-\frac{dU}{ds}\right)$ dieser Function ($-U$) genommen nach dem als positiv angenommenen Curvenelemente ds , also das Verhältnis, in welchem der Unterschied $U - U' = -dU$ der Functionswerte in zwei unendlich nahe gelegenen Punkten der Curve zu dem dazwischen gelegenen Curvenelemente ds sich befindet, dem Zeichen und Zahlwerte nach die in der Richtung des positiven Curvenelements wirkende Componente der Kraft P , also (vergl. S. 43) den Wert $P \cdot \cos(ds, P)$ ausdrückt, wobei bekanntlich diese Componente positiv oder negativ in Rechnung kommt, je nachdem sie die Richtung des Curvenelements ds oder die entgegengesetzte hat.

Gentügt nun die einwirkende Kraft P dieser Bedingung, dass ihr nämlich eine Function U entspricht von der Art, dass für eine jede Curve

$$\frac{dU}{ds} = -P \cos(ds, P) \quad (1)$$

ist, so nennt man die Function U das Potential der Kraft P im weiteren Sinne des Wortes. Nicht unerwähnt darf bleiben, dass man diese allgemeine Function öfter (nach Hamilton) als Kraftfunction bezeichnet und den Namen „Potential“ im engeren Sinne des Wortes (oder nach der Bezeichnung von Gauss für den hier betrachteten Fall „Potentialfunction“) jener besonderen Art dieser Kraftfunction gibt,

die speciell für Kräfte, welche im umgekehrten quadratischen Verhältnis der Entfernung (d. i. nach dem Newton'schen Gesetze) anziehend oder abstoßend wirken, giltig ist, in welchem Falle man dann meist statt U das besondere Zeichen V anwendet.

Anmerkung. Zuerst hat die Potentialfunction Laplace, und zwar in der Gravitationstheorie eingeführt. Der Name „Potential“ rührt von dem Engländer Green her, den man füglich als den Schöpfer der Potentialtheorie, die in der Lehre von der Elektrizität, dem Magnetismus, der Wärmetheorie, der Hydrodynamik u. s. w. eine so ausgedehnte Anwendung findet, ansehen kann.

Ist die Kraft P die allein wirkende, beziehungsweise (ganz abgesehen von einem etwaigen normalen Bahnwiderstande) die Resultierende der einwirkenden Kräfte und findet eine Bewegung längs der erwähnten Curve in positiver Richtung (nach welcher s zunimmt, also ds positiv ist) statt, so ist diese tangentielle Componente der Kraft P , nämlich $P \cos(P, ds)$ nach früheren Erörterungen keine andere als die Tangentialkraft $P_t = m \frac{dv}{dt}$.

Da die durch den Punkt m gelegte Linie beliebig angenommen wurde, so kann man dieselbe auch geradlinig und etwa parallel zu irgend einer Achse eines rechtwinkligen Achsensystems xyz annehmen. Ist diese Linie etwa parallel zur x -Achse, so dass in der durch U bezeichneten Function der Coordinaten xyz sich bloß x ändert, dagegen y und z unveränderlich bleiben, so ist in der allgemein giltigen Gleichung (1) ds durch dx zu ersetzen, wobei dx die Richtung der positiven x -Achse hat, und es nimmt dann die Gleichung (1) die Form $\frac{\partial U}{\partial x} = -P \cos(xP) = -X$ an. Die Anwendung der Differentialzeichen ∂ statt der Zeichen d soll hier andeuten, dass bei der Differentiation $\frac{\partial U}{\partial x}$ bloß x allein als variabel, dagegen y und z als constant anzunehmen sind, mit anderen Worten, dass $\frac{\partial U}{\partial x}$ die sogenannte partielle Ableitung (partieller Differentialquotient) nach x ist. In analoger Weise ist $\frac{\partial U}{\partial y} = -Y$ und $\frac{\partial U}{\partial z} = -Z$, d. h. man kann das Potential auch definieren als jene Function der rechtwinkligen Coordinaten xyz , deren partielle Differentialquotienten nach x , bzw. y , bzw. z entgegengesetzt gleich sind der X -, bzw. Y -, bzw. Z -Componente der Kraft P .

So ist z. B. das Potential der Schwerkraft Q , wenn man dieselbe als eine constante Kraft von constanter Richtung voraussetzt und die Richtung vertical nach aufwärts zur positiven Richtung der z -Achse eines orthogonalen Achsensystems wählt, bestimmt durch

$$U = Qz + C \quad (2)$$

wo C eine Constante bedeutet; denn es ist bekanntlich für eine jede Curve $\frac{dz}{ds} = \cos(z, ds)$, und in der That ergibt sich durch Differentiation der Gleichung (2), da die Richtung der z -Achse der Richtung der Schwerkraft entgegengesetzt, also $\cos(z, ds) = -\cos(Q, ds)$ ist, in Übereinstimmung mit der obigen Definition des Potentials

$$\frac{dU}{ds} = Q \cdot \frac{dz}{ds} = Q \cos(z, ds) = -Q \cdot \cos(Q, ds).$$

Desgleichen haben, was wegen der zahlreichen Anwendungen für physikalische Probleme besonders hervorgehoben werden muss, alle Centralkräfte, wenn dieselben bloß Functionen der veränderlichen Entfernung r des Angriffspunktes von den fixen Centralpunkten sind, also die Größe der Centralkräfte bloß von diesen Entfernungen allein abhängt, ein Potential, mag dabei diese Function welcher Art immer sein. Für Gravitationskräfte, elektrische und magnetische Anziehungen und Abstößungen ist z. B. diese Function die des inversen Quadrats dieser Distanzen r .

Um zu beweisen, dass in diesem Falle stets ein Potential U stattfindet, sei zunächst ein einziger fixer Centralpunkt C angenommen und die Kraft, mit der C auf den Punkt m anziehend oder abstößend wirkt, ihrem absoluten Zahlwerte nach durch P bezeichnet. Ist nun die oberwähnte (positive) Function $f(r)$, also

$$P = f(r) \quad (3)$$

und durch U das Integral

$$U = \int \pm f(r) \cdot dr \quad (4)$$

bezeichnet, wo das obere Zeichen für den besonderen Fall einer Anziehung, das untere für jenen der Abstößung in Anwendung zu bringen ist. so ist, wenn $\xi \eta \zeta$ die unveränderlichen Coordinaten des fixen Punktes C und $x y z$ die variablen Coordinaten des angezogenen, beziehungsweise abgestossenen materiellen Punktes m , den man sich in der früher erwähnten beliebigen Curve in dem variablen Bogenabstande s von irgend einem bestimmten Punkte dieser Curve zu denken hat, bedeuten,

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dU}{dr} \cdot \frac{dr}{ds} = \pm f(r) \cdot \frac{dr}{ds} = \pm P \cdot \frac{dr}{ds} \quad (5)$$

ferner

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = r^2.$$

Die veränderlichen Coordinaten $x y z$ sind in der gegebenen Curve als Functionen von s allein anzusehen, und es ist sonach $2r \frac{dr}{ds} = 2(x - \xi) \frac{dx}{ds} + 2(y - \eta) \frac{dy}{ds} + 2(z - \zeta) \frac{dz}{ds}$, daher

$$\frac{dr}{ds} = \frac{x-\xi}{r} \frac{dx}{ds} + \frac{y-\eta}{r} \frac{dy}{ds} + \frac{z-\zeta}{r} \frac{dz}{ds}.$$

Nun ist bekanntlich $\frac{x-\xi}{r} = \cos(xr)$, $\frac{y-\eta}{r} = \cos(yr)$, $\frac{z-\zeta}{r} = \cos(zr)$ und $\frac{dx}{ds} = \cos(x, ds)$, $\frac{dy}{ds} = \cos(y, ds)$, $\frac{dz}{ds} = \cos(z, ds)$, daher

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= \cos(xr) \cos(x, ds) + \cos(yr) \cos(y, ds) + \cos(zr) \cos(z, ds) = \\ &= \cos(r, ds). \end{aligned}$$

Die Richtung des Radius r , die stets von C nach m gerichtet anzunehmen ist, ist der Richtung der Kraft P entgegengesetzt oder mit ihr gleichgerichtet, je nachdem die Kraft P eine anziehende oder eine abstossende ist, daher $\cos(r, ds) = \mp \cos(P, ds)$, wo, wie früher, das obere Zeichen sich auf den ersten, das untere auf den zweiten Fall bezieht, und es ist demnach auch $\frac{dr}{ds} = \mp \cos(P, ds)$. Substituiert man diesen Wert in die Gleichung (5), so findet man, dass in beiden Fällen

$$\frac{dU}{ds} = -P \cdot \cos(P, ds)$$

ist, also der Gleichung (1) für eine jede Curve des Raumes entsprechen wird, oder mit anderen Worten, dass in der That U das Potential der Kraft P ist.

Wirken nun auf den materiellen Punkt m mehrere solche anziehende oder abstoßende Kräfte $P_1, P_2, P_3 \dots$ ein, sind ferner $C_1, C_2, C_3 \dots$ die entsprechenden fixen Attractions- oder Repulsionscentra und $U_1, U_2, U_3 \dots$ die in der früher erwähnten Weise nach der Gleichung (4) gebildeten Potentiale dieser Einzelkräfte, so hat die Resultierende R aller dieser Kräfte ein Potential U , welches bestimmt ist durch

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots \quad (6)$$

Um dies nachzuweisen, braucht man bloß die Richtung von ds für einen Moment etwa zur positiven Richtung der x -Achse eines Coordinatensystems anzunehmen, so dass nach dem eben zuvor bewiesenen Satze $\frac{dU_1}{ds} = -P_1 \cos(xP_1)$, $\frac{dU_2}{ds} = -P_2 \cos(xP_2) \dots$ ist.

Durch Differentiation der Gleichung (6) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dU}{ds} &= \frac{dU_1}{ds} + \frac{dU_2}{ds} + \frac{dU_3}{ds} + \dots \\ &= -P_1 \cos(xP_1) - P_2 \cos(xP_2) - P_3 \cos(xP_3) + \dots \\ &= -\Sigma (P \cos xP) \end{aligned}$$

Nach Gleichung (1) S. 68 ist sonach $\frac{dU}{ds} = -R_x$, d. h. $-\frac{dU}{ds}$ ist die X-Componente der resultierenden Kraft, also die in der Richtung von ds wirkende Componente $R \cos(ds, R)$ der resultierenden Kraft R . Es ist folglich in der That das Potential U der Resultierenden stets gleich der algebraischen Summe $U_1 + U_2 + U_3 + \dots$ der Potentiale der einzelnen anziehenden oder abstoßenden Componenten $P_1, P_2, P_3 \dots$ dieser Kraft.

Der bei weitem wichtigste Fall ist, wie schon früher hervorgehoben wurde, jener, in welchem, wenn P_n irgend eine der Kräfte darstellt, $P_n = \frac{k_n}{r_n^2}$, daher $U_n = \int \pm \frac{k_n}{r_n^2} \cdot dr_n = \mp \frac{k_n}{r_n}$ ist, wo (wofern k_n den absoluten Zahlwert der entsprechenden Constanten bedeutet) das obere Zeichen für anziehende, das untere für abstoßende Kräfte anzuwenden ist. In diesem Falle ist demnach $U = \Sigma U_n = \Sigma \left(\mp \frac{k_n}{r_n} \right)$, und für diese Kraftfunction wird vorzugsweise der besondere Name Potential (Newton'sches Potential) und die Bezeichnung V angewendet.

Anmerkung. Da die Dimension einer Kraft mlt^{-2} ist, so ist der Gleichung (1) zufolge die Dimension des Potentials U (der Kraftfunction) m^2t^{-2} , also sowohl die Dimension, als auch die Einheit für das Potential dieselben wie jene der Arbeit und jene des Moments einer Kraft.

Wenn auch der Potentialwert U der betrachteten Kraft P von der Lage des Punktes m abhängig ist, so gibt es doch im allgemeinen Flächen von der Beschaffenheit, dass das Potential für alle Punkte derselben Fläche denselben Wert hat, welcher Wert von einer Fläche zur anderen sich ändert. Man nennt eine jede solche Fläche eine Niveaufläche oder äquipotentielle Fläche (Gleichgewichtsfläche) oder kurz das Niveau für den betreffenden Potentialwert U . Niveauflächen sind dementsprechend kurzweg zu definieren als Flächen gleichen Potentials. So ist z. B. der Gleichung (2) entsprechend das Potential der Schwerkraft für alle jene Punkte dasselbe, denen das gleiche z , also die gleiche Höhe entspricht, und es ist demnach eine jede Horizontalebene eine Niveaufläche der Schwere.

Wirkt eine Centrakraft, die gegen einen fixen Punkt C hin- oder von demselben weggerichtet ist, auf den materiellen Punkt ein, und ist die Größe dieser Kraft nur eine Function der Entfernung $Cm = r$, so entsprechen der Gleichung (4) zufolge gleichen Werten des r auch gleiche Potentialwerte, und es ist daher eine jede Kugelfläche, deren Mittelpunkt C ist, eine Niveaufläche für diese Centrakraft.

Wirken mehrere anziehende oder abstoßende Kräfte, deren fixe Centralpunkte C_1, C_2 u. s. w. sind, auf den materiellen Punkt m , so ist

die Gestalt der Niveauflächen abhängig von dem Wirkungsgesetze dieser Kräfte und von der gegenseitigen Lage der Punkte C_1 C_2 u. s. w.

Wenn z. B. in einem fingierten Falle zwei fixe Punkte C_1 und C_2 Attractionscentra für Kräfte wären, die etwa für alle Punkte des Raumes den gleichen Zahlwert K hätten, so dass also $P_1 = P_2 = K$ wäre, so müsste den Gleichungen (6),

$$(4) \text{ und } (3) \text{ zufolge } U = U_1 + U_2 = \int + K. dr_1 + \int K. dr_2 = + K (r_1 + r_2) \text{ sein,}$$

oder aber $U = -K (r_1 + r_2)$, wenn eine Abstoßung stattfinden würde. Da demnach in diesen beiden Fällen für alle Punkte derselben Niveaufläche die Summe $r_1 + r_2$ der Entfernungen von den beiden fixen Punkten C_1 und C_2 einen constanten Wert haben müsste, so wären die Niveauflächen in diesem Falle Rotationsellipsoide, die durch Umdrehung von Ellipsen um die Gerade $C_1 C_2$ entstehen, und zwar wären die Punkte C_1 und C_2 die gemeinsamen Brennpunkte aller dieser Ellipsen, kurz die ganze Schar der Niveauflächen wäre eine Schar von confocalen Rotationsellipsoiden. Wäre dagegen die eine Kraft eine anziehende, die zweite eine abstoßende, so wären die Niveauflächen unter der Annahme $P_1 = P_2 = K$, da in diesem Falle $U = \pm K (r_1 - r_2)$ wäre, confocale Hyperboloide, die durch Rotation aller der möglichen Hyperbeln, deren Brennpunkte C_2 und C_1 sind, um die Achse $C_1 C_2$ erhalten werden können u. s. w.

Wäre im Falle einer gegenseitigen Anziehung, bezw. Abstoßung $P_1 = \frac{k}{r_1}$, $P_2 = \frac{k}{r_2}$, so müsste $U = U_1 + U_2 = \int \pm k \frac{dr_1}{r_1} + \int \pm k \frac{dr_2}{r_2} = \pm k l r_1 \pm k l r_2 = \pm k l (r_1 r_2)$ sein. Die Niveauflächen wären demnach in diesem Falle Rotationsflächen, die durch Umdrehung confocaler Cassinischer Curven, für welche bekanntlich $r_1 r_2$ constant ist, um $C_1 C_2$ entstehen u. s. w. Wäre das constante Product $r_1 r_2$ gleich dem vierten Theile des Quadrats der Entfernung der beiden Punkte C_1 und C_2 , so würde die Cassinische Curve in eine Lemniscate übergehen.

Diejenigen Curven, in welchen die Niveauflächen eine beliebige im Raume gelegene Fläche F durchschneiden, bezeichnet man als Niveaulinien auf dieser Fläche F ; so sind für eine jede ebene Fläche die Niveaulinien im Falle einer Centralkraft $P = f(r)$ Kreislinien (und in den letztbetrachteten Fällen Ellipsen, Hyperbeln u. s. w.).

Denkt man sich von dem materiellen Punkte m aus Curven in jener Niveaufläche, in welcher sich derselbe eben befindet, nach allen möglichen Richtungen gezogen und bedeutet ds irgend eines der dem Punkte m benachbarten Curvenelemente einer dieser Curven, so ist $\frac{dU}{ds} = 0$, da U in allen Punkten der Niveaufläche denselben Wert hat, also die Änderung des U beim Übergange von einem Punkte derselben zum anderen Null ist. Ist demnach P die einwirkende Kraft, deren Potential U ist, so lehrt die Gleichung (1), dass dann auch $P \cos(P, ds) = 0$, also jedenfalls, da $P > 0$ ist, $\cos(P, ds) = 0$ ist, d. h. die Richtung der Kraft steht auf allen diesen vom Punkte m in der Niveaufläche gezogenen Curvenelementen ds senkrecht. Es ist demnach die Kraft P in jedem Punkt einer dieser Kraft P zugehörigen Niveaufläche zu dieser normal gerichtet.

Denkt man sich die den Potentialwerten $U, U + dU, U + 2dU$ u. s. w. entsprechenden Niveauflächen S, S', S'' u. s. w. construiert, so dass also das Potential beim Übergange von einer Niveaufläche zur folgenden immer um dasselbe dU sich ändert, und errichtet in einem beliebigen Punkte m der ersten Niveaufläche S eine Normale zu derselben bis zur Fläche S' , in dem Schnittpunkte mit der letzteren eine Normale zu S' bis zur Fläche S'' , in dem jetzt erhaltenen Durchschnittpunkte eine Normale zu S'' u. s. w., so erhält man eine gebrochene Linie, welche, wenn dU unendlich klein ist, in eine krumme Linie übergeht, deren Curvenelemente auf den betreffenden Niveauflächen durchwegs senkrecht stehen, die mit einem Worte eine orthogonale Trajectorie aller Niveauflächen ist. Je nach der Wahl der Lage des Punktes m in der Fläche S erhält man immer andere Curven, also ein ganzes System solcher Trajectorien. Man bezeichnet diese orthogonalen Trajectorien der Niveauflächen als Kraftlinien. Ihre Curvenelemente lassen nach dem früheren Satze die Krafrichtung an der entsprechenden Stelle erkennen, und zwar ist die Kraft stets nach jener Richtung des Curvenelements dn der Kraftlinie gerichtet, nach welcher das Potential abnimmt, denn soll die Richtung dieses Curvenelements dn mit der Krafrichtung P übereinstimmen, so muss $(P, dn) = 0$, sonach der Gleichung (1) zufolge $\frac{dU}{dn} = -P \cos(P, dn) = -P \cos 0 = -P$, also negativ sein, was nur dann möglich ist, wenn U in der Richtung des Curvenelements dn , d. i. in der Richtung der Kraft abnimmt. Zugleich ist, wenn die Änderung des U immer um dasselbe dU stattfindet, bei dem längs der Kraftlinie erfolgenden Übergange von einer Niveaufläche zur folgenden die Kraft P (der letzten Gleichung zufolge) dem durchlaufenen Curvenelemente dn der Kraftlinie invers proportional, so dass dieser Normalabstand dn zweier unmittelbar auf einander folgender Niveauflächen ein Maß für die Größe P der Kraft liefert. Die Zeichnung dieser Schar von Niveauflächen liefert demgemäß ein klares Bild von der Vertheilung der Kraftintensität im Raume, indem dort, wo die Niveaulinien sich dichter häufen, die Kraft größer, dagegen an lichterem Stellen der Zeichnung die Kraftintensität kleiner ist.

Die Kraftlinien der Schwerkraft sind die einzelnen Verticallinien. Die Kraftlinien einer Centrakraft sind die in dem Centralpunkte sich schneidenden Strahlen, die Kraftlinien für die früher erwähnten confocalen ellipsoidischen, beziehungsweise hyperboloidischen Niveauflächen sind mit denselben confocale Hyperbeln, beziehungsweise Ellipsen u. s. w.

Ist P die Resultante sämmtlicher auf den materiellen Punkt m einwirkenden Kräfte und U ihr Potential, so ist — mag der materielle

Punkt frei beweglich sein, oder mag derselbe sich in einer vorgeschriebenen Bahn ohne Reibung bewegen, in welchem Falle zu P der Normalwiderstand W der Bahn hinzutritt — in jedem Falle, wenn ds das Bahnelement des materiellen Punktes bedeutet, die Componente $P \cos(ds, P)$ die Tangentialkraft P_t selbst, so dass $-\frac{dU}{ds} = m \frac{dv}{dt}$ ist.

Ist A_P die von irgend einer Kraft P (mag dieselbe die Resultante oder irgend eine der Componenten sein) geleistete mechanische Arbeit, während der materielle Punkt sich von irgend einem Punkte der Bahn, für welchen $s = 0$ ist, und welcher einer dieser Kraft entsprechenden Niveaufläche S_0 , deren Potential U_0 ist, angehört, nach einem beliebigen zweiten Punkte der Bahn bewegt, der in einer Niveaufläche S mit dem Potential U gelegen ist, so ist dem Begriffe der mechanischen Arbeit und jenem des Potentials zufolge

$$A_P = \int_0^s P \cdot \cos(P, ds) ds = - \int_0^s \frac{dU}{ds} ds = - \int_{U_0}^U dU$$

also $A_P = U_0 - U \dots (7)$,

d. h. es ist stets, mag die Bahn des Punktes m und mögen auch die Geschwindigkeiten welche immer sein, die geleistete mechanische Arbeit einer jeden Kraft P gleich der Differenz der dem Anfangspunkte und dem Endpunkte der Bahn entsprechenden Potentiale U_0 und U dieser Kraft. Es ist daher bei der Bewegung von einem beliebigen Punkte einer Niveaufläche S_0 nach einem beliebigen Punkte einer zweiten Niveaufläche S die geleistete mechanische Arbeit stets dieselbe, sie ist vollkommen unabhängig von der Form der Bahn, ferner von der Bewegungsrichtung und auch unabhängig davon, ob der Punkt freibeweglich ist oder nicht. Kehrt der materielle Punkt nach einer gewissen Zeit in dieselbe Niveaufläche S_0 wieder zurück, nachdem er irgend welche Bahn zurückgelegt hat, so ist $U_0 = U$, daher $A_P = 0$, d. h. es ist die in dieser Zeit geleistete Arbeit Null (mit anderen Worten: es wurde in dieser Zwischenzeit dasselbe Arbeitsquantum während eines Theiles der Bewegung producirt, das während des anderen Theiles der Bewegung consumirt wurde).

Nach dem Principe der lebendigen Kraft ist ferner, wenn P die Resultante aller einwirkenden Kräfte ist (wobei vom Normalwiderstande der etwa vorgeschriebenen Bahn abgesehen werden kann)

$$A_P = A_{P1} + A_{P2} + A_{P3} + \dots = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$

somit zufolge der Gleichung (7), wenn durch U das Potential dieser resultierenden Kraft P bezeichnet ist,

$$U_0 - U = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \dots (8)$$

Bei einer gegebenen Größe der Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist demnach die Endgeschwindigkeit v bei einer Bewegung des materiellen Punktes von irgend einem Punkte einer der resultierenden Kraft zugehörigen Niveaufläche S_0 nach irgend einem Punkte einer zweiten, derselben Kraft entsprechenden Niveaufläche S stets dieselbe, mag die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit und die Gestalt der Bahn welche immer sein und mögen ferner die Punkte in diesen Niveauflächen wo immer gelegen sein. Es ist ferner dabei vollkommen gleichgültig, ob der materielle Punkt frei beweglich ist oder nicht.

Kehrt der Punkt m nach irgend welcher Zeit und nach der Zurücklegung irgend welcher Bahn in dieselbe Niveaufläche S_0 (wenn auch nicht in dieselbe Lage) wieder, so ist $U = U_0$, daher zufolge (8) auch $v = v_0$, d. h. es muss dann seine Endgeschwindigkeit der anfänglichen Geschwindigkeit an Größe gleich sein.

§ 46. Centralbewegung.

Eine jede Bewegung eines freibeweglichen materiellen Punktes, die unter der Einwirkung solcher Kräfte vor sich geht, deren Resultierende P nach einem fixen Punkte C (dem Centralpunkte) hin — oder von demselben weg — gerichtet ist, kurz deren Resultierende P eine Centralkraft (vergl. S. 151) ist, heißt eine Centralbewegung. Damit durch die Kraft P eine krummlinige Bewegung hervorgerufen werde, ist offenbar bloß nothwendig, dass die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v_0 nicht in die Gerade falle, die den Centralpunkt C mit der Anfangslage M_0 des Beweglichen verbindet. Die Bahn des Punktes muss dann, da die Richtung der Centralkraft stets in der durch die Richtung von v und durch den Leitstrahl CM gelegten Ebene sich befindet, aus bekannten Gründen (siehe S. 184) eine Curve, die in dieser den Centralpunkt C enthaltenden Ebene gelegen ist, also jedenfalls eine ebene Curve sein. Der materielle Punkt, dessen Masse m sei, kann aus dieser Ebene nie heraustreten.

Nimmt man den Centralpunkt C zum Pole eines Polarcoordinatensystems und irgend eine durch C gelegte Achse zur Polarachse an, so ist in den hier zur Anwendung kommenden Formeln 10 S. 184 $P_r = \pm P$, je nachdem die Kraft P eine abstoßende oder anziehende ist, und $P_n = 0$ zu setzen. Es ist demnach allgemein für alle Punkte der ebenen Bahn

$$\frac{m}{r} \cdot \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0 \dots (1)$$

Da nun die Masse m nicht Null und r nicht ∞ ist, so ist für die ganze Dauer der Bewegung $\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0$, also $r^2 \frac{d\varphi}{dt}$ stets

constant. Bezeichnet man den vom Radius vector r in der variablen Zeit t durchlaufenen Sector durch F , so ist, wenn der positive Drehungssinn derart gewählt wird, dass der Polarwinkel φ bei der Bewegung zunimmt, bekanntlich $dF = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$. Daher ist auch

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = k \dots (2)$$

constant, somit $F = kt$, wofern für $t = 0$ auch $F = 0$ angenommen wird, d. h. wofern der Sector F von der der Zeit 0 entsprechenden Lage CM_0 des Radius vectors r_0 aus gezählt wird. Es bewegt sich demnach der Radius vector r bei jeder Centralbewegung in gleichen Zeiten durch Sektoren von gleichem Flächeninhalte (mit anderen Worten: F ist der Zeit t direct proportional). Der constante Factor k bedeutet der Gleichung

$$F = kt \dots (3)$$

gemäß die Fläche des von dem Radius vector in der Zeiteinheit durchlaufenen Sectors.

Von dem letzteren Satze ist auch die Umkehrung streng gültig. Sind nämlich die Sektoren, durch welche sich der Leitstrahl r , welcher einen fixen Punkt C mit dem beweglichen materiellen Punkte M verbindet, in gleichen Zeiten hindurchbewegt, flächengleich, so ist diese Bewegung eine Centralbewegung, deren Centralpunkt C ist, d. h. diese Bewegung kann nur stattfinden, falls Kräfte wirksam sind, deren Resultierende stets die Richtung MC oder die entgegengesetzte Richtung CM hat.

Um dies darzuthun, hat man umgekehrt auszugehen von der aus der nunmehrigen Annahme zu folgernden Proportionalität von F und t , also von der Gleichung $F = kt$, wo k einen constanten Factor bedeutet, aus welcher Gleichung folgt, dass auch $\frac{dF}{dt} = k$, oder $\frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = k$, somit $\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0$ ist, so dass den Gleichungen (10) S. 184 zufolge $P_n = 0$ ist, weshalb nur die radiale Kraft P_r allein als resultierende Kraft übrig bleibt.

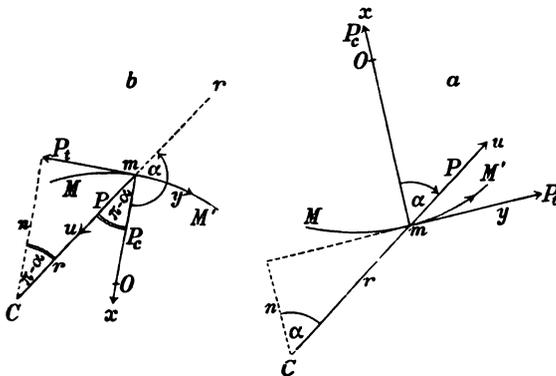
Da bei einer Centralbewegung die Centrakraft P_r die resultierende Kraft ist, so müssen die im allgemeinen bei jeder krummlinigen Bewegung auftretenden beiden Kräfte, die Centripetalkraft $P_c = \frac{mv^2}{\rho}$ und die Tangentialkraft $P_t = m \frac{dv}{dt}$ Componenten der Centrakraft P_r sein, welche letztere der Intensität und dem Zeichen nach — nämlich positiv für den Fall einer Abstoßung, wo P_r mit r

gleichgerichtet ist (Fig. 66 a), negativ für den Fall einer Anziehung (Fig. 66 b) — zufolge der Gleichung (10) S. 184 bestimmt ist durch

$$P_r = \pm P = m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \dots (4)$$

Zunächst ist zu bemerken, dass bekanntlich die Richtungen der beiden orthogonalen Komponenten P_t und P_c mit der Richtung mu der resultierenden Centrakraft P (Fig. 66 a und b) immer spitze Winkel

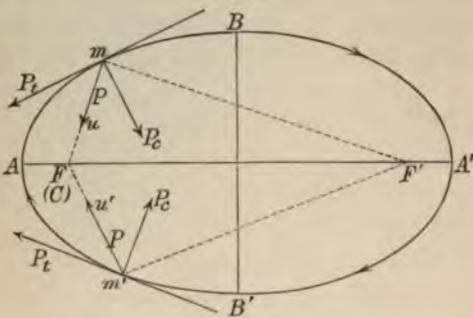
Fig. 66.



einschließen müssen. Da nun die Centripetalkraft P_c stets gerichtet ist nach dem Mittelpunkte O des Krümmungskreises, als dessen Bogenelement das dem Punkte m zunächst liegende Bahnelement MM' angesehen werden kann, so ist der Winkel $\sphericalangle Om u$ stets ein spitzer und demnach der Winkel $Om C$ stumpf oder spitz, je nachdem die Richtung mC der Richtung mu entgegengesetzt ist (Fig. 66 a) oder mit derselben übereinstimmt (Fig. 66 b), also je nachdem P_r positiv oder negativ, mit anderen Worten: je nachdem die Centrakraft eine abstoßende oder eine anziehende ist. Nun schließt bei einem jeden Kreise die centripetale Richtung mO des Halbmessers mit jenen Richtungen, die vom Endpunkte m desselben zu den auf der convexen Seite des benachbarten Kreisbogens MM' (also auf jener Seite der Tangente des Punktes m , auf welcher nicht der Kreisbogen MM' gelegen ist) befindlichen Punkten C (Fig. 66 a) gezogen werden, stumpfe Winkel ein; befindet sich dagegen C auf der concaven Seite (Fig. 66 b), also mit dem Bogenelemente MM' auf derselben Seite der Tangente, so ist dieser Winkel $Om C$ ein spitzer Winkel. Demgemäß wendet die Bahncurve bei jeder Centralbewegung dem Centralpunkte C stets die convexe (Fig. 66 a) oder aber die concave Seite (Fig. 66 b) zu, je nachdem P_r positiv oder negativ, also die Centrakraft eine abstoßende oder eine anziehende ist.

Da ferner auch der Winkel, den die Richtung der Tangentialkraft P_t mit jener der Centrakraft einschließt, stets ein spitzer sein muss, so kann man daraus sofort erkennen, wann bei einer Centralbewegung in irgend einer Bahn die Kraft P_t die Richtung der Bewegung hat, also die Bewegung eine beschleunigte ist, wann dieselbe dagegen eine verzögerte ist. So ist z. B. bei der Bewegung in der ellip-

Fig. 67.



tischen Bahn (Fig. 67), die etwa im Sinne des Pfeiles von A über B nach A' und B' u. s. w. erfolgt, wenn dieselbe eine Centralbewegung ist und die Centrakraft P gegen den einen der beiden Brennpunkte F und F' der Ellipse hin anziehend wirkt (so dass etwa F identisch mit dem Centralpunkte C ist), die Bewegung von dem dem Centralpunkte C nächsten Scheitelpunkte A der Ellipse nach dem entferntesten Punkte A' , weil die

für den Punkt m auf die besagte Art als Componente von P sich ergebende Kraft P_t der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist (siehe Fig. 67), eine verzögerte, dagegen die Bewegung von A' über m' nach A zurück eine beschleunigte, weil P_t in der Richtung der Bewegung wirkt (die Richtung von P_n halbiert hierbei bekanntlich stets den Winkel FmF' , bezw. $Fm'F'$); in den Scheitelpunkten A und A' ist $P_t = m \frac{dv}{dt} = 0$ — entsprechend dem Maximum, bezw. Minimum der Geschwindigkeit v .

Wählt man für einen Augenblick die centripetale Richtung mO (Fig. 66) der Normalen bei irgend einer Centralbewegung zur positiven Richtung der x -Achse und die Bewegungsrichtung zur positiven Richtung der y -Achse und bezeichnet den Richtungswinkel (xr) , den nämlich die Richtung mO (von m gegen den Krümmungsmittelpunkt) mit der positiven Richtung Om des Radius vectors r einschließt, durch α , so ist zufolge § 13 $X = P_r \cos (xr) = P_r \cos \alpha = P_n$, $Y = P_r \sin (xr) = P_r \sin \alpha = P_t$, daher

$$\left. \begin{aligned} P_r \cos \alpha &= \frac{mv^2}{e} \\ P_r \sin \alpha &= m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2s}{dt^2} \end{aligned} \right\} (5)$$

Da die senkrecht zum Leitstrahle r gerichtete Geschwindigkeitscomponente $v_n = r \cdot \frac{d\varphi}{dt}$ (siehe Gleichung (11) S. 115) eine der beiden orthogonalen Componenten (v_r, v_n) der resultierenden Geschwindigkeit v ist, so ist $v_n = \pm v \cos \alpha$, wo sich das obere Zeichen auf den Fall (Fig. 66a) einer Abstoßung (eines positiven P_r) und das untere Zeichen auf jenen einer Anziehung (eines negativen P_r) bezieht (siehe Fig. 66b)

Es ist demnach auch $\pm v \cos \alpha = r \frac{d\varphi}{dt}$, und wenn man für $\frac{d\varphi}{dt}$ zufolge der Gleichung (2) einsetzt: $\frac{2k}{r^2}$, so findet man

$$v = \frac{2k}{\pm r \cos \alpha} = \frac{2k}{n} \dots (6)$$

wo n (siehe Fig. 66) die Normale, welche vom Centralpunkte C auf die der jeweiligen Lage m des Punktes zugehörige Tangente der Bahn geführt ist, bedeutet.

Die letzte Gleichung, die sich übrigens auch in höchst einfacher Weise so ableiten ließe, dass man das dreieckförmige Flächenelement dF , das nach (2) durch $k \cdot dt$ gegeben ist, aus leicht ersichtlichen Gründen auch anderseits dem Producte $\frac{1}{2} n \cdot ds$ gleichsetzt, spricht das Gesetz aus, dass bei einer und derselben Centralbewegung die Geschwindigkeiten v in verschiedenen Punkten der Bahn den vom Centralpunkte C auf die Tangenten geführten Normalen n invers proportional sind, und ebenso muss umgekehrt, wenn eine Bewegung diese letztere Eigenschaft für einen gewissen fixen Punkt C hat, diese Bewegung eine Centralbewegung und C der Centralpunkt derselben sein, denn es ist, wenn man das constante Product nv durch $2k$ bezeichnet, $\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} n \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} nv = k$, also, wenn zur Zeit $t = 0$ auch $F = 0$ angenommen wird, $F = kt$, wie in Gleichung (3), so dass auch die aus dieser Gleichung früher deducierte Folgerung gültig ist.

Setzt man in der ersten der Gleichungen (5) den Wert von v^2 aus der Gleichung (6) ein, nämlich $v^2 = \frac{4k^2}{r^2 \cos^2 \alpha}$, so findet man

$$P_r = 4mk^2 \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \rho \cos^3 \alpha} \dots (7)$$

oder auch, wenn man $\cos \alpha = \pm \frac{n}{r}$ setzt (siehe Fig. 66)

$$P_r = \pm 4mk^2 \cdot \frac{r}{n^3 \rho} \dots (8)$$

Die Gleichungen (7) und (8) gestatten sowohl, wenn das Gesetz, nach welchem die Centralkraft P_r sich mit r und φ ändert, gegeben ist, die Art der Bahn zu bestimmen, als auch anderseits — was einfacher ist — den Wert zu bestimmen, den die Centralkraft haben muss, wenn die Centralbewegung in einer bestimmten Bahn erfolgen soll. Wie sich aus dem Gesagten ergibt, kann die Bewegung in einer jeden beliebigen Bahn eine Centralbewegung sein, für welche auch der Centralpunkt beliebig ist, nur müssen v und P_r den Gleichungen 6, 7, 8 entsprechen.

Anmerkung. Man kann die Ausdrücke 7 und 8 für die Centralkraft bei gegebener Bahn und gegebenem Centralpunkte (dem Pole der Polarachse) auch mannigfach umformen, so ist z. B. auch $P_r = -4mk^2 \cdot \frac{1}{n^2} \frac{dn}{dr}$ u. s. w.; man kann so auch aus der Gleichung (2), nämlich aus $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = 2k$ und aus der Gleichung (4) leicht folgenden bemerkenswerten Wert ableiten

$$P_r = -\frac{4mk^2}{r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{d\varphi^2} \right]$$

Es ist dies die von Binet herrührende Formel. Es entspricht auch in dieser Formel, wie in allen folgenden, ein positives P_r einer Abstoßung, ein negatives P_r einer Anziehung.

Ist die Centralkraft P_r von φ unabhängig und (wie in den meisten Fällen der Natur) eine bloße Function der Entfernung r vom Centralpunkte, nämlich $P_r = \pm f(r)$, so hat dieselbe, wie schon im § 45 nachgewiesen wurde, ein Potential U , und zwar ist

$$U = - \int P_r \cdot dr \dots (9)$$

und es haben dann alle im § 45 für diesen Fall nachgewiesenen Sätze Giltigkeit.

Es sollen nun im Folgenden die gewonnenen allgemeinen Ergebnisse auf einige wichtigere Fälle in Anwendung gebracht werden.

a) Erfolgt eine Centralbewegung in einer Kreisbahn vom Radius r und ist zudem der Centralpunkt der Kreismittelpunkt, so ist $n = \rho = r$ und $\alpha = \pi$ zu setzen, so dass nach (7) und (6) $P_r = -\frac{4mk^2}{r^3}$ und $v = \frac{2k}{r}$ ist. Es muss demnach eine solche Bewegung eine gleichförmige sein, für welche v den constanten Wert $\frac{2k}{r}$ und die Winkelgeschwindigkeit $w = \frac{d\varphi}{dt}$ nach (2) den Wert $\frac{2k}{r^2}$ hat, daher $k = \frac{r^2 w}{2}$, somit

$$P_r = -\frac{4mk^2}{r^3} = -mr \cdot w^2 \dots (10) \text{ ist.}$$

Es ist dies dann die im § 41, S. 179 schon untersuchte Bewegung, bei welcher die Centripetalkraft mit der Centralkraft identisch ist.

Bedeutet T die Umlaufzeit, so ist offenbar $kT = r^2 \pi$, $vT = 2r\pi$ und $w = \frac{2\pi}{T}$, und es ist daher, wie auf S. 179

$$P_r = -4\pi^2 \cdot \frac{mr}{T^2} \dots (11)$$

b) Ein besonders wichtiger Fall, zumal in seiner Anwendung auf die kosmischen Bewegungen von hoher Bedeutung, ist jener, in welchem die Centralkraft dem Quadrate der Entfernung r vom

Centralpunkte invers proportioniert ist, so dass, wenn durch μ die Beschleunigung dieser Kraft in der Entfernung 1 bezeichnet ist,

$$P = \pm \frac{m \mu}{r^2} \dots \quad (12)$$

wo das obere Zeichen wie früher und auch stets späterhin auf den Fall einer Abstoßung, das untere auf jenen einer Anziehung Bezug hat.

Die Geschwindigkeit v_o und deren Richtung in irgend einem bestimmten Zeitpunkte, der zum Anfangspunkte der Zeit gewählt sei, sowie auch die Lage M_o des beweglichen Massenpunktes m zu dieser Zeit sei gegeben. Der diesem Momente entsprechende Radius vector CM_o sei r_o , und die Bewegungsrichtung v_o schließe mit diesem Leitstrahle den als gegeben angenommenen hohlen Winkel α_o ein ($\alpha_o < \pi$). Die Richtung von $\overline{CM_o} = r_o$ sei als positive Richtung der Polarachse (bezw. x -Achse), der Centralpunkt C als Pol (bezw. Anfangspunkt des Coordinatensystems) und der Polarwinkel φ sei in der Richtung der Bewegung positiv angenommen.

Es stellt dann zur Zeit Null $v_n = r_o \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{\varphi=o}$ (Gleichung 11, S. 115) die zu r_o normale Geschwindigkeitscomponente, nämlich $v_o \sin \alpha_o$ dar, so dass $\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{\varphi=o} = \frac{v_o \sin \alpha_o}{r_o}$ ist, weshalb auch der in der Zeiteinheit durchstreifte Sector k nach (2) durch

$$k = \frac{1}{2} r_o^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{\varphi=o} = \frac{1}{2} v_o r_o \sin \alpha_o \dots \quad (13)$$

bestimmt ist.

Nimmt man die positive Richtung der y -Achse des Achsensystems derart an, dass für dieselbe $\varphi = + \frac{\pi}{2}$ ist, so ist

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= P_r \cos \varphi = \pm \frac{m \mu}{r^2} \cos \varphi \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= P_r \sin \varphi = \pm \frac{m \mu}{r^2} \sin \varphi \end{aligned}$$

Dividirt man diese Gleichungen durch m und integriert dieselben nach t innerhalb des Intervalls $t = o$ bis t , so erhält man, da die zu der x - und y -Achse parallelen Geschwindigkeitscomponenten zur Zeit Null $v_o \cos \alpha_o$ und $v_o \sin \alpha_o$ sind,

$$\frac{dx}{dt} - v_o \cos \alpha_o = \pm \mu \int_0^t \frac{\cos \varphi}{r^2} dt, \quad \frac{dy}{dt} - v_o \sin \alpha_o = \pm \mu \int_0^t \frac{\sin \varphi}{r^2} dt$$

Substituiert man ferner für dt den aus (2) sich ergebenden Wert $dt = \frac{1}{2} \frac{r^2}{k} d\varphi$, so findet man

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} - v_0 \cos \alpha_0 &= \pm \frac{\mu}{2k} \int_0^\varphi \cos \varphi \, d\varphi = \pm \frac{\mu}{2k} \sin \varphi \\ \frac{dy}{dt} - v_0 \sin \alpha_0 &= \pm \frac{\mu}{2k} \int_0^\varphi \sin \varphi \, d\varphi = \pm \frac{\mu}{2k} (1 - \cos \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Führt man, um die Gleichung der Bahn auf eine einfache Form zu bringen, zwei durch die gegebenen Größen v_0 , α_0 , k und bestimmten Größen c und φ_0 ein, die mit diesen Constanten der beiden letzten Gleichungen so zusammenhängen, dass

$$\begin{aligned} c \sin \varphi_0 &= v_0 \cos \alpha_0 \\ c \cos \varphi_0 &= v_0 \sin \alpha_0 \pm \frac{\mu}{2k} \end{aligned}$$

wird, so dass also bei Beachtung des Wertes k aus (13) c und φ_0 bestimmt ist durch

$$\left. \begin{aligned} c &= \sqrt{c^2 \sin^2 \varphi_0 + c^2 \cos^2 \varphi_0} = \sqrt{v_0^2 \pm \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu^2}{4k^2}} \\ \sin \varphi_0 &= \frac{v_0 \cos \alpha_0}{c}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{v_0 \sin \alpha_0 \pm \frac{\mu}{2k}}{c} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

so nehmen die Gleichungen (14) folgende Form an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= c \sin \varphi_0 \pm \frac{\mu}{2k} \sin \varphi \\ \frac{dy}{dt} &= c \cos \varphi_0 \mp \frac{\mu}{2k} \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Nun ist, wie sich durch Differentiation der bekannten Transformationsgleichungen $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ und nachfolgender Elimination von $\frac{dr}{dt}$ ergibt (siehe Gleichung (10), S. 115) $r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \cos \varphi \frac{dy}{dt} - \sin \varphi \frac{dx}{dt}$ und nach (2) $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2k}{r^2}$, somit, wenn man die Werte aus (16) einsetzt, $\frac{2k}{r} = \mp \frac{\mu}{2k} + c \cdot \cos(\varphi + \varphi_0)$ und

$$r = \frac{4k^2}{1 \mp \frac{\mu}{2kc} \cos(\varphi + \varphi_0)} \dots \quad (17)$$

Dies ist die allgemeine Polargleichung der ebenen Bahn, welcher sich das Bewegliche unter der Einwirkung der Centralkraft (12) bewegt.

1. Beachtet man zunächst die oberen Qualitätszeichen, d. h. nimmt man an, dass die im inversen Verhältnisse zum Quadrat der Entfernung r stehende Kraft P_r eine abstoßende Kraft ist, so ist nach (15) und (17)

$$\frac{2kc}{\mu} = \sqrt{1 + \frac{4k^2}{\mu^2} \left(v_o^2 + \frac{2\mu}{r_o} \right)} \quad \text{und} \quad r = \frac{\frac{4k^2}{\mu}}{1 - \frac{2kc}{\mu} \cos(\varphi + \varphi_o)}$$

Die letztere Gleichung ist aber, da rechterseits der Coefficient von $\cos(\varphi + \varphi_o)$, nämlich $\frac{2kc}{\mu}$ der vorletzten Gleichung zufolge größer als 1 ist (was schon deshalb stattfinden muss, damit r stets positiv bleibt), die bekannte Brennpunktpolargleichung eines Hyperbelastes, nämlich desjenigen, welcher von jenem der beiden Hyperbelbrennpunkte, der zum Pole gewählt wurde (und der zugleich der Centralpunkt ist), weiter entfernt ist, welcher also diesem Pole die convexe Seite zuwendet. Die Hyperbelhauptachse ist gegen die Polarachse, d. i. gegen die Richtung von r_o unter dem Winkel $(-\varphi_o)$, dessen entgegengesetzter Wert aus (15) zu bestimmen ist, geneigt, der halbe Parameter $p = a(\epsilon^2 - 1)$ der Hyperbel ist durch den Zahlwert des Zählers, also durch $p = \frac{4k^2}{\mu}$ und die numerische Excentricität $\epsilon = \frac{e}{a}$ der Hyperbel (wo e den halben Abstand der Brennpunkte und a die reelle Hyperbelhalbachse bedeutet) durch den Zahlwert des Coefficienten von $\cos(\varphi + \varphi_o)$, also durch $\epsilon = \frac{2kc}{\mu} = \sqrt{1 + \frac{4k^2}{\mu^2} \left(v_o^2 + \frac{2\mu}{r_o} \right)}$ (wo für k der Wert aus (13) einzuführen ist) gegeben, so dass der Hyperbelzweig vollkommen bestimmt ist.

Bewegt sich daher ein Körper unter der Einwirkung einer dem Quadrate der Entfernung von einem fixen Centralpunkte C invers proportionalen abstoßenden Centralkraft, so erfolgt die Bewegung längs eines Hyperbelastes, dessen auf der convexen Seite desselben liegender Brennpunkt der Centralpunkt ist. Dieser Hyperbelast ist auf die früher erwähnte Weise vollkommen determiniert.

2. Ist die Centralkraft eine anziehende, welcher Fall der bei weitem wichtigere ist, so hat man durchwegs von den unteren Qualitätszeichen Anwendung zu machen, und es ist daher zufolge (15) und (17)

$$\left. \begin{aligned} \frac{2kc}{\mu} &= \sqrt{1 + \frac{4k^2}{\mu^2} \left(v_o^2 - \frac{2\mu}{r_o} \right)} \\ r &= \frac{\frac{4k^2}{\mu}}{1 + \frac{2kc}{\mu} \cos(\varphi + \varphi_o)} \end{aligned} \right\} (18)$$

Die letzte Gleichung ist bekanntlich die Polargleichung irgend einer Kegelschnittlinie, deren (auf der concaven Seite derselben gelegener) Brennpunkt der Pol, also auch der Centralpunkt C ist, und deren positive Hauptachse unter dem durch die Gleichung (15) bestimmten Winkel $(-\varphi_0)$ gegen die positive Polarachse geneigt ist, wofern man als positive Richtung der Hauptachse jene vom Brennpunkte C nach dem dem Brennpunkte nächsten Scheitel annimmt.

Welche der Kegelschnittlinien die Bahn des Massenpunktes m ist, dies entscheidet bekanntlich wieder der Coefficient von $\cos(\varphi + \varphi_0)$, nämlich $\frac{2kc}{\mu}$, der den Wert der numerischen Excentricität $\varepsilon = \frac{e}{a}$ ergibt. Ist nämlich:

$\alpha)$ die Excentricität $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{2kc}{\mu}$ größer als 1, also zufolge (18) $v_0^2 > \frac{2\mu}{r_0}$, so ist die Bahn des Massenpunktes eine Hyperbel (und zwar jener Hyperbelast, innerhalb dessen der Centralpunkt gelegen ist), deren halber Parameter $p = \frac{b^2}{a}$ (wo b die zweite Halbachse bezeichnet) durch den Zähler $\frac{4k^2}{\mu}$ der Gleichung 18, also zufolge (13) auch durch $p = \frac{b^2}{a} = \frac{v_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0}{\mu}$ und deren numerische Excentricität durch $\frac{e}{a} = \frac{2kc}{\mu} = \sqrt{1 + \frac{v_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0}{\mu^2} \left(v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}\right)}$ bestimmt ist; so ist z. B. die reelle Halbachse $a = \frac{\mu}{v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}}$ u. s. w.

$\beta)$ Ist die Excentricität ε gleich 1, also nach (18) $v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0}$, so ist die Bahn des Körpers eine Parabel, deren Parameter durch $2p = \frac{8k^2}{\mu} = 2 \frac{v_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0}{\mu}$ gegeben ist.

$\gamma)$ Ist die Excentricität ε kleiner als 1, also nach (18) $v_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}$, so ist die Trajectorie eine Ellipse, deren halbe grosse Achse a und halbe kleine Achse b den Gleichungen (18) und (13) zufolge durch die Gleichungen

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{4k^2}{\mu} \quad \text{und} \quad \frac{e^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{4k^2}{\mu^2} \left(v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}\right)$$

$$\text{also durch } a = \frac{\mu}{\frac{2\mu}{r_0} - v_0^2} \quad \text{und} \quad b = \frac{2k}{\sqrt{\frac{2\mu}{r_0} - v_0^2}} = \frac{v_0 r_0 \sin \alpha_0}{\sqrt{\frac{2\mu}{r_0} - v_0^2}}$$

bestimmt sind. Bemerkenswert zu werden verdient, dass auf die Länge der großen Achse der vorletzten Gleichung zufolge außer μ nur r_0 und v_0 , aber keinesfalls der Winkel α_0 Einfluss nimmt.

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich auch für μ der Wert $\mu = 4 k^2 \cdot \frac{a}{b^2}$, somit nach (12) $P_r = -4 k^2 m \cdot \frac{a}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2}$. Bezeichnet man die Umlaufszeit in der elliptischen Bahn durch T , so ist, da der Radius vector in der Zeiteinheit die Fläche k durchläuft, der Flächeninhalt der Ellipse einerseits durch kT , andererseits bekanntlich durch $ab\pi$ bestimmt, also $T = \frac{ab\pi}{k}$; setzt man die obigen Werte für a und b ein, so findet man $T = \frac{2\mu\pi}{\left(\frac{2\mu}{r_0} - v_0^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, so dass auch die Umlaufszeit wohl von r_0 und v_0 , aber keinesfalls von α_0 abhängig ist. Durch Substitution von $k = \frac{ab\pi}{T}$ in die letzte Gleichung für P_r findet man überdies $P_r = -4 m \pi^2 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{a^3}{T^2}$.

Ist $v_0^2 = \frac{\mu}{r_0}$ und zudem $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, so wird, wie die obigen Gleichungen lehren, die Excentricität gleich Null und $a = b$, d. h. die Ellipse übergeht in einen Kreis (Fall a).

Keihen wir wieder zu unserem allgemeinen Problem b) zurück.

Die Geschwindigkeit v in dem beliebigen Punkte, dessen Polarcoordinaten r, φ sind, ist bestimmt durch $v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$, daher ist auch zufolge (16) $v^2 = c^2 + \frac{\mu^2}{4k^2} \mp \frac{\mu c}{k} \cos(\varphi + \varphi_0)$, oder wenn man den Wert von $\mp c \cos(\varphi + \varphi_0)$ aus der Gleichung (17) der Trajectorie und für c den Wert aus (15) einführt,

$$v^2 = v_0^2 \pm 2\mu \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \dots (19)$$

so dass man für jeden Wert der Entfernung r den Wert der Geschwindigkeit v bestimmen kann. Im Falle einer Abstoßung nimmt daher die Geschwindigkeit v mit wachsender Entfernung r vom Centralpunkte zu, im Falle einer Anziehung aber ab, so dass sie im letzten Falle in dem dem Centralpunkte C nächsten Punkte A der Bahn ein Maximum, im entferntesten Punkte A' ein Minimum ist (vergl. Fig. 67). Übrigens ließe sich die Gleichung (19) viel einfacher ableiten aus dem Satze, dass die Zunahme der lebendigen Kraft stets gleich ist der

gleichzeitigen Abnahme des Kraftpotentials U . Nach Gleichung (9) und (12) ist nämlich

$$U = - \int P_r dr = \mp \int \frac{m\mu}{r^2} dr = \pm \frac{m\mu}{r} + C \dots (20)$$

daher $U_o = \pm \frac{m\mu}{r_o} + C$, somit zufolge der Gleichung (8) des § 45

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2} = U_o - U = \pm m\mu \left(\frac{1}{r_o} - \frac{1}{r} \right)$$

also, wie früher $v^2 - v_o^2 = \pm 2\mu \left(\frac{1}{r_o} - \frac{1}{r} \right)$

Der Hodograph H der in Rede stehenden Centralbewegung ist, wie dies Hamilton zeigte, eine Kreislinie. Aus der Gleichung (16) und (13) ersieht man nämlich sofort, dass

$$\left(\frac{dx}{dt} - c \sin \varphi_o \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - c \cos \varphi_o \right)^2 = \frac{\mu^2}{4k^2} = \frac{\mu^2}{v_o^2 r_o^2 \sin^2 \alpha_o} (21)$$

Da nun die Geschwindigkeitscomponenten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ bekanntlich die orthogonalen Coordinaten XY des laufenden Punktes des Hodographen darstellen, wenn dessen Pol zum Coordinatenanfangspunkte und die rechtwinkligen Coordinatenachsen parallel zu den früheren gewählt werden, so ist die Gleichung (21) die Gleichung des Hodographen. Es ist dies aber bekanntlich die Gleichung einer Kreislinie, deren Radius $\frac{\mu}{2k} = \frac{\mu}{v_o r_o \sin \alpha_o}$ ist, und deren Mittelpunkt die Coordinaten $\xi = c \sin \varphi_o$ und $\eta = c \cos \varphi_o$ hat. Da der Punkt, für welchen $t = 0$ gewählt und zu dem vom Centralpunkte (dem Brennpunkte) die Abscissenachse geführt wurde, willkürlich in der Trajectorie, die stets eine Kegelschnittlinie ist, angenommen werden kann, so kann man für diesen Punkt auch den Scheitel der letzteren wählen, als auch die Abscissenachse in der Gleichung (21) des Hodographen parallel zur Hauptachse der Kegelschnittlinie annehmen. Dann ist aber offenbar

$$\alpha_o = \frac{\pi}{2}, \text{ daher nach (15) } \sin \varphi_o = 0, \cos \varphi_o = \frac{v_o \pm \frac{\mu}{2k}}{c} = \pm 1, \text{ somit}$$

$$\text{ist dann } \xi = c \sin \varphi_o = 0 \text{ und } \eta = c \cos \varphi_o = v_o \pm \frac{\mu}{2k} = v_o \pm \frac{\mu}{v_o r_o \sin \alpha_o}$$

wo der letzte Summand dem Halbmesser des Hodographen gleichkommt.

Es ist sonach die den Mittelpunkt des kreisförmigen Hodographen H mit dessen Pol verbindende Gerade stets senkrecht zur Hauptachse der betreffenden Kegelschnittlinie und der Pol liegt außerhalb des Kreises H , oder in der Kreisperipherie, oder innerhalb von H .

oder ist mit dem Kreismittelpunkte identisch, je nachdem die Trajectorie eine Hyperbel, oder Parabel, oder Ellipse, oder ein Kreis ist u. s. w.

c) Die Lösung der umgekehrten Aufgabe, nämlich des Problems:

„Es finde eine Centralbewegung in einer Kegelschnittlinie statt, und der Centralpunkt sei ein Brennpunkt derselben; es sind die Größe und die Gesetze für die einwirkende Kraft zu deducieren“ ist für die historische Entwicklung der Mechanik von ganz hervorragender Bedeutung geworden, und Newton, dem die exacte Lösung dieses Problems für die Planetenbewegungen zu verdanken ist, indem derselbe — von den drei durch sorgfältige Beobachtung der Planetenbahnen festgestellten Kepler'schen Erfahrungsgesetzen ausgehend — sein berühmtes Gravitationsgesetz deducierte, würde durch diese That allein schon unsterblich sein.

Das zweite Kepler'sche Gesetz, demzufolge die Flächenräume, welche die vom Sonnenmittelpunkte zu den Planeten gezogen gedachten Radien in beliebigen gleichen Zeiten durchlaufen, stets auch gleich sind, führt nämlich früheren Auseinandersetzungen zufolge zu der nothwendigen Folgerung, dass die Planetenbewegungen Centralbewegungen seien, deren Centralpunkt der Mittelpunkt der Sonne ist.

Dem ersten Kepler'schen Gesetze zufolge sind die Planetenbahnen Ellipsen, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet, so dass man es in der That bei den Planetenbahnen mit einem besonderen Falle des allgemeineren Problems c), das im Folgenden kurz behandelt werden soll, zu thun hat.

Es sei in der gegebenen Kegelschnittlinie die von jenem Brennpunkte, der zugleich der Centralpunkt ist, nach dem nächsten Scheitel gehende Achsenrichtung zur positiven Richtung der Polarachse, der Centralpunkt zum Pole angenommen und der positive Polarwinkel φ im Sinne der thatsächlichen Bewegung gerechnet.

Es ist dann nach (2) $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = 2k$ und

$$\frac{1}{r} = \frac{1 \mp \varepsilon \cos \varphi}{\mp p} \dots (22)$$

die Polargleichung der Bahn, wo sich das obere Zeichen auf den besonderen Fall der Bewegung in einem Hyperbelaste bezieht, wofern als Pol jener Brennpunkt fungiert, der nicht innerhalb dieses Astes gelegen ist, während sich das untere Zeichen auf alle anderen Fälle bezieht, und zwar bedeutet p den halben Parameter und ε die Excentricität, so dass $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon > 1$ ist, je nachdem die Bahn eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist.

Durch Differentiation der Gleichung (22) findet man $\frac{dr}{dt} = \frac{r^2}{p} \cdot \varepsilon \sin \varphi$, so dass $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{r^2}{p} \cdot \varepsilon \sin \varphi \cdot \frac{2k}{r^2} = 2 \frac{\varepsilon k}{p} \sin \varphi$ ist.

Setzt man diesen Wert für $\frac{dr}{dt}$ und den Wert $\frac{2k}{r^2}$ für $\frac{d\varphi}{dt}$ in die beiden ersten Gleichungen auf S. 115 ein, und beachtet man schließlich die Gleichung (22), so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \pm \frac{2k}{p} \sin \varphi \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{2k}{p} (\varepsilon \mp \cos \varphi) \end{aligned} \right\} (23)$$

Es ist somit $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{2k\varepsilon}{p}\right)^2 = \frac{4k^2}{p^2}$, d. h. der Hodograph ist eine Kreislinie, deren Mittelpunkt bezüglich eines orthogonalen Achsensystems, dessen Anfangspunkt der beliebig gewählte Pol des Hodographen ist, und dessen Abscissenachse die Richtung der Polarachse hat, die Coordinaten $\xi = 0$, $\eta = \frac{2k\varepsilon}{p}$ hat und deren Radius $\varrho = \frac{2k}{p}$ ist, so dass für die Ellipse $\eta < \varrho$, für die Parabel $\eta = \varrho$, für die Hyperbel $\eta > \varrho$ ist, was leicht zu deuten ist. Findet die Bewegung in einer Hyperbel statt, so entspricht dem unteren Zeichen in (22), d. i. der Anziehung die Bewegung in dem dem Centralpunkte (Brennpunkte) näher gelegenen Hyperbelaste, und der Hodograph ist jener Theil der Kreislinie, der zwischen den vom Pole des Hodographen an die letztere geführten Tangenten (die offenbar den Asymptoten der Hyperbel parallel sind) gelegen ist, und zwar jener Kreisbogen, welcher dem Pole näher liegt, ihm also die convexe Seite zuwendet, während der andere Theil der Kreisperipherie dem oberen Zeichen in (22), also der Bewegung im zweiten (vom Centralpunkte entfernten) Hyperbelzweige und einer abstoßenden Centralkraft entspricht.

Durch abermalige Differentiation der Gleichung (23) nach t erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \pm \frac{2k}{p} \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \pm \frac{2k}{p} \cos \varphi \cdot \frac{2k}{r^2} = \pm \frac{4k^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2} \cos \varphi \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \pm \frac{2k}{p} \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \pm \frac{2k}{p} \sin \varphi \cdot \frac{2k}{r^2} = \pm \frac{4k^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2} \sin \varphi \end{aligned}$$

Sind demnach X und Y die Componenten der zur Erzeugung der Bewegung notwendigen Kraft, so ist $X = m \frac{d^2x}{dt^2} = \pm \frac{4mk^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2} \cos \varphi$ und $Y = m \frac{d^2y}{dt^2} = \pm \frac{4mk^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2} \sin \varphi$, woraus sich sofort ergibt

dass die resultierende Kraft P_r , deren Richtungslinie mit dem Radius vector identisch ist, gegeben ist durch

$$P_r = \pm \frac{4 m k^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2} \dots (24)$$

wo das obere Zeichen für den Fall Giltigkeit hat, wenn die Centralkraft die Richtung von r hat, also eine abstoßende ist, das negative Zeichen aber eine anziehende Kraft zur Voraussetzung hat. Derselbe Wert von P_r würde sich auch aus der Gleichung (4) ergeben, wenn man den durch Differentiation der früheren Gleichung $\frac{dr}{dt} = 2 \frac{\varepsilon k}{p} \sin \varphi$ sich ergebenden Wert von $\frac{d^2 r}{dt^2}$, ferner für $\varepsilon \cos \varphi$ den Wert aus (22) und für $\frac{d\varphi}{dt}$ den Wert aus (2) in (4) einsetzen würde.

Anmerkung. Mit Zuhilfenahme der allgemeinen Binet'schen Formel (siehe Anm. auf S. 214) für die Größe der Centralkraft ließe sich die Formel (24) aus (22) unmittelbar folgern.

Da $\frac{4 m k^2}{p}$ für die Bewegung desselben Körpers in seiner Bahn constant ist, so lässt die Gleichung (24) das Gesetz erkennen, dass eine Centralbewegung in einer Kegelschnittslinie, wenn ein Brennpunkt derselben der Centralpunkt ist, nur dann möglich ist, wenn die Centralkraft dem Quadrate der Entfernung invers proportional ist.

Eine Folgerung der zwei ersten Kepler'schen Gesetze ist demnach das Newton'sche Gravitationsgesetz, nämlich die indirecte Proportionalität der kosmischen Gravitation der Planeten gegen die Sonne zu dem Quadrate ihrer Entfernung.

Infolge der Übereinstimmung der Gleichung (24) mit der Gleichung (12) wofern man

$$\mu = \frac{4 k^2}{p} \dots (25)$$

setzt, haben alle unter b) aus der Gleichung (12) abgeleiteten Folgerungen auch hier ihre volle Giltigkeit.

Erfolgt, wie bei den Planeten, die Bewegung in einer Ellipse, so ist, wie früher, wenn T die Umlaufszeit und a und b die große und kleine Halbachse der Ellipse bedeuten, $k = \frac{\pi a b}{T}$ und $p = \frac{b^2}{a}$ zu setzen, so dass nach (25) und (24) $\mu = 4 \pi^2 \frac{a^3}{T^2}$ und

$$P_r = - 4 m \pi^2 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{a^3}{T^2} \dots (26)$$

ist.

Da nun dem dritten Kepler'schen Gesetze zufolge bei allen Planetenbahnen die dritte Potenz von a dem Quadrate der Umlauf-

zeit direct proportional ist, so ist $\frac{a^3}{T^2}$ für alle Planeten eine constan Größe, so dass zufolge der Gleichung (26) die anziehende Kraft der Sonne bei gleicher Distanz r einfach den Massen der Planeten direct proportional sind, also die Beschleunigung dieser Kraft nämlich $p_r = - (P_r : m)$ von der materiellen Beschaffenheit der Planeten in keinerlei Weise abhängt, wie dies bekanntlich auch der Fall ist bei den Schwerkraften, welche auf Körper einwirken, die sich an irgend einer Stelle der Erdoberfläche befinden. Um nun (worin vor allem Newtons große Entdeckung besteht) mit Bestimmtheit darzuthun, dass die terrestrische Gravitation eine Kraft derselben Art ist wie die kosmische Gravitation, wendete Newton den aus (26) sich ergebenden Wert für die Beschleunigung p_r der Centrakraft, nämlich den Wert $p_r = 4\pi^2 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{a^3}{T^2}$ auf die Bewegung des Mondes um die Erde an (für welche Centralbewegung der Erdmittelpunkt als Centralpunkt, ferner nahezu $a = r = 60$ Erdhalbmesser $= 60 \times 6,370.000^m$ und als Umlaufszeit die Zeit von 27 Tagen, 7 Stunden, 43 Minuten und 11 Secunden anzunehmen ist, so dass — in Metern pro Secunde ausgedrückt — näherungsweise $p_r = 0.002708$ ist) und berechnete aus diesem Werte die Beschleunigung g , die sich dann nach dem Gesetze des inversen Quadrats der Distanz für die Erdoberfläche (also für die 60mal kleinere Distanz, nämlich für jene eines Erdhalbmessers) ergeben würde (welche dementsprechend $g = 60^2 \cdot p_r = 9.8$ wäre). Durch die Übereinstimmung des auf diese Weise berechneten Wertes der letzteren Beschleunigung mit der erfahrungsgemäßen Beschleunigung $g = 9.8$ der Schwere (soweit dies die Genauigkeit der Anwendung gebrachten Annahmen und Zahlen gestattet) fand Newton die geniale Theorie der Identität der kosmischen Gravitation und der terrestrischen Schwere ihre volle Bestätigung.

d) Schließlich möge als letztes Beispiel jene Centralbewegung behandelt werden, die stattfindet, wenn eine gegen den Centralpunkt gerichtete — also anziehende — Centrakraft P_r , die der jeweiligen Distanz r vom Centralpunkte C direct proportional ist, einwirkt, so dass

$$P_r = - m k^2 r \dots (27)$$

ist, wo k^2 die Beschleunigung dieser Kraft in der Entfernung 1 bedeutet.

Anmerkung. Eine derartige Centralbewegung findet z. B. stets dann statt, wenn eine Bewegung aus zwei geradlinigen harmonischen Bewegungen, deren Punkte C sich schneidenden Oscillationsrichtungen irgend einen Winkel einschließen und deren Phasendifferenz einen beliebigen Wert hat, sich zusammensetzt (bei dem sogenannten Interferenz der Schwingungen). Werden nämlich die Achsen X und Y eines Achsensystems, dessen Anfangspunkt C ist, parallel zu den zwei componentalen Schwingungsrichtungen angenommen (welches Achsensystem jedes

mit dem folgenden xy -System der Fig. 68 nicht identisch sein muss), so ist nach Gleichung 1 S. 153 P_x (oder P_x) = $-mk^2 X$, P_y (P_y) = $-mk^2 Y$, also $P_x : P_y = X : Y$, und aus diesen beiden Kräften P_x und P_y resultiert offenbar eine Kraft P_r , die gegen C gerichtet ist und die Größe $P_r = -mk^2 r$ hat.

Es sei wieder wie bei dem Problem b) $v_0 = c$ die Geschwindigkeit, die der Massenpunkt m in irgend einem bestimmten Zeitmomente, der zum Anfangspunkte der Zeit gewählt sei, besitzt, und die Richtung derselben sei zur positiven Richtung der y -Achse Fig. 68 angenommen. Zu dieser Zeit $t = 0$ befinde sich der materielle Punkt in A , $a = CA$ sei als gegeben vorausgesetzt, und die Richtung CA dieses Radius vectors sei als positive x -Richtung des im allgemeinen schiefwinkligen Achsensystems (xy) angenommen, dessen Anfangspunkt der Centralpunkt C sei (siehe Fig. 68).

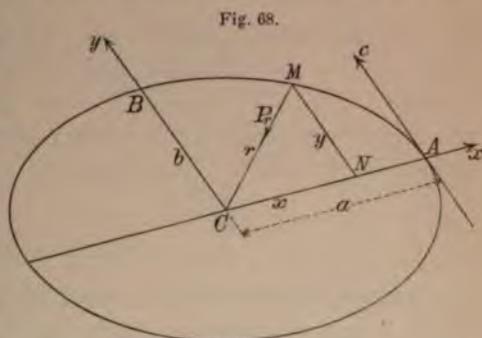


Fig. 68.

Ist M die Lage des beweglichen Massenpunktes zur Zeit t , so wirkt die Kraft P_r in der Richtung MC und dieselbe lässt sich der Gleichung (27) zufolge durch die Länge des veränderlichen Radius vector $MC = r$ darstellen, da sie demselben proportional ist. Zerlegt man diese Kraft P_r in zwei zu den Achsen x und y parallele Componenten P_x und P_y , so kann MCN das entsprechende Kräfte dreieck darstellen, wofern MN parallel zur y -Achse geführt wird. Nun ist $CN = x$, $NM = y$, daher $P_x : P_y : P_r = x : y : r$, sonach

$$\left. \begin{aligned} P_x &= P_r \cdot \frac{x}{r} = -mk^2 r \cdot \frac{x}{r} = -mk^2 x \\ \text{und } P_y &= P_r \cdot \frac{y}{r} = -mk^2 r \cdot \frac{y}{r} = -mk^2 y \end{aligned} \right\} (28)$$

Zerlegt man auch die krummlinige Bewegung des Punktes in zwei geradlinige Bewegungen parallel zu den Coordinatenachsen, deren Beschleunigungen nach Gleichung (28) $p_x = \frac{P_x}{m} = -k^2 x$, $p_y = \frac{P_y}{m} = -k^2 y$ sind, so ist jede derselben von der im § 38 behandelten Art, nämlich jede eine einfache schwingende (harmonische) Bewegung, wie dies die Übereinstimmung der letzten Gleichungen mit den Grundgleichungen (1), S. 153 lehrt. Es haben demnach für eine jede der beiden componentalen Bewegungen die im § 38 abgeleiteten Gleichungen volle Giltigkeit, und zwar bestehen, wenn man

die Bewegung parallel zur x -Achse berücksichtigt, zur Zeit $t = 0$ die Werte $v_x = 0$ und $x = a$, und man hat daher von den Gleichungen (11), S. 159 Anwendung zu machen, wo nur statt s die hier findende Elongation x zu setzen ist. Es ist demnach

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cdot \cos kt \\ v_x &= -ka \cdot \sin kt \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Für die Bewegung parallel zur y -Achse bestehen für $t = 0$ die Werte $v_y = c$, $y = 0$, daher sind in diesem Falle die entsprechenden Formeln (8), S. 156 anzuwenden, wo nur für s zu setzen ist y für a die dieser componentalen schwingenden Bewegung entsprechende Amplitude, die durch b bezeichnet sei. Es ist folglich

$$\left. \begin{aligned} y &= b \cdot \sin kt \\ v_y &= c \cdot \cos kt = kb \cdot \cos kt \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Diesen Formeln entsprechend lässt sich b aus den gegebenen Größen c und k bestimmen durch die Gleichung

$$b = \frac{c}{k} = \frac{v_0}{k} \quad (31)$$

Aus den Gleichungen (29) und (30) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{v_x^2}{k^2 a^2} + \frac{v_y^2}{k^2 b^2} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Die Bahn des Massenpunktes ist sonach der ersten Gleichung entsprechend stets eine Ellipse (Fig. 68), und der Graph dieser Centralbewegung ist (der letzten Gleichung zufolge) eine der früheren ähnliche und parallele Ellipse, und zwar haben die durch den Anfangszustand bestimmten Coordinatenachsen die Richtungen zweier conjugierter Durchmesser von der Länge $2a$ und $2b$, bezw. $2ka$ und $2kb$ dieser Ellipsen. Durch die Richtung und die Größe von a und b ist die elliptische Bahn vollkommen bestimmt (wobei b aus (31) zu berechnen ist).

Die Geschwindigkeit in jedem Punkte lässt sich durch die Zusammensetzung der durch (29) und (30) gegebenen Geschwindigkeitscomponenten v_x und v_y leicht bestimmen.

Übrigens ließe sich die Geschwindigkeit v durch r auch noch so einfach ausdrücken. Das Potential U der Kraft P nach Gleichung 3 und 4, S. 203, da $P_r = -P$, also $P = f(r) = v^2$ ist, bestimmt durch

$$U = \int -P_r dr = \int +mk^2 r dr = \frac{mk^2 r^2}{2} + C \quad (33)$$

somit ist der Gleichung 8 (S. 208) zufolge, da $U_o = \frac{mk^2 a^2}{2} + C$ und $v_o = c = kb$ ist, $U_o - U = \frac{mk^2 a^2}{2} - \frac{mk^2 r^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2}$, also

$$v = \sqrt{c^2 + k^2 a^2 - k^2 r^2} = k \sqrt{a^2 + b^2 - r^2} \quad (34)$$

Die Umlaufzeit T ist offenbar übereinstimmend mit der Schwingungsperiode einer der beiden componentalen Schwingungen, also gegeben der Gleichung 9, S. 157 entsprechend durch

$$T = \frac{2\pi}{k} \quad (35)$$

und ist sonach von a und v_o ganz unabhängig.

Für den besonderen Fall, dass die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit c zum entsprechenden Radius vector CA normal ist, sind die senkrechten conjugierten Radien a und b bekanntlich die beiden Halbachsen der Ellipse.

Ist zudem in diesem Falle $a = b$, also nach (31) $a = \frac{v_o}{k}$, so geht die Ellipse in einen Kreis über [siehe a], S. 214].

Anmerkung. Durch die obige Beweisführung ist auch der Satz nachgewiesen, dass aus der Zusammensetzung zweier harmonischer Bewegungen, deren Schwingungsperiode dieselbe, deren Oscillationsrichtung jedoch verschieden ist, eine circulierende Bewegung in einer Ellipse oder einem Kreise resultiert, welcher Satz in der Lehre der Interferenz des Lichtes von Wichtigkeit ist, indem durch diese Zusammensetzung das sogenannte elliptisch polarisierte, beziehungsweise circular polarisierte Licht sich ergibt.

§ 47. Anwendung der Gesetze der krummlinigen Bewegung auf die Dynamik der Schwere.

Wofern man die Schwerkkräfte gegen den Erdmittelpunkt gerichtet annimmt, daher jede durch die Schwerkraft hervorgerufene Bewegung eines freibeweglichen materiellen Punktes, bei welcher die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit gegen jene der Schwerkraft geneigt ist, als eine Centralbewegung ansieht, so kommen in der Dynamik der Schwere die Sätze des letzten § 46 zur Anwendung. Die Niveauflächen sind in diesem Falle Kugelflächen, deren Mittelpunkt der Erdmittelpunkt ist, die Kraftlinien sind die Radien derselben.

Werden jedoch die Schwerkkräfte als constante und gleichgerichtete Kräfte betrachtet, so finden hier die Erörterungen des § 44 ihre volle Anwendung. Es wird in diesem Falle nur als positive Richtung der z -Achse in Fig. 64 und 65 die verticale Richtung nach abwärts und $R = Q = mg$ anzunehmen sein, wo Q das Gewicht des mate-

riellen Punktes und g die constante Beschleunigung der Schwere bezeichnet. (Das Potential der Schwere ist in diesem Falle $-Qz$.)

Demnach ist, wenn man die Bezeichnungen des § 44 beibehält, bei der Bewegung in einer beliebigen vorgeschriebenen Bahn nach Gleichung (1) $\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_o^2}{2} = mgz$, also

$$v^2 - v_o^2 = 2gz \quad (1)$$

wo z positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem der Punkt M tiefer oder höher gelegen ist als der Anfangspunkt O .

Diese Gleichung lehrt, dass die Geschwindigkeit v außer von der Anfangsgeschwindigkeit v_o bloß abhängig ist von der Höhendifferenz z zwischen der Anfangs- und Endlage, also völlig unabhängig ist von der Gestalt der Bahn, und dass v stets denselben Wert erlangt wie bei der geradlinigen Bewegung des materiellen Punktes durch dieselbe Höhe z unter der Einwirkung der Schwerkraft, also wie beim freien Falle, beziehungsweise beim verticalen Wurfe, wobei jedoch dieselbe Anfangsgeschwindigkeit vorausgesetzt ist. Sobald der materielle Punkt bei seiner weiteren Bewegung in der krummen Bahn in dieselbe Horizontalebene gelangt, kehrt dasselbe z , also auch die gleiche Geschwindigkeit wieder.

Anmerkung. Alle diese Folgerungen würden sich übrigens sofort aus dem einfachen Satze des § 45 [Gleichung (8), S. 208], demzufolge die Änderung der lebendigen Kraft stets der Potentialdifferenz $U_o - U = Qz$ gleichkommt, ergeben. Als Niveauflächen der Schwerkraft müssen hier bekanntlich die einzelnen Horizontalebenen angesehen werden.

Die im § 44 betrachteten besonderen Punkte N (Fig. 64), in welchen z einen größten oder kleinsten Wert hat und die Tangenten zur Krafrichtung senkrecht stehen, sind hier tiefste oder höchste Punkte der Bahn, in welchen die Tangente horizontal ist. Es sind dies zudem, wenn der Punkt sich in einer vorgeschriebenen Bahn bewegt, die Gleichgewichtslagen des Punktes, und zwar im ersten Falle stabile, im letzten labile.

Hat die Bahn einen solchen Punkt, so findet nach § 44 im ersten Falle ein Geschwindigkeitsmaximum, im zweiten ein Geschwindigkeitsminimum c in diesem Punkte statt. Im ersten Falle ist die Bewegung gegen diesen Punkt hin eine ungleichförmig beschleunigte, während der Entfernung von diesem Punkte aber eine ungleichförmig verzögerte (das Umgekehrte gilt vom zweiten Falle), und die Bewegung ist, falls bei derselben v in bestimmten nach § 44 in derselben Höhe gelegenen Punkten O und O' (Fig. 64) Null wird, eine schwingende Bewegung, deren Amplitude ON , bzw. NO' und deren Schwingungsbogen OO' ist. Bei dieser schwingenden Bewegung werden die Ge-

schwindigkeitsverhältnisse am einfachsten veranschaulicht durch einen von O frei fallenden Körper, bei dem im Horizont des Punktes N , nämlich in \mathbf{N} (Fig. 64) die Geschwindigkeit c sich plötzlich in die entgegengesetzt gleiche $-c$ verwandelt, so dass derselbe von nun an wie ein mit dieser Geschwindigkeit nach aufwärts geworfener Körper wieder von \mathbf{N} nach O steigt, um wieder herabzufallen u. s. w. Dieser Körper hat dann nach § 44 mit dem schwingenden Punkte in derselben Höhe die gleiche Geschwindigkeit, wenn auch die von der Form der Bahn abhängige Zeit der Bewegung keinesfalls die gleiche ist.

Man bezeichnet einen derartigen in einer vorgeschriebenen Bahn infolge der stetigen Einwirkung der Schwerkraft hin- und herschwingenden materiellen Punkt als ein mathematisches oder einfaches Pendel und nennt dasselbe je nach der Form der Bahn ein Kreispendel, Cykloidenpendel u. s. w. Die besondere Art dieser schwingenden Bewegung ist von dieser Bahnform abhängig.

Ist die durch den höchsten, beziehungsweise tiefsten Punkt N (in welchem das Bahnelement horizontal ist) gelegte Verticale eine Symmetrieachse der Bahn, wie in den weiterhin unter *a) b) c)* zu behandelnden Fällen, so sind nach § 44 congruente Bahntheile beiderseits dieser Symmetrieachse gleichzeitige Bahnen.

Der normale Widerstand der vorgeschriebenen Bahn (oder der normale Druck auf dieselbe) ist nach (3), S. 197 bestimmt durch

$$W_n = Q \left[2 \frac{z}{\rho} - \cos(\varrho z) \right] + \frac{m v_o^2}{\rho} \dots \quad (2)$$

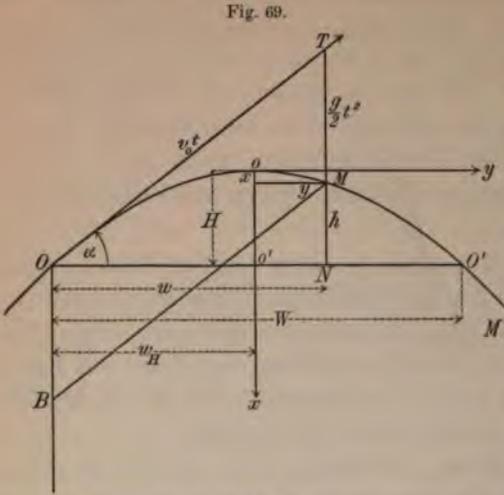
und falls dieser Widerstand ein einseitiger ist, kann es in den im § 43 erörterten Fällen dahin kommen, dass der materielle Punkt in jenem Punkte, in welchem $W_n = 0$ wird, die vorgeschriebene Bahn verlässt und sich frei bewegt.

Es sollen nun einige besondere Arten der bis nun vom allgemeinen Gesichtspunkte untersuchten Bewegung behandelt werden:

a) Wurfbewegung im luftleeren Raume.

Ist der materielle Punkt frei beweglich, also $W = 0$, und wird demselben irgendwie eine gewisse Anfangsgeschwindigkeit v_o — die Wurfgeschwindigkeit — ertheilt, infolge welcher er in der beliebigen Zeit t den Weg $OT = v_o t$ (Fig. 69) zurücklegen würde (wenn nämlich während dieser Bewegung keine Kraft auf denselben einwirken würde), und ist OB die der Zeit t entsprechende Fallhöhe, also $OB = \frac{1}{2} g t^2$, so muss die aus der gleichförmigen Bewegung OT

und der durch die einwirkende Schwerkraft bedingten Bewegung OB des freien Falles resultierende krummlinige Bahn OM die Trajectorie des Punktes sein. Dieselbe ist demgemäß eine ebene Bahn und ihre Ebene die durch die Richtung der Wurfgeschwindigkeit gelegte Verticalebene. $OBTM$ ist das dem Zeitpunkte t entsprechende in dieser Ebene gelegene Wegparallelogramm. Den spitzen Winkel α , den die in derselben Ebene gelegene Richtung OO' der Horizontalcomponente der Wurfgeschwindigkeit mit der Richtung



der Wurfgeschwindigkeit v_0 einschließt — positiv oder negativ genommen, je nachdem der Winkel oberhalb oder unterhalb der Horizontalen OO' sich befindet — bezeichnet man als den Wurfwinkel oder Elevationswinkel.

Die Horizontalcomponente der Wurfgeschwindigkeit ist $v_0 \cos \alpha$, die bei positivem α nach aufwärts gerichtete Verticalcomponente derselben $v_0 \sin \alpha$. Führt man von dem beliebigen Punkte M der Bahn die Verticale MN bis zum Durchschnitte N mit OO' , so ist

$$\left. \begin{aligned} ON = w &= OT \cdot \cos \alpha = v_0 t \cos \alpha \\ NM = h &= NT - MT = v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2 = \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} - \frac{g}{2} \left[t - \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right]^2 \\ v^2 &= v_0^2 - 2gh \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Anmerkung. Auf analytischem Wege lassen sich die zwei ersten Gleichungen aus den allgemeinen Gleichungen (4), S. 174 ableiten, wofern man etwa die Richtung der Horizontalcomponente $v_0 \cos \alpha$ der Wurfgeschwindigkeit zur positiven Richtung der x -Achse und die Richtung vertical nach aufwärts zur positiven y -Richtung eines rechtwinkligen Achsensystems (xyz), dessen Anfangspunkt O ist, annimmt, so dass $w = x$, $h = y$ zu setzen ist. Da in diesem Falle die Schwerkraft stets identisch ist mit ihrer Y -Componente, so ist für jeden Punkt der Bahn $P_x = 0$, $P_y = 0$ und $P_z = -Q = -mg$. Demgemäß nehmen die Gleichungen (4), S. 174 die Form an: $0 = m \frac{d^2 x}{dt^2}$, $-mg = m \frac{d^2 y}{dt^2}$, $0 = m \frac{d^2 z}{dt^2}$ oder da m von Null verschieden ist, $0 = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}$, $-g = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt}$ und $0 = \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dv_z}{dt}$. Die Integration dieser Gleichungen führt zu folgenden Resultaten

n: $v_x = \frac{dx}{dt} = C_1$, $v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + C_2$, $v_z = \frac{dz}{dt} = C_3$. Wendet man diese
 ichtungen, um die Integrationsconstanten C_1 C_2 C_3 zu bestimmen, auf den
 nkt 0 an, in welchem die Geschwindigkeitscomponenten $v_x = v_0 \cos \alpha$, $v_y =$
 $v_0 \sin \alpha$, $v_z = 0$ sind und $t = 0$ ist, so ergeben sich die Werte $C_1 = v_0 \cos \alpha$,
 $= v_0 \sin \alpha$, $C_3 = 0$, demnach $\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha$, $\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt$, $\frac{dz}{dt} = 0$.
 urch abermalige Integration findet man $x = v_0 \cos \alpha \cdot t + C_4$, $y = v_0 t \sin \alpha -$
 $g \frac{t^2}{2} + C_5$, $z = C_6$, woraus sich bei Anwendung auf den Punkt 0, in welchem
 $= y = z = t = 0$ zu setzen ist, für die Integrationsconstanten die Werte $C_4 =$
 $C_5 = C_6 = 0$ ergeben, so dass in Übereinstimmung mit (3) $w = x = v_0 t \cos \alpha$,
 $= y = v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2$, $z = 0$ ist.

Aus der zweiten Gleichung in (3), die bezüglich der Zeit t eine
 quadratische ist, ersieht man, dass $h = 0$ ist sowohl für $t = 0$, d. i. für
 en Punkt O , als auch für $t = 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$, d. i. für den Punkt O' .
 bezeichnet man diese Zeit der Bewegung von O bis O' durch t_W und
 ie durch den Anfangspunkt O geführte horizontale Sehne OO' der
 rajectorie, welche Sehne man die Wurfweite nennt, durch W , so
 t zufolge der ersten Gleichung (3)

$$W = OO' = v_0 t_W \cos \alpha = 2 \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad \left. \right\} (4)$$

Bei gegebener Wurfgeschwindigkeit v_0 ist demgemäß die Wurf-
 eite W des Projectils für ein gegebenes g , d. i. für einen be-
 stimmten Ort der Erde am größten, wenn $\sin 2\alpha = 1$, also $\alpha = \frac{\pi}{4}$,
 emnach der Wurfwinkel ein Winkel von 45° ist, und zwei verschie-
 enen Wurfwinkeln α_1 und α_2 entspricht die gleiche Wurfweite, wenn
 $\sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha_2$, also $2\alpha_1 + 2\alpha_2 = \pi$, somit $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ ist, d. h.
 enn die Wurfwinkel complementär sind u. s. w.

Für den höchsten Punkt der Bahn, d. i. für den Punkt o ist der
 erticalabstand $h = NM$ ein Maximum und wird Wurfhöhe oder
 teighöhe genannt. Dieselbe sei durch $H (= o'o)$ bezeichnet. Aus
 er zweiten Gleichung in (3) ersieht man, dass dies Maximum dann ein-
 eten wird, wenn der letzterwähnte variable Subtrahend den kleinsten
 ert, d. i. Null erlangt, also wenn $t = t_H = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{t_W}{2}$ ist, und
 var ist den Gleichungen (3) entsprechend

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \\ w_H = Oo' &= v_0 t_H \cos \alpha = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{W}{2} \end{aligned} \right\} (5)$$

Es ist demnach die Wurfhöhe H nichts anderes als die der Verticalcomponente $v_o \sin \alpha$ der Wurfgeschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe und dieselbe erreicht ein Maximum für $\sin \alpha = 1$, also $\alpha = \frac{\pi}{2}$, in welchem Falle nämlich $H = \frac{v_o^2}{2g}$ ist.

Wählt man den höchsten Punkt o der Trajectorie zum Anfangspunkte, die durch diesen vertical nach abwärts geführte Achse zur positiven x -Achse und die durch o in der Ebene der Bahn gelegene Horizontale (die Richtung der Horizontalcomponente der Wurfgeschwindigkeit) zur y -Achse eines orthogonalen Achsensystems, so lehrt Fig. 69, in Verbindung mit den Gleichungen (3), (4), (5), dass $x = H - h = \frac{g}{2} \left(t - \frac{v_o \sin \alpha}{g} \right)^2$ und $y = w - w_H = v_o \cos \alpha \left(t - \frac{v_o \sin \alpha}{g} \right)$

Dividirt man das Quadrat der letzten Gleichung durch die vorletzte, so findet man als Gleichung der Trajectorie für das eben gewählte orthogonale Achsensystem

$$y^2 = 2 \frac{v_o^2 \cos^2 \alpha}{g} x \dots (6)$$

Diese für jeden Punkt der Bahn giltige Gleichung lehrt, dass die Trajectorie eine Parabel sei, deren Scheitel der höchste Punkt o , deren Achse die x -Achse und deren Parameter $2 \frac{v_o^2 \cos^2 \alpha}{g}$ ist. Der Abstand des Brennpunktes F und der horizontalen Leitlinie LL' von o ist durch den vierten Theil des Parameters, also durch $\frac{v_o^2 \cos^2 \alpha}{2g}$, d. i. durch die der horizontalen Componente $v_o \cos \alpha$ der Wurfgeschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe bestimmt. Der Abstand der Leitlinie (Directrix) vom Anfangspunkte O ist daher: $H + \frac{v_o^2 \cos^2 \alpha}{2g} = \frac{v_o^2 \sin^2 \alpha}{2g} + \frac{v_o^2 \cos^2 \alpha}{2g} = \frac{v_o^2}{2g}$, also stets gleich der Geschwindigkeitshöhe der Wurfgeschwindigkeit v_o (folglich die Lage der Leitlinie bei gegebenem v_o von dem Wurfwinkel vollkommen unabhängig) u. s. w.

Betreffs der Construction der Wurfparabel sei kurz verwiesen auf Fig. 65, in welcher nur der letzten Gleichung zufolge $OD = \frac{v_o^2}{2g}$, ferner $\text{arc } DE = \text{arc } EF$ anzunehmen und FG im Punkte C — dem Parabelscheitel — zu halbieren ist.

Anmerkung. Die tangentielle und die zur Bahn normale Componente der Schwerkraft Q sind bei der Wurfbewegung im luftleeren Raume (ebenso wie jene der Centrakraft P_r bei der Centralbewegung) die Kräfte $P_t = m \frac{dv}{dt}$ und die Centripetalkraft $P_c = \frac{mv^2}{\rho}$, welche Eigenschaft man, nebenbei bemerkt, z. B.

dazu benützen könnte, um auf höchst einfachem Wege den Krümmungshalbmesser ρ einer Parabel (bezw. in § 46 jenen der Ellipse und Hyperbel) durch die Coordinaten auszudrücken.

Ist die Wurfrichtung horizontal, so ist $\alpha = 0$, daher nach (5) $H = 0$ und $w_H = 0$, d. h. der Ausgangspunkt O ist selbst der Scheitel der Parabel.

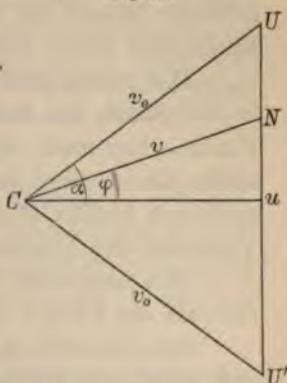
Anmerkung. Die Gesetze des horizontalen Wurfes erörtert schon Galilei in seinen „Discorsi e dimostrazioni etc.“ (1638).

Erfolgt der Wurf schief nach abwärts, so ist α nur negativ anzunehmen, die Trajectorie ist dann blos der Parabelbogen $O'M$ (Fig. 69), welcher, da bei der früher betrachteten Bewegung in O' dieselbe Geschwindigkeit v_0 wiederkehrt wie in O , und da die Tangente in O' (infolge der Symmetrie bezüglich der x -Achse) unter demselben Winkel gegen den Horizont geneigt ist wie in O , der früheren Parabel angehört, deren Scheitel mittels der Gleichungen (5) bestimmbar ist.

Alle die hier gewonnenen Resultate ließen sich übrigens sofort durch directe Anwendung der aus Fig. 65 abgeleiteten Gesetze auf diesen besonderen Fall, wofür nur $R = Q$ und $r = g$ gesetzt würde, wie auch auf manchem andern Wege deducieren — so z. B., wenn die Bewegung des Projectils zerlegt würde in eine horizontale Seitenbewegung, die offenbar gleichförmig mit der entsprechenden Geschwindigkeitscomponente $v_0 \cos \alpha$ vor sich geht, und eine zweite vertical nach auf-, beziehungsweise abwärts stattfindende componentale Bewegung, die wegen der continüirlichen Einwirkung der entgegengesetzt, beziehungsweise gleichgerichteten constanten Schwerkraft eine gleichförmig verzögerte, beziehungsweise beschleunigte ist (die daher den Gesetzen des § 35, S. 137 und 138 folgt) und deren Geschwindigkeit anfänglich den Wert $v_0 \sin \alpha$ hat; die Wurfhöhe entspricht dann dem Moment, in welchem die Geschwindigkeit dieser verticalen componentalen Bewegung Null ist u. s. w.

Da die Tangenten des Hodographs stets gleichgerichtet sind mit der Resultierenden der auf den materiellen Punkt während dessen Bewegung einwirkenden Kräfte und diese Resultierende bei der Wurfbewegung im luftleeren Raume die stets vertical gerichtete Schwerkraft ist, so muss der Hodograph für diese Bewegung in eine verticale Gerade UU' (Fig. 70) übergehen, und da die Geschwindigkeit des fingierten längs des Hodographen sich bewegenden Punktes (vergl. S. 112) der resultierenden Beschleunigung des Punktes m , also hier der constanten Beschleunigung g der Schwere gleich ist, so ist die Bewegung dieses fingierten Punktes längs UU' eine gleichförmige. Es ist demnach, wenn C der Pol und wenn CN, CU, CU', Cu Parallele zu den Tangenten der Bahn des Punktes m , für die Zeiten t, α, t_W, t_H sind, $UN = gt, Uu = gt_H = v_0 \sin \alpha, v_0 \cos \alpha = v \cos \varphi$,

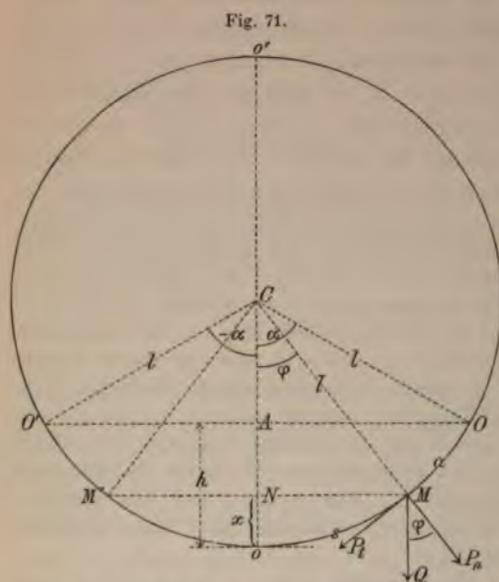
Fig. 70.



$$UU' = gt_W = 2v_o \sin \alpha, \quad UN = gt = v_o [\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi], \quad v = \sqrt{(v_o \sin \alpha - gt)^2 + v_o^2 \cos^2 \alpha} = v_o \cos \alpha \cdot \sec \varphi \text{ u. s. w.}$$

b) Einfaches Kreispendel.

Unter einem einfachen oder mathematischen Kreispendel ist ein in einer Kreisbahn, deren Ebene vertical ist, infolge der Schwerkraft schwingender materieller Punkt zu verstehen. Befindet sich ein materieller Punkt auf der innern Kugelfläche einer



Kugelschale, deren Achse $o'o'$ vertical ist, und erhält derselbe einen Impuls zur Bewegung in einer durch diese verticale Achse gelegten Ebene (der Ebene der Zeichnung), welche die Kugelfläche in dem Kreisbogen $OoM'O'$ (Fig. 71) schneidet, oder ist diese Anfangsgeschwindigkeit (z. B. in O) Null, so muss derselbe (ausgenommen die später erwähnten Fälle) aus bekannten Gründen in diesem Kreisbogen um den tiefsten Punkt o desselben hin- und herschwingen, und dieser schwingende materielle

Punkt stellt dann ein mathematisches Kreispendel vor, wofern von der Reibung abgesehen wird. Dasselbe wäre der Fall, wenn ein schwerer materieller Punkt innerhalb einer kreisförmig gekrümmten Rinne oder Röhre schwingt, deren Ebene vertical ist.

Die stabile Gleichgewichtslage des materiellen Punktes ist, wie in der Statik der Schwere nachgewiesen wurde, durch den tiefsten Punkt o bestimmt, für welchen die Tangente horizontal ist. Da bei einem Kreise eine jede Tangente auf dem zum Berührungspunkte geführten Radius senkrecht steht, so muss in der durch o gelegten Verticalen der Kreismittelpunkt C liegen.

Den constanten Halbmesser $CO = CM$ der Kreisbahn bezeichnet man als die Länge des Pendels.

Soll die Bewegung eine schwingende sein, so muss in gewissen, und zwar, wie früher nachgewiesen wurde, in demselben Horizont gelegenen Punkten O und O' die Geschwindigkeit Null sein. Da $OO' \perp Co$ ist, so ist auch $\text{arc } Oo \cong \text{arc } O'o = a$ (daher sind $O'o$

und oO gleichzeitige Bahnen), und zwar bestimmt dieser Bogen a die Schwingungsamplitude.

Der der Bogenamplitude a entsprechende Mittelpunktswinkel α wird Winkelamplitude genannt.

Der veränderliche Bogen $oM = s$ ist die Elongation und der gegenüberliegende sich stets ändernde Mittelpunktswinkel φ die Winkel-elongation, und zwar sind s und φ , je nachdem der materielle Punkt sich auf der einen (positiven) oder der anderen (negativen) Seite von der Ruhelage o befindet, positiv oder negativ in Rechnung zu bringen.

Die Bewegung von einem äußersten Punkte O nach der zweiten äußersten Lage O' heißt eine Schwingung des Pendels und die zu dieser Bewegung nothwendige Zeit T die Schwingungszeit (Oscillationsdauer).

Da die Geschwindigkeit v im beliebigen Punkte M , wie früher gezeigt wurde, der Endgeschwindigkeit beim freien Falle längs der Höhe der Bahn OM , d. i. längs der Höhe AN (Fig. 71) gleich sein muss, so ist $v = \sqrt{2g \cdot AN} = \sqrt{2g(CN - CA)}$, somit

$$v = \sqrt{2gl(\cos \varphi - \cos \alpha)} \dots (7)$$

Dem Punkte o , für welchen $\varphi = o$ ist, entspricht demnach das Geschwindigkeitsmaximum c .

$$c = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha}{2} \dots (8)$$

Mittels dieser Gleichung ist für jedes α die entsprechende Geschwindigkeit c und umgekehrt für jedes c das entsprechende α zu berechnen.

Ist der ursprüngliche die Bewegung innerhalb der kreisförmig gekrümmten Böhre $oOo'O'$ (Fig. 71) einleitende Impuls so intensiv, dass $c > 2\sqrt{gl}$ ist, so ist der aus (8) sich ergebende Wert für α ein imaginärer, und es findet daher keine schwingende, sondern eine circulierende (kreisende), d. h. eine stets im selben Sinne in der Kreisbahn vor sich gehende Bewegung des Punktes statt, und zwar wäre die Geschwindigkeit c' im höchsten Punkte o' der Gleichung (1) entsprechend bestimmt durch $c^2 - c'^2 = 2g \cdot 2l = 4gl$, daher $c' = \sqrt{c^2 - 4gl}$. Soll also, wie angenommen wurde, die Bewegung eine oscillierende sein, so muss $c < 2\sqrt{gl}$ sein, was wir auch voraussetzen wollen.

Der für den besonderen Fall, in welchem $\alpha < \frac{\pi}{2}$, daher $c < \sqrt{2gl}$ ist, stets nach der concaven Seite (gegen den Kreismittelpunkt) gerichtete normale Bahnwiderstand W_n ist der Gleichung (2) zufolge, wo nur $\varrho = l$, $v_o = o$, $(\varrho z) = \pi - \varphi$ und $z = AN = l(\cos \varphi - \cos \alpha)$ zu setzen ist,

$$W_n = Q[2(\cos \varphi - \cos \alpha) + \cos \varphi] = Q[3 \cos \varphi - 2 \cos \alpha] \quad (9)$$

Anmerkung. Wäre $\sqrt{5gl} > c > \sqrt{2gl}$, und könnte die Bahn nur einen einseitigen Widerstand, nämlich nach der inneren Seite der Kreisbahn äußern (wie

dies z. B. bei der sogenannten Centrifugaleisenbahn oder einem Fadenpendel der Fall ist), so würde es in einem Punkte der Bahn dahin kommen, dass $W_n = 0$ ist, so dass in diesem leicht zu bestimmenden Punkte (für welchen nämlich der entsprechende zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π gelegene Mittelpunktswinkel φ aus der Gleichung $\cos \varphi = \frac{1}{3} \left(2 - \frac{c^2}{gl} \right)$ berechnet werden kann) der materielle Punkt die Kreisbahn verlassen und sich als ein freibeweglicher Punkt in einer Parabel weiter bewegen würde, welcher Fall natürlich hier ausgeschlossen sein soll. Wäre $c >$ oder $= \sqrt{5gl}$, so müsste auch bei einseitigem Widerstande die Bewegung eine circulierende sein.

Bei einem Fadenpendel äußert der gespannte Faden einen Zug W_n auf den schweren in der Kreisbahn sich bewegenden Körper in der centripetalen und der letztere Körper einen Zug $-W_n$ auf den Faden in centrifugaler Richtung, und die Gleichung (9) lässt die Größe dieses Zugs bestimmen; dieser Zug hat den größten Wert, nämlich $Q [3 - 2 \cos \alpha]$ beim Hindurchschwingen durch die Gleichgewichtslage CO und den kleinsten Wert $Q \cos \alpha$ in den äußersten Lagen CO und CO' .

Um den Weg s , die Winkelelongation φ und die Geschwindigkeit v als Functionen von t auszudrücken und auch die Schwingungszeit T zu bestimmen, hat man etwa von der Gleichung (7) auszugehen und die Grundgleichung $ds = v dt$ in Anwendung zu bringen. Die Gleichung (7) lässt sich, da $\cos \varphi - \cos \alpha = 2 \sin \frac{\alpha + \varphi}{2} \sin \frac{\alpha - \varphi}{2}$ ist, folgendermaßen umformen:

$$v = \sqrt{2gl(\cos \varphi - \cos \alpha)} = \sqrt{4gl \sin \frac{\alpha + \varphi}{2} \sin \frac{\alpha - \varphi}{2}}$$

Es sei nun zunächst der Fall betrachtet, in welchem die Winkelamplitude α , daher auch φ , $\frac{\alpha + \varphi}{2}$, $\frac{\alpha - \varphi}{2}$ so klein sind, dass man die Sinus dieser Winkel durch die (im Bogenmaß ausgedrückten) Winkel selbst ersetzen kann. Unter dieser Voraussetzung ergibt die letzte Gleichung folgende Näherungsformel:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{4gl \cdot \frac{\alpha + \varphi}{2} \cdot \frac{\alpha - \varphi}{2}} = \sqrt{gl(\alpha^2 - \varphi^2)} = \sqrt{gl \left[\left(\frac{\alpha}{l} \right)^2 - \left(\frac{s}{l} \right)^2 \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{g}{l} (\alpha^2 - s^2)} \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun kürzlicher durch k den constanten Ausdruck $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$, so ist

$$\left. \begin{aligned} v &= k \sqrt{\alpha^2 - s^2} \\ c &= k \alpha \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

Zu diesen letzteren Formeln und daher auch zu allen anderen aus diesen Formeln (10) in § 38 abgeleiteten Gesetzen führt auf einfachem Wege auch die Zerlegung der Schwerkraft $Q = mg$ (Fig. 71),

in die Tangentialkraft $P_t = -Q \sin \varphi$ (das negative Qualitätszeichen deshalb, weil, wenn φ positiv, P_t negativ ist und umgekehrt) und in die normale Componente $P_n = Q \cos \varphi$ (durch deren Zusammensetzung mit W_n sich die Centripetalkraft P_c ergibt); denn es ist unter der Annahme einer kleinen Amplitude $P_t = -mg \sin \varphi = -mg \cdot \varphi = -mg \cdot \frac{s}{l} = -mk^2 s$ und daher die tangentielle Beschleunigung $p_t = \frac{P_t}{m} = -\frac{g}{l} s = -k^2 s$. Da nun diese Gleichungen mit den Grundgleichungen (1) des § 38, S. 153 für eine harmonische Bewegung übereinstimmen, so lassen sich aus denselben genau so, wie es dort geschah, wenn man nur das auf S. 180 Gesagte beachtet, die obigen Relationen (10) ableiten. Infolge der vollständigen Übereinstimmung dieser letzteren mit den Gleichungen (3) und (4), S. 154 müssen aber auch alle weiteren im § 38 aus diesen Gleichungen deducierten Folgerungen für die Pendelbewegung Giltigkeit haben. Es ist sonach, wenn man als Anfangspunkt der Zeit jenen Moment wählt, in welchem das Pendel eben durch seine ursprüngliche Gleichgewichtslage in positiver Richtung hindurchschwingt, den Gesetzen einer einfachen harmonischen Bewegung gemäß

$$\left. \begin{aligned} s &= a \sin kt = a \cdot \sin \left(t \sqrt{\frac{g}{l}} \right) \\ v &= ka \cdot \cos kt = a \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \cos \left(t \sqrt{\frac{g}{l}} \right) \\ T &= \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Dividirt man die erste dieser Gleichungen durch l und setzt $\frac{s}{l} = \varphi$ und $\frac{a}{l} = \alpha$ (Fig. 71) und beachtet weiter, dass im § 38 durch T die Schwingungsperiode, d. i. die ganze Zeit des Hin- und Zurückschwingens bezeichnet wurde, also hier $2T$ statt T zu setzen ist, so ergibt sich aus der ersten und letzten Gleichung in (11)

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \alpha \sin \left(t \sqrt{\frac{g}{l}} \right) \\ T &= \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Die Gleichungen (11) und (12) gestatten für jede Zeit t die Lage und Geschwindigkeit des Pendels zu bestimmen.

Die letzte von Huyghens gefundene Gleichung $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, in welcher die Amplitude gar nicht vorkommt, lehrt das wichtige Gesetz, dass bei kleinen Amplituden die Schwingungszeit des Pendels von der Größe der Amplitude unabhängig ist, und

dass dieselbe ferner der Quadratwurzel aus der Pendellänge direct, dagegen der Quadratwurzel aus der Beschleunigung des freien Falles invers proportional ist.

Anmerkung. Die Zeit, die während des Falles des Pendels längs des Bogens Oo (Fig. 71) verfließt, ist nach (12) durch $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}$ bestimmt, während die Falldauer eines schweren materiellen Punktes längs der zugehörigen Sehne Oo nach § 35 (S. 140) dieselbe ist wie für den verticalen Durchmesser $d = 2l$ desselben Kreises, nämlich $\sqrt{\frac{2 \cdot 2l}{g}} = 2 \sqrt{\frac{l}{g}}$, so dass sich diese beiden Fallzeiten verhalten wie $\pi : 4$.

Ein Pendel, das eine Schwingung in einer Secunde vollzieht, heißt ein Secundenpendel. Ist die Länge des Secundenpendels durch l_s bezeichnet und die Secunde als Zeiteinheit angenommen, so ist der Gleichung $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ zufolge $1 = \pi \sqrt{\frac{l_s}{g}}$. Aus diesen beiden letzten Gleichungen ergibt sich sonach

$$\left. \begin{aligned} l_s &= \frac{l}{T^2} \\ g &= \pi^2 \cdot l_s \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Kennt man also für irgend einen Ort der Erde die Länge l und die Schwingungsdauer T irgend eines Pendels, so lässt sich aus $l_s = \frac{l}{T^2}$ die Länge des Secundenpendels und, indem man die Länge des Secundenpendels mit der zweiten Potenz der Ludolf'schen Zahl π multipliciert, die Beschleunigung des freien Falles (für eine Secunde als Zeiteinheit) bestimmen.

Die Zahl n der innerhalb einer Zeiteinheit von einem Pendel vollzogenen Schwingungen bezeichnet man öfter als die Schwingungszahl des betreffenden Pendels. Es ist sonach $nT = 1$, daher $n = \frac{1}{T}$, d. h. die Schwingungszahl ist der reciproke Wert der Schwingungsdauer und demnach zufolge (12)

$$n = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (14)$$

Die Formel $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ für die Schwingungsdauer, wie auch die Formeln (11), (12), (14) sind nur Näherungsformeln, da bei der Ableitung derselben vorausgesetzt wurde, die Winkelamplitude sei so klein, dass stets φ für $\sin \varphi$ substituiert werden könne.

Es fragt sich nun, welcher der strengrichtige Wert der Schwingungsdauer T ist. Um denselben abzuleiten, muss man auf die allgemeingiltige strengrichtige Gleichung (7) zurückgreifen. Dieser zufolge ist $v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gl(\cos \varphi - \cos \alpha)}$, daher, da $ds = ld\varphi$ ist,

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} \quad (15)$$

Führt man nun, um die in endlicher Form nicht ausführbare Integration dieser Gleichung durchzuführen, als Hilfsvariable die variable Höhe $x = oN$ der veränderlichen Lage des Pendels über dem Horizonte der Gleichgewichtslage ein, so dass x in den äußersten Punkten O und O' der Höhe $h = oA$ (Fig. 71) der ganzen Bahn gleich ist, so ist $AN = l(\cos \varphi - \cos \alpha) = h - x$ und $\cos \varphi = \frac{CN}{l} = \frac{l-x}{l}$, daher $\sin \varphi d\varphi = \frac{dx}{l}$, $d\varphi = \frac{dx}{l \sin \varphi} = \frac{dx}{\sqrt{(2l-x)x}}$. Setzt man diese Werte für $d\varphi$ und $(\cos \varphi - \cos \alpha)$ in die Gleichung (15) ein, so findet man

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\left(2 - \frac{x}{l}\right)(hx - x^2)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{hx - x^2}} \left(1 - \frac{x}{2l}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Da während der ganzen Schwingung $x < 2l$ bleibt, so lässt sich $\left(1 - \frac{x}{2l}\right)^{-\frac{1}{2}}$ in eine convergente binomische (unendliche) Reihe entwickeln, und es wird dann

$$dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2l} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{x}{2l}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{x}{2l}\right)^3 + \dots \right] \frac{dx}{\sqrt{hx - x^2}}$$

Durch Integration dieser Gleichung von $x = o$ bis $x = h$ erhält man die während der Bewegung von o nach O verstreichende Zeit, d. i. die halbe Schwingungsdauer $\frac{T}{2}$, also, wenn man beiderseits mit 2 multipliziert,

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^h \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2l} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{x}{2l}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{x}{2l}\right)^3 + \dots \right) \cdot \frac{dx}{\sqrt{hx - x^2}}$$

Bezeichnet man kürzshalber durch A_n den Ausdruck

$$A_n = \int_0^h \frac{x^n}{\sqrt{hx - x^2}} dx \quad (16)$$

so erhält der Ausdruck für T die Form

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \left(A_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2l} A_1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{1}{2l}\right)^2 A_2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{1}{2l}\right)^3 A_3 + \dots \right) \quad (17)$$

Es handelt sich demnach allein um die Berechnung des Ausdruckes (16). Es sei zu diesem Zwecke $hx - x^2$ durch X bezeichnet, also $X = hx - x^2$, so dass $dX = hdx - 2xdx$ und demgemäß $xdx = \frac{1}{2} hdx - \frac{1}{2} dX$ ist, somit

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{hx - x^2}} = \int \frac{x^{n-1} \cdot x dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{2} h \int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{X}} dx - \frac{1}{2} \int x^{n-1} \cdot \frac{dX}{\sqrt{X}} \quad (18)$$

Nun ist stets $d(uv) = u dv + v du$, daher $u dv = d(uv) - v \cdot du$ und $\int u dv = uv - \int v du$, welche Gleichung den Satz von der theilweisen Integration ausdrückt.

Setzt man demnach in Übereinstimmung mit dem letzten Gliede in d. Gleichung (18) $u = x^{n-1}$ und $dv = \frac{dX}{\sqrt{X}}$, also $v = \int X^{-\frac{1}{2}} dX = \frac{X^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{X}$, so ist nach der Methode der theilweisen Integration $\int x^{n-1} \cdot \frac{dX}{\sqrt{X}} = x^{n-1} \cdot 2\sqrt{X} - \int 2\sqrt{X} \cdot (n-1) x^{n-2} dx = 2x^{n-1}\sqrt{X} - 2(n-1) \int \frac{X \cdot x^{n-2}}{\sqrt{X}} dx$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (18) ein und führt für X im letzten Gliede wieder $hx - x^2$ ein, so ist $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{hx - x^2}} = \frac{1}{2} h \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{hx - x^2}} - x^{n-1} \cdot \sqrt{hx - x^2} + (n-1) \left[h \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{hx - x^2}} - \int \frac{x^n dx}{\sqrt{hx - x^2}} \right]$

Durch Vereinigung der gleichartigen Glieder ergibt sich sonach die Reducionsformel

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{hx - x^2}} = \frac{2n-1}{2n} h \cdot \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{hx - x^2}} - \frac{x^{n-1} \sqrt{hx - x^2}}{n}$$

Integriert man nun innerhalb der Grenzen o und h , um zum Ausdrucke (16) zu gelangen, so liefert das letzte Glied sowohl für $x = o$ als für $x = h$ den Wert Null, so dass auch die Differenz dieser Grenzwerte, d. i. das entsprechende bestimmte Integral Null wird, und es ist daher

$$\int_o^h \frac{x^n dx}{\sqrt{hx - x^2}} = \frac{2n-1}{2n} h \int_o^h \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{hx - x^2}}$$

oder wenn man (16) beachtet

$$A_n = \frac{2n-1}{2n} h A_{n-1}$$

Es ergibt sich demnach für $n = 1, 2, 3 \dots$

$$A_1 = \frac{1}{2} h A_0, \quad A_2 = \frac{3}{4} h A_1, \quad A_3 = \frac{5}{6} h A_2 \dots, \quad A_n = \frac{2n-1}{2n} h A_{n-1}$$

Multipliziert man die zwei, drei . . . n ersten Gleichungen, so findet man

$$A_1 = \frac{1}{2} h A_0, \quad A_2 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} h^2 A_0, \quad A_3 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} h^3 A_0 \dots, \\ A_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} h^n A_0.$$

Substituiert man nun diese Werte in die Gleichung (17), so erhält man für die Schwingungsdauer T den Wert

$$T = A_0 \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2l} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\frac{h}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \left(\frac{h}{2l}\right)^3 + \dots \right]$$

Es handelt sich demnach nur noch um den Wert des A_0 , also zufolge der Gleichung (16) um den Wert

$$A_0 = \int_o^h \frac{dx}{\sqrt{hx - x^2}} = \int_o^h \frac{d\left(x - \frac{h}{2}\right)}{\sqrt{\frac{h^2}{4} - \left(x - \frac{h}{2}\right)^2}}$$

Dividiert man hinter dem Integralzeichen Zähler und Nenner durch $\frac{h}{2}$, so erhält das unbestimmte Integral die Form $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, wo $y = \frac{x - \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ ist, und es ist sonach dieses Integral = $\text{arc sin } y$.

Da nun y für $x = h$ den Wert 1 und für $x = 0$ den Wert -1 hat, so ist dementsprechend das bestimmte Integral

$$A_0 = \text{arc sin } 1 - \text{arc sin } (-1) = \frac{\pi}{2} - \left[-\frac{\pi}{2} \right] = \pi$$

und daher schließlich die Schwingungsdauer bestimmt durch

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{h}{2l} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\frac{h}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \left(\frac{h}{2l}\right)^3 + \dots \right] \quad (19a)$$

oder, da $h = l - l \cos \alpha = l (1 - \cos \alpha) = 2l \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ist,

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \dots \right] \quad (19b)$$

[Diese vollständige Pendelform findet sich schon in der berühmten Mechanica (Mechanica sive motus scientia, Petersburg 1736) des größten Mathematikers des 18. Jahrhunderts, Leonhard Euler (geb. 1707, gest. 1783).]

Ist h gegen $2l$, also oA gegen oo' (Fig. 71) nur klein, so convergirt diese Reihe rasch, und man kann sich auf einige wenige der ersten Glieder beschränken. Ist α kleiner als ein Grad, so kann man sich mit dem ersten Gliede begnügen,

und es ist, wie dies früher gefunden wurde, $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Beschränkt man sich bei nicht zu großen Amplituden auf die zwei ersten Glieder, wodurch man schon einen ziemlich genauen Wert erhält, so wird

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{h}{8l} \right] = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right] \quad (20)$$

So ist z. B. für $2\alpha = 8^\circ$ der letzte Summand $\frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0.0003045$, und für $2\alpha = 2^\circ$ hat dieser Summand nur den zu vernachlässigenden Wert 0.00002.

Anmerkung. Wenn auch schon Galilei bekannt war, dass die Schwingungsdauer eines einfachen Pendels von einer unveränderlichen Länge stets die gleiche bleibt, und dass die Pendellänge dem Quadrate der Schwingungszeit proportional sei, so gebührt doch (wie schon oben bemerkt wurde) Huyghens (Horologium oscillatorium, Paris 1673) das Verdienst, das Pendelgesetz $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, wie auch die Bewegungsgesetze des nunmehr folgenden Cykloidenpendels entdeckt zu haben.

c) Cykloidenpendel.

Es sei die vorgeschriebene Bahn eines unter der stetigen Einwirkung der Schwerkraft Q schwingenden materiellen Punktes m eine Cykloide $AOmA'$ (Fig. 72), deren Basis AA' horizontal und deren Achse $o'o$ vertical ist, so dass der Scheitel o der Cykloide der tiefste Punkt derselben ist. Es sei dieser Scheitel o zum Anfangspunkte eines orthogonalen Achsensystems gewählt, dessen y -Achse die Lage der Cykloidenachse und dessen x -Achse die Lage der horizontalen Scheiteltangente hat.

Die Cykloide ist bekanntlich jene Curve, die ein Punkt M eines Kreises $UMU'M$ beschreibt, wenn sich dieser Kreis (der erzeugende Kreis, Rollkreis oder Wälzkreis), dessen Radius r der halben Höhe oo' der Cykloide gleich ist,

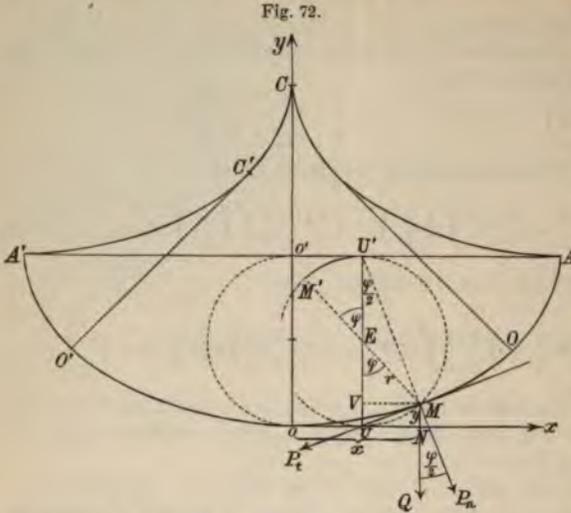


Fig. 72.

längs der Basis AA' wälzt, ohne zu gleiten. Demnach ist die Basis AA' gleich dem Umfange $2r\pi$ dieses Rollkreises. Der Wälzungswinkel bei dem Übergange des Erzeugungskreises aus der Mittel-lage oo' in die Lage MM' , während welcher Bewegung der Punkt M den Bogen oM der Cykloide durchläuft, ist, wenn UEU' der zur Basis senkrechte (verticale) Kreisdurchmesser ist, der Centriwinkel $\sphericalangle MEU = \sphericalangle M'EU' = \varphi$, so dass sich wäh-

rend dieser Bewegung der Bogen $U'M'$ von der Geraden $o'U'$ abwälzt und bei der weiteren Bewegung der Kreisbogen $U'M$ sich allmählich anlegt an die Strecke $U'A$. Es ist demnach $o'U' = \text{arc } M'U' = r\varphi$. Nun ist, wenn $MV \perp U'U'$ ist und der Scheitel o zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Achsensystems angenommen wird, dessen x -Achse horizontal ist,

$$\begin{aligned} x &= oN = oU + UN = o'U' + VM = r\varphi + r \sin \varphi \\ y &= NM = UV = UE - VE = r - r \cos \varphi \end{aligned}$$

daher

$$\begin{aligned} dx &= r(1 + \cos \varphi) d\varphi \\ dy &= r \sin \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Bezeichnet man das dem beliebigen Punkte M der Cykloide benachbarte Wegelement durch ds , so ist demgemäß

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = r \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi = r \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi = \\ &= 2r \cdot \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi \end{aligned}$$

Es ist demnach der Bogen $oM = s$

$$s = \int_0^s ds = \int_0^{\varphi} 2r \cdot \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4r \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 4r \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Das Bogenelement ds wird von dem Punkte M beschrieben, während sich der Kreis MM' um den Winkel $d\varphi$ auf der Basis AA' weiter wälzt, wobei offenbar der Berührungspunkt U' für einen Moment an der Drehung des Wälzkreises nicht theilnimmt, demnach eine augenblickliche Rotation um den Punkt U' als den augenblicklichen Drehpunkt stattfindet. Es kann also das beschriebene Bogenelement ds als Element eines Rotationskreises, dessen Mittelpunkt U' ist, angesehen werden, daher muss ds auf dem Radius $U'M$ dieses Rotationskreises senkrecht stehen. Verbindet man M mit dem unteren Endpunkte U des ver-

ticalen Durchmessers, so ist der Winkel $U'MU$ ein Winkel im Halbkreise, daher ein rechter, und es hat demnach das Bogenelement ds , somit auch die Tangente an die Cykloide die Lage UM , und MU' ist die Normale der Cykloide.

Zerlegt man die Schwerkraft Q in die Tangentialkraft P_t und in die zur Bahn normale Componente P_n , so muss dem Gesagten gemäß die erste Componente die Richtung MU haben und die Richtung der letzteren Componente in die Verlängerung von $U'M$ fallen, und da aus bekannten Gründen der Peripheriewinkel $UU'M$, daher auch der ihm gleiche correspondierende Winkel (P_n, Q) der Hälfte des Centriwinkels φ gleich ist, so ist $P_t = -Q \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$. Beachtet man die frühere Gleichung $s = 4r \sin \frac{\varphi}{2}$, so ergibt sich

$$P_t = -Q \cdot \frac{s}{4r} = -m \cdot \frac{g}{4r} s = -mk^2 s$$

$$p_t = \frac{P_t}{m} = -\frac{g}{4r} \cdot s = -k^2 s$$

wenn durch k der constante Ausdruck $\sqrt{\frac{g}{4r}}$ bezeichnet wird. Es wird also bei der schwingenden Bewegung in einer Cykloide (wenn von dem Reibungs- und Luftwiderstande abgesehen wird) die Bedingung (1) des § 38, S. 153 für die tangential Beschleunigung p_t nicht, wie beim Kreispendel, nur annähernd, sondern in voller Strenge erfüllt, daher haben auch alle anderen Gleichungen des § 38 hier ihre volle Giltigkeit, und zwar für eine beliebige große Schwingungsamplitude a , und es ist demnach, wenn für $s = 0$ auch $t = 0$ angenommen wird,

$$s = a \sin kt = a \sin \left(t \sqrt{\frac{g}{4r}} \right)$$

$$v = ka \cos kt = a \sqrt{\frac{g}{4r}} \cdot \cos \left(t \sqrt{\frac{g}{4r}} \right)$$

$$T = \frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{4r}{g}}$$

Der letzten Gleichung gemäß ist bei einem Cykloidalpendel die Schwingungsdauer vollkommen unabhängig von der Amplitude A , bzw. $oO = a$, daher die Zeit für die Fallbewegung von A nach dem tiefsten Punkte o dieselbe wie die Dauer des Falles von O nach o , mag O welcher Punkt der Cykloide immer sein. Wegen dieser Eigenschaft wird die Cykloide als eine Tautochrone oder Isochrone (*είσος* gleich, *χρόνος* Zeit) bezeichnet, und zwar ist dieselbe, wie sich zeigen lässt, die einzige Isochrone (Tautochrone). Die Cykloide wird auch Brachystochrone genannt, weil von allen in denselben zwei (ungleich hohen) Punkten endigenden Curven die Cykloide jene ist, die in der kürzesten (*βραχίστατος*) Zeit von einem schweren Körper zurückgelegt wird.

Will man das Cykloidenpendel in Form eines Fadenpendels in Anwendung bringen, so hat man nur zwei feststehende Schablonen auf der unteren Seite mit solchen krummen Flächen zu versehen (bzw. solche Metallblättchen festzustellen), die nach den zu den Cykloidenhälften AO und $A'O$ parallelen und congruenten Curven CA' und CA gekrümmt sind, so dass $CA' \cong AO$, $CA \cong A'O$ und daher auch $Co' = o'o = 2r$ ist. Wenn man nun einen Faden von der Länge $Co = 4r$, an dessen unterem Ende sich ein kleiner schwerer Körper befindet, am oberen Ende in C befestigt und schwingen lässt, so dass sich derselbe beim Schwingen (nach links) an eine der seitlichen cykloidischen Schablonen zum Theil (etwa von C bis C') anlegt und sich zum anderen Theil ($C'O'$) geradlinig in der Richtung der Tangente von C' spannt und beim Zurückschwingen sich wieder

abwickelt, so beschreibt der Endpunkt O' dieses Fadens einen Bogen $O'O$ der Evolvente $A'oA$ der Cykloide CA' , bezw. CA , welche Evolvente nach einem Satze der Analysis die zu ihrer Evolute CA' , bezw. CA congruente Cykloide $A'oA$ ist.

Das Cykloidalpendel wurde schon von dessen Entdecker Huyghens als dasjenige einfache Pendel erkannt, dessen Schwingungsdauer von der Amplitude, mag der Wert der letzteren wie groß immer sein, völlig unabhängig ist.

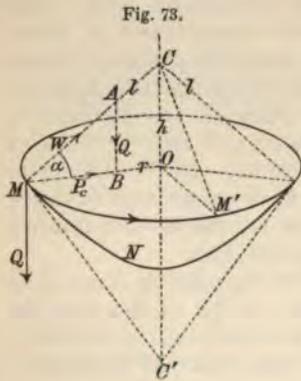
d) Centrifugalpendel.

Wenn sich ein schwerer materieller Punkt von der Masse m in einer vorgeschriebenen krummlinigen, jedoch horizontalen Bahn bewegt, so ist, wie dies schon einmal (S. 187) bemerkt wurde, wenn außer der Schwerkraft $Q = mg$ und dem normalen Bahnwiderstande W keine andere Kraft (also auch kein Reibungswiderstand) auf denselben einwirkt, seine Bewegung stets, mag die krummlinige Bahn wie immer gestaltet sein, eine gleichförmige, indem die Kräfte Q und W auf der Bewegungsrichtung stets senkrecht stehen, also keine tangentielle Componente haben. Der Hodograph dieser Bewegung ist daher in allen Fällen eine horizontale Kreislinie und ihr Mittelpunkt der Pol.

Die Richtung und Größe des Bahnwiderstandes W lässt sich in jedem Punkte M der Bahn dadurch auf bekannte einfache Weise bestimmen, dass aus den Kräften Q und W sich als Resultierende die Centripetalkraft $P_c = \frac{mv^2}{\rho}$ ergeben muss, deren Größe außer von der constanten Geschwindigkeit v von dem Werte des im allgemeinen variablen Krümmungshalbmessers ρ abhängt. Die Richtung des Widerstandes W muss stets in der Ebene der beiden anderen Kräfte P_c und Q , also in der durch die jeweilige Normale der ebenen (horizontalen) Bahn (welche zugleich die Richtung des Krümmungshalbmessers ist) gelegten Verticalebene enthalten sein.

Der einfachste Fall tritt offenbar dann ein, wenn P_c , also auch ρ einen constanten Wert hat, d. h. der materielle Punkt sich in einer ebenen Kreisbahn vom Radius r bewegt. Einen derartigen materiellen Punkt, der unter der steten Einwirkung der Schwerkraft in einer vorgeschriebenen horizontalen Kreisbahn circuliert, bezeichnet man als ein Centrifugalpendel.

Bei einem Centrifugalpendel muss, da sowohl die gegen den Kreismittelpunkt O (Fig. 73) gerichtete resultierende Centripetalkraft P_c ,



als auch die auf der Ebene der Bahn stets senkrechte (verticale) Componente Q derselben constant ist, auch die zweite Componente W constant und gegen die Ebene der Kreisbahn unter einem constanten Winkel α geneigt sein, und zwar ergibt sich, da $P_c = \frac{mv^2}{r} = 4m\pi^2 \cdot \frac{r}{T^2}$ (siehe S. 179) ist, wo T die Umlaufszeit bedeutet, aus dem Kräfte-dreiecke MAB

$$\left. \begin{aligned} tg \alpha &= \frac{Q}{P_c} = \frac{gr}{v^2} = \frac{gT^2}{4\pi^2 r} \\ W &= \frac{Q}{\sin \alpha} = \frac{mg}{\sin \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Die Richtungslinie der Kraft W beschreibt, da α constant ist, bei der Bewegung des materiellen Punktes eine senkrechte Kreiskegel-fläche, deren Achse die durch den Kreismittelpunkt O geführte Verticale ist. Die Höhe $h = OC$ des entsprechenden Kegels ist $h = r \cdot tg \alpha$. Setzt man in diese Gleichung die Werte aus (21), so findet man

$$h = g \cdot \frac{r^2}{v^2} = \frac{gT^2}{4\pi^2} \dots \quad (22)$$

welche Gleichung lehrt, dass stets

$$v = r \sqrt{\frac{g}{h}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} \dots \quad (23)$$

Führt man in der Ebene MCO die Gerade $MC' \perp MC$ bis zum Durchschnittspunkt C' mit der Kegelachse, so ist aus bekannten Gründen $r^2 = h \cdot OC'$, daher $v = \sqrt{g \cdot \frac{r^2}{h}} = \sqrt{g \cdot OC'}$.

Will man das Centrifugalpendel als ein konisches Fadenpendel, dessen Faden die erwähnte Kegelfläche während seiner Bewegung beschreibt, in Anwendung bringen, so hat man demselben eine Länge $l = CM = \sqrt{h^2 + r^2}$ zu geben, die sich aus der Fig. 73 und der Gleichung (22) für ein beliebiges T und r bestimmen lässt, wobei vorausgesetzt ist, dass der Faden eine derart geringe Masse besitzt, dass von derselben und dem Gewichte des Fadens vollkommen abgesehen werden kann.

Ebenso ergibt sich umgekehrt aus den früheren Gleichungen, wenn die Fadenlänge l gegeben ist, für einen jeden Wert der Umlaufszeit T der entsprechende Wert des h , des r und des Öffnungswinkels des Kegels. Je kleiner die Umlaufszeit T ist, oder mit anderen Worten je schneller der Faden l sich um die Achse OC dreht, um so kleiner ist nach (23) der Wert des h , um so größer daher der Winkel MCO und der Radius r (Centrifugalregulator).

Die Spannung des Fadens, d. i. die Kraft W , mit welcher der schwere Körper m vom Faden in der Richtung von M nach C und

mit welcher anderseits der Faden vom Körper m in der entgegengesetzten Richtung gezogen wird, ist nach (21) und (22) bestimmt durch

$$W = \frac{mg}{\sin \alpha} = mg \cdot \frac{l}{h} = 4m\pi^2 \cdot \frac{l}{T^2} \dots \quad (24)$$

Um das Fadenpendel zur kreisenden Bewegung nach den hier abgeleiteten Gesetzen zu veranlassen, hat man nur der Gleichung (23) zufolge, nachdem dem Faden irgend eine gegen die Verticale geneigte Lage CM gegeben wurde, welcher die Werte $h = l \sin \alpha$ und $r = l \cos \alpha$ entsprechen, dem Punkte M zufolge (23) eine Geschwindigkeit $v = r \sqrt{\frac{g}{h}}$ in einer zur Lage CM senkrechten horizontalen, die Kreisbahn tangierenden Richtung zu ertheilen.

Anmerkung. Es bedarf nicht erst näher auseinandergesetzt zu werden, dass sich die obigen Gleichungen auch leicht derart ableiten ließen, dass man die Schwerkraft $Q = mg$ mit der Centrifugalkraft $-P_c$ zusammensetzen würde, da aus dieser Zusammensetzung sich bekanntlich der normale Druck $-W$ auf die Bahn (bezw. die den Faden des Fadenpendels spannende, also in der Längsrichtung des Fadens wirkende Kraft $-W$) ergeben muss. Daher rührt auch der Name „Centrifugalpendel“.

Die Formel (23) $T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$ für die Umlaufszeit steht in Übereinstimmung mit der Formel (11) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ für die doppelte Schwingungszeit eines mathematischen Kreispendels, nur tritt hier statt der Pendellänge l die Höhe h des Pendels ein.

Statt ein Fadenpendel anzuwenden, könnte man auch den materiellen Punkt m durch Ertheilung derselben Anfangsgeschwindigkeit nach denselben Gesetzen zur circulierenden Bewegung auf der inneren Seite einer beliebigen Rotationsfläche, deren Achse die Verticale CC' ist, veranlassen, wenn nur die Meridiancurve MN (Fig. 73) dieser Rotationsfläche im Punkte M die Gerade MC' zur Tangente hat (Circulation innerhalb eines konischen Trichters oder einer Kugelschale u. s. w.).

Anmerkung. Würde man bei der hier untersuchten Bewegung eines schweren Körpers in einer vorgeschriebenen horizontalen Kreisbahn (z. B. in einer Kreisrinne) auch auf die Reibung Rücksicht nehmen, so müsste als Tangentialkraft, die nach Gleichung (2) § 42 S. 179 durch $mv \frac{dv}{ds}$ ausgedrückt werden kann, der Reibungswiderstand auftreten, der durch das negative Product aus dem Reibungscoefficienten f und dem normalen Drucke $-W_n$ bestimmt ist, wobei $-W_n$ sich wiederum aus $Q = mg$ und $-P_c = -\frac{mv^2}{r}$ zusammensetzt, so dass $mv \frac{dv}{ds} = -mf \sqrt{g^2 + \frac{v^4}{r^2}}$ ist. Durch Integration dieser Gleichung ergibt sich in ein

facher Weise, wenn v_0 die Anfangsgeschwindigkeit bedeutet, für welche $s = 0$ ist, $2c^2 = (\sqrt{g^2 r^2 + v_0^4} + v_0^2) e^{-2\frac{fs}{r}} - (\sqrt{g^2 r^2 + v_0^4} - v_0^2) e^{2\frac{fs}{r}}$, so dass der Körper nach Zurücklegung des Weges $\frac{r}{2f} \log \text{nat} \left(\sqrt{1 + \frac{v_0^4}{r^2 g^2} + \frac{v_0^2}{rg}} \right)$ zur Ruhe kommt (d. h. $v = 0$ wird). Würde man demnach $g = 0$ setzen, d. h. das Bewegliche als einen schwerlosen, in einer vorgeschriebenen rauhen Bahn beweglichen Körper betrachten, so wäre $v = v_0 \cdot e^{-\frac{fs}{r}}$, oder wenn man die Ablenkung der anfänglichen Bewegungsrichtung von der Schlussrichtung durch α bezeichnet, $v = v_0 e^{-f\alpha}$. Dieser letztere Wert ergibt sich übrigens aus einer sehr einfachen Untersuchung nicht nur für die Kreisbahn, sondern allgemein für eine jede beliebig gekrümmte ebene raue Bahn, wofern man nur in dem Ausdrucke für die Fliehkraft $-P_c = -\frac{mv^2}{\rho}$ und statt $\frac{1}{\rho}$ aus bekannten Gründen $\frac{d\alpha}{ds}$ setzt (wo $d\alpha$ den Contingenzwinkel bedeutet).*)

Capitel V.

Statik des linearen materiellen Punktsystems.

§ 48. Einleitung: Kräfte eines materiellen Punktsystems. Das lineare Punktsystem. Kettenlinien.

Unter einem materiellen Punktsystem ist ein Inbegriff (Complex) von materiellen Punkten zu verstehen, welche im allgemeinen theils von äußeren, theils von inneren Kräften beeinflusst werden. Als innere Kräfte des Punktsystems sind, wie schon auf S. 25 erwähnt wurde, solche zu bezeichnen, mit welchen die materiellen Punkte des Systems infolge der mannigfachen Zustände derselben wechselseitig auf einander einwirken — im Gegensatze zu den äußeren Kräften, die von der Einwirkung solcher materieller Punkte, beziehungsweise Körper herrühren, die nicht dem Punktsystem angehören. Nach dem Principe der Gegenwirkung entspricht jeder Kraft p , mit welcher irgend ein materieller Punkt m des Punktsystems auf einen zweiten Punkt m' desselben Punktsystems einwirkt, eine entgegengesetzt gleiche Gegenkraft $-p$, deren Angriffspunkt der erstere Punkt m ist. Der bei weitem wichtigste Fall ist jener, in welchem diese inneren Kräfte Kräfte der ersten im § 5 besprochenen Art, also bloß entweder anziehende oder abstoßende Kräfte sind, und es soll dieser Fall allein allen folgenden Deductionen zugrunde gelegt werden, so dass alle nun folgenden Gesetze der Mechanik nur unter der Voraussetzung gültig sind, dass nur innere Kräfte der ersten Art

*) In der früheren Auflage folgt hier ein besonderer Paragraph, welcher ausführlich die Bewegung in einer polygonalen Bahn behandelt,

auf die einzelnen Punkte des Punktsystems wirken oder, was von nun an stets bedungen sein soll, dass, wenn innere Kräfte der zweiten Art im Punktsysteme vorkommen, diese den äußeren Kräften beizuzählen sind.

Um in der Folge die inneren Kräfte von den äußeren auch durch die Bezeichnung zu unterscheiden, sollen die inneren Kräfte stets — außer wo eine Verwechslung mit den gleichen Zeichen für Beschleunigungen und Geschwindigkeiten, zu deren Bezeichnung in einem solchen Falle die entsprechenden deutschen Schriftzeichen $p, v \dots$ gewählt sein mögen, zu besorgen wäre — durch die kleinen Buchstaben $p_1 p_2 p' p'' \dots v$ u. s. w., die äußeren Kräfte wie bisher durch die großen Buchstaben bezeichnet werden.

Befindet sich ein jeder materieller Punkt eines Punktsystems unter dem gleichzeitigen Einflusse aller äußeren und inneren Kräfte, die auf denselben einwirken, im Gleichgewichte, so ist auch das ganze Punktsystem im Gleichgewichte — und umgekehrt —, und es müssen demnach die Gleichgewichtsbedingungen für Punktsysteme aus den früher deducierten Gleichgewichtsgesetzen für materielle Punkte sich ableiten lassen.

Ein System von längs irgend einer Linie gereihten materiellen Punkten, von welchen nur je zwei unmittelbar aufeinanderfolgende aufeinander einwirken, sei als ein lineares Punktsystem bezeichnet.

Folgen einander die materiellen Punkte in der erwähnten Linie ohne Unterbrechung der Stetigkeit (was künftighin meist vorausgesetzt werden soll), so wird das Punktsystem auch eine materielle Linie genannt.

Unter den linearen Punktsystemen ist jenes das einfachste und ist daher vor Allem in diesem Capitel der Behandlung unterzogen, bei welchem *a*) die Entfernung je zweier in der besagten Linie unmittelbar aufeinanderfolgender materieller Punkte eine unveränderliche, mit anderen Worten, die Verbindung je zweier solcher Punkte eine starre (unveränderliche) ist und *b*) die inneren Kräfte, mit welchen je zwei solche materielle Punkte aufeinander einwirken, (wie schon oben erwähnt wurde) nur Kräfte der ersten Art sind.

Jene Linie, deren Form ein solches lineares Punktsystem unter der Einwirkung irgend eines Systems äußerer Kräfte annimmt, führt im allgemeinen den Namen einer Kettenlinie (im weitesten Sinne des Wortes).

Aus der Eigenschaft *a*) folgt sofort, dass die gesammte Länge der Kettenlinie eine constante ist, wenn auch ihre Form sich mannigfach ändert, und aus der Eigenschaft *b*) folgt, dass, wenn etwa die Kettenlinie eine Gerade ist, die geringste auf irgend einen materiellen Punkt m derselben einwirkende äußere Kraft, deren Richtung nicht

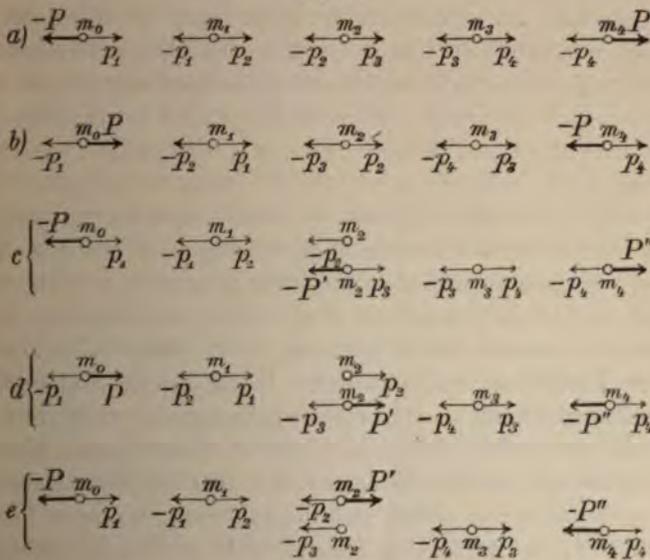
in diese Gerade fällt, sofort eine Biegung der Kettenlinie zur Folge haben muss, da dieser Kraft durch die zwei inneren beiderseitigen Kräfte, die auf denselben Punkt m einwirken und deren Richtungen in die besagte Gerade fallen, nicht das Gleichgewicht gehalten werden kann (siehe S. 62), mit anderen Worten, es lehrt die Eigenschaft b), dass das lineare Punktsystem vollkommen (absolut) biegsam ist.

Es haben jedoch die folgenden Gesetze, die aus der Annahme b) allein deduciert werden, auch Giltigkeit für den Gleichgewichtszustand solcher materieller Linien, deren Länge den jeweiligen Spannungen entsprechend sich ändert, also für das Gleichgewicht elastischer biegsamer materieller Linien.

Die inneren Kräfte, die zwischen je zwei aufeinanderfolgenden materiellen Punkten wirksam sind, bezeichnet man als Spannungen, und zwar je nachdem dieselben anziehende oder abstoßende sind, also entweder einem äußeren Zuge oder einem Drucke das Gleichgewicht zu halten imstande sind, als Zugspannungen oder Druckspannungen.

Mitunter ist nur die eine Art der Spannungen möglich. So können z. B. bei einem Seile, beziehungsweise Faden, der, wenn er eine Kettenlinie darstellen soll, als absolut undehnbar und ungemein

Fig. 74.



dünn angenommen werden muss, nur Zugspannungen vorkommen; dagegen können in einer Kette, deren Glieder, wenn auch von beliebiger Länge, doch von minimaler Dicke und unbegrenzter Festig-

keit anzunehmen sind, in ihren einzelnen Gliedern sowohl Zug- als auch Druckspannungen vorkommen.

1. Nimmt zunächst die Kettenlinie die Form einer Geraden an, so wirken in dieser Geraden infolge der Wechselwirkung der materiellen Punkte m_0 und m_1 (Fig. 74) die inneren Kräfte p_1 und $-p_1$, jener der Punkte m_1 und m_2 die Kräfte p_2 und $-p_2$ u. s. w.

Wirken nun die äußeren Kräfte nur auf die äußersten Punkte ein, so muss im Zustande des Gleichgewichtes, damit m_0 , bzw. $m_1, m_2 \dots$ in Ruhe bleibe (Fig. 74 *a* und *b*) $P = p_1, p_1 = p_2, p_2 = p_3$ u. s. w. sein, und die Richtungen der beiden äußeren Kräfte müssen in der Geraden $m_0 m_1 m_2 \dots$ nach entgegengesetzten Richtungen wirken, und zwar herrscht in Fig. *a*) eine Zug- und in Fig. *b*) eine Druckspannung. Es überträgt sich also in diesem Falle die Spannung, welche durch die auf die Endpunkte angreifenden entgegengesetzt gerichteten Kräfte P und $-P$ hervorgerufen wird, ohne Änderung ihrer Größe längs der ganzen Kette.

Wirkt aber außer den Endkräften P und P'' noch eine äußere Kraft P' (Fig. 74 *c*), *d*), *e*), — die durch eine Klammer verbundenen Zeichnungen hat man sich in eine Gerade zusammengezogen zu denken) auf einen Punkt m_2 innerhalb der materiellen Punktreihe, so müssen zunächst im Zustande des Gleichgewichtes, wenn keine Biegung eintreten soll, die Richtungen dieser Kräfte P, P' und P'' in der Geraden $m_0 m_1 m_2 \dots$ gelegen sein, ferner muss in allen den in der Zeichnung dargestellten Fällen (wegen des Gleichgewichtes in m_0 und m_1) $P = p_1 = p_2$ und (infolge des Gleichgewichtes in $m_3, m_4 \dots$) $p_3 = p_4 = \dots = P''$ sein. Soll nun der Punkt m_2 in Ruhe bleiben, so muss in Fig. *c*) und *d*) $p_3 = P' + p_2$, also auch $P'' = P' + P$ und in Fig. *e*) $P' = p_2 + p_3 = P + P''$ sein.

In Fig. *c*) herrscht zwischen m_0 und m_2 eine Zugspannung $= P$, zwischen m_2 und m_4 eine andere Zugspannung $= P''$, in Fig. *d*) ist dagegen die zwischen m_0 und m_2 bestehende Spannung $= P$ eine Druckspannung, welche im Punkte m_2 in die davon verschiedene, zwischen m_2 und m_4 herrschende Druckspannung $= P''$ übergeht, in Fig. *e*) aber erfolgt im Punkte m_2 ein plötzlicher Übergang der linkerseits herrschenden Zugspannung $= P$ in eine Druckspannung $= P''$ rechterseits.

Wirkt also außer den Endkräften P und P'' noch eine äußere Kraft P' innerhalb der geradlinigen Kette (des Seiles) in irgend einem Punkte m_2 derselben, so ändert sich die Spannung in diesem Punkte um diesen Wert P' , und zwar plötzlich, wenn P' endlich ist, oder aber es findet, wenn die materiellen Punkte der Kette einander kontinuierlich folgen und auf jeden Punkt derselben eine unendlich kleine Kraft in der Richtung der geradlinigen Kette einwirkt, eine kontinuierliche Änderung der Spannung von einem Ende der Kette (des Seiles) gegen da

andere Ende statt, so z. B. nimmt die Zugspannung bei einem in verticaler Lage aufgehängten schweren Draht (Stäbchen, Seil, Faden), der am unteren Ende belastet ist, nach oben stetig zu und bei einer verticalen Säule, die am unteren Ende gestützt und am oberen Ende belastet ist, nimmt die Druckspannung nach unten stetig zu.

2. Soll die Kettenlinie im Gleichgewichtszustande eine gebrochene (polygonale) Linie sein, so kann dies nach dem Gesagten nur dann stattfinden, wenn in den Eckpunkten dieses Polygons, welche man die Knotenpunkte nennt, äußere Kräfte einwirken, deren Richtungen nicht mit den anstoßenden Polygonseiten zusammenfallen, während innerhalb dieser Seiten auch Kräfte, deren Richtungen, wie z. B. jene der Kraft P' (Fig. 74) mit diesen Seiten gleichgerichtet sind, thätig sein können. Wirken die äußeren Kräfte nur in den Knotenpunkten, so ist die Spannung in allen Punkten irgend einer beliebigen Seite des Polygons eine constante und ändert sich nur beim Übergange von einer Seite zur folgenden. Eine derartige im Gleichgewichte befindliche gebrochene Kettenlinie bezeichnet man als ein Kettenpolygon oder Seilpolygon (polygon funiculaire). Dasselbe kann offenbar entweder offen oder geschlossen sein. Im ersten Falle müssen außer den in den Knotenpunkten angreifenden äußeren Kräften auch längs der beiden Endseiten äußere, mit diesen Seiten gleichgerichtete Kräfte wirken, die den Spannungen in diesen Endgliedern gleich sind.

Eine Kette, die aus ungemein dünnen, jedoch als absolut fest angenommenen geradlinigen Stäbchen gebildet ist oder aber ein aus dünnen Seilen, die beiderseits in kleinen Ringen (den Knotenpunkten) etwa mittels Häkchen eingehängt sind, geformtes Polygon stellt am einfachsten ein Kettenpolygon dar, und zwar können in den einzelnen Seiten desselben im ersten Falle sowohl Zug- als Druckspannungen stattfinden, im letzteren Falle nur Zugspannungen.

3. Wirken äußere Kräfte auf einen jeden Punkt der Kettenlinie in gegen diese geneigten Richtungen ein, so übergeht das Kettenpolygon in eine continuierlich gekrümmte Curve, wenn diese Kräfte unendlich klein sind, oder in eine Curve mit vorspringenden Punkten (Spitzen), wenn diese besonderen Punkte Angriffspunkte endlicher Kräfte sind. Eine solche im Gleichgewichte befindliche krummlinige Kettenlinie, deren Form von den Richtungen und Größenbeziehungen der längs derselben continuierlich vertheilten elementaren Kräfte abhängt, bezeichnet man im Gegensatze zum Kettenpolygon als eine Kettencurve, Seilcurve oder meistens als Kettenlinie im engeren Sinne des Wortes. Bei einer solchen ändert sich die Spannung im allgemeinen von einem Punkte zum anderen. Kettenlinien, in deren einzelnen Elementen nur Druckspannungen vorkommen, bezeichnet man in der technischen Mechanik

meistens als Stützzlinien (z. B. Stützzlinien für Wasserdruck, für Erd-
druck u. s. w.), Da jedoch die allgemeinen Gleichgewichtsgesetze für
die letzteren sich von den Gleichgewichtsgesetzen der anderen Ketten-
linien nicht unterscheiden, so sind die Stützzlinien unter der allgemeinen
Bezeichnung „Kettenlinien“ zu subsumieren. Es ist sofort einleuchtend,
dass das Gleichgewicht bei Stützzlinien ein labiles ist, während das-
selbe bei solchen Kettenlinien, in denen Zugspannung herrscht (bei
hängenden Kettenlinien), ein stabiles ist.

§ 49. Allgemeine Gleichgewichtsgesetze für Kettenlinien.

Es sei O irgend ein Knotenpunkt eines Kettenpolygons (Seil-
polygons), P die auf denselben einwirkende äußere Kraft und p und p'
die Spannungen in den dem Knotenpunkte benachbarten Elementen

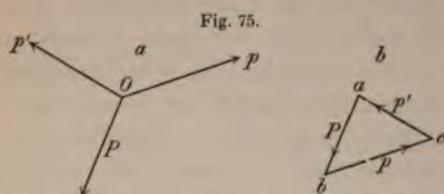


Fig. 75.

der anstoßenden Polygonseiten, welche Spannungen dem letzten Paragraph zufolge die Richtungen dieser Seiten haben. Sollen sich diese drei Kräfte P , p und p' das Gleichgewicht halten, so müssen nach § 18 S. 62 ihre

Richtungen in derselben Ebene gelegen, das entsprechende Kräfte-
polygon (Fig. 75 b) muss ferner ein geschlossenes sein und es ist

$$\frac{P}{\sin(p p')} = \frac{p}{\sin(p' P)} = \frac{p'}{\sin(P p)} \quad (1)$$

Mit Hilfe dieser Relation kann man, sobald die Richtungen der
Polygonseiten und die Größe und Richtung der äußeren Kraft P
gegeben sind, die Größen der Spannungen p und p' und umgekehrt
aus den Größen von P , p und p' die Winkel $(p p')$, $(p' P)$, $(P p)$, deren
Summe 2π ist, bestimmen. Der einfachste (der Fig. 75 entsprechende)
Fall würde jener sein, in welchem an den Enden zweier im Punkte O
zusammentreffenden geraden Seile zwei äußere Kräfte von der Größe
und Richtung der Kräfte p und p' einen Zug ausüben. Aus dem
Umstande, dass die Richtungen der drei Kräfte $P p p'$ bei einem jeden
Knotenpunkte in derselben Ebene gelegen sein müssen, ergibt sich
sofort, dass eine jede Kettenlinie, in deren Knotenpunkten nur ver-
ticale äußere Kräfte (z. B. aufgehängte Lasten) angreifen, also auch
eine jede sogenannte belastete Kettenlinie notwendigerweise
eine ebene Kettenlinie sein muss, deren Ebene vertical ist, denn
in der Verticalebene, welche durch die äußerste Seite durchgelegt ist,
wirkt die in dem ersten Knotenpunkte angreifende Last P , und es
muss sonach in dieser Ebene auch die zweite Seite des Ketten-
polygons gelegen sein, und weil in dieser Verticalebene auch die

in dem Endpunkte dieser Seite angreifende zweite Last wirkt, muss auch die dritte Seite in dieser Ebene liegen u. s. w.

Weil ferner (siehe S. 62) im Zustande des Gleichgewichtes die Richtung der äußeren Kraft P , die den inneren Kräften (Spannungen) p und p' das Gleichgewicht hält (Fig. 75), in dem Scheitelwinkel des hohlen Kräftewinkels der Kräfte p und p' gelegen sein muss, so ist daraus zu ersehen, dass bei Kettenlinien, in welchen nur Zugspannungen vorkommen (z. B. bei hängenden Kettenlinien), die in den Knotenpunkten wirkenden äußeren Kräfte nach der convexen Seite (Fig. 75), dagegen wenn die Spannungen Druckspannungen sind (Stützzlinien), nach der hohlen Seite gerichtet sein müssen. Im letzteren Falle hat man nur in Fig. 75 *a* und *b* alle Pfeilrichtungen in die entgegengesetzten umgewandelt und statt der Seile durch Charniere mit einander in Verbindung stehende Stäbchen sich zu denken.

Man ersieht auch aus den Gleichungen (1), dass es absolut unmöglich ist, ein Seil, an dessen einem Punkte O eine äußere Kraft P in einer gegen dasselbe geneigten Richtung wirkt, geradlinig zu spannen, denn in diesem Falle müsste $(pp') = \pi$, also $p = \frac{P \cdot \sin(p'P)}{\sin(pp')} = \frac{P \cdot \sin(p'P)}{0} = \infty$ und ebenso $p' = \infty$ sein, was undenkbar ist.

Die Gleichheit der Spannungen p und p' kann der Gleichung (1) zufolge nur dann eintreten, wenn die Richtungslinie der Kraft P den Winkel (pp') halbiert.

In vielen Fällen rührt die äußere Kraft P von dem normalen Widerstande W der Oberfläche eines Körpers her, an welche sich das Seil (bzw. Kettenglied) Op' anlegt (s. Fig. 76).

In diesem Falle ist $P = W$, $(p'P) =$

$$= (p'W) = \frac{\pi}{2}, (Pp) = (Wp) = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

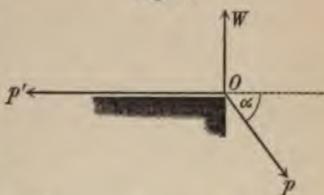
und $(pp') = \pi - \alpha$ zu setzen, wenn durch α der spitze Neigungswinkel der anstoßenden Seile (Kettenglieder) bezeichnet wird.

Aus der Gleichung (1) ergibt sich dann $\frac{W}{\sin \alpha} = \frac{p}{1} = \frac{p'}{\cos \alpha}$, also

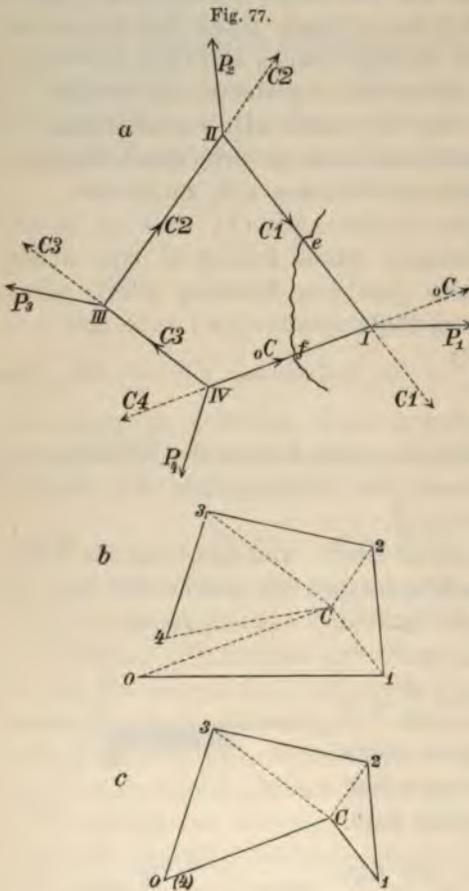
$$\left. \begin{aligned} W &= p \sin \alpha \\ p' &= p \cos \alpha \end{aligned} \right\} (2)$$

Diese Gleichungen lehren, dass in diesem Falle die Wirkung des Widerstandes sich in einer Verringerung der Zugspannung, deren Wert von p in den kleineren Wert $p' = p \cos \alpha$ übergeht, äußert, und zwar beträgt diese Spannungsänderung $p - p' = p - p \cos \alpha = 2p \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. Das Gleiche findet im Falle von Druckspannungen statt.

Fig. 76.



Um die Gleichgewichtsbedingungen für ein etwa geschlossenes Seilpolygon $IIIIIIV$ (Fig. 77a), in dessen Knotenpunkten die äußeren Kräfte $P_1 P_2 P_3 P_4$ angreifen, zunächst auf graphischem Wege zu ermitteln, dazu diene folgende einfache Auseinandersetzung: Zerlegt man die im Knotenpunkte I angreifende Kraft in zwei mit den anstoßenden Seiten IVI und III des Seilpolygons gleichgerichtete Kräfte mit Hilfe des Kräfte-dreieckes $OC1$ (Fig. 77b), in welchem $O1$ die Kraft P_1 darstellt und $OC \parallel IVI$ und $1C \parallel III$ gezogen ist, so



stellen die punktierten, im Punkte C sich schneidenden Seiten OC und $C1$ die Komponenten, also auch die Zugspannungen in den parallelen Seiten IVI und III vor. Diese Spannungen pflanzen sich, wenn außer den Kräften $P_1 P_2 P_3 P_4$ keine äußeren Kräfte längs der Seiten des Seilpolygons wirken, nach den Erörterungen des § 48 ohne Änderung ihrer Größe längs der entsprechenden Seiten fort, so dass auf den Knotenpunkt II außer der unbekanntnen Spannung in der Seite $IIIII$ die Kraft $C1$ und die äußere Kraft P_2 einwirken, welche drei Kräfte sich das Gleichgewicht halten müssen. Setzt man demnach die Kraft $C1$ mit der durch 12 (Fig. 77b) dargestellten Kraft P_2 mit Hilfe des neuen Kräfte-dreiecks $\overline{C12}$ zusammen, so

muss die sich ergebende Resultante $C2$ die Richtung der Seilpolygon-seite $IIIII$ haben, also $C2 \parallel IIIII$ sein, und $C2$ muss die Spannung in dieser Seite darstellen, welche Spannung sich längs der Seite $IIIII$ auf den Knotenpunkt III fortpflanzt. Führt man auf diese Art fort, indem man in Fig. 77b die die Kräfte P_3 und P_4 darstellenden Seiten 23 und 34 anfügt, $C2$ mit 23 zusammensetzt zu $C3$, so dass $C3$ die Spannung in $IIIIV$ darstellt, also $C3 \parallel IVIII$ sein muss, ferner im Knotenpunkte IV die Kraft $\overline{C3}$ mit 34 zusammensetzt zu

4 , so muss auch $C4$ die in der Seite IVI herrschende Spannung darstellen, also $C4 \parallel IIV$ sein. Da nun dieser Construction zufolge die beiden vom Punkte C aus gezogenen Strahlen CO und $C4$ zu derselben Seite IIV parallel sind, so müssen sie in eine Gerade fallen und, weil ferner sowohl CO als $C4$ die Größen der in der Seite IIV herrschenden Spannung ausdrücken, so muss $CO = C4$ sein, also der Punkt O mit 4 zusammenfallen. Aus dieser Schlussfolgerung ergeben sich sonach folgende Sätze:

a) Construirt man ein Kräftepolygon 01234 , welches den in den Knotenpunkten eines Kettenpolygons (Seilpolygons) einwirkenden äußeren Kräften entspricht, so ist dasselbe stets ein geschlossenes, was nach § 18, S. 60 nichts anderes besagt, als dass die äußeren Kräfte, wofern sie ohne Änderung ihrer Richtung und Größe auf einen und denselben Angriffspunkt wirksam gemacht würden, sich das Gleichgewicht halten müssten.

b) Führt man in dem erwähnten Kräftepolygon von den Endpunkten irgend einer Seite, welche eine der äußeren Kräfte darstellt, zu den im Angriffspunkte dieser Kraft zusammenstoßenden Seiten des Kettenpolygons parallele Strahlen bis zu ihrem Durchschnittspunkte — dem Pole C — und verbindet diesen Pol C mit den aufeinanderfolgenden Eckpunkten des Kräftepolygons, so sind diese Strahlen $CO, C1, C2 \dots$ parallel zu den aufeinanderfolgenden Seiten des Kettenpolygons (Seilpolygons), und die Längen dieser Strahlen stellen zudem die Größen der in den entsprechenden Seiten herrschenden Spannungen dar, d. h. sie sind den letzteren proportional.

Diese Sätze haben nicht nur für den Fall Giltigkeit, dass das Kettenpolygon ein geschlossenes ist, wie in Fig. 77 *a*), sondern auch für ein offenes Polygon, denn, würde etwa der Knotenpunkt I , indem man den Theil eIf (Fig. 77 *a*) des Seilpolygons abtrennt, eliminiert werden, wodurch das Polygon ein offenes wird, so müssten nun außer den früheren äußeren Kräften $P_2 P_3 P_4$, falls das Gleichgewicht bestehen soll, statt der früheren Kraft P_1 längs der Endseiten IIf und IVf (Fig. 77 *a*) dieses offenen Polygons die früheren Componenten dieser Kraft P_1 , nämlich OC und $C1$ als äußere Kräfte (oder, wenn e und f fixe Punkte sind, als Widerstände dieser fixen Punkte) wirkend angenommen werden, so dass in diesem Falle in dem entsprechenden Kräftepolygon (Fig. 77 *b*) die Seite $O1$ wegfällt und an ihre Stelle die in dem Pole C sich schneidenden Seiten OC und $C1$ (siehe Fig. 77 *c*) treten, so dass also das den äußeren Kräften entsprechende Kräftepolygon $OC1234$ abermals ein geschlossenes ist und ferner offenbar auch das zweite Gesetz *b*) seine Giltigkeit beibehält, wofern als Pol C der Durchschnittspunkt der zu den Endseiten IIf und IVf

des offenen Kettenpolygons parallelen Seiten des Kräftepolygons angenommen wird. — Die Spannung in irgend einer Seite eines offenen Kettenpolygons ergibt sich, wie aus Fig. 77 *c* ersichtlich ist, als Resultante der einerseits oder andererseits von dieser Seite thätigen äußeren Kräfte. So ist z. B. die in der Seite *III IV* des Kettenpolygons stattfindende Spannung *C3*, wie Fig. 77 *c* lehrt, die Resultante von *C1*, *12* und *23*.

Ändert man in der Fig. 77 *a* die Richtungen aller äußeren Kräfte in die entgegengesetzten, in welchem Falle die Kettenpolygoneiten (statt der früher etwa vorhandenen Seile) durchwegs aus Stäben gebildet vorausgesetzt werden müssen, so finden dann Druckspannungen in den Seiten statt, doch die früheren Sätze behalten auch dann ihre volle Giltigkeit.

Die mathematischen Beziehungen zwischen den äußeren Kräften P_1, P_2 u. s. w., den Seiten und Winkeln des Kettenpolygons und den Spannungen lassen sich auf Grund der Fig. 77 *a, b, c* und der früheren beiden Sätze leicht mit Zuhilfenahme bekannter Lehrsätze der Trigonometrie und Polygonometrie aufstellen.

Wirken alle äußere Kräfte parallel zu derselben Ebene *E*, so müssen sowohl das Kräftepolygon, als auch — den obigen Entwicklungen zufolge — das entsprechende Kettenpolygon ebene — und zwar zur Ebene *E* parallele — Polygone sein.

Da in einem solchen ebenen Kettenpolygon alle Kräfte, die auf irgend einen Punkt desselben einwirken, sich das Gleichgewicht halten und daher nach dem Momentensatze des § 18, S. 61 jede einzelne Momentensumme der auf irgend einen dieser Punkte einwirkenden (theils äußeren, theils inneren) Kräfte bezüglich irgend eines in der Ebene des Kettenpolygons gelegenen Punktes *O* sich auf Null reducirt, so muss auch die Gesamtsumme aller Kräfte Momente für das ganze Kettenpolygon Null werden. Nun sind je zwei in der letzteren Summe vorkommende innere Kräfte als Gegenwirkungen zweier Nachbarpunkte entgegengesetzt gleich und haben, da sie in derselben Geraden wirken, bezüglich des beliebig gewählten Punktes *O* entgegengesetzt gleiche Momente, deren Summe Null ist; man kann folglich bei der Bildung der oberwähnten Momentensumme von allen inneren Kräften absehen, und es ist demzufolge bei einem jeden ebenen Kettenpolygon im Zustande des Gleichgewichtes die algebraische Summe der statischen Momente der auf dasselbe einwirkenden **äußeren** Kräfte *P* für einen jeden in der Ebene des Kettenpolygons gelegenen Punkt *O* gleich Null.

Wird ein (geschlossenes oder offenes) Kettenpolygon durch einen beliebigen Schnitt in zwei andere (offene) Kettenpolygone getheilt, wie z. B. in Fig. 77 durch den Schnitt *ef* in die Theile *e II III IV f* und

eIf , so müssen, wie dies schon früher bemerkt wurde, zur Herstellung des Gleichgewichtes die ursprünglich bei e und f wirksamen inneren Kräfte p_e und p_f (Zug- oder Druckspannungen) nun als äußere Kräfte hinzutreten, so dass dann keine Änderung in den einwirkenden Kräften stattfindet, also auch keine Änderung in der Gleichgewichtsform der beiden Theilkettenpolygone eintreten kann. Nach dem letzten Gesetze muss nun die Momentensumme der äußeren Kräfte bei beiden Theilpolygonen verschwinden, daher z. B. bei dem Kettenpolygon $eIIIIIIVf$ die Gleichung $M_{pe} + M_{pe} + M_{pe} + M_{pe} + M_{pf} = 0$ stattfinden. Wählt man demnach etwa f oder einen anderen Punkt der Geraden IVf zum Momentenpunkte, so verschwindet das Moment der Kraft p_f in der letzten Gleichung, so dass man diese Gleichung zur Bestimmung von M_{pe} , also auch der Spannung p_e — und auch, wenn ein Punkt der Seite IIe zum Momentenpunkte gewählt wird, zur Bestimmung der Spannung p_f verwenden kann, wie dies auch gewöhnlich geschieht. Das Zeichen des mittels dieser Gleichung gesuchten Momentes gibt auch zugleich die Richtung der gesuchten Kraft p_e , bezw. p_f an und lässt daher zugleich, je nachdem diese Kraft in dem erwähnten Theilkettenpolygon nach außen oder nach innen (d. h. gegen den entsprechenden letzten Knotenpunkt) gerichtet ist, erkennen, ob die gesuchte Spannung eine Zug- oder Druckspannung ist. So würde man z. B. aus den Richtungen $C1$ und OC der so für das obige Polygon $eIIIIIIVf$ gefundenen Kräfte aus Fig. 77 ersehen, dass diese Spannungen Zugspannungen seien. Bei der Ausführung der Rechnung kann man etwa einfach derart verfahren, dass man ursprünglich für die gesuchten Kräfte p_e und p_f irgend eine, z. B. den Zugspannungen entsprechende Richtung annimmt; ergibt sich dann aus der letzten Momentengleichung ein negativer Wert für irgend eine dieser Kräfte, so ist dies ein sicheres Kennzeichen, dass diese gesuchte Spannung eine Druckspannung ist.

In ganz ähnlicher Weise, wie bisher die gebrochene materielle Linie (Punktreihe, Punktfolge) behandelt wurde, lässt sich auch ein aus Punktreihen oder aus materiellen geraden Linien gebildetes Netz (ein zusammengesetztes Kettenpolygon, Fachwerk) behandeln. Auch für dieses muss, wie dies die in ganz analoger Weise, wie früher, durchzuführende Untersuchung lehrt, das Kräftepolygon ein geschlossenes sein, die zu den einzelnen geradlinigen Punktreihen (Stäben) parallelen Strahlen des letzteren, die aber in diesem Falle nicht alle von demselben Punkte (Pol) ausgehen, stellen auch hier, wie dies die Zerlegung, beziehungsweise Zusammensetzung der auf einander folgenden Kräfte mittels der entsprechenden Kräfdreiecke zeigt, die Spannungen dar, und die Momentensumme aller äußeren Kräfte muss aus gleichen Gründen wie früher sich auf Null reducieren.

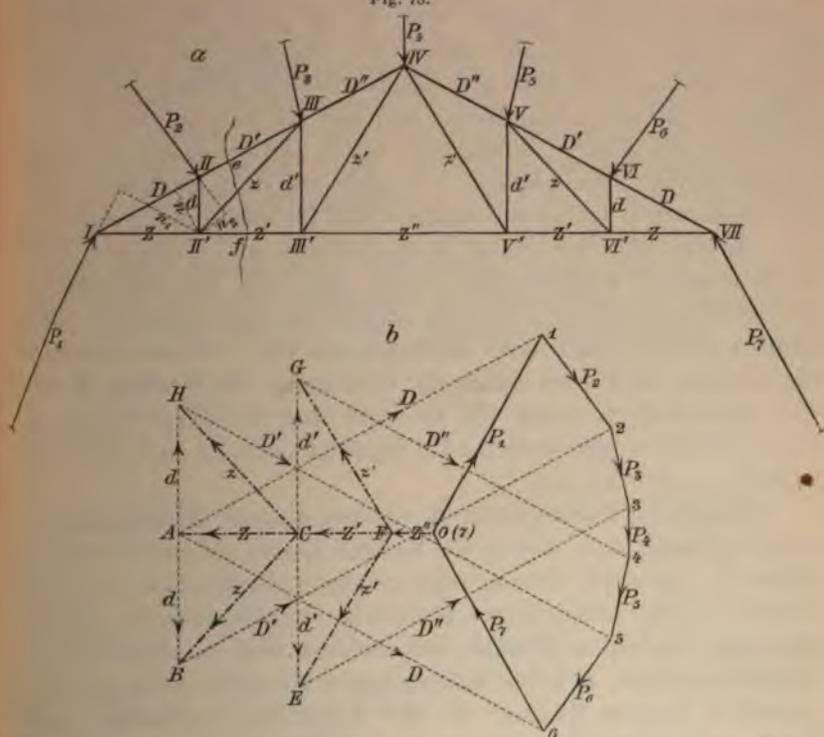
Es werden auch hier die Punkte, in welchen zwei oder mehrere der geradlinigen Punktreihen (Stäbe) zusammentreffen, als Knotenpunkte bezeichnet. Behufs der Berechnung der Spannung in einem beliebigen Kettengliede a kann man sich auch hier in vielen Fällen mit Vortheil der früher auseinandergesetzten Methode der Anwendung des Momentensatzes bedienen, nämlich stets dann, wenn es möglich ist, das Fachwerk durch einen Schnitt, der außer dem Kettengliede a nur noch höchstens zwei andere Constructionsglieder b und c schneidet, in zwei von einander vollständig getrennte Theile zu theilen. Man hat zu diesem Zwecke nur als Momentenpol den Durchschnittspunkt der Geraden b und c anzunehmen und die Momentensumme der auf irgend einen der beiden Theile einwirkenden Kräfte gleich Null zu setzen.

Beispielsweise möge das in Fig. 78 dargestellte netzförmige Kettenpolygon (Fachwerk) behandelt werden, dessen äußerste Begrenzung $IIVVII$ ein gleichschenkeliges Dreieck darstellt, zu dessen Mittellinie die einzelnen geraden Kettenglieder symmetrisch gelagert sind, und in welchem die Glieder $IIII'$, $IIIIII'$... auf der Basis $I VII$ senkrecht stehen. Die Angriffspunkte der äußeren, bezüglich der Mittellinie symmetrisch wirkenden Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots P_7$ seien die Knotenpunkte $I III \dots VII$ und $0 1 2 3 4 5 6 7$ sei das diesen äußeren Kräften entsprechende geschlossene Kräftepolygon. Zerlegt man, um die inneren Kräfte zu ermitteln, welche durch die auf I einwirkende äußere Kraft P_1 in den benachbarten Gliedern III und III' hervorgerufen werden, diese äußere Kraft 01 in die zu III und III' parallelen Componenten oA und $A1$ mittels des Kräfte-dreieckes $oA1$, wo $A1 \parallel III$ und $oA \parallel III'$ ist, so ersieht man sofort aus der Richtung der Pfeile (Fig. 78b), dass die durch oA dargestellte Componente Z , die auf den Knotenpunkt I in der Verlängerung von III' über I hinaus wirkt, eine gleiche Zugspannung Z in III hervorruft, die auf II' übertragen wird, dass dagegen die durch $A1$ dargestellte Componente D die auf I in der Richtung gegen II hin wirkt, eine Druckspannung D erzeugt. Die hierdurch auf den Knotenpunkt II fortgepflanzte Kraft $A1$ ergibt mit der äußeren Kraft 12 eine Resultierende $A2$, welche in zwei zu III' und $IIIII$ parallele Componenten AB und $B2$ zerlegbar ist. Die durch AB dargestellte Kraft d wirkt auf II in der Richtung gegen II' und erzeugt daher eine Druckspannung d , welche sich bis II' fortpflanzt, und auch $B2$ wirkt in der Richtung gegen den folgenden Endpunkt III des Gliedes $IIIII$ und ruft eine gleiche Druckspannung D' in diesem Gliede hervor. Wenn man in gleicher Weise fortfährt, nämlich nach der Reihe im Zickzack zu den Knotenpunkten $II', III, III', IV, V, V'$ u. s. w. übergeht und dementsprechend $BC \parallel IIIIII', CE \parallel IIIIII', 3E \parallel IVIII, FE \parallel IVIII', 4G \parallel VIV, FG \parallel V'IV$ u. s. w. führt, so ersieht man, dass die aus den auf II' übertragenen Kräften oA und $A2$ (Z und d) resultierende Kraft oB eine Zugspannung $oC = Z'$ in der Seite $II'II'$ und eine Zugspannung $oB = z$ im Gliede $II'III$ zur Folge hat, ferner ebenso die aus den auf III wirkenden Kräften $CB, B2$ und 23 (z, D' und P_2) resultierende Kraft $C3$ die in $III III'$ und $III IV$ wirksamen Componenten $oE = d'$ und $E3 = D''$ hat u. s. w. Schließlich gelangt man so zu den auf VII wirkenden drei Kräften $oA, A6, 67$ (Z, D, P_7), die sich das Gleichgewicht halten müssen, weshalb das entsprechende Kräftepolygon ein geschlossenes sein, also 7 mit o zusammenfallen muss. Offenbar muss wegen der Symmetrie der Fig. 78a auch die Fig. 78b bezüglich der Achse oA symmetrisch sein. In der Fig. 78b sind

die äußeren Kräfte P durch ausgezogene Linien, alle Druckspannungen D , bzw. d durch punktierte Linien dargestellt und die die Zugspannungen Z , bzw. z darstellenden Linien durchwegs durch Punkte und Striche gekennzeichnet.

Wählt man zur Bestimmung der Spannungen nicht den graphostatischen Weg, sondern jenen der Rechnung, so kann man entweder auf Grund der Fig. 78b mittels bekannter Sätze der Trigonometrie und Polygonometrie die Spannungen bestimmen oder aber zu diesem Zwecke in früher erwähnter Weise den Momentensatz in Anwendung bringen. Man denke sich zu diesem Zwecke, wenn z. B. die Spannung D' in dem Gliede $II\ III$ zu bestimmen ist, einen Schnitt ef durch dieses Glied und durch irgend zwei Glieder, z. B. $II\ III$ und $II'\ III'$ geführt,

Fig. 78.



wodurch das ganze Punktsystem in zwei Theilsysteme getheilt wird. Ersetzt man in den Schnittpunkten die unbekannt inneren Kräfte nunmehr durch die gleichen äußeren Kräfte D' , z , Z' , so müssen diese bei jedem der beiden Theile den anderen Kräften das Gleichgewicht halten, daher nach früher Bewiesenem die Momentensumme der äusseren Kräfte für jeden Momentenpunkt Null sein. Wählt man nun für diesen Momentenpunkt den Durchschnittpunkt II' der letztgenannten beiden Kettenglieder, so verschwinden dadurch die Momente der unbekannt Kräfte z und Z' , und es bleibt demnach in der Gleichung nur die unbekannt Kraft D' allein übrig, so dass diese bestimmbar ist. Wählt man etwa, einer etwaigen Zugspannung entsprechend, die Richtung der im Punkte e auf das links von ef (Fig. 78a) gelegene Punktsystem wirkenden Kraft D' gegen III hin, bezeichnet durch n_1 , n_2 und n die von II' auf die Kraftrichtungen von P_1 P_2 und auf $II\ III$ geführten Normalen und wählt etwa als positive Drehrichtung

jene des Uhrzeigers, so sind $+P_1 n_1$, $+P_2 n_2$ und $D'n$ die Momente der entsprechenden äußeren Kräfte, also $D'n + P_1 n_1 + P_2 n_2 = 0$, und $D' = -(P_1 n_1 + P_2 n_2) : n$. Der so gefundene Wert der Kraft D' ist negativ, woraus sich auch sofort ergibt, dass die Spannung nicht, wie vorläufig angenommen wurde, eine Zugspannung, sondern eine Druckspannung sei. Wollte man z , bezw. Z' bestimmen, so müsste man I , bezw. III als Momentenpol wählen.

Würden in der Fig. 78 dieselben äußeren Kräfte in entgegengesetzten Richtungen wirken, also durchwegs die Pfeilrichtungen in die entgegengesetzten übergehen, so würden alle Zugspannungen in gleich große Druckspannungen und umgekehrt übergehen.

Wirken auf ein Kettenpolygon Kräfte im Raume, die nicht zu derselben Ebene parallel sind, so ist auch das Kettenpolygon kein ebenes, sondern ein räumliches Polygon. Im Zustande des Gleichgewichtes muss auch hier das den äußeren Kräften entsprechende Kräftepolygon ein geschlossenes sein und die Summe der Momente der äußeren Kräfte bezüglich einer jeden Achse im Raume muss den Wert Null haben, was sich auf ganz ähnliche Art nachweisen lässt wie früher der analoge Satz für das ebene Kräftesystem.

Ändern sich bei einem Kettenpolygon alle äußeren Kräfte in demselben Verhältnisse (ohne dass sich ihre Angriffspunkte und Richtungen ändern), so muss offenbar das den geänderten äußeren Kräften entsprechende neue Kräftepolygon dem früheren parallel und ähnlich sein, es werden daher die Richtungen der Strahlen desselben sich nicht ändern, somit die Gestalt des Kettenpolygons dieselbe bleiben, nur werden alle Spannungen in demselben Verhältnisse sich ändern.*)

Folgen die Knotenpunkte des Kettenpolygons (Seilpolygons) ohne Unterbrechung, d. h. wirken die äußeren Kräfte auf jeden Punkt desselben in gegen die Kettenglieder geneigten Richtungen, so übergeht dasselbe in eine gekrümmte Kettenlinie (Seilcurve), in welcher die Spannung von einem Punkte zum anderen sich im allgemeinen continuierlich ändert, und das Kräftepolygon übergeht, wenn die auf ein unendlich kleines Element ds der Kettenlinie wirkenden äußeren Kräfte dP unendlich klein sind und ihre Richtungen von einem Punkte zum nächsten continuierlich sich ändern, in eine continuierlich gekrümmte Kräftelinie (Kräftecurve). Die allgemeine Giltigkeit der früheren Sätze kann dadurch in keiner Weise beeinträchtigt werden. Die von dem Pole C der Kräftecurve ausgehenden Polstrahlen dieser Kräftelinie, welche die Spannungen p darstellen, müssen demnach parallel sein zu den entsprechenden unendlich kleinen Elementen ds der Kettenlinie, also auch parallel zu den Tangenten in jenen Punkten

*) In der früheren Auflage ist an dieser Stelle ausführlich die Analogie der für Kettenpolygone giltigen Gesetze mit den Gesetzen der Bewegung eines materiellen Punktes in einer gleichgestalteten polygonalen Bahn behandelt.

der Kettenlinie, in welchen die durch die Länge des betreffenden Polstrahles dargestellte Spannung p vorhanden ist. Die beiden an dieser Stelle einander unmittelbar folgenden materiellen Punkte der Kettenlinie wirken mit dieser inneren Kraft p anziehend oder abstossend aufeinander, je nachdem diese Kraft eine Zugspannung oder Druckspannung ist.

Sollte sich die Richtung der äußeren Kraft dP in einem Punkte der Kettenlinie plötzlich um einen endlichen Winkel ändern, so hat die krumme Kräftelinie einen vorspringenden Punkt (Eckpunkt, Spitze). Wenn die äußere Kraft in einem Punkte der Kettenlinie einen endlichen Wert hat (wenn z. B. in einem Punkte der Kettenlinie eine endliche Last Q eingehängt ist), so ist dieser Punkt ein vorspringender Punkt (Eckpunkt) der krummen Kettenlinie, und es entspricht diesem Punkte eine gerade Seite der sonst krummen Kräftelinie. Ebenso muss, wenn die in einem Theile der Kettenlinie wirkenden äußeren Kräfte dP sämtlich gleichgerichtet sind, der diesem Theile entsprechende Theil der Kräftelinie in eine Gerade übergehen.

Die Beziehung einer krummen Kettenlinie (Seilcurve) OMM' (Fig. 79 a) zur zugehörigen krummen oder geraden Kräftelinie omm' (Fig. 79 b) hat eine unverkennbare Analogie mit der

Fig. 79 a.

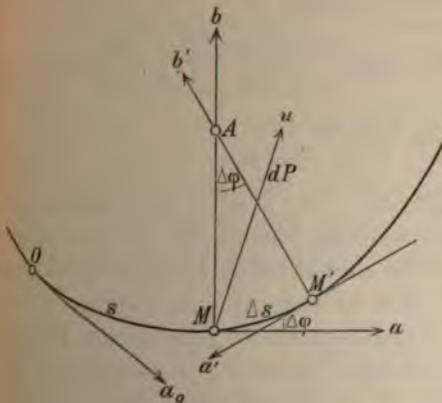
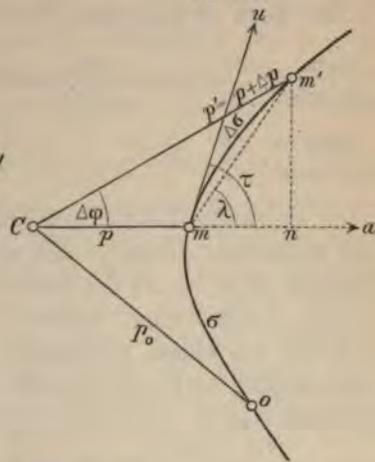


Fig. 79 b.



Beziehung der Bahn OMM' (Fig. 47 a) S. 111 eines Punktes zum entsprechenden Hodographen omm' (Fig. 47 b).

An die Stelle der Geschwindigkeiten v , (Fig. 47), welche durch die vom Pole C des Hodographen parallel zu den Tangenten a, a' der Bahn OMM' gezogenen Radien Co, Cm, Cm' dargestellt sind, treten hier die vom Pole C der Kräftelinie ausgehenden, zu den Tan-

genten der entsprechenden Punkte der Kettenlinie parallelen Radien C_m der Kräftelinie Fig. 79b, welche die ihrem absoluten Zahlwerte nach durch p zu bezeichnende Spannung in den entsprechenden Punkten M der Kettenlinie repräsentieren, so dass, wenn $p_o, p, p' = p + \Delta p$ die Spannungen in den Punkten OMM' der Kettenlinie, deren Tangenten $a_o a a'$ zu den Polstrahlen Co, Cm, Cm' parallel sind, bedeuten, und wenn zur Darstellung der Kräfteinheit die Längeneinheit gewählt wird, $\overline{Co} = p_o = v_o, \overline{Cm} = p = v$ und $\overline{Cm'} = p' = v'$ ist. Aus der Analogie der graphischen Darstellungen ergeben sich auch hier zunächst den Gleichungen (12) S. 116 analoge Relationen. Sind nämlich $\sigma = \text{arc } om, \Delta\sigma = \text{arc } mm'$ die den Curventheilen $s = \overline{OM}, \Delta s = \overline{MM'}$ der Kettenlinie entsprechenden Theile der Kräftelinie und ist $m'n \perp Cm$, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke $mm'n$ (Fig. 79b), wenn $\Delta\varphi$ den Neigungswinkel der Tangenten der benachbarten Punkte M und M' der Kettenlinie und λ den Neigungswinkel (a, mm') der Secante mm' bedeutet,

$$\begin{aligned} \overline{mm'} \cdot \cos \lambda &= \overline{mn} = \overline{Cn} - \overline{Cm} = (p + \Delta p) \cos \Delta\varphi - p = \\ &= \Delta p \cdot \cos \Delta\varphi - 2p \cdot \sin^2 \left(\frac{1}{2} \Delta\varphi \right) \\ \overline{mm'} \cdot \sin \lambda &= \overline{m'n} = p' \cdot \sin \Delta\varphi = (p + \Delta p) \cdot \sin \Delta\varphi \end{aligned}$$

Dividirt man diese Gleichungen durch Δs , so lassen sich dieselben auch in folgender Form ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} \frac{mm'}{\text{arc } mm'} \cdot \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} \cos \lambda &= \frac{\Delta p}{\Delta s} \cdot \cos \Delta\varphi - 2p \left[\frac{\sin \left(\frac{1}{2} \Delta\varphi \right)}{\frac{1}{2} \Delta\varphi} \right]^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \Delta\varphi \\ \frac{mm'}{\text{arc } mm'} \cdot \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} \cdot \sin \lambda &= (p + \Delta p) \cdot \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \end{aligned} \right\} (3)$$

In diesen Gleichungen stellt $\Delta\sigma = \text{arc } mm'$ — der Construction der Kräftelinie gemäß — die arithmetische Summe der auf das Bogenelement $MM' = \Delta s$ der Kettenlinie einwirkenden äußeren Kräfte dar, welche Kräftesumme, wofern P die arithmetische Summe σ der auf den von einem bestimmten Anfangspunkte O gerechneten Bogen s entfallenden äußeren Kräfte bedeutet, durch ΔP zu bezeichnen ist, so dass also $\sigma = P, \Delta\sigma = \Delta P, d\sigma = dP$ zu setzen ist. Das Verhältniss $\frac{\Delta\sigma}{\Delta s} = \frac{\Delta P}{\Delta s}$ ist demnach die mittlere auf die Längeneinheit des Bogenelements Δs der Kettenlinie wirkende äußere Kraft; der etwa durch S_P zu bezeichnende (stets positiv anzunehmende) Grenzwert dieses Verhältnisses $S_P = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta s} = \frac{dP}{ds} = \frac{d\sigma}{ds}$, welcher dann constant ist, wenn gleichen Längen gleiche äußere Kräfte entsprechen, sei bezeichnet als die spezifische äußere Kraft im Punkte M

der Kettenlinie (die Kraft pro Längeneinheit für diesen Punkt M ; dieser Definition entsprechend hat S_P die Dimension $\frac{[P]}{l}$ oder (siehe S. 126) $\frac{mlt^{-2}}{l} = mt^{-2}$). Als Richtung von S_P ist die Richtung der auf das unendlich kleine Bogenelement ds einwirkenden Kraft dP anzunehmen. Geht man in den obigen Gleichungen (3) zu den Grenzwerten für $\lim ds = 0$ über, indem man beachtet, dass $\lim \frac{mm'}{\text{arc } mm'} = 1$, $\lim d\varphi = 0$, $\lim \Delta p = 0$ und $\lim_{\varepsilon=0} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = 1$ ist, so ergibt sich, wofern $\lim \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$ in M einen endlichen Wert, d. h. die Kettenlinie in M keine Spitze hat,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{ds} \cos \tau &= \frac{dp}{ds} \\ \frac{dP}{ds} \sin \tau &= p \cdot \frac{d\varphi}{ds} \end{aligned}$$

wo τ den zwischen o und π gelegenen Winkel bedeutet, den die Richtung a des Polstrahles Cm der Kräfteinie (oder die Richtung a des Bogenelements ds der Kettenlinie) mit der Grenzrichtung der Secante mm' , d. i. mit der Richtung u der Tangente der Kräfteinie einschließt.

Herrscht nun in dem Element ds der Kettenlinie eine Druckspannung, so wirkt auf dasselbe infolge der Druckwirkung der an ds angrenzenden Nachbarelemente im Punkte M (Fig. 79) in der Richtung a die durch Cm dargestellte Kraft p und im Punkte M' in der Richtung a' die durch $m'C$ dargestellte Druckkraft $p' = p + dp$ ein, somit muss im Zustande des Gleichgewichtes, damit das entsprechende Kräftepolygon $Cmm'C$ ein geschlossenes sei, die durch den Bogen $mm' = d\sigma$ dargestellte Kraft $dP = S_P \cdot ds$ die Richtung u haben, dagegen muss dP , wenn eine Zugspannung vorhanden ist (in welchem Falle die den früheren entgegengesetzten Richtungen mC und Cm' die Richtungen der auf ds einwirkenden Zugkräfte sind), in der der Richtung u entgegengesetzten Richtung wirken, und es ist daher $\cos(ds, dP) = \mp \cos \tau$ und $\sin(ds, dP) = \mp \sin \tau$, wo die oberen Zeichen sich — hier und in allen folgenden Formeln — auf Zug, die unteren auf Druck beziehen, was übrigens schon daraus zu ersehen ist, dass, wie schon zu Anfang dieses Paragraphs nachgewiesen worden ist, die äußere Kraft dP im Falle einer Druckspannung p stets nach der concaven Seite der Kettenlinie (Fig. 79 a), im Falle einer Zugspannung dagegen nach der convexen Seite gerichtet sein muss. Setzt man für $\cos \tau$ und $\sin \tau$ die zuletzt gefundenen Werte und für $\frac{d\varphi}{ds}$ den reciproken Krümmungshalbmesser $\frac{1}{\rho}$ der Kettenlinie für den Punkt M (siehe Gleichung 14, S. 118) in die früheren Gleichungen ein, so findet man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{ds} \cos(ds, dP) &= S_P \cos(ds, dP) = \mp \frac{dp}{ds} \\ \frac{dP}{ds} \sin(ds, dP) &= S_P \sin(ds, dP) = \mp p \frac{d\varphi}{ds} = \mp \frac{p}{\rho} \end{aligned} \right\} (4)$$

$S_P \cos(ds, dP)$ bedeutet hier die tangentielle Componente der specifischen äußeren Kraft S_P , die als specifische Tangentialkraft (S_{Pt}) und $S_P \sin(ds, dP)$ die zur Kettenlinie normale Componente der Kraft S_P , die als specifische Normalkraft (S_{Pn}) bezeichnet werden kann. Den Winkel (ds, dP) in der Gleichung (4) hat man sich, wenn derselbe positiv ist, durch eine von jener Richtung des Bogenelementes ds , in welcher s zunimmt, beginnende Drehung derart entstanden zu denken, dass ds durch diese Drehung auf kürzestem Wege in die centripetale Richtung des Krümmungshalbmessers gelangt, so dass, je nachdem Druck- oder Zugspannung in der Kettenlinie herrscht, (ds, dP) im ersten Falle zwischen 0 und π , im letzteren zwischen π und 2π (oder zwischen -0 und $-\pi$) gelegen ist. Die normale Componente S_{Pn} hat die centrifugale Richtung im Falle einer Zugspannung, die centripetale dagegen, falls eine Druckspannung stattfindet.

Aus den beiden letzten Gleichungen lassen sich ganz analoge Folgerungen deducieren, wie dies im § 41 S. 177 und 178 für die Tangential- und Centripetalkraft geschehen ist. So ist die Änderung der Größe der Spannung einzig und allein auf Rechnung der specifischen Tangentialkraft $S_{Pt} = S_P \cos(ds, dP)$, die Krümmung der Kettenlinie bloß auf Rechnung der specifischen Normalkraft $S_{Pn} = S_P \sin(ds, dP)$ zu setzen, und zwar ist die letztere Kraft der Spannung p und dem Maße $\frac{1}{\rho}$ der Krümmung direct proportional u. s. w.

Die Spannung p in einer Kettenlinie ist dann, aber auch nur dann in allen Punkten derselben eine constante, wenn für alle Punkte $\frac{dp}{ds} = 0$, also zufolge (4) $\cos(ds, dP) = 0$ ist, d. h. die Resultierende dP der äußeren Kräfte in allen Punkten normal zur Kettenlinie gerichtet ist.

* Dies findet z. B. statt, wenn ein Faden (eine Kette, ein Seil, Riemen) in einer beliebigen stetig gekrümmten vorgeschriebenen Linie (Seilcurve) um die krumme Oberfläche eines widerstehenden festen Körpers, z. B. eine Welle, eine Rolle u. s. w. entweder ganz oder zum Theile geschlungen ist und vom Reibungswiderstande und dem Gewichte der Kette abgesehen wird, denn die einzigen auf die Kette einwirkenden äußeren Kräfte sind dann die normalen Widerstände dP dieser Fläche. Hierbei ist wie auch bei den folgenden Auseinandersetzungen vorausgesetzt, dass die Kette (Seil, Riemen) voll-

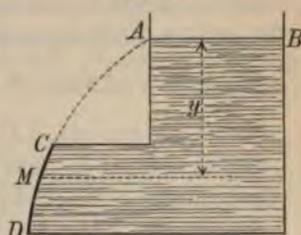
kommen biegsam ist, so dass auf die sogenannte Steifigkeit der Kette (des Seiles, Riemens) keine Rücksicht genommen werden muss. Weil in diesem Falle alle vom Pole C der Kräftelinie aus gezogenen Radien p gleich sind, so ist die Kräftelinie irgend eine auf einer Kugeloberfläche, deren Mittelpunkt C ist, gelegene Curve, welche, wenn die Seilcurve (Kettenlinie) eben ist, in einen Kreis vom Radius p übergeht (vergl. S. 114: Hodograph für eine gleichförmige Bewegung und S. 178 und 187). Der Wert der specifischen Normalkraft, die in diesem Falle auch die resultierende (specifische) Kraft S_P ist, ist durch den Wert der constanten Spannung p und die Form der Kettenlinie bestimmt, indem nach (4) abgesehen vom Vorzeichen $\frac{dP}{ds} = S_P = \frac{p}{\rho}$ ist.

Aus der letzten Gleichung lässt sich auch umgekehrt, wenn die Größe der normalen Kraft S_P für jeden Punkt gegeben ist, der Krümmungshalbmesser ρ , daher auch die Form jener Kettenlinie (Stützzlinie) bestimmen, auf welche nur normale Kräfte $dP = S_P \cdot ds$ einwirken.

Dies ist unter anderem, wenn man von dem Kettengewichte absieht, der Fall bei jener Kettenlinie, bei welcher die einwirkenden äußeren Kräfte dP von dem hydrostatischen Drucke einer schweren incompressiblen Flüssigkeit oder von einem Gas- oder Dampfdrucke herrühren, indem in diesen Fällen, wie in der Hydrostatik gezeigt werden wird, der Druck dP der Flüssigkeit oder des Gases stets zur gedrückten Fläche normal sein muss.

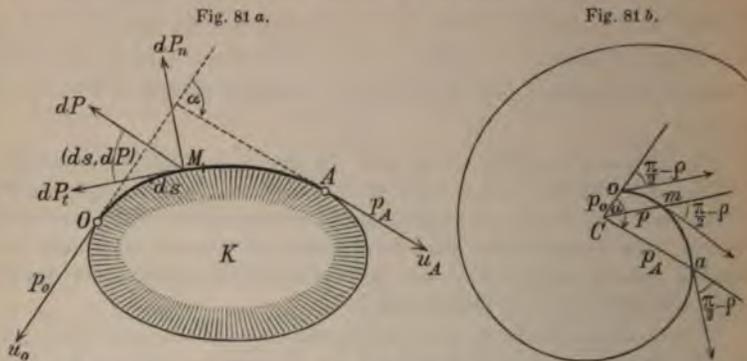
Ist dementsprechend z. B. eine cylindrische, absolut biegsame Fläche, deren Erzeugende horizontal ist, dem Wasserdrucke ausgesetzt und ist y der verticale Abstand irgend eines Punktes M derselben von der horizontal angenommenen oberen Spiegelfläche AB (Fig. 80) des Wassers, so nimmt, da der specifische Druck S_P (s. Hydrostatik) proportional zur Druckhöhe y , also $S_P = A \cdot y$ ist (wo A den specifischen Druck in der Tiefe $y = 1$ bedeutet), der zur Erzeugenden senkrechte Querschnitt CD der gedrückten Fläche im Gleichgewichtszustande die Form jener Kettenlinie ACD — der Kettenlinie (Stützzlinie) für Wasserdruck — an, deren Gleichung $Ay = \frac{p}{\rho}$ ist. Da nun, wie oben gezeigt wurde, p constant sein muss, so ist auch das Product aus der (hier verticalen) Ordinate y und dem Krümmungshalbmesser ρ constant. (Die Curve von der letzteren Eigenschaft, für welche nämlich $y \cdot \rho$ einen constanten Wert hat, ist auch in der Elasticitätstheorie von Wichtigkeit und tritt hier als eine besondere Art der sogenannten elastischen Linie auf; es ist dies nämlich die elastische Curve von Johann Bernoulli). Hat die biegsame dünne Wand CD (Fig. 80) die Dicke d und ist b ein entsprechend klein angenommenes Element der Erzeugenden, so kann man jedes Element der Wand, das durch zwei zur Erzeugenden normale Schnittebenen im Abstände b begrenzt wird, als eine materielle Linie (Kettenlinie) ansehen, deren Querschnitt $f = b \cdot d$ ist.

Fig. 80.



Ist nun π die in diesem Querschnitte herrschende Normalspannung pro Flächeneinheit, so ist $p = \pi \cdot b \cdot d$. Andererseits ist, wenn σ das constante specifische Gewicht des Wassers (Gewicht pro Volumeinheit) bedeutet, der auf die innere Fläche $b \cdot ds$ des Längenelements ds der Kettenlinie in der Tiefe y einwirkende Wasserdruck dP , wie die Hydrostatik lehrt, durch $dP = \sigma \cdot y \cdot b \cdot ds$ bestimmt, demnach $S_p = \frac{dP}{ds} = \sigma b \cdot y$ und folglich $A = \sigma b$. Die Gleichung $Ay = \frac{p}{\rho}$ der Kettenlinie lässt sich sonach in der Form $y \cdot g = \frac{\pi \cdot d}{\sigma}$ darstellen. (Hier hat π offenbar die Dimension $[\pi] = \frac{[P]}{[f]} = \frac{mlt^{-2}}{l^2} = ml^{-1}t^{-2}$ und das specifische Gewicht σ der Dimension $[\sigma] = \frac{[P]}{[V]} = \frac{mlt^{-2}}{l^3} = ml^{-2}t^{-2}$.)

Würde man bei einem um einen Theil OA (Fig. 81 a) der irgendwie gekrümmten Oberfläche eines festen Körpers K (um eine Rolle, einen Pflöck u. s. w.) gewundenen Seile, auf welches außer dem Widerstande dieses Körpers K keine äußeren Kräfte wirken, auch



auf den Reibungswiderstand Rücksicht nehmen, also die Spannung p_A an dem Seilende A größer annehmen als die Spannung p_o an dem anderen Ende O , so müsste man, wenn durch f der entsprechende kinetische Reibungscoefficient bezeichnet ist, das als constant anzunehmende Verhältnis $f = \frac{dP_t}{dP_n}$ zwischen der tangentiellen Componente $dP_t = dP \cos (ds, dP)$ des auf das Element ds einwirkenden Widerstandes dP (d. i. dem Reibungswiderstande dP_t) und der normalen Componente $dP_n = dP \sin (ds, dP)$ desselben (d. i. dem Normalwiderstande dP_n) im Maximum (d. i. wenn schon ein Gleiten des Seiles in der Richtung von O nach A eintritt) gleich f annehmen. Durch Division der Gleichungen (4) ergibt sich: $f = \frac{1}{p} \frac{dp}{d\varphi}$, also $\frac{dp}{p} = f d\varphi$. Die zwischen den Grenzen von O bis A durchgeführte Integration liefert $\log \frac{p_A}{p_o} = f\alpha$, so dass $p_A = p_o \cdot e^{f\alpha}$ ist, wofern α die Summe sämtlicher beim allmählichen Übergange von O bis A aufeinanderfolgenden Contingenzwinkel $d\varphi$, also wofern α den Winkel

bedeutet, den die Tangente in O mit der Tangente u_A in A (Fig. 81 *a*) einschließt (vergl. die Anmerkung S. 247). So lange kein Gleiten des Seiles längs der Oberfläche des Körpers K eintritt, ist der Coefficient f in der letzten Gleichung, d. i. das Verhältnis des Reibungswiderstandes dP_t zum Normalwiderstande dP_n kleiner als der kinetische Reibungscoefficient \bar{f} und kann jeden zwischen O und \bar{f} gelegenen Wert annehmen, so dass der größte mögliche Spannungsunterschied in A und O durch $p_A - p_o = p_o [e^{f\alpha} - 1]$ bestimmt ist. Ist das Seil um K (etwa ein Schiffstau um einen Uferpflock) 1, 2, . . . , n -mal ganz herumgewunden, so ist $\alpha = 2\pi, 4\pi \dots, 2n\pi$ zu setzen, so dass es der letzten Gleichung zufolge möglich ist, selbst einer sehr bedeutenden Kraft p_A , die das eine Ende des Seiles spannt (z. B. der Kraft einer mächtigen Strömung) durch eine sehr kleine Kraft p_o , indem man das Seil um den Körper K einigemale herumschlingt, das Gleichgewicht zu halten. Die Kräftelinie omm' (Fig. 79 *b*), welche der Seilcurve OA in dem betrachteten Falle entspricht, ist, da dann in Fig. 81 *a* $\text{tang } \tau = \text{tang } (ds, dP) = \frac{dP_n}{dP_t} = \frac{1}{f} = \frac{1}{tg \varrho}$, sonach $\tau = \frac{\pi}{2} - \varrho$ ist (wo ϱ im Maximum den kinetischen Reibungswinkel bedeutet), also der Wert des τ als constant angesehen werden kann, eine logarithmische (gleichwinklige) Spirale (Fig. 81 *b*) — vorausgesetzt, dass die Seilcurve OA eben ist — und zwar eine Spirale, bei der ein jeder vom Pole C aus gezogene Radius vector Cm , der zu ds parallel ist, mit der zugehörigen Tangente stets den gleichen Winkel, nämlich den Winkel τ einschließt.

Anmerkung. Das kinetische Analogon der hier betrachteten Kettenlinie AMO und der zugehörigen Kräftelinie amo ist die in der Anmerkung S. 247 zum Schlusse betrachtete Bewegung eines schwerlosen, in einer vorgeschriebenen Bahn AMO unter der Einwirkung der Reibung sich von A nach O bewegenden materiellen Punktes, in welchem Falle zwischen den Geschwindigkeiten v_A und v_o in den Punkten A und O gleichfalls die Beziehung $v_A = v_o e^{f\alpha}$ besteht. Die Fig. 81 *b* stellt dann den Hodograph dieser Bewegung dar. Findet die Bewegung von O nach A statt, so ist $v_A = v_o e^{-f\alpha}$.

Theorie der fixen und der beweglichen Rolle.

Ist um eine fixe Rolle K (Fig. 82 *a*), deren Drehungsachse in O senkrecht zur Ebene der Fig. 82 *a* angenommen ist, eine Kettenlinie (Seil, Kette, Riemen) längs des Kreisbogens AB geschlungen, so muss, falls außer dem normalen Widerstande dP der Rolle und den beiden Endkräften P_A und P_B keine weiteren äußeren Kräfte auf die einzelnen Elemente $MM' = ds$ der Kettenlinie einwirken, also auch von der Reibung des Seiles am Rollenumfange abgesehen wird, die Spannung p zufolge der früheren Erörterungen in der ganzen Ausdehnung des Seiles AB die gleiche, also auch $P_A = p = P_B$ sein. Dem in der radialen Richtung Mu wirkenden Widerstande dP , mit welchem die Rolle K auf das Seil einwirkt, und welcher, wenn $\varrho = r$ den Radius der Rolle und $d\varphi$ den dem Bogenelemente ds entsprechenden Mittelpunktswinkel bedeuten, den früher nachgewiesenen Wert $dP = p \cdot ds : r = p \cdot d\varphi$ hat, entspricht nach dem Principe der Gegen-

wirkung, ein normaler, in der entgegengesetzten Richtung MOu' wirkender Druck dP von gleicher Größe, mit welchem die Kette auf die Rolle K wirkt, welcher also von dieser aufgenommen wird. Ist nun EOx jene Symmetrieachse, welche

Fig. 82 a.

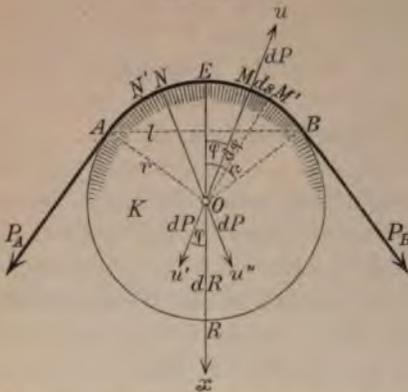
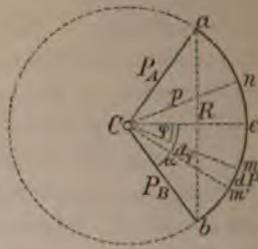


Fig. 82 b.



den Centriwinkel 2α des vom Seil umspannten Bogens AB halbiert, und ist NN' das zum Bogenelement MM' bezüglich dieser Achse x symmetrisch gelegene Bogenelement, so ist der von diesem Element NN' der Kette herrührende, in der Richtung NOu'' wirkende Druck dP offenbar von gleicher Größe, und es resultiert aus diesen beiden gleichen Druckkräften dP , deren Kräftewinkel durch 2φ bezeichnet sei, eine in der Richtung x der Symmetrieachse wirkende Resultante dR (siehe S. 49), welche den Wert $dR = 2 \cdot dP \cdot \cos \varphi = 2p \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi$ hat. Aus allen diesen den einzelnen symmetrischen Paaren der Bogenelemente ds zugehörigen Theilresultanten dR , die sämtlich gleichgerichtet sind, resultiert ein in der Richtung x wirkender Druck R auf die Rolle von der Größe

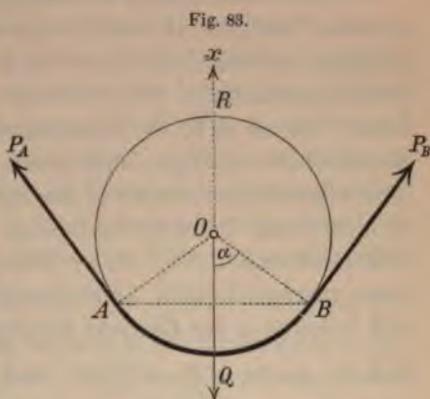
$$R = \int_0^R dR = 2p \cdot \int_0^\alpha \cos \varphi \cdot d\varphi = 2p \cdot \sin \alpha.$$

Trotzdem sonach die beiden äußersten Kräfte $P_A = p$ und $P_B = p$ nicht auf die Rolle, sondern auf das längs des Rollenumfanges verschiebbare Seil AB einwirken, ist der aus den auf die Rolle thatsächlich einwirkenden, durch die Spannung p des Seiles hervorgerufenen elementaren Druckkräften dP resultierende Druck R derselbe, als wenn die der Spannung p gleichen äußeren Kräfte P_A und P_B unmittelbar in A und B nicht auf das Seil, sondern auf die Rolle selbst einwirken würden, also das Seil in A und B am Rollenumfange befestigt wäre. Das den Kräften dP entsprechende Kräftepolygon ist durch den Kreisbogen ab (Fig. 82 b) bestimmt, der einem Kreise angehört, dessen Kreismittelpunkt C der Pol der Kräftecurve ist, und dessen Radius die Maßzahl p der constanten Spannung hat. Den gesammten auf die Kette wirkenden äußeren Kräften P_A, P_B und sämtlichen dP entspricht das geschlossene Kräftepolygon $aCbea$, während den auf die Rolle wirkenden Kräften (dem Widerstande $-R$ der fixen Achse und den Druckkräften dP) das Kräftepolygon $baeb$ entspricht. Aus Fig. 82 b ist sofort zu entnehmen, dass in der That die durch die Schlussseite ab des Kräftepolygons dargestellte Resultante R der einzelnen Druckkräfte $dP = \text{arc } mm'$, die durch die einzelnen zu den entsprechenden Radien der Rolle parallelen Bogenelemente mm' dargestellt

4, durch $R = 2p \sin \alpha$ bestimmt ist. Der dem Drucke R an Größe gleiche Widerstand der fixen Achse, welcher den Druckkräften dP das Gleichgewicht tut, ist durch die Sehne ba dargestellt. Ist l die Maßzahl der Sehne AB des um Seile umspannten Bogens, so ist $\sin \alpha = l : 2r$, also auch $R = 2p \sin \alpha = p \cdot l : r$, so $\frac{R}{p} = \frac{l}{r}$, was übrigens auch sofort aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OAB und Cab , deren Seiten zu einander senkrecht sind, zu ersehen ist.

Dreht man die Fig. 82 a um eine zur Symmetrieachse x senkrechte Achse in die entgegengesetzte Lage, so gelangt man zur Fig. 83, welche, falls man den in O in der Richtung x auf den fixen Punkt O der Rolle wirkenden Druck R dadurch unwirksam macht, dass man den Widerstand der fixen Achse durch eine dem Drucke R entgegengesetzt gleiche Kraft Q (die sogenannte Last) ersetzt, eine bewegliche (lose) Rolle darstellt, für welche sonach gleichfalls $P_A = P_B = p$ und, da $R = Q$ ist, $Q : p = 2 \sin \alpha = r : l$ ist. Um zur entsprechenden Kräftecurve (Kräftepolygon) zu gelangen, hat man sich nur Fig. 82 b um einen zu x senkrechten Durchmesser Ce umgedreht zu denken, wodurch die Form der Curve sich nicht ändert.

So lange bei der fixen Rolle Fig. 82 a) die äußeren Kräfte P_A und P_B in einander gleich sind, herrscht auch in der Kette die gleiche constante Spannung p , demgemäß auch der ersten Gleichung (4) zufolge nur ein normaler



Widerstand, so dass die sämtlichen auf die Rolle einwirkenden normalen Druckkräfte dP durch den Widerstand ($-R$) der fixen Achse im Gleichgewichte gehalten werden, sich also auch die ruhend angenommene Rolle nicht in Bewegung setzen kann. Sobald aber etwa $P_B > P_A$ ist, wird ein Reibungswiderstand hervorgerufen, der auf die einzelnen Elemente der Kette in der Richtung gegen A hin, auf die Bogenelemente des Rollenumfanges aber nach dem Princip der Gegenwirkung gegen B hin wirkt, daher die Rolle in dieser Richtung von A nach B hin in Bewegung setzt, wofern keine durch die Rolle in Bewegung zu setzende Last und auch keine Reibung im Achsenlager entgegenwirkt (vergl. folgende Anmerkung).

Die erste der Gleichungen (4) lehrt, dass bei jeder krummen Ketten-

linie $\int dP \cdot \cos (ds, dP) = \int_0^s S_P \cdot \cos (ds, dP) ds = p_0 - p$ oder $= p - p_0$ ist, je nachdem ein Zug oder ein Druck herrscht, d. h. die Summe aller zur Kettenlinie tangential gerichteten Componenten der äußeren Kräfte ist stets gleich der Änderung der Spannung.

Besteht demgemäß für die spezifische Kraft S_P ein Potential (eine Kraftfunction) U , so dass also analog der Gleichung (1) S. 201

$$\frac{dU}{ds} = -S_P \cos (ds, dP) \text{ ist, so ist } \int_0^s S_P \cos (ds, dP) ds = -\int_{U_0}^U dU = U_0 - U, \text{ daher } U - U_0 = p - p_0 \text{ oder } U - U_0 = p_0 - p,$$

je nachdem Zug- oder Druckspannung in der Kettenlinie herrscht, d. h. es kommt die Änderung des Potentials beim Übergange von einem Punkte derselben Kettenlinie zu einem anderen stets gleich dem Unterschiede der Spannungen in diesen Punkten der Kettenlinie. Dieses Gesetz behält auch dann seine Giltigkeit, wenn etwa zur Kraft S_P noch eine zur Kettenlinie normale Kraft $S_{P'}$ (z. B. der normale Widerstand einer festen Fläche) hinzutritt, da die tangentielle Komponente dieser Kraft $S_{P'} \cdot \cos(ds, dP')$ Null ist und daher das obige Integral dadurch keine Änderung erleidet.

Den Gesetzen des § 43 analoge Gesetze ergeben sich für die dynamischen Zustände in einer vorgeschriebenen Kettenlinie, auf welche gegebene äußere Kräfte einwirken, also für ein um eine feste krumme Fläche gewundenes Seil, eine an eine feste Fläche sich anpressende Kette. So ist z. B. die Spannungsdifferenz $p_o - p$ für zwei beliebige Stellen einer derartigen homogenen Kette, die sich unter dem Einflusse ihres eigenen Gewichtes und des normalen Widerstandes befindet, gleich dem Gewichte jenes Kettentheiles, dessen Länge gleich der verticalen Höhendifferenz $z - z_o$ dieser beiden Stellen ist; denn, ist die z -Achse eines rechtwinkligen Achsensystems vertical nach abwärts gerichtet und bedeutet q_l das Gewicht des Fadens (Seiles, der Kette) pro Längeneinheit, so ist $dP = q_l \cdot ds$ und $\cos(ds, dP) = \cos(z, ds) = \frac{dz}{ds}$, also $p_o - p = \int dP \cdot \cos(ds, dP) = \int_{z_o}^z q_l \cdot dz = q_l(z - z_o)$ u. s. w.

Anmerkung. Soll eine ruhende fixe Rolle (Welle, Wellrad) durch ein um die Rolle gespanntes Seil (Kette, Riemen) in der Richtung von A nach B hin (Fig. 82a) in Bewegung gesetzt werden, während eine Last der Bewegungsrichtung entgegenwirkt, so genügt es nicht, dass $P_B > P_A$ ist, sondern es muss, da für die im Sinne der Bewegung tangentiell zur Rolle auf dieselbe wirkenden Reibungswiderstände dP_t dem letzten Lehrsatz zufolge $\int dP_t = \int dP \cdot \cos(ds, dP) = p_B - p_A$ ist, diese Summe der Reibungswiderstände den Wert Q der auf den Rollenumfang reducierten Last (wobei in diesem Werte Q auch der gleichfalls auf den Rollenumfang reducierte Reibungswiderstand in den Achsenlagern mit einbegriffen ist), welche im entgegengesetzten Sinne zu drehen sucht, um eine, wenn auch noch so kleine Größe übersteigen, daher im Grenzfalle mindestens $p_B - p_A = Q$ sein. Da nun der Neigungswinkel der Tangenten in A und B (der in Fig. 81a durch α bezeichnet wurde), in Fig. 82a dem Mittelpunktswinkel 2α , welchen die zu diesen Tangenten normalen Radien OA und OB einschliessen, gleichkommt, so ist zufolge einer früheren Gleichung $p_B = p_A \cdot e^{f \cdot 2\alpha}$, daher im Minimum $p_A [e^{2f\alpha} - 1] = Q$, aus welcher Gleichung sich bei gegebenen Werten der Spannung p_A , der zu bewältigenden Last Q und des Winkels 2α der jedenfalls zwischen Null und dem statischen Reibungscoefficienten gelegene Wert von f bestimmen lässt. Sollte sich für f aus dieser Gleichung ein Wert ergeben, der größer ist als der kinetische Reibungscoefficient, demgemäß ein durch die Reibung des Seils am Rollenumfang nicht erreichbarer Wert, so könnte durch die Reibung die Rolle

nicht in Bewegung gesetzt werden, es müsste also dann das Seil (Riemen, Kette) an der Rolle (der Riemenscheibe, der Welle) gleiten, ohne dieselbe in Bewegung zu setzen. Bedeutet π_a , bzw. π_b die im Querschnitte des als absolut biegsam vorausgesetzten Riemens bei A , bzw. B herrschende Zugspannung pro Flächeneinheit, ist ferner b die Breite und d die Dicke des Riemens, dessen Querschnitt demgemäß ein Rechteck von der Fläche $b \cdot d$ darstellt, so ist offenbar in der letzten Gleichung $p_A = \pi_a b d$ und $p_B = \pi_b \cdot b d$ zu setzen.

Um den für die Vereinfachung und Verallgemeinerung dynamischer Untersuchungen wichtigen Zusammenhang zwischen dem kinetischen Problem der Bewegung eines Punktes in irgend einer krummen Bahn und dem entsprechenden statischen Problem der mit dieser Bahn gleichgestalteten Kettenlinie noch klarer hervortreten zu lassen und dadurch den wichtigen Vortheil zu erreichen, jedes kinetische Resultat sofort auf Kettenlinien und umgekehrt in Anwendung bringen zu können, wollen wir die beliebige Bahn OMM' (Fig. 47 a) mit der Kettenlinie (Fig. 79 a), ferner den der Bahn OMM' zugehörigen Hodographen omm' (Fig. 47 b) mit der der Kettenlinie entsprechenden Kräftelinie (Fig. 79 b) und den Pol C des Hodographen mit dem Pole der Kräftelinie identifizieren, wozu man, wie früher gezeigt wurde, berechtigt ist. Es ist dann die Maßzahl $v = \frac{ds}{dt}$ der Geschwindigkeit der Bewegung im Punkte M der Bahn OMM' der Maßzahl p der Spannung im Punkte M der Kettenlinie OMM' gleichzusetzen, also $v = p$, ferner ist (in Fig. 79 b) $\sigma = P$ und $d\sigma = dP$. Da ferner nach Gleichung (2), S. 112 die resultierende Beschleunigung der krummlinigen Bewegung, welche zum Unterschiede von der Spannung p hier stets durch \wp bezeichnet sein möge, durch $\wp = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{d\sigma}{ds}$ bestimmt ist, so führt die Substitution der obigen Werte von $d\sigma$ und v zur Relation: $\wp = p \cdot \frac{dP}{ds}$, während $dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{p}$ ist.

Diese Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} v &= p \\ \wp &= p \cdot \frac{dP}{ds} = p \cdot S_P \\ dt &= \frac{ds}{p} \end{aligned} \right\} (5)$$

gestatten sofort, jedes Resultat der Kinematik oder der Dynamik der krummlinigen Bewegung (§ 32 und §§ 41—48) auf Kettenlinien in Anwendung zu bringen, wofern man nur für v , \wp , dt die hier gefundenen Werte einsetzt, und ebenso ist es umgekehrt gestattet, die Gesetze der Kettenlinien auf kinetische Probleme sofort anzuwenden, wofern nur $p = v = \frac{ds}{dt}$, $S_P = \frac{\wp}{v}$ und $dP = \frac{\wp \cdot ds}{v} = \wp \cdot dt$ gesetzt wird.

Nur auf einen besonderen Umstand muss hier noch das Augenmerk gelenkt werden.

Soll nämlich die Richtung u der Beschleunigung \mathfrak{p} , d. i. die Grenzrichtung der von m nach m' gerichteten Sehne mm' in Fig. 47 (S. 111) mit der Richtung der Kraft dP übereinstimmen, also in Fig. 79 $\tau = (ds, dP)$ sein, so muss, wie früher gezeigt wurde, eine Druckspannung vorausgesetzt werden, während für den Fall einer in der Kettenlinie herrschenden Zugspannung die Richtung der Kraft dP der Richtung u , also auch der Richtung der Beschleunigung \mathfrak{p} entgegengesetzt sein muss, so dass in diesem Falle nicht wie in früherem $(ds, \mathfrak{p}) = (ds, dP)$, sondern $(ds, dP) = \pi + (ds, \mathfrak{p})$ zu setzen ist. Beachtet man dies, so ersieht man z. B. sofort, dass die aus den kinematischen Gleichungen (12), (13) und (15) S. 116—118 gefolgerten Beziehungen $\mathfrak{p} \cos(ds, \mathfrak{p}) = \frac{dv}{dt}$, $\mathfrak{p} \sin(ds, \mathfrak{p}) = v \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v^2}{\rho}$ unmittelbar nach Einsetzung der Werte aus (5) zu den Gleichungen (4) dieses Paragraphs führen.

Zerlegt man die Spannung p , als deren Richtung jene Richtung Cm (Fig. 79) der Tangente der Kettenlinie, die mit jener der Geschwindigkeit v in Fig. 47 übereinstimmt, also jene Richtung, nach welcher s zunimmt, angenommen sei, in Componenten, etwa in die parallel zu den drei Achsen eines im allgemeinen schiefwinkligen Achsensystems wirksamen Componenten p_x, p_y, p_z , so besteht der obigen Gleichung $v = p$ gemäß auch die Gleichheit zwischen den Geschwindigkeitscomponenten $v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{dx}{ds}$, $v_y = v \cdot \frac{dy}{ds}$, $v_z = v \cdot \frac{dz}{ds}$ und den entsprechenden, in gleicher Weise darzustellenden Spannungskomponenten

$$p_x = p \cdot \frac{dx}{ds}, \quad p_y = p \cdot \frac{dy}{ds}, \quad p_z = p \cdot \frac{dz}{ds} \dots (6)$$

Zerlegt man ferner, so wie auf S. 113 die Beschleunigung \mathfrak{p} in die zu den drei Achsen parallelen Componenten $\mathfrak{p}_x = \frac{dv_x}{dt}$, $\mathfrak{p}_y = \frac{dv_y}{dt}$, $\mathfrak{p}_z = \frac{dv_z}{dt}$ zerlegt wurde, auch bei Kettenlinien die auf das Element ds derselben wirkende äußere Kraft $dP = d\sigma$, die der Beschleunigung \mathfrak{p} entgegengesetzt gerichtet oder mit derselben gleichgerichtet ist, je nachdem die Spannung p eine Zug- oder aber eine Druckspannung ist, gleichfalls in die zu denselben Achsen xyz parallelen Componenten dP_x, dP_y, dP_z , so muss demgemäß $\frac{dP_x}{dP} = \mp \frac{\mathfrak{p}_x}{p}$, $\frac{dP_y}{dP} = \mp \frac{\mathfrak{p}_y}{p}$, $\frac{dP_z}{dP} = \mp \frac{\mathfrak{p}_z}{p}$ sein, wo sich die oberen Qualitätszeichen auf Zug-, die unteren auf Druckspannungen beziehen. Daher ist $dP_x = \mp \frac{\mathfrak{p}_x}{p} \cdot dP = \mp \frac{dv_x}{dt} \cdot \frac{dP}{p} = \mp \frac{dp_x}{dt} \cdot \frac{dP}{p}$ oder wenn man für dt und p die Werte aus (5) einführt,

$$dP_x = \mp dp_x, \quad dP_y = \mp dp_y, \quad dP_z = \mp dp_z \dots (7)$$

Aus diesen Erörterungen ist auch zu ersehen, dass zwischen den componentalen Spannungen und den entsprechenden Kraftcom-

ponenten einerseits und den gleichgerichteten Componenten der Geschwindigkeit v und der Beschleunigung p folgende den Gleichungen (5) analoge Beziehungen stattfinden:

$$v_x = p_x = p \frac{dx}{ds}, \quad p_x = \mp p \cdot \frac{dP_x}{ds}, \quad dt = \frac{dx}{p_x} \dots \quad (8)$$

und ebenso die analogen Relationen für die y - und z -Componenten. Substituiert man die Werte aus (6) in die Gleichungen (7), so findet man

$$\left. \begin{aligned} dP_x = \mp dp_x = \mp d \left(p \frac{dx}{ds} \right), \quad dP_y = \mp dp_y = \mp d \left(p \frac{dy}{ds} \right), \\ dP_z = \mp dp_z = \mp d \left(p \frac{dz}{ds} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Diese für die Theorie der Kettenlinien wichtigen Gleichungen ergeben sich übrigens auch sofort auf eine leichte Weise aus der Fig. 79 *b*, wofern man das Element mm' der Kräftecurve unendlich klein annimmt und die Projection dieses Elementes mm' auf irgend eine der Achsen xyz gleichsetzt der Projection des Polygonalzuges mCm' , da z. B. die Projection von $mC = -p$ auf die x -Achse, wenn die projicierende Ebene parallel zur yz -Ebene angenommen wird, durch $-p_x = -p \frac{dx}{ds}$ und die Projectionen vom $Cm' = p + dp$ durch $p_x + dp_x$ bestimmt ist.

Ist das Achsensystem xyz ein rechtwinkliges, so ist bekanntlich $\frac{dx}{ds} = \cos(x, ds)$, $\frac{dy}{ds} = \cos(y, ds)$, $\frac{dz}{ds} = \cos(z, ds)$, daher in den Gleichungen (6)–(9) $p_x = p \cos(x, ds)$, $p_y = p \cos(y, ds)$, $p_z = p \cos(z, ds)$ zu setzen.

Gerade so, wie man in der Kinetik eine krummlinige Bewegung behufs Vereinfachung der Untersuchung in zwei oder drei geradlinige Bewegungen zerlegt, so kann man auch die Betrachtung einer krummen Kettenlinie, in welcher auf das Element ds die inneren Kräfte der Kettenlinie p und $p + dp$ und die äußere Kraft dP einwirkt, mit Hilfe der Gleichungen (9), indem man etwa irgend ein orthogonales Achsensystem xyz zu Grunde legt, auf die einfachere Betrachtung im allgemeinen dreier geradlinigen Ketten, in welchen die Spannungen p_x, p_y, p_z $p_x + dp_x$ u. s. w. und die äußeren Kräfte dP_x, dP_y, dP_z thätig sind, zurückführen.

Sind dementsprechend — analog dem Hauptproblem der Kinetik — die auf das Element ds der Kettenlinie wirkenden äußeren Kräfte dP_1, dP_2, dP_3, \dots der Richtung und Größe nach als gegebene Functionen einer oder mehrerer der Coordinaten x, y, z, s oder im allgemeinen als Functionen der Coordinaten und der Spannung p

bestimmt, somit auch deren Componenten $dX_1, dY_1, dZ_1, dX_2, dY_2, dZ_2$ u. s. w. und auch $dP_x = \Sigma dX, dP_y = \Sigma dY, dP_z = \Sigma dZ$ als derartige Functionen gegeben, so hat man, wenn nicht die Anwendung früherer Gleichungen einen größeren Vortheil gewährt, von den drei Gleichungen (9) Anwendung zu machen, wodurch man in Verbindung mit der bekannten Gleichung $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ vier Gleichungen erhält, in welchen nur x, y, z, s und p vorkommen, so dass man mittels derselben nach Ausführung der entsprechenden Integrationen vier dieser Größen durch die fünfte ausdrücken kann, also etwa durch $y = f(x), z = \varphi(x)$ die Gleichung der Kettenlinie bestimmen und ebenso die Spannung p für einen jeden Punkt ermitteln kann. Zur Bestimmung der Integrationsconstanten muss etwa außer der Länge der Kettenlinie die Lage zweier Punkte (etwa der Aufhängepunkte) derselben gegeben sein.

Ebenso kann man umgekehrt, was viel einfacher ist, mit Zuhilfenahme derselben Gleichungen (9), wenn die Gestalt der Kettenlinie und die Spannung in jedem Punkte (also sowohl die Kettenlinie als die zugehörige Kräftelinie) gegeben sind, die Componenten dP_x, dP_y, dP_z der für irgend ein Element ds nothwendigen äußeren Kräfte, sonach auch ihre Summen $P_x = \int dP_x, P_y = \int dP_y, P_z = \int dP_z$ bestimmen.

Es ergibt in diesem Falle, wenn $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ die Coordinaten jenes Punktes sind, für welchen $s = 0$ ist und wenn P von diesem Punkte aus gerechnet wird, die Integration von (7) einfach

$$P_x = \mp (p_x - p_{x_0}), P_y = \mp (p_y - p_{y_0}), P_z = \mp (p_z - p_{z_0}) \quad (10)$$

d. h. der Unterschied der componentalen Spannungen parallel zu irgend einer Achse an zwei verschiedenen Punkten der Kettenlinie ist stets dem Zahlwerte nach gleich der Summe P_x der zu dieser Achse parallelen Componenten der äußeren Kräfte, die zwischen diesen beiden Punkten wirken.

Die Gleichungen (4) — (10) lassen sofort erkennen, was übrigens auch aus der wiederholt erwähnten graphischen Darstellung zu ersehen ist, dass, wenn bei einer Kettenlinie alle äußeren Kräfte P in die entgegengesetzt gleichen verwandelt werden und statt aller Zugspannungen die gleichen Druckspannungen und umgekehrt angenommen werden, alle diese Gleichungen ihre Giltigkeit beibehalten, also das Gleichgewicht in der Kettenlinie nicht gestört wird.

In sämtlichen bisherigen Gleichungen dieses Paragraphs bedeutet p den absoluten Zahlwert der Spannung im Punkte M , und es mussten daher, damit diese Gleichungen auf beide Arten der

möglichen Spannung anwendbar seien, die Doppelzeichen eingeführt werden, und zwar beziehen sich die oberen Qualitätszeichen auf Zug, die unteren auf Druckspannung. Will man diese Doppelzeichen vermeiden, so muss man durch p den algebraischen Wert der Spannung bezeichnen und denselben etwa bei Druckspannungen als positiv, bei Zugspannungen als negativ voraussetzen. Unter dieser Voraussetzung, die auch weiterhin in diesem Paragraph stets festgehalten werden soll, nehmen die Gleichungen (4), (6), (9), (10) offenbar folgende einfachere Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{ds} \cdot \cos(ds, dP) &= \frac{dp}{ds}, \frac{dP}{ds} \cdot \sin(ds, dP) = p \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \frac{p}{\rho} \\ p_x &= p \cdot \frac{dx}{ds}, p_y = p \cdot \frac{dy}{ds}, p_z = p \cdot \frac{dz}{ds} \\ dP_x &= dp_x = d\left(p \frac{dx}{ds}\right), dP_y = dp_y = d\left(p \frac{dy}{ds}\right), \\ dP_z &= dp_z = d\left(p \frac{dz}{ds}\right) \\ P_x &= p_x - p_{x0}, P_y = p_y - p_{y0}, P_z = p_z - p_{z0} \end{aligned} \right\} (11)$$

Als Beispiel sei die früher als gewichtlos vorausgesetzte, vom Wasser gedrückte (also unterhalb des Wasserspiegels gelegene) Kette behandelt, wenn auf das Gewicht der (absolut biegsam angenommenen) Kette Rücksicht genommen wird, wofern zunächst das dem Bogen s entsprechende Gewicht Q der Kette (beziehungsweise der absolut biegsamen cylindrischen Wand, deren verticaler Querschnitt die Kettenlinie darstellt) der Länge s dieses Bogens proportional angenommen wird, so dass $Q = q_1 \cdot s$ und $dQ = q_1 ds$ ist, wo q_1 das constante Gewicht pro Längeneinheit bedeutet. Ist, wie früher (Fig. 80), d die geringe Dicke der dünnen biegsamen Wand CD und b das der Kettenlinie entsprechende Element der Erzeugenden der inneren cylindrischen Wandfläche, ist ferner S das spezifische Gewicht (Gewicht pro Volumeinheit) des homogenen Materials dieser biegsamen Wand, so ist $Q = S \cdot V = S \cdot s b d$, sonach $q_1 = \frac{Q}{s} = S b d$.

Es sei wieder die positive y -Achse vertical nach abwärts gerichtet und die x -Achse in dem horizontalen Wasserspiegel angenommen. In diesem Falle wirken auf das Kettenelement ds zwei Kräfte, die eine Kraft (die des Wasserdruckes) $dP = S_F \cdot ds = A \cdot y ds$ (wo, wie früher, wenn σ das spezifische Gewicht des Wassers bedeutet, $A = \sigma b$ ist) normal zu ds , so dass $\cos(ds, dP) = 0$ ist und die Kraft $dQ = q_1 ds$ in der Richtung der positiven y -Achse. Zuzufolge der ersten der Gleichungen (11) ist $\frac{dp}{ds}$ gleich der spezifischen Tangentialkraft, die hier als Summe der Kräfte $S_F \cdot \cos(ds, dP) + \frac{dQ}{ds} \cos(ds, dQ)$ erscheint, und somit muss, da $\cos(ds, dP) = 0$, ferner $\frac{dQ}{ds} = q_1$ und $\cos(ds, dQ) = \cos(y, ds) = \frac{dy}{ds}$ ist,

$$q_1 \frac{dy}{ds} = \frac{dp}{ds} \text{ oder } dp = q_1 dy \text{ sein.}$$

Die Integration dieser Gleichung liefert, wenn x_0, y_0, p_0 zugehörige Werte für einen bestimmten Punkt der Kettenlinie (etwa für den Scheitel, für welchen die Tangente horizontal ist, so dass dann $p_0 = p_{x_0}$ zu setzen ist) sind,

$$p - p_0 = q_1 (y - y_0) \dots (12)$$

Bedeutet π , bezw. π_0 die im Querschnitte der Wand an der betreffenden Stelle wirksame zu diesem Querschnitte normale Spannung pro Flächeneinheit, so ist, wie früher $p = \pi b d$, bezw. $p_0 = \pi_0 b d$ und $q_1 = S b d$, demnach nimmt die Gleichung (12) die Form an:

$$\pi - \pi_0 = S (y - y_0) \dots$$

Zu derselben Gleichung würde man auch auf kürzerem Wege gelangt sein, wenn man nach einem früheren Satze den Spannungsunterschied $p_0 - p$ sofort gleichgesetzt hätte der Änderung des Potentials der spezifischen verticalen Kraft $q_1 = \frac{dQ}{ds}$, welches Potential bekanntlich (siehe S. 202 und 270) durch $q_1 (y_0 - y)$ ausgedrückt ist.

Nimmt man ferner die positive Richtung der x -Achse im Wasserspiegel derart an, dass die kürzeste Drehung von der positiven x -Achse nach der vertical nach abwärts gerichteten positiven y -Achse in ihrem Sinne übereinstimmt mit jener Drehung, durch welche die positive Richtung des Bogenelements ds (d. i. jene, nach welcher der algebraische Wert von s zunimmt) auf kürzestem Wege in jene zur Kettenlinie normale Richtung überführt wird, nach welcher das Wasser den Druck dP ausübt, d. i. nach der außerhalb des Wassers gelegenen Seite der Kettenlinie, so ist offenbar $(x, dP) = (x, ds) + (ds, dP) = (x, ds) + \frac{\pi}{2}$ demnach allgemein $\cos(x, dP) = -\sin(x, ds) = -\frac{dy}{ds}$ und $dP_x = dP \cdot \cos(x, dP) = -A \cdot y ds \cdot -\frac{dy}{ds} = -Ay dy$ während $dQ_x = dQ \cdot \cos(x, dQ) = dQ \cos(x, y) = dQ \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$ ist.

Es ist demnach der sechsten Gleichung in (11) zufolge $dp_x = dP_x + dQ_x = -Ay dy$, somit

$$p_x - p_{x_0} = -A \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} \right) \dots (13)$$

oder, wenn man die früheren Werte $A = \sigma b$, $p = \pi b d$ einführt,

$$\pi_x - \pi_{x_0} = -\frac{\sigma}{d} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} \right)$$

welche Gleichung offenbar auch für den früher behandelten Fall der als gewichtslos angenommenen Kette Giltigkeit hat.

$$\text{Setzt man zufolge (11) } p_x = p \cdot \frac{dx}{ds} = p \cdot \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = p \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

in die Gleichung (13) ein und eliminiert hierauf aus (12) und (13) p , so erhält man die gesuchte Gleichung der Kettenlinie. Aus (12) lässt sich die Tangentialspannung p , aus (13) p_x und schliesslich p_y aus $p^2 = p_x^2 + p_y^2$ für jeden Punkt der Kettenlinie bestimmen.

Je nachdem die Resultierende aus dem Wasserdruck $dP = Ay \cdot ds$ und dem Gewichte $q_1 \cdot ds$ des entsprechenden Elementes ds nach der convexen oder

der concaven Seite der Kettenlinie gerichtet ist, findet in derselben Zug- oder Druckspannung statt, und zwar, wenn sich als Schlusswert von p in der oben angedeuteten Entwicklung aus Gleichung 12 und 13 ein positiver Wert ergibt so ist diese Spannung eine Druckspannung, im gegentheiligen Falle aber eine Zugspannung.

Würden in der Kette (cylindrischen Wand) nicht gleichen Bogenlängen s gleiche Gewichte entsprechen, sondern würde dieselbe eine Kette (Wand) von variablem Querschnitt $f = b d$ sein, deren variable Dicke d jedoch, wofern diese Kette so wie eine Kettenlinie behandelt werden soll, sehr klein im Verhältnis zu ihrer Länge vorauszusetzen ist, und würde man den Querschnitt überall derart wählen, dass auf jede Flächeneinheit desselben längs der ganzen Länge der Kette dieselbe constante spezifische Normalspannung π entfällt, so dass $p = f\pi = b d \pi$ ist, so müsste, wenn wieder S das constante Gewicht der Kette pro Volumeinheit bedeutet, das Gewicht $d Q$ der Kette von der Länge ds , d. i. vom Volum $f ds$ durch $d Q = S \cdot f ds = S \cdot \frac{p}{\pi} \cdot ds$ ausgedrückt sein. Statt der Gleichung (12), die aus $\frac{dp}{ds} = \frac{dQ}{ds} \cos(y, ds) = \frac{dQ}{ds} \frac{dy}{ds}$ abgeleitet wurde, müsste demnach hier gesetzt werden: $\frac{dp}{ds} = S \cdot \frac{p}{\pi} \cdot \frac{dy}{ds}$ oder $\frac{dp}{p} = \frac{S}{\pi} \cdot dy$.

Durch Integration derselben ergibt sich demnach hier an Stelle der Gleichung (12) $\log \text{nat} \frac{p}{p_0} = \frac{S}{\pi} \cdot (y - y_0)$ oder

$$p = p_0 e^{\frac{S}{\pi}(y - y_0)} \dots (14)$$

oder, wenn man die früheren Werte $p = \pi b d$, $p_0 = \pi b \cdot d_0$ einsetzt,

$$d = d_0 \cdot e^{\frac{S}{\pi}(y - y_0)}$$

während die Gleichung (13) ihre Giltigkeit beibehält. Aus den Gleichungen (13) und (14) lässt sich somit in derselben Weise wie früher die Gleichung der entsprechenden Kettenlinie leicht deducieren.*)

In manchen Fällen sind die Richtungen der auf eine Kette einwirkenden Kräfte derart, dass es sich empfiehlt, bei der Untersuchung dieser Kettenlinien statt Parallelkoordinaten Polarcoordinaten in Anwendung zu bringen. Man kann die in diesem Falle zur Anwendung kommenden Gleichungen für ebene Kettenlinien in der früher erörterten Weise aus den entsprechenden kinematischen Grundgleichungen (11), S. 115 sofort deducieren.

Bezeichnet man nämlich durch r den Radius vector und durch $\varphi = (x r)$ den laufenden Polarwinkel der ebenen Kettenlinie, ferner durch p_r und p_n jene Componenten der in der Richtung von ds wirksamen Spannung p , welche die Richtung r des Radius vector r der Kettenlinie und die darauf senkrechte Richtung n (siehe S. 115) haben, und bedeuten ebenso dP_r und dP_n die ebenso gerichteten Componenten der auf das Bogenelement ds einwirkenden äußeren

*) Als zweites Beispiel ist in der früheren Auflage die Kette (Stützlinie) mit Erdbelastung behandelt.

Kraft dP , ferner v_r und v_n die Componenten der Geschwindigkeit v und p_r und p_n die entsprechenden Componenten der Beschleunigung p bei dem analogen kinematischen Problem, so ist den Gleichungen (8) und (5) gemäß $v_r = p_r$, $p_r = p \cdot \frac{dP_r}{ds}$, $v_n = p_n$, $p_n = p \cdot \frac{dP_n}{ds}$, ferner $v = p$ und $dt = \frac{ds}{p}$, demnach $\frac{dr}{dt} = p \cdot \frac{dr}{ds}$ und $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(p \frac{dr}{ds} \right) = p \cdot \frac{d}{ds} \left(p \frac{dr}{ds} \right)$. Führt man diese Werte von v_r , v_n , p_r und p_n u. s. w. in die kinematischen Gleichungen (11) S. 115 ein, so ergeben sich folgende Beziehungen zwischen den Spannungen und den äußeren Kräften, beziehungsweise deren Componenten bei Zugrundelegung eines Polarcordinatensystems:

$$\left. \begin{aligned} p_r &= p \frac{dr}{ds}, & p_n &= p r \cdot \frac{d\varphi}{ds} \\ \frac{dP_r}{ds} &= \frac{d}{ds} \left(p \frac{dr}{ds} \right) - p r \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = \frac{dp_r}{ds} - p_n \frac{d\varphi}{ds} \\ \frac{dP_n}{ds} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{ds} \left(p r^2 \frac{d\varphi}{ds} \right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{d(p_n r)}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

wo, wie in den Gleichungen (11) — (14) die Spannung p positiv oder negativ in Rechnung zu ziehen ist, je nachdem dieselbe eine Druckspannung oder Zugspannung ist.

Sind dementsprechend Richtung und Größe der auf das Bogenelement ds einwirkenden Kraft dP , somit auch Zeichen und Zahlwert der beiden Componenten dP_r und dP_n dieser Kraft dP , als Functionen einer oder mehrerer der variablen Größen r , φ , s , p gegeben, so kann man aus den zwei letzten Gleichungen in (15), die dann nur diese Variablen enthalten, mit Zuhilfenahme der weiteren dritten Gleichung $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$ (die sich unter anderem schon aus der Gleichung $v^2 = v_r^2 + v_n^2$ ergibt), drei dieser Variablen durch die vierte ausdrücken, wenn behufs der Bestimmung der Integrationsconstanten dieser Differentialgleichungen die Größe und Richtung der Tangentialspannung p in einem bestimmten Punkte der Bahn oder etwa die Lage zweier Punkte (der Befestigungspunkte) nebst der zwischen diesen befindlichen Kettenlänge gegeben sind. Es lässt sich also dann z. B. r als Function von φ ausdrücken, d. h. die Polargleichung der gesuchten Kettenlinie ausfindig machen und auch p als Function — sei es von r oder φ oder s — bestimmen.

Ist umgekehrt etwa die beliebig gewählte Gestalt der Kettenlinie und die beliebig gewählte Richtung der unbekanntenen Kraft dP für jedes Element ds durch den Richtungswinkel $(x, dP) = \lambda$ gegeben,

so hat man nur $(x, dP) = (xr) + (r, dP)$, also $(r, dP) = \lambda - \varphi$, somit in die zwei letzten Gleichungen (15) den Wert $dP_r = \cos(\lambda - \varphi) \cdot dP$ und $dP_n = \sin(\lambda - \varphi) \cdot dP$ einzusetzen, so dass diese zwei Gleichungen (15) nur die Unbekannten dP und p enthalten, deren Beziehung zu einander sich so für jeden Punkt der Bahn bestimmen lässt. *)

Da das statische Moment der Kraft dP bezüglich des beliebigen gewählten Poles O des Coordinatensystems dem polaren Moment der Componente dP_n gleichkommt (indem ja das polare Moment der zweiten Componente dP_r offenbar Null ist), und dieses durch $r \cdot dP_n$ bestimmt ist, da ferner aus gleichen Gründen $p_n r$ das polare Moment der Spannung p darstellt, so drückt die letzte Gleichung in (15) nichts anderes aus, als dass für die auf das Element ds der Kettenlinie wirkenden drei Kräfte dP , p und $-(p + dp)$, welche sich das Gleichgewicht halten, die Momentensumme sich auf Null reducirt.

Auf eine jede über die äußere Oberfläche von ruhenden festen Körpern gewundene Kettenlinie oder in eine innere Höhlung dieser Körper eingezwängte Stützzlinie finden, wie schon erwähnt wurde, die analogen kinetischen Entwicklungen des § 43 Anwendung. Ist demnach diese vorgeschriebene Fläche, an welche sich die Kettenlinie anlegt, eine vollkommen glatte Rotationsfläche, und sind die äußeren Kräfte oder zum mindesten deren Resultante parallel gerichtet zu einer Meridianebene dieser Rotationsfläche, so muss (siehe S. 188) die Kettenlinie sich längs der entsprechenden Meridiancurve an dieselbe anschmiegen.

Ist ferner dR die Resultante der auf das Element ds der Kette einwirkenden äußeren Kräfte (abgesehen vom Normalwiderstand dW , für welchen ja stets $dW \cdot \cos(W, ds) = 0$ ist), so muss nach Gleichung (11) $dR \cdot \cos(ds, dR) = dp$, also $p - p_0 = \int \cos(ds, dR) \cdot dR$ sein. Sind z. B. alle dR gleichgerichtet, ferner $\frac{dR}{ds} = S_R$, und ist durch n die Projection von s auf die Krafrichtung bezeichnet, so ist $dR \cos(ds, dR) = S_R \cdot ds \cos(R, ds) = S_R \cdot dn$, also $p - p_0 = \int_0^n S_R \cdot dn$, und wenn die spezifische Kraft S_R constant ist, $= S_R \cdot n$ (vergl. § 44).

Der normale Druck des Elementes ds einer aufgewundenen Kette auf die widerstehende Fläche ist dem Normalwiderstande dW

*) Die hier in der früheren Auflage folgende ausführliche, nach Art des § 46 durchgeführte Theorie der Centralkettenlinien, d. i. jener Kettenlinien, bei welchen die einwirkenden äußeren Kräfte dP Centralkräfte sind, ist in diese Auflage nicht aufgenommen worden.

entgegengesetzt gleich, und der letztere ist, wenn man den Gleichungen (5) und (8) gemäß statt der Beschleunigungen $p_W = \frac{W_n}{m}$, $p_R = \frac{R}{m}$ der Kräfte W_n und R und statt der Geschwindigkeit v die Größen $p_W = p \cdot \frac{dW}{ds}$, $p_R = p \cdot \frac{dR}{ds}$, $v = p$ in die Gleichung (2), S. 189 einsetzt, bestimmt durch $dW = \frac{p}{\rho} ds - dR \cos(\rho, dR)$, wo dW positiv oder negativ in Rechnung kommt, je nachdem dW die centripetale oder die centrifugale Richtung des Krümmungshalbmessers ρ hat. Die letzte Gleichung ist offenbar auch für eine dem Wasserdrucke dW unterworfenen Kette (biegsame Wand) giltig. Auch die übrigen aus dieser Formel auf S. 189 und 190 abgeleiteten Folgerungen finden hier sinngemäße Anwendung. In die übrigens keine Schwierigkeiten bietende Untersuchung von jenen besonderen auf krumme Flächen aufgewundenen Ketten oder Seilen, deren kinetische Analoga das Kreispendedel, das Cykloidenpendel u. s. w. sind, soll hier nicht eingegangen werden.

§ 50. Kettenlinien und Belastungslinien für parallele äußere Kräfte im allgemeinen.

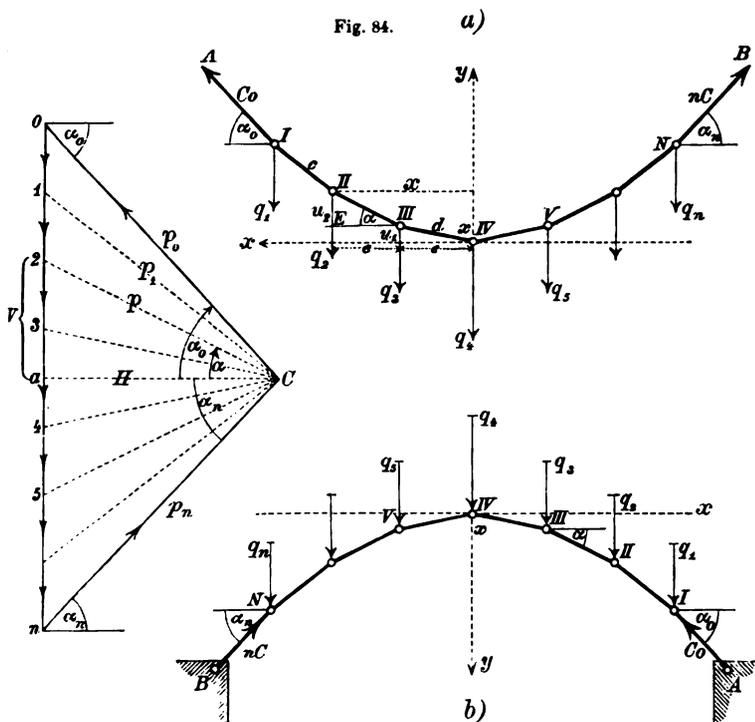
Sind die äußeren Kräfte $P_1 P_2 \dots P_n$ alle zu einander parallel, so müssen zu denselben, wenn die Kettenlinie die Form eines offenen Kettenpolygons, beziehungsweise einer offenen Curve, also nicht einer zu den Kräften parallelen Geraden haben soll, jedenfalls behufs der Herstellung des Gleichgewichtes noch zwei äußere, in den beiden äußersten Seiten der Kettenlinie wirkende Kräfte hinzutreten, und zwar können diese beiden Kräfte \overline{nC} und \overline{Co} (Fig. 84), indem die Kräftelinie, welche den auf die Knotenpunkte einwirkenden Kräften $P_1 P_2 \dots P_n$ entspricht, in eine Gerade on übergeht, und da der Pol C (wegen des im früheren Paragraphen bewiesenen Parallelismus der Strahlen $C1, C2 \dots$ zu den Seiten des Kettenpolygons) stets außerhalb dieser Geraden on gelegen sein muss, nicht parallel zu den früheren Kräften $P_1 P_2 \dots P_n$ gerichtet sein. Ist die Kettenlinie an den beiden Enden A und B befestigt, so sind diese beiden Kräfte Co und nC die Widerstände (Reactionen) dieser Befestigungspunkte A und B .

Da die Seiten des Kettenpolygons parallel sind zu den in der Ebene des Dreieckes oCn enthaltenen Strahlen $oC, 1C \dots nC$, so muss auch das Kettenpolygon stets ein ebenes Polygon sein, dessen Ebene parallel ist zu on , also zu den Richtungen der Kräfte $P_1 P_2 \dots P_n$. Diese Ebene sei in der Folge zur xy -Ebene gewählt.

Der bei weitem wichtigste Fall ist jener, in welchem die Kräfte $P_1 P_2 \dots P_n$ vertical nach abwärts gerichtete, in den Knotenpunkten $I, II \dots N$ angreifende Lasten $q_1, q_2 \dots q_n$, also alle auch gleich ge-

stet sind und daher das Kettenpolygon ein in einer Verticalne gelegenes Polygon mit durchwegs hohlen Vieleckswinkeln ist, in diesem Fall soll in diesem Paragraph behandelt werden. Eine artige Kettenlinie sei stets kurzweg als „belastete Kettenlinie“ bezeichnet. Die Abscissenachse sei stets horizontal angenommen, und zur positiven Richtung der Ordinatenachse y sei stets, um die Spannung p , sei dieselbe eine Druck- oder Zugspannung, stets dem absoluten Zahlwerte nach in Rechnung bringen zu können, im ersten Falle (d. i. bei gestützten Kettenlinien) die Richtung vertical nach wärts, im zweiten Falle (bei hängenden Kettenlinien) die Richtung vertical nach aufwärts gewählt.

Es sei Fig. 84 a, bezw. b das Kettenpolygon (Seilpolygon) und Fig. 84 c das zugehörige Kräftepolygon.



zieht sich auf den Fall, in welchem nur Zugspannungen stattfinden, nach demnach die einzelnen Glieder der Kette auch durch Seile ersetzbar sind (hängende Kette), dagegen stellt Fig. 84 b den Fall vor, in welchem Druckspannungen in allen Gliedern des Kettenpolygons herrschen (gestützte Kette).

Nach den Gesetzen des § 49 müssen, wenn $\overline{01}$, $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$ u. s. w. (Fig. 84 c) die Belastungen $q_1, q_2 \dots$ darstellen und oC und Cn zu den

Endseiten des Kettenpolygons parallel sind, $1C \parallel III$, $2C \parallel IIII$, $3C \parallel IIIIV$, $4C \parallel IVV$ u. s. w. sein; zugleich sind durch die Längen dieser Strahlen die Spannungen in den entsprechenden parallelen Kettengliedern dargestellt. Zerlegt man eine jede dieser Spannungen in eine horizontale und eine verticale Componente, welche Componenten den Namen: Horizontalspannung H und Verticalspannung V führen, mit Hilfe der rechtwinkligen Kräftedreiecke oCa , $1Ca$, $2Ca$, $\dots nCa$, so ergeben sich sofort aus den nebenstehenden Figuren folgende einfache Gesetze:

Die Horizontalspannung Ca ist in allen Theilen der Kettenlinie constant, mag das Kettenpolygon wie immer geformt und durch welche Lasten immer beansprucht sein, und zwar muss dies, wie das Kräftepolygon sofort lehrt, selbst dann der Fall sein, wenn zu den Belastungen auch vertical nach aufwärts wirkende äußere Kräfte hinzutreten.

Die arithmetische Summe (algebraische Differenz) der Verticalspannungen $oa + an$ an den beiden Enden der Kettenlinie ist gleich der Summe $\overline{01} + \overline{12} + \dots + \overline{n-1, n}$ aller Belastungen, also abgesehen vom Vorzeichen der Verticalspannungen

$$V_o + V_n = \Sigma q \quad (1)$$

Der absolute Zahlwert der Verticalspannung $\overline{0a}$, $\overline{1a}$, $\overline{2a}$ u. s. w. nimmt bei einer hängenden (stabilen) Kette (wie in Fig. 84a) von oben nach unten stets ab, während sie bei einer gestützten (labilen) Kette, wie aus Fig. 84b sich sofort ergibt, von oben nach unten stets zunimmt.

Der Unterschied der Zahlwerte der Verticalspannungen an zwei verschiedenen Stellen der Kettenlinie, z. B. in c und d , welcher durch $1a - 3a = \overline{13} = \overline{12} + \overline{23}$ bestimmt ist, kommt, wenn beim Übergange von der einen Stelle zur anderen der tiefste (bzw. höchste) Punkt der Kettenlinie nicht überschritten wird, stets gleich der Summe der zwischen diesen beiden Stellen (c und d) befindlichen Lasten.

Ist demgemäß eine Seite u des Kettenpolygons, nämlich die unterste bei einer hängenden, die oberste bei einer gestützten Kette horizontal, fällt daher der Fußpunkt der vom Pole C auf die verticale Kraftlinie on geführten Senkrechten mit einem der Punkte $123\dots$ zusammen, so ist in dieser Seite u die Verticalspannung Null und daher der absolute Zahlwert der Verticalspannung an irgend einer Stelle c einfach die Summe aus allen zwischen dieser Stelle und der Seite u befindlichen Lasten.

Ist α der spitze (hier vorläufig positiv angenommene) Neigungswinkel irgend einer Kettenpolygonseite $IIIII$ gegen den Horizont

(der Elevationswinkel, der Stellungswinkel), so ist für diese Seite — abgesehen vom Zeichen —

$$H = p \cos \alpha, V = p \sin \alpha, V = H \operatorname{tg} \alpha, p = H \operatorname{sec} \alpha \quad (2)$$

Durch diese Gesetze, sowie durch die bekannten trigonometrischen und polygonometrischen Sätze, die sich leicht auf Grund der Fig. 84 *a, b, c* aufstellen lassen, ist man in den Stand gesetzt, aus den gegebenen Belastungen $\overline{01}, \overline{12}, \dots$ den gegebenen Längen der Kettenglieder $III, IIII \dots$ und irgendwelchen zwei anderen Bestimmungsstücken alle anderen zu bestimmen — und zwar muss man bei der constructiven Lösung dieser Aufgabe stets vom Kräftepolygon ausgehen und mittels dessen erst das zugehörige Seilpolygon construieren.

Es ist sofort einzusehen, dass man, wenn auf diese Art für gegebene äußere Kräfte die zugehörige Form einer — sei es hängenden oder gestützten — Kettenlinie, die der Gleichgewichtslage entspricht, gefunden hat, die gefundene Figur in ihrer Ebene nur um 180° zu drehen hat, um sofort die Form jener im ersten Falle gestützten, im zweiten Falle hängenden Kettenlinie zu erhalten, die sich bei denselben in den Knotenpunkten $III \dots$ einwirkenden Kräften im Gleichgewichtszustande ergeben würde. Nur ist das Gleichgewicht bei hängenden Kettenlinien ein stabiles, bei gestützten ein labiles. Durch diese Drehung gelangt man z. B. von Fig. 84 *a* zu Fig. 84 *b*.

Anmerkung 1. Sind z. B. die gegebenen zwei Bestimmungsstücke die Neigungswinkel α_0 und α_n der äußersten Endseiten gegen den Horizont, so hat man nur diese Winkel in den Endpunkten der gegebenen verticalen Kräftelinie $on = \Sigma q$ bei o und n (Fig. 84 *c*) an horizontale Schenkel anzufügen, wodurch die Seiten oC und Cn des Dreieckes oCn sich ergeben, und hat dann den so bestimmten Punkt C mit den Punkten $1, 2, 3 \dots$ zu verbinden, vom ersten Knotenpunkte I , auf welchen sich die Wirkung der äußeren Kraft $\overline{0o}$ (eventuell des Widerstandes \overline{Co} des Befestigungspunktes A) überträgt, eine Parallele zu IC zu führen, auf dieser die gegebene Länge III des entsprechenden Kettengliedes aufzutragen, von II aus eine Parallele zu $2C$ zu führen u. s. w. Ebenso würde der Pol C und demnach alles andere bestimmt sein, wenn statt α_0 und α_n z. B. die Größen der äußersten Kräfte Co und nC , mit anderen Worten die Längen der drei Seiten des Dreieckes oCn gegeben wären, oder wenn man die Lagen der beiden Aufhängepunkte (Stützpunkte) A und B kennen würde u. s. w.

Die Rechnung würde sich, wenn etwa α_0 und α_n gegeben sind, folgendermaßen gestalten:

Nach (2) ist $V_0 = H \operatorname{tg} \alpha_0, V_n = H \operatorname{tg} \alpha_n$, daher $V_0 + V_n = H [\operatorname{tg} \alpha_0 + \operatorname{tg} \alpha_n]$, somit nach (1) $\Sigma q = H [\operatorname{tg} \alpha_0 + \operatorname{tg} \alpha_n]$, daher

$$H = \frac{\Sigma q}{\operatorname{tg} \alpha_0 + \operatorname{tg} \alpha_n} = \frac{\Sigma q \cdot \cos \alpha_0 \cos \alpha_n}{\sin (\alpha_0 + \alpha_n)}$$

$$\text{also } V_0 = H \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\Sigma q \cdot \operatorname{tg} \alpha_0}{\operatorname{tg} \alpha_0 + \operatorname{tg} \alpha_n} = \frac{\Sigma q \cdot \sin \alpha_0 \cos \alpha_n}{\sin (\alpha_0 + \alpha_n)}$$

und $p_o = H \sec \alpha_o = \frac{\sum q \cdot \cos \alpha_n}{\sin (\alpha_o + \alpha_n)}$. Nun ist $V_I = V_o - q_1$, daher V_I nach Einsetzung des Wertes von V_o bestimmbar, ferner aus $V_I = H \tan \alpha_I$ auch α_I bestimmbar und etwa aus $p_I = H \sec \alpha_I$ auch p_I , ferner $V_2 = V_I - q_2$ u. s. w.

Wäre $\alpha_o = \alpha_n$, so müsste das Kräftedreieck $o C n$ gleichschenkelig, also $p_o = p_n$ und $V_o = V_n = \frac{\sum q}{2}$ sein.

Anmerkung 2. Werden von einem in zwei in derselben Horizontalebene gelegenen Punkten A und B aufgehängten (oder gestützten) Kettenpolygon durchwegs in gleichen Horizontalabständen $= e$ gleiche Belastungen $= q$ getragen, wie es nahezu bei der Kette einer Kettenbrücke der Fall ist, wird ferner vom Gewichte der Kette abgesehen, so ist infolge der Symmetrie $\alpha_o = \alpha_n$, und es muss in dem gleichschenkeligen Dreiecke $o C n$ der Fußpunkt a der Höhe H , je nachdem die Zahl n der Knotenpunkte eine ungerade oder gerade ist, die mittlere der Strecken $o1, 12 \dots$ halbieren oder aber mit dem Punkte $\frac{n}{2}$ zusammenfallen. In beiden Fällen hat das Kettenpolygon offenbar eine verticale Symmetrieachse, die im ersten Falle (Fig. 84) durch den mittleren Knotenpunkt (den Scheitel), der zugleich der tiefste, beziehungsweise höchste ist, je nachdem Zug oder Druck vorausgesetzt wird, im zweiten Falle durch den Mittelpunkt der untersten, beziehungsweise obersten horizontalen Seite hindurchgeht. Nimmt man diese Achse (Fig. 84) zur y -Achse und die durch den tiefsten, beziehungsweise höchsten Punkt gelegte Horizontale zur x -Achse an, so lassen sich bei einer ungeraden Anzahl der Kettenglieder die Coordinaten x und y des 1ten, 2ten \dots m -ten Knotenpunktes (vom tiefsten, bezw. höchsten an gezählt), wie aus der Fig. 84 leicht zu entnehmen ist, folgendermassen bestimmen: Da $III D IV \propto 3 a C$, $II E III \propto 2 a C$

u. s. w. ist, so ist $\frac{u_1}{e} = \frac{3a}{aC} = \frac{1}{2} \frac{q}{H}$, $\frac{u_2}{e} = \frac{2a}{aC} = \frac{q}{2} + \frac{q}{H}$ u. s. w., sonach

$$y = u_1 + u_2 + u_3 + u_m = e \cdot \frac{q}{2H} + e \cdot \frac{q}{2} + \frac{q}{H} + e \cdot \frac{q}{2} + 2q + \dots + e \frac{q}{2} + (m-1) \frac{q}{H} = e \cdot \frac{mq}{H} \cdot \frac{m}{2} = \frac{eq}{2H} \cdot m^2 \text{ und } x = me$$

Dividirt man das Quadrat der zweiten Gleichung $x = me$ durch die erste, so findet man, dass $x^2 = 2 \frac{He}{q} y$ ist. Es liegen also alle Knotenpunkte in einer Parabel, deren Parameter $2 \frac{He}{q}$, deren Achse die y -Achse und deren Scheitel der tiefste, beziehungsweise höchste Knotenpunkt ist. Dieselbe Parabel ergibt sich für eine gerade Zahl der Kettenglieder, nur ist der Scheitel unterhalb, beziehungsweise oberhalb der horizontalen Seite im Abstände $\frac{1}{8} \frac{eq}{H}$ gelegen.

Alles das in diesem Paragraph Gesagte findet offenbar auch volle Anwendung auf den Fall, in welchem die Längen der Kettenglieder unendlich klein sind, also das Kettenpolygon in eine krumme Kettenlinie übergeht, in welchem Falle die vertical nach abwärts wirkende Last längs der ganzen Kettenlinie nach irgend einem Gesetze stetig vertheilt angenommen werden muss. Die Kettenlinie ist

dann eine ebene, und zwar in einer Verticalebene gelegene Curve, das Kräftepolygon wie früher eine verticale Gerade, die von dem Endpunkte dieser Geraden zu dem Pole C geführten Strahlen sind parallel zu den äußersten Bogenelementen, also zu den Tangenten in den Endpunkten der Kettenlinie, der normale Abstand des Pols von der Kräftelinie bestimmt die Horizontalspannung H , der zur Tangente irgend eines Punktes der Kettenlinie parallele Strahl des Kräftepolygons stellt die Spannung in diesem Punkte dar u. s. w.

Jenen Punkt der krummen Kettenlinie, in welchem die an diese geführte Tangente horizontal ist, der demnach im Falle eines Zuges (bei einer hängenden Kette) der tiefste, eines Druckes (bei einer gestützten Kette) der höchste Punkt der Kettenlinie ist, wird der Scheitel derselben genannt.

Hat die Kettenlinie einen solchen Scheitel A , so muss nach einem früheren Satze, wenn die zwischen diesem Scheitel A und irgend einem Punkte M der Kettenlinie befindliche Belastung durch P bezeichnet ist, die Verticalspannung V in M der Gleichung genügen: $V = P$.

Dieser Satz, wie überhaupt auch alle in diesem Paragraph für Kettenpolygone nachgewiesenen Sätze lassen sich für krumme Kettenlinien leicht aus den Gleichungen (9) [oder auch aus den Gleichungen (4)] des § 49 deducieren. Es sei, um dies zu zeigen, und um auch weitere Relationen abzuleiten, wie früher angenommen, dass außer den an den beiden Enden der offenen Kettenlinie wirkenden Kräften (z. B. den Reactionen der Befestigungspunkte oder Unterstützungspunkte) nur vertical nach abwärts wirkende Kräfte, die künftighin kurzweg als Belastungen bezeichnet sein mögen, einwirken, und zwar derart, dass die Belastung stetig längs der ganzen Länge der Kettenlinie vertheilt ist und dass auf das Längenelement ds die dem absoluten Zahlwerte nach durch dP bezeichnete Belastung wirkt. Da die äußere Kraft dP , wie früher gezeigt wurde, bei Kettenlinien, die auf Zug beansprucht sind, nach der convexen, bei Stützlinsen dagegen nach der concaven Seite derselben gerichtet sein muss und andere Kräfte außer den nach abwärts wirkenden Belastungen nicht vorhanden sind, so muss jede solche Kettenlinie in ihrer ganzen Ausdehnung im ersten Falle ihre convexe Seite nach abwärts kehren, dagegen im zweiten Falle (bei Stützlinsen) nach unten zu concav sein. Da nun der ursprünglichen Voraussetzung gemäß die positive y -Achse des zugrunde gelegten rechtwinkligen Achsensystems bei hängenden Kettenlinien die Richtung vertical nach aufwärts, bei Stützlinsen jene vertical nach abwärts besitzt, so ist $dP_y = \mp dP$ (wo das obere Zeichen sich auf hängende, das untere auf gestützte Kettenlinien bezieht),

sonach, wofern p den absoluten Zahlwert der Spannung bedeutet, der zweiten Gleichung (9) S. 273 gemäß $dP = dp_y = d\left(p \frac{dy}{ds}\right)$, wo p_y die Verticalspannung V bedeutet (die von nun an nach Gleichung (6) S. 272, nämlich zufolge der Gleichung $p_y = p \frac{dy}{ds}$ positiv oder negativ in Rechnung kommt, je nachdem $\frac{dy}{ds}$, d. i. der Sinus des Winkels $(x, ds) = \alpha$ positiv oder negativ ist), so dass, wenn die Belastung P vom Scheitel aus, wo $p_y = 0$ ist, gerechnet und nach jener Seite, auf welcher s zunimmt, auch positiv in Rechnung gebracht wird,

$$p_y = V = p \frac{dy}{ds} = p \sin \alpha = P \quad \dots \quad (3)$$

ist. Wenn zudem die x -Achse horizontal, und zwar in dem Sinne, in welchem der Bogen s zunimmt, d. h. derart angenommen wird, dass für die ganze Ausdehnung der Kettenlinie der Berührungswinkel $\alpha = (x, ds)$ ein spitzer Winkel, also $-\frac{\pi}{2} < (x, ds) < \frac{\pi}{2}$ ist, so ist $\cos(x, ds) = \cos \alpha = \frac{dx}{ds}$ positiv, und da eine X -Komponente der Kraft dP nicht vorhanden, also $dP_x = 0$, folglich in der ganzen Ausdehnung der belasteten Kettenlinie zufolge der ersten Gleichung (9) S. 273 $d p_x = d\left[p \frac{dx}{ds}\right] = 0$ ist, so hat $p_x = p \frac{dx}{ds} = p \cos \alpha$, d. i. die Horizontalspannung einen constanten positiv anzunehmenden Wert H , also ist, wie in (2)

$$p_x = p \frac{dx}{ds} = p \cos \alpha = H \quad \dots \quad (4)$$

Die Division der Gleichungen (3) und (4) ergibt

$$\left. \begin{array}{l} \frac{P}{H} = \frac{V}{H} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} \\ \text{somit } \frac{dP}{dx} = H \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \end{array} \right\} \quad (5)$$

Die Glieder der letzten Gleichung sind stets positiv, da mit wachsendem s auch x und auch die Belastung P zunimmt.

Wird, wie es meist der Fall ist, die Horizontalspannung H als bekannt vorausgesetzt, und ist $\frac{dP}{dx}$ oder $\frac{dP}{ds} = \frac{dP}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}$ oder die Belastung P als eine Function einer oder zweier der Coordinaten xy gegeben, so kann man (eventuell mit Zuhilfenahme der bekannten Relation $ds^2 = dx^2 + dy^2$) durch Integration der letzten für die hier behandelten Kettenlinien maßgebenden Gleichung:

$= H \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$ zur Gleichung der Kettenlinie gelangen. Die Annahmen $p_y = V$ und p lassen sich dann mittelst der Gleichungen (3) und (4) bestimmen.

Da ferner zufolge der Wahl x - und y -Achsen $\cos(ds, dP) = \mp \cos(y, ds) = \mp \frac{dy}{ds}$ ist, so ist, wenn durch S_P die spezifische Belastung d. i. die Belastung $\frac{dP}{ds}$ pro Längeneinheit bezeichnet wird, nach Gleichung 4, S. 264 $\frac{dp}{ds} = S_P \frac{dy}{ds}$, also allgemein $\frac{dp}{dy} = S_P$ und $-p_o = \int S_P \cdot dy$ (vergl. S. 279) . . . (6).

Ist S_o die spezifische Belastung im Scheitel und q_o der Krümmungshalbmesser der Kettenlinie für diesen Scheitel, so ist, da für den Scheitel $(ds, dP) = \mp \frac{\pi}{2}$ und $p = H$ ist, zufolge der zweiten Gleichung (4) S. 264 $S_o = \frac{H}{q_o}$, also $H = S_o q_o$. . . (7)

Dass man, wie dies schon früher erwähnt wurde, wenn die Beziehung zwischen dP und den Coordinaten x und y die gleiche bleibt, durch Drehung einer Kettenlinie in ihrer Ebene um 180° sofort von dem Falle eines herrschenden Zuges auf jenen des Druckes und umgekehrt übergehen kann, erhellt aus den obigen Ausführungen fort.

Anmerkung 3. Ist zwar die y -Achse die frühere, aber die x -Achse nicht horizontal, jedoch abermals derart gewählt, dass mit wachsendem x auch s zunimmt, so behalten offenbar für das nunmehrige schiefwinklige Achsensystem die Gleichungen (3), (4) und (5) abgesehen von dem den Elevationswinkel α enthaltenden Gliede ihre Gültigkeit; nur bedeuten dann V und das (stets positive) H nicht mehr die Vertical- und Horizontalspannung, sondern die zu den angenommenen schiefwinkligen Achsen parallelen Componenten der Spannung p , und immer ist P von jenem Punkte der Kettenlinie an zu rechnen, dessen Tangente der x -Achse parallel ist.

Das kinetische Analogon der belasteten Kettenlinien ist die Bewegung eines frei beweglichen materiellen Punktes unter der Einwirkung einer Kraft von constanter Richtung, die hier vertical nach unten anzunehmen ist, bei welcher Bewegung demnach die y -Componente p_y der Beschleunigung p je nach der Art der Spannung p den Wert $p_y = \mp p$ hat, während die componentale Beschleunigung $= \frac{dv_x}{dt} = 0$, also die horizontale Geschwindigkeitscomponente v_x constant ist. Eine jede solche Bewegung kann man sich zusammensetzt denken aus einer horizontalen gleichförmigen Bewegung mit constanter Geschwindigkeit v_x , für welche also $x = v_x t$ ist (wenn $= 0$ für $t = 0$ angenommen wird), und irgend einer der im § 30

bis 40 betrachteten geradlinigen Bewegung parallel zur y -Achse, deren Beschleunigung nunmehr durch p bezeichnet sei. Behufs der Identifizierung der Bahn mit der Kettenlinie einerseits und des geradlinigen Hodographen mit der Kräftelinie andererseits ist demgemäß nur zufolge der ersten Gleichung (8) S. 273 zu setzen:

$$\left. \begin{aligned} v_x = \frac{x}{t} = p_x = H = p \frac{dx}{ds}, \quad v_y = p_y = V = p \frac{dy}{ds}, \\ \text{also } t = \frac{x}{H}, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{H} \dots \end{aligned} \right\} (8)$$

während den Gleichungen (5) S. 271 zufolge $v = p$ und $p = p \frac{dP}{ds}$ oder, da nach (8) $p = H \cdot \frac{ds}{dx}$ gesetzt werden kann, auch $p = p \cdot \frac{dP}{ds} = H \cdot \frac{dP}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} = H \cdot \frac{dP}{dx}$ ist, was sich schon daraus ergibt, dass das Element $d\sigma$ des Hodographen den Wert $p \cdot dt$ und jenes der Kettenlinie den Wert dP hat, also $dP = p \cdot dt$ ist. Will man daher im vorliegenden Falle von der Bewegung eines Punktes in irgend einer krummen Bahn zu der mit dieser Bahn gleichgestellten Kettenlinie übergehen, so hat man nur die Zeit t , die Geschwindigkeitscomponenten v_x und v_y und die Beschleunigung p durch folgende Werte zu ersetzen:

$$t = \frac{x}{H}, \quad v_x = H, \quad v_y = V, \quad p = H \cdot \frac{dP}{dx} \dots (9).$$

So gelangt man z. B. unter der Voraussetzung, dass p constant ist, von den Gesetzen des schiefen Wurfes, wenn man etwa den Scheitel der parabolischen Bahn zum Anfangspunkte des Achsensystems wählt und demgemäß mit Beibehaltung der Bezeichnung des § 47 und der Fig. (69) S. 230 [nur x und y sind in Fig. 69 zu vertauschen] $p = g$, $v_x = v_0 \cos \alpha$, $x^2 = 2 \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \cdot y$ setzt, zu jener mit der parabolischen Bahn gleichgestellten Kettenlinie, bei welcher $\frac{dP}{dx} = \frac{g}{H}$, $v_0 \cos \alpha = H$, demnach, wenn die Belastung P vom Scheitel aus gerechnet wird, $P = \frac{g}{H} x$ ist, d. i. zu jener Kettenlinie, bei welcher die Belastung P eines beliebigen Bogens s stets der Horizontalprojection x desselben proportional ist, so dass, wenn die constante Belastung pro Längeneinheit dieser horizontalen Projection durch k bezeichnet wird, $\frac{g}{H} = k$, also $g = k \cdot H$ wird und demnach die obige Gleichung dieser Parabel die Form annimmt $x^2 = 2 \frac{H^2}{kH} y = 2 \frac{H}{k} y$ (vergl. § 52).

Ebenso kann man auch umgekehrt von den für eine bestimmte Kettenlinie gültigen Gleichungen, wofern man von denselben Beziehungen (9) Anwendung macht, sofort zu den für die Bewegung eines Punktes längs dieser Kettenlinie bestehenden Formeln gelangen (siehe S. 301). Erwägt man ferner, dass diese Bewegung aus den früher erwähnten geradlinigen Bewegungen längs der x - und y -Achse zusammengesetzt ist, so kann man auch die für die letztere geradlinige Bewegung, bei welcher nunmehr y den in der Dynamik der geradlinigen Bewegung früher durch s bezeichneten Weg und v_y die früher durch v bezeichnete Geschwindigkeit bedeuten, gültigen Bewegungsgesetze sofort durch dieselben Formeln ermitteln (siehe S. 302).

Man kann aber auch bei Anwendung derselben Gleichungen (9) aus den für irgend eine geradlinige Bewegung gefundenen Gesetzen, wofern man abermals durch y den Weg (s), durch v_y die Geschwindigkeit (v) und durch p die Beschleunigung dieser Bewegung bezeichnet, dadurch, dass man diese längs der y -Achse vor sich gehende Bewegung zusammensetzt mit einer gleichförmigen Bewegung längs der x -Achse, deren constante Geschwindigkeit v_x willkürlich gewählt wird, sofort die Beziehungen zwischen den Spannungen und den äusseren Kräften bei einer Kettenlinie ermitteln, deren Form mit der aus den beiden betrachteten Bewegungen resultierenden Bahn übereinstimmt (vergl. S. 303).

Da ferner zufolge der auf S. 10 und 11 entwickelten Auseinandersetzungen bei jeder Bewegung, welche längs der zur y -Achse eines rechtwinkligen Achsensystems gewählten Geraden mit der Beschleunigung p vor sich geht, die zugehörige Zeitwegcurve *Omaa'* (Fig. 2), deren Gleichung $y = f(x)$, respective $s = f(t)$ ist [wo y den Weg s , der bei der untersuchten geradlinigen Bewegung in der Zeit t zurückgelegt wird, bedeutet und $x = t$ ist], gleichfalls als die Bahn eines Punktes angesehen werden kann, dessen Bewegung aus einer Bewegung längs der horizontalen x -Achse deren constante Geschwindigkeit $v_x = \frac{dx}{dt} = 1$ ist, und aus der früher erwähnten Bewegung längs der y -Achse sich zusammensetzt, so kann man die obere Bemerkung auch auf die Zeitwegcurve einer beliebigen geradlinigen Bewegung in Anwendung bringen und diese Curve $y = f(x)$ mit einer Kettenlinie identificieren, nur muss in diesem Falle statt des Weges s und der Zeit t gesetzt werden: $t = x$ und $s = y$.

Die Geschwindigkeit dieser geradlinigen Bewegung ist $v = \frac{ds}{dt} = \frac{dy}{dx} = tg \alpha$, daher auch zufolge (8) $v = \frac{dy}{dx} = \frac{V}{H} = \frac{p_y}{H}$, während die Beschleunigung $p = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}$ der letzten Gleichung gemäss

dem Werte $p = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{H} \frac{dV}{dx} = \frac{1}{H} \frac{dP}{dx}$ (siehe Gleichung 5) gleichzusetzen ist. Fasst man das Gesagte zusammen, so ersieht man, dass man aus den Formeln, die für eine beliebige geradlinige Bewegung gültig sind, deren Bewegungsgesetz $s = f(t)$ ist, und bei welcher y den Weg s und v die Geschwindigkeit bedeutet, zu den entsprechenden Gleichungen, die für eine belastete Kettenlinie, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, bestehen, sofort gelangen kann, wenn man von den einfachen Beziehungen

$$s = y, \quad t = x, \quad v = \frac{dy}{dx} = tg \alpha = \frac{V}{H} \quad p = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{H} \cdot \frac{dP}{dx} \dots \quad (10)$$

Anwendung macht (siehe S. 309).

Die Form der Kettenlinie ist offenbar wesentlich abhängig von dem Gesetze, nach welchem die Belastung längs der Kettenlinie continuierlich vertheilt ist.

Um dies Gesetz graphisch darzustellen, construiere man auf der positiven Seite der horizontalen x -Achse eine Curve A , die derart beschaffen ist, dass die von dieser Curve, der Abscissenachse und zwei beliebigen verticalen Ordinaten z und z' eingeschlossene Fläche — die Belastungsfläche — der Belastung proportional ist, die jenem Theile der Kettenlinie angehört, der zwischen den erwähnten Ordinaten ED und $E'D'$ (Fig. 85) sich befindet; es ist dann, wenn durch q_f die frei wählbare Größe jener Belastung, welche durch die Flächeneinheit dargestellt ist, ferner durch z irgend eine der stets positiven verticalen Ordinaten der besagten Curve und durch ds das benachbarte, die Belastung dP tragende Element der Kettenlinie, ferner durch dx das zugehörige Element der x -Achse und schließlich durch dF die Größe des von dieser Curve A , ferner von $z, z' = z + dz$ und dx eingeschlossenen Flächenelementes (des Elements der Belastungsfläche) bezeichnet wird, $dP = q_f \cdot dF$ und, da $dF = z \cdot dx$ ist, auch

$$z = \frac{1}{q_f} \cdot \frac{dP}{dx} \dots \quad (11)$$

$\frac{dP}{dx}$ bedeutet hier wie auch in Gleichung (5), (9) und (10) die spezifische Belastung pro Längeneinheit der Horizontalprojection, so dass wegen $dP = S_P ds$ auch $\frac{dP}{dx} = S_P \cdot \frac{ds}{dx} = S_P \cdot \sec \alpha$ ist.

Wenn man nun die so gefundenen, den einzelnen Abscissen x entsprechenden Werte des z an die in der Kettenlinie OM (Fig. 87) gelegenen Endpunkte M der entsprechenden Ordinaten y der Kettenlinie in verticaler Lage, und zwar nach der convexen Seite der Kettenlinie, anfügt, so erhält man eine zweite Curve B ($O'M$ in

Fig. 87), die man, da dieselbe in Verbindung mit der Kettenlinie das Gesetz der Belastung darstellt, die Belastungscurve B der entsprechenden Kettenlinie K nennt, während wir die erstere Curve A die „auf eine horizontale Basis reducierte Belastungslinie“ nennen wollen. Die zwischen der Belastungscurve B , der Kettenlinie K und den Verticalen z und $z + dz$ gelegene Fläche ist offenbar ebenso wie oben durch $dF = z dx = \frac{1}{q_f} \cdot dP$ bestimmt, repräsentiert also ebenfalls die Belastung dP des Elementes ds der Kettenlinie.

Setzt man den Wert $\frac{dP}{dx} = H \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$ aus (5) in (11) ein, so findet

man
$$z = \frac{H}{q_f} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \dots (12)$$

Da nun zufolge der früher getroffenen Wahl für die positive y -Achse die convexe Seite der Kettenlinie stets jene Seite ist, nach welcher y abnimmt, so ist die verticale Ordinate Y der Belastungscurve B , die der Abscisse x entspricht, der obigen Entstehungsweise zufolge durch $Y = y - z$ bestimmt, so dass die Gleichung der Belastungscurve B ist:

$$Y = y - \frac{H}{q_f} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \dots (13)$$

Ist die Gestalt der Kettenlinie K , also auch deren Gleichung $y = f(x)$ und ferner das Verhältnis $\frac{H}{q_f}$ der in derselben herrschenden constanten Horizontalspannung H zur Belastung q_f gegeben, so ist für jedes x auch durch (12) und (13) z und Y eindeutig bestimmt; es entspricht demzufolge einer jeden Kettenlinie, wenn $\frac{H}{q_f}$ gegeben ist, eine ganz bestimmte Belastungscurve; jedoch entsprechen umgekehrt einer gegebenen Belastungslinie unzählige Kettenlinien, da bei gegebenem Y und $\frac{H}{q_f}$ sich y durch Integration der Differentialgleichung (13) ergibt, so dass das Resultat willkürlich wählbare Integrationsconstanten enthält.

Mittels des Wertes von z lässt sich auch der Krümmungshalbmesser ϱ der Kettenlinie leicht ausdrücken. Da nämlich bei jeder Curve $\frac{1}{\varrho} = \cos^3 \alpha \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$ ist, so ergibt sich mit Hilfe der Gleichung (12), dass $\varrho = \frac{H}{q_f} \cdot \frac{1}{z \cos^3 \alpha}$ ist. Für den Scheitel ist $\alpha = 0$, also $\varrho_0 z_0 = \frac{H}{q_f}$, daher der Gleichung (7) gemäss $z_0 = \frac{S_0}{q_f}$

Die Bedeutung der Belastungcurve B in der Kinetik, wenn die Kettenlinie K mit der Bahn eines Punktes identificiert wird, wird sofort klar, wenn man in die obigen Gleichungen zufolge (9) den Wert $dP = p \cdot \frac{dx}{H} = p \cdot dt$ einführt; es ist dementsprechend $dF = \frac{dP}{q_f} = \frac{p \cdot dt}{q_f}$ und $F = \frac{1}{q_f} \int p \cdot dt$; es ist sonach die zwischen der Curve B und der Bahn des Punktes gelegene Fläche dem Kraftantriebe bei der Bewegung dieses Punktes proportional.

Dividirt man ferner die letzte Gleichung (9) durch (11), so ergibt sich für die Beschleunigung p der Wert

$$p = H q_f \cdot z \quad \dots \quad (14)$$

d. h. es ist die Ordinate z der resultierenden Beschleunigung p des längs der Curve K sich bewegenden Punktes proportional.

Anmerkung 4. Zur graphischen Darstellung des Belastungsgesetzes kann man sich auch jener Curve μM , Fig. 44, Seite 103, bedienen, die mit der Zeitgeschwindigkeitcurve der geradlinigen Bewegung, welche längs der y -Achse vor sich geht, übereinstimmt. In diesem Falle ist die Abscisse On des laufenden Punktes m dieser Curve der Abscisse x der Kettenlinie und die Ordinate nm des Punktes m der vom Scheitel der Kettenlinie aus gerechneten Belastung P des Bogens s , also auch der gleichen Verticalspannung V direct proportional, denn es ist nach Fig. 44 und nach Gleichung (9), S. 288, $\overline{On} = t = \frac{x}{H}$ und $\overline{nm} = v_y = p_y = V = P$. Wird die y -Achse durch den Scheitel der Kettenlinie gelegt, so ist für $x = 0$ auch $P = 0$, also in der Fig. 44 $O\mu = 0$, d. h. die Curve μM geht dann durch den Anfangspunkt O . Bei dieser Curve nimmt dann die auf Seite 103 betrachtete, zwischen den Coordinatenachsen, der laufenden Ordinate und der Curve gelegene Fläche Φ in derselben Weise zu wie die Ordinate y in der entsprechenden Kettenlinie, indem

$$\Phi = \int_0^x v_y \cdot dt = \int_0^x \frac{P}{H} \cdot dx = \frac{1}{H} \int_0^x P \cdot dx \quad \text{oder da} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{V}{H} = \frac{P}{H}, \quad \text{also} \quad P dx = H dy$$

ist, auch $\Phi = \int_{y_0}^y dy = y - y_0$, wo y_0 die Ordinate des Scheitels der Kettenlinie

bedeutet.

Anmerkung 5. Entspricht einem bestimmten Gesetze der Vertheilung der continuierlichen Belastung und einer bestimmten Horizontalspannung eine bestimmte Form der Kettenlinie und tritt in irgend einem Punkte M der Kettenlinie zu der continuierlichen Belastung der Kette eine endliche Belastung Q hinzu, so können die dem Punkte M beiderseits benachbarten Elemente der Kettenlinie nicht mehr in einer stetig gekrümmten Curve gelegen sein, sondern müssen einen endlichen Winkel einschließen, da die Spannungen dieser Elemente der Last Q das Gleichgewicht halten müssen (nach Gleichung [I], S. 252). Die durch die entstandene Ecke (Spitze) der Kettenlinie getrennten Theile gehören ferner, da in beiden Theilen sowohl das erwähnte Gesetz für die stetige Belastung, als auch

Horizontalspannung dieselben sind, wohl derselben stetig gekrümmten Curve, an verschiedenen Theilen derselben an, und es lassen sich diese Theile am besten so bestimmen, dass man an die der alleinigen continuierlichen Belastung entsprechende, continuierlich gekrümmte Kettenlinie parallele Tangenten zieht zu jenen Strahlen des Kräftepolygons, die vom Pole C nach dem Anfangs- und Endpunkte der die Kraft Q in diesem Kräftepolygon darstellenden Strecke führt sind, ferner den zwischen den so erhaltenen Berührungspunkten gelegenen Theil der Curve eliminiert und die übrigbleibenden Curventheile in der Ebene der Curve parallel verschiebt, bis die oberwähnten Berührungspunkte sammentreffen.

51. Die gemeine Kettenlinie und jene Kettenlinien überhaupt, deren Belastungslinie geradlinig ist, nebst Anwendung auf analoge kinetische Probleme.

Jene Kettenlinie, bei welcher die spezifische Belastung $p = \frac{dP}{ds}$ einen constanten Wert k hat, oder mit anderen Worten, jene Kettenlinie, bei welcher gleichen Bogenlängen in der ganzen Ausdehnung derselben auch gleiche Belastungen entsprechen, oder, was dasselbe besagt, bei welcher die Belastung der Bogenlänge direct proportional ist, wird eine gemeine Kettenlinie oder Kettenlinie im engeren Sinne des Wortes genannt.

Dieser Definition entsprechend ist, wenn, wie früher, P die der Bogenlänge s vom Scheitel A der Kettenlinie aus gerechneten Bogenlänge s entsprechende Belastung bedeutet, $P = k \cdot s$.

Ein ungemein dünner homogener Faden oder eine dünne feine Kette aus einer homogenen Substanz, deren Dicke durchwegs die gleiche ist, nimmt, wenn dieselben an zwei Stellen festgehalten und im übrigen der eigenen Schwere überlassen werden, im Gleichgewichtszustande die Form einer gemeinen Kettenlinie an, und zwar bedeutet $S_p = k$ in diesem Falle das constante Gewicht pro Längeneinheit, und die in der Kettenlinie herrschende Spannung ist dann eine Zugspannung.

Der letzten Gleichung und der Gleichung (3) S. 286 gemäß ist

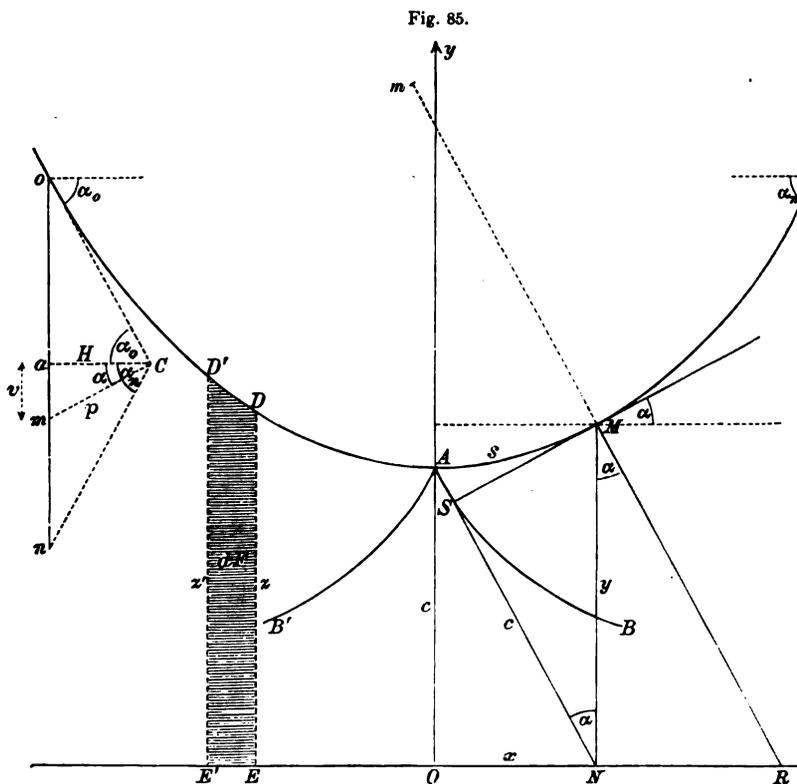
$$p_y = V = p \sin \alpha = P = k \cdot s \quad (1).$$

Diese Gleichung besagt eben, dass die der Verticalspannung V entsprechende Belastung P der Länge s direct proportional ist.

Ist durch c jene constante Bogenlänge der Kettenlinie bezeichnet, deren Belastung der constanten Horizontalspannung $p_x = H$ gleichkommt, so ist nach (1)

$$p_x = H = k \cdot c \quad (2)$$

Es sei Fig. 85 eine gemeine Kettenlinie, A deren Scheitel, das dieser Kettenlinie entsprechende Kräftepolygon und C dessen Zur positiven Ordinatenachse sei, wie früher, wenn die Kette Zug beansprucht ist, die durch den Scheitel vertical nach auf (bei einer Stützzlinie nach abwärts) geführte Achse und zur Abscissenachse die in der Entfernung c , die als Parameter bezeichnet



unterhalb (bei einer Stützzlinie oberhalb) des Scheitels in der Ebene der Kettenlinie gelegene horizontale Achse, die man die Directrix der Kettenlinie nennt, angenommen.

Da $V = H \operatorname{tg} \alpha$ ist, so ist auch nach (1) und (2)

$$s = c \operatorname{tg} \alpha \dots (3)$$

Der Gleichung (6) S. 287 zufolge ist für das hier gewählte Achsensystem allgemein $dp = S_p dy = k \cdot dy$. Integriert man diese Gleichung für die Bogenlänge AM (Fig. 85), so ist, da in A die Spannung $H = kc$ und die Ordinate $y = c$ ist, $p - kc = k[y - c]$,

$$p = k \cdot y \dots (4),$$

d. h. die Spannung in irgend einem Punkte der Kettenlinie ist gleich der Belastung eines der Ordinate an Größe gleichen Bogens derselben.

Da nun $p = H \sec \alpha = k \cdot c \sec \alpha$ ist, so lehren die Gleichungen (4) und (3), dass

$$y = c \sec \alpha = \sqrt{c^2 + c^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{c^2 + s^2} \quad (5)$$

ist. Dieselbe Gleichung hätte man auch leicht gefunden durch Integration der Gleichung $\frac{dy}{ds} = \sin \alpha = \frac{V}{p} = \frac{k \cdot s}{\sqrt{V^2 + H^2}} = \frac{s}{\sqrt{s^2 + c^2}}$.

Führt man demnach vom Fußpunkte N der Ordinate eines Punktes M der Kettenlinie die Normale NS auf die Tangente MS für diesen Punkt, so dass wegen der normalen Lagen der Schenkeln $\sphericalangle SNM = \alpha$ ist, so ist $NS = y \cos \alpha$ oder $y = NS \cdot \sec \alpha$, daher $NS = c$.

Man kann sonach in einem gegebenen Punkte M der Kettenlinie eine Tangente einfach derart construieren, dass man M auf die x -Achse orthogonal projiziert, um diese Projection N als Centrum einen Kreis mit dem constanten Radius c beschreibt und an diesen von M aus eine Tangente MS führt.

Die Gleichung (5) oder (3) lehrt aber auch, dass $MS = s = \text{arc } AM$ ist. Denkt man sich demnach um die halbe Kettenlinie vom Scheitel A aus einen undehnbaren gespannten Faden geschlungen und diesen hierauf von A an bei andauernder Spannung allmählich abgewickelt (indem dabei das andere Ende des Fadens festgehalten wird), so stellt S die Lage des laufenden Punktes der durch den Endpunkt des Fadens beschriebenen Curve ASB (bezw. AB') vor, mit anderen Worten es ist S der laufende Punkt der Evolvente $B'AB$ der gemeinen Kettenlinie. Da das dem Punkte S benachbarte Element dieser Evolvente durch eine augenblickliche Rotation des geradlinigen Fadentheiles MS um den Punkt M entsteht und dieses Element des zugehörigen Rotationskreises auf dem Radius MS senkrecht stehen muss, so muss dasselbe in die Richtung SN fallen, oder mit anderen Worten, es ist NS die Tangente der Evolvente AB .

Dieselbe Evolvente würde demnach erzeugt werden von dem Endpunkte eines schwerlosen Stäbchens von der constanten Länge $NS = c$, das ursprünglich die Lage OA hat, und dessen Endpunkt N längs der x -Achse durch Ausführung minimaler Stöße in der Richtung dieser Achse bewegt wird, so dass der Stab in Folge der Fortpflanzung der Stöße längs des Stäbchens sich derart bewegen muss, dass die Bewegungsrichtung des Endpunktes S stets in die Längsrichtung des Stäbchens fällt.

Man bezeichnet eine auf die letzte Art entstehende Curve ASB demgemäß als die (Huyghens'sche) Tractorie oder Zuglinie

(tractrice). Die Evolvente einer gemeinen Kettenlinie ist sonach Zuglinie.

Um auch x durch s auszudrücken, beachte man, dass $\cos \alpha = \frac{dx}{ds}$ und nach (5) auch $\cos \alpha = \frac{c}{y} = \frac{c}{\sqrt{s^2 + c^2}}$, daher

$$dx = c \frac{ds}{\sqrt{s^2 + c^2}} \quad (6)$$

ist. Um diese Gleichung zu integrieren, führe man als Hilfsvariable das Verhältnis zwischen der Summe der variablen Spannungen p und zur constanten Spannung H ein, also

$$u = \frac{p + V}{H} = \frac{ky + ks}{kc} = \frac{y + s}{c} = \frac{\sqrt{s^2 + c^2} + s}{c} \quad (7)$$

Dann ist $du = \frac{1}{c} \left[\frac{s}{\sqrt{s^2 + c^2}} + 1 \right] ds = \frac{s + \sqrt{s^2 + c^2}}{c \cdot \sqrt{s^2 + c^2}} ds = \frac{u \cdot ds}{\sqrt{s^2 + c^2}}$, daher $\frac{du}{u} = \frac{ds}{\sqrt{c^2 + s^2}}$, somit nach (6)

$$dx = c \frac{du}{u} \text{ und } x = c \log \text{ nat } u, \text{ daher } u = e^{\frac{x}{c}} \quad (8)$$

Die Integrationsconstante ist Null, weil für $x = 0$, d. i. für die Scheitel $s = 0$, also nach (7) $u = 1$, sonach $\log \text{ nat } u = 0$ ist.

Aus (7) und (8) ergibt sich

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{c}} &= \frac{\sqrt{s^2 + c^2} + s}{c} = \frac{y + s}{c} \\ e^{-\frac{x}{c}} &= \frac{1}{e^{\frac{x}{c}}} = \frac{c}{\sqrt{s^2 + c^2} + s} = \frac{\sqrt{s^2 + c^2} - s}{c} = \frac{y - s}{c} \end{aligned}$$

Durch Addition und Subtraction der beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{c}{2} \left[e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right] \\ s &= \frac{c}{2} \left[e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Die vorletzte Gleichung ist die bekannte Gleichung der gemeinen Kettenlinie in orthogonalen Coordinaten.

Bezeichnet man demgemäß durch $\sinh \varphi$, bzw. $\cosh \varphi$ die funktionalen Hyperbelfunctionen, nämlich den hyperbolischen Sinus, bezw. hyperbolischen Cosinus von φ (d. i. die Ordinate, bezw. Abscisse eines Punktes m einer gleichseitigen Hyperbel, deren reelle, in die Richtu

scissenachse eines rechtwinkligen Achsensystems fallende Halb- der Längeneinheit gleichkommt, wobei ferner $\frac{\varphi}{2}$ die Fläche be- , welche von der Hyperbel, der eben erwähnten Halbachse und vom Hyperbelmittelpunkte (Coordinatenanfangspunkte O) nach Punkte m gezogenen Leitstrahle Om begrenzt wird), so ist den ungen (9) zufolge

$$y = c \cdot \cosh\left(\frac{x}{c}\right) \text{ und } s = c \cdot \sinh\left(\frac{x}{c}\right) \dots (10)$$

Setzt man in die aus (7) und (8) gefolgerte Gleichung $e^{\frac{x}{c}} = \frac{1+s}{c}$ für y und s die Werte aus 5 und 3, nämlich $y = c \sec \alpha$ $= c \cdot \operatorname{tg} \alpha$ ein, so findet man

$$x = c \cdot \log \operatorname{nat} [\operatorname{tg} \alpha + \sec \alpha] = c \cdot l \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right] (11)$$

Die resultierende Spannung p und die Verticalspannung V sind Gleichungen (1), (4), (9) und (2) entsprechend ausgedrückt durch

$$\left. \begin{aligned} p = ky &= \frac{kc}{2} \left[e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right] = H \cdot \cosh\left(\frac{x}{c}\right) \\ V = k \cdot s &= \frac{kc}{2} \left[e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}} \right] = H \cdot \sinh\left(\frac{x}{c}\right) \end{aligned} \right\} (12)$$

der Elevationswinkel α ist der Fig. (85) gemäß bestimmt durch

$$\left. \begin{aligned} \sec \alpha = \frac{p}{H} &= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right) = \cosh\left(\frac{x}{c}\right) \\ \operatorname{tang} \alpha = \frac{V}{H} &= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}} \right) = \sinh\left(\frac{x}{c}\right) \\ \sin \alpha = \frac{V}{p} &= \frac{e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}}{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}} = \frac{\sinh\left(\frac{x}{c}\right)}{\cosh\left(\frac{x}{c}\right)} = \operatorname{tgh}\left(\frac{x}{c}\right) \end{aligned} \right\} (13)$$

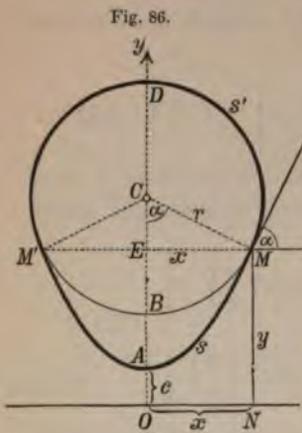
Der Krümmungshalbmesser ρ der Kettenlinie für den Punkt M ifolge der zweiten Gleichung (4) S. 264 $\rho = \frac{p}{k \cos \alpha}$ oder, da (4) $p = ky$ ist,

$$\rho = \frac{y}{\cos \alpha} = y \cdot \sec \alpha = c \sec^2 \alpha \dots (14)$$

Für $\alpha = 0$ ist $\rho = c$, d. h. es ist der Parameter c dem Krüm- gshalbmesser für den Scheitel gleich.

Wenn man daher die Normale MR des Punktes M ver-
bis zum Durchschnitte R mit der Abscissenachse, so ist $MR = y \sec \alpha$
und es liegt somit der Krümmungsmittelpunkt m (Fig. 85) in d
längerung von MR nach der entgegengesetzten Seite über M
in einer Entfernung mM von M , die gleich MR ist.

Mit Hilfe der Gleichungen 3, 5, 9, 10, 11 und 13 lassen sich
zwei der fünf Größen c, x, y, s, α gegeben sind, die drei a
berechnen, und wenn außerdem die Belastung k pro Längeneinl
kannt ist, mittels der Gleichungen $H = kc, V = ks, p = k$
die drei Spannungen HVp für jeden Punkt der Kettenlinie besti



Anmerkung. So müssen z. B., we
homogene in sich geschlossene Kette, we
Theil um eine feststehende vertikale Kreissche
Radius $\overline{CM} = r$ geschlungen ist, zum andere
frei herabhängt (Fig. 86) und die nur ihren
gewichte unterworfen ist, behandelt werden so
dem Gewichte k der Kette pro Längeneinheit (d
fischen Belastung) zwei der genannten Größen
sein. Ist etwa r und der dem Berührungspu
(dem Grenzpunkte zwischen der kreisförmigen
linie MDM' und der frei herabhängenden g
Kettenlinie MAM') zugehörige Mittelpunkt
welchen der zum Berührungspunkte gezogen
 CM der Scheibe mit dem verticalen Dure
 $DCAO$ derselben einschließt, und welche
bar dem Elevationswinkel α im Punkte M
ist, gegeben, so ist, wenn die frühere Beze

beibehalten wird, außer α noch $x = r \sin \alpha$ bekannt. Demnach ist u

$$\frac{OA}{OC} = c = \frac{r \sin \alpha}{l \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)}$$

der Parameter und für den Punkt M der g

$$\frac{NM}{OC} = y = c \sec \alpha = \frac{r \operatorname{tg} \alpha}{l \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)}$$

Kettenlinie nach (5) $\frac{NM}{OC} = y = c \sec \alpha = \frac{r \operatorname{tg} \alpha}{l \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)}$, ferner nach (3)

$$= s = c \operatorname{tg} \alpha = r \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \sec \alpha}{l \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)}$$

während $\operatorname{arc} \overline{MD} = s' = r(\pi - \alpha)$ ist. I

ist auch die gesammte Länge l der endlosen Kettenlinie $l = 2(s + s')$,
 $\overline{OC} = r \cos \alpha + y$, $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = r \cos \alpha + y - c$ u. s. w. bestimm
Horizontalspannung H in der gemeinen Kettenlinie ist $H = kc$, die Spa
in M ist $p = ky$, die Spannung p_D im obersten Scheitelpunkte D (zufolge
chung $p - p_0 = S_{E.n}$ auf S. 279 oder der Gleichung (6), S. 287) ist $p_D = p + k$
 $= ky + k(r + r \cos \alpha)$ u. s. w. Ebenso wäre umgekehrt die Aufgabe be
wenn außer k und r etwa die gesammte Länge l der endlosen Kette
wäre. Bemerkenswert ist, dass, wenn auch die freie Kettenlinie MAM'
vorgeschriebenen Kreiskettenlinie MDM' im Punkte M eine gemeinsa
gente haben, die Krümmungshalbmesser in diesem Punkte nicht übereins
da der Krümmungshalbmesser der freihängenden Kettenlinie nach (14) d

$$e = \frac{y}{\cos \alpha} = r \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \sec \alpha}{l \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)}$$

hat, während die Kreislinie den Krümmu
messer r besitzt.

Bei technischen Anwendungen ist meist die Spannung p im Verhältnisse zur Belastung P , also auch zur Verticalspannung V , sehr bedeutend, so dass in dem Kräftedreiecke Cam (Fig. 85 S. 294) die verticale Kathete sehr klein ist im Verhältnisse zu den beiden anderen nur wenig von einander verschiedenen Seiten desselben, also auch α sehr klein ist. Da demnach bei solchen stark gespannten Kettenlinien das Verhältniß $\frac{p+V}{H}$, somit den Gleichungen (7) und (8) zufolge u , d. i. $e^{\frac{x}{c}}$ oder $\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha$ nahe an 1 liegt, so hat $\frac{x}{c}$ in diesem Falle einen kleinen, nicht viel von Null verschiedenen Zahlwert. Entwickelt man daher behufs der Bestimmung von y und s mittels der Gleichungen (9) die daselbst vorkommenden Exponentialgrößen $e^{-\frac{x}{c}}$ und $e^{\frac{x}{c}}$ in die bekannten Exponentialreihen, die in diesem Falle stark convergieren, und vernachlässigt alle Potenzen von $\frac{x}{c}$, die höher sind als die vierte, so findet man sofort

$$\left. \begin{aligned} y &= c \left[1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{c^2} + \frac{1}{24} \frac{x^4}{c^4} \right] \\ s &= x \left[1 + \frac{1}{6} \frac{x^2}{c^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Verlegt man zudem den Anfangspunkt des Coordinatensystems in den Scheitel und nimmt die horizontale Scheiteltangente zur X-Achse eines neuen orthogonalen Achsensystems XY an, so lautet die Gleichung der Kettenlinie für dasselbe, da $x = X$ und $y = Y + c$ ist, näherungsweise

$$Y = y - c = \frac{X^2}{2c} \left[1 + \frac{1}{12} \frac{X^2}{c^2} \right] \quad (16)$$

unterscheidet sich daher nur wenig von der Parabelgleichung $X^2 = 2cy$, während die strengrichtige Gleichung für dieses Achsensystem nach (9) lauten würde

$$Y = \frac{c}{2} \left[e^{\frac{X}{c}} - 2 + e^{-\frac{X}{c}} \right] = \frac{c}{2} \left[e^{\frac{X}{2c}} - e^{-\frac{X}{2c}} \right]^2$$

Ist eine Kettenlinie, etwa die rechts vom Scheitel A (Fig. 85) gelegene Hälfte derselben zu construieren, wenn z. B. die Belastung k pro Längeneinheit, ferner die Länge s dieser Hälfte und die Horizontalspannung H , daher nach (2) auch $c = \frac{H}{k}$ gegeben sind, so hat man zufolge § 50 von dem entsprechenden Kräftepolygon, beziehungsweise der unteren Hälfte aCn (Fig. 85) desselben auszugehen. Da es sich bei jedem Kräftepolygon nur um das Verhältniß der die Kräfte dar-

stellenden Seiten handelt und $aC : an = H : P = kc : ks = c : s$ ist, so ist es am einfachsten, die verticale Kräftelinie an gleich der gegebenen Länge s und $\overline{aC} = c$ zu wählen. Wird nun die Länge $s = \overline{an}$ der Kettenlinie in n gleiche Theile $\overline{a1} = \overline{12} = \overline{23} = \overline{34} = \dots = \frac{s}{n}$ getheilt und würde die Belastung eines jeden dieser Theile in der Kettenlinie statt auf diesem Theile stetig vertheilt zu sein, in dem rechts gelegenen Endpunkte (Knotenpunkt) angreifen, so würde diesem Falle ein nach § 50 leicht construierbares Kettenpolygon $AI II III IV \dots$ entsprechen, wo $AI \parallel aC$, $III \parallel 1C$, $IIII \parallel 2C \dots$ und $AI = III = \dots = IIII = \dots = s : n$ ist. Würden andererseits diese Belastungen eines jeden Elementes auf den links gelegenen Endpunkt desselben einwirken, so wäre $AI II' III' IV' \dots$ das Kettenpolygon, wo $AI' \parallel 1C$, $I II' \parallel 2C$, $II' III' \parallel 3C \dots$ und $AI' = I II' = II' III' = \dots = s : n$ ist. Da nun die Belastung eines jeden Elements weder auf den linken, noch den rechten Endpunkt wirkt, sondern zwischen beiden gleichförmig vertheilt ist, so ist der Endpunkt des ersten Elementes weder in I noch I' , sondern zwischen beiden, der des zweiten zwischen II und II' u. s. w. Wenn man daher die Geraden II' , III' , $IIII'$. . . halbiert und durch A und diese Mittelpunkte eine continuierlich gekrümmte Linie führt, so wird diese der Form der verlangten Kettenlinie um so genauer entsprechen, einen je größeren Wert man für die ganze Zahl n annimmt.

Übrigens gibt ein an zwei Stellen befestigter und sonst freihängender Faden, beziehungsweise eine feingliedrige Kette am einfachsten die verschiedenen möglichen Formen einer gemeinen Kettenlinie an. Je weiter bei derselben Kettenlänge $2s$ die in derselben Horizontalen angenommenen Befestigungspunkte von einander entfernt ist, je größer sonach die sogenannte Spannweite $2x$ ist, desto kleiner muss $\frac{s}{x}$, desto kleiner nach Gleichung 15 auch die dem $\frac{s}{x}$ nach (15) gleiche Summe der Reihe $1 + \frac{1}{6} \frac{x^2}{c^2} + \frac{1}{120} \frac{x^4}{c^4} + \dots$ werden, was, da x größer geworden ist, nur dann möglich ist, wenn der Parameter c in einem noch größeren Verhältnisse zugenommen hat, es muss sonach zufolge (3), da sich s nicht geändert hat, α kleiner, dagegen bei derselben specifischen Belastung k der Kette die Horizontalspannung $H = kc$ größer geworden sein. Könnte die Kettenlinie geradlinig gespannt, also $x = s$ werden, so müssten der letzten Reihe zufolge $\frac{x}{c} = 0$, also $c = \infty$, sonach auch die Horizontalspannung $H = kc$ unendlich groß werden.

Würden zu der continuierlichen gleichförmigen Belastung der Kettenlinie noch in besonderen Knotenpunkten der Kettenlinie endliche

Belastungen hinzutreten, so ergibt sich auch für diesen Fall die constructive Bestimmung der Kettenlinie aus § 50 auf einfache Weise. Die Horizontalspannung H müsste auch in diesem Falle eine constante in der ganzen Kettenlinie sein, und die letztere müsste dann aus mehreren in den erwähnten Knotenpunkten zusammentreffenden gemeinen Kettenlinien bestehen, die zwar, weil H , daher auch c constant ist, der Gleichung (9) entsprechend congruent sind (wie dies schon im früheren Paragraph angedeutet wurde), deren Scheitel jedoch verschiedene Lagen in der Verticalebene haben, so dass jede folgende Kettenlinie nur gleichsam verschoben erscheint (vergl. letzte Anm., S. 292). Die mathematische Behandlung dieses Falles auf Grund der bisher abgeleiteten Gleichungen unterliegt keinen Schwierigkeiten.

Die in diesem Paragraph abgeleiteten Gesetze finden auch Anwendung auf den Fall, in welchem in der Kettenlinie statt der Zugspannung durchwegs Druckspannung herrscht; man hat nur dann die durch den Scheitel, d. i. den obersten Punkt der Kettenlinie nach abwärts geführte Verticale zur positiven Ordinatenachse zu wählen. Die Fig. 85 hat man, damit sie diesen Fall repräsentiere, in ihrer Ebene um 180° herumgedreht zu denken, um die entsprechende Stützzlinie zu erhalten.

Das kinetische Analogon der gemeinen Kettenlinie ist die Bewegung eines materiellen Punktes in derselben, zu deren Erzeugung eine stets mit der positiven y -Achse gleichgerichtete beschleunigende Kraft nothwendig ist, deren Größe der Gleichung (5) S. 271 zufolge durch $p = p \cdot S_p$ bestimmt ist, wofern nach Gleichung (2) $S_p = k = \frac{H}{c}$ und nach Gleichung (4) $p = k \cdot y = \frac{H}{c} y$ eingesetzt wird, so dass $p = \frac{H^2}{c^2} \cdot y$ oder

$$p = k^2 y \dots (17)$$

ist. Es lässt sich sonach aus den hier erörterten Gesetzen der gemeinen Kettenlinie umgekehrt das kinetische Gesetz folgern: Bewegt sich ein materieller Punkt von der Masse m unter der Einwirkung einer Kraft $P = m p = m k^2 y$ von constanter, mit der positiven y -Achse übereinstimmender Richtung, und ist diese Kraft dem Abstände y von einer bestimmten Achse — der x -Achse — proportional, und ist schließlich die Anfangsgeschwindigkeit v_o — ähnlich wie beim schiefen Wurfe — mit dieser Kraft weder gleich- noch entgegengesetzt gerichtet, so erfolgt die Bewegung unter gewissen Umständen in einer gemeinen Kettenlinie. Ist nämlich α_o der gegebene Richtungswinkel der Anfangsgeschwindigkeit v_o bezüglich der positiven x -Achse, so ist für den Anfangspunkt $v_x = v_o \cos \alpha_o$, daher der Gleichung (8) S. 273 und (5) S. 271 und den Gleichungen dieses Paragraphs zufolge $v_o \cos \alpha_o = p_x = H = kc$, $v_o = p_o = ky_o$, wenn durch y_o die Ordinate des Anfangspunktes bezeichnet wird.

Es ist sonach
$$k = \frac{v_o}{y_o}, kc = v_o \cos \alpha_o \dots (18)$$

Aus der vorletzten Gleichung ist zu ersehen, dass, wenn die Bewegung in einer gemeinen Kettenlinie stattfinden soll, zu den obigen Bedingungen noch

die hinzutreten muss, dass k , d. i. zufolge (17) die Quadratwurzel aus dem constanten Verhältnis der beschleunigenden Kraft p zur Ordinate y dem Verhältnisse der Anfangsgeschwindigkeit v_0 zur Anfangsordinate y gleich sein muss.

Der Parameter c der Kettenlinie ist von dem Richtungswinkel α_0 der Anfangsgeschwindigkeit abhängig, und zwar zufolge (18)

$$c = \frac{v_0 \cos \alpha_0}{k} \quad \dots \quad (19)$$

d. h. der Parameter ist das Verhältnis aus der Horizontalcomponente der Anfangsgeschwindigkeit zu der constanten Zahl $k = \sqrt{\frac{p}{y}}$.

Die Geschwindigkeit v in einem beliebigen Punkte der Bahn ist nach Gleichung (5), S. 271

$$v = p = ky \quad \dots \quad (20)$$

d. h. auch diese ist der Ordinate y proportional, so dass das Verhältnis der Beschleunigung p zur Geschwindigkeit v den constanten Wert k hat u. s. w. Der Scheitel der Kettenlinie ist durch die der Anfangsordinate y_0 entsprechende Abscisse, welche nach der Bestimmung des Parameters c aus der Gleichung (19) durch die erste der Gleichung (9) oder auch, da α_0 gegeben ist, mittels der Gleichung (11) gefunden werden kann, bestimmt.

Da die Bewegung aus einer verticalen Seitenbewegung, die unter der Einwirkung der Kraft $P = mk^2 y$ vor sich geht, und einer gleichförmigen horizontalen Bewegung, deren Geschwindigkeit nach Gleichung (19) $v_0 \cos \alpha_0 = kc$ ist, zusammengesetzt ist, so lässt sich die Zeit τ , wenn dieselbe von dem Momente an gezählt wird, in welchem sich das Bewegliche in dem Scheitel der Kettenlinie befindet, aus der Gleichung $\tau = \frac{x}{v_0 \cos \alpha_0} = \frac{x}{kc}$ bestimmen, so dass $x = kc\tau$ und, wie die Substitution in (9) lehrt, $y = \frac{c}{2} \left[e^{k\tau} + e^{-k\tau} \right]$ ist. Ebenso lässt sich aus (9) der bei der resultierenden Bewegung zurückgelegte Weg $s = \frac{c}{2} \left(e^{k\tau} - e^{-k\tau} \right)$ ermitteln. Die verticale Geschwindigkeitscomponente v_y ergibt sich nach Gleichung (8), S. 273 und Gleichung (1), S. 293 aus $v_y = p_y = ks = \frac{ck}{2} \left(e^{k\tau} - e^{-k\tau} \right) = kt$.

Die eben gefundenen Werte von y und v_y , die für die obenerwähnte verticale geradlinige Seitenbewegung Giltigkeit haben, charakterisieren demnach auch jene geradlinige Bewegung, die sich ergibt, wenn auf einen längs der positiven y -Achse sich bewegenden Punkt eine Kraft, die die Richtung dieser positiven y -Achse hat, also vom Anfangspunkte O weggerichtet ist, mit anderen Worten eine abstoßende Kraft $P = mk^2 y$ einwirkt, die dem Abstände y von diesem Anfangspunkte direct proportional ist. Bestehen für diese Bewegung zur Zeit $\tau = \tau_0$ die Werte $y = y_0$ und $v_y = c_y$, so ist den letzten Gleichungen zufolge

$$y_0 = \frac{c}{2} \left[e^{k\tau_0} + e^{-k\tau_0} \right], \quad c_y = \frac{ck}{2} \left[e^{k\tau_0} - e^{-k\tau_0} \right],$$

und aus diesen Gleichungen ergibt sich $c \cdot e^{k\tau_0} = y_0 + \frac{c_y}{k}$ und $c \cdot e^{-k\tau_0} = y_0 - \frac{c_y}{k}$. Rechnet man demnach die

Zeit t von jenem Anfangsmomente an, für welchen $y = y_0$ und $v_y = c_y$ gegeben ist, so ist $\tau = \tau_0 + t$. Setzt man nun diese Werte von τ , $c e^{k\tau_0}$, $c e^{-k\tau_0}$ in die durch die letzten allgemeinen Gleichungen bestimmten Werte von y und v_y ein, so findet man

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \left[\left(y_0 + \frac{c_y}{k} \right) e^{kt} + \left(y_0 - \frac{c_y}{k} \right) e^{-kt} \right] \\ v_y &= \frac{1}{2} \left[\left(k y_0 + c_y \right) e^{kt} - \left(k y_0 - c_y \right) e^{-kt} \right] \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

liche Gleichungen übrigens nicht nur für den Fall, in welchem sich ein jeder Wert von c ergibt, also $y_0 > \frac{c_y^2}{k^2}$ ist, sondern allgemein gültig sind, denn nur, wie oben stets vorausgesetzt wurde, die abstoßende Kraft $P = mk^2 y$ dem Abstände vom fixen Punkte O direct proportional ist.

Setzt man nun wiederum die durch die Gleichungen (21) völlig bestimmte adlinige Bewegung längs der verticalen y -Achse mit einer gleichförmigen adlinigen Bewegung in horizontaler Richtung, deren Geschwindigkeit nicht mehr wie früher den bestimmten Wert $kc = \sqrt{k^2 y_0^2 - c_y^2}$, sondern einen beliebigen positiven constanten Wert c_x hat, so dass $x = c_x \cdot t$ wird, so erhält man eine allgemeine Bewegung, für welche wie früher $p = k^2 y$ ist, die jedoch nicht mehr an die besondere Bedingung der Proportionalität der Geschwindigkeit v und der Ordinate y , also an die Bedingung $v_0 = k y_0$ geknüpft ist. Diese Bewegung ist die Anfangsgeschwindigkeit $c_0 = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$, $\cos(x c_0) = \frac{c_x}{c_0}$, $\sin(x c_0) = \frac{c_y}{c_0}$, und dieselbe erfolgt nicht mehr in einer geraden Kettenlinie, sondern in einer Curve, die durch (21) bestimmt ist, wenn $t = \frac{x}{c_x}$ gesetzt

wird, so dass

$$y = \frac{1}{2} \left[\left(y_0 + \frac{c_y}{k} \right) e^{\frac{k}{c_x} x} + \left(y_0 - \frac{c_y}{k} \right) e^{-\frac{k}{c_x} x} \right] \dots \quad (22)$$

Diese Curve ist auch jene allgemeine Form der Kettenlinie (bezw. Stütze), für welche die Belastung pro Längeneinheit der Horizontalprojection, d. i. der Ordinate y der Kettenlinie direct proportional ist, also $\frac{dP}{dx} = q \cdot y$ ist, wo q einen constanten Factor bedeutet, denn es ist nach Gleichung (11) 290 und (14) S. 292 unter der letzten Voraussetzung $z = \frac{1}{q_f} \frac{dP}{dx} = \frac{q}{q_f} \cdot y$ und $H q_f z = q H \cdot y$, was mit der obigen allgemeinen Gleichung $p = k^2 y$ übereinstimmt; somit ist nur in der Gleichung (22) $k = \sqrt{q H}$ und nach Gleichung (8), 288 $c_x = H$, $c_y = V_0$ (wo V_0 die Verticalspannung für $y = y_0$ bedeutet) zu setzen.

Die Belastungcurve B der geraden Kettenlinie ist durch die Gleichung (13), S. 291 bestimmbar. Da nun zufolge (13), S. 297 $\frac{dy}{dx} =$

$$tg \alpha = \frac{1}{2} \left[e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}} \right], \text{ sonach } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2c} \left[e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right] = \frac{y}{c^2} \text{ ist,}$$

ist $Y = y - \frac{H}{q_f c^2} y$ oder, da nach (2) $c = \frac{H}{k}$, so ist auch $Y = y - \frac{H}{q_f H} y$. Wählt man demnach $\frac{H}{q_f}$ derart, dass dieser Quotient

sich dem Quadrate des Parameters c der Kettenlinie, also gleich dem Quadrate des Krümmungshalbmessers für den Mittelpunkt, so wird $Y = y - y = 0$, d. h. die Belastungslinie ist eine horizontale Gerade $E'EN$ (Fig. 85), und zwar identisch

mit der Directrix der gemeinen Kettenlinie. Bei willkürlicher Wahl von $\frac{H}{q_f}$ ist $Y = \left(1 - \frac{H}{q_f c^2}\right) y$, es sind also die Ordinaten Y der Belastungscurven den Ordinaten y der Kettenlinie proportional.

Die gemeine Kettenlinie ist nicht die einzige Kettenlinie, der eine gerade horizontale Belastungslinie entspricht, denn soll die horizontale Abscissenachse die Belastungslinie, also $Y = 0$ sein, so muss zufolge der Gleichung (13) und (12) S. 291 $y = z$ und daher nach (14), S. 292 $p = H q_f \cdot y = k^2 y$ sein, wo $k = \sqrt{H q_f}$ ist somit muss eine jede aus der Gleichung $p = k^2 y$ abgeleitete allgemeine Curve deren Gleichung (22) ist, eine solche Kettenlinie (Stützlinie) mit horizontaler Belastungslinie sein. Es ist nur, wie gesagt, $k = \sqrt{H q_f}$ und wie früher $c_x = H, c_y = V_0 = H \operatorname{tg} \alpha_0, v_y = p_y = V$ u. s. w. zu setzen, so dass die Gleichung (22) die Form annimmt:

$$y = \frac{1}{2} \left[\left(y_0 + \operatorname{tg} \alpha_0 \sqrt{\frac{H}{q_f}} \right) e^{x \sqrt{\frac{q_f}{H}}} + \left(y_0 - \operatorname{tg} \alpha_0 \sqrt{\frac{H}{q_f}} \right) e^{-x \sqrt{\frac{q_f}{H}}} \right] \quad (23)$$

Legt man die Ordinatenachse durch den Scheitel dieser Curve, dessen Ordinate durch c bezeichnet sei, setzt also $\alpha_0 = 0, y_0 = c, c_y = V_0 = 0$, so ist

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{c}{2} \left[e^{x \sqrt{\frac{q_f}{H}}} + e^{-x \sqrt{\frac{q_f}{H}}} \right] = c \operatorname{cosh} \left(x \sqrt{\frac{q_f}{H}} \right) \\ p_y = V &= \frac{1}{2} c \sqrt{H q_f} \left[e^{x \sqrt{\frac{q_f}{H}}} - e^{-x \sqrt{\frac{q_f}{H}}} \right] = \frac{1}{2} c \sqrt{H q_f} \operatorname{sinh} \left(x \sqrt{\frac{q_f}{H}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Für den besonderen Fall, dass $\sqrt{\frac{H}{q_f}} = y_0 = c$ ist, übergeht diese Kettenlinie in eine gemeine Kettenlinie.

Bezeichnet man durch z_0 die zwischen dem Scheitel irgend einer Kettenlinie K und der entsprechenden Belastungscurve B gelegene Verticale und durch ρ_0 den Krümmungshalbmesser der Kettenlinie für den Scheitel, so ist, da für den selben offenbar die Spannung $p = H$ und $\cos \alpha_0 = \frac{dx}{ds} = 1$, also $\frac{dP}{ds} = \frac{dP}{dx}$ und $\sin(ds, dP) = 1$ ist, nach Gleichung (4), S. 264 und Gleichung (11), S. 290 $\frac{H}{\rho_0} = \left(\frac{dP}{dx}\right)_0 = z_0 q_f$, also stets

$$\frac{H}{q_f} = \rho_0 z_0 \dots \quad (25)$$

zu setzen (siehe S. 291) und demnach kann die Gleichung der Kettenlinie (24) wenn als horizontale x -Achse die Belastungslinie, also $z_0 = c = y_0$ angenommen wird, auch in folgender Form geschrieben werden:

$$y = \frac{y_0}{2} \left[e^{\frac{x}{\sqrt{\rho_0 y_0}}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{\rho_0 y_0}}} \right]$$

Für die gemeine Kettenlinie ist $y_0 = \rho_0 = c$.

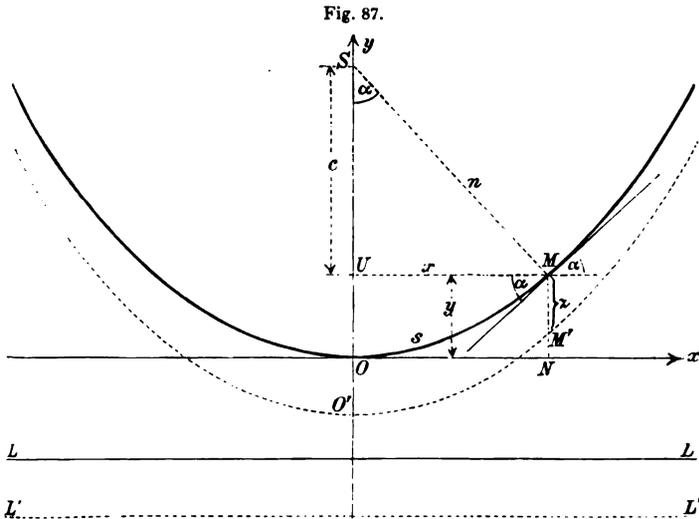
Anmerkung. Die Gleichgewichtsform eines schweren homogenen, an zwei Punkten aufgehängten Fadens wurde von Galilei für eine Parabel gehalten. Die Lösung des von Jakob Bernoulli (1690) gestellten Problems, die wahre Form und die Gesetze dieser von ihm zuerst „Kettenlinie“ genannten Curve z

bestimmen, lieferten in den „Acta eruditorum (Lipsiae 1690 und 1691)“ das berühmte Brüderpaar Johann (geb. 1667, gest. 1748) und Jakob (geb. 1654, gest. 1705) Bernoulli, ferner Leibniz und Huyghens. Dass die (gemeine) Kettenlinie jene Form des Fadens ist, bei welcher der Schwerpunkt bei gegebener Fadenlänge die möglichst tiefste Lage hat, wurde auch schon von den Gebrüdern Bernoulli erkannt.

§ 52. Die parabolische Kettenlinie und die Kettenbrückenlinie und deren kinetische Analogien.

Ist die spezifische Kraft S_P (die Belastung pro Längeneinheit) nicht, wie bei der gemeinen Kettenlinie, constant, sondern variabel, so hängt die Form der Kettenlinie, wie schon erwähnt wurde, wesentlich ab von dem Gesetze, nach welchem sich S_P von Punkt zu Punkt ändert.

Ein sehr einfacher Fall tritt dann ein, wenn gleichen Horizontalprojectionen längs der ganzen Kettenlinie auch gleiche Belastungen entsprechen, also die Belastung P eines beliebigen Bogens s (Fig. 87)



direct proportional ist der horizontalen Projection dieses Bogens. Wird der Bogen s vom Scheitel der Kettenlinie aus gerechnet und die durch den Scheitel in der Ebene der Kettenlinie geführte horizontale und verticale Achse zur x -, beziehungsweise y -Achse eines orthogonalen Achsensystems gewählt, so ist die horizontale Projection des beliebigen Bogens s die Abscisse x des Endpunktes M dieses Bogens, daher wegen der vorausgesetzten directen Proportionalität von x und P

$$P = K \cdot x, \quad dP = K \cdot dx \quad (1)$$

wo $K = \frac{dP}{dx}$ eine Constante, und zwar, da $K = P$ für $x = 1$ ist die Belastung eines Bogens, dessen Horizontalprojection (Endabscisse der Längeneinheit gleichkommt, bedeutet. Da nun nach § 50 stet $P = V = H \operatorname{tg} \alpha = H \frac{dy}{dx}$ ist, wenn durch H die constante Horizontalspannung und durch α der Stellungswinkel bei M bezeichnet wird, so ist auch $Kx = H \frac{dy}{dx}$ oder $dy = \frac{K}{H} x dx$, und die Integration dieser Gleichung führt, da für $x = 0$ auch $y = 0$, daher die Integrationsconstante 0 ist, zu der einfachen Beziehung $y = \frac{1}{2} \frac{K}{H} x^2$ oder

$$x^2 = 2 \cdot \frac{H}{K} \cdot y \dots (2)$$

Der Gleichung (1) zufolge bedeutet der constante Factor $\frac{H}{K}$ die Abscisse (Horizontalprojection), die jenem Bogen entspricht, dessen Belastung $P = H$, d. i. der constanten Horizontalspannung gleich ist. Wird die constante Länge dieser Horizontalprojection durch c bezeichnet, so ist $\frac{H}{K} = c$, also

$$x^2 = 2cy \dots (3)$$

Jene Kettenlinie, bei welcher gleichen Horizontalprojectionen auch gleiche Belastungen entsprechen, ist demnach der letzten Gleichung gemäß eine Parabel, deren Scheitel der Scheitel der Kettenlinie ist, deren Achse die durch den Scheitel gelegte verticale y -Achse und deren Parameter $2c$ ist. Je nachdem Zugspannung oder Druckspannung herrscht, ist der Parabelscheitel der tiefste Punkt oder (bei einer parabolischen Stützzlinie) der höchste Punkt der Kettenlinie.

Nach einer solchen parabolischen Kettenlinie würde sich demnach ein an zwei Stellen festgehaltenes gewichtsloses Seil krümmen, welches durch unendlich viele gleiche und in gleichen (unendlich kleinen) Horizontalabständen angehängte Gewichte gespannt würde (vergl. Anm. 2 S. 284)

Befinden sich die Befestigungsstellen in einer und derselben Horizontalen und bezeichnet man ihren Abstand — die sogenannte Spannweite — durch $2a$ und den verticalen Abstand des Scheitels von dieser die Kettenlinie umspannenden horizontalen Sehne $2a$ — d. i. die sogenannte Pfeilhöhe (Spannhöhe) — durch b , so muss, da die Endpunkte Punkte der Parabel (3) sind, $a^2 = 2cb$ sein, so dass $c = \frac{a^2}{2b}$ und $x^2 = \frac{a^2}{b} y$ ist.

Die Spannungen in der parabolischen Kettenlinie lassen sich sehr einfach auch folgendermaßen ausdrücken: Zunächst ist, da allgemein $V = H \operatorname{tg} \alpha$ und nach einer früheren Gleichung $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{K}{H}$

ist, $V = Kx = K \cdot UM$ (Fig. 87), was sich übrigens schon daraus ergibt, dass (siehe S. 285) $V = P$ sein muss. Führt man im Punkte M die Normale n zur Parabel bis zum Durchschnitte S mit der Parabelachse, so ist offenbar $\sphericalangle MSU = \alpha$ und nach Gleichung (2) S. 283 $p = \frac{V}{\sin \alpha} = K \cdot \frac{UM}{\sin \alpha} = K \cdot MS = K \cdot n$, ferner $H = \frac{V}{\operatorname{tg} \alpha} = K \cdot UM \cot \alpha = K \cdot US$, also $US = c$, so dass den drei Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} p &= K \cdot n = K \sqrt{c^2 + x^2} \\ V &= K \cdot x \\ H &= K \cdot c \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

gemäß die Spannungen p, H, V durch die Längen der drei zu diesen Spannungen normalen Dreieckseiten: der Normalen $MS = n$, der Subnormalen $US = c$ und der Abscisse $UM = x$ dargestellt sind.

Die variable spezifische Belastung $S_P = \frac{dP}{ds}$ ergibt sich aus

$$S_P = \frac{dP}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = K \cdot \cos \alpha = K \cdot \frac{c}{n} = \frac{H}{n} = \frac{H}{\sqrt{c^2 + x^2}} \quad (5)$$

Diese Gleichungen (4) und (5) lehren, dass $S_P \cdot p = KH$ constant, also die Spannung p in den verschiedenen Punkten derselben parabolischen Kettenlinie der spezifischen Belastung S_P und die letztere wiederum der Normalen $n = \sqrt{c^2 + x^2}$ invers proportional ist.

Die Fig. 87 entspricht dem Falle einer in der Kettenlinie stattfindenden Zugspannung, für die entsprechende Stützzlinie hat man diese Figur in der Ebene der Zeichnung um 180° umgedreht sich zu denken.

Für eine stark gespannte gemeine Kettenlinie wurde auf S. 299 die Gleichung (16) abgeleitet, welche, wenn die Horizontalspannung so groß im Verhältnisse zur Belastung, also die Curve so flachgestreckt ist, dass die vierte Potenz von $\frac{X}{c}$ gegen die zweite vernachlässigt werden kann, die Form annimmt: $X^2 = 2cY$, welche Gleichung mit der Gleichung (3) übereinstimmt, d. h. es übergeht die gemeine Kettenlinie in eine parabolische, was sich übrigens sehr leicht dadurch erklärt, dass dann x nahezu gleich s und p nahezu gleich H wird, also die der Bogenlänge s proportionale Belastung auch nahezu der horizontalen Abscisse x direct proportioniert ist.

Würden zu der continuierlichen, für gleiche Horizontaldistanzen gleichen Belastung der parabolischen Kettenlinie noch in einzelnen Knotenpunkten endliche Lasten hinzutreten, so würde aus denselben Gründen, wie im analogen Falle des § 51, die Kettenlinie aus mehreren

parabolischen Bögen sich zusammensetzen, die sich in den erwähnten Knotenpunkten schneiden, und zwar gehören diese Bögen congruente Parabeln an, deren Achsen durchwegs vertical sind.

Die Gleichungen der Belastungscurve einer parabolischen Kettenlinie ist, da $y = \frac{K}{2H} x^2$, $\frac{dy}{dx} = \frac{K}{H} x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{K}{H}$ ist, der Gleichung (13) S. 291 zufolge:

$$Y = y - \frac{H}{q_r} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = y - \frac{K}{q_r} = \frac{K}{2H} \left(x^2 - 2 \frac{H}{q_r} \right).$$

Es ist sonach eine jede Belastungslinie gleichfalls eine Parabel $O'M$ (Fig. 87), deren Achse die y -Achse ist, deren Parameter $2 \frac{H}{K}$ mit jenem der parabolischen Kettenlinie übereinstimmt, und deren Scheitel O' die Ordinate $-\frac{K}{q_r}$ hat; mit anderen Worten: eine jede Belastungscurve ist eine mit der Kettenlinie congruente Parabel, in welche die Kettenlinie übergeht, wenn dieselbe in der Richtung der negativen y -Achse um $OO' = \frac{K}{q_r} = \frac{1}{q_r} \cdot \frac{dP}{dx}$ verschoben wird, was sich übrigens sofort aus dem Umstande ergibt, dass z der Gleichung (11), S. 290 zufolge einen constanten Wert, nämlich den Wert $\frac{K}{q_r}$ hat.

Wendet man das Gesagte auf die Gleichungen (14), (8), (9) u. s. w. des § 50 an, so gelangt man zu der mit der parabolischen Kettenlinie identischen Bahn eines schief (bezw. horizontal) geworfenen schweren Körpers (vergl. S. 288, ferner § 47 und 44), für welche völlig analoge Beziehungen stattfinden.*)

Die Kettenbrückenlinie. Es sei nunmehr eine homogene Kette von variablem Querschnitt f vorausgesetzt, welche, wie dies näherungsweise bei den Ketten der Kettenbrücken der Fall ist, außer ihrem eigenen Gewichte noch eine derartige äußere Belastung zu tragen hat, die für gleiche Horizontalprojectionen auch gleich ist, und es sei überdies angenommen, dass in allen Querschnitten f die Spannung p_r pro Querschnittseinheit die gleiche ist (also die Kette eine sogenannte „Kette von gleichem Widerstande“ darstellt). Bezeichnet man, wie früher, durch K die constante äußere Belastung eines Bogens der Kette, dessen Horizontalprojection die Längeneinheit ist, und durch q_v das constante Gewicht der Kette pro Volumeinheit, so ist das Gewicht eines Kettenelementes von der Länge ds , also von dem Volum $f \cdot ds$ durch $q_v \cdot f \cdot ds$ und demnach die gesammte Belastung dP des Bogens ds bestimmt durch $dP = K \cdot dx + q_v f ds$,

*) In der früheren Auflage folgt hier die ausführliche Theorie jener elliptischen, kreisförmigen, hyperbolischen und parabolischen belasteten Kettenlinien, für welche $\frac{dP}{dx} = \pm \frac{k^2}{y^3}$ ist, nebst den zugehörigen kinetischen Analogien.

wofern die x -Achse horizontal ist. Nun ist $p = f \cdot p_f$, also $f = \frac{p}{p_f}$ und, wie früher, $\frac{dx}{ds} = \cos \alpha = \frac{H}{p}$, also $ds = \frac{p}{H} \cdot dx$, somit $\frac{dP}{dx} = K + \frac{q_v}{p_f H} \cdot p^2$, und da $p^2 = H^2 + V^2$ ist, auch $\frac{dP}{dx} = K + \frac{q_v H}{p_f} + \frac{q_v}{p_f H} \cdot V^2$.

Bezeichnet man kürzshalber durch S_0 und U die constanten Werte:

$$S_0 = K + \frac{q_v H}{p_f}, U = \frac{p_f H}{q_v} \dots (6)$$

so ist

$$\frac{dP}{dx} = S_0 + \frac{V^2}{U} = \frac{S_0 U + V^2}{U} \dots (7)$$

Identificiert man nun die durch diese Gleichung (7) bedingte Kettenlinie mit der Zeitwegcurve einer geradlinigen Bewegung, welche mit der Geschwindigkeit v und der Beschleunigung p längs der verticalen y -Achse vor sich geht, so hat man nur, wenn t die Zeit und s den Weg bezeichnet, den Gleichungen (10), S. 290 gemäß einzusetzen: $\frac{dP}{dx} = H \cdot p$, $V = H \cdot v = H \cdot tg \alpha$, $x = t$ und $y = s$. Die Gleichung (7) erlangt dadurch die Form

$$p = \frac{S_0}{H} + \frac{H}{U} v^2 \dots (8)$$

Diese Gleichung stimmt nun überein mit der Grundgleichung (1), S. 160, jener geradlinigen Bewegung, für welche nämlich $p = -g \frac{a^2 + v^2}{c^2}$ vorausgesetzt wurde, wofern man $-\frac{g a^2}{c^2} = \frac{S_0}{H}$ und $-\frac{g}{c^2} = \frac{H}{U}$, also $\frac{c^2}{g} = -\frac{U}{H}$ und $a = \frac{1}{H} \sqrt{S_0 U}$ annimmt. Es werden demgemäß nach Einsetzung dieser Werte die aus dieser Grundgleichung auf S. 160 bis 162 abgeleiteten Gleichungen (2), (4), (5) und (7) auch für die gesuchte Kettenlinie volle Giltigkeit haben, wofern $v = tg \alpha = \frac{V}{H}$, also für den beliebig in der Kettenlinie (Zeitwegcurve) angenommenen Anfangspunkt O $v_0 = tg \alpha_0$, ferner $s = y$, $t = x$, $\frac{c^2}{g} = -\frac{U}{H}$ und $a = \frac{1}{H} \sqrt{S_0 U}$ gesetzt wird. Man gelangt auf diese Weise zu folgenden vier Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{U}{2H} \log \text{nat} \frac{U S_0 + H^2 tg^2 \alpha_0}{U S_0 + V^2} = \frac{U}{2H} \log \text{nat} \frac{U S_0 + V^2}{U S_0 + H^2 tg^2 \alpha_0} \\ V^2 &= H^2 tg^2 \alpha = (U S_0 + H^2 tg^2 \alpha_0) e^{2 \frac{H}{U} y} - U S_0 \\ V &= H tg \alpha = \sqrt{U S_0} \cdot \frac{\frac{H tg \alpha_0}{\sqrt{U S_0}} + tg \left(\sqrt{\frac{S_0}{U}} x \right)}{1 - \frac{H tg \alpha_0}{\sqrt{U S_0}} tg \left(\sqrt{\frac{S_0}{U}} x \right)} \\ y &= -\frac{U}{H} \cdot \log \text{nat} \left[\frac{-\frac{H tg \alpha_0}{\sqrt{U S_0}} \sin \left(\sqrt{\frac{S_0}{U}} x \right) + \cos \left(\sqrt{\frac{S_0}{U}} x \right)}{\dots} \right] \end{aligned} \right\} (9)$$

wofern, da für $t = 0$ auch $s = 0$ und $v = v_0$ ist, für $x = 0$ auch $y = 0$ und $\alpha = \alpha_0$ angenommen wird. Der Coefficient $\frac{U}{H}$ hat nach (6) die Bedeutung von $\frac{p_f}{q_v}$.

Für den Scheitel der Kettenlinie ist $\alpha = 0$ und $V = 0$, sonach der 1. und 3. Gleichung zufolge

$$y = -\frac{U}{2H} \log \operatorname{nat} \left(1 + \frac{H^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_0}{U S_0} \right) \text{ und } x = -\sqrt{\frac{U}{S_0}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{H \operatorname{tg} \alpha_0}{\sqrt{U S_0}}$$

Die durch die letzte Gleichung (9) bestimmte Kettenlinie wird die Kettenbrückenlinie genannt.

S_0 bedeutet der Gleichung (7) zufolge den Wert der spezifischen Belastung S_P im Scheitel der Kette, denn für diesen Punkt ist bekanntlich $\frac{dx}{ds} = \cos \alpha = 1$ und $V = H \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0$, so dass in der That $S_P = \frac{dP}{ds} = \frac{dP}{dx} = S_0$ ist.

Versetzt man den in der Kettenbrückenlinie bisher willkürlich angenommenen Anfangspunkt des Coordinatensystems in den Scheitel, so ist $\alpha_0 = 0$ zu setzen, also nach (9)

$$\left. \begin{aligned} V &= H \cdot \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{U S_0} \cdot \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{S_0}{U}} \cdot x \right) \\ y &= -\frac{U}{H} \log \operatorname{nat} \cos \left(\sqrt{\frac{S_0}{U}} \cdot x \right) = \frac{p_f}{q_f} \log \operatorname{nat} \sec \left(\sqrt{\frac{S_0}{U}} \cdot x \right) \end{aligned} \right\} (10)$$

Die aus der Verticalspannung V und der Horizontalspannung H resultierende Spannung p ist durch $p = \sqrt{V^2 + H^2}$ bestimmt. Die Größe des Querschnittes f ergibt sich dann aus der Gleichung $f = \frac{p}{p_f}$.

Für $K = 0$ ergibt sich die bloß ihrem eigenen Gewichte überlassene Kette von gleichem Widerstande (für welche die spezifische Spannung p_f constant ist).

Die Belastungscurve der Kettenbrückenlinie hat nach Gl. (13) S. 291 und nach (11) S. 290 die Gleichung $Y = y - z = y - \frac{1}{q_f} \frac{dP}{dx} = y - \frac{1}{q_f} \left(S_0 + \frac{V^2}{U} \right)$, wo für y und V die Werte aus (9), bezw. (10) einzusetzen sind.

In analoger Weise, wie hier die kinetischen Gleichungen des § 39 a in einfacher Art zur Ableitung der für eine Kettenbrückenlinie gültigen Gesetze herangezogen wurden, können auch die Gleichungen des § 39 b) und c) auf besondere Arten von Kettenlinien in Anwendung gebracht werden. Die Gleichungen der entsprechenden Kettenlinien sind die Gleichungen (14) und (19) des § 39, in welche nur wie früher $t = x$ und $s = y$ u. s. w. einzusetzen ist. Es entsprechen diese Gleichungen dann z. B. einer schweren Kette von gleichem spezifischen Widerstande p_f auf welche außer ihrem Gewichte ein der Horizontalprojection proportionaler, vertical nach aufwärts gerichteter Druck wirkt, also K negativ ist u. s. w.

In derselben Weise lassen sich auch die Bewegungsgleichungen aller anderer geradliniger oder krummliniger Bewegungen ohneweiters auf im Gleichgewichte befindliche Kettenlinien anwenden.*)

*) In der früheren Auflage sind auf diese Weise auch jene belasteten Kettenlinien behandelt, welche die Form einer Cycloide, einer Sinoide u. s. w. haben.

Capitel VI.

Allgemeine Grundprincipien der Mechanik räumlicher materieller Punktsysteme.

§ 53. Die inneren Kräfte eines räumlichen Punktsystems.

Im früheren Capitel wurde angenommen, dass innere Kräfte nur zwischen je zwei unmittelbar benachbarten, längs einer Linie aneinander gereihten materiellen Punkten thätig sind, so dass jeder materielle Punkt — abgesehen von den äußeren Kräften — stets der Angriffspunkt von nur zwei inneren Kräften ist, die von der Einwirkung der beiderseitigen Nachbarpunkte herrühren. Diese besondere Annahme werde jetzt fallen gelassen und der allgemeine Fall untersucht, in welchem die materiellen Punkte, wie dies z. B. bei einem ausgedehnten festen Körper, einer Flüssigkeit u. s. w. der Fall ist, beliebig im Raume vertheilt sind, so dass jeder Punkt m der Angriffspunkt von im allgemeinen unendlich vielen inneren Kräften ist, die von der Einwirkung der übrigen den Punkt m von allen Seiten des Raumes umgebenden materiellen Punkte des Punktsystems herrühren. Die äußeren Kräfte seien stets durch die großen Buchstaben $P, R, P_x, Q \dots$, die inneren durch die kleinen Buchstaben $p, r, p_x, q \dots$ gekennzeichnet. Nach dem Principe der Gegenwirkung entspricht jeder Kraft p , mit welcher irgend ein Punkt m' des Punktsystems auf irgend einen zweiten Punkt m einwirkt, eine entgegengesetzt gleiche Kraft p' , die von der Einwirkung des Punktes m herrührt, und deren Angriffspunkt m' ist. Denkt man sich jede der inneren Kräfte in drei zu den Achsen eines Coordinatensystems parallele Kräfte zerlegt, so müssen offenbar die beiden x -Componenten der erwähnten entgegengesetzt gleichen Kräfte p und p' ebenfalls entgegengesetzt gleich sein, und dasselbe gilt von dem y - und z -Componenten. Es ist daher stets, mag sich das Punktsystem in Ruhe oder in Bewegung befinden, wenn sich das Summenzeichen auf alle inneren Kräfte des Punktsystems bezieht und durch $p_x p_y p_z$ die X -, Y -, Z -Componenten derselben bezeichnet werden,

$$\Sigma p_x = 0, \Sigma p_y = 0, \Sigma p_z = 0 \dots (1)$$

Nimmt man nun das Coordinatensystem rechtwinkelig an, bezeichnet man ferner durch $x y z$ die Coordinaten des Punktes m und durch $x' y' z'$ jene des Punktes m' , so sind die Momente m_x und m'_x der beiden oberwähnten Kräfte, deren absolute Werte p und p' seien, bezüglich der x -Achse nach Gleichung (5), S. 71 bestimmt durch

$$m_x = x p_y - y p_x, m'_x = x' p'_y - y' p'_x$$

und da nach früher Gesagtem $p_x' = -p_x$ und $p_y' = -p_y$, so ist

$$m_x + m_x' = (x - x') p_y - (y - y') p_x \quad (2)$$

Bezeichnet man die Distanz der Punkte m und m' durch r und die Richtungswinkel der von m' nach m gehenden Richtung durch $\alpha \beta \gamma$, so ist $x - x' = r \cos \alpha$, $y - y' = r \cos \beta$, $z - z' = r \cos \gamma$.

Sind nun alle inneren Kräfte des räumlichen Punktsystems Kräfte der ersten Art (siehe S. 25), fällt also die Richtung von p und p' in die Gerade mm' , so ist nach § 20

$$p_x = \pm p \cos \alpha, p_y = \pm p \cos \beta, p_z = \pm p \cos \gamma$$

wo sich die oberen Zeichen auf den Fall einer Abstoßung, die unteren auf jenen einer Anziehung beziehen, da im ersten Falle p mit $m'm$ gleichgerichtet, im zweiten dagegen entgegengesetzt gerichtet ist. Durch Division der drei vorletzten Gleichungen durch die drei letzten Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{x - x'}{p_x} = \frac{y - y'}{p_y} = \frac{z - z'}{p_z} = \pm \frac{r}{p},$$

so dass stets $(x - x') p_y = (y - y') p_x$ ist und daher der Gleichung (2) zufolge $m_x + m_x' = 0$ ist. Wendet man dies Resultat auf die Wechselwirkung je zweier Punkte des Systems an und addiert sämtliche Gleichungen von der Form der letzteren, so findet man, dass $\Sigma m_x = 0$. Auf ganz analoge Weise würde man erhalten

$$\Sigma m_x = 0, \Sigma m_y = 0, \Sigma m_z = 0 \dots \quad (3)$$

Es ist also in jedem Falle, mag das Punktsystem in Bewegung begriffen sein oder sich im Ruhezustande befinden, die algebraische Summe der Drehungsmomente aller inneren Kräfte des Punktsystems bezüglich einer beliebigen Achse gleich Null.

Durch diese Deduction ist auch allgemein dargethan, dass die Momente zweier beliebiger gleicher, beziehungsweise entgegengesetzt gleicher Kräfte, deren Richtungslinie dieselbe ist, in Bezug auf eine jede beliebige Achse gleich, beziehungsweise entgegengesetzt gleich sind.

Zu den Gleichungen (3) würde man übrigens auch gelangt sein, wenn ein nicht orthogonales Achsensystem gewählt worden wäre, nur würden dann $m_x m_y m_z$ nicht die Momente bezüglich der Coordinatenachsen, sondern Ausdrücke bedeuten, die durch $yp_z - zp_y$, $zp_x - xp_z$, $xp_y - yp_x$ definiert erscheinen.

Keinesfalls darf jedoch außeracht gelassen werden, dass zwar nicht die Gleichungen (1), jedenfalls aber die Gleichungen (3) und demnach alle aus diesen in allen den folgenden Paragraphen abgeleiteten Folgerungen nur unter der Annahme der inneren Kräfte der

ten Art allein gültig sind, also, wie schon einmal hervorgehoben wurde, die inneren Kräfte der zweiten Art, falls solche vorhanden sind, stets zu den äußeren Kräften hinzugerechnet werden müssen, wenn die folgenden Lehrsätze allgemeine Gültigkeit haben sollen.

54. Die notwendigen Gleichgewichtsbedingungen für ein räumliches Punktsystem. Princip der virtuellen Verschiebungen (virtuellen Geschwindigkeiten).

Soll ein materielles freibewegliches Punktsystem sich im Gleichgewichte befinden, so muss offenbar auch jeder einzelne der materiellen Punkte desselben unter Einwirkung aller auf denselben einwirkenden Kräfte im Gleichgewichtszustande sein. Diese Kräfte sind nun theils äußere, theils innere Kräfte. Bezeichnet man die auf den materiellen Punkt von der Masse m_1 einwirkenden äußeren Kräfte durch $P_1', P_1'', P_1''', \dots$, allgemein durch $P^{(1)}$, und die auf denselben wirkenden inneren Kräfte des Punktsystems, deren Anzahl im allgemeinen unendlich groß ist, durch $p_1', p_1'', p_1''', \dots$, allgemein durch $p^{(1)}$, deutet man ferner die xyz -Componenten — bezogen auf irgend ein beliebiges räumliches orthogonales Achsensystem — durch die entsprechenden beigefügten Indices an, und bezeichnet man die Momente dieser Kräfte bezüglich der Coordinatenachsen entsprechend durch $M_x^{(1)}, M_y^{(1)}, M_z^{(1)}$, bzw. $m_x^{(1)}, m_y^{(1)}, m_z^{(1)}$, und wendet man die analoge Bezeichnung auch auf die anderen materiellen Punkten m_2, m_3, \dots an, so ist wegen des vorausgesetzten Gleichgewichtszustandes nach § 22

$$\begin{aligned} \Sigma P_x^{(1)} + \Sigma p_x^{(1)} &= 0 & \Sigma M_x^{(1)} + \Sigma m_x^{(1)} &= 0 \\ \Sigma P_x^{(2)} + \Sigma p_x^{(2)} &= 0 & \Sigma M_x^{(2)} + \Sigma m_x^{(2)} &= 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ \Sigma P_x^{(n)} + \Sigma p_x^{(n)} &= 0 & \Sigma M_x^{(n)} + \Sigma m_x^{(n)} &= 0 \end{aligned}$$

Durch Addition aller der untereinander stehenden Gleichungen ergibt sich

$$\Sigma P_x + \Sigma p_x = 0 \quad \Sigma M_x + \Sigma m_x = 0$$

Berücksichtigt man nun die Gleichungen (1) und (3) des letzten Paragraphs, so ersieht man, dass, da stets $\Sigma p_x = 0$ und $\Sigma m_x = 0$ ist, notwendigerweise auch $\Sigma P_x = 0$, $\Sigma M_x = 0$ sein müsse. Dasselbe gilt offenbar aus gleichen Gründen für die y - und z -Achse, so dass allgemein

$$\left\{ \begin{aligned} \Sigma P_x &= 0 & \Sigma M_x &= 0 \\ \Sigma P_y &= 0 & \Sigma M_y &= 0 \\ \Sigma P_z &= 0 & \Sigma M_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

ist.

Die ersten drei Gleichungen besagen nach § 22 nichts anderes, als dass alle äußeren Kräfte P , die auf das Punktsystem einwirken, so beschaffen sein müssen, dass sie sich auch das Gleichgewicht halten würden, wenn sie ohne Änderung ihrer Richtung und Größe alle auf denselben Angriffspunkt wirksam gemacht würden.

Die letzten drei Gleichungen aber drücken aus, dass die algebraische Summe der Drehungsmomente der einwirkenden äußeren Kräfte bezüglich einer jeden beliebigen Achse im Raume gleich Null sein müsse.

Verschwinden nun für irgend welche drei sich in einem Punkte O schneidende orthogonale Achsen die Summen $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$, $\Sigma M_x = 0$, $\Sigma M_y = 0$, $\Sigma M_z = 0$, so muss nicht nur für eine jede andere durch O gehende Achse a die Summe $\Sigma M_a = 0$ sein — indem zufolge der Gleichung (9) Seite 73 stets $\Sigma M_a = \cos(xa) \cdot \Sigma M_x + \cos(ya) \cdot \Sigma M_y + \cos(za) \cdot \Sigma M_z$ ist — sondern es verschwinden die analogen Summen auch für ein beliebiges anderes zu dem früheren paralleles Achsensystem $(x' y' z')$, dessen beliebiger Anfangspunkt O' bezüglich des früheren Achsensystems die Coordinaten $\xi \eta \zeta$ hat, d. h. es ist nicht nur $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$, sondern auch $\Sigma M_{x'} = 0$, $\Sigma M_{y'} = 0$, $\Sigma M_{z'} = 0$, so dass auch für eine jede andere durch O' gehende Achse a die Momentensumme $\Sigma M_a = 0$ ist, denn es ist z. B. $\Sigma M_{x'} = \Sigma [x' Y - y' X] = \Sigma [(x - \xi) \cdot Y - (y - \eta) X] = \Sigma (x Y - y X) + \eta \Sigma X - \xi \Sigma Y = \Sigma M_x - \xi \cdot \Sigma Y + \eta \Sigma X$, in welchem letzterem Ausdrücke $\Sigma M_x = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma X = 0$ ist, weshalb auch $\Sigma M_{x'} = 0$ verschwinden muss u. s. w.

Übrigens haben, wie aus § 53 und 22 erhellt, die Gleichungen (1) auch Gültigkeit für ein beliebiges schiefwinkliges räumliches Achsensystem, nur darf nicht $P_x = P \cos(xP)$, $P_y = P \cos(yP)$, $P_z = P \cos(zP)$ gesetzt werden, und es bedeuten dann $M_x M_y M_z$ nicht die Momente der Kräfte, sondern Ausdrücke von der Form der Gleichungen (5) und 6 des § 21, so dass die drei letzten der Gleichungen (1) lauten

$$\left. \begin{aligned} \Sigma M_x &= \Sigma (y P_z - z P_y) = 0 \\ \Sigma M_y &= \Sigma (z P_x - x P_z) = 0 \\ \Sigma M_z &= \Sigma (x P_y - y P_x) = 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

wo xyz die Coordinaten jenes materiellen Punktes bedeuten, auf welchen die Kraft P , bzw. deren Componenten $P_x P_y P_z$ einwirken.

Die sechs Gleichungen (1) sind, wie eben bewiesen wurde, für das Bestehen des Gleichgewichtes des Punktsystems wohl jedenfalls nothwendig, aber keineswegs hinreichend, denn es ist sofort klar, dass diese sechs Gleichungen in besonderen Fällen auch stattfinden könnten, ohne dass die Kräfte jenen vorerwähnten 2n-Glei-

chungen, aus denen diese sechs Gleichungen früher deduciert wurden, nämlich den einzelnen Gleichungen $\Sigma P_x^{(1)} + \Sigma p_x^{(1)} = 0$, $\Sigma M_x^{(1)} + \Sigma m_x^{(1)} = 0$ u. s. w. Genüge leisten, wenn auch je zwei innere Kräfte entgegengesetzt gleich sind, also ein jeder auf eine innere Kraft sich beziehender Summand irgend einer dieser Gleichungen stets entgegengesetzt gleich ist einem Summanden einer zweiten Gleichung.

Die Gleichungen (1) müssen, da im Gleichgewichtszustande des ganzen Punktsystems auch ein jeder beliebige Theil A desselben im Gleichgewichte sich befinden muss, für einen jeden dieser Theile A erfüllt werden, nur haben dann offenbar in diesen Gleichungen (1) jene Kräfte zu entfallen, welche als äußere Kräfte auf den ganzen übrigen Theil B des Punktsystems einwirken, dahingegen müssen jene Kräfte, mit denen die materiellen Punkte des Theiles B auf jene des Theiles A wirksam sind, und die früher, da sie innere Kräfte waren, in den Gleichungen (1) nicht vorkamen, jetzt als äußere Kräfte angesehen und daher zu den Kräften P der Gleichung (1) zugezählt werden, wie dies auch im früheren Capitel mit den Spannungen in den Endpunkten irgend eines Theiles A einer Kettenlinie geschehen ist.

Befindet sich nun in einer bestimmten Configuration, d. i. einer bestimmten gegenseitigen Lage der Punkte irgend eines beliebigen Punktsystems das letztere im Gleichgewichtszustande, so dass sich also die äußeren Kräfte P und die inneren Kräfte p des Systems an jedem einzelnen Punkte das Gleichgewicht halten, so muss bei einer jeden der im allgemeinen unendlich vielen Verschiebungen der Systempunkte, die bei der Natur der einwirkenden Kräfte von dieser bestimmten Gleichgewichtslage aus überhaupt möglich und mit der besonderen Beschaffenheit des Systems vereinbar sind (die nicht durch die besondere Art der vorausgesetzten Verbindungen und der entsprechenden Kräfte ausgeschlossen sind), und welche zulässigen (im allgemeinen bloß gedachten) unendlich kleinen Verschiebungen man als virtuelle Verschiebungen (im Gegensatze zu den actuellen Verschiebungen, d. i. den wirklichen Bahnen der Punkte) bezeichnet, nach S. 182 die algebraische Summe der mechanischen Arbeiten sämtlicher auf irgend einen der Systempunkte einwirkenden Kräfte für sich verschwinden, sonach auch die gesammte Arbeitssumme aller überhaupt im Punktsysteme thätigen äußeren und inneren Kräfte P und p Null sein, wofern nur diese Verschiebungen unendlich klein angenommen werden. Die letztere Beschränkung ist insoferne nothwendig, als ja in der neuen Configuration des Punktsystems, wenn sie von der früheren um ein Endliches verschieden wäre, die Kräfte sich im allgemeinen nicht mehr das Gleichgewicht halten müssten. Bezeichnet man demgemäß durch δA_P die virtuelle Arbeit, d. i. die elementare mechanische Arbeit, welche irgend eine der äußeren Kräfte P bei

dieser unendlich kleinen virtuellen Verschiebung leisten würde, und durch δa_p die virtuelle Arbeit einer inneren Kraft p während dieser virtuellen Verschiebung, so ist $\Sigma \delta A_P + \Sigma \delta a_p = 0$, wo sich das Summenzeichen Σ auf die einzelnen Punkte des Systems bezieht.

Ist nun die Summe $\Sigma \delta a_p$ der mechanischen Arbeiten der inneren Kräfte des Systems für eine jede mögliche Verschiebung des Systems Null, was zwar erst in der Folge sowohl für alle starren Punktsysteme, als auch für unzusammendrückbare Flüssigkeiten, als auch für Verbindungen von starren Körpern nachgewiesen werden wird, so ist $\Sigma \delta A_P = 0$. Unter δA_P ist bekanntlich (siehe S. 181) das Product aus der Kraft P und der Projection δn des virtuellen Wegelements ihres Angriffspunktes (Projection der virtuellen Verschiebung) auf die Kraft-richtung zu verstehen — positiv oder negativ genommen, je nachdem δn in die Richtung des Kraft fällt oder in die entgegengesetzte. Dieses Product aus der Kraft P und der (positiven oder negativen) virtuellen Verschiebung δn in der Krafrichtung bezeichnet man öfters auch als das virtuelle Moment der Kraft P .

Es lässt sich demnach für alle materiellen Punktsysteme das Gesetz aufstellen, dass unter der obenangeführten Voraussetzung bei einer jeden virtuellen Verschiebung eines Punktsystems aus der Gleichgewichtsconfiguration die algebraische Summe der virtuellen Momente $\Sigma \delta A_P = \Sigma (P \cdot \delta n) = 0$ aller Kräfte P Null ist. Dieses wichtige Princip der Statik führt den Namen: Princip der virtuellen Verschiebungen (oder auch Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, indem die Division durch das beliebige (unendlich kleine) Zeitelement δt , in welchem etwa die virtuelle Verschiebung vor sich gehend gedacht wird, dieses Princip in der Form: $\Sigma \left(P \frac{\delta n}{\delta t} \right) = 0$ erscheinen lässt, wo die letztere Summe den virtuellen Gesamteffect der Kräfte P (vergl. S. 130) und $\frac{\delta n}{\delta t}$ gleichsam die virtuelle Geschwindigkeit darstellt; häufig werden auch die Begriffe der virtuellen Geschwindigkeit und der virtuellen Verschiebung identificiert).

Sind nun durch die Zeichen p überhaupt alle durch die Verbindungen des nunmehr im allgemeinen als nicht freibeweglich vorausgesetzten Punktsystems bedingten Kräfte, die „Verbindungskräfte“ oder „Bedingungskräfte“ gekennzeichnet, so lässt sich, wofern die besondere Art der Verbindungen der einzelnen Punkte zu einem System durch Gleichungen zwischen den Coordinaten der einzelnen Punkte des Systems bestimmbar ist (wie z. B. die die Bedingung der Starrheit eines Systems ausdrückenden Gleichungen u. s. w.), und wofern diese Gleichungen die variable Zeit t nicht in sich enthalten, durch Differentiation dieser Gleichungen leicht zeigen, dass dann in der That die obige Voraussetzung $\Sigma \delta a_p = 0$ für diese Verbindungskräfte p in voller

Strenge erfüllt ist, so dass das Princip der virtuellen Verschiebungen auch für alle übrigen Kräfte P volle Giltigkeit hat. Sind z. B. diese Gleichungen die Gleichungen gewisser Flächen oder Curven, längs welcher der betreffende Punkt sich zu bewegen genöthigt ist, so verschwindet der betreffende Summand δa_p offenbar schon aus dem Grunde, weil das betreffende Bahnelement auf der Richtung der betreffenden Verbindungskraft, d. i. des normalen Widerstandes p , bezw. W_n der Fläche (Curve) senkrecht steht. Alle Kräfte, die der hier besprochenen Voraussetzung nicht entsprechen (z. B. der Reibungswiderstand W_r , die inneren Kräfte einer compressiblen Flüssigkeit oder eines elastischen Körpers u. s. w.), müssen demnach bei der Anwendung des obigen Principis zu den Kräften P hinzugezählt werden.

Bezeichnet man demgemäß, wie dies öfter geschieht, alle jene virtuellen Verschiebungen, die durchwegs solchen Verbindungen der materiellen Punkte des Punktsystems entsprechen, für welche die durch diese Verbindungen hervorgerufenen „Verbindungskräfte“ p die obige Voraussetzung $\Sigma \delta a_p = 0$ erfüllen, als „mit den Bedingungen des Systems verträgliche elementare Verschiebungen“, und nennt man alle anderen Kräfte P „durch die Verbindungen nicht bedingte Kräfte“, so lautet das allgemeine Princip der virtuellen Verschiebungen folgendermaßen: Die Summe der virtuellen Momente aller durch die Verbindungen nicht bedingten Kräfte P ist bei jedem Punktsystem für alle mit den Bedingungen des Systems verträglichen elementaren virtuellen Verschiebungen gleich Null.

Sind $\delta x, \delta y, \delta z$ die (positiven oder negativen) Projectionen irgend einer dieser verträglichen elementaren virtuellen Verschiebungen auf die drei orthogonalen Achsenrichtungen, so sind offenbar $P_x \cdot \delta x, P_y \cdot \delta y, P_z \cdot \delta z$ die virtuellen Momente (virtuellen elementaren Arbeiten) der Componenten $P_x P_y P_z$ der Kraft P , deren Summe (siehe S. 182) der elementaren Arbeit $P \delta n$ der resultierenden Kraft stets gleich ist, und es findet daher das Princip der virtuellen Verschiebungen in folgender gebräuchlicher Form seinen analytischen Ausdruck:

$$\Sigma (P \cdot \delta n) = \Sigma [P_x \cdot \delta x + P_y \cdot \delta y + P_z \cdot \delta z] = 0 \dots (3)$$

Anmerkung 1. Enthalten die obenerwähnten Bedingungsgleichungen außer den Coordinaten auch die veränderliche Zeit t , so sind behufs der Anwendbarkeit des Principis der virtuellen Verschiebungen als virtuelle Verschiebungen nicht, wie oben, die möglichen Verschiebungen, die den Bedingungsgleichungen genügen, sondern jene zu definieren, die diesen Gleichungen genügen würden, wenn in denselben die Zeit constant angenommen würde. Ferner ist zu berücksichtigen, dass oben vorausgesetzt wurde, dass die Beschränkungen der freien Beweglichkeit der Punkte durch Gleichungen gegeben sind, also z. B. bedungen ist, dass ein Punkt längs einer durch ihre Gleichung gegebenen Fläche sich bewegen müsse, so dass in diesem besonderen Falle ein beiderseitiger Widerstand der Fläche als möglich vorausgesetzt ist. Wäre im letzteren Falle nur

ein einseitiger Widerstand möglich, wären überhaupt gewisse Bedingungen durch Ungleichungen ausgedrückt, so dass nicht alle virtuellen Verschiebungen umkehrbar sind, so könnte, was z. B. bei einseitigem Widerstande W für eine jedenfalls mögliche seitliche Verschiebung nach jener Seite der Fläche, nach welcher dieser Widerstand W gerichtet ist, sofort evident ist, $\Sigma(P\delta n)$ bei dieser virtuellen Verschiebung aus der Gleichgewichtslage auch negativ werden.

Anmerkung 2. Nachdem die Giltigkeit des Principis der virtuellen Verschiebungen in besonderen Fällen, und zwar für den Hebel von Guido Ubaldi (geb. 1545, gest. 1607), für Rollensysteme von Simon Stevin (geb. 1548, gest. 1620), für die schiefe Ebene und andere einfache Maschinen von Galilei erkannt worden war, hat die allgemeine Giltigkeit dieses Principis für alle Gleichgewichtsfälle Joh. Bernoulli (1717) ausgesprochen und Lagrange (1736—1813) dieses Princip zum Fundamente seiner berühmten analytischen Mechanik (1788) gewählt.

§ 55. Kinetische Grundgleichungen. D'Alemberts Princip. Princip der Erhaltung der Flächen. Princip der lebendigen Kraft.

Wenn die materiellen Punkte eines materiellen freibeweglichen Punktsystems in irgend einer Bewegung begriffen sind und sich in im allgemeinen continuierlich gekrümmten Bahnen mit endlichen Beschleunigungen bewegen, so ist, wenn man die Bezeichnungen des früheren Paragraphs beibehält und zur Unterscheidung der variablen, auf ein beliebiges, im allgemeinen schiefwinkeliges Achsensystem bezogenen Coordinaten der materiellen Punkte $m_1 m_2 \dots$ die entsprechenden Indices anwendet, nach § 41 (S. 173) und § 21

$$\Sigma P_x^{(1)} + \Sigma p_x^{(1)} = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}, \quad \Sigma P_x^{(2)} + \Sigma p_x^{(2)} = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \text{ u. s. w. } (1)$$

Addiert man alle diese Gleichungen und beachtet die Gleichungen (1) S. 311, so findet man

$$\Sigma P_x = \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \Sigma P_y = \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \Sigma P_z = \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} \dots (2)$$

Ebenso ist nach § 21 S. 72

$$\Sigma M_x^{(1)} + \Sigma m_x^{(1)} = y_1 [\Sigma P_z^{(1)} + \Sigma p_z^{(1)}] - z_1 [\Sigma P_y^{(1)} + \Sigma p_y^{(1)}]$$

oder wenn man statt der in den Klammern stehenden Ausdrücke die Werte aus den den Gleichungen (1) analogen Gleichungen einführt:

$$\Sigma M_x^{(1)} + \Sigma m_x^{(1)} = y_1 \cdot m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} - z_1 \cdot m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = m_1 \left[y_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} - z_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \right]$$

$$\Sigma M_x^{(2)} + \Sigma m_x^{(2)} = m_2 \left[y_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} - z_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} \right] \text{ u. s. w.}$$

Addiert man alle diese Gleichungen und beachtet die Gleichung (3) S. 312, so findet man

$$\left. \begin{aligned} \Sigma M_x &= \Sigma m \left[y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right] \\ \text{ebenso} \quad \Sigma M_y &= \Sigma m \left[z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right] \\ \Sigma M_z &= \Sigma m \left[x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right] \end{aligned} \right\} (3)$$

Ist das Coordinatensystem ein rechtwinkeliges, so bedeuten in diesen Gleichungen M_x , M_y , M_z die Drehungsmomente der auf das Punktsystem einwirkenden äußeren Kräfte bezüglich der drei Coordinatenachsen.

Die Gleichungen (2) und (3) sind die kinetischen Grundgleichungen, die auf eine jede Bewegung eines freibeweglichen (veränderlichen oder unveränderlichen) Punktsystems, bei welcher keine plötzlichen Änderungen der Bewegungsrichtungen und der Geschwindigkeiten vorkommen, Anwendung finden.

Werden — wie im § 54 — bei einem System in irgend welcher Verbindung stehender materieller Punkte zu den Kräften p [welche die freie Beweglichkeit der einzelnen materiellen Punkte beheben und daher bewirken, dass sich die materiellen Punkte nicht (nach dem im Capitel III erörterten Gesetzen) so bewegen, wie wenn sie sich frei bewegliche materielle Punkte unter der Wirksamkeit der äußeren Kräfte allein ständen] auch alle jene Widerstandskräfte W (vgl. § 23 und 24) hinzugerechnet, die daher rühren, dass entweder einzelne Punkte fix oder aber an die Bedingung gebunden sind, längs bestimmter Flächen oder Curven sich zu bewegen, oder dass im allgemeinen ihre gegenseitige Lage gewissen zwischen den Coordinaten der Punkte bestehenden Gleichungen entsprechen muss, so dass p nunmehr alle überhaupt durch die Verbindung der Punkte bedingten, die Bedingungsgleichungen ersetzenden Kräfte, die sogenannten „Verbindungskräfte“ oder „Bedingungskräfte“ bedeuten, so bestehen die Gleichungen (1) nicht nur für ein freibewegliches, sondern auch für ein jedes unfreie Punktsystem. Bringt man demgemäß in diesen Gleichungen bei jedem einzelnen materiellen Punkte die rechtsseitigen Glieder mit entgegengesetzten Qualitätszeichen auf die linke Seite, so lehnen diese derart auf Null reducierten Gleichungen nach § 22, dass bei einem jeden einzelnen Punkte des materiellen Punktsystems die von den Bedingungen des Systems unabhängigen Kräfte P und die aus den fictiven Kräften $-m \frac{d^2 x}{dt^2}$, $-m \frac{d^2 y}{dt^2}$, $-m \frac{d^2 z}{dt^2}$ resultierende Kraft ($-R$), welche letztere bekanntlich (nach § 41) dem Producte aus der Masse m des betreffenden materiellen Punktes und der (totalen) Beschleunigung desselben an Größe gleich, jedoch

der letzteren entgegengesetzt gerichtet ist, sich durch Vermittlung der Verbindungskräfte p des Systems bei jedem Punkte des Punktsystems stets das Gleichgewicht halten müssen. Dieses allgemeine wichtige Grundgesetz nennt man nach seinem Entdecker das d'Alembert'sche Princip. (D'Alembert, geb. 1717, gest. 1783, veröffentlichte und begründete dies Princip — in einer etwas veränderten Form — in seinem „Traité de dynamique“, Paris 1743.) Die fictive Kraft ($-R$) führt häufig den Namen: Trägheitswiderstand (*force d'inertie*) oder Widerstand (*Reaction*) gegen die Beschleunigung.

Die aus den wirkenden Kräften P und der eben erwähnten fictiven Kraft ($-R$) bei jedem der materiellen Punkte resultierende (der resultierenden „Verbindungskraft“ entgegengesetzt gleiche) Kraft nennt d'Alembert eine verlorene Kraft (*force perdue*). Es halten sich demnach kurz gesagt nach d'Alemberts Princip die verlorenen Kräfte infolge des Hinzutretens der Verbindungskräfte p das Gleichgewicht. Da nun für die Verbindungskräfte p unter den im § 51 angeführten Voraussetzungen $\sum \delta a_p = 0$ ist, so ist die Summe der virtuellen Momente (elementaren Arbeiten) der verlorenen Kräfte, da sich dieselben das Gleichgewicht halten, bei jeder überhaupt möglichen (virtuellen) Verschiebung gleich Null, d. h. es ist

$$\sum \left[\left(P_x - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(P_y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(P_z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0,$$

in welcher von Lagrange herrührenden Form man d'Alemberts Princip als das fundamentalste Gesetz der analytischen Mechanik, anzuwenden pflegt.

Die aus $m \frac{d^2 x}{dt^2}$, $m \frac{d^2 y}{dt^2}$, $m \frac{d^2 z}{dt^2}$ resultierende, durch das Product aus m und der resultierenden Beschleunigung ausgedrückte, zur wirklichen Bewegung des Punktes m nothwendige Kraft R bezeichnet man öfter als Effectivkraft (wirkliche Kraft) im Gegensatze zu dem entgegengesetzt gleichen Trägheitswiderstande.

Das Princip d'Alembert's gestattet demgemäß, eine jede Aufgabe der Dynamik eines Punktsystems infolge der Hinzufügung der fictiven Trägheitswiderstände auf eine Aufgabe der Statik zurückzuführen.

Da aus den drei Kräften $m \frac{d^2 x}{dt^2}$, $m \frac{d^2 y}{dt^2}$, $m \frac{d^2 z}{dt^2}$ nach § 41 jene Kraft R (die effective Kraft) resultiert, die zur Erzeugung der thatsächlichen Bewegung des Punktes m nothwendig sein würde, wofern derselbe frei beweglich, also außer aller Verbindung mit den anderen materiellen Punkten des Punktsystems wäre, und da diese resultierende Kraft nach § 41 stets zu ihren Componenten die Tangentialkraft $m p_t = m \frac{d^2 s}{dt^2}$ und die Centripetalkraft $m p_c = \frac{m v^2}{\rho}$ haben muss, so muss der dieser resultierenden Kraft entgegengesetzt gleiche Trägheitswiderstand auch äquivalent sein der entgegengesetzten Tangentialkraft ($-m \frac{d^2 s}{dt^2}$) (die auch Widerstand oder Reaction gegen die tangentielle Beschleunigung u. s. w. genannt wird) und der Centrifugalkraft (Fliehkraft) $-\frac{m v^2}{\rho}$ (die auch Widerstandskraft oder Reaction gegen die centripetale

beschleunigung u. s. w. genannt wird) (vergl. S. 191). Man kann daher bei der Anwendung des d'Alembert'schen Princips ohne weiters statt der früheren fictiven Kräfte auch die entgegengesetzte Tangentialkraft und die Fliehkraft zu den wirkenden Kräften P eines Punktsystems hinzufügen, um das zu behandelnde kinetische Problem auf ein Problem der Statik zurückzuführen.

Da die Geschwindigkeit v des beliebigen Massenpunktes m eines materiellen Punktsystems eine Vectorgröße ist (siehe S. 94), so ist auch das Product aus der constanten, völlig richtungslosen (scalaren) Masse m dieses Punktes und aus dessen Geschwindigkeit v , d. i. die Bewegungsgröße mv eine Vectorgröße, als deren Richtung die Richtung der Geschwindigkeit v , d. i. die Bewegungsrichtung des Punktes m anzusehen ist. Man kann sonach in derselben Weise, in welcher früher die Geschwindigkeit v in ihre Componenten $v_x v_y v_z$ und ebenso irgend eine Kraft P in ihre Componenten XYZ zerlegt wurden, auch die Bewegungsgröße mv in ihre zu den beliebig gewählten Achsen xyz parallelen Componenten mv_x, mv_y, mv_z zerlegen und kann auch nach den früher erörterten Methoden der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten und von Kräften auch die Bewegungsgrößen in gleicher Weise zusammensetzen. Wendet man nun auf diese neue Vectorgröße mv die in den §§ 17 und 21 aufgestellten Begriffe des Moments bezüglich irgend eines Momentenpunktes und in Bezug auf irgend eine Achse, statt dieselben auf die Kraft P , d. i. auf das Product aus der Masse m und der Beschleunigung anzuwenden, nunmehr in völlig gleicher Weise auf das Product aus der Masse m und der Geschwindigkeit v , d. i. auf die Bewegungsquantität mv an, so gelangt man zu den völlig adäquaten Begriffen des Moments einer Bewegungsgröße bezüglich eines Punktes und bezüglich einer Achse und gewinnt auch durch dieselben Deductionen, wie in den §§ 17 und 21, Lehrsätze, die ganz analog sind den in diesen Paragraphen abgeleiteten Sätzen, wofern man nur die Kraftcomponenten XYZ durch die Componenten mv_x, mv_y, mv_z der Bewegungsquantität ersetzt. Demgemäß ist auch das Moment $M^{(v)}$ der Bewegungsgröße mv eines beliebigen Punktes eines materiellen Punktsystems bezüglich der durch irgend einen Momentenpunkt O beliebig gelegten x -Achse eines ruhenden rechtwinkligen Achsensystems durch den dem Kräfte Momente $M_x^{(P)} = xY - yX$ analogen Ausdruck bestimmt:

$$M^{(v)} = x \cdot m v_y - y \cdot m v_x = m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \dots (6)$$

Die Differentiation dieser Gleichung ergibt

$$\frac{dM^{(v)}}{dt} = m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right)$$

Indem man nun diese Gleichung auf jeden der materiellen Punkte des Systems in Anwendung bringt und alle die so erhaltenen, auf dieselbe Zeit t sich beziehenden Gleichungen addiert, so ergibt sich für ein jedes freibewegliche Punktsystem, wenn die Gleichung (3) beachtet wird, die Beziehung $\Sigma \frac{dM^{(z)}}{dt} = \Sigma M_z$, also auch $d\Sigma M^{(z)} = \Sigma M_z \cdot dt$. Integriert man nun diese Gleichung für das zwischen der Zeit $t = 0$ und der beliebigen Zeit t gelegene Zeitintervall und bezeichnet durch $\Sigma M_0^{(z)}$ die als bekannt vorauszusetzende Momentensumme der Bewegungsgrößen zur Zeit $t = 0$, so findet man

$$\Sigma M^{(z)} - \Sigma M_0^{(z)} = \int_0^t \Sigma M_z \cdot dt \dots \quad (7)$$

Analoge Relationen ergeben sich offenbar für die x - und y -Achse.

Ist sonach die Momentensumme ΣM_z der äußeren Kräfte, die auf ein freibewegliches Punktsystem wirken, für irgend eine Achse — die z -Achse — während der Bewegung des Systems dauernd Null, so behält die Momentensumme $\Sigma M^{(z)}$ der Bewegungsgrößen für diese Achse fortwährend den constanten Wert $\Sigma M_0^{(z)}$. Die hier angeführte Bedingung $\Sigma M_z = 0$ ist zufolge Gl. (1) S. 313 für eine jede Achse erfüllt, wenn sich die Kräfte das Gleichgewicht halten oder wenn gar keine äußeren Kräfte, sondern nur innere Kräfte auf das freibewegliche (veränderliche oder unveränderliche) Punktsystem einwirken; es haben demnach in diesem Falle $\Sigma M^{(x)}$, $\Sigma M^{(y)}$, $\Sigma M^{(z)}$ unveränderliche Werte.

Anmerkung. Da die Dimension der Bewegungsgröße (siehe S. 129) mlt^{-1} ist, so hat das Moment der Bewegungsgröße die Dimension $mlt^{-1} \cdot l = m^2l^2t^{-1}$.

Wendet man nun die auf S. 72 durchgeführten Auseinandersetzungen auf das Moment $M^{(z)}$ der Bewegungsgröße an, so ersieht man, dass dasselbe, analog wie das Kraftmoment $M_z^{(P)}$, durch die doppelte Fläche jenes Dreiecks bestimmt ist, welches sich als die orthogonale Projection des auf den Momentenpunkt O bezüglichen Momentendreiecks, (dessen Spitze O ist, und dessen in die Bewegungsrichtung des Punktes m fallende Basis die Maßzahl mv hat) auf die durch O zur z -Achse senkrecht gelegte Projectionsebene, nämlich auf die (xy) -Ebene ergibt. Es ist demnach, wenn M das Moment der Bewegungsgröße mv für den Punkt O und n die positive Richtung der Normalen der Ebene des Momentendreiecks bedeutet, wie auf S. 72 $M^{(z)} = M \cdot \cos(zn)$. Ist nun dF das dreieckförmige Element des im allgemeinen kegelförmigen Sectors F , welches der den Punkt O mit dem beliebigen Massenpunkte m verbindende Radius vector r in dem Zeitelement dt durchläuft, so ist einerseits dF durch das halbe Product aus dem Bahnelemente ds und der von O auf die augenblick-

liche Bewegungsrichtung geführten Senkrechten und andererseits das in der Ebene von dF gelegene oberwähnte Momentendreieck, dessen Fläche $\frac{M}{2}$ ist, durch das halbe Product aus $mv = m \frac{ds}{dt}$ und derselben Senkrechten bestimmt, so dass sich die beiden Dreiecke verhalten wie ihre Grundlinien, also $dF : \frac{M}{2} = ds : m \frac{ds}{dt}$ und $M = 2m \frac{dF}{dt}$, also $M^{(z)} = M \cos(\alpha n) = 2m \cdot \frac{dF \cdot \cos(\alpha n)}{dt}$ ist. Nun ist, wie oben, $dF \cdot \cos(\alpha n)$ die Projection dF_z des Flächenelements dF auf die (xy) -Ebene, d. h. dF_z ist ein Element jenes ebenen Sectors F_z , den die Projection des Radiusvectors r in die zur z -Achse senkrechte Ebene durchläuft, sonach ist $\frac{dF \cos(\alpha n)}{dt} = \frac{dF_z}{dt}$ die Geschwindigkeit, mit der sich dieser ebene Sector im Laufe der Zeit ändert, kurz die „Sectorengeschwindigkeit“ und $\Sigma M^{(z)} = \Sigma \left(2m \frac{dF_z}{dt} \right) = 2 \frac{d\Sigma(mF_z)}{dt}$.

Verschwimmt demnach dauernd, wie oben, die Momentensumme ΣM_z der einwirkenden Kräfte für die z -Achse, was für jede Achse sicher dann der Fall ist, wenn nur innere Kräfte auf das freibewegliche Punktsystem wirken, so behält nicht nur $\Sigma M^{(z)}$, sondern auch $\Sigma m \frac{dF_z}{dt} = \frac{d}{dt} \Sigma(mF_z)$, d. h. die Summe der Producte aus den Massen m und aus den entsprechenden Sectorengeschwindigkeiten $\frac{dF_z}{dt}$ für die zur Achse senkrechte xy -Ebene einen constanten Wert, oder, was dasselbe besagt: es ändert sich die Summe der Producte mF_z aus den Massen und den entsprechenden Sectoren F_z in demselben Verhältnisse wie die Zeit, und es haben überhaupt, auch wenn ΣM_z von Null verschieden ist, auf die Änderung dieser Summe $\Sigma(mF_z)$ die inneren Kräfte in keiner Weise einen Einfluss. Dieses allgemeine Gesetz ist unter dem Namen „Princip der Erhaltung der Flächen“ (Princip der Flächen, Princip der Erhaltung der Momente der Bewegungsgröße, Flächengesetz) bekannt.

Für Kräfte, die sämmtlich in der xy -Ebene wirken, ergibt sich das Gesetz (7), was keiner näheren Auseinandersetzung bedarf, sofort schon aus der letzten Gleichung (3), S. 174, in welcher $P_n r$ das Moment M_z irgend einer der Kräfte für den Punkt O und $mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = mrv_n$ (siehe Gleichung 11, S. 115) das Moment der Bewegungsgröße bedeutet, wenn man hiebei nur beachtet, dass für zwei zugehörige innere Gegenkräfte (Wechselwirkungen) die Summe der Momente offenbar verschwindet.

Anmerkung. Das Gesetz der Erhaltung der Flächen wurde fast zu gleicher Zeit 1746 von Euler und Daniel Bernoulli gefunden. Das Flächengesetz auf Seite 210 spricht einen besonderen Fall dieses Gesetzes aus.

Zufolge des auf S. 182 deducierten Princip's der lebendigen Kraft ist bei einer jeden Bewegung eines materiellen Punktes, also auch für jeden einzelnen Punkt eines beliebigen Punktsystems die Summe der mechanischen Arbeiten, welche von allen auf denselben einwirkenden äußeren und inneren Kräften in einer beliebigen Zeit t geleistet werden, gleich der in dieser Zeit stattfindenden Änderung $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2}$ der lebendigen Kraft dieses Punktes. Addirt man alle diese auf die einzelnen Punkte des Systems, jedoch auf dieselbe Zeit t sich beziehenden Gleichungen, so ergibt sich offenbar, dass auch $\Sigma A_p + \Sigma a_p = \Sigma \frac{mv^2}{2} - \Sigma \frac{mv_o^2}{2}$ ist, wo $\Sigma \frac{mv^2}{2}$ die gesammte lebendige Kraft oder die kinetische Energie des Systems zur Zeit t und $\frac{\Sigma mv_o^2}{2}$ jene zur Zeit o bedeutet. Bestehen nun für die Verbindungskräfte p des Systems die wiederholt angeführten Voraussetzungen, so ist $\Sigma a_p = 0$ und demnach

$$\Sigma A_p = \Sigma \frac{mv^2}{2} - \Sigma \frac{mv_o^2}{2} \quad (8)$$

Dies ist das Princip der lebendigen Kraft in seiner Anwendung auf beliebige Punktsysteme. Die hier gemachte Voraussetzung $\Sigma a_p = 0$ ist nicht nur, wie später gezeigt werden wird, gültig für die inneren Kräfte eines starren Körpers und einer incompressiblen Flüssigkeit, sondern auch bei nicht freibeweglichen (veränderlichen oder unveränderlichen) Punktsystemen für alle jene „Verbindungskräfte“ p , die durch Gleichungen, welche die Coordinaten der Punkte allein (und nicht auch die Zeit) enthalten, bedingt sind.

Nennt man die übrigen, d. i. die durch die Verbindungen nicht bedingten (im allgemeinen theils äußeren, theils inneren) Kräfte P nach Kirchhoff kurz die „wirkenden“ Kräfte, so lässt sich der Satz von der lebendigen Kraft in folgender Art aussprechen: Bei einem jeden Punktsystem ist die Änderung der gesammten kinetischen Energie stets gleich der gleichzeitigen Arbeit der wirkenden Kräfte.

Anmerkung. Als Begründer des Satzes der lebendigen Kräfte (wenn auch nicht in der heute angewendeten Form) kann man Huyghens bezeichnen, der überhaupt der erste war, der Probleme aus der Dynamik der Punktsysteme löste. Johann und Daniel Bernoulli verallgemeinerten das Princip.

Aus dem obigen Princip ergibt sich auch sofort, dass, wenn die Kräfte eines Punktsystems sich in einer bestimmten Configuration des Systems nicht das Gleichgewicht halten, die unendlich kleinen

Änderung der mechanischen Arbeit $d\Sigma A_P$ nothwendig einen positiven Wert haben müsste; denn denkt man sich in dieser Lage etwa alle Punkte des Systems in Ruhe, d. h. ist $v_o = 0$ für jeden Punkt desselben, also auch $\Sigma \frac{m v_o^2}{2}$ Null, so muss zufolge der obigen Annahme der Ruhezustand in der folgenden unendlich kleinen Zeit jedenfalls gestört werden, so dass $\Sigma \frac{m v^2}{2}$ als Summe von positiven Summanden jedenfalls einen positiven Wert haben muss, somit auch die der Gleichung (8) zufolge dieser Summe gleiche, in dieser unendlich kleinen Zeit erfolgte Änderung der mechanischen Arbeit jedenfalls einen positiven Wert haben muss. Daraus folgt unmittelbar, dass das Princip der virtuellen Verschiebungen nicht nur, wie früher gezeigt wurde, für das Gleichgewicht nothwendig, sondern auch hinreichend ist, d. h. wenn die Summe der virtuellen mechanischen Arbeiten der wirkenden Kräfte P für eine jede mit den Bedingungen des Systems verträgliche Verschiebung des Punktsystems aus irgend einer bestimmten Configuration Null ist, so halten sich die Kräfte in dieser Configuration des Systems des Gleichgewicht.

Ist U jene Function der Coordinaten der einzelnen Punkte des Systems, die derart beschaffen ist, dass, wenn U_o den Wert dieser Function für die anfängliche Configuration des Systems und U den Wert derselben in einer beliebigen Lage des Systems bezeichnet, die Änderung $U_o - U$ derselben die beim Übergange des Punktsystems aus der Anfangslage in die letztere Lage von den gesammten wirkenden Kräften P geleistete Arbeit ΣA_P ausdrückt, mit anderen Worten, dass der Differentialquotient $\left(-\frac{dU}{dt}\right)$ dieser Function, nach der Zeit genommen, dem Gesamteffecte dieser Kräfte, d. i. $\frac{d\Sigma A_P}{dt}$ gleichkommt, so ist diese Function U nach § 45 S. 208 als das Potential im weitesten Sinne des Wortes oder als die Kräftefunction des Systems dieser Kräfte P zu bezeichnen, und es ist dann, da $-\frac{dU}{dt} = \frac{d\Sigma A_P}{dt}$ und $\Sigma A_P = U_o - U$ ist, zufolge Gleichung (8) auch

$$U_o - U = \Sigma \frac{m v^2}{2} - \Sigma \frac{m v_o^2}{2} \dots (9)$$

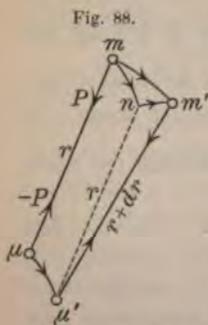
d. h. die Änderung $U_o - U$ des Potentials der wirkenden Kräfte stets auch gleich der gleichzeitigen Änderung der gesammten lebendigen Kraft.

Anmerkung. Am einfachsten und häufigsten ist die Kräftefunction, die Lagrange in die Mechanik eingeführt und Hamilton derart benannt hat, definiert durch jene Function der Coordinaten der Punkte des Systems, deren partielle Differentialquotienten, nach den Coordinaten irgend eines dieser System-

punkte genommen, die entgegengesetzten Werte der entsprechenden Componenten der auf diesen Punkt wirkenden Kraft ausdrücken (siehe § 45 S. 202).

In diesem Falle, welcher die Wirksamkeit von Kräften, für welche keine Kräftefunction existiert, also jede Reibung u. s. w. ausschließt und sonach ein sogenanntes conservatives Kräftesystem voraussetzt, ist, wenn das System der alleinigen Wirksamkeit innerer Kräfte vom Potential U überlassen ist, die Summe aus der kinetischen Energie $\Sigma \frac{m v^2}{2}$ des ganzen Systems und aus der bloß von der Configuration, d. i. von der gegenseitigen Lage der Massenpunkte abhängigen Größe U , die auch als die potentielle Energie des Systems bezeichnet wird, der Gleichung (9) zufolge constant, so dass allemal, sobald nach Verlauf irgend einer beliebigen Zeit alle Punkte des Systems in dieselben gegenseitigen Lagen zurückkehren, also $U = U_0$ wird, auch dieselbe lebendige Kraft $\frac{\Sigma m v^2}{2} = \frac{\Sigma m v_0^2}{2}$ wiederkehren muss. Dieser wichtige Satz wird der Satz von der Erhaltung der (lebendigen) Kraft oder das Princip der Erhaltung (der Constanz) der Energie genannt.

Ein derartiges Potential (Kräftefunction) haben, um einen besonders wichtigen Fall hervorzuheben, anziehende oder abstoßende Kräfte P , die von fixen Centren ausgehen, oder die als Gegenkräfte zwischen den beweglichen materiellen Punkten des Systems thätig sind, wofern diese Kräfte P bloß Functionen der Entfernung r der sich gegenseitig anziehenden oder abstoßenden Punkte m und μ sind, so dass $P = f(r)$ ist (wo $f(r)$ seinem absoluten Zahlwerte nach angenommen ist). Für anziehende, beziehungsweise abstoßende fixe Centralpunkte μ ergibt sich dies sofort aus den Gleichungen (4), (6), (7) des § 45, und zwar hat man nur in dem vorliegenden Falle alle die den einzelnen bewegten Punkten entsprechenden Gleichungen (7) S. 208 zu addieren und demnach durch U zufolge Gl. (6) S. 204 die Summe der auf die einzelnen afficierten beweglichen Systempunkte m sich beziehenden Potentialwerte zu bezeichnen, also $U = \Sigma \int \pm f(r) dr$ zu setzen, um dies sofort einzusehen. — Für die gegenseitigen Anziehungen (Abstoßungen) irgend zweier beweglicher Systempunkte m und μ (Fig. 88) resultiert, wie sofort gezeigt werden soll, gleichfalls ein Wert



des U , der durch die Gleichung $U = \int \pm f(r) dr$ bestimmt ist, wo — wie in der früheren Gleichung — das obere Zeichen für eine Anziehung, das untere für eine Abstoßung anzuwenden ist. Bewegt sich nämlich nicht nur der Punkt m (xyz), auf welchen die Kraft P wirkt, und

zwar in der unendlich kleinen Zeit dt von m nach m' , sondern auch der Punkt μ ($\xi \eta \zeta$), der von der Gegenkraft ($-P$) beeinflusst ist, in derselben Zeit von μ nach μ' , so lässt sich die elementare Bewegung des ersten Punktes m längs der Bahn mm' zerlegen in eine Bewegung längs einer Bahn mn , welche zum gleichzeitigen Bahnelemente $\mu\mu'$ des zweiten Punktes parallel und mit demselben congruent ist, und in eine zweite componentale Bewegung von n nach m' ; es stellt dann die letztere elementare Bewegung nm' die in der Zeit dt vor sich gehende relative Bewegung des ersten Punktes m bezüglich des letzteren Punktes μ dar, d. h. nm' ist die relative Bahn des Punktes m in Bezug auf ein fortschreitendes Achsensystem A , dessen Bewegung mit der Bewegung $\mu\mu'$ des Punktes μ übereinstimmt, so dass $m\mu$ bei dieser fortschreitenden Bewegung in die zu $m\mu$ parallele Lage $n\mu'$ gelangt. Da nun μ bei der relativen Bewegung nm' des Punktes m in relativer Ruhe verharret, so ist für diese Bewegung nm' die elementare Arbeit dA der auf m wirkenden Kraft P nach § 45 S. 204 durch die der Änderung des r um dr entsprechende Änderung ($-dU$) der oberwähnten (von r allein abhängigen) Function U bestimmt, also ist $dA = -dU$. Da nun die Projection von mm' auf die Richtung der Kraft P dem algebraischen Werte nach offenbar der Summe der Projection von mn und jener von nm' auf dieselbe Krafrichtung gleich ist, so lehrt die Multiplication mit P sofort, dass auch $dA_m = dA_s + dA$, wo dA_m die Arbeit von P bei der wirklichen (resultierenden) Bewegung des Punktes m von m nach m' und dA_s die Arbeit derselben Kraft P bei der (componentalen) Bewegung von m nach n bedeutet. Nun ist die gleichzeitige Bahn des zweiten Punktes μ , der an der relativen Bewegung nicht theilnimmt, und auf den die Gegenkraft ($-P$) wirkt, parallel und congruent mit der letzteren Bahn mn und daher die elementare Arbeit dA_μ dieser Kraft ($-P$) der Arbeit dA_s entgegengesetzt gleich, also $dA_\mu = -dA_s$. Durch Addition der beiden letzten Gleichungen findet man, dass $dA_m + dA_\mu = dA = -dU$ ist, so dass also in der That $\frac{dA_m}{dt} + \frac{dA_\mu}{dt} = -\frac{dU}{dt}$, daher auch für die gesammte Arbeit $\frac{\Sigma dA_P}{dt} = -\frac{d\Sigma U}{dt}$ ist, dass sonach wie im früheren Falle $\Sigma U = \Sigma \int \pm f(r) dr$ das Potential des ganzen Kraftsystems darstellt. Für Gravitationskräfte, welche nach Newtons Gesetze den Massen m und μ direct und dem Quadrate der Entfernung r invers proportional sind, ist $P = f(r) = k \frac{m\mu}{r^2}$ (wo k die Gravitationsconstante, d. i. die Kraft bedeutet, mit der sich zwei Masseneinheiten in der Entfernung 1 anziehen), sonach ist $\int f(r) dr = k m \mu \int \frac{dr}{r^2} = -k \frac{m\mu}{r}$ ist, daher er-

gibt sich für das Gesamtpotential V , das „Newton'sche Potential“ der Wert $V = -k \sum \frac{m\mu}{r}$.

Bei den meisten Bewegungen der Natur findet infolge der Wirkung des Reibungswiderstandes, des Widerstandes des Mittels u. s. w., kurz infolge der Einwirkung solcher bei der Bewegung hinzutretender Kräfte, die nicht von der Configuration des Systems allein, sondern auch von den Bewegungsrichtungen im Systeme, von den Geschwindigkeiten u. s. w. abhängen, und deren zumeist negative Arbeit ($-a$) zu der in (9) durch $U_0 - U$ ausgedrückten Arbeit der früher betrachteten inneren Kräfte hinzuzufügen ist, ein Verlust an Energie statt, indem der Gleichung (8) zufolge dann $U_0 - U - a = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}$ und demnach die schließliche Energie $\sum \frac{mv^2}{2} + U$ um den positiven Wert a kleiner ist als die Anfangsenergie $\sum \frac{mv_0^2}{2} + U_0$. Es wurde jedoch durch genaue Untersuchungen die wichtige Thatsache festgestellt, dass genau in demselben Maße, in welchem Energie durch einen Widerstand verloren geht, in demselben Maße auch jedesmal Wärme erzeugt wird, so dass die erzeugte Wärmemenge ein Äquivalent für die verlorene Energie a ist und diese wiederum aus jener durch einen umgekehrten Process gewonnen werden kann. Es wird also das Princip der Erhaltung der Energie durch diese scheinbaren Energieverluste in keiner Weise tangiert. Die Erfahrung lehrt ferner, dass bei allen Naturwirkungen jede Entwicklung der Energie an irgend einer Stelle eines fremden (äußeren) Einflüssen entzogenen Systems stets begleitet ist von einem Verschwinden des genau gleichen Betrages von Energie (wenn auch vielleicht in anderer Form) an einer anderen Stelle des Systems. Kurz das Princip der Constanz der Energie, demzufolge die Summe aus der kinetischen und potentiellen Energie bei einem nur den inneren gegenseitigen Einwirkungen seiner Theile unterworfenen materiellen Systems stets dieselbe bleibt, ist ein allgemein giltiges Naturprincip. Die nähere Erörterung dieses wichtigen Grundprincips der modernen Physik und die Untersuchung der verschiedenen Erscheinungsformen der Energie und deren gegenseitiger Beziehungen übersteigt die Grenzen dieses Lehrbuches und muss der Physik überlassen bleiben.

Ist, wie früher, U , bezw. U_0 das Potential der inneren Kräfte, also $U_0 - U$ die von diesen in der Zeit t geleistete Arbeit, und ist ($-a$) die mechanische Arbeit der oben erwähnten Widerstände (der Reibung u. s. w.), so ist für ein materielles System, auf welches auch äußerliche Kräfte wirken, deren Arbeit in der Zeit t durch A bezeichnet sei, der Gleichung (8) zufolge $A + U_0 - U - a = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}$, also

$$A = \left(\Sigma \frac{m v^2}{2} - \Sigma \frac{m v_0^2}{2} \right) + (U - U_0) + a \dots \quad (10)$$

Die in irgend einer Zeit von den äußeren Kräften auf das System ausgeübte Arbeit A ergibt sich demnach, wenn man die in dieser Zeit im System erzeugte potentielle Energie $U - U_0$ um die gleichzeitige Änderung der kinetischen Energie $\Sigma \frac{m v^2}{2} - \Sigma \frac{m v_0^2}{2}$ und um die durch die Reibung u. s. w. in dieser Zeit consumierte Arbeit a vermehrt. — Dies ist das allgemeine fundamentale Princip der Energie.

Es sei schließlich nur noch für den Fall, dass alle auf ein System wirkenden Kräfte ein Potential haben, darauf hingewiesen, dass, da dem Begriffe des Potentials zufolge $\frac{d \Sigma A_P}{dt} = - \frac{dU}{dt}$ ist, und da nach dem Principe der virtuellen Verschiebungen bei jeder Bewegung eines Punktsystems durch seine Gleichgewichtslage $\frac{d \Sigma A_P}{dt}$ Null werden muss, in der Gleichgewichtslage auch $\frac{dU}{dt}$ verschwinden muss, so dass nicht nur die mechanische Arbeit ΣA_P aller wirkenden Kräfte, sondern auch das Potential derselben und der Gleichung (8) zufolge auch die kinetische Energie bei der Bewegung durch die Gleichgewichtslage im allgemeinen ein Maximum oder Minimum werden muss.

§ 56. Massenmittelpunkt eines materiellen Punktsystems.

Es seien die Massen der einzelnen materiellen Punkte eines Punktsystems durch $m_1 m_2 m_3 \dots m_n$ bezeichnet und die auf irgend ein räumliches Achsensystem bezogenen Coordinaten der verschiedenen Punkte durch die entsprechenden Indices $1 2 3 \dots$ unterschieden. Es bedeute ferner M die Masse des ganzen Punktsystems, so dass (siehe S. 124) $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \Sigma m$ ist.

Die Producte von der Form $m x, m y, m z$ nennt man die Massenmomente der Massenpunkte m bezüglich jener der Coordinatenebenen, zu welcher die entsprechende Coordinate nicht parallel ist, welche Ebene dann als die Momentenebene für diese Momente bezeichnet wird. So ist $m_1 x_1$ das Moment des Massenpunktes m_1 bezüglich der yz -Ebene u. s. w.

Jenen Punkt nun, dessen Coordinaten dadurch erhalten werden, dass man die algebraische Summe der Massenmomente der einzelnen materiellen Punkte des Punktsystems bezüglich irgend einer der drei Coordinatenebenen durch die Summe der Massen dividiert, nennt man den Mittelpunkt der Masse (Massenmittelpunkt) des Punktsystems.

Sind demnach XYZ seine Coordinaten, so sind dieselben durch die Gleichungen bestimmt:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\Sigma (m x)}{M} \\ Y &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\Sigma (m y)}{M} \\ Z &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\Sigma (m z)}{M} \end{aligned} \right\} (1)$$

Die Producte MX , MY , MZ werden als die Momente des Massenmittelpunktes bezüglich der entsprechenden Coordinatenebenen bezeichnet, so dass den Gleichungen (1) zufolge als Definition des Massenmittelpunktes eines Punktsystems die Eigenschaft dienen kann, dass das Moment des Massenmittelpunktes bezüglich einer beliebigen Coordinatenebene gleich ist der algebraischen Summe der Massenmomente der einzelnen materiellen Punkte dieses Punktsystems bezüglich derselben Momentenebene.

Wenn auch in den Gleichungen (1) die auf ein bestimmtes Achsensystem bezogenen Coordinaten vorkommen, so ist doch die relative Lage des Massenmittelpunktes im Punktsysteme von der Wahl des zunächst als orthogonal vorauszusetzenden Achsensystems vollkommen unabhängig. Denn wählt man ein anderes Coordinatensystem $x'y'z'$, so dass die Coordinaten des etwa neuen Massenmittelpunktes $X''Y''Z''$ bezüglich des neuen Achsensystems die Werte $X'' = \frac{\Sigma (m x')}{M}$, $Y'' = \frac{\Sigma (m y')}{M}$, $Z'' = \frac{\Sigma (m z')}{M}$ haben, und hat der Anfangspunkt des früheren Achsensystems in Bezug auf das neue Achsensystem die Coordinaten $a b c$, so ist

$$\begin{aligned} x' &= a + x \cos(x'x) + y \cos(x'y) + z \cos(x'z) \\ X' &= a + X \cos(x'x) + Y \cos(x'y) + Z \cos(x'z) \end{aligned}$$

u. s. w., wo $X'Y'Z'$ die neuen Coordinaten des früheren Massenmittelpunktes XYZ sind. Multipliciert man nun die vorletzte Gleichung mit m und addiert alle die n analogen Gleichungen, so findet man $\Sigma (m x') = a \cdot \Sigma m + \cos(x'x) \Sigma (m x) + \cos(x'y) \Sigma (m y) + \cos(x'z) \Sigma (m z)$ oder wenn man den früheren Gleichungen zufolge

$\Sigma (m x') = MX''$, $\Sigma (m x) = MX$, $\Sigma (m y) = MY$, $\Sigma (m z) = MZ$ setzt und durch $M = \Sigma m$ dividiert,

$$X'' = a + X \cos(x'x) + Y \cos(x'y) + Z \cos(x'z)$$

Vergleicht man diesen Wert mit dem früheren Werte von X' , so ersieht man, dass $X'' = X'$ ist. Ebenso lässt sich zeigen, dass

$= Y'$, $Z'' = Z'$ ist, d. h. es ist der neue Massenmittelpunkt derselbe Punkt des Punktsystems wie der frühere Massenmittelpunkt.

Es ist demnach der Massenmittelpunkt bloß abhängig von der relativen Lage der einzelnen materiellen Punkte des Punktsystems gegeneinander und von ihren Massen, kurz bloß abhängig von der Massenvertheilung.

Bei der Bildung der Gleichungen von der Form (1) kann man sich die Coordinaten auf ein beliebiges räumliches schiefwinkliges Achsensystem $x'y'z'$ beziehen; es bestimmen diese Gleichungen auch dann denselben Massenmittelpunkt. Denn bezeichnet man die Coordinaten des früheren Massenmittelpunktes XYZ in Bezug auf das $x'y'z'$ -System durch $X'Y'Z'$, und wählt man das frühere, orthogonale Achsensystem xyz derart, dass die xy -Ebene mit der $x'y'$ -Ebene und die Anfangspunkte beider Systeme zusammenfallen, so ist offenbar $x = z' \cos(\alpha z')$ und $Z = Z' \cos(\alpha z')$. Substituiert man diese Werte in die frühere Gleichung $Z \cdot \Sigma m = \Sigma(mz)$, die zur Bestimmung der z -Coordinate des Massenmittelpunktes dient, so ergibt sich: $Z' \cos(\alpha z') \cdot \Sigma m = \Sigma[mz' \cos(\alpha z')]$. Hebt man nun in der letzten Summe den gemeinsamen Factor $\cos(\alpha z')$ aller Summanden vor das Summenzeichen heraus und dividirt beiderseits durch $\cos(\alpha z') \cdot \Sigma m$, so findet man $Z' = \frac{\Sigma(mz')}{\Sigma m}$, und analog würde man finden $X' = \frac{\Sigma(mx')}{\Sigma m}$, $Y' = \frac{\Sigma(my')}{\Sigma m}$, wodurch die obige Behauptung nachgewiesen ist.

Den Massenmittelpunkt zweier Massenpunkte m_1 und m_2 findet man einfach, indem man die diese Punkte verbindende Gerade im umgekehrten Verhältnisse der Massen theilt. Verlegt man nämlich den Anfangspunkt des Achsensystems in den Punkt m_1 und die x -Achse in die Richtung $m_1 m_2$, so ist $x_1 = 0$ und nach (1) $(m_1 + m_2) X = m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_2 x_2$, also $m_1 X = m_2(x_2 - X)$, somit $m_1 : m_2 = (x_2 - X) : X$.

Man könnte dementsprechend, wie sehr einfach zu zeigen ist, den Massenmittelpunkt eines Punktsystems auch so bestimmen, dass man auf die eben erwähnte Art den Mittelpunkt O_{12} der Massen m_1 und m_2 bestimmt, in diesen Mittelpunkt in Gedanken einen materiellen Punkt von der Masse $(m_1 + m_2)$ versetzt, hierauf den Massenmittelpunkt O_{123} des aus dieser fingierten Masse $(m_1 + m_2)$ und dem Massenpunkte m_3 bestehenden Systems wieder auf die frühere Art bestimmt u. s. w.; der so zuletzt erhaltene Punkt ist dann der Massenmittelpunkt des ganzen Systems.

Der Massenmittelpunkt ändert bei der Bewegung des Punktsystems nicht nur seine Lage zum Achsensystem, sondern, wenn die

materiellen Punkte ihre gegenseitige Lage ändern, also die Bewegung, wie z. B. bei einer Flüssigkeit, einem elastischen festen Körper, von einer Deformation des Punktsystems begleitet ist, auch im allgemeinen seine relative Lage zum Punktsystem, wie dies die Gleichungen (1) lehren.

Ist jedoch das Punktsystem ein starres (unveränderliches), so dass, wenn man sich das Achsensystem xyz in unveränderlicher Verbindung mit diesem starren Punktsystem denkt, auch alle xyz ihre Werte beibehalten, so behält auch den Gleichungen (1) zufolge XYZ denselben Wert, d. h. der Massenmittelpunkt behält seine relative Lage zum Achsensystem, also auch zum starren Punktsystem bei, er ist mit anderen Worten stets derselbe Punkt des Systems, während seine Lage in Bezug auf solche Achsensysteme, die an der Bewegung des starren Körpers nicht theilnehmen, sich ändert. Es stimmt bei starren Körpern der Massenmittelpunkt, wie später gezeigt werden wird, mit dem Mittelpunkte der auf die einzelnen materiellen Punkte des Körpers wirkenden parallelen Schwerkkräfte, d. i. dem sogenannten Schwerpunkt überein, weshalb man häufig die beiden Begriffe: Massenmittelpunkt und Schwerpunkt identifiziert.

§ 57. **Bewegung des Massenmittelpunktes. Gesetz der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes. Gesetz der Erhaltung der Bewegungsquantität. Kinetische Energie eines Punktsystems.**

Es sei ein Punktsystem in irgend einer beliebigen Bewegung begriffen, so dass sich auch die Coordinaten XYZ des Massenmittelpunktes im allgemeinen ändern.

Da zufolge der Gleichungen (1) des letzten Paragraphs

$$M \cdot X = \Sigma(mx), \quad M \cdot Y = \Sigma(my), \quad M \cdot Z = \Sigma(mz) \dots (1)$$

ist, mag nun ein orthogonales oder schiefwinkliges dreiachsiges Achsensystem zugrunde gelegt werden, so ist auch, wie sich durch Differentiation nach der Zeit t ergibt:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{dX}{dt} &= \Sigma \left[m \frac{dx}{dt} \right] = \Sigma [m v_x] \\ M \frac{dY}{dt} &= \Sigma \left[m \frac{dy}{dt} \right] = \Sigma [m v_y] \\ M \frac{dZ}{dt} &= \Sigma \left[m \frac{dz}{dt} \right] = \Sigma [m v_z] \end{aligned} \right\} (2)$$

Fingiert man demnach, wie es in der Mechanik üblich ist, einen materiellen Punkt, der stets die entsprechende, während der Bewegung sich ändernde Lage des Massenmittelpunktes hat, dessen Masse ferner gleich der Gesamtmasse $M = \Sigma m$ des Punktsystems ist, und der als

terieller Massenmittelpunkt bezeichnet werden möge, so lehren die
 zten Gleichungen, dass, wofern man die stattfindenden Bewegungen
 r einzelnen Punkte in die entsprechenden componentalen Bewegungen
 rallel zu den beliebigen (rechtwinkligen oder schiefwinkligen) Co-
 dinatenachsen zerlegt, die Bewegungsgröße des fingierten mate-
 riellen Massenmittelpunktes bei jeder dieser componentalen
 bewegungen gleich ist der algebraischen Summe der ent-
 sprechenden Bewegungsgrößen der einzelnen Massenpunkte
 s Systems.

Finden nun continuierliche Änderungen der Geschwindigkeiten
 d ihrer Richtungen statt, so ergibt die abermalige Differentiation
 r Gleichungen (2) nach der Variablen t

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} = \Sigma \left(m \frac{d^2 x}{dt^2} \right), \quad M \frac{d^2 Y}{dt^2} = \Sigma \left(m \frac{d^2 y}{dt^2} \right), \quad M \frac{d^2 Z}{dt^2} = \Sigma \left(m \frac{d^2 z}{dt^2} \right)$$

Zufolge der Gleichungen (2) S. 318 ist demnach für ein jedes
 unbewegliches Punktsystem

$$\Sigma P_x = M \frac{d^2 X}{dt^2}, \quad \Sigma P_y = M \frac{d^2 Y}{dt^2}, \quad \Sigma P_z = M \frac{d^2 Z}{dt^2} \dots (3)$$

Die Gleichungen (3) lehren, dass in allen Fällen der Massen-
 ttelpunkt eines beliebigen materiellen freibeweglichen (ver-
 derlichen oder unveränderlichen) Punktsystems sich genau so
 wegt, wie sich ein an dessen Stelle befindlicher fictiver
 eibeweglicher materieller Punkt von der Masse $M = \Sigma m$,
 r außer aller Verbindung mit den übrigen Punkten des Punkt-
 systems stünde, bewegen würde, wofern alle äußeren Kräfte
 es Systems mit Beibehaltung ihrer Richtung und Größe auf der-
 elben einwirken würden; denn es stimmen die Gleichungen (3)
 genau überein mit den in der Dynamik des materiellen Punktes ab-
 eleiteten Bewegungsgleichungen für einen freibeweglichen materiellen
 unkt von der Masse M , dessen variable Coordinaten XYZ sind, und
 uf den gleichzeitig Kräfte einwirken, deren zu den Achsen parallele
 omponenten $P_x P_y P_z$ sind.

Dieses wichtige, schon von Newton gefundene Gesetz, demzu-
 lge die durch innere Kräfte p eines Punktsystems hervorgerufenen
 ewegungen auf die Bewegung des Massenmittelpunktes keinen
 einfluss haben (da für die inneren Kräfte [siehe S. 311] $\Sigma p_x = 0$,
 $p_y = 0$ und $\Sigma p_z = 0$ ist), wird das Gesetz der Erhaltung der
 ewegung des Schwerpunktes (Schwerpunktsgesetz) genannt.

So setzt z. B. der Massenmittelpunkt einer während ihrer Be-
 wegung in ihrer Trajectorie platzenden Bombe, bei welcher aus allen
 eh dem Massenmittelpunkte versetzten Kräften $P_x P_y P_z$ stets die

Schwerkraft $Q = Mg$ resultiert, die Bewegung in der (parabol) Trajectorie ungehindert weiter fort.

Wirken keine äußeren Kräfte $P_x P_y P_z$, sondern nur Kräfte auf das Punktsystem ein oder solche, bei we stets $\Sigma P_x = \Sigma P_y = \Sigma P_z = 0$ ist, so lehrt die Gleichung (3) dann $\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}, \frac{dZ}{dt}$ constante Werte haben; es sind also dann die d radlinigen componentalen Bewegungen des Massenmittelpunktes, förmig, so dass nach S. 99 nur wieder eine gleichförmige und linige Bewegung resultieren kann; demnach bewegt sich dan Massenmittelpunkt in einer geraden Linie mit constante schwindigkeit, oder aber er bleibt, wenn er ursprünglich ru demnach $\frac{dX}{dt} = 0, \frac{dY}{dt} = 0, \frac{dZ}{dt} = 0$ war, andauernd in Ruhe

Der Massenmittelpunkt unseres Sonnensystems z. B. müsste demnach geradlinig und gleichförmig im Weltraume fortbewegen in Ruhe verharren, wenn keine anderen Kräfte auf das Sonnens einwirken würden als die anziehenden Kräfte zwischen den körnern dieses Systems.

Nach dem obigen Grundgesetze für die Bewegung des M mittelpunktes müssen auch alle anderen in der Dynamik de beweglichen materiellen Punktes deducierten Gesetze auf die Bew desselben Anwendung finden, wenn man sich alle äußeren Kräf denselben wirkend denkt, so z. B. das Princip der lebendigen (Gleichung 7, S. 182), das Gesetz der Änderung der Bewegungsg (Gleichung 5, S. 175 und Gleichung 3, S. 180) u. s. w., nämlich

$$\left. \begin{aligned} \Sigma A_P &= \Sigma \int P dn = \frac{MV^2}{2} - \frac{MV_o^2}{2} \\ \int_0^t \Sigma P_x \cdot dt &= M \frac{dX}{dt} - M \left(\frac{dX}{dt} \right)_o \\ \int_0^t \Sigma P_y \cdot dt &= M \frac{dY}{dt} - M \left(\frac{dY}{dt} \right)_o \\ \int_0^t \Sigma P_z \cdot dt &= M \frac{dZ}{dt} - M \left(\frac{dZ}{dt} \right)_o \\ \int_0^t \Sigma P_t \cdot dt &= MV - MV_o \text{ u. s. w.} \end{aligned} \right\} (4)$$

wofern A_P die mechanische Arbeit der Kraft P , ferner P_t die tange Componente irgend einer der nach dem Massenmittelpunkte ve gedachten äußeren Kräfte bei der thatsächlichen Bewegung des M mittelpunktes und V die Geschwindigkeit des letzteren zur bedeutet, und wofern der Index o sich auf die Zeit $t = 0$ b

Die letzten Gleichungen lehren im Vereine mit der Gleichung (2), dass auf die Bewegungsquantitäten $\Sigma(mv_x)$, $\Sigma(mv_y)$, $\Sigma(mv_z)$ des ganzen Systems die inneren Kräfte keinen Einfluss haben, sondern dass die Summe der Bewegungsquantitäten parallel zu irgend einer beliebigen Achse nur von den äußeren Kräften allein abhängig ist, welches Gesetz man den Satz der Erhaltung der Quantität der Bewegung nennt. Wirken nämlich keine äußeren Kräfte auf das freibewegliche Punktsystem, so bleibt die im Sinne einer beliebigen Achse genommene Bewegungsquantität des Systems constant.

Anmerkung. Auch dies letztere Gesetz wurde schon von Newton aufgestellt.

Denkt man sich außer einem als ruhend angenommenen orthogonalen Achsensystem a ein zweites paralleles Achsensystem A , dessen Anfangspunkt der Massenmittelpunkt ist, und das in einer fortschreitenden, mit der Bewegung des Massenmittelpunktes übereinstimmenden Bewegung begriffen ist, und sind durch $x' y' z'$ die Coordinaten des beliebigen Massenpunktes m in Bezug auf dies Achsensystem bezeichnet, so ist $x = x' + X$, $y = y' + Y$, $z = z' + Z$, also auch $\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \frac{dX}{dt}$ oder, wofern durch $v_x v_y v_z$ die Componenten der Geschwindigkeit v des Punktes m bezüglich des ruhenden Achsensystems a , durch $v'_x v'_y v'_z$ die Componenten der relativen Geschwindigkeit v' desselben Punktes in Bezug auf das bewegliche Achsensystem A und durch $V_x V_y V_z$ die Componenten der Geschwindigkeit V des Massenmittelpunktes bezeichnet werden, $v_x = v'_x + V_x$, $v_y = v'_y + V_y$, $v_z = v'_z + V_z$ zu setzen. Es ist daher den Gleichungen (2) zufolge $\Sigma m v'_x = 0$, $\Sigma m v'_y = 0$, $\Sigma m v'_z = 0$. Da nun nach Gleichung 3, S. 95 $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, $v'^2 = v'_x{}^2 + v'_y{}^2 + v'_z{}^2$, $V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$ ist, so führt die Quadrierung der obigen Gleichungen $v_x = v'_x + V_x$ u. s. w. und deren Summation zu der Relation: $v^2 = v'^2 + 2(V_x v'_x + V_y v'_y + V_z v'_z) + V^2$. Multipliciert man diese Gleichung mit $\frac{m}{2}$ und addiert alle die so erhaltenen auf die einzelnen Massenpunkte sich beziehenden Gleichungen, so findet man:

$$\Sigma \frac{m v^2}{2} = \Sigma \frac{m v'^2}{2} + \frac{V^2}{2} \cdot \Sigma m + V_x \cdot \Sigma m v'_x + V_y \cdot \Sigma m v'_y + V_z \cdot \Sigma m v'_z,$$

somit, wenn man die früheren Gleichungen $\Sigma m v'_x = 0$ u. s. w. berücksichtigt,

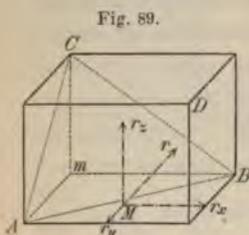
$$\Sigma \frac{m v^2}{2} = M \cdot \frac{V^2}{2} + \Sigma \frac{m v'^2}{2} \dots \quad (5)$$

d. h. es ist die kinetische Energie des Punktsystems die Summe aus der lebendigen Kraft des fictiven materiellen Massenmittelpunktes M und aus der kinetischen Energie der relativen Bewegung des Systems in

Bezug auf den Massenmittelpunkt (d. h. in Bezug auf ein fortschreitendes System, das mit diesem Punkte übereinstimmend sich bewegt.)

§ 58. **Spannungen in einem kontinuierlichen räumlichen Punktsystem.
Innere Kräfte eines starren Systems.**

Es sei M (Fig. 89) irgend ein materieller Punkt im Inneren eines im Gleichgewichte befindlichen räumlichen Punktsystems, dessen auf einander folgende Massenpunkte durchwegs in unendlich kleiner Distanz sich befinden, oder — mit anderen Worten — dessen Masse kontinuierlich im Raume vertheilt ist. Es sei ferner ΔF_z ein kleines, in beliebiger



Lage zum Punktsystem angenommenes ebenes Flächenelement mAB , innerhalb dessen sich der Punkt M befindet. Durch die entsprechend erweitert gedachte Ebene des Flächenelementes ΔF_z , dessen Normale mC zur z -Achse eines beliebigen rechtwinkligen Achsensystems gewählet sei, wird das Punktsystem in zwei Theilsysteme S und S' getheilt, deren Einwirkungen auf den Punkt M , da dieselben sich das Gleichgewicht halten, entgegengesetzt gleich sind. Aus allen den inneren Kräften, mit welchen die materiellen Punkte des einen dieser Theilsysteme S' allein, etwa des Punktsystems S' , das sich auf jener (in Fig. 89 unteren) Seite der Ebene des Flächenelementes ΔF_z erstreckt, nach welcher etwa die negative Richtung der z -Achse gerichtet angenommen wurde, auf den Punkt M einwirken, resultiert eine Kraft r , deren Richtung gegen das Flächenelement ΔF_z irgendwie geneigt ist oder auch in die Ebene des Elementes ΔF_z hineinfällt. Diese Kraft r denke man sich nun in ihre drei orthogonalen Componenten $r_x r_y r_z$ zerlegt, von welchen die (positive oder negative) Componente r_z zur Ebene ΔF_z senkrecht gerichtet ist, während r_x und r_y in der Ebene des Flächenelementes wirken. (Es kann auch eine oder es können auch mehrere dieser Componenten Null werden. So würde z. B., wenn bei dem System S' vollkommene Symmetrie in Bezug auf die z -Achse bestehen würde, so dass jedem Punkte m' auf der einen Seite der z -Achse ein symmetrisch gelegener Punkt m'' auf der anderen Seite dieser Achse entsprechen würde, und wofern die anziehenden oder abstoßenden Kräfte, mit welcher diese beiden Punkte m' und m'' auf M einwirken die gleiche Größe hätte, sich aus je zwei solchen Kräften, daher auch aus sämtlichen Kräften, wenn diese Kräfte abstoßende wären, offenbar ein positives r_z [Druckkraft], dagegen, wenn sie anziehende Kräfte wären, ein negatives r_z [Zugkraft] ergeben, wobei in beiden Fällen $r_x = r_y = 0$ wäre; würde dagegen je eine dieser beiden gleichen Kräfte eine anziehende, die

andere eine abstoßende Kraft sein, so würde die Richtung der Resultanten r [Schubkraft] in die Ebene von ΔF_z fallen, daher $r_z = 0$ werden.) In analoger Weise wird auch jeder andere materielle Punkt des Flächenelementes ΔF_z von demselben Punktsystem S' beeinflusst, so dass auf die einzelnen Punkte dieses Flächenelementes normal zu ΔF_z die Kräfte $r_z, r_z', r_z'' \dots$ einwirken, deren algebraische Summe durch Δp_z bezeichnet sei, während in der Ebene von ΔF_z die Kräfte $r_y, r_y', r_y'' \dots$, deren Summe Δp_y sei, und die Kräfte $r_x, r_x', r_x'' \dots$ wirken, deren Summe Δp_x sei. Es sind dann offenbar $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$ die orthogonalen Componenten jener Kraft $\Delta p = \sqrt{(\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2 + (\Delta p_z)^2}$, die sich als Resultante aller der Kräfte $r, r', r'' \dots$ ergeben würde, wenn diese Kräfte, statt auf die verschiedenen materiellen Punkte des Flächenelementes ΔF_z , sämtlich auf denselben materiellen Punkt M einwirken würden. Die zum Flächenelemente ΔF_z normale Componente Δp_z wird, je nachdem dieselbe negativ oder positiv ist, d. h. nach der Seite des einwirkenden Punktsystems S' oder nach der entgegengesetzten gerichtet ist, eine Zug- oder Druckkraft (allgemein Normalkraft, longitudinale Reaction) genannt, während die aus Δp_x und Δp_y resultierende Kraft Δp_t , die in der Ebene des Flächenelementes ΔF_z wirkt, nämlich $\Delta p_t = \sqrt{(\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2}$ die Schubkraft oder Abscherungskraft, wohl auch Schubreaction (tangente Reaction) genannt wird, welchen Namen auch ihre Componenten Δp_x und Δp_y führen.

Die Quotienten $\frac{\Delta p}{\Delta F_z}$, bezw. $\frac{\Delta p_z}{\Delta F_z}$ bezw. $\frac{\Delta p_t}{\Delta F_z}$ geben die mittlere Größe der resultierenden Kraft Δp , beziehungsweise der Normalkraft Δp_z und der Schubkraft Δp_t für die Flächeneinheit des Elementes ΔF_z an, die als mittlere (durchschnittliche) Spannungen für dieses Flächenelement, nämlich als mittlere resultierende Spannung, beziehungsweise mittlere Zug- oder Druckspannung (Normalspannung, Longitudinalspannung), beziehungsweise mittlere Schubspannung (tangente Spannung) bezeichnet werden.

Nimmt man nun das den Punkt M , dessen Coordinaten x, y, z sind, enthaltende (etwa kreisförmige) Flächenelement ΔF_z immer kleiner an, so dass es gegen Null convergiert, so nähern sich die oberwähnten Differenzenquotienten bestimmten Grenzwerten, nämlich den entsprechenden Differentialquotienten $\frac{dp}{dF_z}, \frac{dp_t}{dF_z}, Z_z = \frac{dp_z}{dF_z}$, bezw. $Y_z = \frac{dp_y}{dF_z}, X_z = \frac{dp_x}{dF_z}$. Diese Differentialquotienten heißen die specifischen Spannungen (pro Flächeneinheit) im Punkte (x, y, z) für das unendlich kleine Flächenelement dF_z oder auch kurzweg die Spannungen in diesem Flächenelement, und zwar ist $\frac{dp}{dF_z}$ die resultierende Spannung (totale Spannung), $Z_z = \frac{dp_z}{dF_z}$ die Zug-,

beziehungsweise Druckspannung (Längsspannung, normale Spannung) und $\frac{dp_t}{dF_z} = \sqrt{\left(\frac{dp_x}{dF_z}\right)^2 + \left(\frac{dp_y}{dF_z}\right)^2} = \sqrt{X_z^2 + Y_z^2}$ die Schubspannung (Querspannung, tangentielle Spannung) in diesem Flächenelement. Die Grenzrichtung, der sich die Richtung der Kraft $\mathcal{A}p$ bzw. $\mathcal{A}p_t$ mit abnehmendem $\mathcal{A}F_z$ ins Unendliche annähert, ist die Richtung der resultierenden Spannung, beziehungsweise jene der Schubspannung für dieses Flächenelement.

In analoger Weise ergeben sich für ein den Punkt (x, y, z) in sich schließendes unendlich kleines Flächenelement dF_x , bzw. dF_y , das zur x -Achse, bzw. y -Achse senkrecht angenommen ist, die Spannungskomponenten X_x, Y_x, Z_x , bzw. X_y, Y_y, Z_y .

Auf die erwähnten zwei Arten der Spannungskomponenten, nämlich auf longitudinale Spannungen (Zug- oder Druckspannungen, je nachdem sie negativ oder positiv sind) und auf Schubspannungen, lassen sich demgemäß alle inneren Kräfte, und zwar sowohl bei festen als auch bei flüssigen Körpern zurückführen.

Da den obigen Definitionen zufolge die spezifischen Spannungen und ihre Componenten stets durch das Verhältnis der Maßzahl einer Kraft P zu der Maßzahl einer Fläche F bestimmt sind, so ist deren

$$\text{Dimension } \frac{[P]}{[F]} = \frac{mlt^{-2}}{l^2} = ml^{-1}t^{-2}.$$

Kennt man die normalen Spannungskomponenten X_x, Y_y, Z_z für drei durch den Punkt m , dessen Coordinaten x, y, z sind, zu den Coordinatenebenen parallel gelegte Flächenelemente mAC , mBC , mAB (Fig. 89), d. i. für die Flächenelemente dF_x, dF_y, dF_z , ferner die entsprechenden tangentialen Spannungskomponenten $Y_x, Z_x, Z_y, X_y, X_z, Y_z$, so lässt sich Größe und Richtung der totalen Spannung T und daher auch die Richtung und Größe der Spannungskomponenten (der longitudinalen und tangentiellen Spannungen) für ein beliebiges anderes durch m hindurchgelegtes Flächenelement derart bestimmen, dass man parallel zu demselben eine die früheren Flächenelemente schneidende dreieckförmige Fläche $CAB = f$ (Fig. 89) legt, wodurch ein elementares Tetraeder $mCAB$ erhalten wird, für welches im Gleichgewichtszustande nach § 54 sowohl die Summe der X -Componenten, als jene der Y -Componenten, wie auch jene der Z -Componenten der einwirkenden Kräfte, d. i. aller der früher erwähnten Kräfte und der Kraft $T \cdot f$ Null sein müssen; aus diesen drei Gleichungen lässt sich in bekannter Weise die zu den Achsen parallelen Componenten von T ermitteln, wenn die zu den Coordinatenachsen parallelen Kanten mA, mB und mC des Tetraeders unendlich klein angenommen werden. Ebenso muss bei denselben Voraussetzungen das elementare materielle rechtwinklige Parallelepipet $mABCD$ unter dem Einfluß

derjenigen Kräfte, die von dem dasselbe rings umgebenden Punktsysteme herrühren, und der auf die innere Masse des Parallelepipeds etwa einwirkenden äußeren Kräfte im Gleichgewichte sich befinden, so dass, wenn nur Wechselwirkungen der ersten Art (Anziehungen und Abstoßungen) vorausgesetzt werden und daher aus bekannten Gründen die gegenseitigen Einwirkungen der innerhalb des erwähnten Parallelepipeds enthaltenen materiellen Punkte nicht in Rechnung kommen, die bekannten sechs Gleichungen (1) S. 313 Anwendung finden, aus welchen Gleichungen sich gewisse Beziehungen zwischen den Kräften (z. B. die Relationen $X_y = Y_x$, $X_z = Z_x$, $Y_z = Z_y$ u. s. w.) ermitteln lassen, welche die Grundgleichungen der Statik elastischer Körper sind, aus welchen sich dann, da d'Alemberts Princip zur Anwendung kommen kann, jene der Dynamik der elastischen Körper deducieren lassen. Die nähere Erörterung dieses Gegenstandes gehört in die Theorie der Elasticität und fällt außerhalb des Rahmens dieses Lehrbuches.

Ist das materielle Punktsystem ein starres (unveränderliches) Punktsystem, so lässt sich diese Eigenschaft der Starrheit, d. i. mit anderen Worten die Unveränderlichkeit der Entfernung je zweier beliebiger materieller Punkte dieses Punktsystems, die stets besteht, mögen äußere Kräfte welcher Größe und Richtung auch immer auf die einzelnen Punkte einwirken, auf die Wirksamkeit innerer Kräfte zurückführen, und zwar soll in der folgenden Entwicklung gezeigt werden, dass die Annahme des Vorhandenseins von Wechselwirkungen bloß der ersten Art (d. i. von anziehenden und abstoßenden Kräften) für die vollständige Erklärung der Unveränderlichkeit (Starrheit) des Punktsystems nothwendig und hinreichend ist.

Setzt man nämlich zunächst ein unveränderliches System von bloß zwei materiellen Punkten voraus und sind m_1 und m_2 die Massen dieser zwei Punkte, welche bezüglich eines orthogonalen fixen, d. i. an der Bewegung des Punktsystems nicht theilnehmenden Achsensystems zu irgend einer Zeit t die Coordinaten $(x_1 y_1 z_1)$ und $(x_2 y_2 z_2)$ haben, und ist r die als unveränderlich vorausgesetzte Entfernung $m_1 m_2$ derselben, als deren positive Richtung diejenige von m_1 nach m_2 angenommen sei, so ist bekanntlich

$$\left. \begin{aligned} x_2 - x_1 &= r \cos(xr), \quad y_2 - y_1 = r \cos(yr), \quad z_2 - z_1 = r \cos(zr) \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 &= r^2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Da wegen der vorausgesetzten Starrheit r^2 constant, somit für jede Zeit t der Differentialquotient von r^2 nach t Null sein muss, so ergibt die Differentiation der letzten Gleichung nach t

$$(x_2 - x_1) \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) + (y_2 - y_1) \left(\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} \right) + \left. \begin{aligned} &+ (z_2 - z_1) \left(\frac{dz_2}{dt} - \frac{dz_1}{dt} \right) = 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

Da nun, wenn v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten der Punkte m_1 und m_2 bedeuten, bekanntlich $\frac{dx_1}{dt} = v_1 \cos(xv_1)$, $\frac{dx_2}{dt} = v_2 \cos(xv_2)$, $\frac{dy_1}{dt} = v_1 \cos(yv_1)$ u. s. w. ist, so lehrt die Einsetzung dieser Werte und der Werte aus (1) in die Gleichung (2), wenn man rv_1 und rv_2 als gemeinsame Factoren heraushebt und die bekannte Formel für den Cosinus des Neigungswinkels zweier Geraden anwendet, dass $rv_2 \cos(rv_2) - rv_1 \cos(rv_1) = 0$, also

$$v_1 \cos(rv_1) = v_2 \cos(rv_2) \dots (3)$$

ist, d. h. dass jede überhaupt mögliche Bewegung eines starren Körpers nur eine solche sein kann, bei welcher die in die Gerade $m_1 m_2$ fallenden Componenten $v_1 \cos(rv_1)$ und $v_2 \cos(rv_2)$ der Geschwindigkeiten v_1 und v_2 je zweier beliebiger Punkte m_1 und m_2 stets die gleichen sind, während die zu $m_1 m_2$ senkrechten Geschwindigkeitscomponenten jeden möglichen Wert haben können. Es ist dies Ergebnis auch sofort einleuchtend, da ja bei der Ungleichheit dieser Geschwindigkeitscomponenten $v_1 \cos(rv_1)$ und $v_2 \cos(rv_2)$ sich die Punkte m_1 und m_2 offenbar einander entweder nähern oder von einander entfernen müssten.

Differenziert man die für eine jede Zeit t gültige Gleichung (2) abermals nach t , so findet man, wenn man die Werte in (1) berücksichtigt und kürzshalber durch v^2 den Ausdruck bezeichnet:

$$v^2 = \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_2}{dt} - \frac{dz_1}{dt} \right)^2, \left. \begin{aligned} &\text{die Gleichung} \\ &v^2 + r \cos(xr) \left(\frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) + r \cos(yr) \left(\frac{d^2 y_2}{dt^2} - \frac{d^2 y_1}{dt^2} \right) + \\ &\quad + r \cos(zr) \left(\frac{d^2 z_2}{dt^2} - \frac{d^2 z_1}{dt^2} \right) = 0 \end{aligned} \right\} (4)$$

Durch Einsetzung der früheren Werte $\frac{dx_1}{dt} = v_1 \cos(xv_1)$ u. s. w. in die vorletzte Gleichung findet man

$$v^2 = v_2^2 + v_1^2 - 2v_1 v_2 \cos(v_1 v_2) \dots (5)$$

d. h. es ist v die durch Zusammensetzung von v_2 mit $(-v_1)$ sich nach Art der Gleichung (2) S. 48 oder auch unmittelbar aus dem entsprechenden Geschwindigkeitsparallelogramm sich ergebende relative Geschwindigkeit des Punktes m_2 in Bezug auf ein Achsensystem

welches eine mit der Bewegung des Punktes m_1 übereinstimmende fortschreitende Bewegung ausführt (vergl. Fig. 41 S. 93).

Sind nun P_1 und P_2 die Resultanten der auf die Punkte m_1 und m_2 einwirkenden äußeren Kräfte und p die innere Kraft, mit welcher der Punkt m_1 auf m_2 einwirkt, so ist die auf m_1 einwirkende Gegenkraft ($-p$) dieser Kraft p entgegengesetzt gleich und nach Gleichung (4) S. 174

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{P_2 \cos(x P_2) + p \cos(x p)}{m_2}, \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{P_1 \cos(x P_1) - p \cos(x p)}{m_1},$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = \frac{P_2 \cos(y P_2) + p \cos(y p)}{m_2} \text{ u. s. w.}$$

Setzt man diese Werte in die letzte Gleichung (4) ein und dividiert durch r , so erhält man

$$\frac{v^2}{r} + \frac{P_2 \cos(r P_2)}{m_2} - \frac{P_1 \cos(r P_1)}{m_1} + p \cos(p r) \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) = 0 \dots (6)$$

Zerlegt man nun die inneren Gegenkräfte p und ($-p$) der beiden materiellen Punkte in die Componenten $p \cos(p r)$, welche in der Richtung von r wirksam und abstoßende oder anziehende Kräfte sind, je nachdem $\cos(p r)$ positiv oder negativ ist, und in die darauf senkrechten Componenten $p \sin(p r)$, so bedingen die ersteren Kräfte $p \cos(p r)$ eine Gegenwirkung der ersten Art, während die letzteren Componenten $p \sin(p r)$ Wechselwirkungen der zweiten Art bedingen.

Die aus der bloßen Annahme der Starrheit deducierte Gleichung (6) lehrt nun, dass, mögen die äußeren Kräfte P_1 und P_2 , die Massen m_1 und m_2 und die relative Geschwindigkeit v welchen Wert immer haben, stets eine Wechselwirkung der ersten Art nothwendig ist, und zwar lässt sich die Größe $p \cos(p r)$ der betreffenden abstoßenden oder anziehenden Kraft aus der Gleichung (6) genau bestimmen. Dass aber auch die Annahme solcher innerer Kräfte der ersten Art $p \cos(p r)$, die der Gleichung (6) genügen, zur Herbeiführung der Unveränderlichkeit des Punktsystems hinreichend ist, ergibt sich sofort, wenn man die frühere Schlussfolgerung umkehrt und demgemäß die durch zweimalige Differentiation aus der letzten Gleichung in (1) abgeleitete Gleichung (6) integriert, wodurch man zur Gleichung (2) gelangt, wofern man, um als Integrationsconstante rechterseits Null zu erhalten, annimmt, dass die ursprüngliche Bewegung der Bedingung der Starrheit entspricht, also dass etwa zur Zeit $t = 0$ zufolge der Gleichung (3) $v_2 \cos(r v_2) - v_1 \cos(r v_1) = 0$ ist oder aber, dass das Punktsystem anfänglich in Ruhe, also $v_2 = v_1 = 0$ war; durch abermalige Integration der so gefundenen Gleichung (2) ergibt sich sodann, dass in der That $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$, also auch die Entfernung r der Punkte m_1 und m_2 stets constant bleibt, so dass dadurch

nachgewiesen ist, dass auch umgekehrt die bloße Annahme solcher innerer Kräfte der ersten Art, die während der ganzen Bewegung stets der Gleichung (6) entsprechen, die Starrheit zur Folge hat. Dass auch für eine beliebige Zahl von Punkten die Starrheit durch bloße innere Kräfte der ersten Art bedingt ist, lässt sich durch eine analoge Entwicklung erkennen, nur treten in die der Gleichung (6) entsprechenden Gleichungen, welche die Unveränderlichkeit der Entfernung je zweier Punkte ausdrücken, so viele unbekannte Glieder von der Form $p_n \cos(rp_n)$ ein, als Paare von inneren Gegenkräften vorhanden sind. Bei einem System von 3, bzw. 4 Punkten erhält man so 3, bzw. 6 Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten. Ist die Zahl der Punkte größer als 4, so genügen den entsprechenden Gleichungen (6) unzählige Werte der inneren Kräfte.

Aus dem Gesagten erhellt, dass zwar durch die Annahme der Starrheit der Punktsysteme Wechselwirkungen der zweiten Art keinesfalls ausgeschlossen sind, dass jedoch dieselben nicht notwendig sind, und es haben dann, falls solche vorhanden sind, wie schon bemerkt wurde, die meisten der früher abgeleiteten und auch in der Folge abzuleitenden Gesetze nur dann Giltigkeit, wenn Wechselwirkungen dieser (der zweiten) Art zu den äußeren Kräften hinzugerechnet werden

Capitel VII.

Elemente der Kinematik eines starren (unveränderlichen) Punktsystems.

§ 59. Einleitung.

Dem Begriffe eines starren Punktsystems (eines starren Körpers (§ 6) zufolge ändert sich bei der Bewegung desselben die Entfernung je zweier materieller Punkte dieses Punktsystems in keiner Weise mögen Kräfte welcher Art immer auf dasselbe einwirken.

Durch diese Eigenschaft sind, mögen die Bewegungen der einzelnen Punkte bezüglich irgend eines Achsensystems welche immer sein, bestimmte gegenseitige Beziehungen der gleichzeitigen Bahnen dieser Punkte bedingt, die in diesem Capitel näher untersucht werden sollen.

Zunächst ist hervorzuheben, dass bei einem jeden gegebenen starren Punktsystem die Bewegung aller Punkte schon vollkommen determiniert ist durch die Bewegungen dreier willkürlich gewählte Punkte ABC des Punktsystems, die nicht in einer Geraden gelegen sind; denn verbindet man einen beliebigen anderen Punkt D des Punktsystems mit den Punkten ABC und diese untereinander durch

Gerade, so bilden DA, DB, DC die ihrer Länge nach unveränderlichen Seitenkanten eines Tetraeders (einer dreiseitigen Pyramide), deren Basis das unveränderliche Dreieck ABC ist, und es ist, wenn die Basis ABC in eine beliebige Nachbarlage gebracht wird, durch die letztere wegen der unveränderlichen Länge der Seitenkanten auch die neue Lage der Spitze D der starren Pyramide mit bestimmt. Wenn auch streng genommen bei gegebenen Seitenkanten zur neuen Lage des Grunddreiecks zwei mögliche, und zwar zu der Ebene des letzteren symmetrische Lagen des Punktes D hinzugehören, so verschwindet diese scheinbare Unbestimmtheit sofort, wenn man, wie dies hier geschehen soll, die kontinuierliche Bewegung des Körpers, d. i. den allmählichen Übergang der Punkte aus der gegebenen Anfangslage in ihre Endlage in Betracht zieht, wenn man also bei der Betrachtung der Bewegung in einer unendlich kleinen Zeit berücksichtigt, dass die neue Lage des Punktes D eine Nachbarlage der bekannten früheren sein soll, so dass der Weg des Punktes D als unendlich klein vorausgesetzt werden muss.

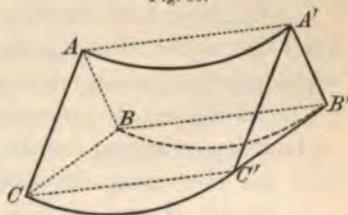
Alle Bewegungen eines starren Körpers lassen sich, wie später gezeigt werden wird, auf zwei elementare (fundamentale) Bewegungsformen zurückführen, aus welchen sie resultieren, und zwar auf jene der fortschreitenden (progressiven) Bewegung und jene einer Drehung (Rotation) um eine Achse, welche beide Bewegungsformen daher zunächst zu erörtern sind.

§ 60. Die fortschreitende und die drehende Bewegung um eine Achse.

Unter einer fortschreitenden, progressiven oder translatorischen Bewegung ist eine solche Bewegung zu verstehen, bei welcher die gleichzeitigen Bahnen aller Punkte des Punktsystems zu einander parallel und congruent sind.

Sind also $A, B, C \dots$ (Fig. 90) die gleichzeitigen Lagen der einzelnen materiellen Punkte zu irgend einer Zeit und $A' B C' \dots$ die Lagen dieser Punkte nach Verlauf einer beliebigen Zeit t , so dass die Curven $AA', BB', CC' \dots$ die während dieser Zeit t von den einzelnen Punkten durchlaufenen Bahnen sind, so sind bei einer fortschreitenden Bewegung diese Curven stets parallel und congruent, also $AA' \parallel BB' \parallel CC' \dots$ und $AA' \cong BB' \cong CC' \dots$

Fig. 90.



Dass diese Bewegung bei einem starren System möglich ist, ergibt sich daraus, dass bei dieser Bewegungsform auch die den gleichzeitigen Bahnen zugehörigen Sehnen parallel und gleich sein müssen, daher die Vierecke $ABA'B', ACA'C', BCB'C'$, in welchen

zwei Gegenseiten parallel und gleich sind, nach einem bekannten Satze der Geometrie Parallelogramme sein müssen, folglich auch $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ u. s. w. ist, wie es der Zustand der Starrheit erfordert. Zugleich ist aber in den erwähnten Parallelogrammen $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$. . ., so dass bei einer fortschreitenden Bewegung eine jede Gerade, welche zwei beliebige Punkte des Systems verbindet, während der ganzen Bewegung stets zu ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt und man daher auch diese letztere Eigenschaft, derzufolge stets nur eine Parallelverschiebung des ganzen Punktsystems stattfindet, zur Definition einer fortschreitenden Bewegung benutzen kann.

Eine unmittelbare Folgerung aus dem Gesagten ist die, dass nicht nur die gleichzeitigen Bewegungsrichtungen, sondern auch die gleichzeitigen Geschwindigkeiten $v = (ds : dt)$ aller Punkte des Punktsystems bei einer fortschreitenden Bewegung infolge des Parallelismus und der Gleichheit der gleichzeitigen Wegelemente ds die gleichen sind.

Die fortschreitende Bewegung kann offenbar bei einer jeden Bewegungsform der einzelnen materiellen Punkte und bei jeder Art der Bahn derselben stattfinden, und zwar ist die Bewegung aller Punkte des Körpers bestimmt durch die Bewegung eines einzigen Punktes desselben; die Bewegung der einzelnen Punkte kann dabei eine gleichförmige oder ungleichförmige, eine beschleunigte oder verzögerte, eine kreisende (circulierende) oder schwingende (oscillatorische) u. s. w. und die Bahn geradlinig, kreisförmig, elliptisch oder wie immer beschaffen sein; es muss nur stets die Bedingung erfüllt werden, dass die äußere Körperform stets zu ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt.

Durch Zusammensetzung zweier oder mehrerer gleichzeitiger fortschreitender Bewegungen ergibt sich offenbar abermals eine resultierende progressive Bewegung (vergl. § 27), und es lässt sich auch umgekehrt eine translatorische Bewegung in zwei oder mehrere andere translatorische componentale Bewegungen zerlegen.

Als eine rotierende, drehende Bewegung oder Rotation um eine Achse bezeichnet man eine jede Bewegung, welche ein unveränderliches Punktsystem vollzieht, wenn zwei oder mehrere in einer — Drehachse, Rotationsachse, auch kurzweg Achse genannten — Geraden gelegene materielle Punkte dieses Systems ihre Lage während der Bewegung des Körpers nicht ändern, also fixe Punkte sind.

Durch O und O' (Fig. 91) seien die beiden fixen materiellen Punkte der Achse bezeichnet. C sei die orthogonale Projection des beliebigen materiellen Punktes M des Körpers auf die Rotationsachse, daher $CM \perp OO'$. Ist nun M' eine beliebige andere Lage, in welche M während der Rotation gelangt, so ist, da wegen der vorausgesetzten

starrheit des Punktsystems die Distanz je zweier materieller Punkte desselben stets constant bleibt, $MO = M'O$ und $MO' = M'O'$, somit $\triangle MOO' \cong \triangle M'O'O'$, daher auch $\sphericalangle MOO' = \sphericalangle M'O'O'$. Wegen der Gleichheit der beiden letzteren Winkel ist dann aber auch $\triangle OMC \cong \triangle O'M'C$, weshalb auch nicht nur das Dreieck OCM , sondern auch das Dreieck $O'CM'$ bei C rechtwinklig und $M'C = MC$ ist. Es stehen demnach die den bestimmten Punkt C mit allen möglichen Lagen des Punktes M verbindenden Radien auf der Geraden OO' im Punkte C senkrecht und sind einander gleich, wodurch die bekannte Thatsache nachgewiesen ist, dass bei einer jeden rotierenden Bewegung ein jeder nicht in der Rotationsachse gelegener materieller Punkt M des Körpers genöthigt ist, sich in einer ebenen Bahn, und zwar einer Kreisbahn, zu bewegen, deren Ebene auf der Achse senkrecht steht, und deren Mittelpunkt C in der Achse gelegen ist.

Die auf der Achse OO' senkrechte Ebene, in welcher sich ein beliebiger Punkt M während der Rotation bewegt, heißt die Rotationsebene des Punktes M , der Kreis, den M hierbei beschreibt, der Rotationskreis desselben, der Halbmesser dieses Kreises der rotierende Radius vector und der Mittelpunktswinkel MCM' , durch dessen Winkelfläche sich der Radius vector irgend eines Punktes M während irgend einer Zeit bewegt, der dieser Zeit entsprechende Rotationswinkel oder Drehungswinkel.

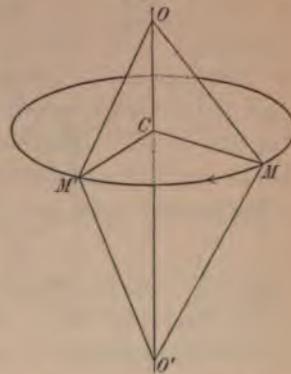
Fasst man diese Bewegung in irgend einem Rotationskreise ins Auge, so wird dieselbe sicher — von irgend einer der beiden Seiten der Rotationsebene betrachtet — im Sinne des Uhrzeigers vor sich gehen. Die von dem Mittelpunkte dieses Rotationskreises nach dieser Seite der Ebene hingehende Richtung der Achse sei hier und stets auch späterhin als die positive Richtung der Rotationsachse, die entgegengesetzte als die negative bezeichnet.

Bei einer jeden drehenden Bewegung um eine Achse sind alle Rotationswinkel, durch deren Winkelflächen sich die Radiusvectors der einzelnen Punkte des rotierenden starren Körpers in derselben Zeit bewegen, einander gleich.

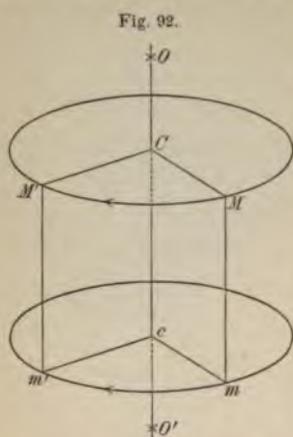
Um dies für zwei beliebige Punkte des Körpers nachzuweisen, werde dies zunächst dargethan:

a) für den Fall, dass diese zwei Punkte M und m in einer zur Rotationsachse OO' parallelen Geraden liegen, also $Mm \parallel OO'$ (Fig. 92) ist.

Fig. 91.



Die Lagen der Punkte M und m nach einer beliebigen Zeit t seien M' und m' . Wegen des Parallelismus der Geraden Mm zu

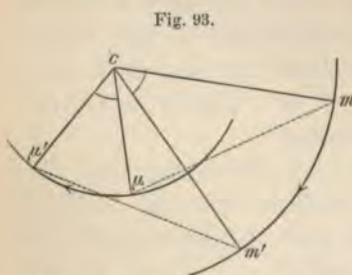


der auf den Rotationsebenen MCM' und mcm' der beiden Punkte senkrechten Drehachse OO' ist auch die Strecke Mm zu den beiden parallelen Rotationsebenen senkrecht und bestimmt demnach ihren kürzesten Abstand. Da aber infolge der vorausgesetzten Starrheit des Körpers $M'm' = Mm$ ist, so ist auch $M'm'$ dem kürzesten Abstände der parallelen Rotationsebenen gleich, und es muss daher $M'm'$ nach einem bekannten Satze der Stereometrie auf diesen Ebenen senkrecht stehen. Eine unmittelbare Folge des letzterwiesenen Umstandes ist der Parallelismus der Geraden $M'm'$ zu Mm und zu OO' . Durch je zwei

dieser drei Parallelen lässt sich aber eine Ebene legen, und es müssen dann die Durchschnittslinien dieser Ebenen mit den parallelen Rotationsebenen gleichfalls parallel sein, so dass $CM \parallel cm$ und $CM' \parallel cm'$ ist, woraus sofort die Gleichheit der beiden von parallelen und gleichgerichteten Schenkeln eingeschlossenen Mittelpunktwinkel MCM' und mcm' folgt.

Aus dieser Deduction ist sofort zu ersehen, dass man die jeweilige Lage des einen dieser Punkte findet, wenn man die gleichzeitige Lage des anderen Punktes in die Rotationsebene des ersteren orthogonal projiziert, so dass eine jede der beiden gleichzeitigen Bahnen MM' und mm' die orthogonale Projection der anderen ist.

b) für den Fall, dass beide Punkte m und μ (Fig. 93) in derselben zur Drehachse senkrechten Ebene gelegen sind, welche dann die gemeinsame Rotationsebene beider Punkte ist und die Achse im Punkte c (siehe Fig. 92) schneidet, ist der Beweis etwa folgenderweise zu führen:



Die gleichzeitigen Bahnen der materiellen Punkte m und μ seien die Kreisbögen mm' und $\mu\mu'$. Verbindet man m mit μ und m' mit μ' , so ist wegen der vorausgesetzten Starrheit $m\mu = m'\mu'$, daher infolge der Seitengleichheit $\triangle cm\mu \cong \triangle cm'\mu'$, folglich $\sphericalangle mc\mu = \sphericalangle m'c\mu'$. Wenn man nun je nach der dem speciellen Falle, welcher der Zeichnung zugrunde liegt, entsprechenden gegenseitigen Lage der Punkte den Winkel $\mu cm'$ (bzw. $mc\mu'$) auf beiden Seiten der letzten Gleichung subtrahiert (wie in Fig. 93) oder addiert, so

ergibt sich in allen Fällen die Gleichheit der Rotationswinkel $\mu c \mu'$ und $m c m'$.

c) Für den allgemeinen Fall, dass zwei materielle Punkte M und μ , deren gleichzeitige Bahnen MM' und $\mu\mu'$ sind, weder der Bedingung a) noch b) genügen, projiciere man den einen Punkt M in die Rotationsebene des anderen Punktes μ , und diese Projection sei wie in Fig. 92 und 93 durch m bezeichnet. Diesen Punkt m denke man sich nun mit dem starren System in unveränderlicher Verbindung, so dass er an der Rotation mit theilnimmt und in der ins Auge gefassten Zeit den Kreisbogen mm' zurücklegt. Zuzufolge a) ist $\sphericalangle MCM' = \sphericalangle mcm'$, und nach b) ist $\sphericalangle mcm' = \sphericalangle \mu c \mu'$, so dass auch, wie zu beweisen war, $\sphericalangle MCM' = \sphericalangle \mu c \mu'$ ist.

Da sonach, wie hier allgemein nachgewiesen wurde, der derselben Zeit t entsprechende Rotationswinkel φ für alle materiellen Punkte des rotierenden Körpers der gleiche ist, weshalb er künftighin kurzweg als der Rotationswinkel des Körpers bezeichnet werden soll, da ferner die Lage der Rotationsebenen und die Länge der Radienvectoren sich in keiner Weise ändert, so ist die Art der rotierenden Bewegung lediglich durch die Art und Weise der Änderung des Rotationswinkels φ vollkommen charakterisiert.

Ist nun s der in der beliebig angenommenen (variablen) Zeit t durchlaufene Kreisbogen eines beliebigen materiellen Punktes m , welcher letztere von der Drehachse den constanten Abstand r hat, so ist, wofern der zugehörige variable Rotationswinkel φ im Bogenmaße ausgedrückt ist, $s = r \cdot \varphi$. Ist $r = 1$, so ist $\varphi = s$, d. h. die Maßzahl des in einer beliebigen Zeit t durchlaufenen Rotationswinkels φ ist stets bestimmt durch die gleiche Maßzahl der in derselben Zeit durchlaufenen Bahn irgend eines Punktes des Körpers, der von der Achse die Entfernung 1 hat. Ein solcher Punkt sei kürzesthalber künftighin stets als „Punkt E “ benannt.

Dementsprechend stellt der Differentialquotient $\frac{d\varphi}{dt}$, der durch w bezeichnet werden möge, nicht nur die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Rotationswinkel φ ändert, sondern auch die Geschwindigkeit des Punktes E dar, und diese Geschwindigkeit w wird die Winkelgeschwindigkeit der Rotation oder kurzweg Rotationsgeschwindigkeit (Drehungsgeschwindigkeit) genannt.

Da (siehe S. 97) der stets im Bogenmaß ausgedrückte Winkel φ die Dimension 1 hat (d. h. bezüglich der Längengrößen von der 0 -ten Dimension ist), so ist die Dimension der Winkelgeschwindigkeit $[w] = \frac{1}{t} = t^{-1}$.

Durch Differentiation der obigen allgemein giltigen Gleichung $s = r\varphi$ ergibt sich, wenn die variable Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ des beliebigen Punktes m durch v bezeichnet wird,

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = r w \quad (1)$$

d. h. die Geschwindigkeit v eines beliebigen Punktes m eines rotierenden starren Körpers ist stets das Product aus dem Radius vector dieses Punktes und der gleichzeitigen Winkelgeschwindigkeit.

Der durch γ zu bezeichnende Differentialquotient $\frac{dw}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ drückt bei einer Drehung um eine fixe Achse die Beschleunigung aus, mit der sich der Rotationswinkel im Laufe der Zeit t ändert, oder es ist, da w die Geschwindigkeit, mit der sich der Punkt E in seiner Kreisbahn bewegt, bedeutet, durch γ auch die tangentielle Beschleunigung des Punktes E ausgedrückt. Diese Beschleunigung γ nennt man die Winkelbeschleunigung der Rotation oder kurzweg die Rotationsbeschleunigung (Drehungsbeschleunigung). Ist die Bewegung des Punktes E , daher auch aller anderen Punkte eine verzögerte, so bezeichnet man den absoluten Zahlwert von γ auch als die Winkelretardation (Winkelverzögerung). Die Dimension der Winkelbeschleunigung γ ist dieser Definition zufolge $[\gamma] = \frac{[w]}{t} = \frac{t^{-1}}{t} = t^{-2} = \frac{1}{t^2}$.

Die Division der beiden Grundgleichungen $w = \frac{d\varphi}{dt}$ und $\gamma = \frac{dw}{dt}$ führt zu der für jede Rotation giltigen Beziehung

$$w \cdot dw = \gamma d\varphi \quad (2)$$

Die Differentiation der allgemeinen Gleichung (1) lehrt, dass die durch p_t zu bezeichnende tangentielle Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ eines beliebigen Punktes m des rotierenden Körpers

$$p_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d^2\varphi}{dt^2} = r \frac{dw}{dt} = r \gamma \quad (3)$$

d. h. stets dem Producte aus dem constanten Radius vector r dieses Punktes und der Winkelbeschleunigung γ gleich ist.

Ist die Bewegung der einzelnen Punkte des rotierenden Körpers eine gleichförmige, ist also die Winkelgeschwindigkeit w constant, somit $\gamma = \frac{dw}{dt}$ dauernd gleich Null, so heißt auch die Rotation eine gleichförmige, im gegentheiligen Falle eine ungleichförmige. Je nach dem im letzteren Falle die Bewegung der einzelnen Punkte eine beschleunigte

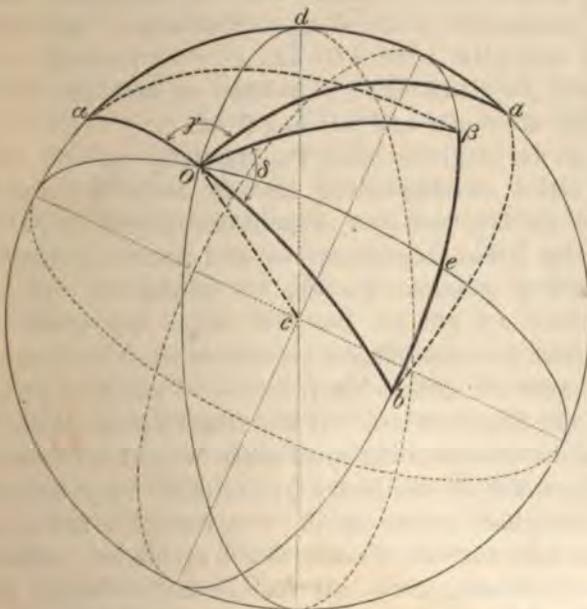
der verzögerte ist, heißt auch die Rotation eine beschleunigte oder verzögerte; ist γ constant, so ist die Rotation eine gleichförmig beschleunigte, beziehungsweise eine gleichförmig verzögerte u. s. w.

Wird der Rotationswinkel für irgend einen Punkt von der der Anfangszeit $t = 0$ entsprechenden Lage dieses Punktes aus gerechnet, so dass für $t = 0$ auch $\varphi = 0$ ist, so besteht, wie sich sofort aus § 30 ergibt, wofern man etwa die Bewegung des Punktes E ins Auge fasst, für eine gleichförmige Rotation die Gleichung $\varphi = \omega \cdot t$, während für eine gleichförmig veränderte Rotation analog wie im § 31 wegen der Unveränderlichkeit der Winkelbeschleunigung γ die Bewegungsgesetze lauten: $\omega = \omega_0 + \gamma t$, $\varphi = \omega_0 t + \frac{\gamma}{2} t^2$, $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\gamma\varphi$, $\varphi = \frac{\omega + \omega_0}{2} t$ u. s. w., wobei ω_0 die anfängliche Winkelgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ bedeutet.

§ 61. Rotation eines starren Körpers um einen fixen Punkt.
Zusammensetzung von Rotationen, deren Achsen sich schneiden.

Es sei c ein fixer Punkt des starren Punktsystems. Da die Bewegung des ganzen Punktsystems, wie in § 59 gezeigt wurde; durch die Bewegung dreier Punkte bestimmt ist, so hat man außer dem

Fig. 94.



Punkte c nur noch zwei beliebige andere Punkte a und b , die nicht mit c in derselben Geraden gelegen sind, während ihrer Bewegung

in Betracht zu ziehen, um ein klares Bild der Bewegung des ganzen Körpers zu erhalten. Da a und b willkürlich gewählt werden können, so seien sie in gleicher Entfernung vom fixen Punkte c gewählt, so dass $ac = bc$ ist.

Da sich nun die Entfernung je zweier Punkte des starren Körpers während der Bewegung nicht ändert, so müssen auch alle ferneren Lagen ($\alpha\beta$ u. s. w.) der Punkte a und b auf einer Kugelfläche (Fig. 94) gelegen sein, deren Mittelpunkt der fixe Punkt c ist.

Es seien α , bzw. β die Lagen der Punkte a , bzw. b nach Verlauf des vorläufig beliebig angenommenen Zeitintervalls τ .

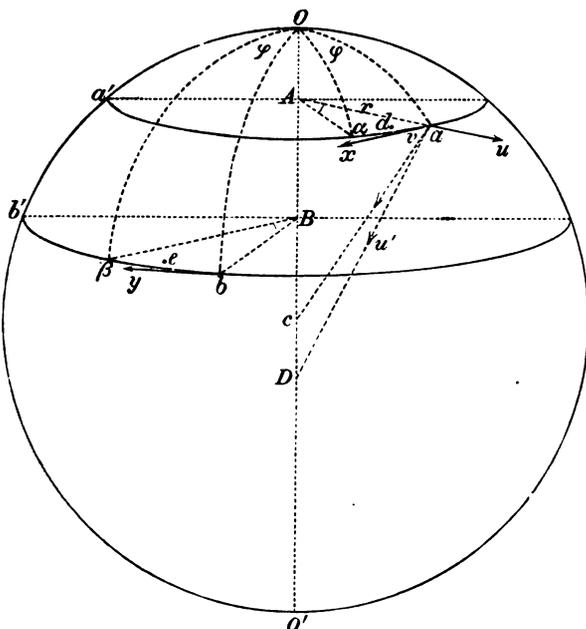
Durch a , α und c werde eine Ebene gelegt (die Ebene der Zeichnung Fig. 94), welche die Kugelfläche in dem größten Kreise ada schneidet, und ebenso ist die Ebene $bc\beta$ die Ebene des durch b und β gelegten größten Kreises. Sowohl die Symmetrieebene der Punkte a und α , als auch jene für die Punkte b und β muss offenbar den Kugelmittelpunkt c enthalten. Diese Ebenen durchschneiden sich demnach in einem Durchmesser OcO' (Fig. 95) und durchschneiden die Kugelfläche in den größten Kreisen Od und Oe (Fig. 94), welche wegen der vorausgesetzten Symmetrie die sphärischen Bögen aa , bzw. $b\beta$ in den Punkten d , bzw. e halbieren und auf den letzteren senkrecht stehen.

Da demnach in den längs einer gemeinsamen Kathete Od , bzw. Oe aneinander grenzenden rechtwinkligen sphärischen Dreiecken aOd und αOd , bzw. bOe und βOe die Katheten ad und αd , bzw. be und βe gleich sind, so müssen es auch die Hypothenusen sein, so dass $aO = \alpha O$ und $bO = \beta O$ ist.

Wegen der Starrheit des Punktsystems ist die Distanz der Punkte a und b unveränderlich, also die Sehne ab der Sehne $a\beta$ gleich, und da bei derselben Kugelfläche gleichen Sehnen gleiche Bögen größter Kreise angehören, so sind auch die durch a und b , bzw. α und β gelegten (in Fig. 94 punktierten) Bögen größter Kreise ab und $\alpha\beta$ gleich. Die drei Seiten des sphärischen Dreieckes aOb sind demnach einzeln genommen jenen des Dreieckes $\alpha O\beta$ gleich, also auch die sphärischen Winkel aOb und $\alpha O\beta$ gleich, woraus sich sofort, auf dieselbe Weise, wie dies früher auf Grund der Fig. 93 geschehen ist, die Gleichheit der sphärischen Winkel aOa und $bO\beta$, d. i. der Winkel γ und δ , die demnach kurz in Fig. 95 durch denselben Buchstaben φ bezeichnet seien, ergibt. Die Punkte a und α liegen nun ebenso wie alle anderen Punkte der Kugelfläche, welche dieselbe sphärische Entfernung $aO = \alpha O$ vom Punkte O haben, bekanntlich in einem Parallelkreise $a\alpha\alpha'$ (Fig. 95), dessen Pol O ist, und dessen Ebene auf der Geraden OcO' im Kreismittelpunkte A senkrecht steht, dessen Bogen $a\alpha$ ferner einem Centriwinkel $aA\alpha$ entspricht, der den

sphärischen Winkel $aO\alpha = \gamma = \varphi$ gleich ist. Ebenso liegen b und β in einem zweiten Parallelkreise $b\beta b'$, dessen Ebene gleichfalls auf dem Durchmesser OcO' senkrecht steht, und es ist auch hier der

Fig. 95.



Mittelpunktswinkel $bB\beta$ dieses Parallelkreises dem Winkel $bO\beta$, d. i. dem Winkel $\delta = \varphi$ gleich. (Für den besonderen Fall, dass die Ebenen der größten Kreise $a\alpha$ und $b\beta$ identisch sind, übergehen offenbar die Parallelkreise in einen Äquatorialkreis, dessen Pol O ist.)

Dadurch ist nun nachgewiesen, dass es möglich ist, durch eine einfache Drehung um die durch den fixen Punkt c gehende Achse OcO' , d. i. um die Durchschnittslinie der beiden Symmetrieebenen, die den Punkten a und α einerseits und den Punkten b und β andererseits zugehören, und zwar durch eine Drehung um den Drehungswinkel φ , bei welcher Rotation a , bzw. b den Bogen $a\alpha$, bzw. $b\beta$ des betreffenden Parallelkreises (Fig. 95) beschreibt, die Punkte a und b und daher auch alle anderen Punkte des starren Körpers aus ihrer Anfangslage in ihre nach Verlauf des Zeitintervalls τ stattfindende wirkliche Schlusslage zu überführen. (Sollten die Anfangs- und Schlusslage bei einem der beiden Punkte a und b dieselben sein, so geht die Rotationsachse OcO' offenbar durch diesen Punkt, so dass dann dieser Punkt mit O oder O' identisch ist.)

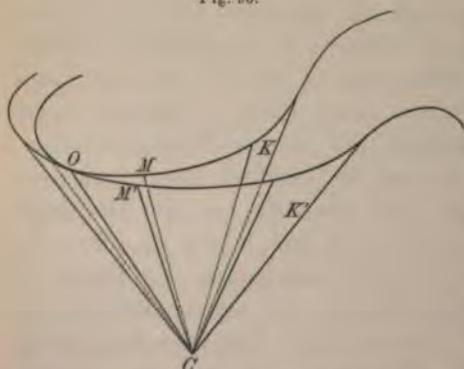
Wenn nun aber auch bei der wirklichen Bewegung einerseits und bei der Rotation um die Achse OcO' andererseits die Anfangs-

und Endlagen des starren Körpers übereinstimmen, so lässt sich im allgemeinen keinesfalls behaupten, dass auch die entsprechenden Zwischenlagen in den einzelnen Momenten der Zwischenzeit τ identisch sind. Je kleiner aber die Zeit τ gewählt wird, je kleiner also die Bögen $a\alpha$ und $b\beta$ angenommen werden, desto weniger werden sich auch die entsprechenden Zwischenlagen bei diesen beiden Bewegungen von einander unterscheiden, und zwar wird sich die Achse OO' , wenn diese Zeit τ immer kleiner und kleiner angenommen wird, ihrer Lage nach stetig ändern und einer gewissen Grenzlage immer mehr nähern. Werden also die Bögen $a\alpha$ und $b\beta$ schließlich unendlich klein angenommen, sind mit anderen Worten α und β die unmittelbar benachbarten Lagen der Punkte a und b , so muss die wirkliche Bewegung mit der Rotation um die oberwähnte, diesem Falle entsprechende Grenzlage der Achse OcO' übereinstimmen, es gibt sonach diese Grenzlage die Lage der Achse für die in diesem Augenblicke tatsächlich stattfindende Rotation, d. i. die Lage der sogenannten augenblicklichen Drehungsachse oder Momentanachse an.

Von einem Augenblicke zum anderen ändert sich im allgemeinen nicht nur die relative Lage der Momentanachse im Körper, d. h. die Achse enthält immer andere materielle Punkte des Körpers, sondern es ändert sich auch die Lage der Momentanachse im Raume, d. i. ihre relative Lage zum ruhenden Koordinatensystem.

Alle die im Laufe der Zeit stattfindenden relativen Lagen der Momentanachse im Körper, die durchwegs den fixen Punkt c enthalten, liegen in einer bestimmten, mit dem Körper in starrer Verbindung zu denkenden, an der

Fig. 96.



Bewegung des Körpers teilnehmenden Kegelfläche K (Fig. 96), deren Spitze c ist, und deren Leitlinie irgend eine meist unregelmäßige Curve OMK ist, und ebenso bilden alle die aufeinander folgenden Lagen der Momentanachse im Raume eine bezüglich des Koordinatensystems festgelegte ruhende zweite Kegelfläche K' , deren Spitze gleichfalls der

Punkt c ist. In einem jeden beliebigen Zeitmoment berühren sich die zwei Kegelflächen K und K' in jener Erzeugenden Oc (Fig. 96), welche für diesen Zeitmoment eben die augenblickliche Drehachse ist, und es findet — dem Begriffe der Momentanachse entsprechend — eben eine augenblickliche Rotation des starren Körpers und daher

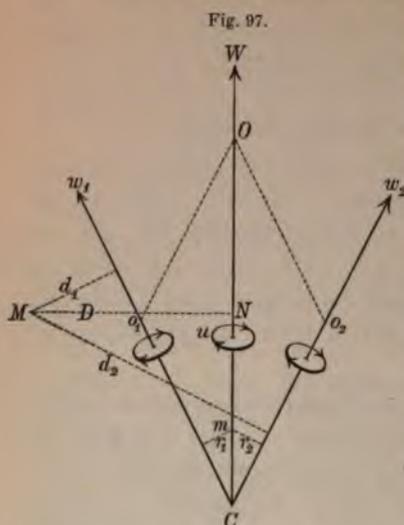
auch der mit dem Körper fest verbundenen Kegelfläche K um diese Achse OC statt, während der Kegel K' an dieser Rotation nicht theilnimmt. Dadurch kommt nach dem unendlich kleinen Zeitelemente τ eine benachbarte Erzeugende CM der beweglichen Kegelfläche K mit einer benachbarten Erzeugenden CM' der fixen Kegelfläche K' zur Coincidenz, so dass nun diese letztere Erzeugende CM' (CM) zur augenblicklichen Drehachse für das folgende Zeitelement wird u. s. w.

Es lässt sich sonach eine jede Bewegung des starren Körpers, dessen eine Punkt fix ist, wie dies Poinsot in seiner „Théorie nouvelle de la rotation des corps“ zuerst auseinandergesetzt hat, auf ein Wälzen (Rollen) einer mit dem Körper in starrer Verbindung gedachten Kegelfläche K (bei welcher der Körper jeder Bewegung dieser Kegelfläche folgt) auf einer zweiten fixen Kegelfläche K' zurückführen.

Die Lage der augenblicklichen Achse lässt sich bestimmen, sobald man die augenblicklichen Bewegungsrichtungen ax und by (Fig. 95) zweier beliebigen Punkte a und b des Körpers kennt, die sich weder nach gleichen, noch nach entgegengesetzten Richtungen bewegen. Ist nämlich OcO' die Momentanachse (also $a\alpha$ und $b\beta$ unendlich klein), so ist ax die auf dem Radius aA senkrechte Tangente des früher betrachteten Parallelkreises $a\alpha a'$ (Fig. 95), dessen unendlich kleines Bogenelement $a\alpha$ mit dem wirklichen Bahnelement des Punktes a übereinstimmt, und dessen Ebene in A auf OcO' senkrecht steht, daher steht ax auch senkrecht auf der Ebene $aOcO'$, und ebenso ist aus gleichen Gründen by senkrecht zur Ebene $bOcO'$; man hat demnach bloß durch einen jeden der beiden Punkte a und b eine zu der augenblicklichen Bewegungsrichtung desselben senkrechte Ebene zu legen, als deren Durchschnittslinie OcO' sich die augenblickliche Rotationsachse ergibt. Kennt man außer den Bewegungsrichtungen ax und by die Geschwindigkeit v eines Punktes, etwa des Punktes a , so hat man nur von a die senkrechte $aA = r$ auf die schon gefundene Momentanachse zu führen, um die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit w sofort bestimmen zu können; es ist nämlich der Gleichung (1) S. 348 zufolge $w = \frac{v}{r}$, und die Geschwindigkeit v' irgend eines beliebigen Punktes des Körpers, der die Entfernung r' von der Momentanachse OcO' besitzt, ist dann bestimmt durch die Gleichung $v' = r'w = \frac{r'}{r}v$.

Finden gleichzeitig zwei Rotationen um die im Punkte C sich schneidenden Achsen Co_1 und Co_2 (Fig. 97) mit den Winkelgeschwindigkeiten w_1 und w_2 statt, so resultiert aus beiden, da dann C ein fixer Punkt ist, eine rotierende Bewegung um eine durch den Punkt C gehende

Momentanachse, deren Lage folgendermaßen bestimmt werden
Man trage von C nach den positiven Richtungen (vergl. S. 34



Achsen, welche Richtungen
durch w_1 und w_2 bezeichnet
mögen, Strecken auf, deren Maß
jenen der entsprechenden Winkel-
geschwindigkeiten gleichkommt
dass $Co_1 = w_1$ und $Co_2 = w_2$.

Die Diagonale CO
über diesen Seiten $Co_1 = w_1$
 $Co_2 = w_2$ construierten Para-
gramms gibt in ihrer von C
gehenden Richtung die po-
sitive Richtung der Achse der
rotierenden Rotation und die
 $CO = W$ derselben bestimmt
gleich auch die Größe der
Winkelgeschwindigkeit diese
Rotation.

Um dies zu beweisen, denke man sich etwa für einen
blick nach den positiven Richtungen der Achsen etwa zwei
 w_1 und w_2 wirkend; die Resultierende derselben würde die Richtung
 CO und die Größe W haben. Ist nun m ein beliebiger Punkt
Diagonale und M ein beliebiger außerhalb der Winkelfläche des W
 $w_1 C w_2$ und seines Scheitelwinkels gelegener Punkt, so ist nach
Sätze von den statischen Momenten der Kräfte, wenn r_1, r_2 die von
und d_1, d_2 die von M auf die Seiten Co_1 und Co_2 geführten Nor-
malen und D die Normale MN zur Diagonale CO des Parallelogramms
 Oo_2 bezeichnen,

$$w_1 r_1 = w_2 r_2$$

$$WD = w_1 d_1 + w_2 d_2$$

Nun bestimmt, wenn man wieder von den Hilfskräften ab-
und die Geschwindigkeiten in Betracht zieht, $w_1 r_1$ jene Geschwin-
digkeit, mit der sich der Punkt m in der Kreisbahn, deren Radi-
us r_1 ist, bei seiner Rotation um die Achse w_1 , und zwar — dem
den Pfeil angedeuteten Sinne der Rotation entsprechend — nach
zur Ebene der Zeichnung, vor dieselbe bewegen würde, und
ist die entgegengesetzt gerichtete gleichzeitige Geschwindigkeit
der gleichzeitigen Rotation um die Achse w_2 . Da nun diese
Geschwindigkeiten an Größe gleich sind, so heben sie sich auf
der beliebig in der Diagonale CO gewählte Punkt m ist folglich
Ruhe, oder mit anderen Worten es ist in der That CO die Achse
der resultierenden augenblicklichen Rotation.

In gleicher Weise sind $w_1 d_1$ und $w_2 d_2$ die gleichzeitigen Geschwindigkeitscomponenten, mit welchen sich der Punkt M in einer zur Ebene der Zeichnung, Fig. 97, senkrechten Richtung, und zwar nach derselben Richtung hinter diese Ebene infolge der Theilnahme an den Rotationen w_1 und w_2 bewegt. Aus beiden resultiert nun eine gleichgerichtete Geschwindigkeit $w_1 d_1 + w_2 d_2$, welche auch infolge der resultierenden Rotation um die Achse CO sich ergeben muss, also auch dem Producte aus dem Radiusvector $\overline{MN} = D$ in die unbekannte resultierende Winkelgeschwindigkeit gleich sein muss, so dass in der That nicht nur die resultierende Rotation um die Achse CO im Sinne des Pfeiles u in Fig. 97 erfolgt, d. h. CO die positive Richtung der Rotationsachse ist, sondern auch, wie dies die letzte Gleichung auf S. 354 lehrt, $\overline{CO} = W$ die resultierende Winkelgeschwindigkeit darstellt.

Da demgemäß der Zusammensetzung zweier Drehungsgeschwindigkeiten w_1 und w_2 die analoge Construction des Parallelogramms, bezw. Dreiecks zugrunde liegt wie der Zusammensetzung der Kräfte, so müssen sämtliche in der Statik des materiellen Punktes aus dem Kräfteparallelogramm, bezw. Kräftedreieck abgeleiteten Folgerungen in ähngemäßer Anwendung auch für die Zusammensetzung und Zerlegung von Winkelgeschwindigkeiten Giltigkeit haben. Es muss hier nur überall statt „Kraft“ heißen: „Winkelgeschwindigkeit“. Demnach kann man drei oder mehrere gleichzeitige Rotationen um Achsen, die sich in einem Punkte schneiden, mit Hilfe eines dem Kräfteparallelepiped, bezw. Kräftepolygon analogen Parallelepipedes, bezw. Polygons zusammensetzen, um die resultierende Achse und die resultierende Winkelgeschwindigkeit zu bestimmen. Mit anderen Worten: Die Winkelgeschwindigkeit w ist eine Vectorgröße, als deren Richtung die positive Richtung der Achse der betreffenden Rotation anzusehen ist, und es ist, wenn $w_1 w_2 w_3 \dots$ die Winkelgeschwindigkeiten der componentalen Rotationen und W die Winkelgeschwindigkeit der resultierenden Rotation um die augenblickliche Achse bedeuten, $W \equiv w_1 \hat{+} w_2 \hat{+} w_3 \hat{+} \dots$, d. h. W ist die geometrische Summe oder die Resultante aus den Componenten (geometrischen Summanden) $w_1 w_2 w_3 \dots$

Sind demgemäß mehrere Rotationen, deren Winkelgeschwindigkeiten $w_1 w_2 \dots$ sind, und deren Achsen in demselben Punkte C sich schneiden und in derselben Ebene liegen, zusammensetzen, so wähle man in dieser Ebene zwei durch den Punkt C gelegte rechtwinklige Coordinatenachsen und zerlege eine jede Rotation in zwei Rotationen mit den Winkelgeschwindigkeiten w_x und w_y bezüglich der x - und y -Achse, und es ist dann analog wie im § 13 (S. 45) jedes

$$\left. \begin{aligned} w_x &= w \cos(xw) \\ w_y &= w \sin(xw) \end{aligned} \right\} (1)$$

Aus allen w_x , bezw. w_y resultiert eine Winkelgeschwindigkeit W_x bezw. W_y und aus diesen eine Rotation um eine Achse W mit einer Winkelgeschwindigkeit W , für welche wie im § 16 (S. 54)

$$\left. \begin{aligned} W_x &= \Sigma w_x = \Sigma [w \cos (xw)] \\ W_y &= \Sigma w_y = \Sigma [w \sin (xw)] \\ W &= \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \\ \cos (xW) &= \frac{W_x}{W}, \quad \sin (xW) = \frac{W_y}{W} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ebenso ist für Rotationen um Achsen im Raume wie im § 21 (S. 68), wofern ein orthogonales Achsensystem zugrunde gelegt wird,

$$\left. \begin{aligned} w_x &= w \cos (xw), \quad w_y = w \cos (yw), \quad w_z = w \cos (zw) \\ W_x &= \Sigma w_x, \quad W_y = \Sigma w_y, \quad W_z = \Sigma w_z \\ W &= \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} \\ \cos (xW) &= \frac{W_x}{W}, \quad \cos (yW) = \frac{W_y}{W}, \quad \cos (zW) = \frac{W_z}{W} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Soll aus mehreren gleichzeitigen Rotationen um Achsen in einer Ebene, die sich in demselben Punkte schneiden, der Ruhezustand resultieren, also $W = 0$ sein, so müssen wie im § 18 (S. 61) die Bedingungen $W_x = W_y = 0$ erfüllt werden, d. h.

$$\Sigma [w \cos (xw)] = 0, \quad \Sigma [w \sin (xw)] = 0 \dots \quad (4)$$

und ebenso sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass Rotation um Achsen im Raume, die durch denselben Punkt hindurchgehen, sich gegenseitig aufheben, wie im § 22 (S. 74) durch die Gleichungen ausgedrückt:

$$\Sigma [w \cos (xw)] = 0, \quad \Sigma [w \cos (yw)] = 0, \quad \Sigma [w \cos (zw)] = 0 \dots \quad (5)$$

§ 62. Bewegung parallel zu einer fixen Ebene E . Zusammensetzung von Rotationen um parallele Achsen. Zusammensetzung einer Rotation mit einer zur Achse senkrechten fortschreitenden Bewegung.

Nimmt man bei der im letzten Paragraph betrachteten Drehung des starren Körpers um einen fixen Punkt c diesen in bedeutender, immer weiterer Entfernung von dem starren Körper an, so werden sowohl die Kugelfläche Fig. 94, in welcher die Punkte a und b sich bewegen und deren Mittelpunkt c ist, als auch die parallelen concentrischen Kugelflächen, in welchen sich die anderen Punkte des Körpers bewegen, sich immer weniger von Ebenen und die in Betracht gezogenen sphärischen Dreiecke aOa , $bO\beta$ u. s. w. immer weniger von ebenen Dreiecken unterscheiden.

Die Rotationsachse cO , die den Kugelmittelpunkt c mit dem Punkte O der Kugelfläche verbindet, steht stets auf der Kugelfläche senkrecht. Rückt demnach der Punkt c in unendliche Entfernung, so werden die Kugelflächen, in welchen sich alle Punkte des Körpers bewegen, zu parallelen Ebenen und die früheren sphärischen Dreiecke zu ebenen Dreiecken, auf welchen die Achse, um welche die Rotation erfolgt, im Punkte O senkrecht steht. Es übergeht dann ferner die im letzten Paragraph behandelte Bewegung in eine wichtige, sehr häufig vorkommende Bewegungsform des starren Körpers, nämlich in jene, bei welcher die Bahnen der einzelnen Punkte irgend welche ebene Curven sind, deren Ebenen durchwegs zu einer fixen Ebene E parallel sind. Eine solche Bewegung tritt z. B. stets ein, wenn irgend eine ebene Grenzfläche eines starren Körpers längs einer fixen Ebene (z. B. einer feststehenden ebenen Platte) irgendwie gleitet. Die Bewegung des starren Körpers ist dann den obigen Auseinandersetzungen zufolge durch die Bewegung zweier beliebigen Punkte a und b desselben bestimmt.

Man kann, wie früher, den Körper aus irgend einer Lage in eine beliebige andere Lage, bei welcher a die Lage α und b die Lage β einnehmen, im allgemeinen durch eine Rotation um eine Achse OO' überführen, deren Lage man, wie früher, derart finden kann, dass man die Symmetrieebene der Punkte a und α , welche die zur fixen Ebene E parallele Gerade $a\alpha$ halbiert und auf der letzteren, somit auch auf der Ebene E senkrecht steht, und ebenso die gleichfalls zur Ebene E senkrechte Symmetrieebene der Punkte b und β bestimmt; die Durchschnittslinie OO' dieser beiden Symmetrieebenen, welche zur Ebene E normal ist, ist die gesuchte Rotationsachse OO' .

Sollten diese Symmetrieebenen zu einander parallel sein, so müsste offenbar $a\alpha \parallel b\beta$ und in dem ebenen Vierecke $aab\beta$ infolge der Starrheit $ab = \alpha\beta$, daher dies Viereck ein Parallelogramm, so nach auch $ab \parallel \alpha\beta$ sein; die Rotationsachse OO' würde dann in unendliche Entfernung rücken, d. h. die rotierende Bewegung in eine fortschreitende übergehen; würden dagegen die Symmetrieebenen zusammenfallen, was übrigens durch zweckentsprechende Wahl der Punkte a und b vermieden werden kann, so wäre, wie eine einfache Überlegung lehrt, das Viereck $aab\beta$, in welchem $a\alpha \parallel b\beta$ und $ab = \alpha\beta$ ist, ein gleichschenkliges Trapez, und die in Betracht gezogene Bewegung wäre dann eine rotierende, wenn die durch ab und $\alpha\beta$ gelegten, zur Ebene E normalen Ebenen sich in einer Geraden OO' — der Rotationsachse — schneiden (in welchem Falle $a\alpha \geq b\beta$ ist), dagegen eine fortschreitende, wenn $ab \parallel \alpha\beta$, also auch $a\alpha = b\beta$ ist, somit die letztbestimmte Rotationsachse OO' in unendlicher Entfernung

gelegen ist. (Das Viereck $ab\beta\alpha$ wäre in diesem Falle ein Rechteck.) Sollte etwa a identisch mit α sein, so ist die Rotationsachse OO' die durch diesen Punkt senkrecht zur Ebene E geführte Achse.

Sind nun $a\alpha$ und $b\beta$ unendlich klein, sind mit anderen Worten α und β die Nachbarlagen der Punkte a und b , so ist die Rotationsachse OO' jene augenblickliche Achse, um welche die thatsächliche Rotation in dem ins Auge gefassten Zeitelemente thatsächlich stattfindet, und zwar kann die Lage derselben dem § 61 S. 353 zufolge derart bestimmt werden, dass man durch einen jeden der beiden Punkte a und b eine senkrechte Ebene zu der augenblicklichen Bewegungsrichtung (der Bahntangente) dieses Punktes legt, die offenbar zugleich auf der Ebene E senkrecht steht; die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen ist dann die auf der Ebene E senkrechte Momentanachse. Sind diese beiden Ebenen zu einander parallel, so ist die augenblickliche Bewegung eine fortschreitende, daher die Geschwindigkeiten aller Punkte gleich und gleichgerichtet; sollten diese beiden Ebenen zusammenfallen, was durch entsprechende Wahl der beiden Punkte leicht verhütet werden kann, so ist die augenblickliche Bewegung eine fortschreitende oder eine Drehbewegung, je nachdem die Geschwindigkeiten der beiden Punkte gleich oder ungleich sind. Die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit ω und die Geschwindigkeiten aller Punkte lassen sich, nachdem die Momentanachse gefunden worden ist, aus der Geschwindigkeit eines einzigen Punktes in derselben Weise bestimmen, wie dies im § 61 (S. 353) gezeigt wurde (nämlich mittels der Gleichungen $v = r \cdot \omega$, bzw. $v' = r' \omega$).

Da bei der hier untersuchten Bewegung alle jene materiellen Punkte, welche ursprünglich in irgend einer zu der fixen Ebene E normalen Geraden gelegen sind, auch während der Bewegung, bei welcher diese Normale ihre Lage stetig ändert, stets in der neuen Lage der Normalen verbleiben müssen (da sich sonst ihre Distanz ändern müsste), so ist die Bewegung des Körpers schon vollkommen bestimmt durch die Bewegung der orthogonalen Projectionen der materiellen Punkte des Körpers auf diese Ebene E , also durch die Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene E , wie auch diese Art der Bewegung öfter bezeichnet wird. Der Durchstoßpunkt der Momentanachse mit der Ebene E wird das Momentancentrum genannt.

Alle Lagen, welche die augenblickliche Achse im Raume nach und nach einnimmt, sind in einer Cylinderfläche f'' gelegen, deren Erzeugende auf der Ebene E senkrecht ist, und ebenso sind die einzelnen Lagen der Momentanachsen im Körper Erzeugende einer zweiten mit dem Körper in starrer Verbindung zu denkenden, auf der Ebene E senkrechten cylindrischen Fläche f' , so dass hier die Kegelflächen K und K' des § 61 (S. 353) in die cylindrischen Flächen f'' und f' ,

he sich längs der augenblicklichen Lage der Momentanachse bewegen, übergehen und alle in diesem Paragraph behandelten Bewegungen im allgemeinen auf ein Wälzen einer Cylinderfläche f , an deren Bewegung der Körper stets theilnimmt, auf einer zweiten feststehenden Cylinderfläche f' zurückgeführt werden können, beziehungsweise, wenn man die orthogonalen Projectionen auf die Ebene E in Betracht zieht, auf ein Wälzen oder Rollen (ohne zu gleiten) einer mit dem Körper in unveränderlicher Verbindung stehenden ebenen Curve A (dem geometrischen Orte der Momentancentra im Körper) auf einer zweiten in derselben Ebene E feststehenden Curve A' (dem geometrischen Orte der Momentancentra im Raume). Die Wälzbewegung, d. i. die augenblickliche unendlich kleine Drehung der Curve A erfolgt um den augenblicklichen Berührungspunkt der Curven A und A' , der in dem betrachteten Zeitelemente als Momentancentrum fungiert.

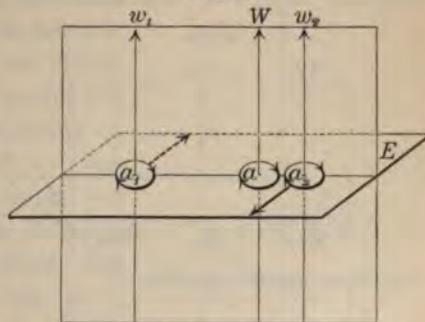
Finden gleichzeitig zwei Rotationen in demselben Sinne um parallele (gleichgerichtete) Achsen mit den Winkelgeschwindigkeiten w_1 und w_2 statt (Fig. 98), so resultiert, da bei den beiden momentanen Rotationen alle Bewegungen der einzelnen Punkte parallel zu einer auf den Achsen senkrechten Ebene E erfolgen, also die resultierende Bewegung eine Bewegung von der in diesem Paragraph untersuchten Bewegungsform sein muss, im allgemeinen denselben eine rotierende Bewegung um eine zur Ebene E senkrechte, somit zu den beiden Achsen parallele Achse W .

Sind $a_1 a_2 a$ die Durchstoßpunkte der Achsen $w_1 w_2 W$ mit der Ebene E , so liegen dieselben in einer Geraden, denn da z. B. der Punkt a_1 an der Rotation um die Achse w_1 , wohl aber an jener um die Achse w_2 theilnimmt, so bewegt

sich a_1 eben in dem Bogen eines Rotationskreises, dessen Mittelpunkt a_2 und dessen Radius $\overline{a_1 a_2}$ ist, mit der Geschwindigkeit $\overline{a_1 a_2} \cdot w_2$ hinter der Achse w_1 und w_2 entgegengesetzte Ebene (Fig. 98) in einer dieser Ebene senkrechten Richtung, so dass nach dem früher erwähnten Satze die Ebene der Momentanachse W enthalten muss.

Da die Geschwindigkeit von a_1 durch $\overline{a_1 a} \cdot W$ ausgedrückt werden kann, so ist $\overline{a_1 a_2} \cdot w_2 = \overline{a_1 a} \cdot W$. Aus gleichen Gründen ist $\overline{a_1 a_2} \cdot w_1 = \overline{a a_2} \cdot W$. Der Punkt a muss sich ferner zwischen a_1 und a_2 befinden, denn da der

Fig. 98.



Punkt a ein Punkt der Momentanachse sein, also eben in Ruhe sich befinden soll, so müssen die Bewegungsrichtungen desselben bei den beiden componentalen Rotationen w_1 und w_2 entgegengesetzt sein, was offenbar nur bei den zwischen a_1 und a_2 liegenden Punkten der Geraden $a_1 a_2$ der Fall ist. Da ferner die componentalen Geschwindigkeiten des Punktes a entgegengesetzt gleich sein müssen, so ist $a_1 a \cdot w_1 = a a_2 \cdot w_2$, was sich übrigens schon aus den beiden letzten Gleichungen sofort ergibt. Die resultierende Achse W muss, wie aus den Bewegungsrichtungen von a_1 und a_2 zu ersehen ist, gleichgerichtet mit w_1 und w_2 sein. Die drei letzten Gleichungen lassen sich in folgender Form schreiben:

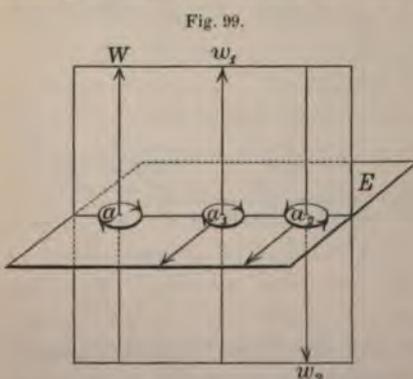
$$\frac{w_1}{a a_2} = \frac{w_2}{a_1 a} = \frac{W}{a_1 a_2} \dots (1)$$

Aus dieser Gleichung folgt weiter, da $\overline{a_1 a_2} = \overline{a_1 a} + \overline{a a_2}$ ist, dass auch $W = w_2 + w_1$ ist.

Aus zwei Rotationen w_1 und w_2 um gleichgerichtete Achsen resultiert somit eine augenblickliche Rotation um eine gleichgerichtete dritte Achse W , die in der Ebene der beiden ersteren, und zwar zwischen denselben gelegen ist, ferner ist die resultierende Winkelgeschwindigkeit W die arithmetische Summe $w_1 + w_2$ der beiden componentalen Winkelgeschwindigkeiten, und wenn man die Achsen durch eine (etwa normale) Transversale $a_1 a_2$ schneidet, so ist das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeit für irgend eine der drei Achsen zu der Entfernung der Durchschnittspunkte bei den beiden anderen für alle drei Achsen dasselbe.

Die eben ausgesprochenen Gesetze haben eine unverkennbare Analogie mit den Gesetzen der Zusammensetzung zweier gleichgerichteter Kräfte bei einem starren Körper.

Finden gleichzeitig zwei entgegengesetzt gerichtete Rotationen mit den ungleichen Winkelgeschwindigkeiten w_1 und w_2 , so dass etwa $w_1 > w_2$ ist, statt (Fig. 99), so lässt sich ganz auf die gleiche Weise wie früher nachweisen, dass eine rotierende Bewegung um eine parallele, in der Ebene der Achsen w_1 und w_2



gelegene Achse W resultieren müsse, welche, wie sich aus der Bewegung der Punkte a , a_1 , a_2 in ganz gleicher Weise wie früher

ergibt, mit jener Achse w_1 gleichgerichtet ist, der die größere Winkelgeschwindigkeit entspricht, und die nicht zwischen den Achsen w_1 und w_2 , sondern in jenem der beiden anderen Theile der Ebene ($w_1 w_2$) gelegen ist, der von der besagten Achse w_1 begrenzt wird (siehe Fig. 99). Zugleich lässt sich in derselben Weise wie früher der Satz beweisen, dass

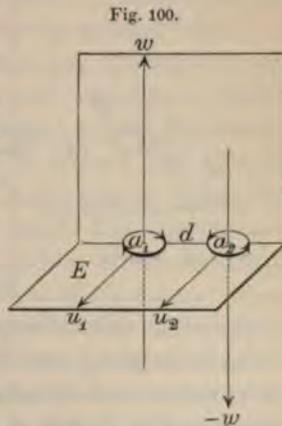
$$\frac{w_1}{a_1 a_2} = \frac{w_2}{a_2 a_1} = \frac{W}{a_1 a_2}$$

woraus, da hier $\overline{a_1 a_2} = \overline{a a_2} - \overline{a a_1}$ ist, sofort folgt, dass $W = w_1 - w_2$, d. h. die resultierende augenblickliche Winkelgeschwindigkeit dem Unterschiede der componentalen Drehungsgeschwindigkeiten gleich kommt. (Vergl. die ganz analogen Gesetze für die Zusammensetzung zweier entgegengesetzt gerichteter ungleicher Kräfte, die auf verschiedene Angriffspunkte eines starren Körpers einwirken.)

Ist die Winkelgeschwindigkeit w zweier gleichzeitiger, im entgegengesetzten Sinne stattfindender Rotationen um zwei parallele Achsen, deren Normalabstand d ist, die gleiche, so resultiert aus beiden eine augenblickliche progressive Bewegung des starren Körpers, deren Geschwindigkeit $d \cdot w$ ist, und welche senkrecht zu der durch die parallelen Achsen gelegten Ebene, und zwar nach jener Seite dieser Ebene gerichtet ist, von der aus gesehen zwei Kräfte, die im positiven Sinne der Achsen wirken würden, den Arm d im Sinne des Uhrzeigers drehen würden.

Um dies zu beweisen, lege man eine beliebige Ebene E normal zu den beiden Achsen, welche diese in den Punkten a_1 und a_2 (Fig. 100) schneidet, so dass $a_1 a_2 = d$ ist. Der Punkt a_1 nimmt nur theil an der Rotation der durch a_2 gehenden Achse und bewegt sich daher in dem Elemente einer Kreisbahn, deren Mittelpunkt α_2 und deren Radius d ist, in der zur Ebene der Achsen senkrechten Richtung u_1 mit der Geschwindigkeit $v_1 = d \cdot w$; aus analogen Gründen bewegt sich a_2 in der gleichen Richtung u_2 mit der Geschwindigkeit $v_2 = d \cdot w$ — und ebenso lässt sich für jeden Punkt leicht darthun, dass er in der mit u_1 und u_2 übereinstimmenden Richtung mit der Geschwindigkeit $v = d \cdot w$ sich bewegt, wodurch der obige Satz bewiesen ist.

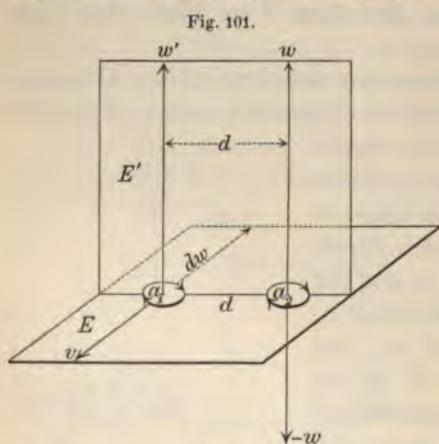
Jedes solche Paar von entgegengesetzt gleichen Winkelgeschwindigkeiten um parallele Achsen führt sonach bei der Zusammensetzung



zu derselben fortschreitenden Bewegung, wofern nur das Product $d \cdot w$, das als Winkelgeschwindigkeitsmoment bezeichnet werden kann, das gleiche ist und wofern die beiden Achsen in der Ebene der Achsen w und $(-w)$ oder in einer zu dieser parallelen Ebene gelegen sind. Es hat dieser Fall der Kinematik auch sein Analogon in der Statik, und zwar ist das Analogon dieses Winkelgeschwindigkeitspaares das später zu behandelnde Kräftepaar, für dessen dynamische Wirkung auch, wie gezeigt werden wird, nur dessen Moment, d. i. das Product aus Arm und Kraft maßgebend ist.

Ebenso, wie man mit Hilfe der drei letztbehandelten Gesetze zwei oder mehrere elementare Rotationen um parallele Achsen zu einer resultierenden Rotation, beziehungsweise einer fortschreitenden Bewegung zusammensetzen kann, so lässt sich mit Hilfe derselben Sätze, wie dies ohneweiteres ersichtlich ist, eine elementare Rotation, beziehungsweise eine progressive Bewegung eines starren Körpers in elementare Rotationen um parallele Achsen zerlegen.

Setzt man eine rotierende Bewegung, deren Winkelgeschwindigkeit w ist, mit einer fortschreitenden Bewegung, deren Richtung zur Rotationsachse w senkrecht steht, und deren Geschwindigkeit v ist, zusammen, so zerlege man etwa (Fig. 101) mit Hilfe des letzten Satzes die progressive Bewegung in zwei entgegengesetzte Rotationen, deren Winkelgeschwindigkeit gleichfalls w ist, und deren eine Achse $(-w)$ die gleiche Lage, aber die entgegengesetzte Richtung



der gegebenen Rotationsachse w hat, während die andere Achse w' mit der gegebenen Achse w gleichgerichtet und in einer durch die Achse w senkrecht zur Geschwindigkeitsrichtung v gelegten Ebene E' gelegen ist und von der Achse w einen Normalabstand d hat, der (dem letzten Satze zufolge) der Gleichung $v = d \cdot w$ entsprechen muss, so dass $d = v : w$ ist. Da nun die entgegengesetzt gleichen Rotationen um die Achsen

w und $-w$ sich aufheben, so resultiert aus der ursprünglichen Drehbewegung um die Achse w und aus der zu dieser Achse senkrechten fortschreitenden Bewegung eine Rotation um die mit der Achse w gleichgerichtete Momentanachse w' mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit.

Übrigens ist auch sofort evident, dass jeder — in dem der

Zeichnung Fig. 101 zugrunde liegenden Falle links von der Achse w befindliche — Punkt a_1 der Ebene E' , dessen Abstand d von der Achse w dem Quotienten $v:w$ gleich ist, gleichzeitig infolge der fortschreitenden Bewegung die Geschwindigkeitskomponente v und infolge der Rotation w die entgegengesetzte Geschwindigkeitskomponente $d \cdot w = v/w \cdot w = v$ besitzt, daher in Ruhe bleibt, so dass die Achse w' in der That die resultierende Momentanachse ist.

Der zuletzt behandelte Fall ist vollkommen analog der später zu behandelnden Zusammensetzung eines Kräftepaares mit einer in der Ebene des letzteren wirkenden Einzelkraft.

§ 63. Allgemeinste Bewegung eines starren Körpers.

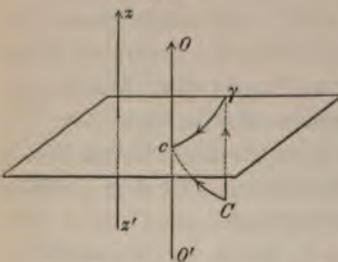
Es werde nun eine Bewegung des starren Punktsystems in Betracht gezogen, die nicht eine der bisher in den §§ 60—62 behandelten besonderen einfacheren Bewegungsformen ist, also die allgemeinste Bewegungsform eines starren Körpers. Da dem § 59 zufolge die Bewegung eines starren Körpers durch die Bewegung dreier beliebiger, nicht in einer Geraden gelegener Punkte ABC vollkommen genau bestimmt ist, so ist zunächst die Frage zu beantworten, wie man diese drei Punkte ABC aus ihrer Lage, die sie zu irgend einer Zeit haben, auf einfachstem Wege in eine ganz willkürliche andere Lage abc , die sie etwa nach Verlauf irgend einer entsprechend klein gewählten Zeit τ einnehmen, auf die einfachste Art überführen könne. Zu dem Zwecke denke man sich den Punkt C mit seiner Schlusslage c etwa durch eine Gerade Cc oder auch durch eine Curve, z. B. durch die thatsächliche Bahncurve dieses Punktes verbunden und ertheile dem ganzen Punktsystem eine fortschreitende Bewegung, bei welcher jeder Punkt eine Bahn beschreibt, die zu dieser Geraden, bezw. Curve Cc parallel und congruent ist. Durch diese fortschreitende Bewegung gelangt wohl C in seine Schlusslage c , nicht aber die Punkte AB in ihre Endlage ab , sondern in eine gewisse andere Lage $\alpha\beta$. Um nun auch diese Punkte aus dieser Mittellage $\alpha\beta$ in ihre wahre Schlusslage ab zu überführen, hat man, da der Punkt c seine Lage nicht mehr ändern soll, also für die weitere Bewegung als ein fixer Punkt des Körpers zu betrachten ist, den Körper dem § 61 zufolge um eine nach den Auseinandersetzungen dieses Paragraphs bestimmbare, durch c hindurchgehende Achse OO' (Fig. 102), und zwar um einen gewissen Winkel φ zu drehen, so dass durch diese Drehung die Punkte $\alpha\beta c$ in ihre Endlage abc gelangen, daher auch das Punktsystem nach dieser Drehung in seiner Schlusslage sich befindet. Man ersieht also, dass es stets möglich ist, jeden starren Körper aus irgend einer Lage in eine beliebige zweite Lage durch eine fortschreitende und eine darauf folgende Drehbewegung um eine bestimmte Achse zu überführen, also eine jede Bewegung eines

starrten Körpers, wie in der Einleitung zu Capitel VII erwähnt wurde, in eine fortschreitende (translatorische) und rotierende Bewegung um eine Achse zu zerlegen.

Je nach der Wahl desjenigen Punktes, durch dessen Bewegung die translatorische Bewegungskomponente bestimmt ist, und der als der Punkt C bezeichnet wurde, richtet sich offenbar nicht nur diese translatorische Bewegung, sondern auch die Lage der durch diesen Punkt C hindurchgehenden Achse OO' , um welche die Rotation erfolgt. Gewöhnlich wählt man für diesen Punkt den Massenmittelpunkt des Körpers aus Gründen, die später klar werden, so dass dann die Rotationsachse den Massenmittelpunkt stets enthält.

Zerlegt man nun die Bewegung Cc dadurch, dass man die Bahn Cc in die durch den Punkt c normal zur Achse OO' gelegte Ebene E (Fig. 102) orthogonal projiziert, welche Projection entsprechend durch γc bezeichnet sei, in die zur Achse OO' parallele geradlinige Bewegung $C\gamma$ und in die zur Achse OO' normale Bewegung

Fig. 102.



wegung längs der besagten Bahnprojektion γc , so lässt sich auch die früher betrachtete fortschreitende Bewegung des starren Körpers, durch welche C nach c gelangt, in zwei fortschreitende Bewegungen zerlegen, von denen die erste durch $C\gamma$ bestimmt ist und parallel zur Achse OO' erfolgt, während die zweite parallel zu der zur Achse OO'

senkrechten Bahn γc erfolgt. Diese letztere progressive Bewegungskomponente, bei welcher sämtliche Bahnen der einzelnen Punkte mit der Bahn γc in Richtung und Größe übereinstimmen, lässt sich mit der rotierenden Bewegung um die Achse OO' nach S. 362 zusammensetzen zu einer Rotation um eine bestimmte, zur Ebene E senkrechte, also zu OO' parallele Achse zz' , so dass schließlich nur eine Bewegung $C\gamma$ parallel zur Achse zz' und eine Rotation um diese Achse übrig bleibt, welche Bewegungen statt nacheinander zu erfolgen, auch gleichzeitig angenommen werden können.

Dadurch ist nachgewiesen, dass es möglich ist, jeden starren Körper aus irgend einer Lage in eine beliebige zweite Lage zu überführen durch eine Rotation um eine Achse zz' , die gleichzeitig begleitet ist von einer translatorischen Verschiebung $C\gamma$ des Körpers parallel zu dieser Achse, mit anderen Worten durch eine Schraubenbewegung, deren Schraubenachse die Achse zz' ist.

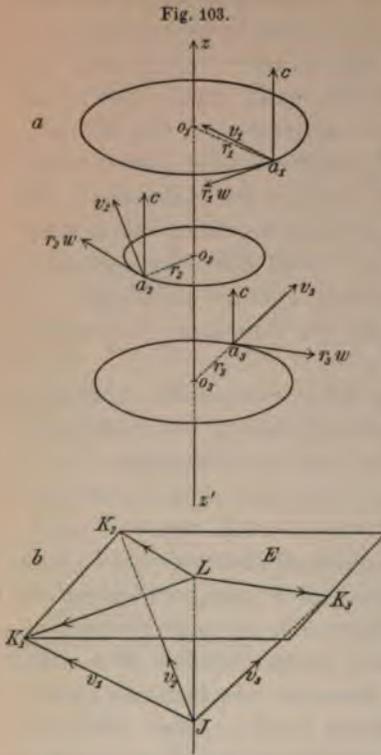
Wenn nun auch bei der bisher in Betracht gezogenen fortschreitenden und der darauf folgenden oder auch gleichzeitigen rotierenden Bewegung, beziehungsweise bei der letzterwähnten Schraubenbewegung

die Anfangs- und Endlagen mit den entsprechenden Lagen bei der thatsächlichen Bewegung des Körpers übereinstimmen, so lässt sich doch nicht behaupten, dass dies auch für die Zwischenlagen der Fall ist, also dass die hier betrachtete und die wirkliche Bewegung identisch sind. Für den Fall aber, dass die Bahnen Cc , Aa , $Bb \dots$ unendlich klein sind, also auch das Zeitintervall τ unendlich klein angenommen wird, so dass die späteren Lagen $abc \dots$ den früheren $ABC \dots$ unmittelbar benachbart sind, können beide Bewegungen als identisch angesehen werden. Die Grenzlage der Achse OO' , die diesem Falle entspricht, ist dann die augenblickliche Achse (Momentanachse) für den Punkt c , und die Achse ss' wird dann zur sogenannten augenblicklichen Schraubenachse; letztere ändert im Verlaufe der Bewegung im allgemeinen sowohl ihre Lage im Raume, als auch ihre Lage im Körper.

Da die aus der Zusammensetzung einer rotierenden Bewegung mit einer zur Rotationsachse senkrechten progressiven Bewegung nach S. 362 resultierende rotierende Bewegung eine gleichgerichtete Achse und die gleiche Winkelgeschwindigkeit hat, und da in einem bestimmten Moment — bei der Wahl welches Punktes C auch immer — sich, wie sich leicht zeigen lässt, nur eine resultierende Schraubenbewegung mit genau bestimmter Achse und bestimmter Winkelgeschwindigkeit ergeben kann, so müssen nothwendigerweise alle die augenblicklichen, den verschiedenen Punkten des Körpers entsprechenden Momentanachsen, die nämlich als solche auftreten, wenn die verschiedenen Punkte des Körpers als jene Punkte C angenommen werden, durch deren Bewegung die progressive Bewegungscomponente bestimmt ist, in denselben Zeitmomente zu einander parallel und gleichgerichtet und die Winkelgeschwindigkeit für dieselben durchwegs dieselbe sein, und nur die Geschwindigkeiten der progressiven Bewegungscomponenten sind für diese verschiedenen Punkte im allgemeinen ungleich und verschieden gerichtet.

Die allgemeinste Zusammensetzung beliebig vieler gleichzeitiger fortschreitender Bewegungen und Rotationen um beliebige Achsen im Raume und die Ermittlung der aus denselben resultierenden Schraubenachse soll einem späteren Paragraph vorbehalten werden.

Um auf constructivem Wege die Lage der augenblicklichen Schraubenachse zu irgend einer bestimmten Zeit t aus den gegebenen Geschwindigkeiten dreier (nicht in einer Geraden gelegenen) Punkte zu bestimmen, hat man nur zu beachten, dass, wenn ss' (Fig. 103 a) etwa diese gesuchte Achse, w die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit und c die Geschwindigkeit der progressiven Bewegung parallel zu dieser Achse ist, die Geschwindigkeit v irgend eines Punktes a , der von der Achse ss' den Abstand r hat, aus der zur Achse ss'



parallelen Geschwindigkeit c und aus der durch die componentale Rotation bedingten Geschwindigkeit $r w$ resultieren müsse, welche mit dem unendlich kleinen Kreisbogenelemente, das der Punkt a bei dieser componentalen Rotation durchlaufen würde, gleichgerichtet ist, welche sonach die Richtung der Tangente des entsprechenden Rotationskreises, dessen Radius r ist, hat und zur Achse $z z'$ normal ist. Kennt man demgemäß die verschieden gerichteten Geschwindigkeiten $v_1 v_2 v_3$ dreier Punkte $a_1 a_2 a_3$ des Körpers der Richtung und Größe nach, so hat man dieselben von einem beliebigen Punkte J (Fig. 103 b) aus zu construieren, so dass $JK_1 = v_1$, $JK_2 = v_2$, $JK_3 = v_3$ ist, und es müssen dann die orthogonalen Projectionen dieser drei Strecken auf irgend eine zur Achse $z z'$ parallele Achse alle gleich, nämlich $= c$ sein, was offenbar nur dann möglich ist, wenn die durch $K_1 K_2 K_3$ gelegte Ebene E auf der Achse $z z'$ senkrecht steht. Die den Punkt J auf die so erhaltene Ebene E projicierende Gerade JL stellt dann

die Geschwindigkeitscomponente c dar, und die zur Achse $z z'$ normalen Projectionen der Geraden JK_1 , JK_2 , JK_3 auf diese Ebene stellen die der componentalen Rotation entsprechenden Geschwindigkeitscomponenten dar, nämlich es ist $LK_1 = r_1 w$, $LK_2 = r_2 w$, $LK_3 = r_3 w$.

Da nun die Tangenten der Rotationskreise sowohl auf den entsprechenden Radien, als auch auf der Rotationsachse senkrecht stehen, so enthält die durch a_1 senkrecht zu LK_1 gelegte Ebene $a_1 o_1 z$ die Schraubenachse, und dies gilt auch von der durch a_2 senkrecht zu LK_2 gelegten Ebene $a_2 o_2 z$, und man erhält demnach in der Durchschnittsline dieser Ebenen $a_1 o_1 z$ und $a_2 o_2 z$ die gesuchte Schraubenachse. Dadurch sind aber auch die zu dieser Schraubenachse normalen Radien $a_1 o_1$, $a_2 o_2$, $a_3 o_3$, d. i. $r_1 r_2 r_3$ mit bestimmt, so dass nunmehr auch z. B. aus $LK_1 = r_1 w$ die Winkelgeschwindigkeit $w = \frac{LK_1}{r_1}$ bestimmbar ist und demnach auch die Geschwindigkeitscomponente $r w$ und die resultierende Geschwindigkeit $v = \sqrt{c^2 + r^2 w^2}$ eines jeden anderen Punktes der Richtung und Größe nach genau bestimmt werden kann.

Um also den augenblicklichen Bewegungszustand eines jeden Punktes des ganzen Körpers für einen beliebigen Moment vollständig zu kennen, ist die Kenntnis der Richtungen und Größen der Geschwindigkeiten $v_1 v_2 v_3$ dreier Punkte $a_1 a_2 a_3$, die nicht in einer Geraden gelegen sind, vollkommen hinreichend.

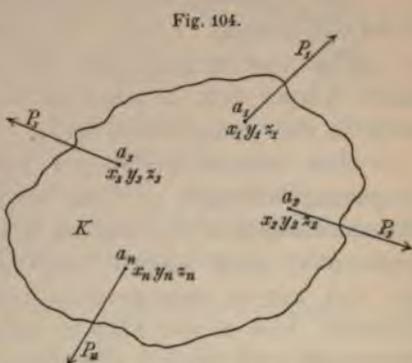
Capitel VIII.

Statik des starren Körpers.

A. Einleitung.

§ 64. Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen. Äquivalenz von zwei Kräften.

Irgend ein dreiaxsiges räumliches Coordinatensystem mit dem Anfangspunkte O sei zugrunde gelegt, und es seien im allgemeinen durch XYZ die zu den Coordinatenachsen parallelen Componenten irgend einer der äußeren Kräfte P (Fig. 104), die auf irgend einen Punkt $(x y z)$ einwirkt, bezeichnet. Nach Gleichung (1) und (2) S. 313 und 314 müssen für ein jedes räumliche Punktsystem, sonach auch für ein starres Punktsystem K folgende sechs Bedingungsgleichungen nothwendig erfüllt werden, wenn Gleichgewicht stattfinden soll:



$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= 0 & \Sigma M_x^{(P)} &= \Sigma (y Z - z Y) = 0 \\ \Sigma Y &= 0 & \Sigma M_y^{(P)} &= \Sigma (z X - x Z) = 0 \\ \Sigma Z &= 0 & \Sigma M_z^{(P)} &= \Sigma (x Y - y X) = 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

Die drei ersten Gleichungen $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$ drücken, wie bekannt, die Bedingung aus, dass sich diese äußeren Kräfte P auch dann das Gleichgewicht halten müssten, wenn alle ohne Änderung ihrer Richtung und Größe statt auf die verschiedenen Angriffspunkte $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ auf denselben Angriffspunkt wirken würden.

Ist das gewählte Coordinatensystem ein orthogonales, was übrigens keinesfalls nothwendig ist, so drücken die drei letzten Gleichungen $\Sigma M_x^{(P)} = 0$, $\Sigma M_y^{(P)} = 0$ und $\Sigma M_z^{(P)} = 0$ bekanntlich aus, dass die algebraische Summe der Drehungsmomente der Kräfte P für eine jede dieser drei orthogonalen Achsen sich auf Null reducieren müsse.

Während nun aber bei einem nicht starren Körper, z. B. einem elastischen festen Körper oder einer Flüssigkeit u. s. w., aus dem Bestehen dieser sechs Bedingungen für irgendwelche drei Achsen noch keineswegs mit Bestimmtheit umgekehrt gefolgert werden kann, dass deshalb schon Gleichgewicht stattfinden müsse, kurz, während diese sechs Bedingungen für das Gleichgewicht eines nicht starren Körpers wohl nothwendig, aber keineswegs hinreichend sind, lässt sich für ein starres Punktsystem der Nachweis liefern, dass das Stattfinden dieser sechs Bedingungen für irgendwelche drei Achsen für das Gleichgewicht auch hinreichend sei.

Um diesen Nachweis allgemein zu führen, beachte man zunächst, dass, wie schon auf S. 314 gezeigt wurde, das hier bedungene Stattfinden der Gleichungen (1) für irgendwelche drei Achsen auch die analogen Gleichungen für irgend ein anderes durch einen beliebigen Punkt geführtes Achsensystem zur nothwendigen Folge hat, so dass man unbeschadet der Strenge der Deduction das Achsensystem, wie dies auch später geschehen soll, willkürlich wählen kann.

Das Bestehen des Gleichgewichtes unter der Voraussetzung der sechs Gleichungen (1) wird sicherlich dann nachgewiesen sein, wenn es gelingt, zu zeigen, dass der ursprünglich ruhend angenommene starre Körper sich, so lange diese sechs Gleichungen erfüllt werden, nicht in Bewegung setzen kann.

Nun könnte infolge der ersten drei der vorausgesetzten Bedingungsgleichungen (1), wie schon auf S. 334 gezeigt wurde, der Massenmittelpunkt des starren Körpers, der (siehe S. 332) ein ganz bestimmter, seine relative Lage im Körper nicht ändernder Punkt ist, sich nur in einer geraden Linie mit constanter Geschwindigkeit bewegen, und da der Körper, daher auch dessen Massenmittelpunkt ursprünglich als ruhend vorausgesetzt wird, daher seine anfängliche Geschwindigkeit Null ist, so muss sie, so lange als die ersten drei Gleichungen (1) erfüllt sind, auch Null bleiben, und es verharrt daher der Massenmittelpunkt in Ruhe.

Es ist sonach jedenfalls stets dann, wenn die Gleichungen $\Sigma X = \Sigma Y = \Sigma Z = 0$ stattfinden, eine durch die Bewegung des Schwerpunktes bestimmte fortschreitende Bewegung des ursprünglich ruhenden Körpers ausgeschlossen, und es wäre nur noch eine Rotation um eine durch den Massenmittelpunkt gehende Achse denkbar. — Dass nun diese in unserem Falle, so lange nämlich die drei anderen Gleichungen $\Sigma M_x^{(P)} = 0$, $\Sigma M_y^{(P)} = 0$, $\Sigma M_z^{(P)} = 0$ stetig erfüllt werden, auch nicht stattfinden kann, ergibt sich aus folgender Betrachtung, der ein orthogonales Achsensystem zugrunde gelegt ist.

Geht man etwa von der letzten Bedingungsgleichung: $\Sigma M_z^{(P)} = 0$ aus, so lässt sich aus derselben der Gleichung (3) S. 319 zufolge

folgern, dass $\Sigma m \left[x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right] = 0$ ist, oder da

$$\frac{d}{dt} \left[m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \right] = m \left[x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right] \text{ und daher auch}$$

$$\frac{d}{dt} \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \Sigma m \left[x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right] \text{ ist,}$$

so muss auch

$$\frac{d}{dt} \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = 0, \text{ daher die Summe } \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)$$

von der Zeit unabhängig, demnach so lange constant bleiben, als $\Sigma M_z^{(P)} = 0$ bleibt. Bezeichnet man nun durch r die Normale, die von dem Massenpunkte m auf die z -Achse geführt wird oder, was dasselbe ist, die Projection von Om auf die xy -Ebene und durch φ den Richtungswinkel dieser Normalen, beziehungsweise dieser Projection gegen die x -Achse, so ist bekanntlich $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ und

$$\text{daher } \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

[s. Gl. (10), S. 115], und somit hat auch der oben betrachtete constant

$$\text{Ausdruck den Wert } \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \Sigma \left(m r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right).$$

Würde nun eine Rotation des ursprünglich ruhenden Körpers um irgend eine Achse des Körpers (die Momentanachse) eintreten, so könnte man, da, wie oben gezeigt wurde, die Gleichungen (1), daher auch die Gleichung $\Sigma M_z^{(P)} = 0$ für eine jede Achse Giltigkeit haben, diese Rotationsachse zur z -Achse wählen, und es würde dann

$\frac{d\varphi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit w dieser Rotation bedeuten, die bekanntlich für alle Punkte des Körpers die gleiche ist, somit vor das Summenzeichen gesetzt werden kann. Demnach müsste

$$\Sigma \left(m r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{d\varphi}{dt} \Sigma (m r^2) = w \cdot \Sigma (m r^2) \text{ einen constanten Wert}$$

beibehalten, so lange die Gleichungen (1) erfüllt werden. Da aber der Körper als ursprünglich ruhend vorausgesetzt wurde, somit jedenfalls ursprünglich $w = 0$ und daher auch $w \Sigma (m r^2) = 0$ ist, so muss dieses Product auch den Wert Null beibehalten; da aber der zweite Factor $\Sigma (m r^2)$, wie immer er sich auch ändern möge, seiner Natur nach stets positiv und von Null verschieden ist, so muss nothwendigerweise der erste Factor w , d. i. die Winkelgeschwindigkeit Null bleiben; aus den Gleichungen $\Sigma M_x^{(P)} = 0$, $\Sigma M_y^{(P)} = 0$, $\Sigma M_z^{(P)} = 0$ ergibt sich sonach als nothwendige Folgerung, dass sich der ursprünglich ruhende Körper um keine Achse in Drehung setzen kann (was übrigens leicht auch sofort aus dem Princip

der Flächen (S. 323) hätte gefolgert werden können). Es ist also, falls die einwirkenden äußeren Kräfte andauernd den Bedingungsgleichungen (1) Genüge leisten, nicht nur eine jede translatorische, durch die Bewegung des Schwerpunktes bestimmte, sondern auch jene rotierende Bewegung um irgend eine Schwerpunktsachse völlig ausgeschlossen, so dass der ursprünglich ruhend angenommene Körper unter der Einwirkung der Kräfte in Ruhe verharren muss, oder mit anderen Worten: die Kräfte halten sich dann stets das Gleichgewicht.

Es ist dadurch nachgewiesen, dass die sechs Gleichungen (1) für das Gleichgewicht starrer Körper nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend sind, so dass auch umgekehrt aus dem Bestehen dieser Bedingungsgleichungen für drei beliebige Achsen xyz stets mit Bestimmtheit gefolgert werden kann, dass Gleichgewicht herrscht, was bei nicht starren Körpern keinesfalls behauptet werden kann.

Befindet sich das starre Punktsystem in irgend einer durch ein auf dasselbe einwirkende Kräftesystem S beeinflusster Bewegung, so kann man stets ein mit diesem Punktsystem in unveränderlicher Verbindung stehendes räumliches Achsensystem A der Betrachtung zu Grunde legen, das an der Bewegung des starren Punktsystems theilnimmt, und durch dessen Bewegung umgekehrt auch die Bewegung des Punktsystems, welches sich dann in relativer Ruhe zu dem Achsensystem befindet, vollkommen bestimmt ist. Tritt nun zu dem Kräftesystem S ein zweites Kräftesystem S' , welches allen sechs Bedingungsgleichungen (1) bezüglich irgend eines etwa fixen Achsensystems genügt, so muss dasselbe, wie früher gezeigt wurde, dieselben sechs Bedingungen (1) auch für jedes andere Achsensystem, sonach auch für das bewegliche Achsensystem A erfüllen, und es kann sich sohin, den früheren Erörterungen zufolge, der relative Ruhezustand bezüglich dieses Achsensystems A durch die Einwirkung des hinzutretenden Kräftesystems S' in keiner Weise abändern, wie dies übrigens schon aus den im § 5 auf Grund des Principes der unveränderlichen relativen Wirkung durchgeführten Untersuchungen gefolgert werden kann. Es kann sonach auch die durch die Bewegung dieses Achsensystems A mitbestimmte Bewegung des starren Punktsystems in keiner Weise infolge der Einwirkung des Kräftesystems S' eine Änderung erfahren, so dass man dieses Kräftesystem bei jedem starren Körper, ohne die Bewegung desselben irgendwie zu beeinflussen, zu den einwirkenden Kräften S entweder hinzufügen oder aber, falls dasselbe neben anderen Kräften vorhanden ist, auch eliminieren kann.

Anmerkung. Wenn nun auch die Gleichungen (1) das Gleichgewicht solcher Kräfte, für welche diese Gleichungen bestehen, zur Folge haben, so dass also der ursprünglich ruhend angenommene starre Körper seinen Ruhezustand infolge

der Einwirkung solcher Kräfte nicht ändern kann, so folgt aus diesen Gleichungen noch keineswegs, dass, wenn diese Kräfte auf einen in Bewegung begriffenen Körper einwirken, der Bewegungszustand der einzelnen Punkte ein unveränderlicher, d. h. die Bewegung der einzelnen Punkte des Körpers nothwendig geradlinig und gleichförmig sein müsse, wiewohl der Massenmittelpunkt des Körpers sich in diesem Falle (siehe S. 334) nur geradlinig und gleichförmig bewegen könnte. Nur wenn überdies die anfänglichen Geschwindigkeiten aller Punkte des Körpers gleich und gleichgerichtet sind, wird der Bewegungszustand dieser Punkte sich, so lange die Gleichungen (1) erfüllt werden, nicht ändern, wie dies später nachgewiesen werden soll.

Aus dem Gesagten lässt sich ein wichtiger Satz der Mechanik, der gewöhnlich als ein Axiom hingestellt wird, was derselbe aber keinesfalls ist, leicht folgern.

Befindet sich nämlich ein nicht starrer, sei es ein flüssiger oder ein fester deformierbarer Körper unter der Einwirkung gewisser äußerer Kräfte im Gleichgewichte, so müssen jedenfalls die für das Gleichgewicht stets nothwendigen sechs Gleichungen (1) erfüllt werden, und da diese für das Gleichgewicht eines gleichgeformten starren Körpers, auf den dieselben äußeren Kräfte in derselben Weise einwirken, hinreichend sind, so muss sich auch der letztere im Gleichgewicht befinden — jedoch ist die umgekehrte Schlussfolgerung nicht gestattet.

Wenn demnach beliebige auf einen festen oder flüssigen Körper wirkende Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so kann man, ohne das Gleichgewicht zu stören, annehmen, dass der Körper ein starrer werde (dass er etwa plötzlich erstarre).

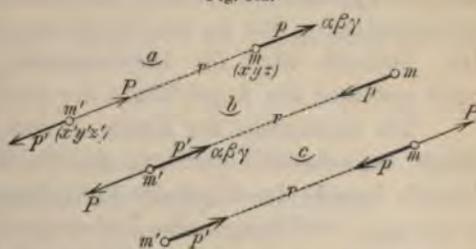
Anmerkung. Die Gleichungen (1) lehren auch, dass, wenn gewisse Kräfte P sich das Gleichgewicht halten, dieser Gleichgewichtszustand nicht gestört wird, wenn sich alle Kräfte P , sonach auch ihre XYZ -Componenten in demselben Verhältnisse ändern, denn in diesem Falle werden nur alle Summanden der linken Seite der Gleichungen (1) in demselben Verhältnisse größer oder kleiner, so dass ihre Summe den Wert Null beibehält.

Da zwei beliebige Kräfte p und p' (Fig. 105) von gleicher Größe und entgegengesetzter Richtung, welche in derselben

Geraden auf die Punkte m und m' eines starren Körpers wirken, nicht nur entgegengesetzt gleiche X -, Y - und Z -Componenten, sondern auch, wie schon auf S. 312 nachgewiesen wurde, entgegengesetzt gleiche Momente für eine jede beliebige

Achse haben, so dass die sechs Gleichungen (1) jedenfalls erfüllt werden, so halten sie sich dem früheren Satze zufolge das Gleichgewicht — und umgekehrt, wenn nämlich zwei äußere Kräfte p

Fig. 105.



und p' sich an einem starren Körper das Gleichgewicht halten sollen, so müssen die sechs Gleichungen (1) erfüllt werden, was nur dann möglich ist, wenn die Kräfte entgegengesetzt gleich sind und in jener Geraden r wirken, welche die Angriffspunkte der beiden Kräfte verbindet, und es ist folglich die angeführte Bedingung die nothwendige und hinreichende Gleichgewichtsbedingung für zwei auf einen starren Körper einwirkende äußere Kräfte. Man kann sonach, wie auf S. 370 nachgewiesen wurde, ein aus zwei derartigen Kräften p und p' bestehendes Kräftesystem, ohne irgend eine Änderung der durch die anderen Kräfte beeinflussten Bewegung des starren Körpers befürchten zu müssen, zu diesen Kräften ohneweiters hinzufügen oder, falls das selbe vorhanden ist, von diesem Kräftesystem S' ganz absehen.

Für ein bloß aus zwei materiellen Punkten bestehendes starres Punktsystem ließe sich der Nachweis dieses wichtigen Satzes ohne Zuhilfenahme der in diesem Paragraph bewiesenen Sätze in leicht ersichtlicher Weise sehr einfach führen, was aber bei einem System von vielen beliebig gelagerten Punkten nicht der Fall ist.

Eine unmittelbare einfache Folgerung dieses Satzes ist auch die, dass zwei Kräfte P und p , die auf verschiedene Angriffspunkte m und m' (Fig. 105 *a* und *b*) eines starren Körpers einwirken, äquivalent sind, wenn sie die gleiche Richtung und Größe haben, und wenn ihre Richtungslinie die ihre beiden Angriffspunkte verbindende Gerade mm' ist, denn die auf m' einwirkende Kraft P lässt sich unbeschadet des Bewegungszustandes infolge der gestatteten Hinzufügung des aus den Kräften p und p' (Fig. 105 *a* und *b*) bestehenden Kräftesystems S ersetzen durch das System der drei Kräfte P , p und p' , in welchem letzterem System die entgegengesetzt gleichen auf m' einwirkenden Kräfte P und p' zufolge des Folgesatzes (3) S. 23 unbeschadet der Wirkung als nicht vorhanden angenommen werden können. Es ist demnach bei jedem starren Körper gestattet, für eine jede Kraft P eine zweite solche gleiche und gleichgerichtete derartige Kraft p zu substituieren oder, wie man dies gewöhnlich auszudrücken pflegt, jede Kraft P ohne Änderung ihrer Größe und Richtung von ihrem Angriffspunkte m' nach einem zweiten Angriffspunkte m zu versetzen, der in der Richtungslinie der Kraft P gelegen ist. Deshalb wird die Richtungslinie (Wirkungslinie) einer Kraft auch mitunter die Angriffslinie der letzteren genannt.

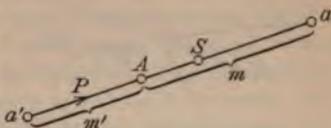
Die Äquivalenz der Kräfte P und p , wie überhaupt jede in der Folge betrachtete Äquivalenz bezieht sich aber nur auf die Ersetzbarkeit betreffs der durch die äquivalenten Kräfte hervorgerufenen Bewegungen, beziehungsweise Änderungen des Bewegungszustandes des starren Körpers, keinesfalls aber betreffs der inneren Kräfte (Spannungen), welche durch die äquivalenten Kräfte hervorgerufen werden.

Um dies wenigstens in einem Falle zu zeigen, sei etwa angenommen, das starre Punktsystem bestehe aus zwei materiellen Punkten, deren Massen m und m

sind (Fig. 105 a und c) und $\frac{d^2 s}{dt^2}$ sei die Beschleunigung, mit der das ursprünglich ruhend angenommene Punktsystem in der Richtung der einwirkenden äußeren Kraft P bewegt wird, und durch p und p' seien die durch die Kraft P geweckten inneren Kräfte bezeichnet, so dass $p = p'$ ist. Dann ist in Fig. 105 a bekanntlich $p = m \frac{d^2 s}{dt^2}$, $P - p' = m' \frac{d^2 s}{dt^2}$ und $P = (m + m') \frac{d^2 s}{dt^2}$, daher $p = p' = \frac{m}{m + m'} \cdot P$, und es herrscht Druckspannung, dagegen ist für die Kraft P in Fig. 105 c wohl auch $P = (m + m') \frac{d^2 s}{dt^2}$, aber $p' = m' \frac{d^2 s}{dt^2}$ und $P - p = m \frac{d^2 s}{dt^2}$, also $p = p' = \frac{m'}{m + m'} \cdot P$, und es herrscht Zugspannung; es ist sonach in den beiden Fällen, wo P im ersten Falle auf den Punkt m' und im zweiten auf den Punkt m wirkt, sowohl die Größe der Spannungen, als die Art derselben verschieden.

Analoge Ausdrücke für die Spannungen ergeben sich für ein starres, geradliniges materielles Punktsystem, z. B. einen sehr dünnen Stab $a'a$ (Fig. 106), auf welchen einmal die Kraft P in der Richtung des Stabes im Punkte a' , ein zweitesmal im Punkte a eingreift. Ist dieser Stab nämlich ursprünglich in Ruhe, so muss seine Bewegung unter der Einwirkung der Kraft P eine progressive in der Richtung $a'a$ sein; denn ist S der Massenmittelpunkt, so muss die Bewegung von S (siehe S. 333) so erfolgen, als würde die Kraft P auf denselben einwirken, und es muss daher in der Richtung $a'a$ die entsprechende progressive componentale Bewegung des Stabes erfolgen, während die zweite componentale Bewegung, nämlich eine Rotation um irgend eine durch S gelegte Achse, nach früheren Entwicklungen hier nicht auftreten kann, weil die Richtungslinie der Kraft P jede solche Achse in S schneidet, somit das Moment der Kraft P für jede solche Achse Null ist. Ist also A ein beliebiger Punkt des Stabes, und ist die Masse von $a'A$ durch m' , jene von Aa durch m bezeichnet, und ist p die Spannung in A und $\frac{d^2 s}{dt^2}$ die Beschleunigung der fortschreitenden Bewegung des Stabes, so bestehen zufolge des Schwerpunktsgesetzes für die Stabtheile m' und m , wenn a' der Angriffspunkt von P ist, also p eine Druckspannung bedeutet, die früheren Gleichungen: $P - p = m' \frac{d^2 s}{dt^2}$, $p = m \frac{d^2 s}{dt^2}$, somit $P = (m + m') \frac{d^2 s}{dt^2}$ und $p = \frac{m}{m + m'} \cdot P$, und zwar herrscht im ganzen Stabe Druckspannung, welche beim allmählichen Übergange von a' nach a allmählich von P bis Null abnimmt; wenn dagegen a der Angriffspunkt von P ist, so ist $p = \frac{m'}{m + m'} \cdot P$, und es herrscht im ganzen Stabe Zugspannung, die dann von a' gegen a hin stetig zunimmt.

Fig. 106.



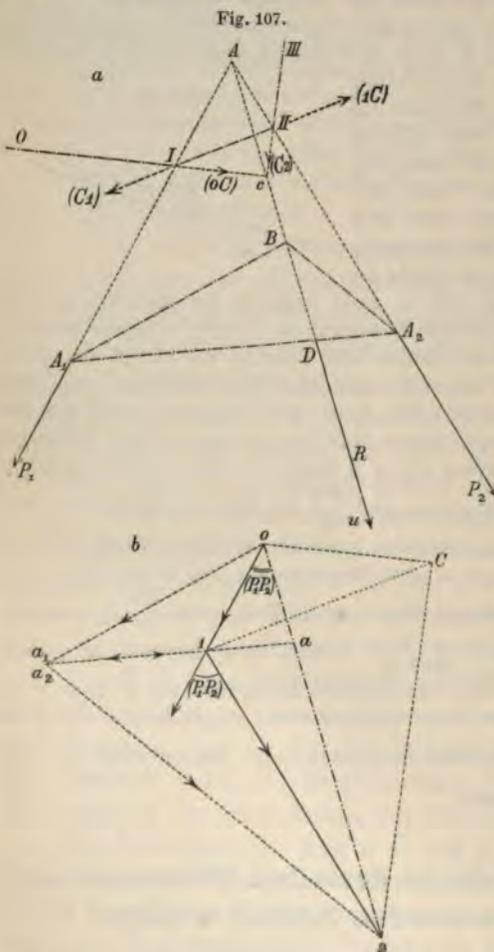
B. Statik der Kräfte, die in derselben Ebene auf einen freibeweglichen starren Körper wirken.

§ 65. Zusammensetzung zweier Kräfte im besonderen.

a) Sind die Wirkungslinien der beiden Kräfte identisch, so gelangt man durch Versetzung der Kräfte nach einem und demselben

in der Wirkungslinie gelegenen Angriffspunkte zu dem im § 9 behandelten Falle. Es ist demnach die Resultierende einfach gleich der algebraischen Summe der Kräfte, wenn man jene Kräfte, die nach der einen Richtung wirken, positiv, die entgegengesetzt gerichteten aber negativ in Rechnung bringt. Dasselbe gilt offenbar auch dann, wenn mehr als zwei solche Kräfte einwirken. Ist die algebraische Summe der Kräfte Null, so halten sich dieselben bekanntlich das Gleichgewicht.

b) Schneiden sich die Richtungslinien der beiden Kräfte P_1 und P_2 (Fig. 107), nachdem dieselben nöthigenfalls entsprechend verlängert wurden, in einem



Punkte A , so kann man diese Kräfte ohne Änderung der Richtung und Größe von ihren ursprünglichen Angriffspunkten A_1 und A_2 nach dem Angriffspunkte A versetzen, so dass man dann den in § 14 behandelten Fall vor sich hat. Diese zwei Kräfte haben demnach stets eine Resultierende, die auf graphischem Wege mit Hilfe des entsprechenden Kräftedreiecks $OI2$ (Fig. 107 b) bestimmt werden kann, und als deren Angriffspunkt etwa A oder irgend ein Punkt der durch A parallel zu $O2$ geführten Geraden Au — der Wirkungslinie der Resultierenden R — angesehen werden kann.

Anmerkung. Sollte der Durchschnittspunkt A kein materieller Punkt des starren Körpers sein, so ist es demungeachtet bei einem jeden starren Punktsystem, wofern es sich nur um die Bestimmung der

Resultierenden handelt, immer gestattet, in A oder wo immer einen materiellen Punkt, der mit dem Punktsystem in starrer Verbindung steht, hinzuzufügen. Es lässt sich nämlich leicht nachweisen, dass auch dann, wenn A kein Punkt des starren Körpers ist, jedoch, wenn in der in obiger Art bestimmten Geraden Au

irgend ein materieller Punkt des starren Punktsystems gelegen ist, z. B. der Punkt B , die früher erwähnte Construction die wahre Resultante, als deren Angriffspunkt dann offenbar B angesehen werden muss, ergibt. Denn zieht man (Fig. 107) die Geraden A_1B , A_2B und A_1A_2 und $1a \parallel A_1A_2$, $0a_1 \parallel BA_1$, $2a_2 \parallel A_2B$, und zwar die letzteren Parallelen bis zum Durchschnitte a_1 , beziehungsweise a_2 mit der Geraden $1a$, so ist zunächst, da wegen des Parallelismus der Seiten das Dreieck

$$(A_1DA) \propto \mathcal{A}(1ao) \text{ und } \mathcal{A}(A_1DB) \propto \mathcal{A}(a_1ao) \text{ ist, } \frac{A_1D}{1a} = \frac{DA}{ao} \text{ und } \frac{a_1a}{A_1D} = \frac{ao}{DB},$$

so dass durch Multiplication der beiden letzten Gleichungen sich ergibt $\frac{a_1a}{1a} = \frac{DA}{DB}$.

Auf gleiche Weise ergibt sich durch Multiplication der aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\mathcal{A}(A_2DA) \propto \mathcal{A}(1a2)$ und $\mathcal{A}(A_2DB) \propto \mathcal{A}(a_2a2)$ gefolgerten Propositionen

$$\frac{A_2D}{1a} = \frac{DA}{a_2a}, \frac{a_2a}{A_2D} = \frac{a_2}{DB}, \text{ dass } \frac{a_2a}{1a} = \frac{DA}{DB} \text{ ist,}$$

so dass die Vergleichung der beiden Folgerungen sofort lehrt, dass $a_1a = a_2a$ ist, also der Punkt a_1 mit a_2 identisch ist (siehe Fig. 107 b). Zerlegt man demgemäß die im Punkte A_1 wirkende Kraft 01 mittels des Kräftedreiecks $0a_11$ in die zwei auf denselben Angriffspunkt A_1 wirkenden Componenten $0a_1$ und a_11 , die längs der Seiten BA_1 (beziehungsweise ihrer Verlängerung) und A_1A_2 wirken, und die auf A_2 wirkende Kraft 12 mittels des Kräftedreiecks $1a_22$ in die längs der Seiten A_2A_1 und BA_2 wirksamen Componenten $1a_2$ und a_22 , so lassen sich, da A_1 , A_2 und B in der That materielle Punkte des starren Punktsystems sind, die auf A_1 und A_2 wirkenden Kräfte $0a_1$ und a_22 von ihren betreffenden Angriffspunkten nach B versetzen und ergeben hier, wie das Kräftedreieck $0a_12$ lehrt, die auf B in der Richtung Bu wirkende Resultierende 02 , während die entgegengesetzt gleichen Componenten $\overline{a_11}$ und $\overline{1a_2}$, die in der Geraden A_1A_2 wirken, sich das Gleichgewicht halten, wodurch die obige Behauptung nachgewiesen ist. In ähnlicher Weise kann man sich, wie dies in Fig. 107 bei der eben behandelten Zusammensetzung der Kräfte im Punkte A geschehen ist, in allen anderen Fällen der Zusammensetzung von Kräften an geeigneten Stellen je nach Bedarf stets materielle Punkte hinzudenken, welche mit dem übrigen Punktsystem starr verbunden sind und sonach die Kräfte nach beliebigen Punkten ihrer Richtungslinie übertragen.

Übrigens kann man, was besonders für die Construction dann von Vortheil ist, wenn die Kräfteerichtungen vom Parallelismus nicht viel verschieden sind, so dass der Durchschnittspunkt A in zu große Entfernung rückt, sich als Constructionsbehelfes des Seilpolygons $0IIIII$ (Fig. 107 a) bedienen, indem man nämlich irgend einen Pol C des Kräftepolygons in zweckentsprechender Lage wählt, denselben mit den Endpunkten 012 des Kräftedreiecks durch die Polstrahlen $0C$, $1C$, $2C$ (Fig. 107 b) verbindet, vom bliebigem Punkt 0 (Fig. 107 a) $0I \parallel 0C$ führt bis zum Durchschnitte I mit der Richtungslinie von P_1 , ferner $III \parallel 1C$ führt bis zum Durchschnitte II mit der Richtungslinie von P_2 , und schließlich $IIII \parallel 2C$ construirt. Der Durchschnittspunkt c der Endseiten $0I$ und $IIII$ des Seilpolygons ist der gesuchte Punkt der Richtungslinie der Resultierenden und die zu 02 parallele cu die gesuchte Richtungslinie selbst, denn verlegt man P_1 nach I und P_2 nach II und zerlegt P_1 mittels des Kräftedreiecks $0cI$ in die

auf denselben Angriffspunkt I wirkenden Componenten (OC) und (CI) (Fig. 107 a) und P_2 mittels des Kräftedreiecks $IC2$ in die in II angreifenden Componenten (IC) und $(C2)$, so halten sich von den nunmehrigen vier Componenten (OC) , (CI) , (IC) und $(C2)$ die beiden mittleren das Gleichgewicht, während (OC) und $(C2)$ nach demselben Angriffspunkt I verlegt werden können, daher die längs cu wirkende Resultante, welche durch die Schlussseite $(O2)$ des Kräftedreiecks $OC2$ bestimmt ist, ergeben.

Um auf dem Wege der Rechnung die Kräfte P_1 und P_2 , deren Kräftewinkel A_1AA_2 durch (P_1P_2) bezeichnet sei, zusammensetzen, kann man sich, da der hier behandelte Fall auf den des § 14 zurückgeführt wurde, der auf S. 48 abgeleiteten Gleichungen (2), (3), (4), (5) bedienen, so dass

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos(P_1P_2)} \\ \text{tang}(P_1R) &= \frac{P_2 \sin(P_1P_2)}{P_1 + P_2 \cos(P_1P_2)} \\ \text{tang}(P_2R) &= \frac{P_1 \sin(P_1P_2)}{P_2 + P_1 \cos(P_1P_2)} \\ \frac{P_1}{\sin(P_2R)} &= \frac{P_2}{\sin(P_1R)} = \frac{R}{\sin(P_1P_2)} \end{aligned} \right\} (1)$$

u. s. w. ist, oder aber man macht von der im § 16 besprochenen Methode Anwendung, indem man irgend ein orthogonales Achsensystem wählt und die Gleichungen auf S. 54 benützt:

$$\left. \begin{aligned} R_x = X_1 + X_2 &= P_1 \cos(xP_1) + P_2 \cos(xP_2) \\ R_y = Y_1 + Y_2 &= P_1 \sin(xP_1) + P_2 \sin(xP_2) \\ R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \\ \cos(xR) &= \frac{R_x}{R}, \quad \sin(xR) = \frac{R_y}{R} \end{aligned} \right\} (2)$$

durch welche Gleichungen die Größe und Richtung der Resultierenden bestimmt wird.

Zur Bestimmung der Richtungslinie der Resultierenden ist es überdies nothwendig, einen Punkt derselben zu bestimmen. Gewöhnlich wählt man dazu nicht den Durchschnittspunkt A , sondern den Punkt D , in welchem diese gesuchte Richtungslinie die Verbindungslinie $A_1A_2 = a$ der (in den Richtungslinien der Kräfte willkürlich gewählten) Angriffspunkte der Componenten durchschneidet. Verlegt man zu diesem Zwecke den Coordinatenanfangspunkt in den Punkt A_1 , die Richtung der positiven x -Achse in die Richtung von A_1 nach A_2 , so dass, wenn (x_1y_1) , (x_2y_2) , (ξ, η) die Coordinaten der Angriffspunkte A_1A_2D bedeuten, $y_1 = y_2 = \eta = a$, ferner $x_1 = 0$, $x_2 = A_1A_2 = a$ und $\xi = A_1D$ ist, so ist dem Momentensatze des § 17 und der Gleichungen

(3), S. 58 zufolge, wofern der Coordinatenanfangspunkt A_1 Momentenpol gewählt wird,

$$\xi \cdot R_y = x_1 Y_1 + x_2 Y_2 = a \cdot P_2 \sin(x P_2)$$

$$\xi = a \cdot \frac{P_2 \sin(x P_2)}{P_1 \sin(x P_1) + P_2 \sin(x P_2)} \dots (3)$$

wo die Lage des Punktes D bestimmt ist.

c) Zwei parallele Kräfte P_1 und P_2 mit verschiedenen Richtungen, die nicht entgegengesetzt gleich sind, haben, mögen dieselben

Fig. 108.

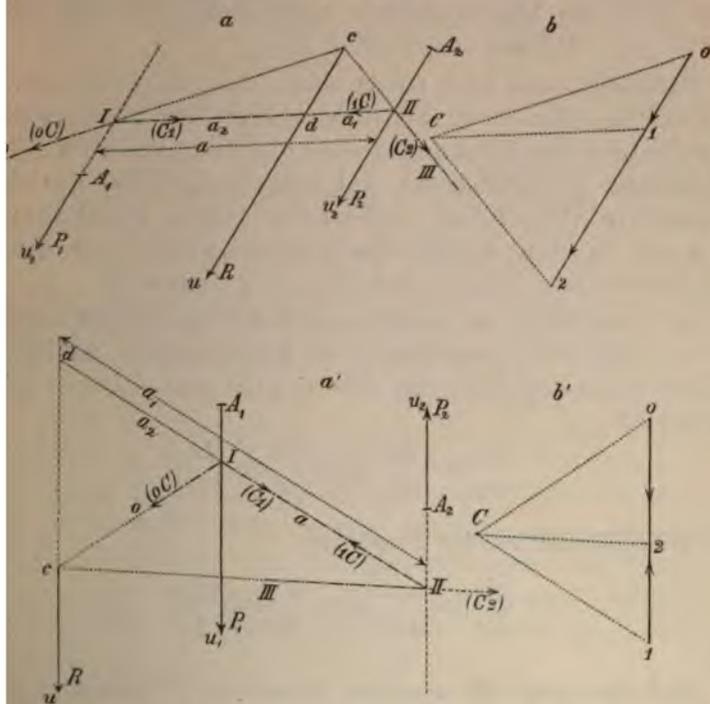


Fig. 108 a, b gleichgerichtet sein, oder aber wie in Fig. 108 a', b' entgegengesetzt gerichtet (antiparallel), im letzteren Falle aber an Größe verschieden (etwa $P_1 > P_2$) sein, stets eine Resultierende, denn ist $o12$ (Fig. 108 b und b') das den Kräften P_1 und P_2 entsprechende Kräfte-Parallelogramm, das hier in eine Gerade übergeht, und ist C der beliebig gewählte Momentenpol, so kann man sich in ganz gleicher Weise, wie dies zuletzt geschehen ist, als constructiven Hilfsmittels des Seilpolygons $oIIIII$ (Fig. 108 a und a'), in welchem $oI \parallel C'o$, $III \parallel C'1$, $IIII \parallel C'2$ ist, bedienen, um nachzuweisen, dass die im Durchschnittspunkte c der

beiden äußersten Seiten des Seilpolygons aus den Componenten (01) und ($C2$) resultierende Kraft 02 , deren Richtungslinie die durch c zu den Kräften parallel geführte Gerade Cu ist, zugleich auch die Resultante der ursprünglichen Kräfte P_1 und P_2 ist. Da der Pol C willkürlich gewählt wurde, so kann man auch umgekehrt die Transversale III willkürlich wählen, nur muss dann C irgendwo in dem durch 1 zu III parallel geführten Strahle angenommen werden.

Aus dieser Deduction ist zu ersehen, dass die Resultante 02 von zwei parallelen Kräften zu diesen Componenten parallel und der Größe und Richtung nach durch deren algebraischen Summe bestimmt ist, wofern man nämlich, falls die Kräfte entgegengesetzt gerichtet sind, dieselben und deren Richtungen in bekannter Weise durch die Qualitätszeichen unterscheidet (in Fig. 108 b' ist $R = P_1 + [-P_2]$ und $02 = 01 + 12$).

Das Seilpolygon lehrt ferner sofort, dass bei gleichgerichteten Kräften (Fig. 108 a) die Richtungslinie der Resultierenden in dem zwischen den Wirkungslinien der Componenten gelegenen Flächenraume der Kräfteebene, bei entgegengesetzt gerichteter Componente (Fig. 108 a') außerhalb dieses Flächenraumes, und zwar in dem durch die Richtungslinie der größeren Kraft begrenzten Theile der Ebene, gelegen ist.

Ist d der Punkt, in welchem die Richtungslinie der Resultierenden die willkürliche Transversale III durchschneidet, so folgen aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $dIc \sim IC0$ und $dIIc \sim IC2$ die Proportionen

$$\frac{cd}{01} = \frac{Id}{C1} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{12}}{cd} = \frac{C1}{dII'}$$

deren Multiplication zu der Proportion

$$\frac{\overline{12}}{01} = \frac{Id}{dII'}, \quad \text{oder} \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{Id}{dII'}$$

führt.

Sind also $a_1 a_2 a$ die absoluten Maßzahlen der Abschnitte dII' , Id und III , so ist $\frac{P_1}{a_1} = \frac{P_2}{a_2}$. Diese zwei gleichen Verhältnisse sind aber nach einem bekannten Satze der Proportionslehre auch gleich dem Verhältnisse $\frac{P_1 + P_2}{a_1 + a_2}$, d. i. $\frac{R}{a}$ für den Fall der Fig. 108 a und auch gleich dem Verhältnisse $\frac{P_1 - P_2}{a_1 - a_2} = \frac{R}{a}$ für den Fall der Fig. 108 a' , so dass allgemein

$$\frac{P_1}{a_1} = \frac{P_2}{a_2} = \frac{R}{a} \dots (4)$$

Übrigens würde sich diese Relation auch sofort aus der Gleichung (3) ergeben, wenn man den Punkt I zum Anfangspunkte eines Achsensystems wählen würde, dessen positive x -Achse die Richtung III hat. Man hätte nur im Falle gleichgerichteter Kräfte aus leicht ersichtlichen Gründen $(x P_2) = (x P_1)$ und $\xi = a_2$, $-\xi = a_1$ zu setzen, so dass nach (3) $\xi = a_2 = a \frac{P_2}{P_1 + P_2}$ und $a_1 = a - \xi = a - a \frac{P_2}{P_1 + P_2} = a \frac{P_1}{P_1 + P_2}$ ist, während für entgegengesetzt gerichtete Kräfte $(x P_2) = (x P_1) + \pi$, also $\sin(x P_2) = -\sin(x P_1)$ ist, so dass nach (3) $\xi = -a \frac{P_2}{P_1 - P_2} = -a_2$ und $a_1 = a + a_2 = a + a \frac{P_2}{P_1 - P_2} = a \frac{P_1}{P_1 - P_2}$

bereinstimmend mit der Gleichung (4) ist.

Die Relation (4) spricht den bemerkenswerten Satz aus, dass, wenn man bei zwei parallelen Kräften $P_1 P_2$ und ihrer Resultierenden die Angriffspunkte ($III d$) in derselben beliebig gewählten, die Richtungslinien schneidenden Transversalen annimmt, das Verhältnis einer jeden dieser Kräfte zu der Entfernung der Angriffspunkte der beiden anderen Kräfte für alle drei Kräfte dasselbe ist.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man, nachdem man durch die algebraische Summe der Kräfte P_1 und P_2 die Richtung und Größe der Resultierenden bestimmt hat, in sehr einfacher Weise die Lage der Richtungslinie der Resultierenden auf dem Wege der Rechnung bestimmen.

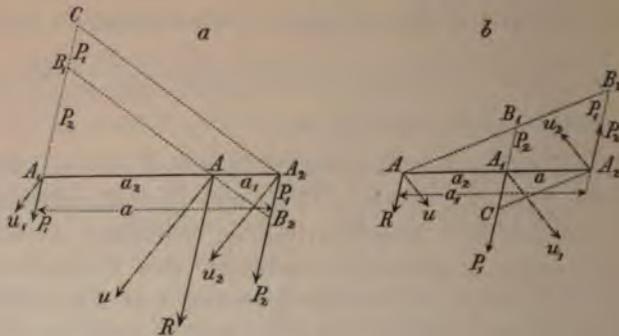
Dieser Satz gestattet auch, irgend einen Punkt der Richtungslinien der Resultierenden ohne Zuhilfenahme des Seilpolygons auf einem einfachen constructiven Wege zu bestimmen. Man führe nämlich eine beliebige Transversale, welche die Richtungslinien der Kräfte P_1 und P_2 in den Punkten A_1 und A_2 (Fig. 109 a und b) schneidet, trägt dann in der Richtung einer Kraft, etwa der Kraft P_2 von A_2 aus die die andere Kraft P_1 darstellende Strecke $A_2 B_2$ und in der entgegengesetzten Richtung der anderen Kraft P_1 von A_1 aus die Kraftlinie $A_1 B_1$ der Kraft P_2 auf; derjenige Punkt A nun, in welchem die Gerade $B_1 B_2$ die ursprüngliche Transversale schneidet, ist ein Punkt der Richtungslinie der Resultierenden, denn es ist der Gleichung (4) entsprechend, da $AA_1 B_1 \cong AA_2 B_2$ ist,

$$\frac{A_1 B_1}{AA_1} = \frac{A_2 B_2}{AA_2}, \text{ also } \frac{P_2}{a_2} = \frac{P_1}{a_1}.$$

Sind A_1 und A_2 (Fig. 109) die ursprünglichen Angriffspunkte der Kräfte P_1 und P_2 , so hängt die Lage des Punktes A , in welchem die Wirkungslinie der Resultierenden die Verbindungslinie dieser Angriffspunkte $A_1 A_2$ schneidet, den Gleichungen $a_1 = a \frac{P_1}{R}$, $a_2 = a \frac{P_2}{R}$ zufolge nur von der Lage der Punkte A_1 und A_2 und der relativen Größe der Kräfte P_1 und P_2 , keinesfalls aber von dem Winkel ab,

den die parallelen Kräfte mit der Geraden $A_1 A_2$ bilden, so dass der Punkt A derselbe bleibt, wenn auch dieser Winkel um welchen Wert immer abgeändert wird, wofern nur die Angriffspunkte A_1 und A_2 und die relativen Größen der Kräfte die gleichen bleiben, also

Fig. 109.



auch wenn die Kräfte P_1 und P_2 in Fig. 109 *a* und *b* die beliebigen Richtungen u_1 und u_2 annehmen, so dass die Resultierende in der zu $u_1 u_2$ parallelen Richtung Au wirkt.

Da bei der derart im selben Drehungssinne vorgenommenen Drehung der parallelen Richtungslinien der Componenten P_1 und P_2 um deren Angriffspunkte die Richtungslinie der Resultierenden um den Punkt A als um den Mittelpunkt dieser Drehung rotiert, so nennt man diesen von den Kräfte richtungen unabhängigen Punkt A der Richtungslinie der Resultierenden paralleler Kräfte den Mittelpunkt dieser parallelen Kräfte.

d) Sind die beiden längs zweier paralleler Richtungslinien wirkenden Kräfte P_1 und P_2 entgegengesetzt gerichtet und an Größe gleich, so bilden sie ein Kräftesystem, das den Namen Kräftepaar (Drehpaar, Drehzwilling, Kräftezwilling u. s. w.) führt. Die beiden Kräfte dieses für die Statik wichtigen Kräftesystems, die durch P und $(-P)$ bezeichnet seien, lassen sich weder auf eine äquivalente resultierende Einzelkraft reducieren, noch halten sich dieselben das Gleichgewicht. Denn würden dieselben einer resultierenden Einzelkraft R äquivalent sein, so könnte man die Richtungslinie derselben etwa zur x -Achse eines Achsensystems wählen, und es müsste dann eine längs dieser Achse in entgegengesetzter Richtung angenommene Kraft $(-R)$ von gleicher Größe nicht nur der Kraft R , sondern auch dem dieser letzteren Kraft äquivalenten Kräftepaare P und $-P$ das Gleichgewicht halten, sonach müsste der ersten Gleichung (1) S. 367 zufolge die Summe der X -Componenten der Kräfte $(-R)$, (P) und $(-P)$, die sich, da die X -Componenten der beiden letztgenannten Kräfte

enbar entgegengesetzt gleich sind, auf $(-R)$ reducirt, Null sein, s der Voraussetzung einer von Null verschiedenen Resultanten R lerspricht. Aber auch das Gleichgewicht können sich die beiden äfte P und $(-P)$ nicht halten, denn wählt man etwa die Ebene eser beiden parallelen Kräfte zur xy -Ebene eines orthogonalen ordinatenachsensystems und etwa den Angriffspunkt der Kraft $(-P)$ n Coordinatenanfangspunkte O , so reducirt sich die algebraische mme $\Sigma M_z^{(P)}$ der statischen Momente der Kräfte P und $(-P)$ auf das tische Moment $M_o^{(P)}$ und ist sonach dem absoluten Zahlwerte nach n Producte aus P und dem senkrechten Abstände n der Richtungs- ien dieser beiden Kräfte gleich, also jedenfalls, da weder P noch n ll ist, von Null verschieden, während die Voraussetzung des Gleich- wichtszustandes zufolge der letzten Gleichung (1) S. 367 mit Noth- digkeit erfordern würde, dass $\Sigma M_z^{(P)}$ sich auf Null reducirt.

Ein Kräftepaar $(P, -P)$ bildet sonach neben dem Gleichgewichts- stande und einer Einzelkraft einen dritten elementaren, auf die den ersten nicht reducierbaren Fall der Statik. Den senkrechten stand der parallelen Richtungslinien der beiden Kräfte P und $(-P)$ ant man den Arm oder Hebelarm des Kräftepaares.

Als statisches Moment oder kurzweg Moment $M_{(P,-P)}$ eines räftepaares $(P, -P)$ bezeichnet man das statische Moment gend einer dieser beiden Kräfte in Bezug auf irgend en Momentenpol, der in der Richtungslinie der zweiten raft gelegen ist. Dass es hiebei gleichgiltig ist, von welcher der den Kräfte man das statische Moment bestimmt, und wo man den mentenpol in der Richtungslinie der zweiten Kraft annimmt, in m dadurch weder der Zahlwert, noch auch das Qualitätszeichen des ments eine Änderung erfährt, ist sofort ersichtlich; so ist z. B. in g. 110 $M_{P,-P} = M_B^{(P)} = M_A^{(-P)}$ und $M_{Q,-Q} = M_B^{(Q)} = M_A^{(-Q)}$.

Lehrsatz: Stimmt das statische Moment $M_{(P,-P)}$ eines räftepaares $(P, -P)$ dem Zeichen und Zahlwerte nach mit m Momente $M_{(Q,-Q)}$ eines beliebigen zweiten in dersel- n Ebene wirkenden räftepaares $(Q, -Q)$ überein, so sind diese beiden Kräftepaare quivalent.

Beweis. a) Schnei- n sich die Richtungslinien r beiden Kräftepaare (Fig. 110) und sind A , bzw.

die Durchschnittspunkte der Richtungslinien von P und Q , bzw. n $(-P)$ und $(-Q)$, so zerlege man die nach A übertragene Kraft P ,

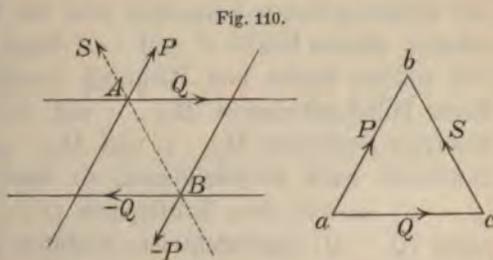
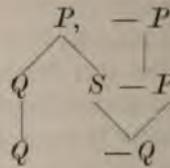


Fig. 110.

die durch ab dargestellt sei, in die gleichfalls nach A versetzte Kraft Q , die durch ac dargestellt sein möge, und in die durch die dritte Seite cb des Kräfteedreieckes acb bestimmte zweite Componente S , die gleichfalls in A angreift. Dem Momentansatze S. 57 zufolge ist dann für den Momentenpol B

$$M_B^{(P)} = M_B^{(Q)} + M_B^{(S)} \dots (1)$$

Nun ist zufolge des Begriffes des Moments eines Kräftepaares die ursprüngliche Annahme der Gleichheit von $M_{(P,-P)} = M_{(Q,-Q)}$, da der Punkt B sowohl in der Richtungslinie von $(-P)$, als in jener von $(-Q)$ gelegen ist, identisch mit der Gleichung $M_B^{(P)} = M_B^{(Q)}$, deren Subtraction von (1) lehrt, dass $M_B^{(S)} = 0$ ist, was, da S von Null verschieden ist, nur möglich ist, wenn der Momentenpol B in der Richtungslinie von S gelegen ist. Es muss sohin die Richtungslinie der Componente S mit der Diagonale AB identisch sein, und es kann sohin die Kraft S von A nach B übertragen werden. Aus der Zusammensetzung dieser Kraft S mit der gleichfalls nach B zu verlegenden Kraft $(-P)$ resultiert aber, wie das Kräfteedreieck cba , in welchem die geometrische Summe aus cb und ba die dritte Seite ca ist, lehrt, die gleichfalls in B wirkende Kraft $(-Q)$. Sonach ist, wie dies das Kräfteschema:



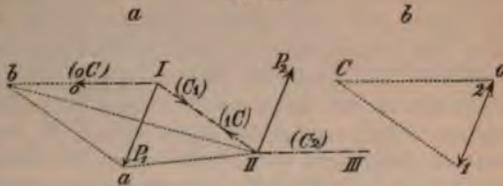
zeigt, da $(P, -P)$ dem Kräftesystem $(Q, S, -P)$ und dieses dem Kräftepaar $(Q, -Q)$ äquivalent ist, auch das Kräftepaar $(P, -P)$ äquivalent dem Kräftepaar $(Q, -Q)$.

b) Sind dagegen sämtliche vier Richtungslinien der Kräfte P , $-P$, Q und $-Q$ parallel, so kann man in der Kräfteebene zwei parallele Geraden im beliebigen Abstände wählen, welche diese vier Richtungslinien schneiden und ein Kräftepaar $(S, -S)$ zuhülfe nehmen, dessen Kräfte S und $-S$ längs dieser Geraden wirken und von solcher Größe und Richtung gewählt sind, dass das Moment dieses Hilfskräftepaares $M_{(S,-S)}$ mit den beiden als gleich vorausgesetzten Momenten $M_{(P,-P)}$ und $M_{(Q,-Q)}$ ebenfalls dem Zeichen und Zählwerte nach übereinstimmt, so dass zufolge a) das Kräftepaar $(S, -S)$ sowohl dem Kräftepaare $(P, -P)$, als auch dem Kräftepaare $(Q, -Q)$ äquivalent ist, wodurch nachgewiesen ist, dass auch die beiden letzteren Kräftepaare einander äquivalent sind.

Zu demselben Lehrsatz würde auch die Anwendung des Kräftepolygons 012 und des einem beliebigen Pole C entsprechenden Seilpolygons $01III$

Fig. 111) auf irgend ein Kräftepaar führen. Da nämlich $P_1 = P_2$ ist, so ist o entseht mit 2, und sonach, da $oI \parallel CO$ und $IIIII \parallel C2$ ist, ist auch $oI \parallel IIII$. Die gleichen Schlusskräfte oC und $C2$ bilden demgemäß ein Kräftepaar, das dem Kräftepaar (P_1, P_2) äquivalent ist. Macht man nun $Ib = oC$ und $Ia = oI$, so sind in den congruenten Dreiecken Iba und oCI die Seiten $ab \parallel CI$, und da $CI \parallel IIII$ ist, auch $ab \parallel IIII$, sonach die beiden Momentendreiecke $IIIb$ und $IIIa$ flächengleich, folglich auch das Moment des Kräftepaars $(oC, C2)$ gleich dem Moment des Kräftepaars (P_1, P_2) .

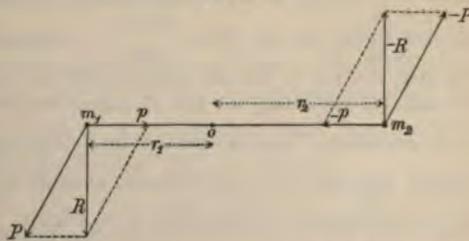
Fig. 111.



Die Anwendung des Seilpolygons auf ein Kräftepaar lehrt auch, dass dieses im Grenzfall der Fig. 108 a' anzusehen ist, wenn die resultierende R der entgegengesetzt gerichteten Kräfte der Grenze o sich nähert und der im Durchschnittspunkte der Geraden oI und $IIIII$ gelegene Angriffspunkt e der Resultanten R in unendliche Entfernung rückt, was übrigens auch die Gleichung (4) für $P_1 = P_2$ lehrt.

Da die beiden Kräfte eines Kräftepaars sich, wofern sie mit Beibehaltung ihrer Richtung und Größe auf den Massenmittelpunkt des starren Körpers einwirken würden, das Gleichgewicht halten müssten, so ergibt sich als unmittelbare Folgerung des Newton'schen Gesetzes von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes (S. 333), dass ein Kräftepaar den Massenmittelpunkt eines ruhenden, freibeweglichen starren Körpers nicht in Bewegung zu setzen im Stande ist, sonach nur eine einfache Drehung dieses Körpers um eine durch den Massenmittelpunkt hindurchgehende Achse (die jedoch, wie aus späteren Auseinandersetzungen ersichtlich sein wird, nicht nothwendig senkrecht zur Ebene des Kräftepaars stehen muss) ohne gleichzeitige Fortbewegung des Massenmittelpunktes erzeugt, eine Wirkung, die durch eine Einzelkraft nie hervorgerufen werden kann, da diese, wie später gezeigt werden wird, nur entweder eine progressive Bewegung erzeugen kann, wenn der Massenmittelpunkt in ihrer Wirkungslinie gelegen ist, oder aber, wenn das letztere nicht der Fall ist, eine von der Bewegung des Massenmittelpunktes begleitete rotierende Bewegung hervorruft.

Fig. 112.



Anmerkung. a) Für zwei in starrer Verbindung stehende materielle Punkte m_1 und m_2 (Fig. 112) lässt sich diese Wirkung des Kräftepaars $(P, -P)$, die schon aus § 57 gefolgert werden kann, sehr einfach demonstrieren. Es muss nämlich dem Begriffe der Kraftrichtung zufolge jeder dieser ursprünglich ruhend angenommenen Punkte sich in

der Richtung der aus der entsprechenden äußeren und inneren Kraft resultierenden

Kraft in Bewegung setzen. Da aber sowohl die beiden äußeren Kräfte P und $-P$, als auch die durch dieselben geweckten inneren Kräfte p und $-p$ entgegengesetzt gleich sind, so müssen auch die beiden in der Ebene der Kräfte P und p , d. i. in der Ebene der Fig. 112 wirkenden Resultanten R und $-R$ von gleicher Größe und entgegengesetzter Richtung sein. Es müssen demnach auch die mit den Richtungen von R und $-R$ übereinstimmenden Bewegungsrichtungen der beiden starr verbundenen Punkte m_1 und m_2 einander gerade entgegengesetzt sein. Die anfängliche Bewegung des Punktsystems muss demnach nach § 62 eine rotierende Bewegung um eine augenblickliche Achse sein, die zur Ebene der Fig. 112 senkrecht steht und die Gerade $m_1 m_2$ in einem zwischen m_1 und m_2 gelegenen Punkte o schneidet, ferner müssen die beiden Bewegungsrichtungen, also auch die Richtungen von R und $-R$ zu der Geraden $m_1 m_2$ senkrecht sein. Sind nun p_1 und p_2 die Beschleunigungen von m_1 und m_2 , ferner $\overline{m_1 o} = r_1$, $\overline{m_2 o} = r_2$ und ist γ die augenblickliche Winkelbeschleunigung, so ist bekanntlich $R = m_1 p_1 = m_1 r_1 \gamma$ und $R = m_2 p_2 = m_2 r_2 \gamma$, daher $m_1 r_1 = m_2 r_2$, und folglich ist o nach § 56 der Massenmittelpunkt des Punktsystems und $(m_1 + m_2) r_1 = m_2 (r_1 + r_2)$.

Zugleich ersieht man aus Fig. 112, dass, je nachdem die Richtung von P unter einem stumpfen oder spitzen Winkel α gegen $m_1 m_2$ geneigt ist, die inneren Kräfte p Zug- oder Druckspannungen sind, dass ferner, wenn man Zugspannungen negativ in Rechnung bringt, die Gleichungen bestehen:

$$R = P \sin \alpha, p = P \cos \alpha, \gamma = \frac{R}{m_1 r_1} = \frac{P \sin \alpha (m_1 + m_2)}{m_1 m_2 (r_1 + r_2)} \dots \dots (a)$$

b) Wirkt nur eine äußere Kraft P allein auf das Punktsystem im Punkte m_1 ein, so erzeugt diese, da die Entfernung der beiden Punkte m_1 und m_2 sich nicht ändern kann, gleichfalls eine Druck- oder Zugspannung p , je nachdem der Winkel α spitz oder stumpf ist. Die Kraft P lässt sich nun in die normalen Componenten $P \cos \alpha$ und $P \sin \alpha$ zerlegen, und es ist, wenn man die Richtung von m_1 nach m_2 zur positiven Richtung der x -Achse und die Richtung von $P \sin \alpha$ zur positiven y -Achse annimmt, die componentale Beschleunigung $\frac{d^2 x}{dt^2}$ des Punktes m_1 in der Richtung der x -Achse infolge der vorausgesetzten Starrheit dieselbe wie jene des Punktes m_2 , und zwar ist dieselbe bestimmt durch die zwei Gleichungen $P \cos \alpha - p = m_1 \frac{d^2 x}{dt^2}$, $p = m_2 \frac{d^2 x}{dt^2}$, durch deren Addition sich die Gleichung $P \cos \alpha = (m_1 + m_2) \frac{d^2 x}{dt^2}$ ergibt, die auch unmittelbar aus dem Schwerpunkts-gesetz (§ 57), S. 333, gefolgert werden kann.

Es ist demnach $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{P \cos \alpha}{m_1 + m_2}$, $p = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot P \cos \alpha$ und $P \cos \alpha - p = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot P \cos \alpha$. Die componentale Beschleunigung parallel zur y -Achse hat für den Punkt m_1 den Wert $\frac{P \sin \alpha}{m_1}$, während sie für den Punkt m_2 Null ist. Für den Winkel λ , den die augenblickliche Bewegungsrichtung des Punktes m_1 , die mit der Richtung der aus P und p resultierenden Kraft übereinstimmt, mit $m_1 m_2$ einschließt, besteht offenbar die Relation $\tan \lambda = \frac{P \sin \alpha}{P \cos \alpha - p} = \tan \alpha \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1}$. Zerlegt man die auf m_1 einwirkende normale Kraft $P \sin \alpha$ in die gleichgerichteten, in m_1 angreifenden Componenten $Y_1 = P \sin \alpha \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}$ und $Y'_1 = P \sin \alpha \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ und fügt im Punkte m_2 die sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte $Y_2 = P \sin \alpha \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ und $Y'_2 = -P \sin \alpha \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}$ hinzu, so ersieht man sofort,

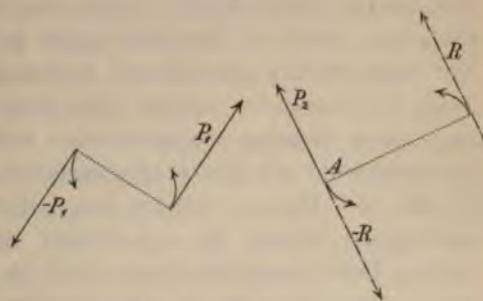
lass die Kräfte Y_1 und Y_2 eine progressive Bewegung parallel zur y -Achse mit der Beschleunigung $\frac{P \sin \alpha}{m_1 + m_2}$ hervorrufen, die sich mit der oben betrachteten fortschreitenden Bewegung in der Richtung der x -Achse, deren Beschleunigung $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{P \cos \alpha}{m_1 + m_2}$ ist, zu einer resultierenden fortschreitenden Bewegung parallel zur Richtung der Kraft P zusammensetzt, während gleichzeitig durch das Kräftepaar (Y'_1, Y'_2) nach Früherem eine rotierende Bewegung um die zur Ebene der Fig. 112 senkrechte Schwerpunktsachse mit der augenblicklichen Winkelbeschleunigung $\gamma = \frac{Y'_1 (m_1 + m_2)}{m_1 m_2 (r_1 + r_2)} = \frac{P \sin \alpha}{m_1 (r_1 + r_2)}$ hervorgerufen wird. Die Werte für die inneren Kräfte ergeben sich auch aus Gleichung (6), S. 341.

Die vollständige Übereinstimmung aller Lehrsätze dieses Paragraphs mit den entsprechenden kinematischen Sätzen für die Zusammensetzung zweier Rotationen, wofern man nur die Worte „Kraft“ und „Kraftrichtung“ durch die Worte „Winkelgeschwindigkeit“ und „positive Richtung der Rotationsachse“ ersetzt, lehrt die Vergleichung der §§ 61 und 62 mit diesem Paragraph. Der dem Begriffe des Momentes eines Kräftepaares correspondierende Begriff in der Kinematik ist jener der Geschwindigkeit der resultierenden fortschreitenden Bewegung (siehe S. 361).

§ 66. Zusammensetzung eines Kräftepaares mit einer Einzelkraft und jene der Kräftepaare miteinander.

Ist ein Kräftepaar $(P_1, -P_1)$ (Fig. 113) mit einer in der Ebene des Kräftepaares wirkenden Einzelkraft P_2 , deren Angriffspunkt A ist, zusammensetzen, so

Fig. 113.



denke man sich das Kräftepaar $(P_1, -P_1)$ durch ein anderes äquivalentes Kräftepaar $(R, -R)$ ersetzt, dessen eine bezüglich ihrer Richtung, Größe und ihres Angriffspunktes beliebig wählbare Kraft $(-R)$ so gewählt werde, dass A ihr Angriffspunkt, ferner ihre Richtung

die der Kraft P_2 entgegengesetzte und $P_2 = R$ sei. Da dann $-R$ und P_2 sich das Gleichgewicht halten, so ist R äquivalent den drei Kräften $(P_2, -R, R)$, somit auch dem ursprünglichen Kräftesystem $(P_2, -P_1, P_1)$, d. h. R ist die Resultante des letzteren.

Soll aber das Kräftepaar $(R, -R)$ äquivalent sein dem Kräftepaar $(P_1, -P_1)$, so müssen ihre Momente dem Zeichen und Zahlwerte nach gleich sein (in der Fig. 113 muss, da der Drehungssinn von $(P_1 - P_1)$ der entgegengesetzte des Uhrzeigers ist, die Richtungs-

linie von R rechts von jener der Kraft P_2 gelegen sein). Es ist sonach $M_{P_1, -P_1} = M_{R, -R}$, und da das letztere Moment $M_{R, -R}$ (dem Begriffe des Moments eines Kräftepaars entsprechend) nichts anderes ist, als das Moment der resultierenden Kraft R für den Momentenpol A , so muss auch das letztere gleich sein dem Momente $M_{P_1, -P_1}$ des Kräftepaars $(P_1, -P_1)$.

Ein Kräftepaar $(P_1, -P_1)$ setzt sich demnach mit einer beliebigen in dessen Ebene wirkenden Einzelkraft P_2 zu einer mit der letzteren Kraft P_2 gleichgerichteten und ihr an Größe gleichen resultierenden Kraft R zusammen, deren Moment für irgend einen in der Wirkungslinie der componentalen Einzelkraft P_2 gelegenen Punkt A dem Zeichen und Zahlwerte nach gleich ist dem Momente des gegebenen Kräftepaars.

Zu demselben Resultate führt die graphische Zusammensetzung, die als zu einfach nicht erst näher erörtert zu werden braucht.

Auf die Übereinstimmung dieses Satzes mit dem kinematischen Gesetze (S. 362) der Zusammensetzung einer progressiven mit einer rotierenden Bewegung sei hier besonders hingewiesen.

Sind mehrere in derselben Kräfteebene wirkende Kräftepaare zusammzusetzen, und zwar im allgemeinen theils Kräftepaare, deren Momente $M_1 M_2 \dots$ positiv sind, theils Kräftepaare mit den negativen Momenten $(-m_1), (-m_2) \dots$, so kann man in der Kräfteebene zwei beliebige parallele Geraden u und u' etwa im Abstände 1 annehmen und jedes einzelne der Kräftepaare ersetzen durch ein äquivalentes Kräftepaar, dessen Kräfte längs dieser beiden Geraden wirken und denselben absoluten Zahlwert haben wie das entsprechende Moment. Nur muss als die gemeinsame Richtung jener Kräfte $M_1 M_2 \dots$, die längs der Geraden u wirken, jene etwa zur positiven gewählte Richtung dieser Geraden u angenommen werden, bei welcher diese Kräfte in Verbindung mit den entgegengesetzt (negativ) gerichteten Kräften $(-M_1), (-M_2) \dots$, welche längs der Geraden u' wirken, solche Kräftepaare bilden, die den Körper im positiven Sinne zu drehen suchen. Das Umgekehrte ist der Fall für die Kräfte $(-m_1), (-m_2) \dots$, welche längs der Geraden u im negativen Sinne, und für die Kräfte $m_1 m_2 \dots$, die längs der Geraden u' im positiven Sinne wirken. Ist nun die algebraische Summe $M_1 + M_2 + \dots + (-m_1) + (-m_2) + \dots$ der längs der Geraden u wirkenden Kräfte Null, so verschwindet auch die Summe der in der Geraden u' wirkenden Kräfte, so dass sich diese Kräfte sowohl in u , als auch in u' , sonach auch die diesen Kräften äquivalenten ursprünglichen Kräftepaare das Gleichgewicht halten. Hat aber diese algebraische Summe $\Sigma M + \Sigma(-m)$ den positiven Wert μ , beziehungsweise den negativen Wert $(-\mu)$, so bildet die

aus den längs u wirkenden Kräften resultierende Kraft μ , bezw. $(-\mu)$ mit der in u' im entgegengesetzten Sinne wirkenden Resultanten $(-\mu)$, bezw. $(+\mu)$ ein Kräftepaar, dessen Moment μ , bezw. $(-\mu)$ ist, und das durch ein beliebiges Kräftepaar von demselben Moment in derselben Ebene ersetzbar ist.

Ist demnach die algebraische Summe der Momente von Kräftepaaren, die in derselben Ebene wirken, gleich Null, so halten sich die Kräftepaare das Gleichgewicht; ist aber diese Summe von Null verschieden, so resultiert aus denselben ein Kräftepaar, dessen Moment dieser Momentensumme der componentalen Kräftepaare dem Zeichen und Zahlwerte nach gleich ist.

§ 67. Allgemeine Methode der Zusammensetzung von Kräften in derselben Ebene auf dem Wege der Rechnung.

Sind sowohl die Angriffspunkte $A_1 A_2 \dots A_n$ aller auf denselben starren Körper wirkenden n -Kräfte $P_1 P_2 \dots P_n$, als auch deren Richtungslinien in derselben Ebene gelegen, so kann man diese Kräfteebene zur xy -Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems wählen, und es sind dann sowohl alle Z -Componenten der einzelnen Kräfte, als auch alle Coordinaten z der einzelnen Angriffspunkte Null, somit auch $\sum Z = 0$, $\sum M_x^{(P)} = \sum (yZ - zY) = 0$, $\sum M_y^{(P)} = \sum (zX - xZ) = 0$. Der in der Kräfteebene willkürlich gewählte Anfangspunkt O des Achsensystems sei als Reductionspunkt bezeichnet. Unbeschadet der Wirkung der n -Kräfte $P_1 P_2 \dots P_n$ kann man zu diesen Kräften $2n$ -Kräfte (Reductionskräfte) hinzufügen, deren gemeinsamer Angriffspunkt der Reductionspunkt O ist, vorausgesetzt dass diese hinzugefügten Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Von diesen diese Bedingung erfüllenden $2n$ -Kräften seien je zwei Kräfte P'_r und $(-P'_r)$ (wo $r = 1, 2 \dots n$ ist) entgegengesetzt gleich, und die erstere P'_r stimme mit der auf den Angriffspunkt A_r thatsächlich einwirkenden Kraft P_r in Richtung und Größe überein. Man erhält auf diese Weise in derselben Kräfteebene ein dem ursprünglichen System von n -Kräften äquivalentes Kräftesystem von $3n$ -Kräften, von welchen die n -Reductionskräfte $P'_1 P'_2 \dots P'_n$ denselben Angriffspunkt O haben und daher im allgemeinen sich zu einer in der xy -Ebene wirkenden Resultanten R — der Reductionsresultanten R — deren Angriffspunkt gleichfalls O ist, zusammensetzen lassen, während von den übrigen $2n$ -Kräften die in O angreifende Kraft $(-P_1)$ mit der in A_1 angreifenden Kraft P_1 ein Kräftepaar, ebenso die Kraft $(-P_2)$ in O und P_2 in A_2 ein zweites Kräftepaar u. s. w., schließlich die Kraft $(-P_n)$ in O mit der Kraft P_n in A_n ein n -tes Kräftepaar bilden, so dass diese in derselben Ebene wirkenden n -Kräftepaare im all-

gemeinen dem letzten Lehrsatz zufolge einem resultierenden Kräftepaar mit einem gewissen Momente M — dem Reductionsmomente M (lies: großes griechisches M) — äquivalent sind. Es ist demnach auch das ursprünglich gegebene System der n -Kräfte $P_1 P_2 \dots P_n$ auch äquivalent dem aus der Reductionsresultanten R' und aus dem Kräftepaar, dessen Moment M ist, bestehenden Kräftesystem, dessen Kräfteebene gleichfalls die xy -Ebene ist.

a) Reduction auf eine resultierende Einzelkraft.

Ist die Reductionsresultante $R' > 0$ verschieden von Null, d. h. halten sich die im gemeinsamen Reductionspunkt O angreifenden Hilfskräfte $P'_1 P'_2 \dots P'_n$, die sich von den ursprünglich gegebenen Kräften $P_1 P_2 \dots P_n$ weder in ihrer Richtung, noch auch in ihrer Größe (wohl aber in ihrer Wirkungslinie) unterscheiden (daher auch die dem algebraischen Werte nach gleichen X - und Y -Componenten $X'_1 = X_1, Y'_1 = Y_1, X'_2 = X_2$ u. s. w. besitzen), nicht das Gleichgewicht, so dass (siehe S. 55) wenigstens eine der beiden Summen $R_x = \Sigma X = \Sigma [P \cos(xP)]$ und $R_y = \Sigma Y = \Sigma [P \sin(xP)]$ von Null verschieden, also

$$(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 > 0 \dots (1)$$

ist, so lässt sich diese Reductionsresultante $R' = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$, deren Richtung durch die Gleichungen (3) S. 54 bestimmbar ist, mit dem Kräftepaar M (siehe S. 386) zu einer mit R' gleichgerichteten und dieser Reductionsresultanten gleichen Kraft $R = R'$ zusammensetzen, deren Richtungslinie gleichfalls in der xy -Ebene gelegen ist. Diese resultierende Einzelkraft $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$, die in ihrer Richtung und Größe mit der Reductionsresultanten R' übereinstimmt, ist demnach auch dem ursprünglichen Kräftesystem $P_1 P_2 \dots P_n$ äquivalent.

Um auch die Lage der Richtungslinie dieser Resultanten R zu bestimmen, hat man nur zu beachten, dass (siehe S. 387) der algebraische Wert des Momentes M des aus den Kräftepaaren $(P_1, -P_1), (P_2, -P_2) \dots (P_n, -P_n)$ resultierenden Kräftepaars der algebraischen Summe der Momente $M_{P,-P}$ dieser n -Kräftepaare gleich ist, sonach auch, da der Reductionspunkt O in der Richtungslinie einer jeden der n -Kräfte $(-P)$ gelegen ist, dem Begriffe des Momentes eines Kräftepaars (S. 381) zufolge gleich ist der algebraischen Summe der Momente der ursprünglich gegebenen Kräfte $P_1 P_2 \dots P_n$ in Bezug auf den willkürlich in der Kräfteebene gewählten Reductionspunkt (Momentenpol) O , daher

$$M = \Sigma M_{(P,-P)} = \Sigma M_O^{(P)} \dots (2)$$

Da nun (siehe S. 386) aus der Kraft R' , deren Angriffspunkt O ist, und aus dem Kräftepaar vom Momente M stets eine Einzelkraft $R = R'$

resultieren muss, deren auf den Angriffspunkt O der componentalen Kraft R' bezogenes Moment dem Moment M des letzteren Kräftepaars dem algebraischen Werte nach gleich sein muss, so ist

$$M = M_O^{(R)} \dots (3)$$

so dass sich aus (2) und (3) das wichtige Gesetz — das (für Kräfte mit demselben Angriffspunkt schon auf S. 57 nachgewiesene) Momentengesetz — ergibt, demzufolge

$$M_O^{(R)} = \Sigma M_O^{(P)} \dots (4)$$

ist. Demnach ist auch bei solchen Kräften, die auf verschiedene Angriffspunkte eines starren Körpers, jedoch in derselben Ebene wirken, das Moment der resultierenden Kraft R für einen beliebigen Punkt O dieser Ebene stets gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte P des Kräftesystems bezüglich desselben Punktes O .

Sollte der aus der Gleichung (2) bestimmbare Wert des Reductionsmomentes M , d. i. die algebraische Summe $\Sigma M_{(P,-P)}$ der Momente der früheren Kräftepaare $(P_1, -P_1), (P_2, -P_2) \dots (P_n, -P_n)$, also auch $\Sigma M_O^{(P)}$ sich auf Null reducieren, so würde dies (siehe S. 387) die Bedeutung haben, dass diese Kräftepaare sich das Gleichgewicht halten, so dass von diesen Kräftepaaren auch abgesehen werden könnte und demnach die noch übrig bleibende, in O angreifende Reductionsresultante R' mit der eigentlichen resultierenden Einzelkraft R identisch wäre, was übrigens auch schon durch die Gleichung (4) ausgedrückt ist, da $M_O^{(R)}$ für den Fall, dass $R' = R > 0$ ist, bekanntlich nur dann Null werden kann, wenn der Momentenpol O in der Richtungslinie dieser Kraft gelegen ist.

Ebenso besteht die Umkehrung. Wird nämlich der Punkt O in der Wirkungslinie der Resultierenden R angenommen, so ist stets der Gleichung (4) zufolge $\Sigma M_O^{(P)} = 0$, d. h. die algebraische Momentensumme aller einwirkenden Kräfte für einen beliebigen Punkt der Richtungslinie der Resultierenden ist stets gleich Null.

Da die Größe und Richtung der Resultierenden R mit jener der Reductionsresultanten R' übereinstimmt, also genau so zu bestimmen ist, als würden alle Kräfte ohne Änderung ihrer Größe und Richtung auf denselben beliebig zu wählenden Angriffspunkt wirken, so hat man, falls das Coordinatensystem ein orthogonales ist, behufs der Bestimmung der Größe und Richtung der resultierenden Kraft Anwendung zu machen von den Gleichungen (1), (2) und (3) auf S. 54 und von der daselbst auseinandergesetzten Rechnungsmethode.

Nachdem auf diese Weise die Größe und Richtung der resultierenden Einzelkraft bestimmt worden ist, hat man zur Bestimmung der Lage ihrer Wirkungslinie in der Ebene stets den Momentensatz (4) zu benützen.

α) Will man die analytische Methode benützen, so hat man nur zu beachten, dass man, da die Verschiebung des Angriffspunktes einer Kraft in ihrer Richtungslinie bei einem jeden starren Körper gestattet ist, irgend einen beliebigen Punkt der Richtungslinie der Resultierenden R , dessen (laufende) Coordinaten durch (ξ, η) (Fig. 114) bezeichnet seien, als Angriffspunkt dieser resultierenden Einzelkraft R ansehen kann, und dass man das statische Moment einer in der xy -Ebene wirkenden Kraft in Bezug auf den Coordinatenanfangspunkt O analytisch allgemein in der bekannten Form (3) S. 58 ausdrücken kann. Bedenken demgemäß (x, y) allgemein die Coordinaten irgendeines der gegebenen Angriffspunkte $A_1 A_2 \dots A_n$ irgendeiner der Kräfte $P_1 P_2 \dots P_n$, deren Componenten (X, Y) sind, so ist $M_O^{(P)} = xY - yX$, und da $R_x = \Sigma X$ und $R_y = \Sigma Y$ die X - und Y -Componenten der Resultanten R sind, und da der laufende Punkt (ξ, η) ihrer Richtungslinie als ihr Angriffspunkt angesehen werden kann, so ist $M_O^{(R)} = \xi R_y - \eta R_x$. Demgemäß kann dem Momentensatze (4) zufolge die Gleichung der Richtungslinie der Resultanten R in einer der beiden Formen:

$$\left. \begin{aligned} \xi \cdot \Sigma Y - \eta \cdot \Sigma X &= \Sigma (xY - yX) \\ \eta &= \frac{\Sigma Y}{\Sigma X} \cdot \xi + \frac{\Sigma (yX - xY)}{\Sigma X} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

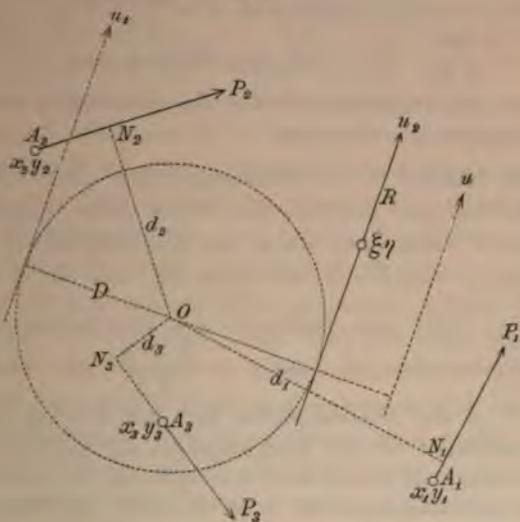
ausgedrückt werden, wobei sich das Summenzeichen Σ auf sämtliche Kräfte $P_1 P_2 \dots P_n$ erstreckt.

Der Coëfficient von ξ in der letzten Gleichung, nämlich $a = \frac{\Sigma Y}{\Sigma X}$ bedeutet, wenn das Achsensystem (xy) ein orthogonales ist, die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der gesuchten Richtungslinie gegen die x -Achse, und der letzte Summand $b = \frac{\Sigma (yX - xY)}{\Sigma X}$ bedeutet bekanntlich die Ordinate des Durchschnittspunktes der gesuchten Geraden mit der y -Achse.

β) Will man nicht den analytischen Weg verfolgen, sondern die Lage der Wirkungslinie der Resultierenden mit Hilfe des Momentensatzes (4) auf elementare Weise bestimmen, nachdem die Größe R und die Richtung u der aus den einwirkenden Kräften $P_1 P_2 P_3$ (Fig. 114) resultierenden Kraft etwa mit Hilfe des Kräftepolygons gefunden worden ist, so führe man zunächst zu den Richtungslinien der Kräfte $P_1 P_2 P_3$ die Normalen $ON_1 = d_1$, $ON_2 = d_2$, $ON_3 = d_3$ von dem willkürlich gewählten Momentenpunkte O aus, wähle eine Dreh-

richtung, etwa jene im Sinne des Uhrzeigers, zur positiven und bestimme die Kräftemomente, die für den Fall der Fig. 114 $M_{P_1} = -P_1 d_1$, $M_{P_2} = P_2 d_2$, $M_{P_3} = -P_3 d_3$ sind, so dass $\Sigma M_O^{(P)} = M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3} = -P_1 d_1 + P_2 d_2 - P_3 d_3$ ist.

Fig. 114.



Da die letztere Summe zufolge (4) das statische Moment der resultierenden Kraft R für den Punkt O ausdrückt, so hat man nur den absoluten Zahlwert dieser Summe durch die schon gefundene Größe R der Resultierenden zu dividieren, um den unbekanntem Abstand D ihrer Richtungslinie vom Punkte O zu finden. Mit diesem Radius D beschreibe man einen Kreis, dessen Centrum O ist, und führe an diesen Kreis die mit u gleichgerichteten Tangenten u_1 und u_2 (Fig. 114). Je nachdem nun die frühere Summe $M_O^{(R)} = -P_1 d_1 + P_2 d_2 - P_3 d_3$ positiv oder negativ ist, hat auch die Resultierende ein positives oder negatives Moment, also wird im ersten Falle die Tangente u_1 , im letzteren die Tangente u_2 die gesuchte Wirkungslinie sein, so dass z. B., wenn etwa das letztere der Fall ist, $-R D = -P_1 d_1 + P_2 d_2 - P_3 d_3$ ist. Die Gleichung dieser Wirkungslinie ist nach (5) $\xi (Y_1 + Y_2 + Y_3) - \eta (X_1 + X_2 + X_3) = x_1 \cdot Y_1 - y_1 X_1 + x_2 Y_2 - y_2 X_2 + x_3 Y_3 - y_3 X_3$.

Sollte in der Gleichung (4) die Momentensumme $\Sigma M_O^{(P)}$ in einem besonderen Falle Null werden, so ist dies ein Zeichen, dass der Momentenpol O ein Punkt der Wirkungslinie der Resultierenden ist.

γ) Handelt es sich nur darum, irgend einen Punkt der Wirkungslinie der Resultierenden, den man als Angriffspunkt derselben betrachten könnte, zu bestimmen, so kann man etwa mit Hilfe der

Gleichung (5) zunächst die Richtungslinie der Resultierenden aller X -Componenten, deren Gleichung, da dann alle Y verschwinden, $\eta R_x = \sum(yX)$ ist, und hierauf jene der Resultierenden aller Y -Componenten, welche, da dann alle X Null sind, die Gleichung $\xi R_y = \sum(xY)$ hat, bestimmen; der Durchschnittspunkt der gefundenen Richtungslinien, dessen Coordinaten $\xi = \frac{\sum(xY)}{R_y} = \frac{\sum(xY)}{\sum Y}$ und $\eta = \frac{\sum(yX)}{R_x} = \frac{\sum(yX)}{\sum X}$ sind, und der offenbar auch der Gleichung (5) genügt, kann als Angriffspunkt der Resultierenden aller Kräfte angenommen werden — oder aber

δ) man verlängere die Richtungslinien aller Kräfte bis zum Durchschnitte mit der x -Achse und wähle diese Punkte, deren Abscissen durch x' bezeichnet seien, als Angriffspunkte, so dass dann $y = 0$, $x = x'$, $\eta = 0$, $\xi = \xi'$ zu setzen ist, und es ist dann nach (5) $\xi' = \frac{\sum(x'Y)}{\sum Y}$ — oder man bestimme die Durchschnittspunkte (o, η') mit der Ordinatenachse, so dass $\eta' = \frac{\sum(y'X)}{\sum X}$ ist. Jene Gerade, die den Punkt (ξ', o) der Abscissenachse mit dem Punkte (o, η') der Ordinatenachse verbindet, ist die Wirkungslinie der Resultierenden u. s. w.

Anmerkung. Es bedarf nicht hervorgehoben zu werden, dass strenggenommen zu der Bedingung $(\sum X)^2 + (\sum Y)^2$ behufs der Möglichkeit einer dem gegebenen Kraftsystem äquivalenten Einzelkraft noch die Bedingung hinzutreten muss, dass in der auf die erwähnte Art bestimmten Wirkungslinie der Resultierenden wenigstens ein materieller Punkt des starren Körpers sich vorfindet, der dann als Angriffspunkt der resultierenden äquivalenten Kraft fungieren kann.

Es sei schließlich in aller Kürze hervorgehoben, dass sich alle die hier unter a) gewonnenen Ergebnisse in einfacher Weise auch unmittelbar aus den Gleichgewichtsbedingungen (1) (S. 367) hätten folgendermaßen ableiten lassen. Soll nämlich eine Einzelkraft R , deren Componenten R_x und R_y seien, und deren Richtungslinie u die laufenden Coordinaten $\xi \eta$ besitze, den Kräften $P_1 P_2 \dots P_n$ äquivalent sein, so müsste eine längs derselben Geraden u in entgegengesetzter Richtung angenommene Kraft $(-R)$, deren Componenten $(-R_x)$ und $(-R_y)$ sind, der Kraft R , daher auch dem gegebenen Kräftesystem $P_1 P_2 \dots P_n$ das Gleichgewicht halten, also den Gleichungen (1) (S. 367) zufolge, in welchen $\sum Z = 0$, $\sum M_x^{(P)} = 0$, $\sum M_y^{(P)} = 0$ ist, $\sum X + (-R_x) = 0$, $\sum Y + (-R_y) = 0$ und $\sum M_z^{(P)} + M_z^{(-R)} = \sum(xY - yX) + \xi \cdot (-R_y) - \eta \cdot (-R_x) = 0$ sein, woraus sich unmittelbar, wenn man nur noch berücksichtigt, dass den Momentenbegriffen zufolge $M_z^{(P)} = M_o^{(P)}$ und $M_z^{(-R)} = -M_z^{(R)} = -M_o^{(R)}$ ist, alle früheren Gleichungen ergeben. Zugleich ersieht man leicht, dass die Gleichungen (5) nicht nur für ein rechtwinkliges, sondern auch für ein schiefwinkliges Achsensystem (xy) gültig sind.

b) Gleichgewicht der Kräfte.

Ist die Reductionsresultante $R' = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ gleich Null, also sowohl $R_x = \Sigma X = \Sigma [P \cos (x P)] = 0$, also auch $R_y = \Sigma Y = \Sigma [P \sin (x P)] = 0$, d. h. halten sich die Reductionskräfte $P_1' P_2' \dots P_n'$ das Gleichgewicht, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich ob auch $M = \Sigma M_P, -P = \Sigma M_o^{(P)}$ sich auf Null reducirt oder ob $M \geq 0$, d. h. von Null verschieden ist.

Da im ersten Falle das Verschwinden der Summe der Momente der sämtlichen n -Kräftepaare $(P, -P)$ (siehe S. 387) die Bedeutung hat, dass sich diese Kräftepaare gleichfalls das Gleichgewicht halten, so muss wegen des Gleichgewichtes sowohl der n -Reductionskräfte $P_1' P_2' \dots P_n'$ untereinander, als auch infolge des Gleichgewichtes der genannten n -Kräftepaare auch das diesem System von $3n$ -Kräften äquivalente System der ursprünglich gegebenen Kräfte $P_1 P_2 \dots P_n$ im Gleichgewichte sich befinden, was übrigens auch aus den Gleichungen (1) S. 367 unmittelbar zu folgern ist.

Da nämlich von diesen sechs nothwendigen und hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen die dritte, vierte und fünfte Bedingung bei Kräften in der Ebene, wie in der Einleitung dieses Paragraphs gezeigt wurde, an und für sich stets schon erfüllt ist, so sind für das Gleichgewicht von Kräften, die in derselben Ebene auf ein starres Punktsystem einwirken, die noch erübrigenden drei Bedingungen nothwendig und hinreichend, nämlich $\Sigma M_z^{(P)} = 0$, $\Sigma X = 0$ und $\Sigma Y = 0$, oder da $M_z^{(P)}$ für den Fall der Zugrundelegung eines orthogonalen Achsensystems das Moment $M_o^{(P)}$ einer der gegebenen Kräfte P bezüglich des Koordinatenanfangspunktes O bedeutet und die Bedingungen $\Sigma X = 0$ und $\Sigma Y = 0$ beide in der einen Bedingung $(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 = 0$ schon enthalten sind, so lassen sich als nothwendige und hinreichende Gleichgewichtsbedingungen folgende aufstellen:

$$\left. \begin{aligned} (\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 &= 0 \\ \Sigma M_o^{(P)} &= 0 \end{aligned} \right\} (6)$$

Die erste dieser Bedingungen drückt nach Gleichung (1a) S. 60 die Bedingung aus, dass diese Kräfte sich auch dann das Gleichgewicht halten müssten, wenn sie auf denselben Angriffspunkt wirken würden.

Die letzte Gleichung spricht das wichtige Gesetz aus, dass nicht nur, wie dies schon im § 18 nachgewiesen wurde, bei Kräften, die auf denselben Angriffspunkt wirken, sondern ganz allgemein bei Kräften, die in derselben Ebene auf einen starren Körper wirken, im Zustande des Gleichgewichtes die algebraische Summe

der statischen Momente derselben bezüglich eines jeden Punktes der Kräfteebene gleich Null sein muss.

c) Reduction auf ein Kräftepaar.

Als die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Stattfinden einer resultierenden Kraft wurde in (a) die Bedingung $(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 > 0$ und in (b) als jene für das Gleichgewicht $(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 = 0$, $\Sigma M_o^{(P)} = 0$ gefunden. Ist nun in einem dritten allein noch erübrigenden Falle, der die beiden Fälle a und b ausschließt, die Reductionsresultante R' wohl Null (also $\Sigma X = 0$ und $\Sigma Y = 0$), aber das resultierende Kräftepaar M von Null verschieden, daher

$$\left. \begin{array}{l} (\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 = 0 \\ \Sigma M_o^{(P)} \geq 0 \end{array} \right\} (7)$$

so halten sich wohl die n -Reductionskräfte $P_1' P_2' \dots P_n'$ das Gleichgewicht, so dass man von diesen absehen kann, aber die noch erübrigenden n -Kräftepaare $(P_1, -P_1), (P_2, -P_2) \dots (P_n, -P_n)$ des dem ursprünglichen Kräftesystem äquivalenten Kräftesystems von $3n$ -Kräften lassen sich (siehe S. 387) reducieren auf ein äquivalentes Kräftepaar, dessen Moment M durch die Gleichung (2) bestimmt ist, also auch der Summe der statischen Momente der ursprünglichen Kräfte $P_1 P_2 \dots P_n$ in Bezug auf den beliebig in der Kräfteebene gewählten Momentenpol O gleichkommt. Diesem Kräftepaar sind sonach auch die Kräfte $P_1 P_2 \dots P_n$ äquivalent. Bei der Wahl der Kräfte dieses Kräftepaars M ist eine große Freiheit gestattet, denn ein jedes Kräftepaar lässt sich (siehe S. 381) ohne weiteres ersetzen durch ein zweites Kräftepaar in derselben xy -Ebene, dessen Moment M denselben algebraischen Wert hat, und dessen parallele Richtungslinien man in der xy -Ebene in beliebiger Lage und beliebiger Entfernung wählen kann, vorausgesetzt, dass man die Richtung und Größe der Kräfte dieses neuen Kräftepaars so bestimmt, dass sich der algebraische Wert des Momentes $M = \Sigma M_o^{(P)}$ nicht ändert, oder aber man kann die Richtungslinie, die Richtung und Größe der einen Kraft des äquivalenten Kräftepaars beliebig wählen, in welchem Falle dann auf Grund der Unveränderlichkeit des algebraischen Wertes von M sich die Lage der Richtungslinie der zweiten entgegengesetzten Kraft des neuen Kräftepaars in der xy -Ebene genau bestimmen lässt.

Da demnach, wenn die Äquivalenz aufrecht bleiben soll, sich der Wert von M nicht ändern darf, so hat die dem Werte M gleiche Momentensumme $\Sigma M_o^{(P)}$ in dem hier betrachteten Falle c) die besondere Eigenschaft, dass sie denselben Wert behält, wenn man auch den Momentenpol von O nach irgend einem anderen beliebigen Punkte o der Kräfteebene verlegt, was sich übrigens auch leicht analytisch

chweisen lässt. Legt man nämlich ein beliebiges orthogonales Achsensystem durch O und ein zweites paralleles durch o , und bezeichnet man durch $\xi \eta \zeta$ die Coordinaten des Punktes o bezüglich des ersten Achsensystems, so sind die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Wirkungslinie der Kraft P bezüglich des zweiten Achsensystems nicht mehr xy , sondern $(x - \xi)$ und $(y - \eta)$, daher der Gleichung (3) S. 58 zufolge

$$M_o^{(P)} = \Sigma [(x - \xi)Y - (y - \eta)X] = \Sigma (xY - yX) - \xi \cdot \Sigma Y + \eta \cdot \Sigma X = \Sigma M_o^{(P)} - \xi \cdot o + \eta \cdot o = \Sigma M_o^{(P)} \quad \left. \vphantom{M_o^{(P)}} \right\} (8)$$

wodurch die obige Behauptung nachgewiesen ist.

Erfüllen demnach die Kräfte, die in derselben Ebene auf einen starren Körper einwirken, die Bedingungen (7), d. h.:

Sind die Kräfte derart, dass sie, wofern sie auf denselben Angriffspunkt einwirken würden, sich das Gleichgewicht hielten, und ist ferner ihre Momentensumme für irgend einen Punkt der Kräfteebene von Null verschieden, so sind sie äquivalent einem beliebigen, in der Kräfteebene wirkenden Kräftepaare, dessen Moment gleich ist der algebraischen Summe der Momente aller Kräfte für einen beliebigen in der Kräfteebene gewählten Momentenpol.

Besondere Folgerungen aus diesem Gesetze sind folgende:

Der Moment eines Kräftepaares ist stets gleich der algebraischen Summe der Momente der beiden einzelnen Kräfte dieses Kräftepaares bezüglich eines beliebigen Punktes der Kräfteebene.

Zwei Kräftepaare in derselben Ebene halten sich das Gleichgewicht, wenn ihre Momente entgegengesetzt gleich sind u. s. w.

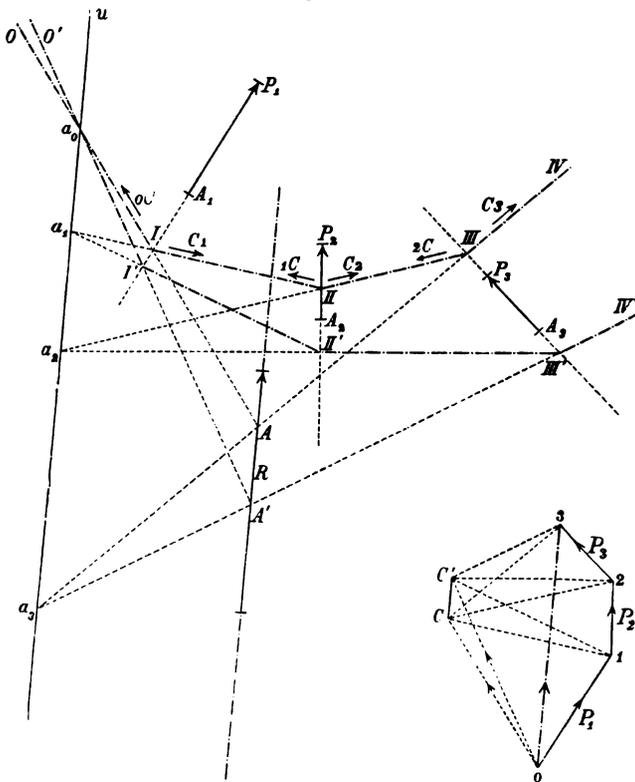
68. Graphostatische Zusammensetzung von Kräften in derselben Ebene im allgemeinen. Graphische Reduction der Momente.

Es seien die Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$, die auf die Angriffspunkte $A_1 A_2 A_3 \dots$ (Fig. 115, 116 *b* und *c*) eines starren Körpers einwirken, und welche in diesen und den folgenden Figuren durch die zwischen diesen Angriffspunkten und den Spitzen der Pfeile gelegenen Strecken der Richtung und Größe nach dargestellt sind, auf graphischem Wege zusammensetzen.

Zu diesem Ende bedient man sich des Kräftepolygons und des aus dem Capitel V bekannten Seilpolygons, welches jedoch hier in seiner Anwendung auf den starren Körper bloß eine constructive Bedeutung hat. Man kann hier zudem den Pol C (Fig. 115 und 116) des Kräftepolygons beliebig annehmen und hat in bekannter Weise

diesen Pol C mit den einzelnen Eckpunkten $0\ 1\ 2\ 3\ \dots$ des den Kräften $P_1\ P_2\ P_3\ \dots$ entsprechenden Kräftepolygons durch die Polstrahlen $OC, 1C, 2C, 3C\ \dots$ zu verbinden; hierauf führe man irgend eine beliebige Parallele $O'I$ zum ersten Polstrahle OC und verlängere dieselbe bis zum Durchschnitte I mit der Wirkungslinie der ersten Kraft P_1 (die Anordnung der Kräfte ist hiebei ganz willkürlich), von I hierauf zum Strahle $1C$ eine Parallele III bis zum Durchschnitte II mit der

Fig. 115.



Richtungslinie der zweiten Kraft P_2 , von II zum folgenden Strahle $2C$ die Parallele $II\ III$ u. s. w.

Dadurch erhält man das Seilpolygon $O\ III\ III\ \dots$, dessen Knotenpunkte $III\ III\ \dots$ sind. Die Kräfte $P_1\ P_2\ P_3$ kann man von ihren Angriffspunkten $A_1\ A_2\ A_3$ versetzen nach den entsprechenden Knotenpunkten $III\ III$ und kann dieselben dann mit Hilfe der entsprechenden Kräftedreiecke zerlegen in ihre Componenten, und zwar P_1 mittels des Kräftedreieckes $OC1$ in die Componenten OC und $\overline{C1}$ (siehe Fig. 115 und 116), P_2 mittels des Kräftedreieckes $1C2$ in die Componenten $\overline{1C}$ und $\overline{C2}$, P_3 in $\overline{2C}$ und $\overline{C3}$ u. s. w., welche Componenten, deren Zahl $2n$

ist, wofern n die Anzahl der ursprünglichen Kräfte P ist, den letzteren Kräften äquivalent sind. Von diesen $2n$ -Componenten halten sich nun je zwei in derselben Seite des Seilpolygons wirkende Kräfte, nämlich $C1$ und $1C$, $C2$ und $2C$ u. s. w., offenbar das Gleichgewicht, so dass man von diesen $(2n - 2)$ Componenten abstrahieren kann und das ganze Kraftsystem demnach den beiden übrig bleibenden zwei Componenten, nämlich der in der ersten Seite des Seilpolygons wirkenden Kraft OC und der in der letzten Seite des Seilpolygons wirkenden Kraft Cn (in der Zeichnung Fig. 115 den Kräften OC und $C3$) äquivalent ist.

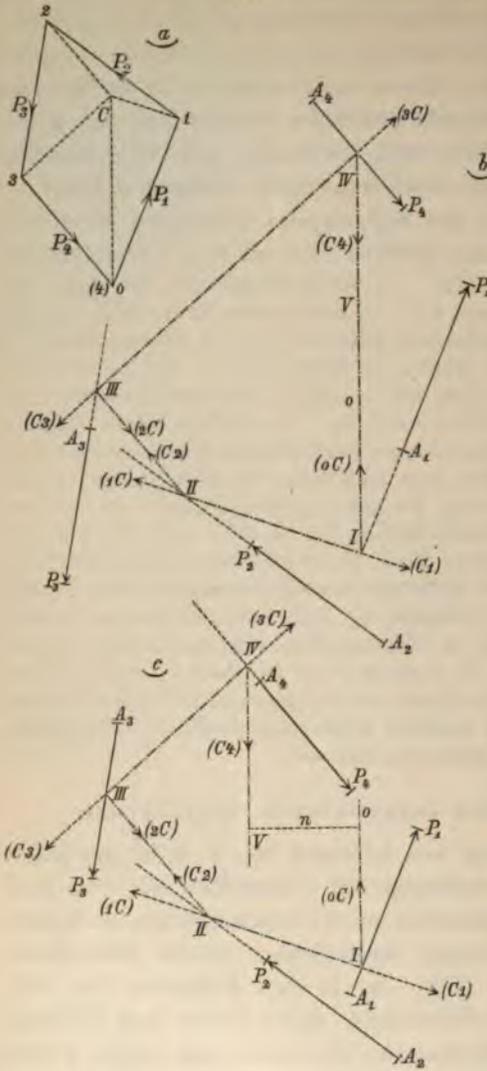
Anmerkung. Wäre $oIIIII \dots$ ein Kettenpolygon im Sinne des Capitels V, in dessen Knotenpunkten $III \dots$ die äußeren Kräfte $P_1 P_2 \dots$ angreifen, so wären durch die letztgenannten Kräfte OC und Cn die Spannungen in den Endgliedern bestimmt, und es würden die den Kräften OC und Cn entgegengesetzt gleichen Kräfte CO und nC jene auf die beiden Endglieder des Kettenpolygons einwirkenden Kräfte, die den Kräften $P_1 P_2 \dots$ bei der obigen Construction entsprechenden Form des Kettenpolygons das Gleichgewicht halten würden — beziehungsweise die Reactionen der fixen Endpunkte bei aufgehängten und gestützten Kettenpolygonen — darstellen. Ein jedes in diesem Capitel als Constructions mittel zur Anwendung kommende Seilpolygon ist daher auch die Gleichgewichtsform einer entsprechenden reellen Kette. In der graphischen Statik räumlicher Punktsysteme pflegt man statt des jedenfalls passenderen allgemeineren Namens „Kettenpolygon“ die Bezeichnung „Seilpolygon“ auch dann anzuwenden, wenn in den Gliedern der gleichgestalteten, im Gleichgewichte befindlichen Kette Druckspannungen herrschen würden. — Je nach der Wahl des Poles C ändert sich bei einem gegebenen Kräftesystem die Gestalt des Seilpolygons, und selbst für denselben Pol C gibt es offenbar für dasselbe Kraftsystem unzählige Seilpolygone, deren entsprechende Seiten zu einander parallel sind.

a) Reduction auf eine resultierende Einzelkraft.

Ist das Kräftepolygon ein offenes, wie z. B. in der Zeichnung Fig. 115, so dass der Anfangspunkt o desselben mit dem Endpunkt 3 (im allgemeinen n) desselben nicht zusammenfällt, so haben die dem gegebenen Kraftsysteme äquivalenten zuletzt behandelten beiden Kräfte OC und Cn ($C3$), die in den Endseiten des Seilpolygons wirken, eine Resultierende, deren Größe und Richtung aus dem entsprechenden Kräftedreieck OCn ($OC3$) sich ergibt; durch die Schlusslinie on ($o3$) dieses Kräftedreiecks, die den Anfangspunkt o des Kräftepolygons mit dem Endpunkte n (3) verbindet, ist die Resultierende dargestellt.

Die Richtungslinie der Resultierenden ergibt sich, wenn man die Anfangsseite oI und die Endseite $III IV$ des Seilpolygons, wofern dasselbe ein offenes ist, verlängert bis zu ihrem Durchschnitte A und durch A eine parallele AA' zu der Schlusseite on (bezw. $o3$) des Kräftepolygons führt, wie sich dies sofort aus der Versetzung der Kräfte OC und $C3$ (Cn) nach dem in ihren Richtungslinien gelegenen Punkte A ergibt.

Fig. 116.



Sollte das Seilpolygon ein geschlossenes sein, d. h. die Anfangsseite OI mit der Endseite $IIIIV$ in eine Gerade fallen, was nur dann möglich ist, wenn C mit 0 und 3 (bezw. n) in einer Geraden gelegen ist, so ist offenbar die Gerade $OIIIIV$ selbst die Wirkungslinie der Resultierenden.

Sollte das Seilpolygon wohl ein offenes sein, aber $O I \parallel III IV$ sein, so müsste man noch eine weitere Construction vornehmen, indem noch die Richtungslinie der Resultierenden der zwei parallelen Kräfte OC und Cn (bezw. $C3$) nach Art der Fig. 108 S. 377 zu bestimmen ist, doch lässt sich dieser Fall, der eine zweite Construction nothwendig macht, sehr leicht vermeiden, indem man bei der Wahl des Poles C , die ja beliebig vorgenommen werden kann, denselben nicht in der Geraden annimmt, die den Anfangspunkt o mit dem Endpunkte n des Kräftepolygons verbindet, worauf also stets zu achten ist.

b) Gleichgewicht der Kräfte.

Ist das Kräftepolygon ein geschlossenes, z. B. wie in Fig. 116 a das Kräftepolygon 01234 , das den Kräften $P_1 P_2 P_3 P_4$ (Fig. 116 b und c) entspricht, so dass der Endpunkt 4 desselben (Fig. 116 a) mit dem Anfangspunkte o zusammenfällt, und ist zudem auch das entsprechende Seilpolygon $IIIIVV$ (Fig. 116 b) ein geschlossenes, d. h. fällt die Anfangsseite $O I$ mit der Endseite IVV in eine und dieselbe Gerade, so wirken die dem

dem Kräftesysteme $P_1 P_2 P_3 P_4$ nach früherem äquivalenten Schlusskräfte OC ($\neq C$) und CA in derselben Geraden IV in entgegengesetzten Richtungen und sind an Größe gleich, so dass sie sich das Gleichgewicht halten, und es sind demnach auch die Kräfte des ursprünglichen, diesen Schlusskräften äquivalenten Kräftesystems im Gleichgewicht.

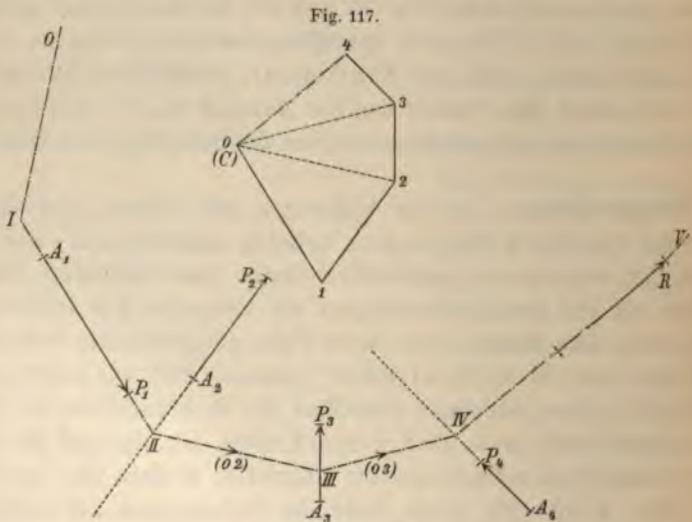
Das Gleichgewicht würde in diesem Falle auch unter der Einwirkung derselben auf die Knotenpunkte $III III \dots$ einwirkender Kräfte bestehen, wenn das Polygon $III III \dots$ ein freibewegliches Kettenpolygon im Sinne des Capitels V wäre. Es würden dann bekanntlich die Polstrahlen OC , $IC \dots$ die Spannungen in den aufeinanderfolgenden Kettengliedern darstellen (vergl. Fig. 77, S. 254).

c) Reduction auf ein Kräftepaar.

Ist jedoch das Kräftepolygon (Fig. 116a) ein geschlossenes, das entsprechende Seilpolygon (Fig. 116c) aber ein offenes, so dass die zu den identischen Endstrahlen CO und CA parallelen Endseiten OI und IVV des Seilpolygons zu einander parallel sind, so bilden die dem gegebenen Kräftesystem nach Obigem äquivalenten Kräfte OC und CA , die längs dieser parallelen Endseiten OI und IVV nach entgegengesetzten Richtungen wirken und einander gleich sind, ein Kräftepaar, dessen Moment dem Zahlwerte nach durch das Product aus der Maßzahl von OC und der senkrechten Entfernung n der äußersten Seiten des Seilpolygons bestimmt ist.

Mittelkraftlinie. In der bisherigen allgemeinen Entwicklung wurde der Pol des Kräftepolygons beliebig angenommen. Besonders wichtig ist nun in der graphischen Statik jener besondere Fall, in welchem als Pol des Kräftepolygons ein Eckpunkt des letzteren gewählt wird. Das diesem besonderen Falle entsprechende Seilpolygon wird dann eine „Mittelkraftlinie“ genannt, weil, wie sofort gezeigt werden soll, eine jede Seite derselben die Richtungslinie der Resultanten (Mittelkraft) aus allen jenen Kräften ist, die auf die dieser Seite vorangehenden Knotenpunkte angreifen, so dass also die Resultante aller Kräfte die letzte Seite des Seilpolygons zur Richtungslinie hat. Zu dieser besonderen Art des Seilpolygons gelangt man etwa sofort, wenn man zu den Kräften $P_1 P_2 P_3$ der Fig. 115 noch eine in der Geraden OI wirksame Kraft CO als vierte, beziehungsweise erste, äußere Kraft hinzugefügt sich denkt, so dass dann $CO123$ (Fig. 115) das entsprechende Kräftepolygon und das Seilpolygon $OIII III IV$ (Fig. 115) die entsprechende Mittelkraftlinie ist. (Da in diesem Falle der Pol C mit dem Anfangspunkte des Kräftepolygons identisch wäre, also die Verbindungslinie beider in einen Punkt zusammenfallen müsste,

so könnte man als die erste, zu dieser Verbindungslinie bekanntlich parallel zu ziehende Seite des Seilpolygons eine ganz beliebige, die Seite OI schneidende Gerade annehmen, die füglich auch ganz wegbleiben kann.) Da man nun die in den Geraden OI und IA_1 (Fig. 115) wirkenden Kräfte auf den Durchschnittspunkt I einwirkend annehmen kann, so kann I als der Angriffspunkt der Resultanten dieser Kräfte $C0$ und 01 , also als Angriffspunkt der Kraft $C1$ angesehen werden, deren Richtungslinie demgemäß III ist. In dem Durchschnittspunkte II der letzteren mit der Richtungslinie von P_2 wirkt die aus $C1$ und $I2$, daher auch aus $C0$, 01 und $I2$ zusammengesetzte Kraft $C2$ längs der Geraden $IIIII$ u. s. w. Die letzte Seite $IIIIV$ der Mittelkraftlinie ist dann in der That die Richtungslinie der Resultanten aller Kräfte. Erhöht man überall, um die gebräuchliche Bezeichnungsweise zu adoptieren, jeden Index um 1, setzt 0 statt C und bezeichnet durch P_1 die früher hinzugefügte vierte Kraft, so entspricht dem hier behandelten Falle der Zusammensetzung der fünf Kräfte $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ mittels der Mittelkraftlinie die mit Fig. 115 identische Zeichnung Fig. 117, in welcher die erste Seite des Seilpolygons OI ganz will-



kürlich, ferner $III \parallel 01$, $IIIII \parallel 02$, $IIIIV \parallel 03$ und die Richtungslinie der Resultanten $IVV \parallel 04$ ist.

Methode des Polwechsels. Wenn man bei einem gegebenen Kräftesystem $P_1 P_2 P_3$ (Fig. 115) von einem Pole C zu irgendeinem anderen beliebig gewählten Pole C' übergeht, so haben die den beiden Polen C und C' entsprechenden zwei Seilpolygone $OIII IIIIV$... und $O'I' II' III' IV'$..., wie dies auf mannigfache Art leicht nachgewiesen

den kann, die besondere Eigenschaft, dass die Durchschnittspunkte $a_1 a_2 a_3 \dots$ je zweier entsprechender Seiten dieser Seilpolygone sämtlich in einer zur Verbindungsgeraden CC' der beiden Pole parallelen Geraden gelegen sind, so dass man durch Zuhilfenahme dieser Eigenschaft das neue Seilpolygon leicht derart verzeichnen kann, dass man erst eine beliebige zu CC' parallele Gerade u zieht, die einzelnen Seiten des früheren Seilpolygons verlängert bis zum Durchschnitte $a_1 a_2 \dots$ mit dieser Geraden, von a_0 eine Gerade $o'I'$ parallel zu $o\theta$ führt bis zum Durchschnitte I' mit der Richtungslinie der ersten Kraft P_1 , a_1 mit I' verbindet und diese Gerade verlängert bis zum Durchschnitte II' mit der Richtungslinie von P_2 , a_2 mit II' verbindet u. s. w.

Um dies in einfacher Weise nachzuweisen, führe man durch den Durchschnittspunkt a_0 (Fig. 115) der zu den (den beiden Polen C und C' zugehörigen) Anfangsstrahlen $C\theta$ und $C'\theta$ parallelen Anfangsseiten oI und $o'I'$ der beiden Seilpolygone die zu der Verbindungsgeraden CC' der beiden Pole parallele Gerade u , welche die der Reihe nach aufeinanderfolgenden Seiten $I II$, $II III$, $III IV \dots$ des ersten Seilpolygons (bezw. deren Verlängerungen) in den Punkten $a_1 a_2 a_3 \dots$ und die Verlängerungen der entsprechenden Seiten $I' II'$, $II' III'$, $III' IV' \dots$ des zweiten Seilpolygons in den (zunächst als von $a_1 a_2 a_3 \dots$ verschieden angenommenen) Punkten $a_1' a_2' a_3' \dots$ schneidet. Da nun die Componenten der vom Angriffspunkte A_1 nach I versetzt gedachten Kraft P_1 — dem Kräftedreiecke oCI zufolge — die längs der Seiten Ia_0 und $I II$ auf denselben Angriffspunkt I wirkenden Kräfte C und $C I$ sind, so ist das statische Moment der Kraft P_1 bezüglich des Punktes a_0 gleich der Summe der Componenten oC und $C I$ in Bezug auf denselben Momentenpunkt a_0 , und da das Moment der erstgenannten Componente oC Null ist, indem der Momentenpol a_0 in der Richtungslinie dieser Kraft gelegen ist, so ist $M_{a_0}^{(P_1)} = M_{a_0}^{(CI)}$. In gleicher Weise lässt sich mit Hilfe des Kräftedreieckes $oC'I$ nachweisen, dass bezüglich desselben Momentenpoles a_0 das statische Moment der von A_1 nach I' versetzbaren Kraft P_1 , deren Componenten nunmehr oC' und $C'I$ sind, gleich ist dem Moment der letzteren, auf I' in der Richtung II' wirkenden Componenten $C'I$, dass also $M_{a_0}^{(P_1)} = M_{a_0}^{(C'I)}$, dass nach auch $M_{a_0}^{(CI)} = M_{a_0}^{(C'I)}$ ist. Daraus folgt, da die vom gemeinsamen Momentenpol a_0 auf die Richtungslinien $I II$ und $I' II'$ der beiden Kräfte $C I$ und $C' I$ geführten Normalen n und n' durch $n = \frac{a_0 a_1}{a_0 a_1} \cdot \sin(a_0 a_1 I) = \frac{a_0 a_1}{a_0 a_1} \sin(C' C I)$ und $n' = \frac{a_0 a_1'}{a_0 a_1'} \cdot \sin(a_0 a_1' I) = \frac{a_0 a_1'}{a_0 a_1'} \sin(C C' I)$ bestimmt sind, dass auch $\overline{C I} \cdot n = \overline{C' I} \cdot n'$, und $\frac{a_0 a_1}{a_0 a_1} \cdot \overline{C I} \cdot \sin(C' C I) = \frac{a_0 a_1'}{a_0 a_1'} \cdot \overline{C' I} \cdot \sin(C C' I)$ ist. Nun ist aber in dem Dreiecke $C' C I$ das Verhältnis der Seiten $C I$ und $C' I$ gleich dem Verhältnis der Sinus der gegenüberliegenden Winkel ($C C' I$), und ($C' C I$), sonach $\overline{C I} \cdot \sin(C' C I) = \overline{C' I} \cdot \sin(C C' I)$. Die Division

der beiden letzten Gleichungen führt zu dem Resultat, dass $a_0 a_1 = a_0 a_1'$, sonach a_1 mit a_1' identisch ist. Durch eine völlig analoge Schlussfolgerung lässt sich, wenn man ausgeht von der nunmehr nachgewiesenen Identität von a_1 und a_1' , ferner in gleicher Weise, wie früher, die Kraft P_2 mittels der Kräftedreiecke $12C$ und $12C'$ zerlegt und a_1 als Momentenpol wählt, die Identität von a_2 und a_2' u. s. w. darthun.

Reduction der Kräftemomente auf eine gemeinsame Momentenbasis. Wie auf S. 57 auseinandergesetzt wurde, ist das statische Moment einer Kraft in Bezug auf irgend einen Momentenpol m und demnach auch das statische Moment eines Kräftepaars graphisch durch das Momentendreieck dargestellt. Statt des letzteren kann man sich auch zur constructiven Darstellung eines Rechteckes — des sogenannten Momentenrechteckes — bedienen, dessen Basis die die Kraft darstellende Strecke und dessen Höhe der Abstand der Richtungslinie der Kraft vom Momentenpol m , bzw. der Arm des entsprechenden Kräftepaars ist. Es ist dann — abgesehen vom Qualitätszeichen — die Maßzahl dieser Rechtecksfläche, wofern die die Krafteinheit darstellende Strecke zur Längeneinheit und das Quadrat über derselben zur Flächeneinheit gewählt wird, offenbar zugleich auch die Maßzahl des statischen Kraftmoments; ist z. B. die Kraft eines Kilogramms durch eine Strecke von einem Meter repräsentiert, so enthält das Momentenrechteck ebensoviel Quadratmeter, als das statische Moment Kilogramm-meter enthält.

Anmerkung. Da die graphische Darstellung auf dem Zeichenbrette nach den thatsächlichen räumlichen Verhältnissen in jenen Fällen, in welchen die räumlichen Dimensionen bedeutend sind, misslich, ja meist unausführbar wäre, so bedient man sich bei den constructiven Lösungen häufig des verjüngten Maßstabes.

Um nun in diesen Fällen, wo ein Irrthum sehr leicht möglich ist, aus der im verjüngten Maßstabe construierten Fläche des Momentenrechteckes (bzw. aus dem reducirten Momente und der Momentenbasis, siehe S. 403) das wirkliche Moment der Kraft — und umgekehrt — leicht und sicher zu bestimmen, ist es zu empfehlen, außer der Krafteinheit und der effectiven Längeneinheit, in welcher die thatsächlichen räumlichen Dimensionen ausgedrückt sind, auch eine passend gewählte constructive Längeneinheit zu Hilfe zu nehmen.

Empfiehl es sich etwa in einem bestimmten Falle, um eine zweckentsprechende Zeichnung entwerfen zu können, zur graphischen Darstellung einer Länge von 10 m in verjüngtem Maße eine Strecke von 3 cm und ferner zur Darstellung einer Kraft von 10 kg eine Länge von 2 mm zu wählen, so nehme man etwa 1 cm als die constructive Längeneinheit an, so dass in diesem Falle durch diese graphische Längeneinheit die effective Länge von $\frac{10}{3}\text{ m}$, welche Länge dann der Einfachheit halber zur effectiven Längeneinheit zu wählen ist, und ferner durch dieselbe graphische Längeneinheit von 1 cm eine Kraft von $5 \times 10 = 50\text{ kg}$, welche Kraft dann als Krafteinheit anzunehmen ist, dargestellt ist.

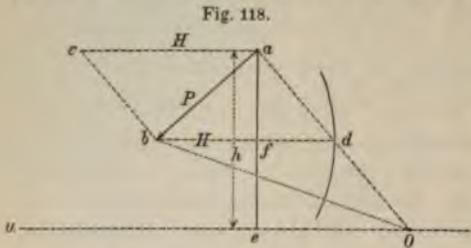
Bei dieser Wahl der Einheiten dient dann die graphische Längeneinheit sowohl zur Darstellung der Krafteinheit, als auch der effectiven Längeneinheit.

Hat nun bei Zugrundelegung dieser Einheiten das gezeichnete Momentenrechteck z. B. eine Basis (Momentenbasis) von 2 cm und eine Höhe (reducirtes Moment) von 6 cm , enthält mit anderen Worten das Momentenrechteck 12 constructive Flächeneinheiten, d. i. 12 cm^2 , so ist nach dem Obgesagten 12 auch die Maßzahl des durch dieses Rechteck dargestellten Kraftmoments, d. h. das Kraftmoment enthält 12 Momenteneinheiten; da aber als Momenteneinheit (siehe S. 58) das statische Moment der Krafteinheit, d. i. in unserem Falle einer Kraft von 50 kg angenommen werden muss, wofern der Kraftarm der effectiven Längeneinheit, d. i. hier einer Länge von $\frac{10}{3}\text{ m}$ gleichkommt, so ist die Momenteneinheit in unserem Falle $50 \times \frac{10}{3} = \frac{500}{3}\text{ kgm}$, und demnach enthält das durch das frühere Rechteck von 12 cm^2 dargestellte Kraftmoment $= 12 \times \frac{500}{3} = 2000\text{ kgm}$. Ähnlich ist auch vorzugehen, wenn die thatsächlichen räumlichen Dimensionen zu gering sind und man sich demgemäß in der Zeichnung eines vergrößerten Maßes bedienen muss.

Die den einzelnen Kräften, beziehungsweise Kräftepaaren entsprechenden Momentenrechtecke haben im allgemeinen verschiedene Grundlinien und verschiedene Höhen, was — abgesehen von dem geringen Grade der Anschaulichkeit — unvortheilhaft ist, und zwar sowohl für die Beurtheilung der Gleichheit der Kräfte Momente, die z. B. für die Äquivalenz der Kräftepaare maßgebend ist, als auch für die Bildung der Momentensummen, auf welche es, wie gezeigt wurde, stets vor allem ankommt. Man pflegt daher in der graphischen Statik statt der ursprünglichen Momentenrechtecke andere flächengleiche Rechtecke von einer zwar frei wählbaren, jedoch für alle (bei demselben zu behandelnden Problem vorkommenden) Kräfte Momente gleichen Basis H , die man die Momentenbasis nennt, in Anwendung zu bringen. Da die Höhen h dieser neuen Rechtecke den Kräfte Momenten direct proportional sind, so sind, wenn die Momentenbasis H als bekannt vorausgesetzt wird, die Kräfte Momente graphisch durch diese Höhen h , demnach, wie Kräfte, durch einfache Strecken vollkommen dargestellt. Man bezeichnet diese Höhen h als die auf die gegebene Momentenbasis H reducirtten Momente und nennt das Verfahren, nach welchem man in der graphischen Statik diese reducirtten Momente h bestimmt, die Reduction der Kräfte Momente auf die Basis H . Diese Basis H repräsentiert dem Momentenbegriffe zufolge entweder eine Kraft, oder, wiewohl selten, einen Kraftarm. Die Maßzahl des Kraftmomentes ist $H \cdot h$, wofern zur graphischen Darstellung der Krafteinheit die Längeneinheit dient.

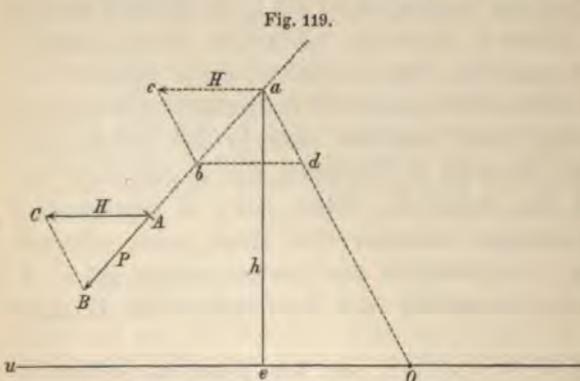
Bei dieser Reduction der Momente kann man sich offenbar aller der aus der Geometrie bekannten Methoden der Umwandlung eines Rechteckes, beziehungsweise eines Dreieckes, in ein anderes flächengleiches von gegebener Basis, beziehungsweise der Methode der Bestimmung der vierten Proportionalen zu drei gegebenen Strecken bedienen. Außer diesen Methoden sind in der graphischen Statik nebst den später zu behandelnden folgende einfache Methoden die gebräuchlichsten:

a) Ist a (Fig. 118) der Angriffspunkt der durch ab dargestellten Kraft P und O der Momentenpol (bezw. ein Punkt der Richtungslinie der zweiten Kraft $-P$ eines Kräftepaars), und ist H die Momentenbasis, so bestimme man einen der Punkte d , in welchem der Kreis mit dem Radius $\overline{bd} = H$ und dem Centrum b die Gerade Oa durchschneidet. Die Projection $\overline{ae} = h$ von Oa auf die zur Geraden bd senkrechte Achse oder mit anderen Worten die Antiprojection (Gegenprojection, Nebenprojection) von Oa auf bd , welche man dadurch erhält, dass



man durch den Momentenpol O zur Momentenbasis bd eine parallele Achse Ou führt und den Angriffspunkt a der Kraft auf diese Achse durch die Gerade ae orthogonal projiziert, ist das gesuchte reducierte Moment der Kraft P . Um dies zu beweisen, hat man nur — etwa mittels des Kräfteparallelogramms $adbc$ — die Kraft ab in zwei Componenten zu zerlegen, von welchen die eine die Richtung der Geraden aO hat, während die zweite parallel zu bd wirkt, nämlich in die Componenten ad und $ac = H$, und ferner zu beachten, dass nach § 17 das statische Moment der Resultierenden P bezüglich des Punktes O gleich ist der Summe aus dem Moment der Componente ad , das offenbar Null ist, und aus dem Momente der zweiten Componente $ac = H$ für denselben Punkt O , also gleich $H \cdot h$. (Geometrisch ließe sich das einfach dadurch nachweisen, dass das Momentendreieck Oab gleich ist der Summe, beziehungsweise der Differenz der Dreiecke abd und Obd , welche dieselbe Basis $\overline{bd} = H$ und die Höhen af und fe haben, deren Höhensumme, beziehungsweise Differenz, $\overline{ae} = h$ ist, so dass die Fläche des Momentendreiecks Oab in der That $\frac{1}{2} H \cdot h$ ist.)

Wäre die senkrechte Entfernung des Punktes b von der Geraden Oa größer als die Momentenbasis H , in welchem Falle die angeführte Construction un-



ausführbar wäre. Durch diese Verlegung des Angriffspunktes in der Richtungslinie der Kraft, die nicht nur in dem erwähnten Falle, sondern allgemein gestattet ist, ändert sich auch die Richtung von H , so dass man für die Momentenbasis H , die, wie früher hervorgehoben wurde, im allgemeinen eine Kraft darstellt, im vorhinein eine bestimmte Richtung festsetzen kann, in welchem Falle die frühere Construction zu folgendem einfachen Verfahren führt:

fürhbar sein würde, so könnte man statt des ursprünglichen Angriffspunktes als Angriffspunkt a der Kraft P irgend einen von O weiter entfernten Punkt der Richtungslinie der Kraft P annehmen, für welchen die Entfernung des Endpunktes b der die Kraft P darstellenden Strecke ab von der Geraden aO kleiner ist als H , wodurch die frü-

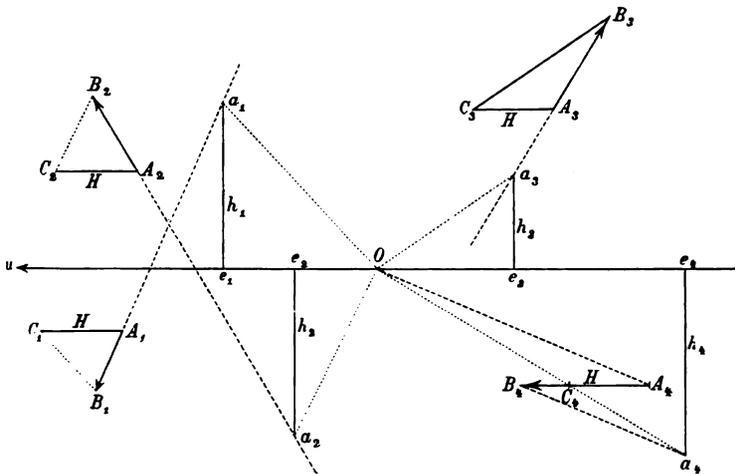
b) Man führe zunächst durch den Momentenpol O die mit der Momentenbasis H gleichgerichtete Achse Ou . Nun ziehe man von dem Angriffspunkte A der Kraft $P = \overline{AB}$ (Fig. 119) die mit der Momentenbasis H gleiche und gleichgerichtete Strecke AC , verbinde B mit C und führe vom Momentencentrum O eine Parallele zu BC bis zum Durchschnittspunkte a mit der Richtungslinie AB der Kraft. Die diesen Punkt a auf die Achse Ou orthogonal projicierende Gerade $ea = h$ ist dann das auf die Basis H reducierte Moment der Kraft P . Der Beweis hierfür ist, nachdem der Angriffspunkt A der Kraft P nach a verlegt worden ist, wodurch das Kräftedreieck ABC in die frühere Lage abc gelangt, genau so wie bei a) zu führen.

Da das Moment der Kraft P dem Momente der ihrer Richtung und Größe nach gegebenen Componente $\overline{ac} = H$, und zwar auch dem Zeichen nach gleich ist, so ist sofort ersichtlich, dass das dem Kraftarme h der Kraft H gleiche reducierte Moment ea positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem a auf der einen oder anderen Seite der Achse Ou gelegen ist.

Sind also mehrere Kräfte $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$ (Fig. 120) auf dieselbe, ihrer Größe und Richtung nach gegebene Basis H zu reducieren und die reducierte algebraische Momentensumme zu bilden, so hat man auf die frühere Art die Ordinaten $e_1a_1 = h_1, e_2a_2 = h_2, e_3a_3 = h_3, e_4a_4 = h_4$ zu bestimmen und dieselben zu summieren, wobei, wenn man in Fig. 120 jede Drehung im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers positiv in Rechnung bringt, die auf der oberen Seite der Achse Ou gelegenen Ordinaten h_1 und h_3 positiv, die auf der andern Seite gelegenen h_2 und h_4 negativ in Rechnung kommen.

Sollte bei der hier (unter b) besprochenen Construction eine der gegebenen Kräfte, z. B. A_4B_4 (Fig. 120) zur Momentenbasis parallel gerichtet sein, so ist

Fig. 120.



wie früher an den Angriffspunkt A_i die Strecke $A_iC_i = H$ anzufügen und der Angriffspunkt A_i mit O zu verbinden, ferner durch B_i eine Parallele zu OA_i bis zum Durchschnitte a_i mit der Geraden OC_i zu ziehen, indem die algebraische Momentensumme der beiden gleichgerichteten, beziehungsweise entgegengesetzten Componenten $A_iC_i = H$ und C_iB_i der Kraft A_iB_i durch das Product aus H

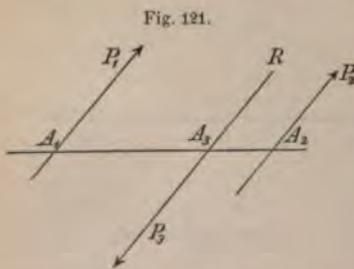
und dem Abstände des Punktes a_i von der Achse On bestimmt ist, wie sich dies aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OA_iC_i und $a_iB_iC_i$, in welchen demgemäß die Grundlinien den Höhen direct proportional sind, sofort ergibt.

Betreffs der Bestimmung des reducierten Kräfte moments mit Hilfe des Seilpolygons, besonders bei parallelen Kräften, sei auf § 70 hingewiesen.

Anmerkung. Das Kräftepolygon und das Seilpolygon (letzteres als „siebente“ einfache Maschine) wurden in die Mechanik von Varignon (siehe S. 47 und 57) eingeführt, und zwar in dessen nach seinem Tode herausgegebenen „Nouvelle mécanique ou statique, dont le projet fut donné en 1687“ (Paris 1725). Die Ausbildung der so fruchtbaren Beziehungen zwischen Kräfte- und Seilpolygon und deren Anwendung auf die Lösung der meisten Probleme der graphischen Statik ist zu verdanken dem Begründer der graphischen Statik K. Culmann (C. Die graphische Statik. Zürich 1866).

§ 69. Gleichgewicht von drei Kräften im besonderen.

Sollen sich drei in derselben Ebene auf einen starren Körper einwirkende Kräfte $P_1 P_2 P_3$ das Gleichgewicht halten, so muss zu nächst das entsprechende Kräftepolygon 0123 (siehe S. 398) ein geschlossenes sein, d. h. der Endpunkt 3 desselben mit dem Anfangspunkte 0 zusammenfallen, was nur dann möglich ist, wenn a) entweder das Kräftepolygon in eine Gerade übergeht, in welcher die Punkte 0123 gelegen sind, demnach die Kräfte zu einander parallel wirken, und zwar zwei nach der einen, die dritte, deren Größe der Summe der beiden anderen offenbar gleich sein muss, nach entgegengesetzter Richtung, oder b) wenn das geschlossene Kräftepolygon ein Dreieck ist, also keine der drei Kräfte zu einer zweiten parallel ist. In beiden Fällen müssen nach § 65 je zwei der Kräfte $P_1 P_2 P_3$, z. B. P_1 und P_2 sich auf eine resultierende Einzelkraft R reducieren lassen, und diese muss der dritten Kraft P_3 das Gleichgewicht halten, somit die Richtungslinie dieser Kraft P_3 haben und derselben entgegengesetzt gerichtet und an Größe gleich sein.



Demnach muss im Falle a), wenn durch P_1 und P_2 (Fig. 121) die gleichgerichteten Kräfte bezeichnet sind, die Richtungslinie von R , sonach auch jene von P_3 zwischen den Richtungslinien der Kräfte P_1 und P_2 gelegen sein,

und zwar derart, dass, wenn $A_1 A_2 A_3$ die Punkte sind, in welchen eine beliebige Transversale die Richtungslinie der drei Kräfte schneidet, nach Gleichung (4) S. 378

$$\frac{P_1}{A_3 A_2} = \frac{P_2}{A_1 A_3} = \frac{R}{A_1 A_2}$$

und da $R = P_3$ ist, auch

$$\frac{P_1}{A_3 A_2} = \frac{P_2}{A_1 A_3} = \frac{P_3}{A_1 A_2}$$

ist, d. h. das Verhältnis jeder Kraft zur Entfernung der in derselben Transversalen angenommenen Angriffspunkte der beiden anderen Kräfte muss für alle drei Kräfte dasselbe sein. Ferner muss $P_3 = P_1 + P_2$ sein.

Im Falle *b*) ist der Durchschnittspunkt *O* der Richtungslinien irgend welcher zwei Kräfte P_1 und P_2 zugleich auch ein Punkt der Richtungslinie der Kraft R , somit auch jener der Kraft P_3 , so dass sich die Richtungslinien aller drei Kräfte $P_1 P_2 P_3$ in demselben Punkte *O* schneiden müssen und man demgemäß den Fall der Fig. 26 (S. 61) vor sich hat, demzufolge

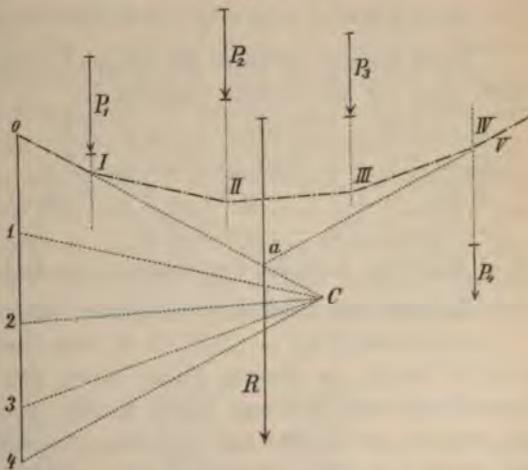
$$\frac{P_1}{\sin(P_2 P_3)} = \frac{P_2}{\sin(P_3 P_1)} = \frac{P_3}{\sin(P_1 P_2)}$$

also das Verhältnis einer jeden Kraft zum Sinus des Kräftewinkels der beiden anderen Kräfte für alle drei Kräfte dasselbe sein muss und keine der drei Kräfte in dem hohlen Kräftewinkel der beiden anderen Kräfte gelegen sein darf.

§ 70. Zusammensetzung paralleler, in derselben Ebene wirkender Kräfte im besonderen. Graphische Reduction der Momente paralleler Kräfte.

Sind die Kräfte $P_1 P_2 P_3 P_4$ (Fig. 122), deren Richtungslinien durchwegs in derselben Ebene gelegen sind, parallel, so muss der entsprechende Kräftepolygonzug *01234* in eine gerade Linie übergehen. Ist die algebraische Summe der Kräfte, wobei man die in der einen Richtung — gleichgiltig welcher — wirkenden Kräfte positiv, die entgegengesetzt gerichteten negativ in Rechnung ziehen muss, von Null verschieden, wie es z. B. stets der Fall ist, wenn die Kräfte durchwegs gleichgerichtet sind, wie in Fig. 122 (in welchem

Fig. 122.



Falle dann das Seilpolygon lauter hohle Winkel enthalten muss), so ist, und zwar nur in diesem Falle das Kräftepolygon ein offenes, daher

ergibt sich dann eine resultierende Einzelkraft $0\mathcal{A}$, deren Richtung durch das Zeichen der ΣP und deren Größe durch den Zahlwert dieser Summe bestimmt ist. Die Richtungslinie erhält man nach § 68 a (S. 397) indem man die Anfangsseite $0I$ und die Endseite IVV des entsprechenden Seilpolygons $0I II III IVV$ bis zum Durchschnitte a verlängert und durch diesen Punkt eine Parallele zu den parallelen Kräfteerichtungen führt. — Ist dagegen $\Sigma P = 0$, also der Zahlwert der Summe der nach der einen Richtung wirkenden Kräfte dem Zahlwerte der Summe der entgegengesetzt gerichteten gleich, so ist das Kräftepolygon geschlossen, und es resultiert dann aus den Kräften bekanntlich ein Kräftepaar, oder aber es herrscht Gleichgewicht, je nachdem das entsprechende leicht construirbare Seilpolygon offen oder geschlossen ist. Im übrigen sei auf § 68 und auf die schon im § 50 behandelten Kettenlinien (Seilpolygone) verwiesen.

Um auf dem Wege der Rechnung parallele, in derselben Ebene wirkende Kräfte P zusammensetzen, wähle man, wie schon erwähnt wurde, eine der beiden möglichen Richtungen der Kräfte zur positiven Richtung; der Richtungswinkel dieser Richtung bezüglich der x -Achse eines orthogonalen Achsensystems sei α . Für alle in positiver Richtung wirkenden Kräfte ist dann $X = P \cos \alpha$, $Y = P \sin \alpha$; dieselben beiden Gleichungen haben aber auch Gültigkeit für die in negativer Richtung wirkenden Kräfte, wofern man dieselben auch negativ in Rechnung bringt, denn ist P eine dieser Kräfte und ihr absoluter Zahlwert etwa p , so dass $P = -p$ ist, so ist ihr Richtungswinkel bezüglich der x -Achse offenbar $(xp) = \pi + \alpha$, daher (siehe S. 45)

$$\begin{aligned} X &= p \cos(\pi + \alpha) = p \cdot -\cos \alpha = -p \cdot \cos \alpha = P \cdot \cos \alpha \\ Y &= p \sin(\pi + \alpha) = p \cdot -\sin \alpha = -p \cdot \sin \alpha = P \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

Es ist sonach, da unter der obigen Voraussetzung der Factor $\cos \alpha$, bzw. $\sin \alpha$ für alle Kräfte derselbe ist

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \Sigma X = \Sigma (P \cos \alpha) = \cos \alpha \cdot \Sigma P \\ R_y &= \Sigma Y = \Sigma (P \sin \alpha) = \sin \alpha \cdot \Sigma P, \\ \Sigma M_o^{(P)} &= \Sigma (xY - yX) = \Sigma (xP \sin \alpha) - \Sigma (yP \cos \alpha) = \\ &= \sin \alpha \Sigma (Px) - \cos \alpha \Sigma (Py) \end{aligned} \right\} (1)$$

(x, y) bedeuten hier die Coordinaten des Angriffspunktes der Kraft P .

Es sind nun nach § 67 folgende Fälle zu unterscheiden:

a) Es ist $(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 > 0$, also $(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) (\Sigma P^2) > 0$, d. h. $\Sigma P \neq 0$. In diesem Falle haben die Kräfte eine Resultante, deren Größe und Richtung (siehe S. 388) genau so zu bestimmen ist, als würden alle Kräfte auf denselben Angriffspunkt wirken; dieselbe ist sonach, wie dies übrigens schon erwähnt wurde, der Größe und Richtung nach gegeben durch die algebraische Summe aller Kräfte, also

$$R = \Sigma P \dots (2)$$

Da für den beliebigen Koordinatenanfangspunkt $M_o^{(R)} = \Sigma M_o^{(P)}$ ist, so ist (siehe Gleichung (5) S. 390) die Gleichung der Richtungslinie der Resultierenden $\xi R_y - \eta R_x = \Sigma M_o^{(P)}$, oder wenn man die Werte aus (1) einführt

$$\xi \sin \alpha \cdot \Sigma P - \eta \cos \alpha \cdot \Sigma P = \sin \alpha \cdot \Sigma (Px) - \cos \alpha \Sigma (Py) \dots (3)$$

$$\text{oder } \eta = \operatorname{tg} \alpha \cdot \xi + \frac{\Sigma (Py) - \operatorname{tg} \alpha \cdot \Sigma (Px)}{\Sigma P}$$

Jeder Punkt $\xi \eta$, der dieser Gleichung genügt, ist ein Punkt der Richtungslinie der Resultierenden. Ist $\Sigma M_o^{(P)} = 0$, also $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Sigma (Py)}{\Sigma (Px)}$, jedoch, wie früher $\Sigma P \geq 0$, so enthält die Richtungslinie der Resultierenden, deren Gleichung dann $\eta = \operatorname{tg} \alpha \cdot \xi$ ist, den Koordinatenanfangspunkt.

Jener Punkt M nun, für welchen die Minuende der beiden Seiten der Gleichung (3) einander gleich sind und ebenso die Subtrahende, für welchen also

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\Sigma (Px)}{\Sigma P} \\ \eta &= \frac{\Sigma (Py)}{\Sigma P} \end{aligned} \right\} (4)$$

ist, genügt der Gleichung (3), liegt also in der Wirkungslinie der Resultierenden und ist zudem, da in den letzten Werten das ξ und η der Richtungswinkel α gar nicht enthalten ist, von der Richtung der parallelen Kräfte unabhängig, so dass er in der Richtungslinie der Resultierenden auch bleibt, wenn der Richtungswinkel α bei allen Kräften ohne Änderung ihrer ursprünglichen Angriffspunkte und ihrer Grössen um denselben Wert geändert wird; mit anderen Worten, es ist dieser Punkt M der Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

Es ist zudem dieser Mittelpunkt M von der absoluten Grösse der Kräfte unabhängig, sondern bloß abhängig von ihrer relativen Grösse; denn nimmt man an, dass alle Kräfte P in demselben, für alle Kräfte constanten Verhältnisse sich geändert haben, so dass auf dieselben Angriffspunkte statt der Kräfte P jetzt ein anderes Kräftesystem der Kräfte p wirkt, wo $p = kP$ und k für alle Kräfte constant ist, so ist der Mittelpunkt $\xi' \eta'$ dieses neuen Kräftesystems zufolge der Gleichungen (4) bestimmt durch

$$\xi' = \frac{\Sigma (px)}{\Sigma p} = \frac{\Sigma (kPx)}{\Sigma (kP)} = \frac{k \Sigma (Px)}{k \Sigma P} = \frac{\Sigma (Px)}{\Sigma P} = \xi$$

$$\eta' = \frac{\Sigma (py)}{\Sigma p} = \frac{\Sigma (kPy)}{\Sigma (kP)} = \frac{k \cdot \Sigma (Py)}{k \cdot \Sigma P} = \frac{\Sigma (Py)}{\Sigma P} = \eta,$$

so dass in der That der Punkt $\xi' \eta'$ mit dem Punkte $(\xi \eta)$ identisch ist.

Die Gleichungen (4), die zur Bestimmung des Mittelpunktes paralleler Kräfte dienen, können übrigens auch zur Anwendung kommen bei einem schiefwinkligen Achsensystem ($x'y'$), dessen Coordinatenwinkel λ sei; denn sind durch $\xi'\eta'$ die Coordinaten des Kräftepunktes bezüglich dieser Achsen bezeichnet, so ist, wenn man ein zweites orthogonales Achsensystem (xy) mit demselben Anfangspunkt derart wählt, dass die x -Achse mit der x' -Achse übereinstimmt, offenbar

$y = y' \sin \lambda$ und $\eta = \eta' \sin \lambda$, somit, da $\eta = \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma P}$ ist, auch

$$\eta' \sin \lambda = \frac{\Sigma(Py' \sin \lambda)}{\Sigma P} = \frac{\sin \lambda \Sigma(Py')}{\Sigma P}, \text{ also } \eta' = \frac{\Sigma(Py')}{\Sigma P}$$

und auf ähnliche Weise lässt sich nachweisen, dass $\xi' = \frac{\Sigma(Px')}{\Sigma P}$ sei.

Zur graphischen Bestimmung des Mittelpunktes paralleler Kräfte kann man, da die Lage desselben von dem Richtungswinkel α ganz unabhängig ist, so vorgehen, dass man zuerst mit Hilfe des Kräfte- und Seilpolygons in bekannter Weise die Richtungslinie der Resultierenden der Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$ bestimmt, hierauf alle Kräfte in demselben Sinne um die entsprechenden ursprünglichen Angriffspunkte um irgend einen Winkel, z. B. um einen rechten Winkel dreht, ohne die Größen der Kräfte zu ändern, und für dies neue Kräftesystem $P'_1 P'_2 P'_3 \dots$ mit Hilfe eines zweiten Kräfte- und Seilpolygons abermals die Richtungslinie der neuen Resultierenden bestimmt; der Durchschnittspunkt der letzteren mit der früher bestimmten Richtungslinie der Resultierenden des ursprünglichen Kräftesystems ist der gesuchte Mittelpunkt. Ist der erwähnte Drehungswinkel ein rechter, so stehen die Polstrahlen und die Seiten des zweiten Kräfte-, beziehungsweise Seilpolygons auf den entsprechenden Polstrahlen und Seiten des früheren Kräfte-, beziehungsweise Seilpolygons senkrecht, also $C O \perp C O'$, $C I \perp C I' \dots \theta I \perp \theta' I'$, $I II \perp I' II'$ u. s. w., wodurch sich die Construction in einer Weise, die keiner Erörterung bedarf, vereinfacht (siehe Fig. 135).

Wohl kann man den Mittelpunkt der Kräfte graphisch auch derart bestimmen, dass man zuerst den Mittelpunkt zweier Kräfte bestimmt, indem man etwa von dem Constructionsverfahren der Fig. 109 (S. 380) Anwendung macht, ferner den so bestimmten Mittelpunkt A als Angriffspunkt der Resultierenden dieser beiden Kräfte annimmt, den Mittelpunkt zwischen dieser Resultierenden und der dritten Kraft nach demselben Verfahren bestimmt u. s. w.; der so zuletzt gefundene Punkt ist offenbar der Mittelpunkt aller Kräfte (siehe Fig. 134). Dieses Verfahren ist aber nur dann von Vortheil, wenn die Zahl der Kräfte verhältnismäßig gering ist.

b) Ist $\Sigma P = 0$ (also auch $(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 = 0$), und außerdem $\Sigma M_o^{(P)} = \sin \alpha \Sigma(Px) - \cos \alpha \Sigma(Py) = 0$, so halten sich (siehe S. 393) die parallelen Kräfte das Gleichgewicht — und umgekehrt. Die letztere dieser beiden nothwendigen und hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen, die auch in der Form:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma(Px)} \dots (5)$$

ausgedrückt werden kann, lehrt die bestimmte Beziehung kennen, die außer der Gleichung $\Sigma P = 0$ zwischen den Kräften P , den Coordinaten xy ihrer Angriffspunkte und dem Richtungswinkel α stattfinden muss, wenn Gleichgewicht herrschen soll.

Sollte in einem besonderen Falle $\Sigma P = 0$, $\Sigma(Px) = 0$ und $\Sigma(Py) = 0$ sein, so ist, da in diesem Falle für jeden Winkel α $\Sigma M_o^{(P)} = 0$ ist, auch dann Gleichgewicht — sogenanntes astatiches Gleichgewicht — vorhanden, wenn der Richtungswinkel α bei allen Kräften um das Gleiche geändert wird, also alle Kräfte richtungen mit Beibehaltung derselben Angriffspunkte um einen beliebigen Winkel gedreht werden. — Ist $\Sigma(Py) = 0$, $\Sigma(Px) \geq 0$, so ist nach der Gleichung (5) Gleichgewicht nur möglich für $\alpha = 0$ oder π , d. h. wenn alle Kräfte parallel zur x -Achse wirken; ist dagegen $\Sigma(Px) = 0$, $\Sigma(Py) \geq 0$, so muss im Gleichgewichtszustande nach (5) $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ sein, so dass dann alle Kräfte parallel zur y -Achse gerichtet sein müssen.

c) Ist $\Sigma P = 0$ und $\Sigma M_o^{(P)} = \sin \alpha \Sigma(Px) - \cos \alpha \Sigma(Py) \geq 0$, also $\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma(Px)}$, so reducieren sich die parallelen Kräfte (siehe S. 394) auf ein in der Ebene der Kräfte wirkendes Kräftepaar, dessen Moment M der Summe $\Sigma M_o^{(P)}$ gleich ist, also

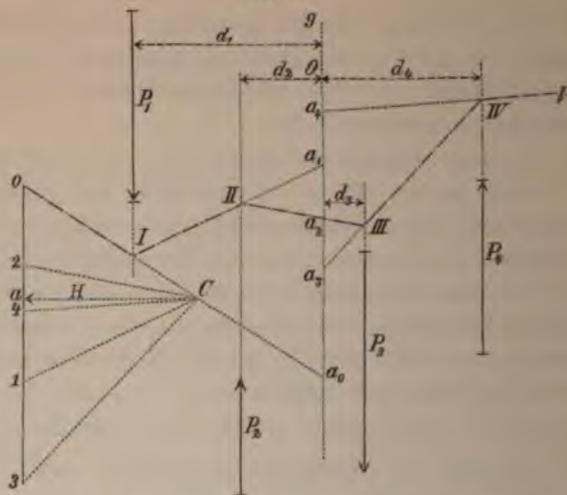
$$M = \sin \alpha \Sigma(Px) - \cos \alpha \Sigma(Py) \dots (6)$$

Die graphische Reduction der Momente paralleler Kräfte $P_1 P_2 P_3 P_4$ (Fig. 123), sowie ihrer Resultierenden für irgend einen beliebigen Momentenpunkt O lässt sich sehr einfach mit Hilfe des entsprechenden Seilpolygons $O I II III IV V$ durchführen, wofern man nur den Pol C des Kräftepolygons in einem Abstände Ca von der Kräftelinie 01234 wählt, welcher der Momentenbasis H gleich ist. Man hat zu diesem Zwecke nur durch den Momentenpunkt O eine Parallele g zu den Kräfte richtungen zu führen und die Seiten des Seilpolygons bis zum Durchschnitte $a_0 a_1 a_2 a_3 a_4$ mit dieser Parallelen g zu verlängern. Die Abstände der so erhaltenen auf

einander folgenden Durchschnittspunkte, nämlich $a_0 a_1$, $a_1 a_2$, $a_2 a_3$, $a_3 a_4$ lassen in ihrer Richtung und Größe die Drehrichtung und die Größe der auf die Basis H reducierten Momente der aufeinander folgenden Kräfte $P_1 P_2 P_3 P_4$ erkennen.

Um dies etwa für die Kraft P_1 zu beweisen, hat man nur zu beachten, dass die Dreiecke $OC1$ und $a_0 I a_1$ wegen des Parallelismus

Fig. 123.



ihrer Seiten ähnlich sind, sich daher die Grundlinien dieser Dreiecke verhalten wie ihre Höhen, also $\overline{OI} : a_0 a_1 = H : d_1$, wo d_1 den Arm der Kraft P_1 für den Momentenpol O bedeutet; es ist also in der That $P_1 d_1$, d. i. das Moment der Kraft P_1 gleich dem Producte aus der Momentenbasis H und $\overline{a_0 a_1}$, daher $a_0 a_1$ das auf die Basis H reducierte Moment der Kraft. Nimmt man weiter etwa die Drehrichtung im Sinne des Uhrzeigers als positiv und in der durch O geführten Geraden g für den Fall der Zeichnung (wo C rechts von der Kräfte-
linie, also als Richtung der Momentenbasis jene nach rechts angenommen wurde) die mit \overline{OI} übereinstimmende Richtung zur positiven an, so ist sowohl das Moment der Kraft P_1 negativ, als auch die Strecke $a_0 a_1$. Auf dieselbe Art lässt sich nachweisen, dass das positive Moment der Kraft P_2 dargestellt ist durch die positive Strecke $a_1 a_2$, dass ebenso die auf die Basis H reducierten Momente der Kräfte P_3 und P_4 durch $a_2 a_3$ und $a_3 a_4$ der Richtung und Größe nach bestimmt sind, und da in der Zeichnung alle die vier allein möglichen Fälle berücksichtigt sind, so ist der obige Satz allgemein nachgewiesen.

Das resultierende reducierte Moment der Kräfte P_1 und P_2 ist durch die algebraische Summe der reducierten Momente $a_0 a_1$ und $a_1 a_2$, also durch $a_0 a_2$ und ebenso das resultierende reducierte Moment der

Kräfte $P_1 P_2 P_3$ durch $a_0 a_3$, der Kräfte $P_2 P_3$ durch $a_1 a_3$ und jenes aller vier Kräfte durch $a_0 a_4$ dem Zeichen und der Größe nach bestimmt. Um also das resultierende reducierte Moment mehrerer aufeinander folgender Kräfte $P_1 P_2 P_3 P_4$ oder mit anderen Worten die reducierte Momentensumme $a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4$ der letzteren Kräfte zu bestimmen, hat man nur den Durchschnittspunkt a_0 jener Seite OI des Seilpolygons, die der Richtungslinie der ersten Kraft P_1 vorausgeht, mit der durch den Momentenpol O zu den Kräften geführten Parallelen g und ebenso den Durchschnittspunkt a_4 der der Richtungslinie der letzten Kraft P_4 folgenden Seilpolygone Seite IVV mit dieser Parallelen g zu bestimmen — der Abstand dieser beiden Durchschnittspunkte a_0 und a_4 ist das gesuchte reducierte resultierende Moment.

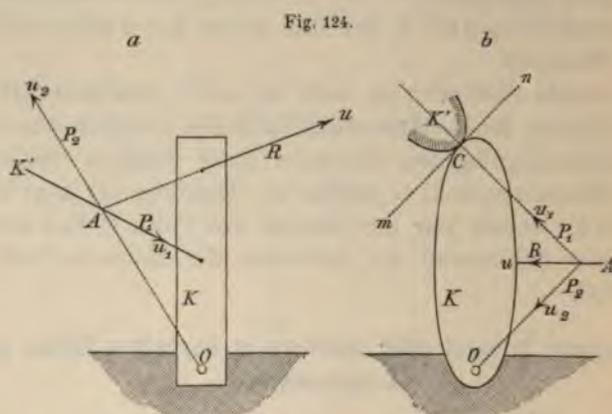
Aus gleichen Gründen ist auch bei nicht parallelen Kräften das reducierte Moment der Resultierenden durch den zwischen den äußersten Seilpolygoneseiten gelegenen Abschnitt jener Geraden bestimmt, die durch den Momentenpunkt O parallel zur Richtung der Resultierenden gezogen wird, wofern nur die Distanz des Poles C des Kräftepolygons von der Schlusseite on desselben der Momentenbasis gleich gewählt wird.

§ 71. Zerlegung in zwei oder mehrere in derselben Ebene wirkende Componenten.

Ist eine Kraft P zu zerlegen in zwei Componenten, deren Richtungslinien sich in einem Punkte schneiden, so ist es, falls überhaupt die Aufgabe eine mögliche Lösung haben soll (siehe S. 374), nothwendig, dass auch die Richtungslinie der resultierenden, d. i. der zu zerlegenden Kraft diesen Punkt enthalte, und es erfolgt dann die Zerlegung nach der auf S. 50 erörterten Methode.

Die Aufgabe der Zerlegung ist eine bestimmte, wenn, was häufig — besonders bei technischen Anwendungen — der Fall ist, außer der zu zerlegenden Kraft R , die längs der Geraden u wirkt, die Richtungslinie u_1 der einen Componente P_1 und außerdem ein Punkt O der Richtungslinie der zweiten Componente P_2 gegeben sind. Man hat nämlich dann nur den Durchschnittspunkt A der Geraden u und u_1 zu suchen und denselben mit dem Punkte O zu verbinden, wodurch die Richtungslinie u_2 der zweiten Componente P_2 bestimmt ist. Die Größe der Componenten P_1 und P_2 wird nach der aus § 15 bekannten Art und Weise bestimmt. So z. B. wenn auf einen um einen fixen Punkt O drehbaren Körper K (Fig. 124 a), der längs der Geraden u_1 mit einem zweiten Körper K' , z. B. durch eine Zugstange, ein Seil, eine Kette u. s. w. verbunden ist, eine Kraft R in der Richtung u wirkt, so bestimmt man die Druck- oder Zugkraft P_1 , die auf den zweiten Körper K'

in der Richtung u_1 übertragen wird, und den auf den fixen Punkt O ausgeübten Zug oder Druck P_2 auf die erwähnte Art. Findet, wie in Fig. 124 *b*, eine Berührung des um den fixen Punkt O drehbaren Körpers K mit einem zweiten Körper K' im Punkte C statt, so hat man, um die Richtung der auf den zweiten Körper K' übertragenen Druckkraft P_1 zu bestimmen, aus bekannten Gründen (vergl. § 23) im Punkte C zur gemeinsamen Berührungsebene mn beider Körper eine Normale u_1 zu construieren und weiterhin wie oben zu verfahren (siehe Fig. 124 *b*). Man kann in diesen Fällen auch mit Vortheil vom Momentensatze Anwendung machen und hat dann nur, wenn die



Größe der Kraft P_1 , die auf den zweiten Körper K' übertragen wird, zu bestimmen ist, als Momentenpol den fixen Punkt O zu wählen.

Handelt es sich darum, eine gegebene Kraft R , die graphisch durch 02 (Fig. 108, S. 377) dargestellt ist und deren Richtungslinie u ist, in zwei parallele Componenten, deren Richtungslinien u_1 und u_2 gegeben sind, zu zerlegen, und zwar zunächst auf graphischem Wege, so kann man sich der in Fig. 108 angedeuteten Construction bedienen. Nur kann man offenbar, während man bei der Aufgabe der Zusammensetzung von dem Kräftepolygon ausgeht und mit dessen Hilfe das Seilpolygon construirt, bei der Zerlegung der Kräfte umgekehrt von dem etwa beliebig zu verzeichnenden Seilpolygon (Dreieck) $IIIc$, dessen Spitzen in den Richtungslinien $u_1 u_2 u$ irgendwie gewählt sind, ausgehen, durch die zu Ic und IIc parallelen Strahlen $0C$ und $2C$ die Lage des Pols C bestimmen und schließlich mit Hilfe des zur dritten Seite III des Seilpolygons von C aus parallel geführten Strahles $C1$ die Lage des Punktes 1 und dadurch die Größe der Componenten $\overline{01}$ und $\overline{12}$ ermitteln. — Ist u zwischen u_1 und u_2 gelegen, so sind offenbar die Componenten P_1 und P_2 mit P gleichgerichtet, anderenfalls aber entgegengesetzt gerichtet, und zwar wirkt dann im letzteren

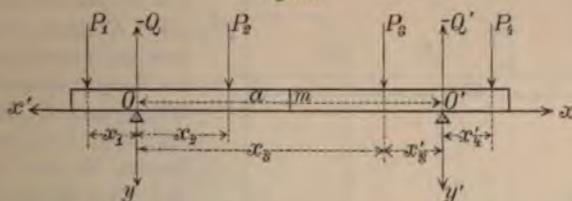
Falle in der an u näheren Geraden u_1 (Fig. 108 a') die mit R gleichgerichtete Komponente P_1 , die zugleich einen größeren Zahlwert hat als die entgegengesetzt gerichtete Komponente P_2 .

Ist die Lage des Poles C gegeben (ist diese z. B. wie auf Seite 411 an die Bedingung geknüpft, dass der Abstand des Poles C von O der Momentenbasis H gleichkommt), so führe man von dem beliebigen Punkte c der Richtungslinie der zu zerlegenden Kraft R die zu OC , bzw. $2C$ Parallelen cI , bzw. cII , bestimme die Durchschnittpunkte I , bzw. II mit u_1 , bzw. u_2 und führe dann von C den zu III parallelen Polstrahl CI .

Um auf dem Wege der Rechnung die Größe von P_1 und P_2 zu bestimmen, ziehe man etwa eine beliebige Transversale, welche u_1 , u_2 und u in den Punkten $A_1 A_2 A$ schneidet, und mache Anwendung von der Gleichung 4, S. 378, derzufolge, mögen P_1 und P_2 gleich- oder entgegengesetzt gerichtet sein, $P_1 = R \cdot \frac{AA_2}{A_1 A_2}$, $P_2 = R \cdot \frac{A_1 A}{A_1 A_2}$ ist.

Befindet sich demnach ein horizontaler Träger (Fig. 125), der in den Punkten (Auflagern) O und O' , deren Horizontalabstand a ist, gestützt ist, unter der Einwirkung verticaler Kräfte (Belastungen) $P_1 P_2 P_3 \dots$, deren Richtungslinien die

Fig. 125.



Horizontalabstände $x_1 x_2 x_3 \dots$ vom Punkte O , $x'_1 x'_2 x'_3 \dots$ vom Punkte O' haben (wo die auf das rechtwinklige Achsensystem xy (Fig. 125) bezogenen Abscissen x positiv in der Richtung OO' , die auf das Achsensystem $x'y'$ bezogenen Abscissen x' dagegen positiv in der Richtung $O'O$ sind, so dass stets $x + x' = a$ ist), und handelt es sich um die Bestimmung des Auflagerdruckes Q und Q' in den Punkten O und O' , so zerlege man in oberwähnter Weise die verticale Resultierende $R = \sum P$, deren Richtungslinie nach dem Momentensatze von O einen Abstand ξ hat, der, da die X -Componenten sämtlicher Kräfte Null und die Y -Componenten mit den Kräften identisch sind, zufolge der Gleichung (5) auf S. 390 der Momentengleichung $R \xi = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots = \sum (Px)$ entspricht, so dass $\xi = \frac{\sum (Px)}{\sum P}$ ist, in zwei in O und O' wirksame verticale Componenten Q und Q' . Es ist dann nach Gleichung 4 (S. 378) $\frac{Q'}{\xi} = \frac{Q}{a - \xi} = \frac{R}{a}$, also $Q' = \frac{\xi}{a} R$, $Q = \frac{a - \xi}{a} R$. Die zwei Druckkräfte Q und Q' werden, falls sich für dieselben aus den letzten Gleichungen ein positiver Wert ergibt, nach dem Principe der Gegenwirkung durch die von Seite der Stützen (Auflager) in O und O' auf den Träger einwirkenden normalen Widerstände, d. i. durch die vertical nach aufwärts wirkenden sogenannten Auflagerreactionen (Stützreactionen) — Q und — Q' im Gleichgewichte gehalten, so dass der Träger unter der Einwirkung der Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots - Q$

und $-Q'$ wie ein freibeweglicher Körper betrachtet werden kann, de (freien) Gleichgewichte befindet. Sobald die Kräfte $-Q$ und $-Q'$ zu den hinzugefügt worden sind, kann man sich die Stützen, deren dynamische einzig und allein in der Hervorrufung dieser Kräfte $-Q$ und $-Q'$ ber entfernt denken. Da aber im Zustande des Gleichgewichtes eines freien Körpers nach § 67 b (S. 393) die Momentensumme für einen jeden Punkt de ebene gleich Null ist, also auch für die beiden Punkte O und O' , so kö auf eine zweite Weise auch sofort (ohne frühere Bestimmung der Richt von R) die Kräfte $-Q$ und $-Q'$ bestimmen mittels der Gleichungen

$$\begin{aligned} -Q'a + (P_1x_1 + P_2x_2 + \dots) &= -Q'a + \Sigma(Px) = 0 \\ -Q'a + (P_1x'_1 + P_2x'_2 + \dots) &= -Q'a + \Sigma(Px') = 0 \end{aligned}$$

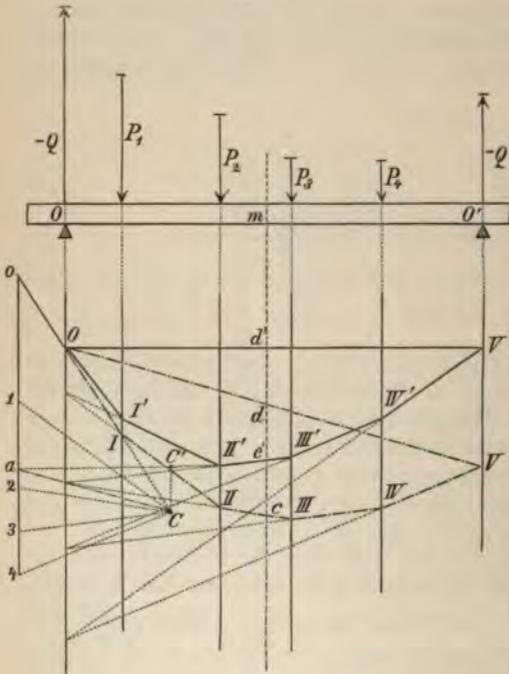
nämlich es ist

$$Q = \frac{\Sigma(Px')}{a} \quad Q' = \frac{\Sigma(Px)}{a} \quad \dots \quad (4)$$

was mit den obigen Gleichungen übereinstimmt.

Um auf graphischem Wege diese Aufgabe zu lösen, führe man und O' (Fig. 126 und Fig. 127) die verticalen Richtungslinien der un

Fig. 126.

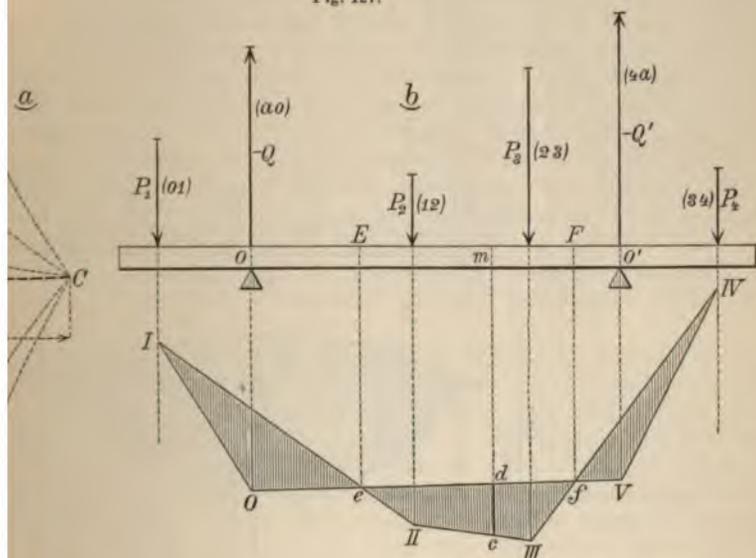


Kräfte Q und Q' , const bekannter Weise das (ten $P_1 P_2 P_3 P_4$ ents Kräfte- und Seilpolygo man zugleich aus den 123 angeführten Grün Pol C des Kräftepol einem Abstände von de linie oa anzunehmen der Momentenbasis Hg Würde man die Endse Seilpolygons OI und I längern bis zum Durch und durch diesen eine führen, so wäre dies (tungslinie der Result R . Um daher R sofo vorherige Bestimmung Durchschnittspunktes) R parallelen Kräfte Q zu zerlegen, bestimme der auf Seite 415 ane gesetzten graphischen der Zerlegung in parall onenten entsprechend Durchschnittspunkt O $O'I$ mit der durch O

verticalen Richtungslinie von Q und den Durchschnittspunkt V der letz polygonseite IVV mit der durch O' gelegten verticalen Richtungslinie und führe zu der Geraden OV von C die Parallele Ca ; es sind dann durch gesuchte Kraft Q und durch aa' die Kraft Q' , somit durch aa und aa' die Lagerreactionen $-Q'$ und $-Q$ dargestellt. In der That ist dann dem freie gewichte der Kräfte $-Q, P_1 P_2 P_3 P_4, -Q'$ entsprechend sowohl das Kräftepolygon $ao1234a$ als das entsprechende Seilpolygon $do1IIIIIIVVd$ ges

Das reducierte Moment, welches aus jenen Kräften resultiert, die auf der einen Seite auf der anderen Seite eines beliebigen zur Achse des Trägers (Fig. 125, 127) senkrechten Querschnittes m wirksam sind, nämlich das aus den Kräften $P_1 P_2$ — oder was (abgesehen vom Zeichen) auf das Gleiche hinauskommt (indem wegen des Gleichgewichtes für einen jeden in der Kräfteebene einen Momentenpol $\Sigma M_P + M_{-Q} + M_{-Q'} = 0$ ist), das aus den übrigen Kräften P_3 und $(-Q')$ — resultierende, auf die Momentenbasis H reducierte Moment M auf einen beliebigen in diesem Querschnitte gelegenen Momentenpol m (S. 413) bestimmt durch den innerhalb des Seilpolygons gelegenen Abschnitt durch m gelegten Verticalen, denn den Kräften $P_1 P_2$ entspricht das Seilpolygon $aO12$ und das Seilpolygon $dO111c$, während den Kräften $P_3 P_4$ und $(-Q')$ das Kräftepolygon $234a$ und das Seilpolygon $cIIIIVVd$ zugehörig sind. Die durch cd dargestellte Momentensumme (dem sogenannten Biegemoment)

Fig. 127.

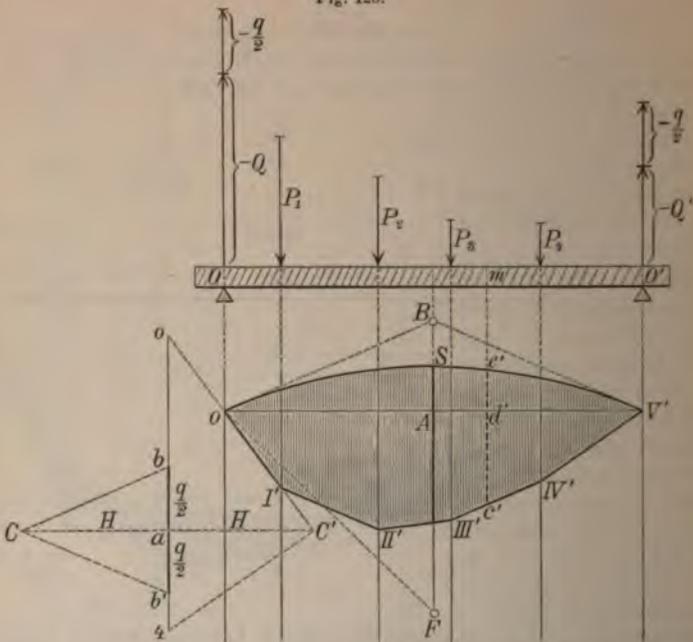


Es ist nun, wie die Elasticitätslehre lehrt, bei prismatischen Trägern von einem großen Querschnitte die maximale Normalspannung, die in gewissen Punkten dieses Querschnittes m auftritt, direct proportional, so dass die Normalspannung bei einem prismatischen Träger in jenem Querschnitte am allergrösten ist, wo cd den größten Wert hat, wodurch man leicht in den Stand gesetzt wird, diesen sogenannten gefährlichen Querschnitt zu bestimmen. Um die Methode zu bringen, dass der Einfachheit halber die Schlusseite OV etwa horizontal wird, hat man entweder in a (Fig. 126) eine Normale zu der Kräfteelinie 04 zu ziehen und in derselben einen neuen Pol C in gleichem Abstände $aC = H$ von der Kräfteelinie anzunehmen, so dass demgemäss $CC' \parallel 04$ ist und für diesen Pol C ein zweites Seilpolygon entweder nach der auf S. 401 erörterten Methode des Polwechsels direct mit Zuhilfenahme des früheren Seilpolygons zu construieren (siehe Fig. 126), oder man hat, da in diesem neuen Seilpolygone $III' IV' V'$ gleichfalls die verticalen Ordinaten $c'd'$, die den früheren Ordinaten cd gleichen, auf dieselbe Momentenbasis H reducierten resultierenden Moment M zu bestimmen, Elemente der reinen Mechanik. 2. Aufl.

Biegemomente bestimmen, die in den Richtungslinien der Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 gelegenen Sehnen (Ordinaten) dc des früheren Seilpolygons längs dieser Richtungslinien derart zu verschieben, dass ihre Anfangspunkte d' in die horizontale Schlusseite oV' zu liegen kommen, wodurch die Endpunkte c' dieser verschobenen Ordinaten in die Lage der Eckpunkte $I' II' III' IV'$ des neuen Seilpolygons gelangen. Da sonach bei parallelen Kräften die Ordinaten des Seilpolygons stets den obangeführten Momentensummen proportional sind, so führen bei parallelen Kräften die Seilpolygone besonders in der technischen Mechanik öfter den Namen: Momentendiagramme (Momentenlinien).

Sollte bei einem belasteten horizontalen Träger oo' (Fig. 127) ausser den zwischen den Stützen o und o' befindlichen Belastungen auch ausserhalb derselben vorhandene Belastungen (z. B. P_1 und P_4 in Fig. 127) auf den Träger einwirken,

Fig. 128.



so kann es vorkommen, dass die auf die früher auseinandergesetzte Weise durchgeführte Construction zu einem solchen Momentendiagramm $doi III III IVVd$ (Fig. 127) führt, in welchen die Ordinaten cd desselben in gewissen Punkten e, f Null werden. In diesem Falle sind auch die Längsspannungen in den entsprechenden Querschnitten E, F des Trägers Null. Die Elasticitätstheorie lehrt, dass dann jene Curve, nach welcher sich die Achse des Trägers infolge der Belastungen desselben krümmt, d. i. die Biegungcurve (elastische Curve) an den entsprechenden Stellen E und F einen Wendepunkt besitzt, so dass an diesen Stellen ein Übergang von einer concaven Krümmung in eine convexe oder umgekehrt stattfindet.

Ist die Zahl der Kräfte P_1, P_2, P_3, \dots unendlich groß und sind diese Kräfte selbst unendlich klein, so übergeht das Seilpolygon bekanntlich in eine Seilcurve (krumme Kettenlinie). So ist z. B. wenn eine kontinuierliche Belastung gleich-

mäßig längs des horizontalen Trägers vertheilt ist, so dass überall längs des ganzen Trägers gleichen horizontalen Abständen auch gleiche Belastungen entsprechen, die entsprechende Seilcurve (bezw. Kettenlinie, Momentencurve) nach § 52 eine Parabel mit verticaler Achse, deren Scheitel S , falls wie in Fig. 128 die Schlusseite OV' horizontal, also der Pol C in der horizontalen Symmetralen der die continuierliche Belastung darstellenden verticalen Kräftelinie bb' im Abstände H von derselben angenommen wird, in der durch den mittleren Querschnitt des Trägers gelegten Verticalalebene gelegen ist, und deren Parameter $2\frac{H}{K}$ ist, wo H die durch die Momentenbasis dargestellte Kraft und K die Belastung pro Längeneinheit bedeutet (vergl. § 52). Um auf constructivem Wege die Lage des Scheitels S dieser Parabel (Fig. 128) zu bestimmen, hat man bloß von der bekannten Eigenschaft der Parabel Anwendung zu machen, derzufolge die Subtangente im Scheitel halbiert wird. Man führe demgemäß in den Endpunkten O und V' der horizontalen Schlussehne die zu den zugehörigen Polstrahlen Cb und Cb' parallelen Endtangenten OB und BV' der Parabel, die sich in der verticalen Parabelachse BAF schneiden, und halbiere die Subtangente, d. i. die zwischen diesem Durchschnittspunkte B und der Schlusseite OV' gelegene Strecke BA der Parabelachse im Scheitel S . Um auch den Brennpunkt F der Parabel zu erhalten, hat man nur, wie in Fig. 65 (S. 198), den Winkel OoB (Fig. 128), den in O die zur Parabelachse parallele Verticale Oo mit der zu Cb parallelen Tangente OB der Parabel einschließt, auf die andere Seite dieser Tangente OB zu übertragen und den dadurch erhaltenen zweiten Schenkel OF bis zum Durchschnittspunkte F mit der Parabelachse BAF zu verlängern. Ist auf diese Weise der Scheitel S und der Brennpunkt F der parabolischen Kettenlinie (Seilcurve) bestimmt worden, so lässt sich der Parabelbogen OSV' in bekannter Weise leicht construieren.

Tritt zu den discontinuierlichen Kräften $P_1 P_2 P_3 P_4$ der Fig. 126, also zu dem früheren Kräftepolygon $aO4a$ und dem dem Pole C' entsprechenden Seilpolygon $d'O'I'II'IV'V'd'$, dessen Zeichnung in Fig. 128 wiederholt ist, noch eine längs OO' gleichmäßig vertheilte continuierliche Belastung $bb' = q$ (die etwa durch das nicht zu vernachlässigende Eigengewicht q des prismatischen Trägers bedingt ist) hinzu, so empfiehlt es sich, den dieser Belastung bb' entsprechenden Pol C gleichfalls in dem derselben Momentenbasis H gleichen Abstände $Ca = H$ von der Kräftelinie bb' , in der durch a gelegten Horizontalen jedoch derart zu wählen, dass C und C' auf entgegengesetzte Seiten der Kräftelinie zu liegen kommen. In der zugehörigen, auf die frühere Art construierten parabolischen Momentencurve OSV' (Fig. 128) ist dann durch die dem Querschnitte m entsprechende Ordinate $d'e'$ die der continuierlichen (links oder rechts von m wirkenden) Belastung entsprechende (auf die Momentenbasis H reducierte) Momentensumme dargestellt, während die frühere Ordinate $c'd'$ des Seilpolygons $O'I'II'IV'V'$ die auf die Basis H reducierte Momentensumme der discontinuierlichen Belastung des Trägertheiles Om oder mO' darstellt, so dass die Summe aus $c'd'$ und $d'e'$, d. i. die verticale, dem Querschnitte m zugehörige Sehne $c'e'$ der in Fig. 128 schraffierten Fläche (des resultierenden Momentendiagramms) die gesammte auf die Basis H reducierte Momentensumme, das sogenannte Biegemoment, welches dem Querschnitte m entspricht, bestimmt. Diese Sehne $c'e'$ ist dann sonach der maximalen specifischen Normalspannung, die im Querschnitte m herrscht (der zur Trägerachse parallelen größten Zug- oder Druckspannung), proportional. Der gefährliche Querschnitt des Trägers ist dann jener, für welchen die zugehörige verticale Sehne $c'e'$ des schraffierten Momentendiagramms am größten ist.

Übrigens ließe sich die graphische Zerlegung einer Kraft in zwei parallele Componenten, deren Richtungslinien gegeben sind, auch mit Hilfe der in Fig. 109 *a* und *b* (S. 380) angedeuteten Construction vornehmen. Man hat zunächst AA_1A_2 als eine beliebige Transversale zu verzeichnen, A_1C der die Resultierende darstellenden Strecke gleich zu machen, hierauf von A aus eine Parallele B_1B_2 zu A_2C zu führen, so dass die die Componenten P_2 und P_1 darstellenden Längen A_1B_1 und A_2B_2 dadurch bestimmt werden.

Ist bei einer Aufgabe der Zerlegung einer gegebenen Kraft R in zwei parallele Componenten die Größe der einen, somit auch — der Gleichung $R = P_1 + P_2$, bezw. $R = P_1 - P_2$ oder $R = P_2 - P_1$ entsprechend — die Größe der zweiten Componente und die Richtungslinie der einen Componente — etwa von P_1 — gegeben, so ist bei der graphischen Lösung in Fig. 108 (S. 377) das Kräftepolygon $O12$ und die Geraden u und u_1 gegeben, daher so zu verfahren, dass man, nachdem der Pol C beliebig gewählt worden ist, um das Seilpolygon zu construieren, $OI \parallel CO$ führt, OI verlängert bis zum Durchschnitte c mit u und $III \parallel C1$ und $cII \parallel O2$ führt bis zum Durchschnitte II dieser beiden Seilpolygonseiten und durch diesen Punkt $u_2 \parallel u \parallel u_1$ führt — oder man hat, wenn man die Construction der Fig. 109 (S. 380) anwendet, zuerst die beliebige Transversale A_1A zu führen, A_1B_1 und B_1C aufzutragen und von C aus zu B_1A die Parallele CA_2 bis zum Durchschnitte A_2 mit A_1A und schließlich durch A_2 eine Parallele zu den Kräfterichtungen zu führen. — Zu berechnen sind die Strecken A_1A_2 und AA_2 , durch welche die Lage von A_2 , somit auch die Lage der gesuchten Richtungslinie von P_2 bestimmt wird, mittels der bekannten Gleichung (4), S. 378; es ist nämlich $A_1A_2 = \frac{R}{P_2} A_1A$ und $AA_2 = \frac{P_1}{P_2} A_1A$.

Die Zerlegung einer gegebenen Kraft R in n in derselben Ebene wirkende Componenten ist, da die drei maßgebenden Grundgleichungen des § 67 *a* — nämlich $R_x = \Sigma [P \cos xP]$, $R_y = \Sigma [P \sin (xP)]$ und die Gleichung (5), S. 390, die n unbekannt GröÙen der Componenten $P_1 P_2 \dots P_n$, ferner die n unbekannt Richtungswinkel $(xP_1), (xP_2) \dots (xP_n)$ derselben und die n unbekannt Angriffspunkte derselben (z. B. die n -Ordinaten $b_1 b_2 \dots b_n$ der Durchschnittpunkte der Richtungslinien der n -Componenten mit der Ordinatenachse, die man als Angriffspunkte dieser Kräfte annehmen kann, oder etwa die n -Abscissen $a_1 a_2 \dots a_n$ der Durchschnittpunkte mit der Abscissenachse), also im ganzen $3n$ -Unbekannte enthalten, im allgemeinen dann eine bestimmte, wenn $3n - 3$ Bestimmungsstücke der Componenten gegeben sind, in welchem Falle man aus den drei oberwähnten Grundgleichungen die drei übrigbleibenden Bestimmungsstücke im

Allgemeinen berechnen kann. So ist, wenn z. B. die Richtungslinien (also auch die vorläufig beliebig in denselben angenommenen Richtungen) der n -Componenten, sonach $2n$ der oberwähnten Größen gegeben sind, noch die Kenntnis von $3n - 3 - 2n = n - 3$ Größen der Kräfte notwendig. Sollten sich bei der Lösung gewisse Werte der Kräfte P negativ ergeben, so ist dies offenbar ein Zeichen, dass die betreffenden Kräfte eine der vorläufig angenommenen Richtung entgegengesetzte Richtung haben. Für $n = 3$ ist $n - 3 = 0$, so dass bei der Zerlegung einer Kraft in drei Componenten im allgemeinen die Kenntnis der drei Richtungslinien der Componenten hinreicht.

Doch selbst in diesem Falle ist die Aufgabe eine unbestimmte, wenn die angenommenen drei Richtungslinien $u_1 u_2 u_3$ sich in demselben Punkte schneiden, in welchem Falle offenbar dieser Punkt auch ein Punkt der Richtungslinie u der Kraft R sein muss, oder aber,

wenn die angenommenen drei Richtungslinien $u_1 u_2 u_3$ zu einander, daher auch zur Richtung von R parallel sind; denn man kann dann die eine Componente, z. B. P_3 ganz willkürlich wählen und R nach einer der bisher behandelten Methoden in P_3 und eine zweite Kraft

Fig. 129 a.

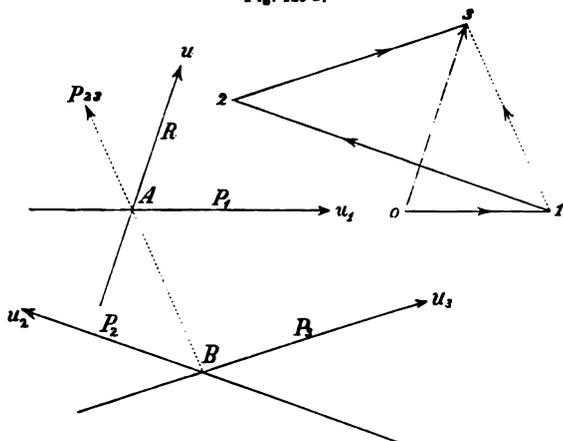


Fig. 129 b.

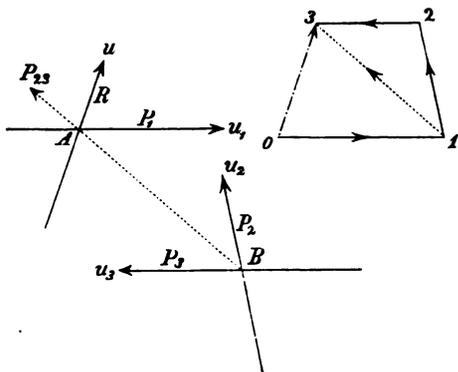
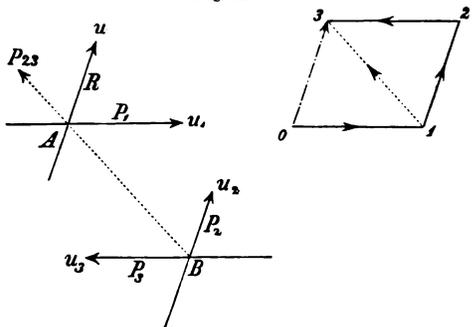


Fig. 129 c.



R' zerlegen, wodurch die Richtungslinie und Größe von R' bestimmt ist und dann R' , was stets möglich ist, in zwei Componenten P_1 und P_2 zerlegen, deren Richtungslinien u_1 und u_2 sind.

Die Lösung im vorliegenden Falle ist also nur dann eine bestimmte, wenn sich entweder *a*) alle drei Richtungslinien $u_1 u_2 u_3$ in drei verschiedenen Punkten schneiden, in welchem Falle offenbar die Richtungslinie u keinen dieser drei Punkte enthalten darf (Fig. 129 *a*, — oder *b*) wenn zwei der gegebenen Geraden $u_1 u_2 u_3$, z. B. u_1 und u_3 , parallel sind und die dritte u_2 die Parallelen u_1 und u_3 schneidet, in welchem Falle offenbar u zu u_1 und u_3 nicht parallel sein darf (Fig. 129 *b* und *c*).

Um die Zerlegung in diesem Falle vorzunehmen, hat man nur den Durchschnittspunkt A von u und etwa u_1 zu verbinden durch die Gerade AB mit dem Durchschnittspunkte B der beiden anderen Geraden u_2 und u_3 und die durch $O3$ dargestellte Resultante R , als deren Angriffspunkt A angesehen werden kann, mit Hilfe des Kräftedreiecks $O13$, in welchem $O1 \parallel u_1$ und $31 \parallel AB$ ist, in die auf denselben Angriffspunkt A wirkende Componente $\overline{O1}$, deren Richtungslinie u_1 ist, und in die in der Geraden AB wirkende Componente P_{23} , die durch 13 dargestellt ist, zu zerlegen und hierauf diese letztere Componente $\overline{13}$ nach ihrer Verlegung von A nach B mittels des Kräftedreiecks $\overline{123}$ zu zerlegen in die in den Geraden u_2 und u_3 wirkenden Componenten $\overline{12}$ und $\overline{23}$. Man erhält dadurch stets ein Kräfteviereck $O123$, das in Fig. 129 *b* ein Trapez und, wenn $u \parallel u_2$ und $u_1 \parallel u_3$ ist (Fig. 129 *c*), ein Parallelogramm wird. Im letzteren Falle wird die Kraft R zerlegt in eine gleichgerichtete und gleiche Kraft P_2 und ein Kräftepaar $P_1 P_3$, da dann $P_3 = -P_1$ ist (vergl. S. 386).

Zur Berechnung der unbekanntenen Größen der drei Kräfte $P_1 P_2 P_3$ in dem hier behandelten Falle kann man sich entweder bedienen der drei linearen Grundgleichungen des § 67 *a* oder mit Hilfe der Fig. 129 *a b c* nach den aus der Trigonometrie bekannten Methoden $P_1 P_2 P_3$ berechnen.

Sind $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ die Richtungswinkel der vier beliebig gewählten Richtungen der vier Geraden $u u_1 u_2 u_3$ in Bezug auf die x -Achse irgend eines orthogonalen Achsensystems, und sind $a_1 a_2 a_3$ die Abscissen jener Punkte, in welchen diese vier Geraden die Abscissenachsen schneiden, und $b_1 b_2 b_3$ die Ordinaten der Durchschnittspunkte mit der Ordinatenachse, so lauten die drei oberwähnten linearen Grundgleichungen mit den Unbekannten $P_1 P_2 P_3$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} R \cos \alpha &= P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 \\ R \sin \alpha &= P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + P_3 \sin \alpha_3 \\ a R \sin \alpha &= a_1 P_1 \sin \alpha_1 + a_2 P_2 \sin \alpha_2 + a_3 P_3 \sin \alpha_3 \end{aligned}$$

Statt der letzten Momentengleichung könnte man, da man auch in die Durchschnittspunkte mit der Ordinatenachse die Angriffspunkte verlegen kann, als Ausdruck des Momentensatzes die Gleichung anwenden $b R \cos \alpha = b_1 P_1 \cos \alpha_1 + b_2 P_2 \cos \alpha_2 + b_3 P_3 \cos \alpha_3$, welche in Verbindung mit irgend welchem Paar der drei früheren linearen Gleichungen gleichfalls zu einwertigen Lösungen der vorliegenden Aufgabe führt. Sollte sich durch Auflösung dieser Gleichungen ein negativer Wert für irgend eine Kraft, etwa für P_2 ergeben, so wäre dies offenbar die Bedeutung, dass der Richtungswinkel der Kraft P_2 nicht α_2 , sondern $\pi + \alpha_2$ ist, d. h. dass die Krafrichtung von P_2 die entgegengesetzte von der ursprünglich willkürlich angenommenen ist.

Anmerkung. Die hier erörterte Methode findet offenbar auch dann Anwendung, wenn die Aufgabe gestellt ist, die Größe dreier ihrer Lage in der Ebene nach gegebenen Kräfte $P_1 P_2 P_3$ zu ermitteln, welche einer gegebenen Kraft R das Gleichgewicht halten. Nur hätten dann die genannten Kräfte wohl die gleiche Größe, jedoch die entgegengesetzten Richtungen von jenen in Fig. 129.

Ist eine gegebene Kraft R in n -Componenten, die in derselben Ebene wirken, zu zerlegen, und sind außer den n -Richtungslinien der letzteren die Größen von $n-3$ Componenten $P_1 P_2 \dots P_n$ gegeben, so ist aus leicht ersichtlichen Gründen, um auf graphischem Wege die unbekanntenen Größen von $P_1 P_2 P_3$ zu bestimmen, zunächst die Resultante der Kräfte $R, -P_1, -P_2, \dots, -P_n$ zu bestimmen und diese dann nach der zuletzt behandelten Methode in die Kräfte $P_1 P_2 P_3$ zu zerlegen.

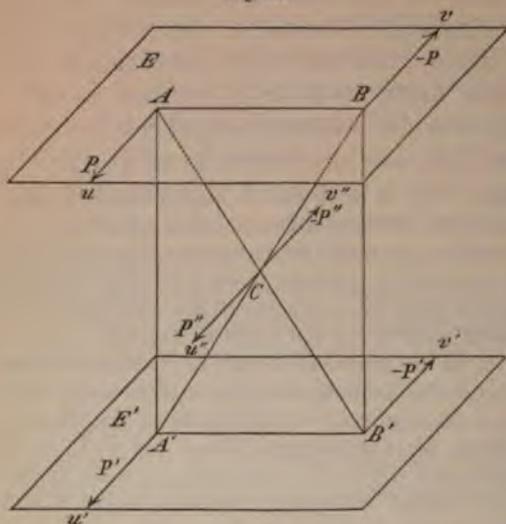
C. Statik der Kräfte im Raume, die auf einen freibeweglichen starren Körper einwirken.

§ 72. Äquivalenz, Zusammensetzung und Zerlegung der Kräftepaare im Raume.

Es sei $(P, -P)$ (Fig. 130) ein Kräftepaar, E die Ebene desselben und AB der normale Abstand der Richtungslinien u und v der Kräfte, kurz der Arm des Kräftepaares. Ist nun E' eine beliebige zur Ebene E parallele Ebene, und sind A', B', u', v' die orthogonalen Projectionen von A, B, u und v auf die Ebene E' , ferner C der Durchschnittspunkt der Diagonalen AB' und $A'B$ des Rechteckes $ABA'B'$, so lässt sich P in die parallelen in C und B' nach den Richtungen u'' und v' wirkenden entgegengesetzt gerichteten Componenten P'' und $-P'$ zerlegen, die nach Gleichung (4), S. 378, bestimmt sind durch $\frac{P''}{AB} = \frac{P'}{AC} = \frac{P}{CB'}$, so dass $P'' = \frac{AB'}{CB'} \cdot P = 2P$ und $P' = \frac{AC}{CB'} \cdot P = P$ ist. Ebenso lässt sich in gleicher Weise $(-P)$ in die parallelen Componenten $(-P'')$ und P' zerlegen, deren Angriffspunkte C und A' und deren Richtungen v'' und u' sind. Es ist demnach das ursprüngliche Kräftepaar äquivalent den vier Kräften $P'', -P'', P', P'$,

— P' , und da die zwei ersten Kräfte sich das Gleichgewicht halten, auch äquivalent dem neuen Kräftepaar $(P', -P')$, das in der Ebene E wirkt, und dessen Moment, da $P' = P$ und der Arm $A'B' = AB$

Fig. 130.



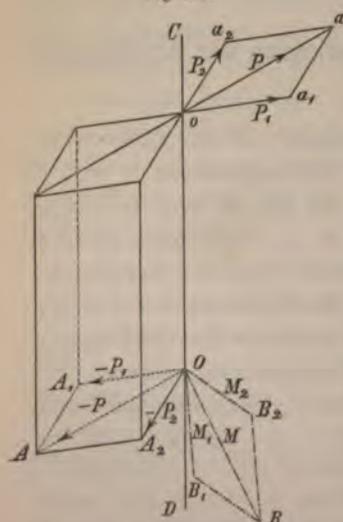
ist, dem Moment des ursprünglichen Kräftepaars dem Zeichen und Zahlwerte nach gleich ist. Da nun das Kräftepaar $(P', -P')$ auch ersetzt werden kann durch ein anderes in der Ebene E wirkendes Kräftepaar von gleichem Momente und umgekehrt, so ist dadurch nachgewiesen, dass zwei in parallelen Ebenen wirkende Kräftepaare stets äquivalent sind, wenn ihre Momente dem Zeichen und Zahlwerte nach gleich sind.

Da sohin jedes Kräftepaar, wofern nur dessen Moment ungeändert bleibt, aus einer Ebene in eine parallele Ebene verlegt werden kann, so haben in Betreff der

Zusammensetzung und des Gleichgewichtes von Kräftepaaren, die in parallelen Ebenen wirken, auch die Sätze des § 66, S. 387, volle Giltigkeit.

Sind die Ebenen E_1 ($a_1 o O A_1$) und E_2 ($a_2 o O A_2$) (Fig. 131) zweier beliebigen Kräftepaare, deren Momente M_1 und M_2 seien, nicht parallel, sondern schneiden sich dieselben in der Geraden CD , so setzen sie sich ebenfalls zu einem resultierenden Kräftepaare zusammen, das etwa auf folgende Art bestimmt werden kann: Man wähle in der Durchschnittslinie CD der beiden Ebenen zwei beliebige Punkte O und o , und zwar am einfachsten in einem Abstände, der gleich der Längeneinheit ist, und ersetze die beiden ursprünglichen

Fig. 131.



Kräftepaare durch zwei äquivalente in denselben Ebenen wirkende Kräftepaare $(P_1, -P_1)$ und $(P_2, -P_2)$, deren Arm $Oo = 1$ ist. Da

die Momente äquivalenter Kräftepaare gleich sein müssen, so ist $M_1 = P_1 \cdot \overline{Oo} = P_1$ und $M_2 = P_2 \cdot \overline{Oo} = P_2$. Die Kräfte P_1 und P_2 wirken dann in einer im Punkte o auf CD senkrechten Ebene und setzen sich zu einer in derselben Ebene auf o einwirkenden Resultierenden P zusammen; die Kräfte $-P_1$ und $-P_2$ wirken in einer zweiten auf CD senkrechten Ebene auf den Angriffspunkt O und haben eine in dieser Ebene wirkende Resultierende, die offenbar der Kraft P entgegengesetzt gleich sein muss und daher durch $(-P)$ zu bezeichnen ist. Ist also $\overline{oa_1} = \overline{OA_1} = P_1$ und $\overline{oa_2} = \overline{OA_2} = P_2$, so stellen die Diagonalen oa und OA der Kräfteparallelogramme oa_1aa_2 und OA_1AA_2 die den beiden ursprünglichen Kräftepaaren äquivalenten Kräfte P und $(-P)$ vor, und zwar bilden diese ein Kräftepaar, dessen Arm Oo und dessen Moment daher $M = P \cdot \overline{Oo} = P$ ist.

Errichtet man nun in dem beliebig gewählten Punkte O der Geraden CD zur Ebene E_1 , bzw. E_2 eines jeden der beiden componentalen Kräftepaare M_1 und M_2 nach der positiven Seite dieser Ebene des Kräftepaars — d. i. nach jener Seite der Ebene, von welcher aus gesehen das Kräftepaar eine Drehung des Armes Oo in demselben Sinne hervorzurufen sucht, in welchem die kürzeste Drehung von der positiven x -Achse nach der positiven y -Achse von Seite der positiven x -Achse aus gesehen erscheint (vergl. S. 72) — eine Normale OB_1 , bzw. OB_2 (Fig. 131), deren Maßzahl der Maßzahl des Moments des entsprechenden Kräftepaars gleichkommt, so dass $\overline{OB_1} = M_1$ und $\overline{OB_2} = M_2$ ist, so ist nach Obigem auch $\overline{OB_1} = P_1 = \overline{OA_1}$ und $\overline{OB_2} = P_2 = \overline{OA_2}$. Da nun OB_1 auf der Ebene E_1 und OB_2 auf der Ebene E_2 senkrecht steht, und da die Gerade CD die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen ist, so liegen beide Geraden OB_1 und OB_2 in einer Ebene, die im Punkte O auf CD senkrecht steht, also in der Ebene des Kräfteparallelogramms OA_1AA_2 , und es muss daher auch die Diagonale OB des über OB_1 und OB_2 construierten Parallelogramms OB_1BB_2 in dieser zu CD normalen Ebene gelegen sein. Da ferner in dieser Ebene die Schenkel des Winkels A_1OA_2 auf jenen des Winkels B_1OB_2 senkrecht stehen, so sind diese Winkel gleich, und da überdies $OA_1 = OB_1$ und $OA_2 = OB_2$ ist, so sind die Parallelogramme OA_1AA_2 und OB_1BB_2 congruent, und man kann demnach durch eine Drehung des ersten Parallelogramms um die Achse CD um 90° dieses Parallelogramm mit dem anderen zur Deckung bringen. Es ist sonach auch $\overline{OB} = \overline{OA} = P = M$ und $OB \perp OA$. Weil aber nicht nur $OB \perp OA$, sondern auch $OB \perp oO$ ist, indem OB in der zu oO senkrechten Ebene des Parallelogramms OB_1BB_2 gelegen ist, so ist auch OB senkrecht zu der die Geraden OA und oO enthaltenden Ebene $aoOA$

des resultierenden Kräftepaars. Man kann demnach durch Zusammensetzung der Normalen OB_1 und OB_2 mittels des Parallelogrammes OB_1BB_2 als Diagonale jene Strecke OB ermitteln, welche das Moment M des resultierenden Kräftepaars darstellt und auf der Ebene dieses Kräftepaars senkrecht steht.

Anmerkung 1. Welche Seite der Ebene eines Kräftepaars als die positive Seite derselben anzusehen ist, hängt der obigen Erklärung zufolge von der Wahl der gegenseitigen Lage der positiven Achsen des Coordinatensystems ab. Für die in diesem Lehrbuche stets gewählten Achsenrichtungen (siehe etwa Fig. 29, S. 65) erscheint von Seite der positiven x -Achse aus betrachtet die kürzeste Drehung von der positiven x -Achse nach der positiven y -Achse als eine mit der Drehung des Uhrzeigers übereinstimmende. Daher ist auch als positive Seite der Ebene irgend eines Kräftepaars stets jene angenommen, von der aus betrachtet das Kräftepaar seinen Arm im Sinne des Uhrzeigers zu drehen sucht. Würde man in Fig. 29 etwa die Richtung der positiven y -Achse in die entgegengesetzte verwandeln, so wäre auch als positive Seite der Ebene der Kräftepaare die der früheren entgegengesetzte anzunehmen. Nur unter dieser Voraussetzung haben die folgenden analytischen Formeln ihre Giltigkeit, während bei entgegengesetzter Annahme die analytischen Ausdrücke für die Kräfte Momente in diesem Lehrbuche durchwegs in die entgegengesetzt gleichen zu übergehen haben. Kommen jedoch diese analytischen Ausdrücke bei irgend einer Untersuchung nicht zur Verwendung, so ist es gleichgiltig, ob man für die positive Seite der Ebene die Drehung des Uhrzeigers oder die entgegengesetzte als maßgebend annimmt.

Die von irgend einem Punkte O der Ebene eines Kräftepaars $(P_1, -P_1)$, bzw. $(P_2, -P_2)$, bzw. $(P - P)$ auf diese Ebene nach der positiven Seite derselben geführte Normale OB_1 , bzw. OB_2 , bzw. OB , deren Länge eine dem Momente M des Kräftepaars gleiche Maßzahl hat, oder deren Länge, wofern die Momente sämtlicher Kräftepaare auf dieselbe Momentenbasis H (siehe S. 403) reducirt werden, dem auf diese Basis reducierten Momente gleichkommt, und eine jede dieser gleiche und mit ihr gleichgerichtete, kurz geometrisch gleiche Strecke bezeichnet man als die Achse des Kräftepaars. Ihre Richtung ist jene von O nach B_1 , bzw. B_2 , bzw. B .

Es lässt sich demgemäß der eben nachgewiesene Satz derart aussprechen: Man stelle bei der Zusammensetzung der Kräftepaare jedes derselben durch seine Achse dar und setze, um die Achse des resultierenden Kräftepaars zu erhalten, diese Achsen so zusammen, wie dies bei der Zusammensetzung von Kräften in analoger Weise mit jenen Strecken geschieht, welche die Kräfte darstellen. Mit anderen Worten: Die Achse des resultierenden Kräftepaars ist die geometrische Summe der Achsen der componentalen Kräftepaare.

Freilich ist dieser Satz oben nur für zwei Kräftepaare nachgewiesen worden, deren Ebenen sich schneiden, jedoch ist zu beachten, dass auch bei Kräftepaaren, deren Achsen parallel, deren

ebenen also gleichfalls parallel sind, das Moment des resultierenden Kräftepaars, wie oben gezeigt wurde, gleich ist der algebraischen Summe der Momente der componentalen Kräftepaare, was demnach auch von den Achsen gilt, deren geometrische Summe in diesem Falle mit der algebraischen Summe identisch ist, — und dass sicherner ganz ebenso wie früher, vom Kräfteparallelogramm ausgehend — und zwar auf dieser Grundlage allein — alle anderen Gesetze der Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften im § 14—22 deduciert wurden, auch im vorliegenden Falle, vom obigen Achsenparallelogramm ausgehend, die entsprechenden Gesetze über das Achsendreieck (in Fig. 131 ist das Achsendreieck OB_1B , bzw. OB_2B), Achsenpolygon, Achsenparallelepiped u. s. w. und alle anderen analogen Gesetze bezüglich der Zusammensetzung und Zerlegung von Kräftepaaren in ganz gleicher Weise ableiten lassen.

Das graphische Kennzeichen des Gleichgewichtes von Kräftepaaren ist demnach stets aus dem Umstande zu entnehmen, dass das entsprechende Achsenpolygon, in welchem die Achsen der beliebig im Raume wirkenden Kräftepaare stets derart aneinander zu reihen sind, wie dies bei Kräftepolygonen geschehen ist, — so dass nämlich der Anfangspunkt der folgenden Achse immer mit dem Endpunkte der nächst vorhergehenden Achse zusammenfällt — ein geschlossenes ist, d. h. dass der Endpunkt des Polygons mit dem Anfangspunkt desselben zusammenfällt. Ist aber das Achsenpolygon ein offenes, so lässt die vom Anfangspunkte des Polygonzuges nach dessen Endpunkte gerichtete Schlussseite desselben (die geometrische Summe, die Resultante) die Richtung und Größe der Achse des resultierenden Kräftepaars sofort erkennen. Dass bei der wirklichen graphischen Ausführung die räumlichen Achsenpolygone, wie dies auch bei den räumlichen Kräftepolygonen hervorgehoben wurde, zunächst nach der bekannten Methode der descriptiven Geometrie in die beiden Projectionsebenen zu projicieren sind und dass hierauf aus den Schlussseiten der so erhaltenen ebenen Polygone die gesuchte Schlussseite des räumlichen Polygons zu bestimmen ist, bedarf nicht erst näher auseinandergesetzt zu werden.

Es folgt weiter aus dem Gesagten, dass man, um auf dem Wege der Rechnung Kräftepaare im Raume zusammzusetzen, deren Momente $M' M'' \dots$ sind, und deren Achsen die Richtungswinkel (xM') , $(xM'') \dots$ bezüglich eines beliebigen orthogonalen Achsensystems haben, zu dem resultierenden Kräftepaare, dessen zu bestimmendes Moment M ist, und dessen unbekannte Achse die Richtungswinkel (xM) , (yM) , (zM) besitzt, auf gleiche Weise vorzugehen hat, wie dies früher bei der Zusammensetzung von Kräften geschehen ist, nämlich derart, dass man ein jedes dieser Kräftepaare M im allge-

meinen in drei Kräftepaare zu zerlegen hat, deren Achsen parallel zu den xyz -Achsen sind, so dass diese componentalen Kräftepaare da sie in parallele Ebenen verlegt werden können, in den auf die entsprechenden Achsen normalen Coordinatenebenen, nämlich in der yz -Ebene, der zx -Ebene und xy -Ebene wirkend angenommen werden können. Sind nun die Momente dieser componentalen Kräftepaare im allgemeinen durch $M_x M_y M_z$ bezeichnet, wobei diese Momente $M_x M_y M_z$ positiv oder negativ in Rechnung kommen, je nachdem die Richtungen der Achsen dieser componentalen Kräftepaare mit den positiven oder negativen Richtung der entsprechenden Coordinatenachsen übereinstimmen, so ist entsprechend den Gleichungen (1) und (2), S. 65

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M \cos(xM) \\ M_y &= M \cos(yM) \\ M_z &= M \cos(zM) \\ M^2 &= M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 \end{aligned} \right\} (1)$$

welche Gleichungen auch umgekehrt bei der Zusammensetzung von drei in den Coordinatenebenen wirkenden Kräftepaaren $M_x M_y M_z$ verwendet sind (vergl. Gleichung (7), S. 73).

Bezeichnet man demgemäß durch M_x das Moment jenes Kräftepaars, das aus den mit Hilfe der Gleichung (1) berechneten Kräftepaaren mit den Momenten $M_x' M_x'' \dots$, die alle in zur yz -Ebene parallelen Ebenen wirken, sonach in die yz -Ebene selbst verlegt werden können, resultiert, und resultiert ebenso M_y aus allen M_x und M_z aus allen M_x , so ist, analog den Gleichungen (1), (2) und (3), S. 68

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \Sigma M_x = \Sigma (M \cos xM), \quad M_y = \Sigma M_y = \Sigma (M \cos yM) \\ M_z &= \Sigma M_z = \Sigma (M \cos zM) \\ M &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \\ \cos(xM) &= \frac{M_x}{M}, \quad \cos(yM) = \frac{M_y}{M}, \quad \cos(zM) = \frac{M_z}{M} \end{aligned} \right\} (2)$$

so dass man mittels der Gleichungen (2) M , (xM) , (yM) , (zM) berechnen kann, wodurch die Achse des resultierenden Kräftepaars sowohl ihrer Richtung als Länge nach, somit auch die Richtung der Ebene und das Moment M des resultierenden Kräftepaars vollkommen bestimmt ist.

Aus den Erörterungen dieses Paragraphs geht klar hervor, dass im Sinne der Auseinandersetzungen auf S. 52 ein jedes Kräftepaar eine Vectorgröße ist, die der Größe und Richtung nach durch die Länge und Richtung der Achse M dieses Kräftepaars geometrisch dargestellt ist, und dass stets, wenn $M_1 M_2 M_3 \dots$ die durch die

entsprechenden Achsen dargestellten Momente der einzelnen zusammensetzenden Kräftepaare bedeuten, und wenn M das durch die Achse des resultierenden Kräftepaars der Richtung und Größe dargestellte Moment desselben ist, stets folgende geometrische Gleichung besteht:

$$M \equiv M_1 \hat{+} M_2 \hat{+} M_3 + \dots \quad (3)$$

Als das Moment eines Kräftepaars $(P, -P)$ bezüglich einer beliebigen Achse a im Raume ist zu bezeichnen das Moment der einen (gleichgültig welcher) Kraft P des Kräftepaars bezüglich einer mit a gleichgerichteten Achse, die durch irgend einen Punkt O der Richtungslinie der zweiten Kraft $(-P)$ geführt ist. (Dass es bei der Bestimmung dieses Momentes vollkommen irrelevant ist, durch welchen Punkt dieser Richtungslinie diese parallele Achse gelegt wird, ersieht man sofort aus dem auf Seite 70 erläuterten Begriffe des Kraftmomentes bezüglich einer Achse.) Ist die Achse a gleichgerichtet mit der Achse des Kräftepaars, so ist dieses Moment offenbar identisch mit dem bisher behandelten, kurzweg als Moment M des Kräftepaars bezeichneten Begriffe.

Zerlegt man nun das Kräftepaar $(P, -P)$ in zwei orthogonale Kräftepaare, und zwar in ein Kräftepaar, dessen Ebene zur Achse a normal ist, und in ein zweites Kräftepaar, dessen Achse auf der Achse a senkrecht steht, so ist das Moment M_a des erstgenannten componentalen Kräftepaars zufolge Gleichung (1) bestimmt durch $M_a = M_o^{(P)} \cdot \cos(aM)$, wenn $M_o^{(P)}$ das mit dem Momente M des Kräftepaars $(P, -P)$ identische Moment der Kraft P in Bezug auf den Angriffspunkt O der Kraft $(-P)$ und (aM) den hohlen Winkel bedeutet, den die Richtung der Achse a mit der Richtung der Achse des Kräftepaars $(P, -P)$ einschließt. Durch denselben Ausdruck ist aber nach Gleichung (7), S. 73 und der obigen Definition zufolge das Moment des Kräftepaars $(P, -P)$ bezüglich der Achse a bestimmbar. Es ist demnach das oben definierte Moment eines Kräftepaars $(P, -P)$ bezüglich irgend einer Achse a stets identisch mit dem Momente M_a jenes der beiden orthogonalen componentalen Kräftepaare, dessen Ebene zur Achse a normal ist.

Demgemäß ist das früher betrachtete Moment $M_x = M \cos(xM)$ jenes componentalen Kräftepaars, dessen Achse zur x -Achse eines orthogonalen Achsensystems parallel ist, identisch mit dem Momente des Kräftepaars $(P, -P)$ bezüglich der x -Achse, d. i. mit dem Momente $M_x^{(P)}$ der Kraft P bezüglich derselben Achse (wofern der Koordinatenanfangspunkt O ein Punkt der Richtungslinie der Kraft $(-P)$ ist), wie dies übrigens schon, da dem Begriffe des Momentes eines Kräftepaars zufolge $M = M_o^{(P)}$ ist, aus der Übereinstimmung der Gleichung $M_x = M \cos(xM)$ mit der ersten Gleichung (7) S. 73 hervorgeht. Es ist sonach

$$M_x = M_x^{(P)}, M_y = M_y^{(P)}, M_z = M_z^{(P)} \dots \quad (4)$$

Ist demnach a eine beliebige Achse im Raume, deren Richtung gegen die Achsen eines beliebigen orthogonalen Achsensystems unter den Richtungswinkeln (xa) , (ya) , (za) geneigt ist, so ist in Übereinstimmung mit den Gleichungen (8) und (9) S. 73

$$\left. \begin{aligned} M_a &= M_x \cos(xa) + M_y \cos(ya) + M_z \cos(za) \\ \Sigma M_a &= \cos(xa) \cdot \Sigma M_x + \cos(ya) \cdot \Sigma M_y + \cos(za) \cdot \Sigma M_z \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Aus dem Gesagten ergeben sich unmittelbar folgende Folgesätze:

a) Die Momente eines Kräftepaars $(P, -P)$ für gleichgerichtete Achsen sind einander gleich.

b) Aus mehreren Kräftepaaren, die bezüglich irgend einer Achse a die Momente $M_a', M_a'' \dots$ haben, resultiert ein Kräftepaar, dessen Moment M_a für die Achse a gleich ist der algebraischen Summe der Momente $M_a', M_a'' \dots$ der componentalen Kräftepaare für dieselbe Achse a , denn es ist in der That nach Gleichung (2) $M_a = \Sigma M_a = M_a' + M_a'' + \dots$

c) Das Moment eines Kräftepaars $(P, -P)$ für irgend eine Achse a ist stets gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Kräfte P und $(-P)$ dieses Kräftepaars für dieselbe Achse a , wie dies aus dem letzten Lehrsatz b) sofort gefolgert werden kann, wenn man in irgend einem Punkte O der Achse a zwei sich das Gleichgewicht haltende, mit P und $-P$ gleichgerichtete und diesen gleiche Kräfte hinzugefügt sich denkt. Diesem Satze und der Gleichung (5), S. 71 gemäß ist das Moment M eines Kräftepaars $(P, -P)$ für die z -Achse eines beliebigen orthogonalen Achsensystems, wenn (xyz) , bezw. $(x'y'z')$ die Coordinaten eines Punktes der Richtungslinie der Kraft P , bezw. $-P$ und XYZ die Componenten der Kraft P sind, durch den Ausdruck $M_z = (x-x')Y - (y-y')X$ und durch analoge Ausdrücke auch M_x und M_y bestimmt.

d) Die Summe der Momente zweier Kräfte eines Kräftepaars ist für alle gleichgerichtete Achsen dieselbe u. s. w.

Ist $M = 0$, somit der Gleichung $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$ entsprechend $M_x = 0, M_y = 0, M_z = 0$, also

$$\left. \begin{aligned} \Sigma [M \cos(xM)] &= 0 \\ \Sigma [M \cos(yM)] &= 0 \\ \Sigma [M \cos(zM)] &= 0 \end{aligned} \right\} (6)$$

so halten sich die Kräftepaare, da das Moment M des resultierenden Kräftepaars $(R, -R)$, also das Product aus der Kraft R und dem entsprechenden Arme d nur dann Null werden kann, wenn einer dieser Factoren Null wird, das Gleichgewicht, und zwar nur in diesem Falle.

Sind die Ebenen aller zusammensetzenden Kräftepaare parallel zu einer Geraden im Raume, also die Achsen derselben senkrecht zu dieser Geraden, so kann man die Kräftepaare in Ebenen versetzen, die sich in dieser Geraden schneiden, und es genügt offenbar, zwei auf dieser Geraden in einem Punkte O senkrechte Coordinatenachsen x und y anzunehmen und jedes Kräftepaar in zwei Kräftepaare zu zerlegen, deren Achsen parallel zur x - und y -Achse sind, so dass dann analog wie in § 16, S. 54

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M \cos(xM), \quad M_y = M \sin(xM), \quad M_x = \Sigma M_x = \Sigma (M \cos xM) \\ M_y &= \Sigma M_y = \Sigma (M \sin xM) \end{aligned} \right\} (7)$$

und $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}, \quad \cos(xM) = \frac{M_x}{M}, \quad \sin(xM) = \frac{M_y}{M}$

ist. Die hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen sind dann

$$\Sigma [M \cos(xM)] = 0, \quad \Sigma [M \sin(xM)] = 0 \dots (8)$$

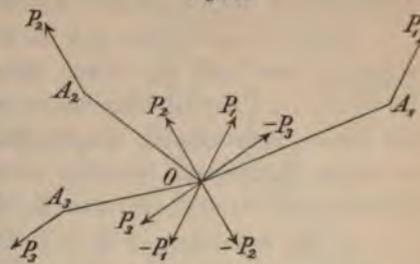
Anmerkung 2. Die Einführung der Lehre von den Kräftepaaren in die Mechanik zum Zwecke der dadurch erzielten bedeutenden Vereinfachung der Geometrie der Statik und Dynamik verdanken wir dem französischen Gelehrten Poinsot (1777, gest. 1859) (P. *Éléments de statique*. Paris 1804 — P. *Mémoire sur la position des moments et des axes dans la mécanique*).

3. Allgemeine Methode der Zusammensetzung beliebiger Kräfte im Raume.

Es seien $P_1 P_2 P_3 \dots$ (Fig. 132) beliebige Kräfte, die auf die beliebig im Raume gelegenen Punkte $A_1 A_2 A_3 \dots$ eines starren Körpers einwirken, und n sei deren Anzahl. O sei ein beliebiger Punkt im Raume, auf den die folgende Reduction der Kräfte besorgen werden soll, d. i. der Reductionspunkt. Man füge nun — jeder Kraft P entsprechend — je zwei zu P parallele, der Kraft P gleiche, doch einander entgegengesetzt gerichtete Kräfte P und $-P$, deren Angriffspunkt der Punkt O ist, hinzu (siehe Fig. 132), was

beschadet der Wirkung gestattet indem sich diese hinzugefügten Kräfte im Punkte O paarweise das Gleichgewicht halten, so dass das ursprüngliche Kräftesystem von Kräften dem Systeme der so erhaltenen $3n$ Kräfte äquivalent ist. Diese $3n$ Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$, die auf den Punkten $A_1 A_2 A_3 \dots$ einwirken und die Kräfte $-P_1 -P_2 -P_3 \dots$, die in O den ursprünglichen in Größe

Fig. 132.



und Richtung übereinstimmen, lassen sich nun in bekannter Weise durch R mit Hilfe des Kräftepolygons zusammensetzen, und ihre in O greifende Resultante — die sogenannte Reductionsresultante — durch R bezeichnet. Die letztere behält offenbar für alle Reductionspunkte des Raumes die gleiche Größe und Richtung, so dass diese möglichen Richtungslinien der Reductionsresultanten untereinander parallel sind. — Es bleiben nun außer der Kraft R noch $2n$ Kräfte übrig, von welchen die in einem der Punkte A angreifende Kraft P mit der entsprechenden Kraft $-P$, deren Angriffspunkt O ist, je ein Kräftepaar bildet, so dass diese $2n$ Kräfte aus den n Kräftepaaren $(P_1, -P_1), (P_2, -P_2), (P_3, -P_3) \dots$ bestehen. Diese Kräftepaare (und die etwa außer der Kräften $P_1 P_2 P_3 \dots$ schon ursprünglich vorhandenen Kräftepaare) lassen sich nach der im § 72örterten Art und Weise im allgemeinen zu einem resultierenden Kräftepaar, dessen Moment M sei, zusammensetzen, so dass die obwähnten $3n$ Kräfte, also auch die diesen äquivalenten n Kräfte des ursprünglichen Kräftesystems äquivalent sind der in O wirkenden

Reductionsresultanten R in Verbindung mit einem Kräftepaar vom Momente M , dessen nach § 72 bestimmbare Ebene und Achse (die Reductionsachse) etwa durch O hindurchgelegt werden möge. Den so gefundenen Wert des M nennt man das resultierende Kräfte-moment für den Punkt O oder nach Kirchhoff (K. Vorlesungen über mathematische Physik) das Hauptdrehungsmoment (Hauptmoment) für den Punkt O , auch das Reductionsmoment für O , das Achsenmoment des Punktes O u. s. w.

a) Ist nun $R = 0$ und $M = 0$, so dass zufolge der Bedingung $R = 0$ sowohl die drei Bedingungsgleichungen (1), S. 74, nämlich $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$, als auch zufolge der Bedingung $M = 0$ auch die drei Bedingungsgleichungen (6) des letzten Paragraphen erfüllt sind, — oder mit anderen Worten: ist sowohl das Kräftepolygon als auch das den n Kräftepaaren entsprechende Achsenpolygon geschlossen, so halten sich nach § 22 sowohl die auf den Punkt O einwirkenden Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$, als auch nach § 72 die n Kräftepaare das Gleichgewicht, somit herrscht auch unter den Kräften des äquivalenten ursprünglichen Kräftesystems Gleichgewicht.

b) Ist $R = 0$ (also $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$), aber M verschieden von Null, so halten sich wohl die in O wirkenden Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$ das Gleichgewicht, aber die n Kräftepaare, daher auch die diesen äquivalenten ursprünglichen Kräfte setzen sich nach § 72 zu einem Kräftepaar, nämlich zu dem oberwähnten resultierenden Kräftepaar vom Momente M , zusammen.

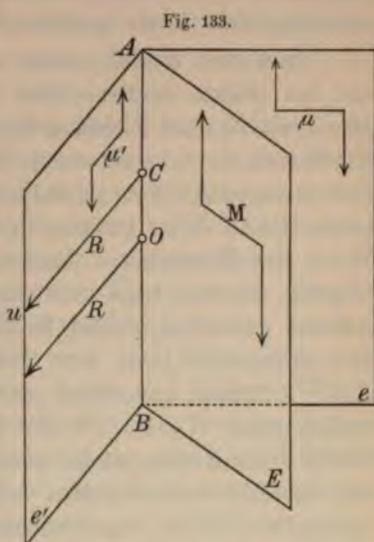
c) Ist entweder $\alpha)$ $R > 0$ und $M = 0$, oder $\beta)$ R und M zwar von Null verschieden, aber die Reductionsachse M , die als Schlussseite des entsprechenden Achsenpolygons sich ergeben hat, senkrecht zur Richtung der Kraft R , die etwa aus dem Kräftepolygon bestimmt wurde, d. h. ist mit anderen Worten im Falle $\beta)$ $(RM) = \pm \frac{\pi}{2}$, also $\cos(RM) = 0$, so ist das gegebene Kraftsystem im ersten Falle $\alpha)$ äquivalent der in O wirkenden Einzelkraft R , und im zweiten Falle $\beta)$ lässt sich das Kräftepaar M mit der in der Ebene desselben wirkenden Kraft R (siehe S. 386) zu einer resultierenden Einzelkraft von der Größe und Richtung der Kraft R zusammensetzen, deren Richtungslinie von O den Abstand $\frac{M}{R}$ hat; kurz, in den beiden hier betrachteten Fällen $\alpha)$ und $\beta)$, in welchen, um dieselben zusammenzufassen, $R > 0$ und $RM \cos(RM) = 0$ ist, haben die Kräfte eine Resultante.

d) Ist schließlich R und M von Null verschieden und ist die Achse des Kräftepaares M nicht senkrecht zur Richtung von R , so nach kurz gesagt $MR \cos(RM) \neq 0$, so lässt sich entweder

α) R in zwei Componenten R_1 und R_2 mit demselben Angriffspunkte O derart zerlegen, dass die von beliebiger Größe anzunehmende R_2 in der Ebene des Kräftepaars M in beliebiger Richtung

Durch die so getroffene Wahl der Richtung und Größe der Componente R_2 der gegebenen Reductionsresultante R ist auch die Componente R_1 bestimmt. Nun lässt sich dann die Componente R_2 in bekannter Weise mit dem Kräftepaar M zu einer in der Ebene dieses Kräftepaars wirkenden, mit R_2 gleichen und gleichgerichteten Kraft R_2' , welche bezüglich des Punktes O das Moment M zusammensetzen, so dass das ursprüngliche Kräftesystem auf viele Arten zurückgeführt werden kann: auf zwei äquivalente Kräfte (Resultanten) R_1 und R_2' , deren Richtungslinien kreuzen (wird im vorhinein R_1 senkrecht auf der Ebene des Kräftepaars M angenommen, so dass die Richtungslinie von R_2 die orthogonale Projection der Richtungslinie der Reductionsresultanten R auf die Ebene des Kräftepaars M ist, so stehen auch die gekreuzten Richtungslinien von R_1 und R_2 aufeinander senkrecht) — oder aber

β) man lege durch den Angriffspunkt O der Kraft R eine Ebene e (Fig. 133), welche zur Richtung von R senkrecht steht, und welche die Ebene e zur Ebene des Kräftepaars M parallel geführte Ebene E in der Ebene e schneidet, und lege durch diese Gerade AB und die Richtungslinie von R eine zweite Ebene e' , welche demgemäß senkrecht zur Ebene e gelegen ist, und welche in bekannter Weise das Kräftepaar M in zwei Kräftepaare, deren Ebenen e und e' sind; die Momente dieser Kräftepaare seien μ und μ' . Bezeichnen wir, wie früher, durch (RM) den Winkel, den die Achsenrichtung des Kräftepaars M mit der Richtung von R einschließt, so ist dem früheren Paragraph zufolge



$$\left. \begin{aligned} \mu &= M \cdot \cos (RM) \\ \mu' &= M \cdot \sin (RM) \end{aligned} \right\} (1),$$

man sofort ersieht, wenn man die Richtung von R etwa zur Richtung der x -Achse eines orthogonalen Achsensystems wählt, dessen Ursprung in die Gerade AB fällt.

Da nun R und das Kräftepaar μ' in derselben Ebene wirken, so führen diese bei ihrer Zusammensetzung (siehe S. 386) zu einer mit der Reductionsresultanten gleichgerichteten und ihr gleichen Kraft R , deren Richtungslinie Cu in der Ebene e' in einem Abstände von O gelegen ist, der durch $\overline{OC} = \frac{\mu'}{R} = \frac{M}{R} \sin(RM)$ bestimmt ist, und es ist demnach das ganze ursprüngliche Kräftesystem auf ein äquivalentes Kräftesystem reducirt, das aus der längs der Geraden Cu wirkenden Kraft R und dem Kräftepaar μ besteht, dessen Ebene auf Cu senkrecht steht, dessen Achse also mit Cu zusammenfallend angenommen werden kann, und zwar hat diese Achse entweder die Richtung von R oder die entgegengesetzte, je nachdem der aus der Gleichung (1) bestimmbare Wert von μ positiv oder negativ, also (RM) ein spitzer oder stumpfer Winkel ist. Die derart bestimmte Achse Cu , in welcher sowohl die Richtungslinie der resultierenden Kraft R , als die Achse des resultierenden Kräftepaares μ gelegen ist, bezeichnet man nach Poinso't als die Centralachse des ursprünglichen Kräftesystems (l'axe central des moments).

Sind zwei Kräftesysteme einander äquivalent, so muss sich nicht nur bei beiden derselbe Wert von $R_x = \Sigma X$, $R_y = \Sigma Y$, $R_z = \Sigma Z$, also auch dieselbe Richtung und Größe von R ergeben, sondern beide Kräftesysteme müssen auch für denselben beliebig zu wählenden Reductionspunkt O zu derselben Richtung und Größe der Reductionsachse M und daher auch zu derselben Centralachse und zu demselben Werte des Momentes μ führen. Es lässt sich dies sofort aus der Erwägung folgern, dass zwei äquivalente Kräftesysteme imstande sein müssen, demselben dritten Kräftesysteme das Gleichgewicht zu halten, dass demgemäß jede der Summen ΣX , ΣY , ΣZ , $\Sigma M_x^{(P)}$, $\Sigma M_y^{(P)}$, $\Sigma M_z^{(P)}$ einzeln genommen zufolge der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1), S. 313 der entsprechenden Summe, die sich auf dieses dritte Kräftesystem bezieht, entgegengesetzt gleich sein, sonach für dasselbe Achsensystem bei beiden äquivalenten Systemen denselben Wert ergeben muss. Es muss sonach nicht nur die aus $R_x = \Sigma X$, $R_y = \Sigma Y$ und $R_z = \Sigma Z$ zusammengesetzte, in O angreifende Reductionsresultante R bei zwei äquivalenten Kräftesystemen dieselbe sein, sondern es muss auch aus den drei orthogonalen Componenten M_x , M_y , M_z der Achse M des resultierenden Kräftepaares, welche zufolge der Gleichungen (2) und (4) des § 72 die Werte $M_x = \Sigma M_x = \Sigma M_x^{(P)}$, $M_y = \Sigma M_y = \Sigma M_y^{(P)}$; $M_z = \Sigma M_z = \Sigma M_z^{(P)}$ haben, die sonach für beide Kräftesysteme die gleichen sind, den Gleichungen (2), S. 428 gemäß, für denselben Reductionspunkt O sich dieselbe Größe und dieselbe Richtung für die resultierende Achse M ergeben. Dass aber auch umgekehrt, wenn bei

einem gegebenen Koordinatensystem jeder einzelne der irgend einem Kräftesysteme S_1 zugehörigen sechs Werte $R_x = \Sigma X$, $R_y = \Sigma Y$, $R_z = \Sigma Z$, $M_x = \Sigma M_x^{(P)}$, $M_y = \Sigma M_y^{(P)}$, $M_z = \Sigma M_z^{(P)}$ dem entsprechenden Werte für ein zweites Kräftesystem S_2 , das auf denselben starren Körper einwirkt, gleich ist, die Kräftesysteme S_1 und S_2 äquivalent sein müssen, mag die durch das Kräftesystem beeinflusste Bewegung des starren Körpers welche immer sein, ergibt sich unmittelbar aus den auf S. 370 enthaltenen Auseinandersetzungen; denn ist S_1 ein Kräftesystem, in welchem $R_x R_y R_z M_x M_y M_z$ solche Werte haben, die den früheren entgegengesetzt gleich sind, so müssten (siehe S. 370) sowohl die Kräfte des aus dem Systeme S_1 und S_2 bestehende Kräftesystem S' , als auch jene des aus S_2 und S_1 zusammengesetzten Kräftesystems S'' sich das Gleichgewicht halten, so dass, wie auf S. 370 nachgewiesen wurde, nicht nur das Kräftesystem S_1 äquivalent ist dem aus S_1 und S'' , d. i. aus $S_1 S_2$ und S_1 bestehenden Kräftesystem, sondern auch S_2 äquivalent dem aus S_2 und S' , d. i. demselben, nämlich aus $S_2 S_1$ und S_2 bestehenden Kräftesystem, wodurch dargethan ist, dass auch die Kräftesysteme S_1 und S_2 , die zu derselben Centralachse und demselben Werte von μ führen, bei einem starren Körper äquivalent sind, mag die Bewegung desselben welche immer sein.

Da die Kraft R von dem Reductionspunkte O nach jedem Punkte ihrer Richtungslinie versetzt werden kann, und da auch das Kräftepaar M durch ein anderes in einer beliebigen parallelen Ebene wirkendes Kräftepaar von gleichem Momente M ersetzt werden kann, so ist es klar, dass sich für einen jeden anderen Reductionspunkt, der in der Richtungslinie der Reductionsresultanten R gelegen ist, derselbe Wert und dieselbe Richtung von R und M ergibt wie für den Punkt O .

Welchen Raumpunkt auch immer man zum Reductionspunkte wählt, stets muss sich nicht nur dieselbe Größe und Richtung für die Reductionsresultante R ergeben, sondern auch stets dieselbe Centralachse und derselbe Wert von μ , denn würde etwa die Kräftezusammensetzung für einen anderen Reductionspunkt O' zu einer anderen im Abstände n von der früheren Centralachse Cu befindlichen (parallelen) Centralachse $C'u'$ und zu einem anderen Werte μ' des in der zur Centralachse Cu senkrechten Ebene e wirkenden Kräftepaars führen, so müsste wegen der Äquivalenz der beiden Kräftesysteme das aus R und μ bestehende frühere Kräftesystem (Fig. 133) der längs $C'u'$ wirkenden (fictiven) Kraft $(-R)$ in Verbindung mit einem etwa in der Ebene e angenommenen Kräftepaar $(-\mu')$ das Gleichgewicht halten, d. h. das Kräftepaar $(R, -R)$, dessen Moment $\pm R \cdot n$ ist, müsste den Kräftepaaren μ und $(-\mu')$ das Gleichgewicht halten. Die beiden letztgenannten Kräftepaare μ und $(-\mu')$, die in der Ebene e wirken, lassen sich aber zu einem Kräftepaar zusammensetzen, dessen

Moment: $(\mu - \mu')$ ist, und dessen Ebene e auf der Ebene des Kräftepaars $(R, -R)$ normal ist, so dass das Gleichgewicht der beiden letztgenannten Kräftepaare nothwendigerweise (s. S. 430) voraussetzt, dass sowohl das Moment: $(\mu - \mu')$ des einen, als auch das Moment $\pm R \cdot n$ des zweiten Kräftepaars Null, also $\mu = \mu'$ und $n = 0$ ist, wodurch die obige Behauptung nachgewiesen ist.

Würde man den ursprünglich willkürlich angenommenen Reductionspunkt O in der Centralachse Cu annehmen, etwa in C (Fig. 133), so wäre $\overline{OC} = 0$, daher $\sin(RM) = 0$, $\cos(RM) = \pm 1$ und $\mu = \pm M$, d. h. es müsste sich als das Reductionsmoment M das Moment μ ergeben. — Nimmt man aber, wie in Fig. 133, für den Reductionspunkt O irgend einen anderen außerhalb der Centralachse gelegenen Punkt an, so muss man jene Kraft R und jenes Reductionsmoment M finden, das den früheren Gleichungen entspricht, und zu dem man auch auf umgekehrtem Wege gelangen kann, wenn man nach § 66 die in der Centralachse Cu wirkende Kraft R , welche nebst dem Kräftepaare μ wirkt, in die auf den Angriffspunkt O einwirkende gleichgerichtete Kraft R und das Kräftepaar μ' , dessen Ebene die durch Cu und O gelegte Ebene e' ist, und dessen Moment aus der Gleichung $\mu' = R \cdot \overline{OC}$ bestimmt werden könnte, zerlegt; es muss nämlich dann den früheren Auseinandersetzungen zufolge aus μ' und μ das frühere Kräftepaar M resultieren, so dass (1) $M^2 = \mu^2 + \mu'^2$, also jedenfalls für alle jene Punkte O , die nicht in der Centralachse gelegen sind, $M^2 > \mu^2$ ist. Es ist sonach jedenfalls die Centralachse Cu die Achse des kleinsten Momentes μ und kann auch als solche definiert werden.

Für solche zur Centralachse parallele Strahlen, welche die gleiche Entfernung OC von der Centralachse haben, d. i. für die Erzeugenden einer senkrechten Kreiscylinderfläche, deren Achse die Centralachse ist, ergeben sich den letzten zwei Gleichungen $\mu' = R \cdot \overline{OC}$ und $M = \sqrt{\mu'^2 + \mu^2}$ zufolge die gleichen Werte für μ' und für das Reductionsmoment M , und die in den Berührungsebenen dieser Cylinderfläche gelegenen Achsen M sind nach (1) gegen die zugehörige Erzeugende durchwegs unter demselben Winkel (RM) geneigt. Je größer die Entfernung OC eines zur Centralachse parallelen Strahles von der Centralachse ist, desto größer ist denselben Gleichungen zufolge der entsprechende Wert des M und des Winkels (RM) .

Hat $\mu = M \cdot \cos(RM)$ für ein Kräftesystem den Wert Null, ist also entweder $M = 0$ oder $(RM) = \pm \frac{\pi}{2}$, so resultiert nach (c) eine Einzelkraft R allein, deren Richtungslinie die Centralachse ist, und es stellt dann offenbar M das Moment dieser Kraft R für den Punkt O dar.

Anmerkung 1. Es wurde früher gezeigt, dass jedes Kräftesystem in dem allgemeinsten Falle (*d*) auf unendlich viele Arten auf zwei äquivalente Kräfte R_1 und R_2' , deren (sogenannte „conjugierte Gerade des Nullsystems“ bildende) Richtungslinien sich kreuzen, reduciert werden kann. In der dreiseitigen Pyramide, welche die diese beiden Kräfte R_1 und R_2' darstellenden Strecken zu Gegenkanten hat, hat das Basisdreieck zur Grundlinie R_2' und den Angriffspunkt O der Kraft R_1 zur Spitze, und es hat sonach dieses Momentendreieck, da, wie gezeigt wurde, M das Moment von R_2' bezüglich des Punktes O ist, den Flächeninhalt

während die Spitze der Pyramide, d. i. der Endpunkt von R_1 , mit dem Angriffspunkte von R_2' in der zur Ebene des Kräftepaars M (der Grundfläche $\frac{M}{2}$) parallelen Seite des aus R_1 und R_2' gebildeten Kräfteparallelogramms gelegen ist, demnach von dieser Ebene den Abstand $R \cos (RM)$ hat; es ist also das Volumen des Tetraeders, dessen Gegenkanten R_1 und R_2' sind, $\frac{1}{3} \cdot \frac{M}{2} \cdot R \cos (RM) = \frac{1}{6} R \mu$, welches Volumen ist sonach für alle Paare von sich kreuzenden, äquivalenten Kräftesysteme äquivalenten Kräften R_1 und R_2' von gleicher Größe, welcher Satz, und zwar allgemein für Streckensysteme zuerst von Somoff aufgestellt wurde. Den sechsfachen Wert dieses Volums, d. i. das für

Reductionspunkte O constante Product $R \mu = RM \cos (RM)$ bezeichnen mehrere Autoren (Somoff, Routh u. a.) als die Invariante des gegebenen Kräftesystems, da derselbe außer der zweiten unveränderlichen Größe (Invariante), nämlich der Reductionsresultanten R , bei äquivalenten Kräftesystemen einen

von der Lage des Reductionspunktes O unabhängigen, also unveränderlichen Wert besitzt, und dieser Name möge auch hier beibehalten werden. — Jedem Reductionspunkte O des Raumes als dem Pole (Brennpunkte) entspricht bei einem ebenen Kräftesystem, wie oben gezeigt wurde, eine bestimmte, den Punkt O haltende Ebene E des Kräftepaars M als die dem Pole O zugehörige Polarebene. Nimmt man nun von den zwei dem Kräftesystem äquivalenten Kräften R_1 und R_2' die Kraft R_1 , deren Angriffspunkt O ist, normal zur Ebene E an, so ist offenbar die Richtungslinie der zweiten in der Ebene E wirkenden Kraft R_2' kommen bestimmt, diese Richtungslinie ist dann die sogenannte Charakteristik der Ebene E . Sowie jedem Pole O eine bestimmte Polarebene und eine bestimmte Charakteristik entspricht, so entspricht auch umgekehrt jeder beliebigen Polarebene ein bestimmter in derselben gelegener Pol und eine bestimmte Charakteristik. Das System dieser einander zugeordneten Raumelemente, nämlich

Poles und der Polarebene, die Möbius Nullpunkt und Nullebene benannt, wird nach Möbius als Nullsystem bezeichnet. — Von den Richtungen je zweier dem Kräftesystem äquivalenten Kräfte R_1 und R_2' lässt sich nachweisen, dass jede der beiden Geraden die Durchschnittslinie aller Polarebenen durch die Punkte der anderen Geraden ist, welche die Pole dieser Ebenen sind, mit anderen Worten, dass diese Geraden R_1 und R_2' sogenannte conjugierte Geraden (conjugierte Polaren) des Nullsystems sind.

In die nähere Erörterung der interessanten geometrischen Beziehungen zwischen den Polen und den Polarebenen des Nullsystems, zwischen den conjugierten Geraden desselben u. s. w. kann hier nicht eingegangen werden, da die Grenze die Grenzen dieses die Elemente der Mechanik behandelnden Lehrbuches erschreiten würde.

Die in der obigen Untersuchung behandelten Werte von R , M und μ lassen sich, wenn die Kräfte P , ferner ihre Richtungswinkel bezüglich dreier orthogonaler Achsen und die Coordinaten $x_1 y_1 z_1$,

$x_2 y_2 z_2 \dots$ ihrer Angriffspunkte gegeben sind, folgendermaßen berechnen:

Zunächst sind bekanntlich R und die Richtungswinkel dieser Kraft R bestimmbar aus

$$\left. \begin{aligned} R_x &= R \cos (xR) = \Sigma X = \Sigma (P \cos x, P) \\ R_y &= R \cos (yR) = \Sigma Y = \Sigma (P \cos y, P) \\ R_z &= R \cos (zR) = \Sigma Z = \Sigma (P \cos z, P) \\ R^2 &= R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

so dass die Bedingung $R = 0$ in $a)$ und $b)$ die drei Bedingungen $R_x = 0$, $R_y = 0$, $R_z = 0$ in sich schließt, während die Bedingung $R > 0$ in $c)$ und $d)$ voraussetzt, dass wenigstens einer der Ausdrücke $R_x = \Sigma (P \cos x, P)$, $R_y = \Sigma (P \cos y, P)$, $R_z = \Sigma (P \cos z, P)$ von Null verschieden ist; ferner ist das Moment M irgend eines der früher betrachteten, nach den Regeln des § 72 zusammensetzenden Kräftepaare $(P, -P)$, da in der Richtungslinie der Kraft $(-P)$ der Punkt O gelegen ist, identisch mit dem Moment $M_o^{(P)}$ der Kraft P bezüglich des Punktes O , und es ist demnach nach Gleichung 7, S. 73 das Moment $M_z^{(P)}$ der Kraft P für die z -Achse, da die Richtung der Normalen n des entsprechenden Momentendreiecks mit der Richtung M der Achse des Kräftepaars übereinstimmt, ausgedrückt durch $M_z^{(P)} = M_o^{(P)} \cos (z M) = M \cos (z M)$; durch den letzten Wert ist aber auch der Gleichung (1), S. 428, zufolge das Moment des in der xy -Ebene wirkenden componentalen Kräftepaars bestimmt, wenn das Kräftepaar $(P - P)$ in die bekannten drei in den orthogonalen Coordinatenebenen wirkenden Kräftepaare zerlegt wird; es ist also in Übereinstimmung mit den Gleichungen (4), S. 429, das Moment eines dieser in irgend einer der Coordinatenebenen wirkenden componentalen Kräftepaare M_x, M_y, M_z identisch (daher hier auch durch die gleiche Bezeichnung ausgedrückt) mit dem Momente $M_x^{(P)}, M_y^{(P)}, M_z^{(P)}$ der ursprünglich gegebenen Kraft P bezüglich der zu dieser Coordinatenebene normalen Achse x, y, z , welche letzteren Momente durch die Gleichungen (5) und (6) auf S. 71 und 72 gegeben sind. Setzt man demnach die Kräftepaare $(P_1, -P_1), (P_2, -P_2) \dots$ (Fig. 132) in bekannter Weise mit Hilfe der Gleichungen (2), S. 428, zusammen, so ist, wenn durch xyz die Coordinaten des Angriffspunktes irgend einer der gegebenen Kräfte bezeichnet werden,

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M \cos (xM) = \Sigma M_x = \Sigma M_x^{(P)} = \Sigma (yZ - zY) \\ M_y &= M \cos (yM) = \Sigma M_y = \Sigma M_y^{(P)} = \Sigma (zX - xZ) \\ M_z &= M \cos (zM) = \Sigma M_z = \Sigma M_z^{(P)} = \Sigma (xY - yX) \\ M^2 &= M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Mittels dieser Gleichungen lassen sich also aus den gegebenen Größen $xy z$, P , (xP) , (yP) , (zP) die Werte von M , (xM) , (yM) , (zM) , somit die Richtung und Länge der Achse M des resultierenden Kräftepaars in bekannter Weise genau bestimmen.

Sollten unter den ursprünglichen Kräften $P_1 P_2 P_3 \dots$ auch Kräftepaare vorkommen, so sind die Momente dieser Kräftepaare bezüglich der Coordinatenachsen unter M_x, M_y, M_z in Gleichung (3) einzubeziehen, da (siehe S. 430) die Summe der Momente der beiden Kräfte eines Kräftepaars bezüglich einer jeden Achse dem Momente des Kräftepaars für dieselbe Achse gleichkommt.

Bringt man die Gleichungen (3) auf ein anderes durch denselben Reductionspunkt O geführtes orthogonales Achsensystem $(x'y'z')$ zur Anwendung, so muss sich, da, wie gezeigt wurde, der Wert des M und die Lage der Achse M bloß von dem Kräftesystem und der Lage des Reductionspunktes O abhängig ist, aus den Gleichungen (3) auch derselbe Wert von M und dieselbe Lage der Achse M des Hauptdrehungsmomentes ergeben.

In Betreff der Summenwerte der Momente der ursprünglichen Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$ bezüglich der verschiedenen Achsen im Raume ergeben sich aus den Gleichungen (3) leicht folgende Folgerungen:

Da für alle Punkte O , die in einer zu R parallelen Achse gelegen sind, M dieselbe Größe und die Achse des Hauptdrehungsmomentes dieselbe Richtung hat, demnach, wenn durch diese Punkte parallele Achsensysteme durchgelegt werden, auch in den Gleichungen (3) die Winkel (xM) , (yM) , (zM) dieselben Werte beibehalten, so haben diesen Gleichungen zufolge auch $\Sigma M_x^{(P)}$, $\Sigma M_y^{(P)}$, $\Sigma M_z^{(P)}$ unveränderliche Werte, d. h. die Momentensummen der einwirkenden Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$ in Bezug auf alle parallelen Achsen, die durch die verschiedenen Punkte einer beliebigen zur Richtungslinie der Reductionsresultanten R parallelen Achse geführt sind, sind einander gleich.

Die Summe der Momente aller Kräfte in Bezug auf die durch den Reductionspunkt O geführte Achse a des Hauptdrehungsmomentes hat den aus (3) bestimmbar Wert M , denn nimmt man diese Achse a etwa zur z -Achse eines orthogonalen Achsensystems an, so ist in diesen Gleichungen $(zM) = 0$, $(xM) = (yM) = \frac{\pi}{2}$ zu setzen, so dass diesen Gleichungen zufolge $M_x = 0$, $M_y = 0$ und $M = M_z = \Sigma M_z^{(P)}$ ist, d. h. es ist in der That M gleich der Summe der Momente $M_z^{(P)}$ der einwirkenden Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$ bezüglich der z -Achse.

Da nun ferner für alle anderen z -Achsen, die durch O durchgelegt werden können, $(zM) \geq 0$ ist, so ist der Gleichung $\Sigma M_z^{(P)} = M \cos (zM)$ zufolge jedenfalls $(\Sigma M_z^{(P)})^2 < M^2$, d. h. die Momentensumme M des Kräftesystems für die durch O geführte Achse a des Hauptdrehungsmomentes (d. i. für die durch den Pol O geführte Normale der Polarebene) ist das Maximum aller Momentensummen, die sich auf die verschiedenen den Punkt O enthaltenden Achsen beziehen u. s. w.

Anmerkung 2. Wendet man, wie dies schon auf S. 321 geschehen ist, den dem Begriffe des Kraftmomentes völlig analogen Begriff des Momentes bezüglich einer Achse auf die Bewegungsgrößen $m \dot{v}$ der verschiedenen Punkte eines beliebigen materiellen Punktsystems an, so dass in den Gleichungen (3) $X = m v_x = m \frac{dx}{dt}$, $Y = m \frac{dy}{dt}$, $Z = m \frac{dz}{dt}$ zu setzen ist, so führen die auf dieselbe Art durchführbaren Deductionen zu analogen Folgerungen, also unter anderem

zu der Folgerung, dass es bei einem jeden in Bewegung begriffenen materiellen Punktsystem für jeden Punkt O eine durch diesen Punkt gehende Achse a gibt, bezüglich welcher die Summe der Momente der Bewegungsgrößen den größten Wert $\Sigma M^{(a)}$ hat. Die Lage dieser Achse a ist mittels der Gleichungen (3) bestimmbar; es ist nämlich, wenn in Übereinstimmung mit der Bezeichnung auf S. 321 und 322 $M^{(x)}$, $M^{(y)}$, $M^{(z)}$ die leicht bestimmbaren Momente der einzelnen Bewegungsgrößen bezüglich der Coordinatenachsen sind, $\Sigma M^{(x)} = \Sigma M^{(a)} \cdot \cos(xa)$, $\Sigma M^{(y)} = \Sigma M^{(a)} \cdot \cos(ya)$, $\Sigma M^{(z)} = \Sigma M^{(a)} \cdot \cos(za)$, aus welchen Gleichungen sich in bekannter Weise $\Sigma M^{(a)}$, (xa) , (ya) , (za) berechnen lässt. Die Lage dieser Achse a und der Wert der größten Momentensumme $\Sigma M^{(a)}$ sind je nach der Art der auf das Punktsystem einwirkenden Kräfte entweder veränderlich, oder aber dieselben bleiben dann constant, wenn die Summen $\Sigma M^{(x)}$, $\Sigma M^{(y)}$, $\Sigma M^{(z)}$ sich nicht ändern. Letzteres tritt, wie auf S. 322 gezeigt wurde, dann ein, wenn die Momentensummen der äußeren auf das Punktsystem einwirkenden Kräfte für die drei durch den Punkt O geführten Coordinatenachsen andauernd verschwinden, also wenn z. B. keine äußeren Kräfte, sondern nur anziehende oder abstoßende innere Kräfte wirksam sind oder äußere Centralkräfte einwirken, deren Centralpunkt O ist. In diesen Fällen ist (siehe S. 323), wenn die daselbst gebrauchten Bezeichnungen beibehalten werden, $\Sigma M^{(a)} = 2 \frac{d}{dt} \Sigma(mF_z)$, und es ergibt, da $\Sigma M^{(a)}$ constant ist, die Integration der letzten Gleichung für die Zeit t , wenn $\Sigma(mF_z)$ auf diese Zeit sich bezieht, $\Sigma(mF_z) = \frac{1}{2} \Sigma M^{(a)} \cdot t$ und analog $(\Sigma mF_y) = \frac{1}{2} \Sigma M^{(y)} \cdot t$, $(\Sigma mF_x) = \frac{1}{2} \Sigma M^{(x)} \cdot t$, $(\Sigma mF_a) = \frac{1}{2} \Sigma M^{(a)} \cdot t$. Diese Gleichungen lehren, dass in diesem Falle die Summen von der Form $\Sigma(mF)$ für alle Achsen den entsprechenden Momentensummen der Bewegungsgrößen direct proportional sind, so dass auch $\Sigma(mF_a)$ ein Maximum aller Summenwerte $\Sigma(mF)$ sein muss. Die zu der Achse a senkrechte, durch O gelegte Ebene, welche in diesem Falle während der Bewegung des Punktsystems ihre Lage im Raume nicht ändert, und für welche, wie oben gezeigt wurde, die Summe der Producte aus den Flächenräumen F_a in die Massen m ein Maximum ist, wurde von Laplace die invariable Ebene genannt, die Achse a heißt die invariable Achse. Das in Obigem deducierte Grundgesetz, das Laplace für das Sonnensystem deduciert hat, und das eine Ergänzung des Flächenprincips (S. 323) bildet, ist das sogenannte Princip der invariablen (unveränderlichen) Ebene.

Die Bedingung $M = 0$ in a) und c) enthält der letzten Gleichung in (3) zufolge eigentlich drei Bedingungen in sich, nämlich $M_x = \Sigma(yZ - zY) = 0$, $M_y = \Sigma(zX - xZ) = 0$, $M_z = \Sigma(xY - yX) = 0$, während in der Bedingung $M > 0$ vorausgesetzt ist, dass wenigstens einer dieser drei Ausdrücke von Null verschieden ist.

Der in c) und d) vorkommende Winkel (RM) lässt sich mit Hilfe der Gleichungen (2) und (3) leicht bestimmen. Es ist nämlich bekanntlich

$$\cos(RM) = \cos(xM) \cos(xR) + \cos(yM) \cos(yR) + \cos(zM) \cos(zR).$$

Setzt man in diese Gleichung die Werte für die Richtungs cosine der Kraft R und des Kräftepaares M aus den Gleichungen (2) und (3)

ein, so findet man $\cos (RM) = \frac{M_x}{M} \cdot \frac{R_x}{R} + \frac{M_y}{M} \cdot \frac{R_y}{R} + \frac{M_z}{M} \cdot \frac{R_z}{R}$, so dass die Invariante $R\mu$ des Kräftesystems bestimmt ist durch

$$\left. \begin{aligned} RM \cos (RM) &= R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z \text{ ferner} \\ \mu &= M \cos (RM) = \frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{R} \\ \mu' &= \sqrt{M^2 - \mu^2} = \sqrt{M^2 - \left(\frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{R} \right)^2} \end{aligned} \right\} (4)$$

Die Bedingung (c) für das Stattfinden einer resultierenden Einzelkraft lässt sich demnach auch derart ausdrücken, dass $R > 0$, d. h. wenigstens einer der drei Ausdrücke $\Sigma (P \cos xP)$, $\Sigma (P \cos yP)$, $\Sigma (P \cos zP)$ von Null verschieden ist und überdies $M \cos (MR) = 0$, also die Invariante $R\mu$ des Kräftesystems verschwindet, nämlich

$$R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 0 \quad \dots (5)$$

ist, wo $R_x R_y R_z M_x M_y M_z$ aus (2) und (3) zu bestimmen sind, während die Bedingung für den Fall (d), nämlich für das Stattfinden einer Centralachse, längs welcher eine Resultierende R wirkt und die zugleich die Achse eines resultierenden Kräftepaars ist, die ist, dass $MR \cos (MR) \geq 0$, also die Invariante $R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z \geq 0$ ist.

Die Gleichungen der Richtungslinie der resultierenden Kraft, falls es eine solche überhaupt gibt, ergeben sich sofort, wenn man von dem früheren Satze Anwendung macht, demzufolge bei äquivalenten Kräftesystemen die Momentensummen $\Sigma M_x^{(P)}$, $\Sigma M_y^{(P)}$, $\Sigma M_z^{(P)}$ in Bezug auf dieselben drei beliebig gewählten Coordinatenachsen denselben Wert ergeben müssen, so dass sonach bei beliebigen Kräften im Raume auch das Moment der Resultierenden R in Bezug auf eine jede Achse, also auch für eine jede der Coordinatenachsen, gleich ist der algebraischen Summe der statischen Momente der Componenten $P_1 P_2 P_3 \dots$ bezüglich derselben Achse. Bezeichnet man demgemäß durch $\xi \eta \zeta$ die Coordinaten irgend eines Punktes dieser Richtungslinie der Resultierenden, so ist, da derselbe als Angriffspunkt R angenommen werden kann,

$$\left. \begin{aligned} \eta R_x - \zeta R_y &= \Sigma (yZ - zY) = M_x \\ \zeta R_x - \xi R_z &= \Sigma (zX - xZ) = M_y \\ \xi R_y - \eta R_z &= \Sigma (xY - yX) = M_z \end{aligned} \right\} (6)$$

Würde man die erste dieser Gleichungen mit R_x , die zweite mit R_y , die dritte mit R_z multiplicieren und die Gleichungen addieren, so würde man wieder zu der obigen Bedingungsgleichung $R_x M_x +$

$+ R_y M_y + R_z M_z = 0$ gelangen, die bekanntlich besagt, dass entweder das Kräftepaar M Null ist, oder dass dessen Ebene zu R parallel ist. Damit ist zugleich nachgewiesen, dass es eine Resultierende nur in diesem einen Falle geben kann.

Von den drei Gleichungen (6) ergibt sich, wenn, wie vorausgesetzt ist, die letzte Bedingungsgleichung erfüllt ist, ersichtlicherweise eine jede aus den beiden anderen, und zwar sind durch diese Gleichungen gegeben die Gleichungen der drei orthogonalen projicierenden Ebenen einer Geraden im Raume — nämlich der Richtungslinie der Resultanten — auf die Coordinatenebenen.

Wenn auch bisher bloß nachgewiesen wurde, dass die Bedingungen *a)* $R = 0, M = 0$, *b)* $R = 0, M > 0$, *c)* $R > 0, R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 0$, *d)* $R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z \geq 0$ für das Stattfinden *a)* des Gleichgewichtes, *b)* eines resultierenden Kräftepaars, *c)* einer resultierenden Einzelkraft R , *d)* einer Resultierenden R nebst einem Kräftepaar μ , dessen Ebene auf R normal ist, beziehungsweise zweier äquivalenter Resultanten mit gekreuzten Richtungslinien hinreichend sind, so kann man aus dem Umstande, dass durch die ersterwähnten Bedingungen *a) b) c) d)* alle möglichen Fälle erschöpft sind und sich diese vier Bedingungen gegenseitig ausschließen, sofort folgern, dass diese Bedingungen auch für das Stattfinden *a)* des Gleichgewichtes, *b)* eines resultierenden Kräftepaars, *c)* einer resultierenden Einzelkraft u. s. w. auch nothwendig sind, d. h. dass von den früheren Sätzen *a) b) c) d)* auch die Umkehrungen volle Giltigkeit haben.

Anmerkung 3. Da (s. S. 429) das Moment eines Kräftepaars μ bezüglich irgend einer der Coordinatenachsen übereinstimmt mit dem Moment desjenigen seiner drei orthogonalen componentalen Kräftepaare, dessen Ebene die zu dieser Coordinatenachse senkrechte Coordinatenebene ist, da ferner die Achse des Kräftepaars μ übereinstimmt mit der Centralachse, in welcher auch R wirkt, sonach die Richtungsosinus $\frac{R_x}{R}, \frac{R_y}{R}, \frac{R_z}{R}$ besitzt, und da bei äquivalenten Kräftesystemen, wie es R und μ einerseits und die gegebenen Kräfte $P_1 P_2 \dots$ andererseits sind, die Momentensummen bezüglich irgend einer der Coordinatenachsen gleich sind, so sind die diese Gleichheit ausdrückenden Gleichungen der Centralachse

$$\left. \begin{aligned} \eta R_x - \zeta R_y + \mu \frac{R_x}{R} &= M_x \\ \zeta R_x - \xi R_z + \mu \frac{R_y}{R} &= M_y \\ \xi R_y - \eta R_x + \mu \frac{R_z}{R} &= M_z \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

wo $M_x M_y M_z$ durch die Gleichungen (3) gegeben sind. Das Moment μ lässt sich auch aus diesen Gleichungen leicht deducieren, wenn man, wie früher, die Gleichungen (7) einzeln mit $R_x R_y R_z$ multipliciert und addiert, wodurch sich ergi-

$$\mu \cdot \frac{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}{R} = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z, \text{ also}$$

$$\mu = \frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{R}$$

Für den Fall, dass $\frac{M_x}{R_x} = \frac{M_y}{R_y} = \frac{M_z}{R_z}$ ist, ergibt sich, wenn man durch K den Wert dieser drei gleichen Quotienten bezeichnet, aus der Quadrierung und darauffolgenden Summierung der drei Gleichungen $M_x = KR_x$, $M_y = KR_y$, $M_z = KR_z$, dass $M^2 = K^2 R^2$, also $K = \pm \frac{M}{R}$ ist. Substituiert man diese Werte in die Gleichungen (4), so ersieht man, dass dann $\mu = KR = \pm M$ und $\mu' = 0$, also $\frac{\overline{O}}{R} = \frac{\mu'}{R} = 0$ ist. Es ist sonach in diesem Falle der Reductionspunkt O ein Punkt der Centralachse.

Führt man in allen den Paragraphen §§ 65—73 statt der dynamischen Begriffe „Einzelkraft, Krafrichtung, Kraftintensität, Angriffspunkt der Kraft, Kräftepaar, Achse des Kräftepaares, Richtung der Resultierenden, Centralachse, Gleichgewicht u. s. w.“ durchwegs die entsprechenden kinematischen Begriffe „Rotation, Richtung der Rotationsachse, Winkelgeschwindigkeit, Punkt der Rotationsachse, fortschreitende Bewegung, translatorische Geschwindigkeit, Richtung der augenblicklichen Drehachse, augenblickliche Schraubenachse, Ruhe u. s. w.“ ein, so gelangt man durch ganz dieselben Deductionen zu völlig analogen, leicht in Worte zu kleidenden Sätzen der Kinematik starrer Körper, welche das Ergebnis der Zusammensetzung beliebiger progressiver und rotierender Bewegungen (bezw. deren Zerlegung) erkennen lassen. Es müssen dementsprechend unter anderen auch die Gleichungen (1—7) dieses Paragraphs in der Kinematik Giltigkeit haben, wenn M die durch die resultierende Geschwindigkeit der Bewegung irgend eines beliebig gewählten Reductionspunktes (Coordinatenanfangspunktes) O bestimmte translatorische Geschwindigkeit bedeutet, wenn ferner M_x M_y M_z die Componenten: $M \cos(xM)$, $M \cos(yM)$, $M \cos(zM)$ dieser translatorischen Geschwindigkeit M parallel zu den Coordinatenachsen, R_x R_y R_z die resultierenden Winkelgeschwindigkeiten der Drehungen um die in O sich schneidenden Coordinatenachsen, $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ die resultierende augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die durch den Punkt O gehende augenblickliche Drehachse, deren Richtungscosinus $\frac{R_x}{R}$, $\frac{R_y}{R}$, $\frac{R_z}{R}$ sind, und $\mu = M \cos(RM)$ die minimale translatorische Geschwindigkeit der Verschiebung parallel zur augenblicklichen Schraubenachse, deren Gleichung (7) ist, bedeuten. (Für den Anfänger ist es sehr zu empfehlen, alle die den Lehrsätzen des § 65—73 entsprechenden kinematischen Sätze in extenso in Worte zu kleiden.)

Bei dieser Transformation der Lehrsätze der Statik in solche der Kinematik hat man nur, wie leicht ersichtlich ist, in Überein-

stimmung mit der in Capitel VII angewendeten Bezeichnung statt der Kräfte P, X, Y, Z zu setzen die Winkelgeschwindigkeiten w, w_x, w_y, w_z , und statt R, R_x, R_y, R_z einzuführen die resultierende Winkelgeschwindigkeit W bezüglich der Momentanachse, beziehungsweise deren Componenten W_x, W_y, W_z , ferner statt der Momente M_x, M_y, M_z, M_a der componentalen Kräfte P bezüglich der Achsen $xyz a$ einzusetzen die zu diesen Achsen parallelen Componenten v_x, v_y, v_z, v_a jener Geschwindigkeit v , die der Anfangspunkt O des Achsensystems infolge der alleinigen Rotation um die mit der Richtungslinie der Kraft P übereinstimmende Achse w besitzt; ferner ist das Moment $M_O^{(P)} = M$ der Kraft P bezüglich des Punktes O zu ersetzen durch v und das Hauptdrehungsmoment M zu ersetzen durch die aus allen componentalen Bewegungen resultierende Geschwindigkeit V des Punktes O und M_x, M_y, M_z, M_a zu substituieren durch die Componenten V_x, V_y, V_z, V_a dieser Geschwindigkeit V u. s. w.

Wie weiterhin aus den Entwicklungen dieses Paragraphs sich ebenfalls ergibt, lässt sich die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers auf unendlich viele Arten auch zurückführen auf zwei Rotationen um zwei gekreuzte Rotationsachsen R_1 und R_2' , welche, wenn die eine Achse R_1 durch den beliebigen Reductionspunkt O senkrecht zur Polarebene dieses Punktes geführt wird und dementsprechend als die Achse der zweiten Rotation R_2' die Charakteristik dieser Ebene fungiert, aufeinander senkrecht stehen, ferner ist, wenn $\mu = M \cos(RM) = V \cos(RV)$ wie oben die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung der augenblicklichen Schraubenchse in ihrer eigenen Richtung bedeutet, durch $W \cdot \mu = W_x V_x + W_y V_y + W_z V_z$ die Invariante der Bewegung des starren Körpers bestimmt u. s. w.

§ 74. Zusammensetzung paralleler Kräfte im Raume — Mittelpunkt der Kräfte — Kraftmoment bezüglich einer Ebene.

Sind die Richtungen der Kräfte P_1, P_2, P_3, \dots parallel, und zwar im allgemeinen theils gleichgerichtet, theils entgegengesetzt gerichtet, so ist es wie bei parallelen Kräften in der Ebene (siehe S. 408) vortheilhaft, irgend eine der beiden Richtungen als positive, die andere als negative Richtung anzunehmen und die nach der positiven Richtung wirkenden Kräfte als positive Kräfte, die anderen aber als negative in Rechnung zu bringen. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich die in dem beliebig gewählten Anfangspunkte O des Coordinatensystems (dem Reductionspunkte) angreifende, aus den nach dem Punkte O versetzt gedachten Kräften P_1, P_2, \dots resultierende Kraft R (die Reductionsresultante) der Richtung und Größe nach durch die

gebraische Summe ΣP aller Kräfte bestimmt. Bezeichnet man nun die Richtungswinkel der als positiv angenommenen Richtung $\alpha \beta \gamma$, so sind nicht nur die XYZ -Componenten der positiven Kräfte, sondern auch jene der negativen Kräfte durch die Gleichungen $X = P \cos \alpha$, $Y = P \cos \beta$, $Z = P \cos \gamma$ gegeben; denn ist P irgend eine der negativen Kräfte und p ihr absoluter Zahlwert, also $P = -p$, so ist z. B. (siehe S. 65)

$X = p \cdot \cos(xp) = p \cdot \cos(\pi - \alpha) = p \cdot -\cos \alpha = -p \cdot \cos \alpha = P \cdot \cos \alpha$ und da ebenso $(yp) = \pi - \beta$ und $(zp) = \pi - \gamma$ ist, so ist die Richtigkeit der obigen Behauptung nachgewiesen. Es treten demnach nun in den Ausdrücken $R_x R_y R_z M_x M_y M_z$ in den Gleichungen (2) und (3), S. 438, $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ als gemeinschaftliche Factoren auf, die vor das Summenzeichen gesetzt werden können, und es ist daher

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \Sigma X = \Sigma (P \cos \alpha) = \cos \alpha \cdot \Sigma P \\ R_y &= \Sigma Y = \Sigma (P \cos \beta) = \cos \beta \cdot \Sigma P \\ R_z &= \Sigma Z = \Sigma (P \cos \gamma) = \cos \gamma \cdot \Sigma P \\ M_x &= \Sigma (yZ) - \Sigma (zY) = \cos \gamma \cdot \Sigma (Py) - \cos \beta \cdot \Sigma (Pz) \\ M_y &= \Sigma (zX) - \Sigma (xZ) = \cos \alpha \cdot \Sigma (Pz) - \cos \gamma \cdot \Sigma (Px) \\ M_z &= \Sigma (xY) - \Sigma (yX) = \cos \beta \cdot \Sigma (Px) - \cos \alpha \cdot \Sigma (Py) \end{aligned} \right\} (1)$$

so, wie früher gezeigt wurde, $R = \Sigma P$.

Es sind nun nach § 73 folgende sich gegenseitig ausschließende Fälle zu unterscheiden:

a) Es ist $R = \Sigma P = 0$ und außerdem $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 0$, so dass die Werte von $M_x M_y M_z$ in den drei letzten Gleichungen (1) verschwinden, also

$$\left. \begin{aligned} \Sigma P &= 0 \\ \frac{\cos \alpha}{\Sigma (Px)} &= \frac{\cos \beta}{\Sigma (Py)} = \frac{\cos \gamma}{\Sigma (Pz)} \end{aligned} \right\} (2)$$

In diesem Falle, und zwar nur in diesem Falle, halten sich die parallelen Kräfte das Gleichgewicht. Es sind sohin nicht wie bei beliebigen Kräften im Raume (§ 73) sechs, sondern drei, nämlich die durch die drei Gleichungen (2) ausgedrückten Bedingungen für das Gleichgewicht paralleler Kräfte nothwendig und hinreichend.

Wirken z. B. alle Kräfte parallel zur x -Achse, so dass demnach $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = 0$ ist, so muss den Gleichungen (2) zufolge im Gleichgewichtszustande $\Sigma P = 0$, $\Sigma (Py) = 0$, $\Sigma (Pz) = 0$ sein.

Für den speciellen Fall, dass $\Sigma P = 0$, $\Sigma (Px) = 0$, $\Sigma (Py) = 0$ und $\Sigma (Pz) = 0$ ist, wird den Bedingungen $R = 0$, $M_x = 0$, $M_y = 0$,

$M_x = 0$ den Gleichungen (1) zufolge für jeden Wert des $\alpha \beta \gamma$ entsprechen, so dass sich die Kräfte auch dann das Gleichgewicht halten würden, wenn alle parallelen Richtungslinien derselben um ihre Angriffspunkte (xyz) in demselben Sinne um einen beliebigen Winkel gedreht würden oder, was auf das Gleiche hinauskommt, wenn mit Beibehaltung der Kräfte, ihrer Richtungen und ihrer Angriffspunkte das starre Punktsystem in eine beliebige andere Lage gebracht würde. Ein solches Gleichgewicht bezeichnet man als ein *astatisches Gleichgewicht*.

b) Ist $R = \Sigma P = 0$ und werden zudem die zwei Gleichungen $\frac{\cos \alpha}{\Sigma(Px)} = \frac{\cos \beta}{\Sigma(Py)}$ und $\frac{\cos \alpha}{\Sigma(Px)} = \frac{\cos \gamma}{\Sigma(Pz)}$ nicht oder wenigstens nicht beide zugleich erfüllt, so dass also $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} > 0$ ist, so resultiert dann, aber auch nur dann, aus den Kräften ein Kräftepaar, dessen in den Coordinatenebenen wirkende componentale Kräftepaare aus den Werten von $M_x M_y M_z$ der Gleichung (1) zu bestimmen sind.

c) Ist $\Sigma P \geq 0$, so haben die parallelen Kräfte jedenfalls eine Resultante, da die zweite, auf S. 441 in der Gleichung 5 aufgestellte Bedingung: $R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 0$, wie dies die Gleichungen (1) unmittelbar lehren, bei parallelen Kräften stets erfüllt wird, d. h. die Invariante eines beliebigen Systems paralleler Kräfte stets Null ist, so dass der Fall (d) des § 73 bei parallelen Kräften nie eintreten kann.

Die Größe und Richtung der Resultanten ist nach Früherem durch jene der Reductionsresultanten $R = \Sigma P$ bestimmt, und die Lage der Richtungslinie dieser resultierenden Kraft ist durch die Gleichungen (6), S. 441, analytisch bestimmt. Setzt man in diese Gleichungen die Werte aus (1) ein und dividirt die erste derselben durch $\cos \beta \cos \gamma \cdot \Sigma P$, die zweite durch $\cos \gamma \cos \alpha \cdot \Sigma P$ und die dritte durch $\cos \alpha \cos \beta \cdot \Sigma P$, so lassen sich diese Gleichungen der Richtungslinie der Resultierenden in folgender Form darstellen

$$\frac{\xi - \frac{\Sigma(Px)}{\Sigma P}}{\cos \alpha} = \frac{\eta - \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma P}}{\cos \beta} = \frac{\zeta - \frac{\Sigma(Pz)}{\Sigma P}}{\cos \gamma} \quad (3)$$

Anmerkung 1. Sowie die im Capitel II behandelte Lehre von Kräften, die auf denselben Angriffspunkt wirken, ihr (in jeder Beziehung vollständiges) Analogon in der Kinematik der rotierenden Bewegung um einen fixen Drehpunkt (§ 61) findet, so ist das kinematische Analogon des in diesem § 74 behandelten Systems paralleler Kräfte die im § 62 behandelte Bewegungsform, bei welcher die Bahnen aller Punkte parallel zu einer Ebene E sind, die zur Richtung $(s \parallel \gamma)$ dieser Kräfte senkrecht steht. Bei der Anwendung der in diesem Paragraph abgeleiteten Gleichungen auf diese Bewegungsform bedeuten dann $x y z$ die Cour-

dinaten irgend eines Punktes einer der parallelen Achsen der componentalen Rotationen, und P bedeutet die (je nach der Achsenrichtung positive oder negative) Winkelgeschwindigkeit ω dieser Rotation. Der Fall *a*) dieses Paragraphs 74 entspricht dem resultierenden Ruhezustande, *b*) einer resultierenden fortschreitenden Bewegung mit der Geschwindigkeit M , *c*) einer resultierenden Rotation um eine Drehungsachse, deren Gleichung (3) ist.

Jener Punkt $\xi \eta \zeta$, für welchen die Zähler der drei Brüche in (3) verschwinden, also für welchen

$$\xi = \frac{\Sigma(Px)}{\Sigma P}, \quad \eta = \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma P}, \quad \zeta = \frac{\Sigma(Pz)}{\Sigma P} \dots \quad (4)$$

ist, genügt den Gleichungen (3) für einen jeden beliebigen Wert des $\alpha \beta \gamma$; er bleibt also ein Punkt der Richtungslinie der Resultierenden, wenn man auch alle Richtungslinien der einzelnen Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$ um ihre ursprünglichen Angriffspunkte in demselben Sinne um denselben beliebigen Winkel dreht, so dass dadurch die Winkel $\alpha \beta \gamma$ für das Kräftesystem andere Werte annehmen. Jener Punkt der Richtungslinie, der diese Eigenschaft der Unabhängigkeit seiner Lage von den Kräfterichtungen hat, ist aber (siehe S. 380 und S. 409) als Mittelpunkt der parallelen Kräfte zu bezeichnen; die Gleichungen (4) bestimmen demnach die Coordinaten dieses Mittelpunktes der Kräfte.

Ändern sich alle Kräfte P in demselben Verhältnisse, so dass die Kraft P_1 den Wert $p_1 = k P_1$, P_2 den Wert $p_2 = k P_2 \dots$ u. s. w. annimmt, wo k für alle Kräfte denselben Wert hat, so hat der Mittelpunkt des neuen Kräftesystems $p_1 p_2 p_3 \dots$ die Coordinaten $\xi' \eta' \zeta'$, wo nach (4) $\xi' = \frac{\Sigma(p x)}{\Sigma p} = \frac{\Sigma(k P x)}{\Sigma(k P)} = \frac{k \Sigma(P x)}{k \Sigma P} = \frac{\Sigma(P x)}{\Sigma P} = \xi$ und ebenso $\eta' = \eta$, $\zeta' = \zeta$ ist; es ändert sich sonach der Mittelpunkt paralleler Kräfte nicht, wenn sich die Intensitäten aller parallelen Kräfte in demselben Verhältnisse ändern, er ist mit anderen Worten nicht von der absoluten, sondern nur von der relativen Größe der Kräfte abhängig.

Die Gleichungen (4) haben nicht nur, wie hier nachgewiesen wurde, für ein orthogonales, sondern auch für ein beliebiges schiefwinkliges räumliches Coordinatensystem $x' y' z'$ Giltigkeit; denn, wählt man, um dies für eine dieser Gleichungen, etwa für die Gleichung $\zeta' = \frac{\Sigma(P z')}{\Sigma P}$ nachzuweisen, ein zweites orthogonales Achsensystem $(x y z)$ mit demselben Anfangspunkte, dessen xy -Ebene mit der $x' y'$ -Ebene übereinstimmt, und bedeutet ν den Neigungswinkel der z' -Achse gegen die xy -Ebene, so ist offenbar $z = z' \sin \nu$ und für den Kräftemittelpunkt $\zeta = \zeta' \sin \nu$. Da nun zufolge der

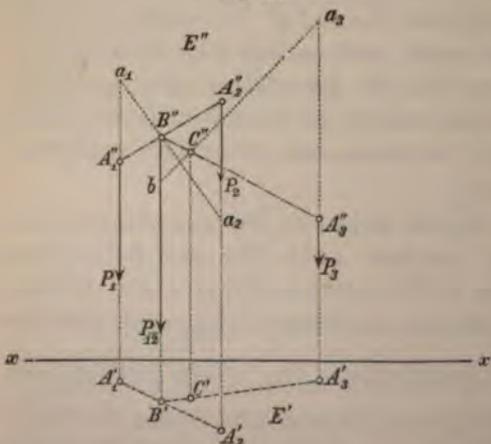
Gleichung (4) $\zeta = \frac{\Sigma(Pz)}{\Sigma P}$, daher auch $\zeta' \sin \nu = \frac{\Sigma(Pz' \sin \nu)}{\Sigma P} = \frac{\sin \nu \Sigma(Pz')}{\Sigma P}$ ist; so ist in der That $\zeta' = \frac{\Sigma(Pz')}{\Sigma P}$.

Die in den hier betrachteten Gleichungen vorkommenden Producte Px, Py, Pz , bezw. $R\xi = \xi \cdot \Sigma P, R\eta = \eta \cdot \Sigma P, R\zeta = \zeta \cdot \Sigma P$ aus der Kraft P , bezw. der Resultanten R , in eine der — rechtwinkligen oder schiefwinkligen — Coordinaten des unmittelbaren (directen) Angriffspunktes, bezw. des Kräftemittelpunktes, bezeichnet man als die Kräfte Momente bezüglich jener Coordinatenebene, zu der die betreffende der Coordinaten nicht parallel ist; so sind z. B. $Px, R\xi$ die Momente der Kräfte P, R in Bezug auf die yz -Ebene u. s. w.

Es drücken demnach die Gleichungen (4) folgendes Gesetz aus: Bei parallelen Kräften ist das Moment der resultierenden Kraft bezüglich einer beliebigen Ebene gleich der algebraischen Summe der Momente der einzelnen Componenten bezüglich derselben Momentenebene.

Auf graphischem Wege kann man parallele Kräfte im Raume im allgemeinen nach derselben Methode zusammensetzen und den Mittelpunkt dieser Kräfte in derselben Art bestimmen wie bei parallelen Kräften in der Ebene. Nur hat man sich die im Raume vorzunehmende Construction nach der in der descriptiven Geometrie meist gebräuchlichen Methode auf zwei fixe Ebenen E' und E'' , die auf einander senkrecht stehen, orthogonal projiziert zu denken.

Fig. 134.



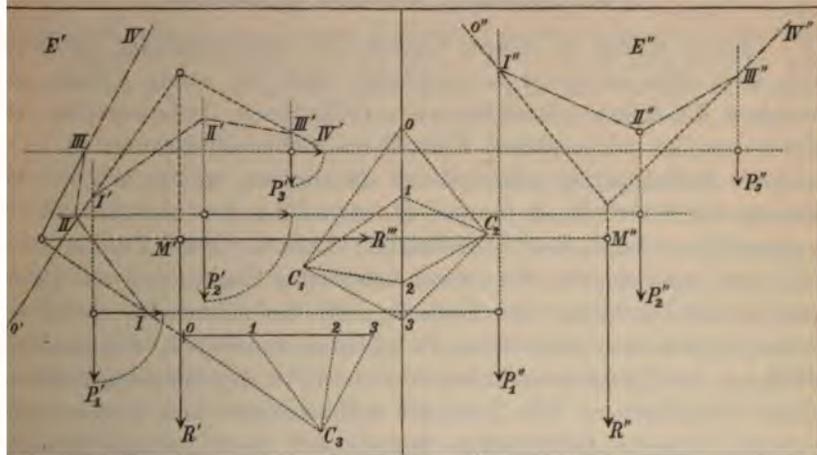
Wählt man nun die eine dieser Ebenen E' (Fig. 134) senkrecht zu den Kräften und die andere E'' parallel zu denselben (oder dreht man, was auf das Gleiche hinauskommt, die Kräfte richtungen um die Angriffspunkte so, dass dieselben vertical, also zur horizontalen Projectionsebene E' (Fig. 134) senkrecht und zur verticalen Projectionsebene E'' parallel wirken) und beachtet man, dass das Ver-

hältnis der Segmente einer beliebigen Strecke im Raume stets gleich ist dem Verhältnisse ihrer Projectionen auf dieselbe Ebene, so gelangt

an, wenn man zuerst nach der in der Fig. 109, S. 380 angedeuteten Methode zwei Kräfte P_1 und P_2 zusammensetzt, hierauf deren Resultierende P_{12} mit der Kraft P_3 zusammensetzt u. s. w., zu dem in g. 134 ersichtlich gemachten Constructionsverfahren, das keiner eiteren Auseinandersetzung bedarf. $A_1 A_2 A_3$ sind in dieser Figur die Angriffspunkte der Kräfte $P_1 P_2 P_3$, ferner ist $\overline{A_1'' a_1} = P_2$, $\overline{A_2'' a_2} = P_1$, $\overline{A_3'' a_3} = P_1 + P_2$, $\overline{B'' b} = P_3$ oder zum mindesten müssen diese Strecken $\overline{A_1'' a_1}$, $\overline{A_2'' a_2} \dots$ den Kräften $P_2, P_1 \dots$ direct proportional sein. B ist der Mittelpunkt der Kräfte P_1 und P_2 , C der Mittelpunkt der drei Kräfte $P_1 P_2 P_3$ u. s. w.

Bedient man sich aber, was bei einer größeren Zahl von Kräften gezeigt ist, statt dieser Methode bei der graphischen Zusammensetzung von Kräften und bei der Bestimmung ihres Mittelpunktes in der auf 408 und 410 erörterten Weise des Seilpolygons, so gelangt man zu dem in Fig. 135 dargestellten Constructionsverfahren, das gleichfalls einer weiteren Erläuterung bedarf. Die Projectionsebenen E' und E'' wähle man hier der Einfachheit halber beide parallel zu den gegebenen Kräften. $A_1 A_2 A_3 \dots$ (in der Figur durch die in der

Fig. 135.



entsprechenden Richtungslinie der Kraft eingezeichneten kleinen Ringe (gedeutet) seien hier wieder die Angriffspunkte der parallelen Kräfte $P_2 P_3 \dots$, die durch $\overline{01}, \overline{12}, \overline{23}$ dargestellt sind. Die Pole $C_1 C_2 C_3$ der Kräftepolygone sind in den entsprechenden Projectionsebenen beliebig gewählt. $o' I' II' III' IV'$ ist das dem Pole C_1 entsprechende Seilpolygon in der Ebene E' und die mit Hilfe desselben bestimmte Gerade R' ist die Projection der Richtungslinie der Resultanten auf die Ebene E' ; ebenso ist $o'' I'' II'' III'' IV''$ das dem

Pole C_2 in der Ebene E'' zugehörige Seilpolygon und die Gerade R'' die Projection der Richtungslinie der resultierenden Kraft auf die Ebene E'' . Dreht man nun behufs der Bestimmung des Kräftemittelpunktes in der Ebene E' die Richtungen der Kräfte und daher auch das Kräftepolygon $\bar{C}_1 O I 2 3$, und zwar am einfachsten um einen rechten Winkel, so gelangt man zu dem Kräftepolygon $\bar{C}_2 O I 2 3$ und zu dem Seilpolygon $O I I I I I I V$, das dem Pole C_2 entspricht, und in welchem $O I \perp O' I'$, $I I I \perp I' I I'$, $I I I I \perp I I' I I I'$ u. s. w. ist, so dass dasselbe leicht sofort (d. h. ohne vorhergehende Zeichnung des Kräftepolygons $\bar{C}_2 O I 2 3$) construiert werden kann. Die mit Hilfe dieses Seilpolygons bestimmte Gerade R'' schneidet die Gerade R' im Punkte M' , der die Projection des Kräftemittelpunktes M in die Ebene E' ist; demgemäß ist M' die in der Geraden R'' gelegene Projection des Kräftemittelpunktes auf die Ebene E'' .

Anmerkung 2. Betreffs der Zerlegung einer Kraft W in drei parallele Componenten im Raume $W_1 W_2 W_3$, deren Richtungslinien gegeben sind, sei auf Fig. 140 und S. 466 verwiesen.

D. Statik des nicht frei beweglichen starren Körpers.

§ 75. Einleitung. Einfache Maschinen.

Bisher wurde in diesem Capitel VIII stets entweder ausdrücklich oder stillschweigend vorausgesetzt, dass der starre Körper, auf welchen die Kräfte einwirken, ein vollkommen freibeweglicher ist, dass derselbe mit anderen Worten bei seiner Bewegung an keine anderen Bedingungen geknüpft ist als an jene, welche aus der Annahme der Starrheit, d. h. aus der Annahme der unveränderlichen gegenseitigen Lage der n materiellen Punkte dieses Punktsystems (Körpers) entspringen. Da jedem materiellen Punkte drei auf irgend ein an der Bewegung des Körpers nicht theilnehmendes räumliches Achsensystem sich beziehende Coordinaten zugehören, durch welche die Lage des Punktes bestimmt ist, so ist $3n$ die Anzahl der sämtlichen Coordinaten. Die Zahl der nothwendigen und hinreichenden zwischen diesen Coordinaten bestehenden Bedingungsgleichungen, welche die Starrheit zur nothwendigen Folge haben und diese auch umgekehrt voraussetzen, ist $3n - 6$; denn die unveränderliche gegenseitige Lage dreier nicht in einer Geraden gelegenen Punkte $A_1 A_2 A_3$ bedingt drei Gleichungen (etwa von der Form der letzten Gleichung (1) auf S. 339), welche ausdrücken, dass die Entfernung r_{23} der Punkte $A_2 A_3$, ferner die Distanz r_{21} der Punkte $A_2 A_1$ und die Distanz r_{13} der Punkte $A_1 A_3$ einen unveränderlichen Wert hat. Die weitere Bedingung der unveränderlichen relativen räumlichen Lage eines jeden der übrigen $(n - 3)$ materiellen Punkte A des Körpers in Bezug auf

Die Punkte $A_1 A_2 A_3$ setzt nun drei weitere von einander und von den anderen Gleichungen unabhängige Bedingungsgleichungen voraus, welche Gleichungen ausdrücken, dass die Entfernungen AA_1, AA_2, AA_3 konstante Werte besitzen. Somit ist die Gesamtzahl der für die Voraussetzung der Starrheit des ganzen Systems von n materiellen Punkten nothwendigen und hinreichenden Bedingungsgleichungen in der That $6 + (n - 3) \cdot 3 = 3n - 6$. Sonach sind bei einem freibeweglichen starren Körper von den $3n$ Coordinaten nur $3n - (3n - 6) = 6$ von der Starrheit unabhängige, also freie Coordinaten oder mit anderen Worten: es hat ein freibeweglicher starrer Körper sechs Grade der Freiheit, und dementsprechend sind auch für das Gleichgewicht sechs Gleichungen hinreichend.

Anmerkung. Dass die Zahl r der freien Coordinaten mit der Anzahl der nothwendigen und hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen stets übereinstimmen muss, ergibt sich schon aus folgender Erwägung: Mit Hilfe der $(3n - r)$ gegebenen Bedingungsgleichungen lassen sich von den $3n$ in der Gleichung (3), S. 317, welche das Princip der virtuellen Verschiebungen ausspricht, vorkommenden Variationen $\delta_{x1} \delta_{y1} \delta_{z1} \delta_{x2} \dots$ der Coordinaten der n Punkte $(3n - r)$ Variationen als lineare Functionen der r übrigen ausdrücken. Setzt man die so gefundenen Werte in die Gleichung für die virtuellen Verschiebungen ein und vereinigt die Glieder, welche dieselbe Variation einer von den r freien Coordinaten als Factor enthalten, in je einem Glied, so müssen in der so erhaltenen Gleichung die Coefficienten dieser r Variationen in dieser Gleichung Null werden, da diese Variationen frei wählbar sind und da demgemäß die Summe der r auf die eben erwähnte Art erhaltenen Glieder nur dann Null werden kann, wenn diese Coefficienten einzeln Null werden, wodurch man in der That r Gleichgewichtsbedingungen erhält.

Ist nun der starre Körper K nicht freibeweglich, d. h. sind die $3n$ Coordinaten der materiellen Punkte desselben außer an die oben erwähnten, durch die Starrheit bedingten $3n - 6$ Bedingungsgleichungen an weitere von einander und von der Starrheit unabhängige Bedingungsgleichungen geknüpft, so vermindert sich die Zahl der Freiheitsgrade der Bewegung und dementsprechend auch die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen um die Zahl dieser neuhinzutretenden Bedingungsgleichungen. Diese letzteren rühren stets von der Einwirkung anderer Körper auf den Körper K her, welche (siehe S. 316 und 317) durch die von ihnen herrührenden Widerstände W (Bedingungskräfte, Verbindungskräfte) einen Zwangszustand, dem der starre Körper K unterworfen ist, hervorrufen. Während nun, wie auf S. 372 nachgewiesen wurde, bei einem frei beweglichen starren Körper infolge der nothwendigen und hinreichenden sechs bekannten Gleichgewichtsbedingungen (1), S. 367 sich zwei Kräfte p und p' , von denen die eine als Kraft, die andere als Last bezeichnet sei, nur dann das Gleichgewicht halten können, wenn diese beiden Kräfte in derselben Geraden wirken und entgegengesetzt gleich sind, so kann bei einem nicht frei beweglichen Körper K infolge der hinzutretenden Wider-

stände W , welche einen veränderlichen Wert annehmen können, zwischen Kraft und Last auch innerhalb gewisser Grenzen das Gleichgewicht bei den mannigfachsten Richtungsunterschieden bestehen, wofern nur Kraft und Last den Körper im entgegengesetzten Sinne zu bewegen suchen, und wofern zwischen den Größen der Kraft und Last eine gewisse, von der Art des Zwangszustandes und von der Wahl der Richtungslinien abhängige Beziehung stattfindet, so dass man bei gegebener Last die Richtungslinie der das Gleichgewicht haltenden Kraft (oder aber die Größe derselben) zweckentsprechend innerhalb gewisser Grenzen beliebig wählen kann, und in diesem Sinne muss man einen jeden nicht frei beweglichen Körper, mag die Beschränkung der freien Beweglichkeit in welchem Umstände auch immer gelegen sein, als eine einfache Maschine bezeichnen und soviel Arten dieser einfachen Maschinen unterscheiden, als es Arten des Zwangszustandes, beziehungsweise der unfreien Beweglichkeit gibt. Hier sollen nur die wichtigsten besonderen Fälle dieser Art der Untersuchung unterzogen und hiebei zunächst von dem Reibungswiderstande abgesehen werden. — Nach Hinzufügung der Widerstände zu den sonst wirkenden äußeren und inneren Kräften kann eine jede solche einfache Maschine als ein frei beweglicher starrer Körper angesehen werden.

§ 76. **Statik des um einen fixen Punkt drehbaren oder in einem Punkte unterstützten Körpers.**

a) Ist ein Punkt O des starren Körpers fix, so dass dieser Punkt, mögen Kräfte welcher Art immer auf den Körper einwirken, seine Lage nicht ändert, demnach nur eine Rotation des Körpers um den Punkt O — den Drehpunkt — möglich ist (siehe § 61), so wird dieser Körper als ein um den Punkt O drehbarer Hebel (im weitesten Sinne des Wortes) bezeichnet. Bei einem solchen wird im Punkte O dem Systeme der auf diesen Punkt O des Körpers einwirkenden inneren und etwaigen äußeren Kräfte durch den Widerstand W (Reaction) des fixen Punktes stets das Gleichgewicht gehalten. Ist nun nicht nur der Punkt O in Ruhe, sondern auch alle anderen Punkte des Körpers, so müssen die auf den Körper wirkenden äußeren Kräfte und die in O wirksame Kraft W sich das (freie) Gleichgewicht halten, daher, wenn man ein dreiaxsiges orthogonales Achsensystem durch O hindurchlegt, die sechs Gleichungen erfüllt werden

$$\begin{aligned} W_x + \sum X &= 0, \quad W_y + \sum Y = 0, \quad W_z + \sum Z = 0 \\ M_x = \sum M_x^{(P)} &= 0, \quad M_y = \sum M_y^{(P)} = 0, \quad M_z = \sum M_z^{(P)} = 0 \end{aligned}$$

wenn durch W_x, W_y, W_z die Componenten des Widerstandes des Punktes O , durch X, Y, Z die Componenten der äußeren Kräfte und

durch $M_x^{(P)}, M_y^{(P)}, M_z^{(P)}$ die Momente der äußeren Kräfte bezüglich der Koordinatenachsen bezeichnet werden. Die Momente des Widerstandes W treten in die letzten Gleichungen deshalb nicht ein, weil der Angriffspunkt der Kraft W der Punkt O ist, also die Momente dieser Kraft W bezüglich der Koordinatenachsen Null sind. Die drei ersten Gleichungen lehren, dass im Ruhezustande des Körpers

$$W_x = -\Sigma X, W_y = -\Sigma Y, W_z = -\Sigma Z \quad (1)$$

ist, dass also der Widerstand W des fixen Punktes O jener Resultanten R (Gleichung (2), S. 438, entgegengesetzt gerichtet und an Größe gleich ist, die sich ergeben würde, wenn alle äußeren Kräfte ohne Änderung der Größe und Richtung nach dem Punkte O versetzt würden, welche Kraft R man als den statischen Druck auf den fixen Punkt O bezeichnet.

Sollte in einem besonderen Falle $R = 0$ sein, so erleidet der fixe Punkt, wenn der Körper ruht, keinen Druck, und es ist dann auch $W = 0$.

Da also diese in O wirksame Reductionsresultante R (s. S. 431) durch den Widerstand W stets aufgehoben wird, so sind die notwendigen Gleichgewichtsbedingungen bestimmt durch die drei Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \Sigma M_x^{(P)} = \Sigma (yZ - zY) = 0 \\ M_y &= \Sigma M_y^{(P)} = \Sigma (zX - xZ) = 0 \\ M_z &= \Sigma M_z^{(P)} = \Sigma (xY - yX) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

oder mit einem Worte, es muss $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$, d. i. das Hauptdrehungsmoment M für den Drehpunkt O Null sein, es müssen sich also die auf S. 431 behandelten Kräftepaare $P_1 - P_1, P_2 - P_2$ u. s. w. das Gleichgewicht halten. Die Gleichungen (2) drücken die Bedingung aus, dass, wenn sich die Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$ das Gleichgewicht halten, die algebraischen Summen der Drehmomente der Kräfte bezüglich dreier beliebiger durch den Drehpunkt O geführten orthogonalen Achsen notwendigerweise gleich Null sein müssen. Wenn Gleichgewicht stattfindet, so verschwindet demnach die Kräftemomentensumme für eine jede durch den Drehpunkt geführte Achse.

Dass übrigens die drei Gleichungen (2) für das Gleichgewicht auch hinreichend sind, dies lehren die aus den Gleichungen (2) im § 64, S. 369 abgeleiteten Folgerungen.

Den drei Gleichgewichtsbedingungen entsprechen im vorliegenden Falle auch drei Freiheitsgrade, denn es treten zu den $3n - 6$ Bedingungsgleichungen, welche durch die Starrheit bedingt sind, noch

weitere drei Bedingungsgleichungen hinzu, welche ausdrücken, dass die drei Coordinaten des fixen Punktes einen unveränderlichen Wert haben, so dass von den $3n$ -Coordinaten der materiellen Punkte nur $3n - (3n - 6 + 3) = 3$ Coordinaten freie Coordinaten sind. Im vorliegenden Falle bestehen daher drei Freiheitsgrade.

Wirken alle Kräfte in derselben den fixen Punkt O enthaltenden Ebene, die etwa zur xy -Ebene gewählt sei, so ist jedes $z = 0$ und $Z = 0$, so dass den beiden ersten Gleichungen in (2) durch die Bedingung, dass alle Kräfte in dieser Ebene wirken, schon genügt wird und daher bloß eine einzige Gleichgewichtsbedingung nothwendig und hinreichend ist, nämlich

$$M_z = \Sigma M_z^{(P)} = \Sigma M_O^{(P)} = \Sigma (xY - yX) = 0 \quad (3)$$

d. h. es muss, wenn Gleichgewicht stattfindet, die algebraische Summe der Drehmomente, d. i. der Momente der Kräfte bezüglich des Drehpunktes O gleich Null sein — und umgekehrt.

So ist z. B. in Fig. 136, wenn O der Drehpunkt ist, im Zustande des Gleichgewichtes $P_1 d_1 - P_2 d_2 - P_3 d_3 + P_4 d_4 = 0$. Zwei

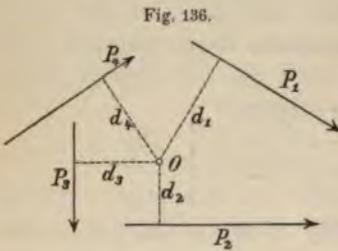


Fig. 136.

in derselben Ebene wirkende Kräfte P_1 und P_2 (Kraft und Last) halten sich demnach dann, aber auch nur dann, das Gleichgewicht, wenn die Drehmomente der beiden Kräfte entgegengesetzt gleich sind, sich also die Kräfte umgekehrt verhalten wie ihre Hebelarme $P_1 : P_2 = d_2 : d_1$ (für den Drehpunkt als Momentenmittelpunkt). Der Ent-

decker dieses einfachen Hebelgesetzes ist Archimedes von Syracus (geb. 287 v. Chr., gest. 212 v. Chr.), und zwar ist dies Hebelprincip in seinem Buche „De aequiponderantibus“ zuerst ausgesprochen.

In dem hier behandelten Falle des Gleichgewichtes der in derselben Ebene wirkenden Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$ ist offenbar, wenn das diesen Kräften entsprechende Kräftepolygon ein geschlossenes ist, auch das zugehörige Seilpolygon geschlossen; ist dagegen das Kräftepolygon offen, so muss sich im Gleichgewichtsfalle aus dem Seilpolygon eine Richtungslinie der Resultierenden ergeben, die durch den Drehpunkt O hindurchgeht.

Zwei Kräftesysteme $P_1 P_2 P_3 \dots$ und $P_1' P_2' P_3' \dots$ sind dann aber auch nur dann äquivalent, wenn sie demselben dritten Kräftesystem das Gleichgewicht zu halten im Stande sind; es muss demnach den Gleichungen (2) entsprechend für die beiden äquivalenten Kräftesysteme

$$\left. \begin{aligned} \Sigma M_x^{(P)} &= \Sigma M_x^{(P')} \\ \Sigma M_y^{(P)} &= \Sigma M_y^{(P')} \\ \Sigma M_z^{(P)} &= \Sigma M_z^{(P')} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

sein; d. h. es müssen die Momentensummen für drei durch den Drehpunkt geführte orthogonale Achsen bei beiden Kräftesystemen dieselben sein. Soll daher eine einzige Kraft S dem gegebenen Kräftesystem $P_1 P_2 P_3 \dots$ äquivalent sein, und sind durch $M_x M_y M_z$ die Momente dieser Kraft bezüglich der drei Coordinatenachsen und durch M das Moment derselben für den Drehpunkt bezeichnet, so ist

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sum M_x^{(P)}, \quad M_y = \sum M_y^{(P)}, \quad M_z = \sum M_z^{(P)} \\ M &= M_o^{(S)} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

d. h. es ist das Moment der Kraft S bezüglich jeder der drei Achsen gleich der Momentensumme der Kräfte P bezüglich derselben Achse. Durch diese Gleichungen ist in bekannter Weise die durch O hindurchzulegende Ebene bestimmt, deren Normale die Richtungscosinus $\frac{M_x}{M}, \frac{M_y}{M}, \frac{M_z}{M}$ besitzt, und in welcher die Kraft S wirkt; die Richtungslinie derselben lässt sich zwar in dieser Ebene willkürlich wählen (nur nicht durch den Punkt O), es ist dann aber durch das Drehungsmoment M die Größe dieser Kraft bestimmt. Nimmt man nun diese Richtungslinie in einem der Längeneinheit gleichen Abstände von dem Drehpunkte O an, so ist offenbar $M = S$, d. h. die Größe dieser äquivalenten Kraft S bestimmt das Hauptdrehungsmoment für den Drehpunkt.

Die Äquivalenz des Kräftesystems $P_1 P_2 \dots$ und des Kräftesystems $P_1' P_2' \dots$, bzw. der Kraft S , die aus den Gleichungen (2) gefolgert wurde, bezieht sich aber nur auf die Ersetzbarkeit bezüglich der Bewegungszustände, in keiner Weise bezüglich des Druckes auf den fixen Punkt O , der in beiden Fällen ein verschiedener sein kann.

Wirken die Kräfte P und P' in derselben durch O gelegten Ebene, z. B. in der xy -Ebene, so ist $M_x^{(P)} = M_x^{(P')} = 0$ und $M_y^{(P)} = M_y^{(P')} = 0$, daher die Äquivalenzbedingung durch die einzige Gleichung

$$\sum M_z^{(P)} = \sum M_z^{(P')}, \quad \text{bzw.} \quad M_z = \sum M_z^{(P)}$$

ausgedrückt, d. h. es genügt für die Äquivalenz, dass die Momentensumme bezüglich des Drehpunktes bei beiden Kräftesystemen dieselbe oder dass das Drehungsmoment M_z der äquivalenten Einzelkraft S dieser Momentensumme gleich ist. Haben demnach zwei in dieser Ebene wirkende Kräfte S und P das gleiche Drehungsmoment, so sind sie stets äquivalent, was sich auch leicht direct nachweisen lässt, wenn man etwa die Kraft S in zwei Kräfte, nämlich in die Kraft P und eine zweite in O angreifende Kraft Q zerlegt, ferner den bekannten Momentensatz (4) S. 389 für den Momentenpol O in Anwendung bringt und hiebei beachtet, dass $M_o^{(Q)} = 0$ ist.

Man kann mit Hilfe dieser Sätze jede Kraft, bezw. jedes Kräftesystem auf einen beliebigen Arm d reduciren, d. h. durch eine äquivalente Kraft S mit dem Hebelarme d ersetzen, wobei sowohl die Richtung als die Größe von d beliebig gewählt werden kann, es muss nur $Sd = M_o^{(P)}$, bezw. $Sd = \Sigma M_o^{(P)}$ sein. Für $d = 1$ ist $M_o^{(P)} = S$, bezw. $\Sigma M_o^{(P)} = S$, so dass die Bedeutung des Drehungsmomentes $M_o^{(P)}$, bezw. der Momentensumme $\Sigma M_o^{(P)}$ auch durch jene der äquivalenten Kraft S bestimmt ist.

b) Ist der Punkt O nicht fix im strengen Sinne des Wortes, sondern etwa der Körper in dem Punkte O durch eine fixe Ebene (die xy -Ebene) unterstützt, so wird jede zu dieser Ebene im Punkte O senkrecht wirkende Kraft durch den entgegengesetzt gerichteten Widerstand W der Ebene, dessen Richtung zur z -Achse parallel ist, aufgehoben. Es tritt dann zu den äußeren Kräften diese Kraft W hinzu, und von den sechs Gleichgewichtsbedingungen wird die Gleichung $W + \Sigma Z = 0$ stets erfüllt, so dass dann nur die fünf übrigbleibenden Bedingungen nothwendig und hinreichend sind, nämlich

$$\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma M_x^{(P)} = 0, \Sigma M_y^{(P)} = 0, \Sigma M_z^{(P)} = 0.$$

Es müssen mit anderen Worten alle äußeren Kräfte eine Resultierende haben, deren Angriffspunkt O und deren Richtung senkrecht zur Unterstützungsebene ist.

In diesem Falle bestehen auch fünf Grade der Freiheit, denn zu den die Starrheit bedingenden $(3n - 6)$ Gleichungen tritt nur noch die Bedingung hinzu, derzufolge der Unterstützungspunkt O in der xy -Ebene verbleiben, also die z -Coordinate desselben Null sein soll, so dass von den $3n$ -Coordinationen $3n - (3n - 6 + 1) = 5$ freie Coordinationen sind.

Ist der Widerstand der Ebene nur ein einseitiger und wird die Richtung desselben zur positiven Richtung der z -Achse gewählt, so muss offenbar noch die Bedingung zu den fünf eben erwähnten Gleichgewichtsbedingungen hinzutreten, dass $\Sigma Z \leq 0$ ist, da ja W nur einen positiven Wert haben kann.

Das Gesagte gilt offenbar auch für den Fall, dass die Unterstützungsebene gekrümmt ist, wofür nur die Berührungsebene dieser Fläche für die jeweilige Lage des Punktes zur xy -Ebene gewählt wird.

c) Ist ein Punkt O des Körpers genöthigt, sich längs einer geraden Linie — die zur x -Achse gewählt sei — oder längs einer Curve, deren Tangente für den Punkt O die x -Achse ist, sich zu bewegen, so können die y - und z -Componenten des Widerstandes W , der dann zur x -Achse senkrecht wirken muss, im allgemeinen stets solche Werte W_y und W_z annehmen, welche die Gleichungen $\Sigma Y + W_y = 0$,

$W_s = 0$ befriedigen, und es sind demnach für das Gleichgewicht nur die vier Gleichungen

$$\sum X = 0, \sum M_x^{(P)} = 0, \sum M_y^{(P)} = 0, \sum M_z^{(P)} = 0$$

hinreichend.

Da zufolge der Voraussetzung der Punkt O in der vorgeschriebenen Bahn verbleiben, also den beiden Gleichungen dieser Bahn genügen soll, so sind zu den bekannten $(3n - 6)$ Bedingungsgleichungen zwei weitere hinzuzufügen, so dass sich in unserem Falle $(3n - 6 + 2) = 4$ freie Coordinaten ergeben.

Statik des um eine fixe Achse drehbaren Körpers und andere einfache Fälle der beschränkten Beweglichkeit.

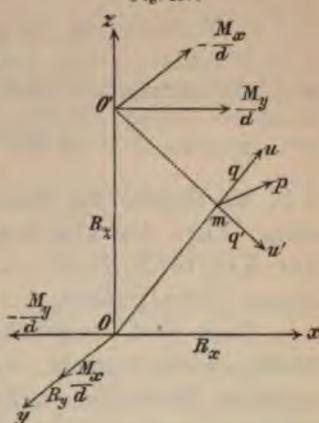
Es seien zwei oder mehrere in derselben Geraden liegende Punkte des Körpers (Hebels mit fixer Achse im weiteren Sinne des Wortes) fix, so dass nur eine Rotation um diese Gerade — die Drehachse — möglich ist (s. § 60). O und O' (Fig. 137) seien die fixen Punkte und $OO' = d$ die Entfernung.

In diesem Falle wird eine jede Kraft, deren Richtungslinie mit der Drehachse OO' in derselben Ebene gelegen ist, durch den Widerstand der fixen Punkte O und O' aufgehoben, denn wirkt diese Kraft p längs der Achse OO' , so kann man dieselbe ohneweiters nach einem der fixen Punkte O und O' verlegen, schneidet aber die Richtungslinie die Achse OO' oder ist zu derselben parallel, so kann man

an irgend einen außerhalb der Achse OO' gelegenen Punkt m derselben Ebene als Angriffspunkt der Kraft p ansehen und die Kraft p in zwei Komponenten q und q' zerlegen, deren Richtungen u und u' die Richtungen der Schenkel desjenigen der vier durch die Geraden Om und Om' gebildeten Winkel übereinstimmen, in dessen Ebene die Richtung der Kraft p fällt; versetzt man nun diese Komponenten q und q' vom Punkte m nach den in ihren Richtungen gelegenen fixen Punkten O und O' , so ersieht man sofort, dass die Resultierende p daher auch deren Resultierende p in der That durch den Widerstand der fixen Punkte aufgehoben wird.

Nimmt man den Punkt O zum Anfangspunkte eines orthogonalen Koordinatensystems, dessen z -Achse die Richtung von O nach O' hat, so

Fig. 137.



werden von den (s. S. 434) einem beliebigen auf den Körper einwirkenden Kräftesystem äquivalenten drei Kräften $R_x R_y R_z$ und den drei Kräftepaaren mit den Momenten $M_x M_y M_z$ nicht nur die in O wirkenden Kräfte $R_x R_y R_z$ durch den Widerstand von O aufgehoben, sondern auch die Kräftepaare, deren Achsen M_x und M_y sind, unwirksam gemacht; denn das Kräftepaar vom Momente M_x kann ersetzt werden durch ein Kräftepaar, welches aus den zur y -Achse parallelen Kräften $\frac{M_x}{d}$ und $-\frac{M_x}{d}$ besteht, von denen die erste in O , die zweite in O' wirkt, und das Kräftepaar M_y ist ersetzbar durch die zur x -Achse parallelen, in O und O' wirksamen Kräfte $-\frac{M_y}{d}$ und $\frac{M_y}{d}$, welche Kräfte durch den Widerstand von O , bezw. O' , aufgehoben werden (s. Fig. 137).

Es bleibt sonach von allen den — einem beliebigen auf den Körper einwirkenden Kräftesystem $P_1 P_2 P_3 \dots$ äquivalenten — Kräften (bezw. Kräftepaaren) $R_x R_y R_z, M_x M_y M_z$ nur das Kräftepaar übrig, dessen Achse die Rotationsachse ist, und dessen Moment

$$M_z = \Sigma M_z^{(P)} = \Sigma (xY - yX)$$

ist. Soll demnach Gleichgewicht stattfinden, so muss

$$\Sigma M_z^{(P)} = \Sigma (xY - yX) = 0 \quad (5)$$

d. h. die Summe der Momente aller Kräfte bezüglich der Rotationsachse, kurz die algebraische Summe der Drehungsmomente der Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$ gleich Null sein. Dies ist das bekannte Hebelgesetz.

Dass auch umgekehrt, wenn diese Momentensumme Null ist, Gleichgewicht herrscht, ergibt sich schon aus der im § 64 (S. 369) geführten Deduction, welcher zufolge aus der letzten Gleichung (5) gefolgert werden kann, dass $w \cdot \Sigma (m r^2)$ den Wert Null beibehält, wofern der Körper ursprünglich ruhend angenommen wird, dass also $w = 0$ bleibt, der Ruhezustand demnach nicht geändert wird.

Es ist demzufolge für einen um eine fixe Achse rotierenden Körper nur eine einzige, nämlich die durch die Gleichung (5) ausgedrückte Gleichgewichtsbedingung nothwendig und hinreichend.

In der That besteht in diesem Falle auch nur ein einziger Grad der Freiheit, wie sich schon daraus ergibt, dass die Bewegung eines um eine fixe Achse rotierenden Körpers (siehe S. 347) schon durch die Bewegung eines einzigen Punktes, etwa irgend eines Punktes E , der die Entfernung l von der Achse hat, bestimmt ist, und da dieser Radius vector l sich nicht ändert, so kann man als einzige freie (veränderliche) Coordinate den von der Lage E , welche der ge-

alte Punkt E zur Zeit $t = 0$ besitzt, an gerechneten Weg dessen, d. i. den Drehungswinkel $\varphi = \text{arc } E, E$, ansehen.

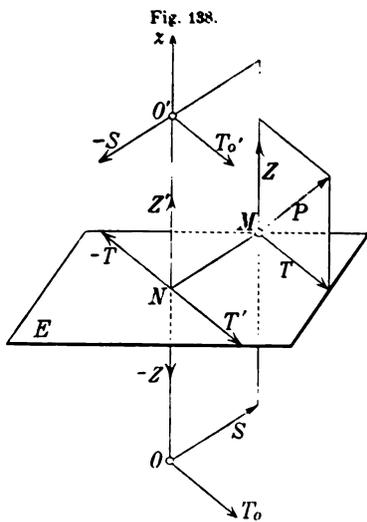
Der Druck, der im Ruhezustande des Körpers auf die fixen Punkte O und O' [wofern nur zwei solche fixe Punkte (Zapfen) angenommen werden] stattfindet, und der als statischer Druck berechnet sei, ergibt sich sofort aus der obigen Deduction. Bezeichnet man die x - und y -Componente desselben für den Punkt O , bezw. O' durch X, Y , bezw. X', Y' , so ist (siehe Fig. 137)

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= R_x - \frac{M_y}{d} = \Sigma X - \frac{\Sigma(zX - xZ)}{d} \\ Y_0 &= R_y - \frac{M_x}{d} = \Sigma Y - \frac{\Sigma(yZ - zY)}{d} \\ X_{0'} &= \frac{M_y}{d} = \frac{\Sigma(zX - xZ)}{d} \\ Y_{0'} &= -\frac{M_x}{d} = \frac{\Sigma(zY - yZ)}{d} \end{aligned} \right\} (6)$$

und außerdem wirkt längs der Rotationsachse die Kraft $R_z = \Sigma Z$.

Um im Falle des Gleichgewichtes den Einfluss einer einzelnen Kraft P (Fig. 138), die im beliebigen Punkte M des Körpers angreift, auf die fixen Punkte O und O' der fixen z -Achse, mit anderen Worten, um den von dieser Kraft P herrührenden Druck auf die beiden Zapfen O und O' zu ermitteln, kann

an folgendermassen vorgehen: Man zerlege die Kraft P in der auf S. 70 auseinandergesetzten und in Fig. 138 veranschaulichten Weise in die beiden Componenten Z und T , von welchen die erstere parallel der Rotationsachse parallel, die letztere senkrecht gegen diese normal ist, so dass $Z = P \cos(\alpha P)$ und $T = P \sin(\alpha P) = P \sqrt{X^2 + Y^2}$ ist. N sei jener Punkt der Rotationsachse, in welchem die durch M zur Rotationsachse senkrecht gelegte Ebene E diese Achse schneidet. Fügt man zu den beiden Componenten Z und T der in Betracht gezogenen Kraft P zwei Paare von zu Z , bezw. T parallelen Gegenkräften, die sämtlich auf den Punkt M einwirken, nämlich Z' und $(-Z)$ und T' und $(-T)$ hinzu, so wird, wofern $Z' = Z$, $T' = T$ angenommen wird, an der Wirkung des Kräftesystems nichts



ändert, da sich Z' und $(-Z)$ und ebenso T' und $(-T)$ im Punkte N im Gleichgewicht halten. Es ist sonach die Kraft P äquivalent dem Kräftesystem, das aus den Kräften Z' , T' und aus den beiden Kräftepaaren $(Z, -Z)$ und $(T, -T)$ besteht. Die Kraft Z' erzeugt einen Druck in der Richtung der Rotationsachse, und es resultiert aus den den einzelnen Kräften P entsprechenden

Kräften Z' der früher betrachtete, in der Achsenrichtung herrschende Druck (bezw. Zug) $R_z = \Sigma Z$. Die zweite Kraft T' lässt sich zerlegen in zwei zu T parallele, also zur Achse z normale Componenten T_o und $T_{o'}$, die in O und O' wirken, deren Größe sich bekanntlich aus der Gleichung $\frac{T_o}{NO'} = \frac{T_{o'}}{ON} = \frac{T'}{OO'} = \frac{T}{d}$ (siehe Gleichung 4, S. 378) bestimmen lässt. Das Kräftepaar $(Z, -Z)$ lässt sich ersetzen durch ein in der Ebene $OO'M$ dieses Kräftepaares wirkendes äquivalentes Kräftepaar $(S, -S)$, dessen Arm OO' ist, und dessen Kräfte sonach zu NM parallel wirken, wofern S der Gleichung $Z \cdot \overline{NM} = S \cdot \overline{OO'} = S \cdot d$ genügt. Die einzelnen Kräftepaare $(T, -T)$ deren Ebene zur Drehachse normal ist, und deren Momentensumme im Zustande des Gleichgewichtes $M_z = \Sigma M_z^{(T)} = 0$ ist, sind ohne Einfluss auf die Zapfen O und O' . Demgemäß resultiert infolge des Einflusses der Kraft P aus den in O angreifenden Kräften $T_{o'}$ und $(-S)$ ein zur Achse z normaler Druck auf den Zapfen O' und aus den Kräften S und T_o der gleichfalls zur Rotationsachse normale Druck auf den Zapfen O . Aus allen X , bezw. Y -Componenten sämtlicher Kräfte S und T_o , die den einzelnen Kräften P entsprechen, setzt sich zusammen die Kraft X_o , bezw. Y_o der Gleichung (6) u. s. w.

Findet eine Rotation statt, so kommt zu diesem statischen Druck, wie in der Dynamik gezeigt werden wird, im allgemeinen noch ein kinetischer Druck in den Punkten O und O' hinzu. Dies gilt auch von den in § 76 behandelten Fällen, wofern der Körper in Bewegung begriffen ist.

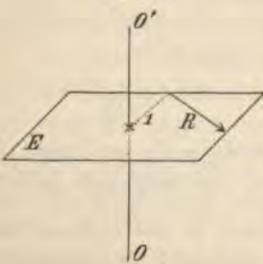
Aus der Gleichung (4) folgt auch sofort, dass zwei Kräftesysteme $P_1 P_2 P_3 \dots$ und $P_1' P_2' P_3' \dots$ bei einem um eine fixe Achse rotierenden Körper dann äquivalent sein werden, wenn

$$\Sigma M_z^{(P)} = \Sigma M_z^{(P')} \quad (7)$$

d. h. wenn die algebraische Summe der Drehungsmomente bei beiden Kräftesystemen dieselbe ist — und umgekehrt. Es sind demnach zwei beliebige Kräfte von gleichem Drehungsmoment äquivalent, ferner ist jedes Kräftesystem äquivalent einer beliebigen Einzelkraft R , deren Moment M_z bezüglich der Rotationsachse gleich ist der algebraischen Summe der Drehungsmomente der Kräfte dieses Kräftesystems, also

$$M_z = M_z^{(R)} = \Sigma M_z^{(P)} \quad (8)$$

Fig. 139.



Nimmt man die Richtungslinie dieser äquivalenten Kraft R (Fig. 139) in einer beliebigen (zur z -Achse senkrechten) Rotationsebene E in einem der Längeneinheiten gleichen Abstände von der Drehachse an, so ist der letzten Gleichung zufolge die Größe R dieser äquivalenten Kraft der Summe der Drehungsmomente gleich $R = \Sigma M_z^{(P)}$, weshalb man diese durch die

raft R dargestellte Summe auch kurzweg als das resultierende Drehungsmoment bezeichnet.

Die Äquivalenz in allen diesen Fällen erstreckt sich, wie aus dem oben Gesagten zu ersehen ist, nur auf die Art der durch die äquivalenten Kräfte, beziehungsweise Kräftesysteme beeinflussten Bewegung, nicht aber im allgemeinen auf den durch die Kräfte in den Punkten O und O' hervorgerufenen Druck, der bei zwei der Gleichung (7), bzw. (8) entsprechenden äquivalenten Kräftesystemen ein verschiedener sein kann.

b) Ist der Körper um eine Achse (die z -Achse) drehbar, aber zugleich diese Achse in ihrer Richtung verschiebbar, so dass eine schraubenförmige Bewegung des Körpers um diese Achse (die z -Achse) möglich ist, wie es z. B. der Fall ist, wenn ein massiver Cylinder in einem entsprechenden feststehenden Hohlcylinder (einer cylindrischen Hülse, deren innere cylindrische Fläche mit der äußeren Mantelfläche des massiven Cylinders genau übereinstimmt) beweglich ist, so bedarf es nach dem oben Gesagten keiner weiteren Auseinandersetzung, um sofort erkennen zu lassen, dass im Ruhezustande zu der Gleichgewichtsbedingung (5), welche die Rotation ausschliesst, noch die Bedingung $R_z = \Sigma Z = 0$, welche zur Verhinderung einer Verschiebung des Schwerpunktes in der Richtung der z -Achse nothwendig ist, hinzutreten muss, so dass die nothwendigen und hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen

$$\left. \begin{aligned} M_z &= \Sigma M_z^{(P)} = \Sigma (xY - yX) = 0 \\ R_z &= \Sigma Z = 0 \end{aligned} \right\} (9)$$

und die nothwendigen und hinreichenden Äquivalenzbedingungen für zwei Kräftesysteme $P_1 P_2 \dots$ und $P'_1 P'_2 \dots$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma M_z^{(P)} &= \Sigma M_z^{(P')} \\ \Sigma Z &= \Sigma Z' \end{aligned} \right\} (10)$$

sind.

Aus R_x und R_y und aus den Werten von M_x und M_y lässt sich auch hier, wie früher, der statische Druck auf die Achse, beziehungsweise auf den beweglichen Körper zu dieser Schraubenbewegung nöthigenden feststehenden Körper berechnen. Von den zwei hier bestehenden Freiheitsgraden (bzw. freien Coordinaten) bezieht sich der erste auf die Rotation um die Achse und der zweite auf die Verschiebung parallel zur Achse.

c) Ist ein Körper in zwei Punkte O und O' oder in mehreren an derselben Achse OO' — der x -Achse — gelegenen Punkten durch eine fixe Ebene — die xy -Ebene — unterstützt, die etwa nur einen einseitigen normalen Widerstand nach der positiven Richtung der z -Achse

zu äußern vermag, so können zu den äußeren auf den Körper einwirkenden Kräften $P_1 P_2 \dots$, wenn von der Reibung abgesehen wird, nur noch hinzutreten die mit der positiven z -Achse gleichgerichteten Widerstandskräfte W und W' in den Punkten O und O' , deren Resultierende W'' auch mit der positiven z -Achse gleichgerichtet ist, und zwar muss die Richtungslinie der letzteren Kraft W'' in der xz -Ebene zwischen O und O' gelegen sein, was offenbar auch der Fall sein muss, wenn etwa zwischen O und O' noch weitere Unterstützungspunkte sich befinden. Soll demnach Gleichgewicht stattfinden, so müssen alle Kräfte $P_1 P_2 \dots$ eine Resultierende R ergeben, deren Richtungslinie mit jener von W'' übereinstimmt, also in der xz -Ebene zwischen O und O' gelegen ist, deren Momente M_x und M_z bezüglich der x - und z -Achse sonach Null sind, und die der Kraft W'' entgegengesetzt gleich ist, sonach die negative Richtung der z -Achse hat, wenn nicht etwa W und W' , daher auch R Null ist. Bezeichnet man demnach die Entfernung OO' durch d und nimmt die Richtung von O nach O' zur positiven Richtung der x -Achse und O zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Achsensystems an, so muss im Zustande des Gleichgewichtes

$$R_x = 0, R_y = 0, M_x = M_x^{(R)} = 0, M_z = M_z^{(R)} = 0$$

sein, ferner muss $R_x = \Sigma Z \leq 0$ sein, und schließlich muss das Moment der resultierenden Kraft bezüglich der y -Achse, d. i. M_y zwischen 0 und $(-R_x) \cdot d$ gelegen oder einem dieser Werte gleich sein, sonach

$$0 \leq M_y \leq (-\Sigma Z) \cdot d$$

sein, wo $M_x M_y M_z R_x$ u. s. w. durch die Gleichungen (2) und (3) des § 73 (S. 438) gegeben sind. Aber auch in allen anderen Fällen, in welchen zwei Punkte O und O' eines starren Körpers gezwungen sind, sich in vorgeschriebenen Flächen F und F' zu bewegen, treten zu den die Starrheit bedingenden $3n - 6$ Bedingungsgleichungen die Gleichung der Fläche F für die Coordinaten des Punktes O und jene von F' für die Coordinaten des Punktes O' hinzu, so dass stets infolge der $3n - 6 + 2 = 3n - 4$ Bedingungsgleichungen von den $3n$ -Coordinaten der Punkte nur $3n - (3n - 4) = 4$ freie Coordinaten sind. Demgemäß bestehen auch vier Gleichgewichts-Bedingungsgleichungen, und zwar im obigen besonderen Falle $R_x = 0, R_y = 0, M_x = 0, M_z = 0$.

d) Sind zwei Punkte O und O' des Körpers, die sich in einer Geraden — der x -Achse — befinden, gezwungen, längs dieser Geraden sich zu bewegen, wobei übrigens der Körper sonst freibeweglich ist, so können die zur vorgeschriebenen Bahn — der x -Achse — normalen Widerstände W_o und $W_{o'}$ eine beliebige Y -Componente Y_o bzw. $Y_{o'}$ und eine beliebige Z -Componente Z_o , bzw. $Z_{o'}$ haben;

Wählt man den Punkt O zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Achsen-
systems und bezeichnet OO' durch a , so ist $M_x^{W_0} = M_y^{W_0} = M_z^{W_0} = 0$,
wegen (s. Gl. 6, S. 72) $M_x^{(W_0')} = 0$, $M_y^{(W_0')} = -a Z_0'$, $M_z^{(W_0')} = a Y_0'$,
sodass die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen gemäß $R_x =$
 0 , $R_y + Y_0 + Y_{0'} = 0$, $R_z + Z_0 + Z_{0'} = 0$, $M_x = 0$, $M_y - a Z_0' = 0$,
 $+ a Y_0' = 0$. Von diesen Gleichungen sind nur die beiden Gleichungen $R_x = 0$, $M_x = 0$ von den Widerständen unabhängig. Die
übrigen Gleichungen können dazu dienen die Componenten Y_0' ,
 Y_0 , Z_0 der Widerstände zu bestimmen. Auch in allen anderen
Fällen, in welchen zwei Punkte des Körpers genöthigt sind, sich in
geschriebenen Bahnen zu bewegen, gibt es bloß zwei Gleichgewichts-
bedingungen entsprechend den zwei freien Coordinaten. Zu
den die Starrheit ausdrückenden $3n - 6$ Bedingungsgleichungen treten
außerdem zwei Gleichungen hinzu, welche ausdrücken, dass die Coordi-
naten des einen Punktes den beiden Gleichungen der entsprechenden
Curve genügen, und zwei weitere Gleichungen, die die Bedingung
für die Bewegung des zweiten Punktes in der zweiten Curve aus-
drücken, sonach ist die Zahl der von einander unabhängigen Bedin-
gungsgleichungen $3n - 6 + 2 + 2 = 3n - 2$ und die Zahl der freien
Coordinaten ist demgemäß $3n - (3n - 2) = 2$.

e) Sind die einzelnen Punkte eines Körpers K genöthigt, sich
in bestimmten Bahnen zu bewegen, die zu einer fixen Ebene E parallel sind, so
kann man (siehe S. 358) diese Bewegung bekanntlich zurückführen
auf die Bewegung einer ebenen unveränderlichen Figur in ihrer
Ebene E . Enthält nun diese Figur n materielle Punkte, so ist die
Unveränderlichkeit der gegenseitigen Lage dieser n Punkte bestimmt
durch $2n - 3$ Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten
dieser Punkte, denn die Constanz der Entfernung zweier beliebiger
Punkte $A_1 A_2$ bedingt eine Gleichung, und die unveränderliche relative
Lage eines jeden der übrigen $(n - 2)$ materiellen Punkte ist schon
vollkommen bestimmt, wenn zur Bedingung gemacht wird, dass
die Entfernungen dieses Punktes von den beiden Punkten A_1 und A_2
in der Ebene E constant sind, was für jeden der $(n - 2)$ Punkte zwei
weitere Bedingungsgleichungen voraussetzt, sonach ist die Zahl der
Bedingungen für die Unveränderlichkeit (Starrheit) der ebenen Figur charakterisiren-
den $1 + 2(n - 2) = 2n - 3$. Demgemäß
bleiben von den $2n$ ebenen Coordinaten der n Punkte der Figur nur
 $2n - (2n - 3) = 3$ freie Coordinaten. Es hat mit anderen Worten
ein ebener Punktssystem, sowie in dem Falle eines räumlichen Punkt-systems,
das einen fixen Punkt besitzt, drei Freiheitsgrade. Demgemäß
bestehen im Falle e) auch drei Gleichgewichtsbedingungen bestehen.

Um diese zu bestimmen, hat man nur zu erwägen, dass in
jedem Falle zu den einwirkenden Kräften P noch hinzutritt der

Widerstand W der Ebene, der, wenn man von der Reibung auf der Ebene E absieht, normal zu der Ebene gerichtet, also parallel zur z -Achse ist, wenn man die Ebene E zur xy -Ebene eines rechtwinkligen Achsensystems wählt. Der Mittelpunkt A der in den verschiedenen Berührungspunkten des Körpers mit der Ebene E angreifenden, parallel zur z -Achse gerichteten Widerstandskräfte, der als Angriffspunkt des resultierenden Widerstandes W angenommen werden kann, habe die Coordinaten (ξ, η, ρ) . Die Kräfte Momente von W sind demgemäß (s. Gl. 6, S. 72) $M_x^{(W)} = \eta \cdot W$, $M_y^{(W)} = -\xi W$, $M_z^{(W)} = 0$. Da nach Hinzufügung der Kraft W zu den Kräften P der Körper als ein frei beweglicher betrachtet werden kann, so bestehen die sechs Gleichungen

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z + W = 0 \\ \Sigma M_x^{(P)} + \eta W = 0, \quad \Sigma M_y^{(P)} - \xi W = 0, \quad \Sigma M_z^{(P)} = 0 \end{aligned}$$

Die drei nothwendigen und hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen sind sonach

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X = \Sigma [P \cos(xP)] = 0, \quad \Sigma Y = \Sigma [P \cos(yP)] = 0 \\ \text{und } \Sigma M_z^{(P)} = \Sigma (xY - yX) = 0 \\ \text{ferner ist } W = -\Sigma Z \text{ und sonach} \\ \Sigma M_x^{(P)} = \Sigma (xZ - zX), \quad \Sigma M_y^{(P)} = \Sigma (yZ - zY) \end{aligned} \right\} (11)$$

Wirkt z. B. auf den Körper ausser dem normalen Widerstande, dessen Richtung zur positiven Richtung der z -Achse gewählt sei, in einer zur Ebene E normalen Ebene — der zx -Ebene — nur eine Kraft P und eine Last Q , und zwar die letztere in einer Richtung, die nicht zur Ebene E normal ist, sondern mit der Richtung des der z -Richtung entgegengesetzten normalen Druckes $N = W$ einen spitzen Winkel $(QN) = \alpha$ einschließt, so gelangt man zu dem schon auf S. 85 (für einen materiellen Punkt) behandelten Falle der schiefen Ebene. Die Projection der Richtung von P auf die Ebene E sei als positive x -Richtung angenommen, so dass die Componenten von P und Q sich folgendermaßen ausdrücken lassen:

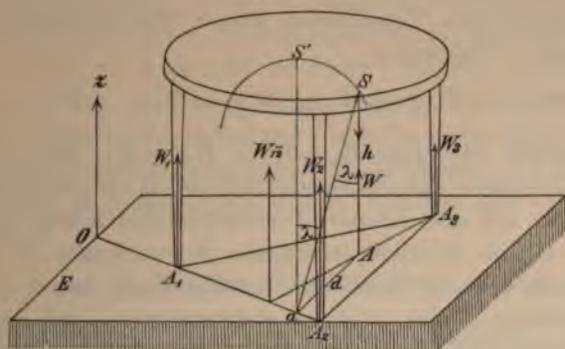
$$\begin{aligned} X_P &= P \cos(xP) = P \cos \left[(NP) - \frac{\pi}{2} \right] = P \sin(NP), \\ X_Q &= Q \cos(xQ) = Q \cos \left[\frac{\pi}{2} + \alpha \right] = -Q \sin \alpha, \\ Z_P &= P \cos(zP) = P \cos[\pi - (NP)] = -P \cos(NP), \\ Z_Q &= Q \cos(zQ) = Q \cos(\pi - \alpha) = -Q \cos \alpha, \quad Y_P = Y_Q = 0, \\ \text{also ist zufolge (11)} \quad 0 &= \Sigma X = P \sin(NP) - Q \sin \alpha, \\ W &= -\Sigma Z = P \cos(NP) + Q \cos \alpha. \end{aligned}$$

etzt man den aus der vorletzten Gleichung sich ergebenden Wert $= Q \frac{\sin \alpha}{\sin (NP)}$ in die Gleichung für $W = N$ ein, so findet man Übereinstimmung mit S. 85 $N = Q \frac{\sin [\alpha + (NP)]}{\sin (NP)}$.

Ist der Widerstand W nicht nach beiden Seiten der widerstehenden Ebene möglich, sondern ist derselbe nur ein einseitiger, so noch ein weiterer Umstand in Rechnung zu ziehen.

Ist z. B. der Körper in wenigstens drei Punkten $A_1 A_2 A_3$ (Fig. 140), die nicht in derselben Geraden gelegen sind, durch eine derstehende ebene Fläche E — die xy -Ebene — unterstützt, die r einen einseitigen Widerstand nach der positiven Seite der z -Achse äußern vermag, so können zu den äußeren Kräften $P_1 P_2 P_3 \dots$ r noch die mit der positiven z -Achse gleichgerichteten Widerstands-

Fig. 140.



äfte $W_1 W_2 W_3 \dots$ in den einzelnen Unterstützungspunkten hinzu-eten. Verbindet man je zwei dieser Unterstützungspunkte durch Ge-ede miteinander, so schließen die äußersten dieser Geraden ein Polygon $A_1 A_2 A_3$ ein, das als Unterstützungspolygon bezeichnet wird. etzt man nun zuerst die Kräfte W_1 und W_2 zu einer Resultierenden W_{12} , die letztere mit der Kraft W_3 , zusammen u. s. w., so muss man, da mmer die Richtungslinie der Resultierenden zweier gleichgerichteter Kräfte innerhalb der Richtungslinien der Componenten gelegen ist, ehließlich zu einer gleichgerichteten Resultanten W aller Widerstands-räfte $W_1 W_2 W_3 \dots$ gelangen, deren Richtungslinie die Unterstützungs-äche in irgend einem innerhalb des Unterstützungspolygons ge-egenen Punkte A schneidet. Soll demnach Gleichgewicht stattfinden, müssen anderseits die Kräfte $P_1 P_2 \dots$ eine Resultante R ergeben, elcher durch die Kraft $W = R$ das Gleichgewicht gehalten wird, elche daher die negative Richtung der z -Achse hat, und deren

Richtungslinie die xy -Ebene in einem innerhalb des Unterstützungspolygons gelegenen Punkte A schneidet. Es muss demnach

α) sich aus (11) für $W = -R_z = -\Sigma [P \cos z P]$ nothwendigerweise ein positiver Wert oder der Wert Null ergeben, und ferner

β) muss, wenn $(\xi \eta \rho)$ die orthogonalen Coordinaten des Punktes A sind, der durch die Coordinaten ξ und η mittels der Gleichungen (11) bestimmte Punkt innerhalb des Unterstützungspolygons gelegen sein.

Diese zwei Bedingungen α und β treten dann zu den drei früheren Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$ und $\Sigma M_z^{(P)} = 0$ hinzu.

Der normale Druck auf die xy -Ebene ist gegeben durch $W = -\Sigma (P \cos z P)$. Da ferner der aus den Gleichungen (11) bestimmbare Punkt (ξ, η) der Mittelpunkt der parallelen Kräfte $W_1 W_2 W_3$ ist, so bestehen, wenn das Unterstützungspolygon ein Dreieck ist und die Unterstützung nur in den drei Eckpunkten des Dreiecks stattfindet, den Gleichungen (4), S. 447, zufolge, wenn $(\xi_1 \eta_1)$, $(\xi_2 \eta_2)$, $(\xi_3 \eta_3)$ die gegebenen Coordinaten dieser drei Eckpunkte $A_1 A_2 A_3$ sind, folgende Gleichungen:

$$W\xi = W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 + W_3 \xi_3, \quad W\eta = W_1 \eta_1 + W_2 \eta_2 + W_3 \eta_3$$

und bekanntlich ist ferner $W = W_1 + W_2 + W_3$, aus welchen drei linearen Gleichungen sich die Druckkräfte $W_1 W_2 W_3$ bestimmen lassen.

Sind die auf den Körper K einwirkenden Kräfte lediglich die durch das eigene Gewicht bedingten Schwerkkräfte q , so ist die Unterstützungsebene E horizontal anzunehmen, ferner ist W dem Gesamtgewichte Q des Körpers gleichzusetzen, und der Punkt A ist die verticale Projection des Schwerpunktes S des Körpers in die Ebene E (siehe Fig. 140).

Hat das Unterstützungspolygon mehr als drei Seiten, oder findet überhaupt die Unterstützung in mehr als drei Punkten statt, so reichen zur Bestimmung der Druckkräfte in den Unterstützungspunkten die den letzten drei Gleichungen analogen drei Gleichungen allein nicht hin, sondern es müssen dann bei festen Körpern die Elasticitätsverhältnisse (die eintretenden Deformationen) behufs Bestimmung dieser Druckkräfte mit in Rechnung gezogen werden. Doch ist dieser Fall für die technisch wichtigeren Fälle von ganz unwesentlicher Bedeutung, da fast immer, wenn auch scheinbar die Unterstützung in mehr als drei Punkten stattfindet, sich bei näherer genauer Untersuchung herausstellt, dass der Körper thatsächlich nur in drei Punkten unterstützt ist.

Nimmt man als x -Achse irgend eine der äußersten Unterstützungskanten $A_1 A_2$ an, so dass das ganze Unterstützungspolygon auf der einen, und zwar auf der positiven Seite der x -Achse gelegen ist, so

uss im Falle des Gleichgewichtes, damit A innerhalb des Unterstützungspolygons zu liegen komme, $\eta > 0$ sein. Für $\eta < 0$ kann das Gleichgewicht nicht mehr bestehen, so dass in dem für die Stabilitätsgrenze maßgebenden Grenzfalle $\eta = 0$, daher zufolge der Gleichungen (11) $M_x = \Sigma M_x^{(P)} = \Sigma (yZ - zY) = 0$ sein, d. h. die algebraische Summe der Drehungsmomente bezüglich dieser Unterstützungskante (als der Drehachse) verschwinden muss.

Anmerkung. Sind in dem hier unter $e)$ behandelten Falle der Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene E zwei Punkte A und B genöthigt, sich in vorgeschriebenen Bahnen, die in der Ebene E gelegen sind, zu bewegen, so treten zu den $(2n - 3)$ die Unveränderlichkeit der gegenseitigen Lage der n -Punkte dieser Figur ausdrückenden Gleichungen entsprechend den beiden Gleichungen der ebenen Curven zwei weitere Bedingungsgleichungen hinzu, so dass die Zahl der letzteren $2n - 3 + 2 = 2n - 1$ ist, demgemäß ist von den $2n$ -Coordinationen der n -Punkte nur $2n - (2n - 1) = 1$, d. i. nur eine einzige, eine freie Coordinate. Demgemäß besteht in diesem Falle auch nur eine einzige Gleichgewichtsbedingungsgleichung (z. B. für die Pleuelstange des Kurbelmechanismus).

$f)$ Ist ein starrer Körper durch entsprechende Führungen genöthigt, sich translatorisch, etwa parallel zu einer Geraden — der z -Achse — zu bewegen, so ist, was nicht näher auseinandergesetzt zu werden braucht, die Gleichgewichtsbedingung durch die Gleichung $R_z = \Sigma Z = 0$ und die Äquivalenzbedingung durch die Gleichung $\Sigma Z = \Sigma Z'$ ausgedrückt. Auch in diesem Falle besteht offenbar nur ein einziger Freiheitsgrad.

E. Statik der Schwere.

§ 78. Schwerpunkt. Gewicht und Masse. Allgemeine Sätze über die Schwerpunktslage.

Den §§ 25 und 35 zufolge kann man die auf die einzelnen Massenpunkte eines Körpers, deren Massen $m_1 m_2 m_3 \dots$ seien, einwirkenden Schwerkkräfte $q_1 q_2 q_3 \dots$ nahezu als parallele und gleichgerichtete verticale Kräfte von constanter Größe ansehen, deren Größen bestimmt sind durch $q_1 = m_1 g$, $q_2 = m_2 g$, $q_3 = m_3 g$ u. s. w., wobei die Beschleunigung der Schwere g für alle Theile des Körpers als gleich angenommen werden kann. Insoweit diese Annahmen gestattet sind (also die Dimensionen des Körpers im Verhältnisse zur Erde verschwindend klein sind, wie dies auch in diesem Abschnitte E durchwegs vorausgesetzt ist), gibt es nach § 74 bei einem jeden starren Körper einen Mittelpunkt dieser auf die Massentheilchen $m_1 m_2 m_3 \dots$ einwirkenden parallelen Schwerkkräfte $q_1 q_2 q_3 \dots$, den man bekanntlich den Schwerpunkt (den Mittelpunkt der Schwere) des Körpers nennt. Die Resultante Q dieser Kräfte $q_1 q_2 q_3 \dots$ ist — innerhalb der Giltigkeitsgrenzen der obigen Annahmen — mit den

Kräften $q_1 q_2 \dots$ gleichgerichtet, also vertical nach abwärts gerichtet, ihre Richtungslinie enthält den Schwerpunkt S des Körpers, und ihre Größe ist bestimmt durch

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots = (m_1 + m_2 + m_3 \dots) \cdot g = \Sigma m \cdot g$$

Bezeichnet man demnach durch M die Summe der (s. S. 123) unveränderlichen und stets als positiv anzunehmenden Massen $m_1 m_2 m_3 \dots$ der materiellen Punkte des Körpers, d. i. die sogenannte gesammte Masse des Körpers, deren Größe demgemäß auch als eine unveränderliche positive Größe angesehen werden muss, so ist

$$Q = M \cdot g \quad \dots \quad (1)$$

Ist der Körper durch eine Unterlage, deren obere Grenzebene horizontal ist, unterstützt oder in einem fixen Punkte aufgehängt, so ist im Zustande des Gleichgewichtes nach § 77 *c*, bezw. § 76 der Druck auf die horizontale Unterlage, beziehungsweise der Zug auf den fixen Punkt, den man als das Gewicht des Körpers bezeichnet, durch diese Resultante Q bestimmt.

Der letzten Gleichung zufolge ist die Masse eines jeden Körpers an demselben Orte der Erde, d. h. bei gleichem g dem Gewichte des Körpers direct proportional, wodurch die Vergleichung der Massen verschiedener Körper z. B. mit Hilfe einer um eine fixe Achse drehbaren Wage, für welche die Hebelgesetze des § 77 *a* Giltigkeit haben, möglich ist (wie denn überhaupt mittels einer derartigen Hebelwage nur das Verhältnis zweier Gewichte für denselben Ort der Erde sich bestimmen lässt, jedenfalls also der Gleichung (1) entsprechend die Massen der Körper verglichen werden können). Zur Grundlage der Vergleichung wählt man bei wissenschaftlichen Messungen fast allgemein als absolute Masseneinheit (siehe S. 125) die Masse des 1000. Theiles des Pariser Normal-Platinkilogramms, welche Masse nahezu übereinstimmt mit der Masse eines Cubikcentimeters chemisch reinen Wassers bei einer Temperatur von 4° Celsius. Diese letztere Masse kann, da das Wasser fast unzusammendrückbar, daher das Volumen desselben von dem variablen, verhältnismäßig geringen Luftdrucke fast unabhängig ist, für die ganze Erde als gleich angenommen werden. Man bezeichnet die oberwähnte Masseneinheit, beziehungsweise eine ihr gleiche Masse, bekanntlich als die Masse eines Gramms; es ist daher die Masse eines Liters (Cubikdecimeters = 1000 Cubikcentimeter) Wasser sehr nahe ein Kilogramm (= 1000 Gramm).

Anmerkung 1. Die Beziehungen zwischen den Einheiten des absoluten und des terrestrischen Maßsystems sind schon im § 34 und 35 erörtert worden. Betreffs der kosmischen (astronomischen) Masseneinheit und der kosmischen (astronomischen) Kräfteinheit sei auf die Anmerkung des folgenden § 79 hingewiesen.

Die Gleichung (1) gestattet, auf sehr einfache Weise die unbekannte Masse eines Körpers aus dem Gewichte desselben zu bestimmen, indem man nämlich der Gleichung $M = \frac{Q}{g}$ zufolge das Gewicht durch die Beschleunigung des freien Falles dividiert. Hierbei ist vorausgesetzt, dass sich alle drei Maßzahlen auf dasselbe Maßsystem beziehen, z. B. auf das (C. G. S.)-System. In dem letzteren Falle ist die Masse M in Grammen, das Gewicht Q in Dynen auszudrücken und $g = 981$ zu setzen.

Dem Momentensatze für parallele Kräfte im Raume (siehe S. 448) zufolge ist, wenn man die Coordinatenebenen zu Momentenebenen wählt

$$\left. \begin{aligned} QX &= q_1 x_1 + q_2 x_2 + \dots = \Sigma(qx) \\ QY &= q_1 y_1 + q_2 y_2 + \dots = \Sigma(qy) \\ QZ &= q_1 z_1 + q_2 z_2 + \dots = \Sigma(qz) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wenn man durch XYZ die Schwerpunktscoordinaten und durch $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2, \dots$ die Coordinaten der einzelnen materiellen Punkte in Bezug auf ein beliebiges orthogonales oder schiefwinkeliges Achsensystem bezeichnet.

Setzt man die früheren Werte $Q = Mg, q_1 = m_1 g, q_2 = m_2 g \dots$ in die Gleichungen (2) ein, hebt g als gemeinsamen Factor der Summanden der rechts stehenden Summen heraus und dividiert beiderseits durch g , so findet man

$$\left. \begin{aligned} MX &= m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots = \Sigma(mx) \\ MY &= m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots = \Sigma(my) \\ MZ &= m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots = \Sigma(mz) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Die Producte $m_1 x_1, m_2 x_2 \dots MX$ u. s. w. bezeichnet man (siehe S. 330) als die Massenmomente und in der Gleichung (2) die Producte $q_1 x_1 \dots QX$ als die Gewichtsmomente, bezüglich der entsprechenden Coordinatenebenen als Momentenebenen, so dass die Gesetze (2) und (3) leicht in Worte zu kleiden sind.

Die Übereinstimmung der Gleichungen (3) mit den Gleichungen (1) auf S. 330 und 332 lehrt, dass innerhalb der Gültigkeitsgrenzen der im Anfange dieses Paragraphen erwähnten Annahmen der Schwerpunkt XYZ eines starren Körpers identisch ist mit seinem Massenmittelpunkte, und dass daher auch (siehe S. 332) die relative Lage des Schwerpunktes in einem starren Körper, mag der Körper sich wie immer bewegen, stets dieselbe bleibt.

Allgemeine Lehrsätze über die Schwerpunktslage.

a) Besteht ein starrer Körper aus mehreren Theilen, deren Massen $M' M'' M''' \dots$ sind, und deren Schwerpunkten die Coordinaten $\xi' \eta' \zeta'$,

$\xi'' \eta'' \zeta'' \dots$ zukommen, und sind die Massen m und die Coordinaten (x, y, z) der einzelnen materiellen Punkte dieser Theile entsprechend bezeichnet, so ist zufolge der Gleichung (3) $M' \xi' = \Sigma (m' x')$, $M'' \xi'' = \Sigma (m'' x'')$. . . Durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich $M' \xi' + M'' \xi'' + \dots = \Sigma (m x)$. Vergleicht man diese Gleichung mit der ersten Gleichung in (3), so findet man

$$\left. \begin{aligned} MX &= M' \xi' + M'' \xi'' + \dots \\ \text{und ebenso } MY &= M' \eta' + M'' \eta'' + \dots \\ MZ &= M' \zeta' + M'' \zeta'' + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

d. h. es ist das Schwerpunktsmoment der ganzen Masse M stets gleich der Summe der Schwerpunktsmomente der einzelnen Massentheile derselben — bezüglich derselben beliebigen Momentenebene. Dass der völlig analoge Lehrsatz auch für die Gewichtsmomente gültig ist, ergibt sich sofort aus der Multiplication der Gleichungen (4) mit der Beschleunigung g der Schwere.

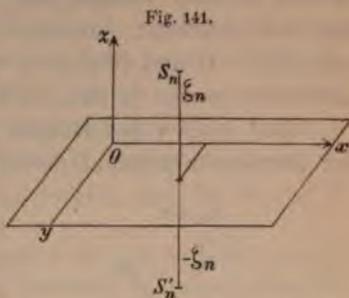
Nimmt man daher die Schwerpunkte der einzelnen Theile als Angriffspunkte der den Gewichten dieser Theile gleichen oder diesen Theilgewichten (bezw. ihren Massen) direct proportionalen und durchwegs gleichgerichteten Kräfte an, so ist der Mittelpunkt dieser Kräfte identisch mit dem Schwerpunkte des Körpers, so dass man die Lage desselben auf-constructivem Wege nach dem auf S. 410 bezw. S. 448 und 449 besprochenen Verfahren für die Ermittlung des Mittelpunktes paralleler Kräfte leicht bestimmen kann, wenn das Verhältnis $M' : M'' : M''' \dots$ und die Schwerpunkte dieser einzelnen Theile bekannt sind.

Eine jede durch den Schwerpunkt eines Körpers durchgelegte Ebene heißt eine Ebene der Schwere oder Schwerebene des Körpers, eine jede den Schwerpunkt des Körpers enthaltende Gerade nennt man eine Schwerlinie oder Schwerachse des Körpers, mitunter auch einen Durchmesser der Schwere.

b) Sind die Schwerpunkte aller Theile eines Körpers in derselben Ebene gelegen, so ist dieselbe eine Schwerebene des Körpers. Denn nimmt man diese Ebene etwa als xy -Ebene an, so ist zufolge der Voraussetzung in der letzten Gleichung (4) $\zeta' = 0$, $\zeta'' = 0 \dots$ zu setzen, daher ist $MZ = 0$ und, da $M > 0$ ist, $Z = 0$, wodurch der Satz nachgewiesen ist.

c) Sind alle Schwerpunkte der einzelnen Theile eines Körpers in derselben Geraden gelegen, so ist dieselbe eine Schwerachse. Dieser Satz ergibt sich als unmittelbare Folgerung des letzten Lehrsatzes b), wenn man diesen Lehrsatz auf zwei beliebige durch diese Gerade gelegte Ebenen in Anwendung bringt.

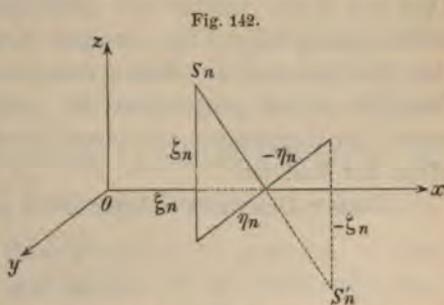
d) Sind die Schwerpunkte je zweier Körpertheile von gleichem Gewichte, also auch von gleicher Masse symmetrisch bezüglich einer Ebene gelagert, so ist diese Symmetrieebene eine Schwerenebene des Körpers. Denn wählt man diese Ebene parallel zur xy -Ebene eines orthogonalen Achsensystems, so zerfällt die Summe der rechten Theile der letzten Gleichung (4) in lauter Theilsummen von je zwei Summanden, die sich auf zwei symmetrisch gelegene Schwerpunkte S_n und S_n' (Fig. 141) beziehen und deren Summe, weil in beiden Summanden dieselbe Masse, aber entgegengesetzte gleiche ζ , nämlich ζ_n und $-\zeta_n$ vorkommen, Null ist, so dass auch die Gesamtsumme, nämlich MZ Null, daher auch $Z = 0$ ist.



Es ist sofort einleuchtend, dass auf dieselbe Art folgender allgemeiner Satz bewiesen wird: Halbirt eine Diametralebene zwei einander parallele Strecken, welche je zwei Schwerpunkte S_n und S_n' zweier Körpertheile von gleicher Masse verbinden, so ist diese Diametralebene eine Schwerenebene. Um dies zu beweisen, wählt man diese Diametralebene als xy -Ebene und die x -Achse des im allgemeinen schiefwinkligen Achsensystems in Fig. 141 parallel zu den Strecken $S_n S_n'$ anzunehmen.

e) Hat der Körper zwei Symmetrieebenen, beziehungsweise zwei Diametralebenen von der in (d) vorausgesetzten Eigenschaft, so ist die Durchschnittslinie eine Schwerachse, und kommen mehr als zwei diametralebenenartige in einem Punkte sich schneidende Symmetrieebenen, beziehungsweise Diametralebenen vor, so ist dieser Durchschnittspunkt der Schwerpunkt. Dieser Satz ist ein Folgesatz aus dem Lehrsatz (d).

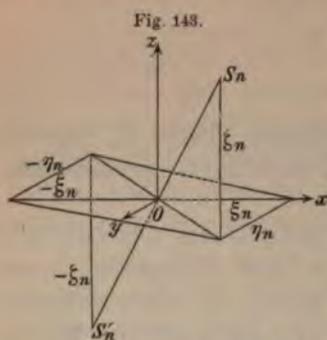
f) Besteht ein Körper aus mehreren Theilen, von welchen je zwei ein gleiches Gewicht (oder gleiche Masse) besitzen, so ist die Durchschnittslinie dieser beiden Theile durchwegs eine symmetrische Schwerachse zu einer Achse haben, diese Symmetrieachse eine Schwerachse. Wählt man



nämlich diese Symmetrieachse etwa zur x -Achse eines orthogonalen Achsensystems, so sind für je zwei solche symmetrisch gelegene Schwerpunkte $S_n S_n'$ (Fig. 142), wie dies die Congruenz der beiden

rechtwinkligen Scheiteldreiecke der Fig. 142 lehrt, sowohl die beiden Werte von η als auch jene von ζ entgegengesetzt gleich, so dass eine jede auf zwei solche Schwerpunkte sich beziehende Theilsumme in den rechten Theilen der zweiten und dritten Gleichung (4) sich auf Null reduciert, weshalb auch die Gesamtsumme verschwindet, also $MY=0$ und $MZ=0$, somit auch $Y=0$ und $Z=0$ ist, d. h. der Schwerpunkt in der x -Achse sich befindet.

Hat sonach der Körper zwei derartige Symmetrieachsen, so ist der Durchschnittspunkt derselben der Schwerpunkt des Körpers.



g) Sind die Schwerpunkte je zweier Körpertheile von gleicher Masse centrisch um einen Centralpunkt O (den Coordinatenanfangspunkt) gelagert, so ist dieser Centralpunkt der Schwerpunkt des Körpers. Dieser Satz, demzufolge $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ ist, kann auf ganz dieselbe Weise wie der Satz (d) und (f) auf Grundlage aller drei Gleichungen (4) nachgewiesen werden (siehe Fig. 143).

Anmerkung 2. Schon Archimedes von Syracus behandelt in seinem Buche „de aequiponderantibus“, das die Hebelgesetze enthält, auch die Schwerpunkte verschiedener homogener Gebilde.

§ 79. Specificsches Gewicht. Relative und absolute Dichte (Dichtigkeit). Mittlere Dichtigkeit der Erde. Beziehung der kosmischen Massen- und Kräfteinheiten zu den absoluten und terrestrischen Einheiten.

Ein jeder Körper, bei welchem in gleichen Volumelementen, aus beliebigen Theilen des Körpers entnommen, auch gleiche Massen enthalten sind, so dass also gleichen Volumtheilen an demselben Orte der Erde (zufolge der Gleichung $Q = Mg$) auch gleiche Gewichte entsprechen, mit anderen Worten: ein Körper, bei welchem das Gewicht und die Masse dem Volum in der ganzen Ausdehnung desselben direct proportional ist, wird ein homogener Körper genannt, im Gegensatze zu einem heterogenen Körper, bei dem dies nicht der Fall ist.

Dieser Definition entsprechend ist bei einem homogenen Körper

$$\left. \begin{aligned} Q &= S \cdot V \\ M &= \mu \cdot V \end{aligned} \right\} (1)$$

wo Q das Gewicht und M die Masse der homogenen Substanz, die irgend ein beliebiger Volumtheil, dessen Maßzahl V ist, enthält, und S und μ constante Größen bedeuten.

Die Bedeutung dieser Proportionalitätsconstanten ergibt sich, wenn man in den Gleichungen (1) $V=1$ setzt; man ersieht dann sofort, dass S das der Volumeinheit des homogenen Körpers zukommende Gewicht, das man als spezifisches Gewicht des Körpers bezeichnet, und μ die in der Volumeinheit enthaltene Masse, welche die absolute Dichte oder (cubische) Dichtigkeit des Körpers (auch spezifische Masse) genannt wird, bedeutet. Der Gleichung (1) gemäß kann man das spezifische Gewicht auch als den constanten Quotienten des Gewichtes Q durch das Volum V und die (cubische) Dichtigkeit als den Quotienten aus der Masse M und dem Volum V definieren.

Da Q als eine Kraft die Dimension mlt^{-2} und V als Volum die Dimension l^3 hat, so ist der Gleichung (1) entsprechend die Dimension des spezifischen Gewichtes $[S] = [Q]:[V] = mlt^{-2}:l^3 = ml^{-2}t^{-2}$ und die Dimension der cubischen Dichtigkeit $[\mu] = m:l^3 = ml^{-3}$.

Im Gegensatz zu dem spezifischen Gewichte S bezeichnet man auch mitunter das Gewicht Q , das dem beliebigen Volum V entspricht, als das absolute Gewicht.

Aus den durch die Gleichungen (1) ausgedrückten Gesetzen, die sich leicht durch Worte aussprechen lassen, und der Gleichung (1) auf S. 468 ergibt sich sofort, dass

$$S = \mu \cdot g \dots (2)$$

d. h. das spezifische Gewicht S stets gleich ist dem Producte aus der cubischen Dichtigkeit μ und der Beschleunigung der Schwere.

So ist z. B. das spezifische Gewicht s des Wassers (von $4^\circ C$) im (C. G. S.)-System, da in diesem System die Längeneinheit 1 cm , sonach die Volumeinheit ein Cubikcentimeter ist, da also μ die Masse eines Cubikcentimeters Wasser, d. i. die Masse von einem Gramm bedeutet, sonach $\mu = 1$ und $g = 981$ zu setzen ist, $s = g = 981$ — ausgedrückt in Dynen — (siehe S. 135).

Analog den obigen für einen homogenen Körper giltigen Begriffen für S und μ wird auch, wenn ΔQ das Gewicht und ΔM die Masse irgend eines Volumelementes ΔV eines heterogenen Körpers ist, $\frac{\Delta Q}{\Delta V}$ das mittlere (durchschnittliche) spezifische Gewicht für das bestimmte Volum ΔV und $\frac{\Delta M}{\Delta V}$ die mittlere (durchschnittliche) Dichtigkeit innerhalb dieses Volumelementes ΔV genannt, so dass das mittlere spezifische Gewicht, beziehungsweise die mittlere Dichtigkeit des ganzen heterogenen Körpers $\frac{Q}{V}$, bezw. $\frac{M}{V}$ ist.

Anmerkung. Bei dieser Gelegenheit, wo von der mittleren Dichtigkeit der Körper die Rede ist, möge in Kürze auseinandergesetzt werden, wie man die

mittlere Dichtigkeit und dementsprechend auch die Masse unserer Erde, der Sonne, der Planeten u. s. w. zu bestimmen im Stande ist.

Es sei π_a die in absolutem Maße ausgedrückte Maßzahl jener Kraft, mit welcher zwei materielle Punkte, deren Entfernung der Längeneinheit, d. i. 1 Centimeter (bezw. 1 Meter) gleich ist, und deren Massen der absoluten Masseneinheit M_a von je einem Gramm (beziehungsweise Kilogramm) gleichkommen, gegen einander gravitieren. Dem Newton'schen Gravitationsgesetze zufolge (siehe S. 223 und 224) ist dann die Anziehung P_a zweier Massen m_a und m_a' (die Indices a sollen hier und späterhin andeuten, dass die entsprechenden Maßzahlen sich auf das absolute Maßsystem beziehen), deren Entfernung r ist, durch

$$P_a = \pi_a \frac{m_a m_a'}{r^2} \dots (a)$$

und die dadurch hervorgerufene Beschleunigung der Masse m_a durch $p = \frac{P_a}{m_a} = \frac{\pi_a m_a'}{r^2}$ bestimmt. Bedeutet nun m_a' die Masse der als kugelförmig vorausgesetzten Erde, r den Radius derselben und G die Beschleunigung der absoluten Schwere (siehe S. 192), so ist $p = G$ und, wenn μ_a die mittlere Dichtigkeit und V das Volumen der Erde ist, nach (1) $m_a' = \mu_a \cdot V = \mu_a \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi$, demnach $G = p = \frac{4}{3} \pi \mu_a r \cdot \pi_a$ und $\mu_a = \frac{3}{4\pi} \frac{G}{\pi_a r}$. Ist dementsprechend π_a bekannt, so lässt sich aus der bekannten Beschleunigung G der Erdschwere und dem Erdhalbmesser r die mittlere Dichtigkeit μ_a der Erde annähernd aus der letzten Formel berechnen.

Würde man, um einen genaueren Wert von μ_a zu erhalten, auf die Abplattung (Ellipticität) der sphäroidischen Erde und auf die Rotation derselben Rücksicht nehmen, so müsste man nach der Clairaut'schen Formel, in deren Deduction (die etwa aus „W. Thomson und P. G. Tait: Handbuch der theoretischen Physik, übersetzt von H. Helmholtz und G. Wertheim, I. Bd., II. Theil, Braunschweig 1874, S. 352“ zu entnehmen ist) hier nicht eingegangen werden kann,

$$g = \frac{\pi_a m_a'}{r^2} \left[1 - \frac{3}{2} \alpha + \frac{1}{3} \varepsilon + \left(\frac{5}{2} \alpha - \varepsilon \right) \sin^2 \varphi \right] \dots (b)$$

setzen, wo g die thatsächliche Beschleunigung des freien Falles (Beschleunigung der relativen Schwere) an einem Orte von der geographischen Breite φ , wo ferner, wenn a den Äquatorradius und b den (kleineren) polaren Radius der Erde bezeichnen, ε die Abplattung (Ellipticität) $\varepsilon = \frac{a-b}{a}$ und r den mittleren Radius

der Erde, d. i. $r = \frac{b}{2\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}} \cdot \log \text{nat} \frac{1 + \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}}{1 - \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}}$, wo schließlich α das Verhältnis der Centrifugalbeschleunigung $r\omega^2$ (wenn ω die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung ist) zur absoluten Beschleunigung G der Schwere bedeutet. Die Gleichung (b) enthält das von Clairaut (Cl. Théorie de la figure de la terre. Paris 1743) aufgestellte Theorem, demzufolge der Überschuss der Beschleunigung der Schwere G am Pole (d. i. g für $\varphi = \frac{\pi}{2}$), nämlich der Überschuss der Größe

$$G = \frac{\pi_a m_a'}{r^2} \left(1 - \frac{3}{2} \alpha + \frac{1}{3} \varepsilon + \frac{5}{2} \alpha - \varepsilon \right) = \frac{\pi_a m_a'}{r^2} \left(1 + \alpha - \frac{2}{3} \varepsilon \right)$$

über die Schwerebeschleunigung am Äquator (für $\varphi = 0$), d. i. über

$$\frac{\pi_a m_a'}{r^2} \left(1 - \frac{3}{2} \alpha + \frac{1}{3} \epsilon \right), \text{ n\u00e4mlich der \u00dcberschuss } \frac{\pi_a m_a'}{r^2} \left(\frac{5}{2} \alpha - \epsilon \right)$$

zu der mittleren absoluten Beschleunigung der Schwere $G = \frac{\pi_a m_a'}{r^2}$ in einem Verh\u00e4ltnisse $\frac{5}{2} \alpha - \epsilon$ steht, welches letztere um die Abplattung ϵ kleiner ist als das $2\frac{1}{2}$ fache des Verh\u00e4ltnisses α der Centrifugalbeschleunigung $r\omega^2$ zur mittleren absoluten Schwerebeschleunigung G . Mit Hilfe dieses Gesetzes kann man also durch Messungen der Beschleunigung der Schwere (mittels Pendelbeobachtungen) an verschiedenen Orten der Erde die Gr\u00f6\u00dfe der Abplattung ϵ der Erde bestimmen.

Substituiert man n\u00e4mlich in die Gleichung (b) f\u00fcr die Erdmasse m_a' den Wert

$$m_a' = \mu_a V = \frac{4}{3} \mu_a a^3 b \pi \dots (c)$$

so enth\u00e4lt die Gleichung (b), vorausgesetzt, dass π_a bekannt ist, nur die eine Unbekannte μ_a , so dass die mittlere Dichtigkeit μ_a der Erde in genauerer Weise aus dieser Gleichung berechnet werden kann.

Zur Bestimmung der hier als bekannt vorausgesetzten Gravitationsconstanten π_a auf Grund von messbaren terrestrischen Beobachtungen und demgem\u00e4\u00df zur Bestimmung der mittleren Erddichte hat man verschiedene Methoden in Anwendung gebracht.

Maskelyne und Hutton bestimmten, indem sie der Idee Bougiers, der die durch die Massenanziehung des Chimborasso bewirkte Ablenkung des Senkels beobachtete, folgten, durch genaue Messungen (1774—1779) die Ablenkung δ , welche das freih\u00e4ngende Bleilothe aus seiner verticalen Lage durch die Anziehung der Bergkette Shehallien (in Portshire in Schottland) erfuhr, indem sie zugleich, so weit dies m\u00f6glich war, die Masse m_a dieses ziemlich regelm\u00e4\u00dfigen Gebirgszuges und die Lage seines Schwerpunktes und dadurch auch den Abstand d des letzteren vom Lothe bestimmten. Da dieses Loth unter dem gleichzeitigen Einflusse der beschleunigenden Kraft g der verticalen Erdschwere und jener der etwa horizontal angenommenen Massenanziehung p der Gebirgskette steht, deren Gr\u00f6\u00dfe nach Fr\u00fcherem $p = \frac{\pi_a m_a}{d^2}$ ist, so ist aus leicht ersichtlichen Gr\u00fcnden $\tan \delta = p : g$,

also auch $\tan \delta = \frac{\pi_a m_a}{g \cdot d^2}$, aus welcher Gleichung sich π_a bestimmen l\u00e4sst.

Airy bestimmte (die Methode Carlinis benutzend) mittels genauer Beobachtungen von Pendelschwingungen die Beschleunigung der Schwere g an einem Orte A der Erdoberfl\u00e4che und jene g' an einem Orte B unterhalb A , n\u00e4mlich am Boden eines Schachtes in Harton (Carlini bestimmte so 1824 g und g' auf dem Gipfel und am Fu\u00dfe des Mont Cenis). Sind nun R und R' die Entfernungen der Punkte A und B vom Erdcentrum und μ die (aus der Art der bekannten Gesteine des Hartoner Bergwerkes n\u00e4herungsweise bestimmte) mittlere Dichtigkeit derjenigen Kugelschale, die zwischen den beiden concentrischen Kugelfl\u00e4chen, deren Radien R und R' sind, und deren Centrum der Erdmittelpunkt ist, sich befindet, so ist nach den Gravitationsgesetzen, wofern man die Erde als kugelf\u00f6rmig (und aus homogenen concentrischen Kugelschalen bestehend) voraussetzt, $g' \cdot \frac{R'^2}{R^2}$ die Kraft, mit welcher die in A befindliche Masseneinheit von der unterhalb B gelegenen Erdkugel vom Radius R' angezogen wird, und demnach ist durch $p = g - g' \cdot \frac{R'^2}{R^2}$ die Anziehung der oberw\u00e4hnten Kugelschale bestimmt,

deren Volum $V = \frac{4}{3} (R^3 - R'^3) \pi$, deren mittleren Dichtigkeit μ und deren Masse $m_a = \mu \cdot V = \frac{4}{3} \mu (R^3 - R'^3) \pi$ ist; es ist demnach der früheren Gleichung $p = \frac{\pi_a m_a}{R^2}$ zufolge: $g - g' \cdot \frac{R'^2}{R^2} = \frac{4}{3} \pi_a \mu \cdot \frac{R^3 - R'^3}{R^2} \pi$, so dass aus dieser Gleichung π_a näherungsweise bestimmt werden kann.

Jolly (1880) und Poynting (1878) suchten durch genaue Wägungen mittels einer empfindlichen Wage aus der Gewichtszunahme, die ein Körper (eine Quecksilberkugel) durch eine unter demselben befindliche massive große Bleikugel erfährt, die Dichtigkeit μ_a zu bestimmen.

Die genaueste Methode ist unstreitig die zuerst von Cavendish angewendete, von Mitchell erfundene Methode der Bestimmung von π_a und der Erddichte μ_a mittels der Torsionswage. Dieselbe besteht aus einem leichten horizontalen Hebel, an dessen beiden Enden sich Metallkugeln von der Masse m_a befinden, und der an einem feinen Metalldrahte hängt. Wird nun der Hebel aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, so ist Elasticitätsgesetzen zufolge das Torsionsmoment M_x dem Torsionswinkel φ direct proportional, also $M_x = -C^2 \varphi$, wo C einen constanten Proportionalitätsfactor bedeutet, und es ist demnach zufolge eines später abzuleitenden Gesetzes $-C^2 \varphi = J \cdot \gamma$, wenn J das constanté sogenannte Trägheitsmoment der Torsionswage bedeutet, und daher ist die Winkelbeschleunigung $\gamma = -k^2 \varphi$, wo $k = \frac{C}{\sqrt{J}}$ ist. Der Punkt E (siehe S. 237 und S. 348) des hin- und herschwingenden Wagebalkens, dessen Elongation φ und dessen tangentielle Beschleunigung γ ist, schwingt daher nach den früher erörterten Gesetzen einer einfachen harmonischen Bewegung, und es ist der Gleichung (9), S. 157 zufolge die messbare Schwingungsdauer (bezw. halbe Schwingungsperiode) $T = \pi : k = \pi \sqrt{J} : C$, also $C = \pi \sqrt{J} : T$. Wird nun in der Ruhelage des Wagebalkens der Masse m_a eine zweite massive Kugel von der Masse M_a gegenübergestellt, so wird dadurch der Wagebalken aus seiner Ruhelage um einen messbaren Winkel α abgelenkt, so dass in der neuen Gleichgewichtslage das Drehungsmoment $P_a \cdot d$ der nach (a) durch $P_a = \pi_a \frac{m_a M_a}{r^2}$ bestimmten Anziehung der beiden Massen m_a und M_a (wo r die Entfernung der Mittelpunkte der beiden sich anziehenden Metallkugeln und d die Entfernung dieser Geraden r von dem Drehpunkte bedeuten) dem Torsionsmoment $-C^2 \alpha = -\pi^2 \cdot \frac{J}{T^2} \alpha$ entgegengesetzt gleich, also $\pi_a \cdot \frac{m_a M_a}{r^2} \cdot d = \pi^2 \cdot \frac{J}{T^2} \alpha$ sein muss, woraus sich denn π_a und nach Einsetzung in (b) die Masse m_a' der Erde und hierauf aus (c) deren mittlere Dichtigkeit μ_a bestimmen lässt.

Nach dieser Methode wurden für die mittlere Dichtigkeit der Erde — im absoluten (C. G. S.)-Systeme ausgedrückt — folgende Werte gefunden: von Cavendish (1798) $\mu_a = 5.48$, von Baily in London (1843) $\mu_a = 5.67$ (nach einer Correctur von A. Cornu 5.55), von Reich in Freiberg (1852) $\mu_a = 5.583$ und nach den sehr genauen Messungen von A. Cornu und Baille in Paris (1878) $\mu_a = 5.56$. (Bei den letzteren Messungen bestand der Hebel aus einer leichten, auf einem feinen, gut ausgeglühten Silberdraht aufgehängten Aluminiumröhre, die Masse m_a bestand aus zwei an den beiden Hebelenden befindlichen Kugeln von Rothkupfer, M_a aus zwei diametral aufgestellten Quecksilberkugeln.) Nach den früher erwähnten Methoden, die ihrer Natur nach nicht zu sehr genauen Resultaten führen konnten, fanden Maskelyne und Hutton $\mu_a = 4.7$ (Carlini 4.837) und Airy (1856) $\mu_a = 6.566$ (nach Haughtons Correction 5.480). Jolly (1880) und Poynting fanden $\mu_a = 5.69$.

Nimmt man den Wert Cornus $\mu_a = 5.56$ als den wahrscheinlichsten Wert der mittleren Erddichte an, so findet man nach (c), da im (C. G. S.)

sein, als 6.619×10^{-8} in 1 enthalten ist, also diese anziehende Masse M_1 muss 15.108×10^6 Gramm enthalten, es ist sonach die kosmische (astronomische) Masseneinheit M_k nahezu 15 Millionen Gramm. Da nun in diesem Falle $m' = 1$ ist und zufolge der Gleichung $P = \frac{m m'}{r^2}$ die Maßzahl P der Kraft (in kosmischem Masse) 1 wird, wenn auch die angezogene Masse $m = 1$, also in der Größe von 15.108×10^6 Gramm angenommen wird, so ist die kosmische (astronomische) Kraftereinheit D_k jene Kraft, welche einer Masse von 15.108×10^6 Gramm eine Beschleunigung von 1 Centimeter erteilt, und dieselbe beträgt demnach im absoluten Maße (siehe S. 125) $15.108 \times 10^6 D_{\text{dyn}}$, d. h. 15.108 Millionen Dyn. Da nun ferner (siehe S. 133) für Paris die Masse eines Grammes $= \frac{M_t}{9.80989 \times 1000} = \frac{M_t}{9809.89}$ und 1 Dyn der 980989te Theil des Gewichtes von 1 Kilogramm ist, so ist $M_k = \frac{15.108 \times 10^6}{9809.89} M_t$ und $D_k = \frac{15.108 \times 10^6}{980989}$ Kilogrammkräfte, d. h. die kosmische (astronomische) Kraftereinheit das 15.401fache des Gewichtes eines Kilogramms. Zwei in der Entfernung von einem Centimeter befindlichen kosmischen Masseneinheiten ziehen sich sonach mit dieser Kraft gegenseitig an.

Das mittlere spezifische Gewicht und die mittlere Dichtigkeit ist bei heterogenen Körpern nicht nur abhängig von der Größe des Volums ΔV , sondern ändert sich auch im allgemeinen von einem Volumenelemente zum anderen.

Ist die Massenvertheilung in dem heterogenen Körper nicht eine discontinuierliche, und befolgt diese ein gewisses mathematisches Gesetz, so wird $\frac{\Delta Q}{\Delta V}$ und $\frac{\Delta M}{\Delta V}$, wenn ΔV etwa das Volum eines elementaren Würfels oder einer kleinen Kugel bedeutet, dessen, beziehungsweise deren Mittelpunkt ein bestimmter Punkt m des Körpers ist, im allgemeinen gegen einen bestimmten Grenzwert convergieren, wenn die Kantenlänge dieses elementaren Würfels, beziehungsweise der Radius der kleinen Kugel immer mehr sich dem Grenzwerte Null nähert. Von diesen Grenzwerten, also von den Differentialquotienten $\frac{dQ}{dV}$ und $\frac{dM}{dV}$ bezeichnet man den ersteren als das spezifische Gewicht S im Punkte m , den letzteren als die (cubische) Dichtigkeit μ im Punkte m . Es ändert sich dann im allgemeinen S und μ mit der Lage des Punktes m in bestimmter Weise, so dass dann S und μ als eindeutige Functionen der Coordinaten des Punktes anzusehen sind.

Behufs der Vergleichung der specifischen Gewichte wird das specifische Gewicht s irgend einer homogenen Normalsubstanz zur Grundlage gewählt, und das Verhältnis des specifischen Gewichtes S eines beliebigen Körpers K zum specifischen Gewichte s der Normalsubstanz (bei derselben Volumeinheit und für denselben Ort der Erde) wird dann die relative Dichte oder das relative specifische Gewicht

oder kurzweg die Dichte des Körpers K genannt. Ist dieselbe durch D bezeichnet, so ist demgemäß

$$D = \frac{S}{s} \dots (3)$$

Der Gleichung (2) zufolge ist demnach die Dichte D eines Körpers K auch das Verhältnis der Dichtigkeit μ des Körpers K zur Dichtigkeit der Normalsubstanz.

Der durch die Gleichung (3) bestimmte Begriff der Dichte findet auch Anwendung bei der Definition der Dichte für die einzelnen materiellen Punkte m eines heterogenen Körpers und bei der Begriffsbestimmung der mittleren Dichte eines Körpers, wenn S das mittlere spezifische Gewicht dieses Körpers bedeutet.

Als Normalsubstanz wählt man gewöhnlich für feste Körper und tropfbare Flüssigkeiten das chemisch reine Wasser im Zustande der größten Dichtigkeit, d. h. Wasser von einer Temperatur von etwa 4°C. , bei welcher bekanntlich dessen spezifisches Gewicht, daher auch dessen Dichtigkeit am größten ist; für Gase und Dämpfe wählt man als Normalsubstanz gewöhnlich atmosphärische Luft oder Wasserstoffgas von einer Temperatur von 0° und von einem Drucke, der dem Drucke einer Quecksilbersäule, deren Höhe 76 Centimeter ist, das Gleichgewicht zu halten im Stande ist (dem sogenannten Normaldrucke).

Die Gleichung (3) lässt den Unterschied zwischen Dichte D und dem spezifischen Gewichte $S = D \cdot s$ am klarsten erkennen. Es ist die Dichte D eine unbenannte, und zwar bei gegebener Normalsubstanz von den zugrunde gelegten Größeneinheiten (Krafteinheit, Masseneinheit, Längeneinheit u. s. w.) vollkommen unabhängige Verhältniszahl von der Dimension $[D] = \frac{[S]}{[s]} = \frac{m l^{-2} t^{-2}}{m l^{-2} t^{-2}} = m^0 l^0 t^0 = 1$ oder, was dasselbe besagt, bezüglich einer jeden Größenart von der Null-ten Dimension, während die Maßzahl S des spezifischen Gewichtes als Maßzahl einer Kraft von der gewählten Krafteinheit und außerdem von der Volumeinheit, somit auch von der angenommenen Längeneinheit abhängig ist, und zwar hat S die Dimension $m l^{-2} t^{-2}$; man muss ferner die Dichte D erst mit einer zweiten Größe s , d. i. dem spezifischen Gewichte der Normalsubstanz multiplicieren, um das spezifische Gewicht S zu erhalten, woraus klar zu ersehen ist, dass keinesfalls der Factor D des Productes S nicht mit dem letzteren Producte zu identificieren ist. Für den besonderen Fall, dass a) als Normalsubstanz Wasser von 4°C. , b) als Volumeinheit 1 Cubikcentimeter, bezw. 1 Liter (Cubikdecimeter) gewählt wird, ist s offenbar 1 Gramm, bezw. 1 Kilogramm, daher $S = D \times 1 \text{ Gr.} = D \text{ Gr.}$, bezw. $S = D \text{ Klgr.}$

d. h. es ist dann, wenn als Krafteinheit das Gewicht eines Gramms, bezw. Kilogramms, und als Längeneinheit 1 Centimeter, bezw. 1 Decimeter angenommen wird, die Dichte die Maßzahl des spezifischen Gewichtes, das spezifische Gewicht enthält nämlich soviele Gramm, beziehungsweise Kilogramm, als die Dichte angibt. Wird, wie dies gewöhnlich bei Zugrundelegung des terrestrischen Maßsystems der Fall ist, als Längeneinheit 1 Meter, sonach als Volumeinheit 1 Cubikmeter und als Krafteinheit das Gewicht eines Kilogramms gewählt, so ist, da ein Cubikmeter 1000 Liter enthält, $s = 1000$, also $S = 1000 D$.

Ist der Körper K homogen und ist durch Q das Gewicht dieses Körpers vom beliebigen Volum V und durch q das Gewicht des gleichen Volums V der Normalsubstanz bezeichnet, so ergibt sich aus den Gleichungen (3) und (1)

$$D = \frac{S}{s} = \frac{S \cdot V}{s \cdot V} = \frac{Q}{q} = \frac{M}{m},$$

d. h. man kann als Dichte D jene Zahl bezeichnen, welche angibt, wie oft das Gewicht q , bezw. die Masse m eines beliebigen Volums V der Normalsubstanz in dem Gewichte Q , bezw. in der Masse M des gleichen Volums V des homogenen Körpers K enthalten ist.

Aus (2) und (3) lässt sich durch Elimination von s die Beziehung zwischen absoluter Dichte μ (der Dichtigkeit) und der relativen Dichte D ermitteln; es ist nämlich

$$D \cdot s = \mu \cdot g \quad \dots \quad (4)$$

also $D = \mu \cdot \frac{g}{s}$ und $\mu = \frac{s}{g} \cdot D$, was durch Worte leicht ausdrücken ist.

Für Wasser als Normalsubstanz und bei Zugrundelegung des absoluten Maßsystems ist im (C. G. S.)-System, wie früher gezeigt wurde, $s = g$, d. h. das Gewicht eines cm^3 Wassers gleich 981 *Dyn*, daher zufolge Gleichung (4) $D = \mu$, d. h. der Zahlwert der Dichtigkeit identisch mit der Dichte, und im (M. K. S.)-System ist s als Gewicht eines Cubikmeters Wasser gleich dem 1000fachen Gewichte eines Kilogramms, welches letztere Gewicht 9·81 Krafteinheiten, nämlich $g = 9\cdot81$ Megadynen enthält, somit $s = 1000 g = 9810$ und zufolge (4) $\mu = 1000 D$.

§ 80. Schwerpunkte der Linien.

Ein lineares materielles Punktsystem, dessen materielle Punkte ohne Unterbrechung der Continuität einander folgen, wird eine materielle Linie genannt. So kann man z. B. einen sehr dünnen Draht,

nen dünnen Stab als eine materielle Linie ansehen. Entsprechen der ganzen Ausdehnung der Linie gleichen Längen auch gleiche Massen, so heißt die materielle Linie homogen, im anderen Falle aber heterogen.

Dementsprechend ist bei einer homogenen materiellen Linie

$$M = \mu_l \cdot L \dots (1)$$

wenn M die der beliebigen Länge L entsprechende Masse und $\mu_l = \frac{M}{L}$ die constante, in einem der Längeneinheit gleichen Längenelemente vertheilte Masse — die sogenannte lineare Dichtigkeit — bedeutet, und ebenso ist bei einer heterogenen materiellen Linie analog den entsprechenden Begriffen und Auseinandersetzungen des § 79 als mittlere lineare Dichtigkeit der innerhalb eines bestimmten Längenelementes $l = \Delta s$ befindlichen Masse $m = \Delta M$ der Quotient $\frac{\Delta M}{\Delta s}$ und als lineare Dichtigkeit μ_l in einem Punkte, dessen Bogendistanz von einem fixen Punkte O dieser Linie s ist, der Differentialquotient $\mu_l = \frac{dM}{ds}$ zu bezeichnen, der dann als eine Function von s anzusehen ist.

Diesen Gleichungen zufolge ist die lineare Dichtigkeit μ_l von der Dimension $m l^{-1}$.

Da μ_l für eine jede homogene materielle Linie, welche in Folgendem stets vorausgesetzt wird, constant ist, so führt die Einsetzung des Wertes M aus (1) und des entsprechenden Wertes $m = \mu_l \cdot l$ in die Gleichung (3), bzw. (4) des § 78 nach der Division durch μ_l zu den Gleichungen

$$LX = \Sigma (lx), LY = \Sigma (ly), LZ = \Sigma (lz) \dots (2)$$

wo xyz die Coordinaten des Schwerpunktes irgend eines Längenelementes l der Linie und XYZ jene des Schwerpunktes der ganzen Linie L bedeuten. Diese Gleichungen, welche ausdrücken, dass bei homogenen materiellen Linien das Schwerpunktsmoment der ganzen Linie L bezüglich einer beliebigen der drei Coordinatenebenen der Summe der analogen Schwerpunktsmomente der einzelnen Längenelemente l gleich ist, zeigen, dass bei homogenen materiellen Linien die Schwerpunktslage von μ_l ganz unabhängig und bloß von der Form und der Länge der Linie, also nur von geometrischen Größen allein abhängig ist, weshalb auch in der Folge kurzweg von Schwerpunkten der geometrischen Linien die Rede ist.

Wird statt l in den Gleichungen (2) ein unendlich kleines Längenelement ds eingeführt, dessen Coordinaten xyz sind, so geht das Summenzeichen Σ in ein Integralzeichen über, und es nehmen

dann die Gleichungen (2), wofern s vom Anfangspunkte der Linie gerechnet wird, die Form an:

$$LX = \int_0^L x ds, \quad LY = \int_0^L y ds, \quad LZ = \int_0^L z ds \quad (3)$$

Ist also die Linie durch ihre Gleichungen $y = f(x)$ und $z = \varphi(x)$ bestimmt, sind demnach auch die Ableitungen $y' = f'(x)$ und $z' = \varphi'(x)$ durch x ausdrückbar, so lässt sich durch Ausführung der in (3) angedeuteten Integrationen, nachdem bei Zugrundelegung orthogonaler Coordinaten $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2 + [\varphi'(x)]^2} dx$ und $L = \int ds$ gesetzt worden ist, XYZ bestimmen.

Anmerkung 1. Ist die materielle Linie nicht homogen, so ist in den Gleichungen (3) zufolge der Gleichungen (3), S. 469, offenbar $dM = \mu_1 \cdot ds$ an die Stelle von ds und $M = \int dM = \int_0^L \mu_1 \cdot ds$ an die Stelle von L einzusetzen.

Der Mittelpunkt einer homogenen geraden Linie ist dem Lehrsatz (g), S. 472, gemäß ihr Schwerpunkt und daher, wenn $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ die Coordinaten der Endpunkte dieser Geraden sind, XYZ durch die arithmetischen Mittel

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad Y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad Z = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad \dots \quad (4)$$

ausgedrückt.

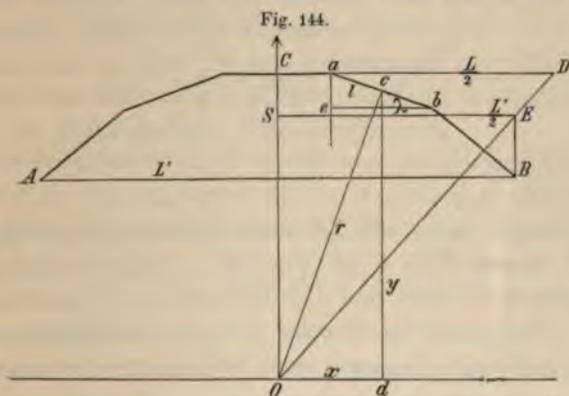
Denselben Lehrsatz (g), bzw. (f) des § 78 zufolge ist z. B. der Schwerpunkt des Umfanges eines Parallelogrammes oder eines regulären Polygons, der Peripherie des Kreises, der Ellipse u. s. w. deren Mittelpunkt, da alle diese Linien centrisch um denselben gelagert sind, beziehungsweise da dieser Punkt der Durchschnittspunkt mehrerer Symmetrieachsen ist.

Sind $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2 \dots$ die Coordinaten der Mittelpunkte der einzelnen Seiten $l_1 l_2 \dots$ eines beliebigen Polygonalzuges, so lässt sich die Lage des Schwerpunktes desselben mittels der Gleichungen (2) berechnen, und graphisch kann derselbe nach einer der auf S. 410, 448—450 erörterten Methoden leicht bestimmen, wobei man zugleich im entsprechenden Kräftepolygon die einzelnen Kräfte offenbar durch die Längen der einzelnen Seiten selbst darstellen kann.

Anmerkung 2. Wählt man z. B., um den Schwerpunkt S des Umfanges eines Dreiecks zu bestimmen, die Gerade, welche die Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten, etwa der Seiten l_1 und l_2 verbindet, zur x -Achse eines rechtwinkligen Achsensystems und bezeichnet durch h_3 die auf der dritten Seite l_3 senkrechte Dreieckshöhe, so ist $y_1 = y_2 = 0$ und $y_3 = \frac{h_3}{2}$, daher nach (2) $LY = l_3 y_3 = \frac{1}{2} l_3 h_3 = F$, wenn F die Dreiecksfläche und L den Dreiecksumfang bedeutet. Den

elben Normalabstand $Y = F:L$ hat offenbar der Schwerpunkt S von jeder anderen Seite jenes Dreiecks Δ , dessen Spitzen die Mittelpunkte der Dreiecksseiten $l_1 l_2 l_3$ sind, und es ist demnach der Mittelpunkt des diesem Dreiecke Δ eingeschriebenen Kreises der gesuchte Schwerpunkt S .

Ist ein ebener Polygonalzug \overline{ACabB} (Fig. 144) von der Länge L ein regulärer, also nicht nur $l_1 = l_2 = l_3 = \dots$, sondern auch sämtliche Polygonwinkel einander gleich, so ist der Schwerpunkt desselben [siehe S. 471 (f)] in der Symmetrieachse gelegen, welche bekanntlich bei einer ungeraden Seitenzahl (Fig. 144) durch den Mittelpunkt C der mittleren Seite geht und auf dieser senkrecht steht, bei einer geraden Seitenanzahl aber den mittleren Polygonwinkel halbiert.



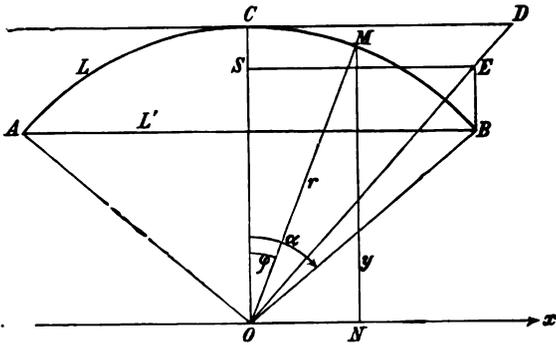
Wählt man diese Symmetrieachse zur y -Achse und eine durch den Mittelpunkt O des dem Polygonalzug eingeschriebenen Kreises, dessen Radius $\overline{OC} = r$ sei, zur y -Achse geführte Normale zur x -Achse, so ist dementsprechend $X = 0$ und zufolge (2) $Y = \frac{\Sigma (ly)}{L}$. Ist nun c der Mittelpunkt einer beliebigen Seite $\overline{ab} = l$ und cd die Ordinate y desselben, ferner ae und $be = \lambda$ zur y -, bzw. x -Achse parallel, so sind die Dreiecke abe und Ocd , deren Seiten auf einander senkrecht stehen, ähnlich, daher $l:\lambda = r:y$, somit $ly = r\lambda$ und $Y = \frac{\Sigma (ly)}{L} = \frac{\Sigma (r\lambda)}{L} = \frac{r \cdot \Sigma \lambda}{L}$. Da nun $\Sigma \lambda$ offenbar der Schlusssehne $\overline{AB} = L'$ gleich ist, so ist

$$Y = r \cdot \frac{L'}{L} \dots (5)$$

Es besteht demnach die Proportion $Y:r = L':L$. Führt man also an den eingeschriebenen Kreis in jenem Punkte C der Symmetrieachse, in welchem diese von dem eingeschriebenen Kreise geschnitten wird, für welchen sonach $\overline{OC} = r$ wird, die zur Symmetrieachse

senkrechte Tangente \overline{CD} von der halben Länge $\frac{L}{2}$ des Polygonalzug, zieht DO , führt ferner $BE \parallel y$ und $ES \parallel x$, so ist S der gesuchte Schwerpunkt, denn es verhält sich dann in der That $OS:OC = SE:CD = \frac{L'}{2}:\frac{L}{2} = L':L$.

Fig. 145.



Das Gesagte findet offenbar auch Anwendung auf einen Kreisbogen AB , dessen Mitte C ist (Fig. 145). Es ist der Schwerpunkt S zunächst gelegen in dem den Centriwinkel AOB halbierenden Radius OC . Wird nun die Strecke CD in der Richtung der dem Punkte C zugehörigen Tangente dem rectificierten halben Kreisbogen $\overline{CB} = \frac{1}{2}L$ an Größe gleich gemacht, D mit O verbunden, und wie früher $BE \parallel OC$, $ES \perp OC$ geführt, so ist durch diese Construction der Schwerpunkt S des Kreisbogens bestimmt. Bezeichnet man die Hälfte des Centriwinkels AOB durch α , so ist die Sehne $L' = 2r \sin \alpha$ und $L = 2r\alpha$, daher

$$OS = Y = r \cdot \frac{L'}{L} = r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \dots (6)$$

Demnach ist das Schwerpunktsmoment $L \cdot Y$ des Kreisbogens L gleich dem Producte aus dem Radius r und der Sehne L' .

Anmerkung 3. Die Gleichung (6) lässt auch die geometrische Bedeutung des dem Verhältnisse $OS:OC$ gleichen, in der mathematischen Analysis häufig benützten Verhältnisses $(\sin \alpha : \alpha)$ erkennen. Je kleiner α angenommen wird, desto näher rückt der Schwerpunkt S des Bogens ACB an C , so dass der Grenzwert dieses Verhältnisses $(\sin \alpha : \alpha)$ Eins ist.

Zu derselben Gleichung (6) würde man auch gelangen, wenn man von der Gleichung (3) $LY = \int y ds$ ausgehen würde; denn es ist (siehe Fig. 145) $y = r \cos \varphi$ und $ds = r \cdot d\varphi$, ferner $L = 2r\alpha$, somit $2r\alpha \cdot Y = \int_{-\alpha}^{\alpha} r^2 \cdot \cos \varphi d\varphi = r^2 \cdot 2 \sin \alpha$, somit $Y = r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}$.

Für die halbe Kreisperipherie ist z. B. $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha = 1$ zu setzen, daher $Y = \frac{2}{\pi} \cdot r = \frac{7}{11} r = 0.637 r$.

§ 81. **Schwerpunkte der Flächen im allgemeinen und der polygonalen ebenen Flächen im besonderen.**

Unter einer materiellen Fläche ist ein System von materiellen Punkten zu verstehen, die längs irgend einer geometrischen Fläche lerart stetig vertheilt sind, dass es keine Stelle der Fläche gibt, an er sich nicht ein materieller Punkt befinden würde.

Diesem Begriffe entspricht nahezu eine ebene oder gebogene Platte (Scheibe), deren Dicke ungemein gering ist.

Entsprechen in der ganzen Ausdehnung der Fläche gleichen flächenelementen auch gleiche Massen, so heißt die materielle Fläche homogen, im gegentheiligen Falle heterogen.

Dieser Definition einer homogenen materiellen Fläche gemäß ist, wenn die in der beliebigen Fläche F enthaltene Masse durch M bezeichnet wird, M proportional zu F , also

$$M = \mu_f \cdot F \quad \dots \quad (1)$$

wo μ_f eine constante Größe ist, und zwar bedeutet μ_f , da, wenn $F = 1$ wird, $\mu_f = M$ ist, die in der Flächeneinheit vertheilte Masse – die sogenannte Flächendichtigkeit. Analog den entsprechenden Begriffen des § 79 und 80 ist bei einer heterogenen materiellen Fläche als mittlere oder durchschnittliche Dichtigkeit innerhalb des flächenelements $f = \Delta F$ der Differenzenquotient $\frac{\Delta M}{\Delta F}$ und als Flächendichtigkeit μ_f in einem bestimmten Punkte der materiellen Fläche der Differentialquotient $\mu_f = \frac{dM}{dF}$, der dann als eine Function der Coordinaten des Punktes anzusehen ist, zu bezeichnen.

Aus der Gleichung (1) ist sofort zu ersehen, dass μ_f eine Größe von der Dimension $m \cdot l^{-2}$ ist.

Setzt man die aus dem Begriffe einer homogenen materiellen Fläche gefolgerten Werte $M = \mu_f \cdot F$ und $m = \mu_f \cdot f$ in die Gleichungen (3) und (4) auf S. 469 und 470 ein und dividirt dieselben durch den constanten Factor μ_f , so findet man

$$FX = \Sigma (f\xi), \quad FY = \Sigma (f\eta), \quad FZ = \Sigma (f\zeta) \quad (2)$$

wo $\xi \eta \zeta$ die Coordinaten der Schwerpunkte der einzelnen Flächenheile f und XYZ die Coordinaten des Schwerpunktes der ganzen Fläche F bedeuten. Diesen Gleichungen zufolge ist die Bestimmung der Schwerpunktslage bei einer homogenen materiellen Fläche,

welche im Folgenden stets vorausgesetzt werden soll, wenn von einer Fläche überhaupt die Rede ist, bloß von der Gestalt und Größe der Fläche F abhängig, also lediglich ein rein geometrisches Problem.

Durch Worte lässt sich das durch die Gleichungen (2) ausgedrückte Gesetz folgendermaßen aussprechen: Bei einer homogenen materiellen Fläche ist das Schwerpunktsmoment der ganzen Fläche F bezüglich einer jeden Momentenebene (Coordinatenebene) stets gleich der Summe der Schwerpunktsmomente sämtlicher Flächentheile bezüglich derselben Ebene.

Ist dF ein unendlich kleines Flächenelement, und sind ξ, η, ζ die Coordinaten des Schwerpunktes desselben, so ist den Gleichungen (2) zufolge

$$FX = \int_0^F \xi dF, \quad FY = \int_0^F \eta dF, \quad FZ = \int_0^F \zeta dF \quad (3)$$

wo die Integration auf die ganze Fläche F sich erstreckt.

Hat eine Fläche einen Centralpunkt O oder zwei im Punkte O sich schneidende Symmetrieachsen, so ist der Punkt O den Sätzen (f) und (g) auf S. 471 und 472 gemäß der Schwerpunkt der Fläche; es ist demnach der Schwerpunkt der Fläche eines Parallelogramms, eines regulären Polygons, einer Kreisfläche, einer Ellipse, der Begrenzungsfläche eines Ellipsoids u. s. w. der Mittelpunkt dieser Flächen.

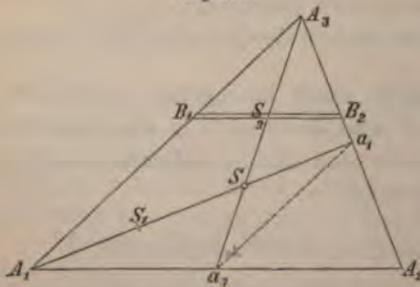
Anmerkung 1. Es ist dementsprechend irgend eine der linearen Coordinaten des Schwerpunktes eines Parallelogramms das arithmetische Mittel der parallelen Coordinaten der Endpunkte irgend einer Diagonale, daher auch das arithmetische Mittel der entsprechenden Coordinaten der vier Eckpunkte des Parallelogramms.

Um den Schwerpunkt eines Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ (Fig. 146) zu bestimmen, denke man sich dasselbe durch unendlich viele, in ungemein kleinen Distanzen geführte Parallele zu irgend einer Seite $A_1 A_2$ in lauter als homogene materielle gerade Linien anzusehenden Elemente, wie z. B. $B_1 B_2$ getheilt.

Die Mittelpunkte S_2 aller dieser Geraden $B_1 B_2$ liegen nach einem bekannten Satze der Planimetrie in jener Geraden $A_3 a_3$, die den Mittelpunkt a_3 der Seite

$A_1 A_2$ mit der gegenüberliegenden Dreiecksspitze A_3 verbindet, und es muss demnach diese Mittellinie (Mediane) $A_3 a_3$ nach dem Satze (c) oder (d) auf S. 470 und 471 eine Schwerachse sein. Aus gleichem

Fig. 146.



Grunde ist die die Spitze A_1 mit dem Mittelpunkte a_1 der Gegenseite $A_2 A_3$ verbindende Mediane $A_1 a_1$ eine Schwerachse, und es ist daher der Durchschnittspunkt S von $A_1 a_1$ und $A_3 a_3$ der Dreiecksschwerpunkt. Es ist aber nicht einmal nothwendig, zwei Medianen $A_3 a_3$ und $A_1 a_1$ zu ziehen, sondern man hat nur die eine Mediane $A_3 a_3$ in drei gleiche Theile zu theilen, um sofort in jenem Theilpunkte S , der der halbierten Dreiecksseite $A_1 A_2$ am nächsten gelegen ist, den Schwerpunkt zu erhalten, wie folgende einfache Schlussfolgerung lehrt:

Da die Dreiecksseiten $A_2 A_3$ und $A_1 A_2$ in den Punkten a_1 und a_3 halbiert sind, so ist bekanntlich $a_1 a_3 \parallel A_1 A_3$ und $\frac{a_1 a_3}{A_1 A_3} = \frac{1}{2}$; ferner ist $\triangle a_1 a_3 S \sim \triangle A_1 A_3 S$ und daher $\frac{S a_3}{S A_3} = \frac{a_1 a_3}{A_1 A_3} = \frac{1}{2}$, so dass $S a_3 = \frac{1}{2} S A_3$, also $S a_3 = \frac{1}{3} A_3 a_3$ und $A_3 S = \frac{2}{3} A_3 a_3$ ist.

Dieselbe Regel lässt sich mit Hilfe der ersten Gleichung (3) auch folgendermaßen ableiten: Wählt man etwa die Mediane $A_3 a_3$ zur x -Achse eines schiefwinkligen Achsensystems, dessen Anfangspunkt A_3 und dessen y -Achse parallel zu $A_1 A_2$ ist, und bezeichnet durch α den Winkel $A_3 a_3 A_2$, so ist für den obbetrachteten Flächenstreifen dF , dessen Länge $\overline{B_1 B_2} = u$ ist, $\overline{A_3 S} = \xi = x$ und seine Breite $d x \cdot \sin \alpha$, sonach $dF = u \sin \alpha \cdot d x$, und wenn a die Länge der Mediane $A_3 a_3$ und b die Dreiecksbasis $A_1 A_2$ bedeutet, $u : b = x : a$, sonach $u = \frac{b}{a} x$, $dF = \frac{b}{a} \sin \alpha \cdot x d x$, ferner

$$FX = \int_0^F \xi dF = \frac{b}{a} \sin \alpha \cdot \int_0^a x^2 d x = \frac{b}{a} \sin \alpha \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3} a^2 b \sin \alpha$$

$$F = \int_0^F dF = \frac{b}{a} \sin \alpha \int_0^a x d x = \frac{b}{a} \sin \alpha \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} a b \sin \alpha.$$

Die Division der beiden Gleichungen lehrt, dass in der That $X = \overline{A_3 S} = \frac{2}{3} a$ ist.

Zerlegt man die resultierende Schwerkraft Q , deren unveränderlicher Angriffspunkt bei jeder Lage des Dreiecks der Punkt S ist, zunächst in zwei gleichgerichtete Componenten Q_3 und q_3 , deren Angriffspunkte A_3 und a_3 sind, und q_3 wieder in zwei gleichgerichtete Componenten Q_1 und Q_2 mit den Angriffspunkten A_1 und A_2 , so ist nach der Gleichung (4) S. 378 $\frac{Q_3}{S a_3} = \frac{q_3}{A_3 S} = \frac{Q}{A_3 a_3}$, daher $Q_3 =$

$$= \frac{S a_3}{A_3 a_3} \cdot Q = \frac{1}{3} Q \text{ und } q_3 = \frac{A_3 S}{A_3 a_3} Q = \frac{2}{3} Q \text{ und bei der zweiten}$$

Zerlegung nach demselben Satze $Q_1 = Q_2 = \frac{1}{2} q_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} Q = \frac{1}{3} Q$.

Es sind sonach die drei Componenten $Q_1 Q_2 Q_3$, die zugleich (siehe S. 466) den Druck auf die Unterstützungspunkte $A_1 A_2 A_3$ eines in

diesen Punkten durch eine horizontale Ebene unterstützten schweren homogenen materiellen Dreiecks (den etwa von einem jeden von drei Trägern einer homogenen dreieckförmigen Platte auszuhaltenden Druck) bestimmen, einander gleich.

Da der Punkt S offenbar zugleich der Mittelpunkt der drei Kräfte $Q_1 Q_2 Q_3$ ist, so ist, wenn XYZ , bezw. $x_1 y_1 z_1$, bezw. $x_2 y_2 z_2$, bezw. $x_3 y_3 z_3$ die Coordinaten des Punktes S , bezw. A_1 , bezw. A_2 , bezw. A_3 sind, nach dem Momentensatze für parallele Kräfte (siehe S. 448)

$$Q X = Q_1 x_1 + Q_2 x_2 + Q_3 x_3 = \frac{1}{3} Q [x_1 + x_2 + x_3] \text{ u. s. w.,}$$

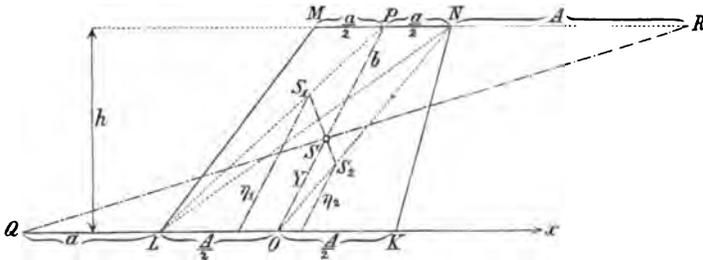
daher

$$X = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad Z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \quad (4)$$

d. h. es ist eine jede der Schwerpunktscoordinaten das arithmetische Mittel aus den entsprechenden Coordinaten der Eckpunkte des Dreiecks — analog dem gleichlautenden Satze für die Schwerpunktscoordinaten einer Geraden oder eines Parallelogramms.

Der Schwerpunkt S eines Trapezes $KLMN$ (Fig. 147) ist zunächst, aus denselben Gründen wie beim Dreiecke, nach dem Satze (c) oder (d) (S. 470 und 471) in der Geraden OP gelegen, welche die Mittelpunkte O und P der beiden parallelen Trapezseiten LK und MN verbindet, da OP alle zu LK parallelen Sehnen halbiert.

Fig. 147.



Sind nun S_1 und S_2 die Schwerpunkte der Dreiecke LMN und NKL , in welche das Trapez durch irgend eine Diagonale LN getheilt wird, ist also $S_1 L = \frac{2}{3} \cdot PL$ und $O S_2 = \frac{1}{3} \cdot ON$, so ist nach § 78 c (S. 470) auch in $S_1 S_2$ der Schwerpunkt des Trapezes gelegen, daher ist der Durchschnittspunkt S von $S_1 S_2$ mit OP der gesuchte Schwerpunkt.

Wählt man die Mittellinie OP zur y -Achse und OK zur x -Achse eines im allgemeinen schiefwinkligen Coordinatensystems und sind

η_1 und η_2 die Ordinaten der Schwerpunkte S_1 und S_2 (s. Fig. 147), ferner $LK = A$, $MN = a$, $OP = b$ und h die Höhe des Trapezes, so ist im $ALOP$, da $S_1L = \frac{2}{3} PL$ und $\eta_1 \parallel b$ ist, auch $\eta_1 = \frac{2}{3} b$, und ebenso muss, weil $OS_2 = \frac{1}{3} ON$ ist, auch $\eta_2 = \frac{1}{3} b$ sein, wie man sofort ersieht, wenn man von S_2 eine Parallele zur x -Achse führt.

Zufolge der Gleichung (2), die, wie nachgewiesen wurde, auch für schiefwinklige Achsen Giltigkeit hat, ist $FY = f_1\eta_1 + f_2\eta_2$, wenn durch f_1 und f_2 die Flächeninhalte der Dreiecke LMN und NKL bezeichnet sind. Setzt man in der letzten Gleichung für F , f_1 , f_2 , η_1 und η_2 die Werte ein, so findet man

$$(A + a) \cdot \frac{h}{2} Y = a \cdot \frac{h}{2} \eta_1 + A \cdot \frac{h}{2} \eta_2 = a \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} b + A \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{3} b$$

also

$$\overline{OS} = Y = \frac{1}{3} b \cdot \frac{A + 2a}{A + a} \quad (5)$$

Dieselbe Formel ließe sich auch in analoger Weise derart ableiten, dass man das Trapez durch eine etwa von N aus zu LM parallele Gerade NT in ein Parallelogramm $f_1 = \overline{MNTL} = a \cdot h$ und ein Dreieck $f_2 = \overline{NTK} = (A - a) \cdot \frac{h}{2}$ theilt, dessen Schwerpunkte S_1 und S_2 dann offenbar die Ordinaten $\eta_1 = \frac{b}{2}$ und $\eta_2 = \frac{b}{3}$ haben.

Auf dieselbe Art kann man finden, dass $\overline{SP} = b - Y = \frac{1}{3} b \cdot \frac{a + 2A}{a + A}$ ist, so dass $OS : SP = (A + 2a) : (a + 2A) = \left(\frac{A}{2} + a\right) : \left(\frac{a}{2} + A\right)$ ist.

Verlängert man die letzten Proportion gemäß die beiden Grundlinien nach entgegengesetzten Seiten, und zwar A um a und a um A (s. Fig. 147) und verbindet die so erhaltenen Punkte Q und R , so ist der Punkt, in welchem die Gerade QR die Mittellinie OP schneidet, der Schwerpunkt S , wie dies die Ähnlichkeit der Dreiecke OQS und PRS und die letzte Proportion lehren.

Würde man die eine der nicht parallelen Seiten, etwa $\overline{LM} = c$ zur Abscissenachse und eine der parallelen Trapezseiten, etwa $LK = A$ zur Ordinatenachse eines im allgemeinen schiefwinkligen Achsensystems wählen, so könnte man zur Bestimmung der Coordinaten $\xi \eta$ des Schwerpunktes S die aus bekannten geometrischen Gründen

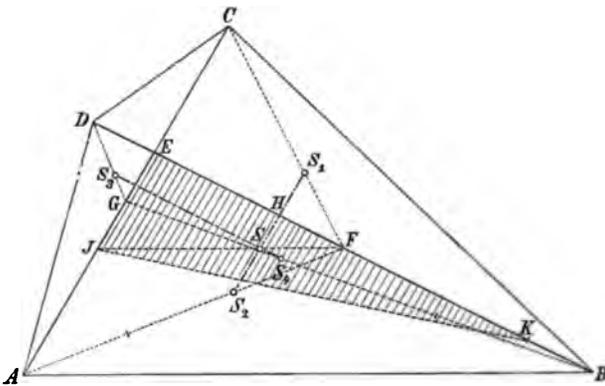
giltigen Proportionen $\frac{\xi}{c} = \frac{\frac{A}{2} - \eta}{\frac{A}{2} - a} = \frac{Y}{b}$ benutzen, aus welchen sich

nach Einsetzung des Wertes von Y aus (5) ergibt:

$$\xi = \frac{1}{3} c \cdot \frac{A + 2a}{A + a}, \quad \eta = \frac{1}{3} \frac{A^2 + Aa + a^2}{A + a} \quad \dots (6)$$

Der Schwerpunkt S eines Trapezoids $ABCD$ (Fig. 148) ließe sich constructiv offenbar derart bestimmen, dass man durch die im Punkte E sich unter den Neigungswinkel α schneidenden Diagonalen AC und BD , deren Mittelpunkte G und F seien, das Viereck in Dreiecke zerlegt, ferner zunächst die Schwerpunkte S_1 , bezw. S_2 der Dreiecke CBD , bezw. ADB und dadurch die Schwerlinie $S_1 S_2$ bestimmt,

Fig. 148.



hierauf die Schwerpunkte S_3 und S_4 der Dreiecke ACD und ACB sucht und den Durchschnittspunkt S der Schwerlinien $S_1 S_2$ und $S_3 S_4$ bestimmt, welcher der gesuchte Schwerpunkt ist. Da nun in dem Dreiecke FCA sowohl $FS_1 = \frac{1}{3} FC$ als auch $FS_2 = \frac{1}{3} FA$ ist, so ist $S_1 S_2 \parallel CA$ und daher, wenn H der Durchschnittspunkt der Geraden $S_1 S_2$ und BD ist, $\frac{HS_2}{S_1 H} = \frac{EA}{CE}$. Da ferner der Schwerpunkt S der Mittelpunkt der in S_1 und S_2 wirkend gedachten, den Flächen f_1 und f_2 der Dreiecke CDB und ADB proportionalen parallelen Schwerkräfte ist, so ist $\frac{S_1 S}{S S_2} = \frac{f_2}{f_1}$. Da aber die Dreiecke f_2 und f_1 dieselbe Basis DB haben, sich daher so verhalten wie die von A und C auf diese Basis gefällten Höhen $EA \sin \alpha$ und $CE \sin \alpha$, also auch wie EA und CE , so ist $\frac{S_1 S}{S S_2} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{EA}{CE}$, daher auch $\frac{S_1 S}{S S_2} = \frac{HS_2}{S_1 H}$ oder $\frac{HS_2}{S_1 S} = \frac{S_1 H}{S S_2} = \frac{S_1 H + HS_2}{S_1 S + S S_2} = \frac{S_1 S_2}{S_1 S_2} = 1$, somit $HS_2 = S_1 S$ und $S_1 H = S S_2$. Es kann also in der Schwerlinie $S_1 S_2$, die durch die Diagonale BD in H geschnitten wird, ohne die zweite Schwerlinie $S_3 S_4$ construieren zu müssen, die Lage von S sofort bestimmt werden,

man den Abschnitt S_1H vom anderen Endpunkte S_2 aus nach entgegengesetzter Richtung bis S aufträgt.

Verbindet man den Mittelpunkt F der Diagonale BD mit S und verlängert diese Gerade bis zum Durchschnitte J mit der zweiten Diagonale AC , so ist, weil $S_1S_2 \parallel CA$ ist und weil innerhalb des von F ausgehenden Strahlenbüschels $S_1H = SS_2$ ist, auch $CE = JA$, so dass umgekehrt die Lage der Schwerlinie JSF leicht im voraus zu bestimmen ist, wenn man gleich nach der Zeichnung der beiden Diagonalen den Abschnitt CE der ersten Diagonale CA von A aus in entgegengesetzter Richtung bis J aufträgt und J mit dem Mittelpunkt F der zweiten Diagonale DB verbindet. Aus demselben Grunde würde man eine zweite Schwerlinie erhalten, wenn man den Abschnitt DE dieser zweiten Diagonale DB von B aus in entgegengesetzter Richtung bis K aufträgt, so dass $DE = KB$ wird, und man K mit dem Mittelpunkte G der ersten Diagonale CA verbindet. Da aber G und F auch die Mittelpunkte von EJ und EK sind, so ergibt sich auch folgende einfache Constructionsregel: Man ziehe die beiden Diagonalen CA und DB , bestimme ihren Durchschnittspunkt E , mache $JA = CE$ und $KB = DE$ und suche den Schwerpunkt S des so erhaltenen (in der Fig. 148 schraffirten) Dreiecks JK oder, was offenbar auf das gleiche hinauskommt, des Dreiecks BJD oder des Dreiecks AKC .

Anmerkung 2. Dass der Schwerpunkt des Trapezoids mit dem Schwerpunkte des letztgenannten Dreiecks AKC übereinstimmt, ersieht man sofort schon daraus, dass die Schwerpunkte S_1 und S_2 der dreieckförmigen Theilflächen BD und ABD des Trapezoids nicht nur mit jenen der Theilflächen CEK und AEK des Dreiecks AKC übereinstimmen, sondern überdies die ersterwähnten Theilflächen, welche eine gemeinsame Grundlinie BD besitzen, ihren Höhen, so auch den letzteren Theilflächen direct proportional sind.

Der Schwerpunkt S eines beliebigen ebenen Polygons von n Seiten lässt sich auf constructivem Wege am einfachsten auf folgende Weise bestimmen:

Man theile das ebene Polygon in Dreiecke $f_1 f_2 f_3 \dots$, indem man irgend einen Punkt O der Ebene des Polygons — am einfachsten einen Eckpunkt desselben — mit den längs des Umfanges einander folgenden Eckpunkten $A_1 A_2 A_3 \dots$ verbindet, so dass je zwei aufeinander folgende Dreiecke eine Seite gemeinsam haben. Es schließen dann die Seiten zweier derartiger Nachbardreiecke, z. B. f_1 und f_2 , wenn die gemeinsame Seite OA_2 außeracht gelassen wird, ein Viereck f_{12} ein, dessen Schwerpunkt S_{12} man nach Fig. 148 derart findet, dass man den Durchschnittspunkt H jener Geraden $S_1 S_2$, welche die Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Dreiecke f_1 und f_2 verbindet, mit der gemeinsamen Seite OA_2 dieser Dreiecke (der Diagonale des Vierecks f_{12}) bestimmt und die Strecke $S_1 H$ von S_2 aus in ent-

gegengesetzter Richtung auf $S_2 S_1$ abschneidet, also $S_{12} S_2 = S_1 H$ macht. Hat man auf diese Weise außer den Schwerpunkten S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 der aufeinander folgenden Dreiecke $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \dots$ auch die Schwerpunkte $S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{45} \dots$ der aus je zwei aufeinander folgenden Dreiecken gebildeten Vierecke $f_{12}, f_{23}, f_{34}, f_{45} \dots$ bestimmt, so führt folgende Erwägung rasch zur einfachsten Art der Bestimmung des Schwerpunktes S . Der Schwerpunkt S_{123} des aus den Dreiecken $f_1 f_2 f_3$ gebildeten Fünfecks f_{123} muss einerseits, da dasselbe aus dem Vierecke f_{12} mit dem Schwerpunkte S_{12} und aus dem Dreiecke f_3 mit dem Schwerpunkte S_3 besteht, in der Geraden $S_{12} S_3$ gelegen sein, andererseits muss aus analogen Gründen, da f_{123} aus dem Dreiecke f_1 und dem Vierecke f_{23} besteht, auch $S_1 S_{23}$ eine Schwerlinie sein, und es ist demnach der Schwerpunkt S_{123} der Durchschnittspunkt der Geraden $S_{12} S_3$ und $S_1 S_{23}$. Auf ähnliche Art ergibt sich hierauf der Schwerpunkt S_{1234} des aus den Dreiecken $f_1 f_2 f_3 f_4$ gebildeten Sechsecks f_{1234} als der Durchschnittspunkt der Geraden $S_{123} S_4$ und $S_{12} S_{34}$, hierauf S_{12345} als Durchschnitt von $S_{1234} S_5$ mit $S_{123} S_{45}$ u. s. w. Der letzte der auf diese Weise bestimmten Durchschnittspunkte ist der gesuchte Schwerpunkt S des Polygons. Das hier Gesagte gilt auch dann, wenn einzelne der Dreiecke $f_1 f_2 f_3 \dots$ ganz oder theilweise außerhalb des Polygons gelegen sind.

Um die orthogonalen Coordinaten XY des Schwerpunktes eines ebenen Polygons von n Seiten, dessen Fläche F sei, zu berechnen, wenn die orthogonalen Co-

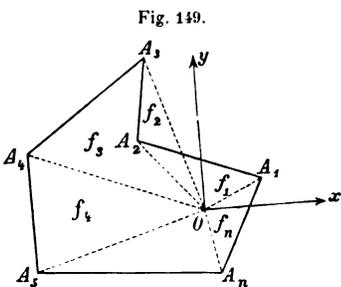


Fig. 149.

ordinaten $(x_1 y_1), (x_2 y_2), \dots (x_n y_n)$ der unmittelbar aufeinander folgenden Eckpunkte $A_1 A_2 \dots A_n$ (Fig. 149) des Polygons gegeben sind, denke man sich den beliebig gewählten Koordinatenanfangspunkt O mit diesen Eckpunkten verbunden, wodurch man, wie früher, die Dreiecke $O A_1 A_2, O A_2 A_3, \dots O A_n A_1$ erhalte, deren Flächeninhalte $f_1 f_2 \dots f_n$

und deren Schwerpunkte $(\xi_1 \eta_1), (\xi_2 \eta_2) \dots (\xi_n \eta_n)$ seien. Zuzufolge der Gleichung (2) ist

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{f_1 \xi_1 + f_2 \xi_2 + \dots + f_n \xi_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} \\ Y &= \frac{f_1 \eta_1 + f_2 \eta_2 + \dots + f_n \eta_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ist $O A A'$ (Fig. 150) eines dieser Dreiecke f und ist h dessen Höhe, ferner $O \bar{A} = r, O \bar{A}' = r', (x r) = \varphi$ und $(x r') = \varphi'$, so ist offenbar

$= r h = r r' \sin (\varphi' - \varphi) = [r \cos \varphi \cdot r' \sin \varphi' - r \sin \varphi \cdot r' \cos \varphi']$,
 $f = \frac{1}{2} (x y' - y x')$ und sonach $f_1 = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - y_1 x_2)$, $f_2 = \frac{1}{2} (x_2 y_3 - y_2 x_3)$, . . . , $f_n = \frac{1}{2} (x_n y_1 - y_n x_1)$. Substituiert man

die Werte $\xi_1 = \frac{0 + x_1 + x_2}{3}$ und die Werte für die Coordinaten der Dreiecksschwerpunkte, die der Gleichung (4) zufolge $\xi_1 = \frac{0 + x_1 + x_2}{3} = \frac{x_1 + x_2}{3}$, $\eta_1 = \frac{0 + y_1 + y_2}{3} = \frac{y_1 + y_2}{3}$,
 $= \frac{x_2 + x_3}{3}$, $\eta_2 = \frac{y_2 + y_3}{3}$, . . . , $\xi_n = \frac{x_n + x_1}{3}$, $\eta_n = \frac{y_n + y_1}{3}$ sind, in die Gleichungen (7), so sind X und Y durch die Coordinaten der Eckpunkte des Polygons ausgedrückt. Der Einfachheit halber wähle auch hier als Anfangspunkt O etwa den Eckpunkt A_1 , so dass $y_1 = 0$ wird.

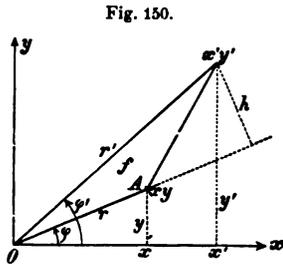


Fig. 150.

Die hier aufgestellten Formeln sind ganz allgemein gültig, denn es kann auch bei der Bestimmung von $F = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ einzelne der Dreiecksflächen f_1, f_2, \dots, f_n negativ zu rechnen sein (wie f_2 in Fig. 149), so ersieht man sofort, dass in diesem Falle ($\varphi' - \varphi$) negativ, also auch der entsprechende Wert von $f = \frac{1}{2} (x y' - y x')$ negativ wird, sowie auch übereinstimmend im entsprechenden Nennenden des Zählers in (7) das Schwerpunktsmoment von f subtrahiert werden, also f negativ in Rechnung kommen muss.

Übrigens lassen sich die Coordinaten X, Y des Schwerpunktes des Polygons mit Hilfe der Gleichungen (7) auch derart bestimmen, dass man ein beliebiges Koordinatensystem, dessen Coordinatenwinkel $(x, y) = \alpha$ sei, zugrunde legt und jene Seite f_r ins Auge fasst, die von den Ordinaten y_r und y_{r+1} zweier aufeinanderfolgender Eckpunkte A_r und A_{r+1} (deren Abscissen x_r und x_{r+1} sind) des Polygons, ferner von der Abscissenachse und der entsprechenden Polygonseite $A_r A_{r+1}$ eingeschlossen werden. Die Coordinaten (ξ_r, η_r) der Schwerpunkte dieser Trapeze f_r sind nach Gleichung (6), wenn daselbst aus einleuchtenden Gründen $c = x_{r+1} - x_r$, $A = y_r$, $a = y_{r+1}$, ferner $\xi = \xi_r - x_r$ und $\eta = \eta_r$ gesetzt wird,

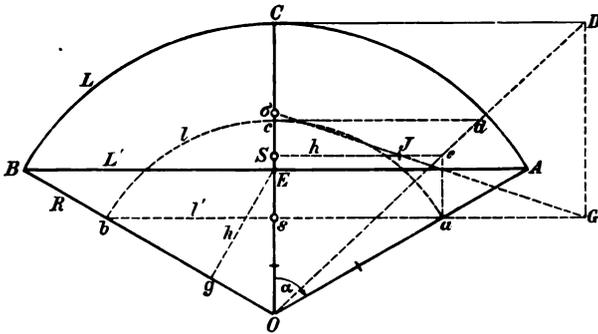
$$\xi_r = \frac{1}{3} \cdot \frac{x_r (2 y_r + y_{r+1}) + x_{r+1} (y_r + 2 y_{r+1})}{y_r + y_{r+1}}, \eta_r = \frac{1}{3} \cdot \frac{y_r^2 + y_r y_{r+1} + [y_{r+1}]^2}{y_r + y_{r+1}}$$

so dass mittels dieser letzten drei Gleichungen, wenn in denselben der Reihe nach $r = 1, 2, 3, \dots, n$ und $x_{n+1} = x_1, y_{n+1} = y_1$ gesetzt wird, die Schwerpunktscoordinaten X und Y aus den Gleichungen (7) berechnet werden können.

§ 82. Schwerpunkte ebener Flächen, die ganz oder zum Theil von Curven begrenzt sind.

Der Schwerpunkt S eines Kreissectors (Kreisausschnittes) $OBCA$ (Fig. 151), der einem Kreise vom Radius R angehört, liegt in dem den Centriwinkel $(AOB) = 2\alpha$ halbierenden Radius OC , da dieser eine Symmetrieachse darstellt. Wird nun der Centriwinkel 2α in n gleiche Theile getheilt, so wird dadurch auch der Kreisausschnitt $OBCA$ in n congruente elementare Sektoren getheilt, welche, wenn n ungemein groß angenommen wird, als Dreiecke betrachtet werden können, deren n Schwerpunkte in je einem der die elementaren Winkel $\frac{2\alpha}{n}$ halbierenden Radien, in dem Abstände $\frac{2}{3}R$ von O , somit in einem Bogen acb , dessen Radius $r = \frac{2}{3}R$ ist, und zwar in durchwegs gleichen Abständen sich befinden. Nach S. 470 muss daher der Schwerpunkt S des homogenen materiellen Kreissectors übereinstimmen mit dem Mittelpunkte der in den erwähnten Schwerpunkten wirksam gedachten n gleichen Schwerkkräfte, also,

Fig. 151.



da n unendlich groß angenommen werden kann, mit dem Schwerpunkte des homogenen materiellen Bogens acb , den man nach Art der Fig. 145 bestimmen kann. Man hat daher, um S auf constructivem Wege zu finden, zunächst den Radius $R = \overline{OA}$ in drei gleiche Theile zu theilen, mit dem Radius $r = \frac{2}{3}R = \overline{Oa}$ einen Kreisbogen acb (Fig. 151) zu beschreiben, in der Mitte c desselben $cd \perp cO$ zu führen, cd dem rectificierten halben Kreisbogen ca gleichzumachen, die Gerade OdD zu ziehen (zu der man ersichtlicher Weise auch einfacher gelangt, wenn man wie in Fig. 145 $CD \perp CO$ und $CD = \text{arc } CA$ construirt), ferner $ae \parallel OC$ und $es \perp OC$ zu führen.

Ist demnach wie auf S. 484 $L' = \text{chord } AB$, $L = \text{arc } ACB$, $l' = \text{chord } ab = \frac{2}{3} L'$ und $l = \text{arc } acb = \frac{2}{3} L$ und Y die gesuchte Stanz des Schwerpunktes S vom Kreismittelpunkte, so ist nach Gleichung (6), S. 484, $Y = r \cdot \frac{l'}{l} = \frac{2}{3} R \cdot \frac{L'}{L}$ oder

$$Y = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \dots (1)$$

Da $R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ die Ordinate des Schwerpunktes des Kreisbogens BCA ist, kann man der letzten Gleichung gemäß auch so vorgehen, dass man nach der Regel des § 80 den Schwerpunkt dieses Kreisbogens bestimmt und die Entfernung desselben vom Kreismittelpunkte O in drei gleiche Theile theilt. Der im Kreisbogen nächste Theilungspunkt S ist der Schwerpunkt des Kreissectors $OBCA$.

Für einen Halbkreis ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha = 1$, also $Y = \frac{4}{3\pi} R = \frac{14}{33} R = 0.4244 R$, für einen Quadranten $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $Y = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} R = 0.6002 R$, für einen Sextanten $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, daher (wie bei der halben Kreisperipherie) $Y = \frac{2}{\pi} R = \frac{7}{11} R = 0.6366 R$

s. w.

Der Schwerpunkt σ eines Kreissegments (Kreisabschnitts) $CBEA$ (Fig. 151) ist ebenfalls in der Symmetrieachse OC gelegen, und zwar lässt sich derselbe aus der früher bestimmten Lage des Schwerpunktes S des entsprechenden Kreissectors F und aus der bekannten Lage des Schwerpunktes s des das Kreissegment φ zum Sector F ergänzenden Dreiecks OAB , dessen Fläche f und dessen Höhe \overline{OE} durch H bezeichnet sei, folgendermaßen bestimmen: Zufolge der ersten Gleichung (2), S. 485, ist, wie sich sofort ergibt, wenn man etwa σO zur Abscissenachse und σ zum Anfangspunkte wählt, $F \cdot \overline{\sigma S} = f \cdot \overline{\sigma o} + f \cdot \overline{\sigma s} = f \cdot \overline{\sigma s}$, und da $F = R \cdot \frac{L}{2}$, $f = R \cdot h$ ist (wo h die vom Mittelpunkte E der Sehne AB auf einen der Endradien, z. B. auf OB geführte Normale Eg bedeutet), so ist $\frac{L}{2} \cdot \overline{\sigma S} = h \cdot \overline{\sigma s}$, also $S : \overline{\sigma s} = h : \frac{L}{2}$. Schneidet man daher auf den zu CO senkrechten Endradien Se und sa von den Schwerpunkten S und s aus die Strecken $\overline{Sj} = \overline{Eg} = h$ und $\overline{sG} = \overline{CD} = \frac{L}{2}$ ab und verlängert die die Punkte j und J verbindende Gerade bis zum Durchschnitte σ mit OC , so ist σ der letzten Proportion zufolge der gesuchte Schwerpunkt des Kreisabschnittes $ACBEA$.

Behufs der Berechnung von $\overline{O\sigma} = \eta$ ist bloß zu beachten, dass (wenn man, wie bisher, die griechischen Buchstaben für das Segment, die großen lateinischen für den Sector und die kleinen lateinischen für das Ergänzungsdreieck in Anwendung bringt) $Y = \overline{OS} = \frac{2}{3} R \cdot \frac{L'}{L}$, ferner $y = \overline{Os} = \frac{2}{3} \overline{OE} = \frac{2}{3} H$ und $F = R \cdot \frac{L}{2}$, $f = H \cdot \frac{L'}{2}$ ist, demnach lässt sich, da nach Gleichung (2), S. 485, $FY = fy + \varphi \cdot \eta$ ist, $\eta = \frac{FY - fy}{\varphi} = \frac{L'}{3} \cdot \frac{R^2 - H^2}{\varphi}$ setzen, und da $R^2 - H^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OE}^2 = \overline{BE}^2 = \left(\frac{L'}{2}\right)^2$ ist, so lässt sich η berechnen aus der Gleichung

$$\eta = \frac{1}{12} \cdot \frac{L'^3}{\varphi} \dots (2)$$

Nun ist fernerhin $L' = 2 R \sin \alpha$ und $\varphi = F - f = R \cdot \frac{L}{2} - H \cdot \frac{L'}{2} = R^2 \alpha - R^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} R^2 (2\alpha - \sin 2\alpha)$, so dass auch

$$\eta = \frac{4}{3} R \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \dots (3)$$

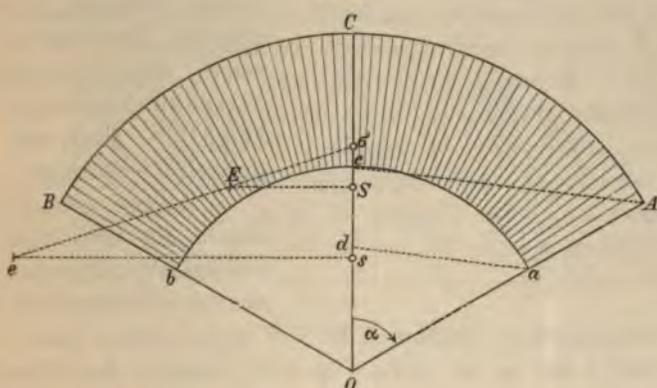
ist. Für einen Halbkreis ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, demnach wie früher $\eta = \frac{4}{3\pi} R$.

Anmerkung 1. Die Ordinate H des Schwerpunktes Σ (Abstand vom Kreiscentrum O) einer von zwei parallelen Kreissehnen A_0B_0 und AB und der Kreisperipherie eingeschlossenen Fläche Φ , die als Differenz zweier Kreissegmente φ_0 und φ ($\varphi_0 > \varphi$), deren Schwerpunkte σ_0 und σ sind, und denen die Mittelpunktwinkel $2\alpha_0$ und 2α entsprechen, betrachtet werden kann, ist offenbar zu berechnen aus $\Phi \cdot H = \varphi_0 \eta_0 - \varphi \eta$. Da nun nach (2) $\varphi \eta = \frac{1}{12} L'^2 = \frac{2}{3} R^2 \sin^3 \alpha$ und $\varphi_0 \eta_0 = \frac{2}{3} R^2 \sin^3 \alpha_0$ ist, und da ferner $\Phi = \varphi_0 - \varphi = \frac{1}{2} R^2 (2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0) - \frac{1}{2} R^2 (2\alpha - \sin 2\alpha)$ ist, so ist H durch R , α und α_0 leicht auszudrücken. Nimmt man den Kreismittelpunkt O zum Anfangspunkt und OC (Fig. 151) zur x -Achse eines rechtwinkligen Achsensystems an und bezeichnet durch xy die Coordinaten des Punktes A und durch $x_0 y_0$ jene des Punktes A_0 , so dass $x = R \cos \alpha$, $y = R \sin \alpha = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x_0 = R \cos \alpha_0$, $y_0 = R \sin \alpha_0 = \sqrt{R^2 - x_0^2}$, $\alpha = \arccos \frac{x}{R}$, $\alpha_0 = \arccos \frac{x_0}{R}$ ist, so ist durch die Einsetzung in den zuletzt gefundenen Wert von Φ jene Fläche bestimmt, die bekanntlich auch durch das Integral $\Phi = \int_{x_0}^x 2y dx = \int_{x_0}^x 2\sqrt{R^2 - x^2} dx$ ihren Ausdruck findet und es ist demgemäß stets das letzte Integral bestimmt durch die Differenz

$$\Phi = \left[R^2 \arccos \frac{x_0}{R} - x_0 \sqrt{R^2 - x_0^2} \right] - \left[R^2 \arccos \frac{x}{R} - x \sqrt{R^2 - x^2} \right].$$

Der Schwerpunkt σ der Fläche φ eines Ringsectors (Kreisbandes) $\overline{ACBbca} = \varphi$ (Fig. 152), der die Differenz zweier concentrischer, demselben Centriwinkel $AOB = 2\alpha$ zugehöriger Kreissectoren $\overline{OACB} = F$ und $\overline{Oacb} = f$ ist, deren Schwerpunkte S und s sich in der früher auseinandergesetzten Weise bestimmen lassen, lässt sich aus der bekannten Lage von S und s auf constructivem Wege in analoger Weise, wie dies beim Kreissegment geschehen ist, ermitteln.

Fig. 152.



Auch hier ist nämlich $F \cdot \overline{\sigma S} = f \cdot \overline{\sigma s}$, und da $F = R^2 \alpha$ und $f = r^2 \alpha$ ist, wenn R und r die Radien der concentrischen Bogen AB und ab sind, so muss $R^2 \alpha \cdot \overline{\sigma S} = r^2 \alpha \cdot \overline{\sigma s}$, also $\overline{\sigma S} : \overline{\sigma s} = r^2 : R^2 = \frac{r^2}{R} : R = x : R$ sein, wenn durch x die Länge $\frac{r^2}{R}$ bezeichnet ist. Verbindet man demnach etwa A mit der Mitte c des Bogens ab und führt zu Ac von a die Parallele $ad \parallel Ac$, so ist $Od = \frac{r^2}{R} = x$, so dass, wenn $se = R$ und $SE = Od = x$ und $se \parallel SE$ construiert wird, der Proportion $\overline{\sigma S} : \overline{\sigma s} = x : R$ zufolge die Gerade eE die Symmetrale OC im gesuchten Schwerpunkte σ schneidet.

Nimmt man die Symmetrieachse OC zur Ordinatenachse eines Coordinatensystems an und bezeichnet die Ordinaten $Os, OS, O\sigma$ durch y, Y, η , so ist $FY = fy + \varphi \cdot \eta$, also

$$\eta = \frac{F \cdot Y - f \cdot y}{F - f} = \frac{R^2 \alpha \cdot \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} - r^2 \alpha \cdot \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}}{R^2 \alpha - r^2 \alpha}$$

also

$$\eta = \frac{2}{3} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \frac{2}{3} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r} \dots (4)$$

Anmerkung 2. Zu demselben Resultate würde man leicht auch auf anderem Wege gelangen, indem man den Ringsector in ungemein schmale concentrische, als materielle Kreisbögen anzusehende Ringflächen $dF = 2ra \cdot dr$ theilt, ferner in der zweiten Gleichung (3), S. 486, für η den Wert aus der Gleichung (6), S. 484, substituiert und zwischen den Grenzen r und R integriert, oder indem man den Ringsector durch Radien in ungemein schmale Trapeze theilt und von den Gleichungen (3) und (5) § 81 Anwendung macht u. s. w.

Der Schwerpunkt S einer ebenen Fläche $KLK'L'$, die von einer Curve, zwei Ordinaten KL und $K'L'$ (von welchen auch eine oder beide Null werden können), deren zugehörige Abscissen a und a' seien, und von der Abscissenachse begrenzt ist (Fig. 153), lässt sich folgenderweise bestimmen:

Zerlegt man die Fläche durch die Ordinaten y der aufeinander folgenden Punkte der Curve in unendlich schmale

parallelogrammartige Flächen $MM'NN' = dF$, deren Basis dx und deren Höhe h ist, so ist (siehe Fig. 153), wenn α den Coordinatenwinkel bedeutet,

$$dF = h \cdot dx = y \sin \alpha \cdot dx$$

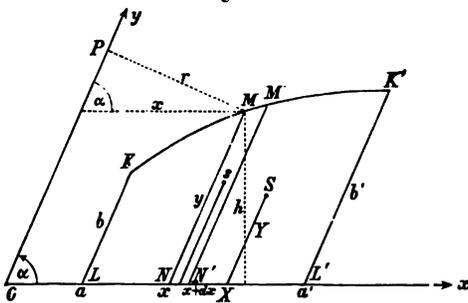
Diese ungemein schmalen materiellen Flächenelemente dF kann man als homogene materielle gerade Linien von der Länge $MN = y$ ansehen, und es sind demnach die Schwerpunktscoordinaten $\xi \eta$ derselben gegeben durch $\xi = x, \eta = \frac{y}{2}$. Die Coordinaten XY des Schwerpunktes müssen der Gleichung (3), S. 486, genügen und es ist daher

$$\left. \begin{aligned} FX &= \int_{\xi}^F dF = \int_a^{a'} x \cdot y \sin \alpha \cdot dx = \sin \alpha \cdot \int_a^{a'} x y dx \\ FY &= \int_{\eta}^F dF = \int_a^{a'} \frac{y}{2} \cdot y \sin \alpha \cdot dx = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot \int_a^{a'} y^2 dx \\ F &= \int dF = \int_a^{a'} y \sin \alpha \cdot dx = \sin \alpha \cdot \int_a^{a'} y dx \end{aligned} \right\} (5)$$

Durch Division der ersten, beziehungsweise zweiten Gleichung durch die letzte ergeben sich demnach die gesuchten Schwerpunktscoordinaten X und Y .

Die in den Gleichungen (5) vorkommenden drei bestimmten Integrale sind, wenn die Gleichung der Grenzcurve KK' — etwa in

Fig. 153.



wöhnlichen Form $y = f(x)$ — als gegeben vorausgesetzt wird, Einsetzung des Wertes von y in jedem besonderen Falle vor Ausführung dieser Divisionen zu berechnen.

Ist der Schwerpunkt einer Fläche F , die von zwei Curven und $A''B''$, deren laufende Ordinaten durch y' und y'' bezeichnet (Fig. 154), und von zwei zur beliebig gewählten Ordinaten y parallelen Geraden $A'A''$ und $B'B''$ begrenzt ist — der Schwerpunkt einer von einer beliebigen ebenen lossenen Curve, deren auf ein im allgemeinen schiefwinkelsensystem xy bezogene Gleichung gegeben ist, begrenzten Fläche F — zu bestimmen, so kann man diese Aufgabe leicht auf die zurtückführen. Man hat nur im letzteren — besonders im Falle an die Curve zwei zur y -Achse parallele Tangenten zu führen, welche die Fläche F einschließen, wodurch A' und B' die Berührungspunkte sind, die Curve in die Theile $A'M'B'$ und $A''M''B''$ getheilt wird, so zwar, dass in Fig. 154 A' mit A'' und B' mit B'' zusammenfällt. Wenn

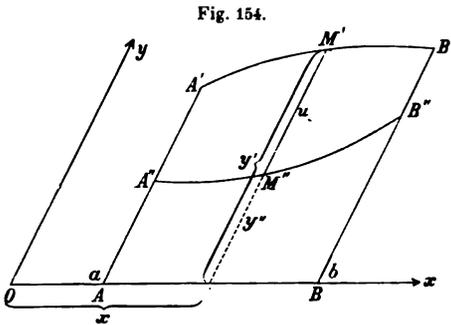


Fig. 154.

wenn die Gerade y die Fläche F nicht durchschneidet und etwa der Curve B'' näher liegt, und wenn A und B die in der x -Achse liegenden Fußpunkte der Grenzordinaten sind, so sind dann die Theile $F' = A'A''B''B'$ und $F'' = A''B''A'A'$ Theile der Fläche $A''B''A'A'$ und F' und F'' haben die in Fig. 153 und in den Formeln (5) vorausgesetzte Eigenschaft. Sind nun XY , $X'Y'$, $X''Y''$ die Coordinaten der Schwerpunkte der Flächen F , F' , F'' , so gilt die Gleichung 2, S. 485) $F'X' = FX + F''X''$ und $F'Y' = FY + F''Y''$, also $X = \frac{F'X' - F''X''}{F' - F''}$ und $Y = \frac{F'Y' - F''Y''}{F' - F''}$. Man setzt man in diese beiden letzten Gleichungen für die Glieder der Zähler und Nenner die Werte aus (5) ein, so ergibt sich, wo man die innerhalb der Fläche F gelegene, zur y -Achse parallele Gerade $M''M' = y' - y''$, welche der Abscisse x zugehört, durch u die Abscissen der Punkte A und B durch a und b bezeichnet,

$$\left. \begin{aligned}
 X &= \frac{\int_a^b x y' dx - \int_a^b x y'' dx}{\int_a^b y' dx - \int_a^b y'' dx} = \frac{\int_a^b x (y' - y'') dx}{\int_a^b (y' - y'') dx} = \frac{\int_a^b x u dx}{\int_a^b u dx} \\
 Y &= \frac{1}{2} \frac{\int_a^b y'^2 dx - \int_a^b y''^2 dx}{\int_a^b y' dx - \int_a^b y'' dx} = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b (y'^2 - y''^2) dx}{\int_a^b u dx}
 \end{aligned} \right\} (6)$$

Dieselben Gleichungen bestehen auch, wenn die Abscissenachse die Fläche F durchschneidet.

Um diese Gleichungen auf einen besonderen Fall in Anwendung zu bringen, werde der Schwerpunkt s der von einem Parabelbogen AOA' und einer beliebigen Sehne AA' eingeschlossenen Fläche eines Parabelsegments (Fig. 155) ermittelt.

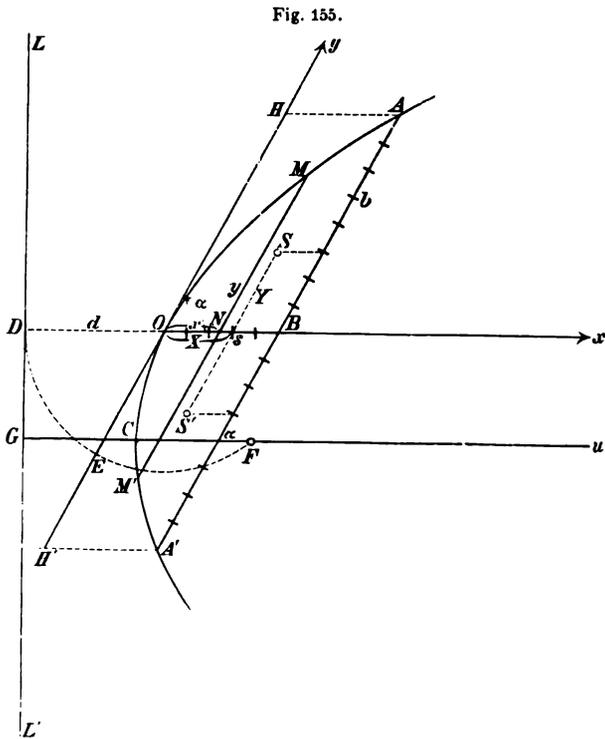


Fig. 155.

Ist C der Scheitel, Cu die Achse und LL' die Leitlinie der entsprechenden Parabel, so ist bekanntlich die durch den Mittelpunkt B von AA' zur Parabelachse Cu geführte Parallele Ox , welche

ie Parabel in O schneidet, ein zur Sehne AA' conjugierter Diameter, der alle zu AA' parallelen Parabelsehnen halbiert und die durch O u AA' geführte Parallele Oy , die gegen die Parabelachse unter dem Winkel α geneigt ist, ist eine Tangente der Parabel.

Wählt man Ox und Oy zu den Achsen eines im allgemeinen schiefwinkligen Coordinatensystems, dessen Coordinatenwinkel α ist (so dass, wenn die Sehne AA' senkrecht zur Parabelachse angenommen wird, O mit C identisch und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wird), so ist die Parabelgleichung

$$y^2 = Px \dots (7)$$

wo (siehe S. 199) P die vierfache Entfernung d des Punktes O von der Leitlinie bedeutet, also $P = 4 \cdot \overline{OD} = 4d$, daher $d = \frac{P}{4}$ und, wenn F der Brennpunkt der Parabel ist, $\overline{OF} = d = \frac{P}{4}$ und $\text{arc } DE = \text{arc } EF$ ist (siehe Fig. 155 und S. 199).

Es sei die halbe gegebene Sehne $\overline{BA} = b$ und $\overline{OB} = a$, sonach der Gleichung (7) gemäß

$$b^2 = Pa \dots (8)$$

Ist außer Ox und Oy auch a und b , daher auch $P = \frac{b^2}{a}$ gegeben, so lässt sich den obigen Andeutungen entsprechend die Leitlinie LL' und der Brennpunkt F leicht bestimmen, also die Parabel construieren.

Um zunächst den Schwerpunkt der Fläche OBA , bzw. OBA' zu finden, hat man von den Gleichungen (5), (7) und (8) Anwendung zu machen. Demgemäß ist

$$\left. \begin{aligned} FX &= \sin \alpha \cdot \int_0^a x \cdot \sqrt{P} \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \sin \alpha \cdot \sqrt{P} \cdot \frac{a^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5} a^2 b \sin \alpha \\ FY &= \frac{1}{2} \sin \alpha \int_0^a Px dx = \frac{1}{2} \sin \alpha P \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{1}{4} a b^2 \sin \alpha \\ F &= \sin \alpha \cdot \int_0^a \sqrt{P} \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \sin \alpha \cdot \sqrt{P} \cdot \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} ab \sin \alpha \end{aligned} \right\} (9)$$

Die letzte Gleichung lehrt, dass die Fläche F des halben Parabelsegments OAB , bzw. $O A' B$ gleich ist $\frac{2}{3}$ (und jene des Dreiecks AH gleich $\frac{1}{3}$) der Fläche $ab \sin \alpha$ des Parallelogramms $OBAH$, bzw. $OBA'H'$, dass daher auch die Fläche des Parabelsegments

$AOA'BA$ zwei Drittel jenes Parallelogramms $AA'H'H$ in sich fasst, dessen eine Seite die Parabelsehne ist, und dessen andere Seite zur Parabelachse parallel läuft.

Durch Division der beiden ersten Gleichungen (9) durch die dritte findet man

$$X = \frac{3}{5} a, Y = \frac{3}{8} b \dots (10)$$

so dass S und S' in Fig. 155 die gesuchten Schwerpunkte der Flächen AOB und $A'OB$ sind.

Da OB alle zu AA' parallelen Sehnen halbiert, also die Schwerpunkte aller von diesen Sehnen begrenzten ungemein schmalen Flächenelemente des Parabelsegments AOA' enthält, so ist OB nach dem Satze *c*), S. 470, eine Schwerachse des Parabelsegments und demselben Satze zufolge ist auch SS' eine zweite Schwerlinie, somit ist der Durchschnittspunkt s von SS' mit OB der gesuchte Schwerpunkt des Parabelsegments und für denselben $X = \frac{3}{5} a, Y = 0$.

In ähnlicher Weise lässt sich leicht der Schwerpunkt jener Fläche OAH bestimmen, welche das früher behandelte halbe Parabelsegment OAB zu einem Parallelogramm, dessen Seiten a und b sind, ergänzt. Wählt man zu diesem Zwecke etwa die bisherige y -Achse (Fig. 155) zur x -Achse und den Diameter OB zur y -Achse eines neuen Achsensystems, so dass dem Punkte A die Coordinaten $x = b, y = a$ zukommen und dass die Parabelgleichung $x^2 = Py$ ist, so kann man in gleicher Weise von den Gleichungen (5) Anwendung machen, und man gelangt so nach Ausführung der einfachen Integrationen zu den Werten $X = \frac{3}{4} b, Y = \frac{3}{10} a$, so dass bezüglich des früheren Achsensystems $X = \frac{3}{10} a, Y = \frac{3}{4} b$ ist, welche Gleichungen man übrigens auch aus den Werten (10) und aus den Coordinaten $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ des Parallelogramms sehr leicht sofort deducieren kann, wenn man die Gleichung (2), S. 485, in Anwendung bringt.

In derselben Weise, wie der Schwerpunkt des halben Parabelsegments gefunden wurde, lässt sich auf leichte Weise durch Anwendung der Gleichungen (5) die Schwerpunktlage eines Trapezes $KLK'L'$ bestimmen, in welchem Falle KK' (Fig. 153) eine Gerade wird, so dass, wenn O nach L und die y -Achse in die Gerade LK verlegt wird und wenn $LL' = a$ ist, $y = \frac{b' - b}{a} x + b$ und daher den Gleichungen (5) zufolge $X = \frac{1}{3} a \frac{2b' + b}{b' + b}, Y = \frac{1}{3} \frac{b^2 + bb' + b'^2}{b + b'}$ wird, welche Werte mit Gleichung (6), S. 490, übereinstimmen. Setzt man $b = 0$, so gelangt man zum Schwerpunkt des Dreiecks u. s. w.

Um den Schwerpunkt der von dem Umfange einer Ellipse und zwei beliebigen parallelen Sehnen $2b$ und $2b'$ dieser Ellipse eingeschlossenen Fläche zu bestimmen, führe man zunächst durch den Mittelpunkt O

Ellipse den zu diesen Sehnen parallelen Durchmesser $2B$ und den zu denselben jugierten Diameter $2A$ und wähle diese beiden Diameter, wie in Fig. 68 225) als Achsen eines (im allgemeinen schiefwinkligen) Achsensystems, dessen rdinatenwinkel (x, y) sei. Es ist dann für jeden Punkt der Ellipse

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad y = \frac{B}{A} \sqrt{A^2 - x^2} \dots (\alpha)$$

Sind demnach a und a' die zu den Endpunkten der Sehnen $2b$ und $2b'$ zu-
hörigen Abscissen, so ist $b = \frac{B}{A} \sqrt{A^2 - a^2}$, $b' = \frac{B}{A} \sqrt{A^2 - a'^2}$, also wenn durch
nd α' die Winkel $\alpha = \text{arc cos } \frac{a}{A}$, $\alpha' = \text{arc cos } \frac{a'}{A}$ bezeichnet werden

$$\left. \begin{aligned} a &= A \cos \alpha, \quad b = B \sin \alpha \\ a' &= A \cos \alpha', \quad b' = B \sin \alpha' \end{aligned} \right\} (\beta)$$

Bedeutet nun F die von der Abscissenachse, den Ordinaten b und b' und
Ellipse begrenzte Fläche, und sind X und Y die Coordinaten des Schwer-
ktes dieser Fläche, so ist, wie aus (5), (α), (β) und aus dem Integral Φ der
nerkung 1 sich ergibt,

$$\left. \begin{aligned} F &= \sin(x, y) \cdot \int_a^{a'} y \, dx = \sin(x, y) \frac{B}{A} \int_a^{a'} \sqrt{A^2 - x^2} \cdot dx = \\ \sin(x, y) \cdot \frac{B}{A} \left[(A^2 \text{arc cos } \frac{a}{A} - a \sqrt{A^2 - a^2}) - (A^2 \text{arc cos } \frac{a'}{A} - a' \sqrt{A^2 - a'^2}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sin(x, y) \cdot AB [(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) - (\alpha' - \sin \alpha' \cos \alpha')] \end{aligned} \right\} (\gamma)$$

Da ferner die Differentiation der ersten Gleichung (α) zu der Relation
 $\frac{A^2}{B^2} y \, dy$ führt, so ist nach (5)

$$\left. \begin{aligned} FX &= \sin(x, y) \cdot \int_a^{a'} y \cdot x \, dx = -\sin(x, y) \cdot \frac{A^2}{B^2} \int_b^{b'} y^2 \, dy = \\ &= \frac{1}{3} \frac{A^2}{B^2} \sin(x, y) (b^3 - b'^3) = \frac{1}{3} A^2 B \sin(x, y) (\sin^3 \alpha - \sin^3 \alpha') \\ FY &= \frac{1}{2} \sin(x, y) \cdot \int_a^{a'} y^2 \, dx = \frac{1}{2} \sin(x, y) \cdot \int_a^{a'} \frac{B^2}{A^2} (A^2 - x^2) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{B^2}{A^2} \sin(x, y) \left[A^2 (a' - a) - \frac{1}{3} (a'^3 - a^3) \right] \\ &= \frac{1}{2} AB^2 \sin(x, y) \left[\cos \alpha' - \cos \alpha - \frac{1}{3} (\cos^3 \alpha' - \cos^3 \alpha) \right] \end{aligned} \right\} (\delta)$$

Durch Division der beiden letzten Gleichungen (δ) durch (γ) ergibt sich
rt X und Y . Derselbe Wert von X

$$X = \frac{4}{3} A \frac{\sin^3 \alpha - \sin^3 \alpha'}{2\alpha - 2\alpha' - (\sin 2\alpha - \sin 2\alpha')} \dots (\epsilon)$$

bemerkenswerter Weise bloß von A , α und α' abhängig ist (so dass derselbe
alle Ellipsen von gleichem Diameter $2A$ und für gleiche Abscissen a und a'
elbe bleibt, mag auch der zweite Diameter $2B$ welcher immer sein), muss
n offenbar zukommen dem (siehe S. 502) in der x -Achse gelegenen Schwer-

punkte der anfangs erwähnten, von den Sehnen $2b$ und $2b'$ und von der Ellipse begrenzten Fläche, deren Flächeninhalt dem Doppelten des Ausdruckes (γ) gleichkommt.

Für das von der Sehne $2b$ und der Ellipse eingeschlossene Segment ist $a' = A$, $b' = 0$, daher zufolge (β) $\alpha' = 0$ zu setzen, also ist in diesem Falle

$$X = \frac{2}{3} \frac{A^2}{B^2} \cdot \frac{b^3}{AB \arccos \frac{a}{A} - ab} = \frac{4}{3} A \frac{\sin^2 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \dots (\gamma).$$

welche mit (3) übereinstimmende Formel, wie früher, lehrt, dass bei gegebenem a und A die Schwerpunktslage von dem conjugierten Diameter $2B$ vollkommen unabhängig ist, dass also, wenn der Diameter $2A$ mit einer Achse der Ellipse übereinstimmt und demnach die Sehne $2b$ auf $2A$ senkrecht steht, der Schwerpunkt des Ellipsensegments, mag die zweite Achse $2B$ welche immer sein, derselbe ist wie der Schwerpunkt des Segments jenes concentrischen Kreises, dessen Radius $R = A$ ist, wenn nur die Ellipsensehne $2b$ mit der Kreissehne in eine Gerade fällt.

Der Flächeninhalt F eines der vier Sektoren, die von den Coordinatenachsen und der Ellipse begrenzt werden, ergibt sich aus (γ) , wenn $a = 0$, $b = B$, $a' = A$, $b' = 0$, also $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha' = 0$ gesetzt wird; es ist folglich $F = \frac{1}{4} AB\pi \cdot \sin(x, y)$ und der Flächeninhalt der ganzen Ellipse ist $AB\pi \cdot \sin(x, y)$, d. h. derselbe ist im Verhältnisse $\pi:4$ kleiner als das über den Diametern $2A$ und $2B$ als den Mittellinien construierte Parallelogramm. Für den Schwerpunkt des ersterwähnten von den Radien A , B und der Ellipse eingeschlossenen Sectors ist ferner nach (δ) $FX = \frac{1}{3} A^2 B \sin(x, y)$, $FY = \frac{1}{3} AB^2 \sin(x, y)$, also $X = \frac{4}{3\pi} \cdot A$ und $Y = \frac{4}{3\pi} \cdot B$; es liegt somit dieser Schwerpunkt in einer Diagonale des letzterwähnten der Ellipse umschriebenen Parallelogramms im Abstände $\frac{4}{3\pi} D$ vom Ellipsencentrum, wenn durch $2D$ die Länge dieser Diagonale bezeichnet wird.

Für die von der Ellipse und dem beliebigen Diameter $2B$ begrenzte Fläche ist (siehe S. 471) $Y = 0$ und nach (γ) , wenn $a = 0$, $b = B$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird, $X = \frac{4}{3\pi} A$; es ist sonach die Lage dieses Schwerpunktes nur von der Länge des zu $2B$ conjugierten Diameters $2A$ abhängig.

Ist die Gleichung der Curve KK' (Fig. 153) nicht bekannt oder bietet die Ausführung der in den Gleichungen (5) und (6) angedeuteten Integrationen Schwierigkeiten, so lässt sich die näherungsweise Schwerpunktsbestimmung für die ebene Fläche F der Fig. 153 und 154 mit Zuhilfenahme der Simpson'schen Regel vornehmen, indem die bestimmten Integrale der Gleichungen (5) und (6) näherungsweise mit Hilfe dieser Regel bestimmt werden.

Es wird zu diesem Zwecke die Gerade $LL' = H = a' - a$ in Fig. 153, bzw. $AB = H = b - a$ in Fig. 154, die, wenn (was meist der Fall ist) das Achsensystem xy ein rechtwinkliges ist, die Höhe der Fläche F ist, in eine gerade Anzahl gleicher Theile getheilt, also in $2n$ Theile, wo n irgend eine positive ganze Zahl bedeutet; ist

h einer dieser als bekannt anzusehenden Theile bezeichnet, [g. 153

$$h = \frac{H}{2n} = \frac{a' - a}{2n} \dots (11)$$

uf diese Weise erhaltenen Theilungspunkte, deren Abscissen nach durch $x_0 x_1 x_2 \dots x_{2n}$ bezeichnet seien, so dass $x_0 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, $\dots x_{2n} = a' = a + 2nh$ ist, führe die Ordinaten zu KL und $K'L'$, die entsprechend durch y_{2n} bezeichnet seien ($y_0 = b$, $y_{2n} = b'$). Sind diese Orstimmt (etwa aus der möglichst genauen Zeichnung der rthonnen), so lassen sich die Schwerpunktskoordinaten XY ngen (5) und der Simpson'schen Regel gemäß näherungs- mmen aus den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \alpha \cdot \int_{x_0}^{x_{2n}} xy \, dx &= \sin \alpha \cdot \frac{h}{3} [x_0 y_0 + 4x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + \\ &4x_3 y_3 + \dots + 4x_{2n-1} y_{2n-1} + x_{2n} y_{2n}] \\ \sin \alpha \cdot \int_{x_0}^{x_{2n}} y^2 \, dx &= \sin \alpha \cdot \frac{h}{6} [y_0^2 + 4y_1^2 + 2y_2^2 + \\ &2y_3^2 + \dots + 2y_{2n-2}^2 + 4y_{2n-1}^2 + y_{2n}^2] \\ \sin \alpha \cdot \int_{x_0}^{x_{2n}} y \, dx &= \sin \alpha \cdot \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \\ &2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}] \end{aligned} \right\} (12)$$

die beiden ersten dieser Gleichungen durch die letzte

gt man der Einfachheit halber den Anfangspunkt O des ms in den Punkt L , was ja freisteht, so ist $a = 0$, daher $= 1 \cdot h$, $x_2 = 2 \cdot h$, \dots , $x_{2n} = 2n \cdot h$, so dass die erste ngen (12) die einfache Form annimmt

$$\left. \begin{aligned} \alpha \cdot \frac{h^2}{3} [1 \cdot 0 \cdot y_0 + 4 \cdot 1 \cdot y_1 + 2 \cdot 2 y_2 + 4 \cdot 3 y_3 + \\ \cdot y_4 + \dots + 4 \cdot (2n-1) y_{2n-1} + 1 \cdot 2n \cdot y_{2n}] \end{aligned} \right\} (13)$$

ler Klammern sind mit Ausnahme des ersten und letzten : ersten Factoren abwechselnd 4 und 2 und die zweiten ie aufeinander folgenden ganzen Zahlen $0123 \dots 2n$.

e größerer Wert für die ganze Zahl n angenommen wird, enauerer Wert ergibt sich durch die schließliche Division ngen (12) für die Schwerpunktskoordinaten X und Y .

Für die praktischen Anwendungen genügt es häufig, wenn die Curve KK' einen halbwegs regelmäßigen Verlauf hat, $n = 1$, oder wenn man genauer rechnen will, $n = 2$ anzunehmen. Es ist dann die Gleichungen (12) und (13) gemäß für $n = 1$ zu setzen $h = \frac{H}{2}$ und

$$\left. \begin{aligned} X &= h \cdot \frac{1 \cdot 0 \cdot y_0 + 4 \cdot 1 \cdot y_1 + 1 \cdot 2 \cdot y_2}{y_0 + 4y_1 + y_2} = H \cdot \frac{2y_1 + y_2}{y_0 + 4y_1 + y_2} \\ Y &= \frac{1}{2} \cdot \frac{y_0^2 + 4y_1^2 + y_2^2}{y_0 + 4y_1 + y_2} \end{aligned} \right\} (14)$$

und für $n = 2$ ist $h = \frac{H}{4}$ und

$$\left. \begin{aligned} X &= h \cdot \frac{1 \cdot 0 \cdot y_0 + 4 \cdot 1 \cdot y_1 + 2 \cdot 2 \cdot y_2 + 4 \cdot 3 \cdot y_3 + 1 \cdot 4 \cdot y_4}{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4} \\ &= H \cdot \frac{y_1 + y_2 + 3y_3 + y_4}{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4} \\ Y &= \frac{1}{2} \cdot \frac{y_0^2 + 4y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2 + y_4^2}{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4} \end{aligned} \right\} (15)$$

Einen genaueren Wert für die Coordinaten X und Y des Schwerpunktes der Fläche F erhält man, wenn man die gegebene Curve KK' in lauterartige, bald kürzere, bald längere Theile $l_1 l_2 \dots l_m l_{m+1} \dots l_n$ theilt, deren jedem man annehmen darf, dass derselbe sehr annähernd in seiner ganzen Ausdehnung als Bogen irgend einer Parabel angesehen werden können, deren Achse zur y -Achse parallel ist (mag auch der Scheitel und der Parameter der entsprechenden Parabel von einem Theile zum andern sich ändern). Nun x_m, y_m die Coordinaten des Anfangspunktes und x_{m+1}, y_{m+1} jene des Endpunktes irgend eines solchen Bogens l_m , und ist durch $y_m^{(m+1)}$ die Ordinate jenes Punktes dieses Bogens bezeichnet, dessen Abscisse $x_m^{(m+1)}$ das arithmetische Mittel von x_m und x_{m+1} ist, also $x_m^{(m+1)} = \frac{x_m + x_{m+1}}{2}$, so lehrt eine einfache Herleitung aus den Gleichungen (9), S. 501 und (6) auf S. 490, dass, wenn r_m die Ordinate $r_m = \frac{y_m + y_{m+1}}{2} - y_m^{(m+1)}$ bedeutet, folgende Gleichungen Gültigkeit haben:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{6} \sin \alpha \sum_{m=1}^{m=n} [(x_{m+1} - x_m) (y_m + 4y_m^{(m+1)} + y_{m+1})] \\ FX &= \frac{1}{6} \sin \alpha \sum_{m=1}^{m=n} [(x_{m+1} - x_m) (x_m y_m + 4x_m^{(m+1)} y_m^{(m+1)} + x_{m+1} y_{m+1})] \\ FY &= \frac{1}{12} \sin \alpha \sum_{m=1}^{m=n} [(x_{m+1} - x_m) (y_m^2 + 4(y_m^{(m+1)})^2 + y_{m+1}^2 - \frac{4}{5} y_m^2)] \end{aligned}$$

Durch Division der beiden letzten Gleichungen durch die erste lassen sich die Coordinaten X und Y des Schwerpunktes mit großer Annäherung berechnen.

Ist mit Zuhilfenahme der Simpson'schen Regel die Lage des Schwerpunktes S der Fläche $A'A''B''B'$ der Fig. 154 zu bestimmen, mag diese Fläche F von zwei Curven und zwei parallelen Ordinaten oder von einer Curve und einer Geraden (z. B. bei der Ermittlung

des Schwerpunktes des Querschnittes einer Eisenbahnschiene) oder aber von einer geschlossenen Curve begrenzt sein, so hat man die in den Gleichungen (6) vorkommenden Integrale mittels der Simpson'schen Regel näherungsweise zu bestimmen, zu welchem Zwecke vor allem die einzelnen zur Ordinatenachse parallelen Sehnen $u_0 u_1 u_2 \dots u_{2n-1} u_{2n}$ der Fläche F , welche den Abscissen $x_0 x_1 x_2 \dots x_{2n-1} x_{2n}$ zugehören, bestimmt werden müssen. Mitunter ist $u_0 = \overline{A_2'' A'} = 0$, öfters auch (bei einer von einer continuierlichen geschlossenen Curve begrenzten Fläche) auch $u_{2n} = \overline{B'' B'} = 0$. Besitzt die Fläche F , wie dies bei technischen Anwendungen meist der Fall ist, eine Symmetrieachse, in welcher der Schwerpunkt S gelegen sein muss, so empfiehlt es sich, diese Achse oder eine zu ihr parallele Achse zur x -Achse eines orthogonalen Achsensystems zu wählen, da dann die erste der Gleichungen (6) zur Bestimmung der Schwerpunktslage vollständig ausreicht. S_0 ist z. B. für $n = 2$ und $x_0 = a = 0$ zu setzen $h = \frac{H}{4}$ und

$$X = h \cdot \frac{1 \cdot 0 \cdot u_0 + 4 \cdot 1 \cdot u_1 + 2 \cdot 2 \cdot u_2 + 4 \cdot 3 \cdot u_3 + 1 \cdot 4 \cdot u_4}{u_0 + 4u_1 + 2u_2 + 4u_3 + u_4} = \\ = H \cdot \frac{u_1 + u_2 + 3u_3 + u_4}{u_0 + 4u_1 + 2u_2 + 4u_3 + u_4}$$

§ 83. Schwerpunkte unebener Flächen.

Der Schwerpunkt der Mantelfläche eines senkrechten Prismas oder Cylinders, dessen Leitlinie ein beliebiges ebenes Polygon oder eine ebene Curve ist, und dessen Erzeugende zur Ebene der Leitlinie senkrecht ist, liegt in der Mitte jener Achse, welche die Schwerpunkte S_1 und S_2 der Umfänge der beiden Grundflächen verbindet. Denn theilt man die Mantelfläche durch parallel zu den Grundflächen in ungemein kleinen Abständen geführte Schnitte in materielle ringförmige Flächenelemente, so können dieselben, da in jedem dieser Flächenelemente (infolge der Annahme der zur Grundfläche senkrechten Lage der Erzeugenden) gleichen Längenelementen des Querschnittsumfanges auch gleiche Flächentheile entsprechen, als homogene materielle Linien angesehen werden, und es liegen demnach die Schwerpunkte derselben durchwegs in der Geraden $S_1 S_2$, so dass diese Gerade nach dem Satze *c* (S. 470) eine Schwerachse ist, und anderseits ist die durch den Mittelpunkt von $S_1 S_2$ parallel zu den Grundflächen gelegte Ebene als Symmetrieebene eine Schwerebene, daher dieser Mittelpunkt selbst der Schwerpunkt. Sind die Grundflächen reguläre Polygone, so sind S_1 und S_2 die Mittelpunkte derselben.

Der Schwerpunkt S der Mantelfläche einer senkrechten Pyramide oder jener der Mantelfläche eines geraden Kegels liegt in der den Schwerpunkt s der Basisperipherie mit der Spitze O der Pyramide (des Kegels) verbindenden Achse Os , und zwar in der Entfernung $\frac{1}{3} Os$ von s . Denn nimmt man die Theilung wie früher vor, so kann man abermals die einzelnen ringförmigen Flächenelemente, da zufolge der Voraussetzung alle Seitenflächen gegen die Grundfläche gleich geneigt sind und daher gleichen Längenelemente einer jeden polygonalen Durchschnittslinie auch in der entsprechenden Ringfläche gleiche Flächentheile entsprechen, als homogene materielle Linien ansehen, deren Schwerpunkte durchwegs in der Geraden Os gelegen sind, welche letztere also eine Schwerachse ist. (Bei einem Kreiskegel, dessen Achse auf der Basis senkrecht steht, ist Os schon als Symmetrieachse eine Schwerachse.) Denkt man sich weiter durch den in dieser Achse in der Entfernung $\frac{2}{3} Os$ von der Spitze O entfernten Punkt S eine zur Grundfläche parallele Ebene gelegt, so schneidet diese die Medianen der einzelnen Seitendreiecke der Pyramide, beziehungsweise der dreieckförmigen Elemente der Seitenfläche des Kegels in den Schwerpunkten dieser Theilflächen, so dass diese Ebene nach dem Satze b (S. 470) eine Schwerebene und der diese Schwerebene und der früheren Schwerachse gemeinsame Punkt S der gesuchte Schwerpunkt ist.

In ganz gleicher Weise lässt sich nachweisen, dass der Schwerpunkt S der Mantelfläche eines senkrechten Pyramidalstumpfes oder eines senkrechten Kreiskegelstumpfes gefunden wird, indem man die Schwerpunkte S_1 und S_2 der Umfänge der beiden Grundflächen verbindet und etwa durch den Schwerpunkt einer der trapezförmigen Seitenflächen oder einer achsialen trapezförmigen Schnittfläche eine parallele Ebene zu den Grundflächen führt, welche die Gerade $S_1 S_2$ im gesuchten Schwerpunkte S schneidet, so dass (siehe Gleichung δ , S. 489, wenn u_1 und u_2 die Umfänge der beiden Grundflächen oder irgend welche zwei homologe Dimensionen in diesen Grundflächen bezeichnen,

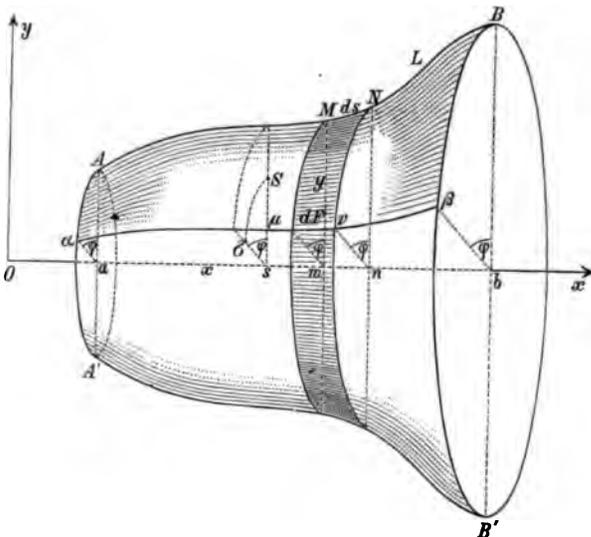
$$\frac{S_1 S}{u_1 + 2 u_2} = \frac{S S_2}{u_2 + 2 u_1} = \frac{S_1 S_2}{3 (u_1 + u_2)} \dots (1)$$

Anmerkung. Es lässt sich leicht nachweisen, dass der Schwerpunkt S der gesammten Oberfläche O eines Tetraäders vom Volum V identisch ist mit dem Mittelpunkte jener Kugelfläche vom Radius $\frac{V}{O}$, die von den Begrenzungsebenen desjenigen Tetraäders tangiert wird, dessen Eckpunkte die vier Schwerpunkte der vier Begrenzungsdreiecke der ursprünglichen Pyramide V

1, denn, bedeutet h die irgend einem dieser letzteren Dreiecke f als dem Basis-
 ecke entsprechende Höhe des Tetraeders V , so ist $\frac{h}{3}$ der senkrechte Abstand
 : Schwerpunkte der drei anderen Dreiecke, sonach auch der Abstand der diese
 i Schwerpunkte enthaltenden, zu f parallelen Ebene E , die zur xy -Ebene eines
 chtwinkligen Axensystem gewählt sei, von der Fläche f , also auch der Ab-
 und der Ebene E von dem Schwerpunkte dieser Fläche f . Der letzten Gleichung
), S. 485, gemäß ist sonach $O.Z = f \cdot \frac{h}{3}$, oder da $V = f \cdot \frac{h}{3}$, so ist $Z = \frac{V}{O}$ der
 nkrechte Abstand des Schwerpunktes S von einer jeden der durch je drei von
 esen vier Dreieckschwerpunkten gelegten vier Ebenen.

Schwerpunkt einer Umdrehungsfläche (Rotationsfläche).
 ne Umdrehungsfläche entsteht durch Umdrehung einer ebenen Curve
 B (der erzeugenden Curve, Meridiancurve) um eine in der Ebene
 ser Curve (der Meridianebene) gelegene Achse, die zur x -Achse
 es orthogonalen Achsensystems gewählt sei.

Fig. 156.



Es sei $y = f(x)$ die Gleichung der Meridiancurve. Die Ro-
 tionsfläche werde geschnitten durch zwei zur Umdrehungsachse
 ikrechte Ebenen, und es sei der Schwerpunkt des durch diese
 enen abgegrenzten Theiles $AA'BB'$ der Rotationsfläche zu be-
 mmen (Fig. 156).

Da die x -Achse eine Symmetrieachse der Umdrehungsfläche
 , so ist dieselbe auch eine Schwerachse, also $Y = Z = 0$. Theilt
 n die Umdrehungsfläche durch zur x -Achse senkrechte ungemein
 he geführte ebene Schnitte in unendlich kleine Flächenelemente dF ,
 können diese als die Mantelflächen von senkrechten Kegelstumpfen

angesehen werden. Es ist demnach, wenn $\overline{MN} = ds$ das dem ringförmigen Flächenelemente dF zugehörige Element der Meridiancurve ist, bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$dF = 2\pi y \cdot ds \dots (2)$$

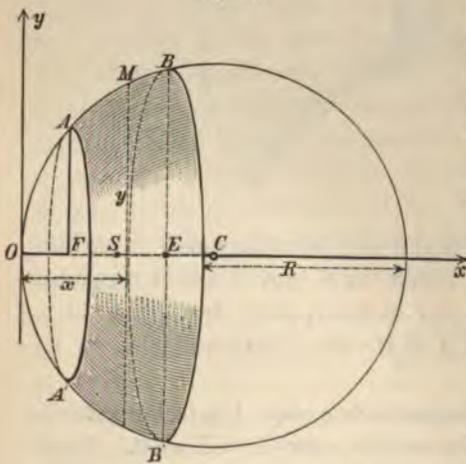
Es bedarf nicht weiter auseinandergesetzt zu werden, dass in den allgemeinen Gleichungen (3) auf S. 486 in dem vorliegenden Falle für die Schwerpunkte dieser ringförmigen Flächenelemente $\eta = \zeta = 0$ und $\xi = x$ gesetzt werden muss, so dass, wenn L die Länge des erzeugenden Bogens AB der Meridiancurve ist,

$$\left. \begin{aligned} FX &= \int_0^L x dF = \int_0^L x \cdot 2\pi y ds = 2\pi \cdot \int_0^L x y \cdot ds \\ F &= \int_0^L dF = \int_0^L 2\pi y \cdot ds = 2\pi \cdot \int_0^L y \cdot ds \end{aligned} \right\} (3)$$

Durch Division dieser beiden Gleichungen ergibt sich die gesuchte Abscisse des Schwerpunktes.

Mit Hilfe der Gleichung der erzeugenden Curve lässt sich $y = f(x)$ und $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$ durch x ausdrücken, und es sind dann die in den Gleichungen (3) ange deuteten Integrationen im allgemeinen ausführbar.

Fig. 157.



Ist z. B. der Schwerpunkt S einer Kugelzone (Fig. 157) oder einer Kugelcalotte (Kugelhaube, Kugelschale) zu bestimmen, so wähle man die Achse derselben zur x -Achse und etwa den Durchstoßpunkt O der letzteren mit der Kugeloberfläche zum Koordinatenanfangspunkte.

Die Abscissen der Mittelpunkte F und E der Grundflächen seien $\overline{OF} = x_0$ und $\overline{OE} = x_1$, so dass z. B. für die Calotte $x_0 = 0$ und x_1 die Höhe derselben ist. Die Gleichung des erzeugenden Kreisbogens ist

$y^2 = 2Rx - x^2$, wenn R den Radius der Kugel bedeutet. Daher ist $2y dy = 2R dx - 2x dx$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{R-x}{y}$, folglich

$$\begin{aligned}
 ds &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \frac{(R-x)^2}{y^2}} \cdot dx = \\
 &= \frac{\sqrt{2Rx - x^2 + (R-x)^2}}{y} dx = \frac{R}{y} dx
 \end{aligned}$$

was übrigens sofort hätte hingeschrieben werden können. Sonach nach Gleichung (3)

$$\begin{aligned}
 FX &= 2\pi \cdot \int_0^L xy \cdot ds = 2\pi \cdot \int_{x_0}^{x_1} xR \cdot dx = 2\pi R \frac{x_1^2 - x_0^2}{2} \\
 F &= 2\pi \cdot \int_0^L y \cdot ds = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} R \cdot dx = 2\pi R \cdot (x_1 - x_0)
 \end{aligned}$$

Die Division der beiden letzten Gleichungen zeigt, dass $X = \frac{x_1 + x_0}{2}$ ist, dass also der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkte S der Achse FE der Kugelzone (bezw. Calotte) identisch ist.

Dasselbe Resultat würde sich auf elementarem Wege ergeben, wenn man die Achse in unendlich viele gleiche Theile theilen und durch die Theilpunkte Schnittebenen senkrecht zur Achse legen würde, so dass die Kugelzone (bezw. Calotte) in Flächenelemente theilt würde, welche, da die Fläche einer Kugelzone, wie dies auch die vorletzte Gleichung lehrt, dem Producte aus dem Umfange $2\pi R$ des größten Kugelkreises und der Höhe der Kugelzone gleich ist, untereinander flächengleich und deren Schwerpunkte in der Achse liegen sind; es muss demnach infolge derselben Schlussfolgerung, wie im § 82 bei Gelegenheit der Bestimmung des Schwerpunktes eines Kreissectors in Anwendung gebracht wurde, der Schwerpunkt der Kugelzone identisch sein mit dem Schwerpunkte ihrer Achse, oder dem Mittelpunkte der letzteren.

Um überhaupt den Abstand X des Schwerpunktes S einer beliebigen Theilfläche F einer Hemisphäre von der diese Halbkugel aberschließenden Ebene des größten Kreises (der yz -Ebene) zu bezeichnen, hat man die orthogonale Projection f der Fläche F auf die letztere Ebene mit dem Kugelradius R zu multiplicieren und dieses Product nach F zu dividieren; denn theilt man F in unendlich kleine Flächenelemente dF , deren Projection df ist, so ist der Neigungswinkel λ dieser beiden

Flächenelemente (d. i. der Projectionswinkel λ) gleich dem Winkel, den die Normalen dieser Flächenelemente, d. i. der Kugelradius R und die den Schwerpunkt des Elementes dF projicirende Gerade ξ einschließen, somit $\cos \lambda \cdot dF$ und $R \cos \lambda = \xi$. Die Multiplication dieser beiden Gleichungen ergibt, dass $\xi \cdot dF = R \cdot df$, somit der Gleichung (3) auf S. 486 zufolge

$$FX = \int \xi dF = \int R \cdot df = R \cdot f, \text{ also in der That } X = R \cdot \frac{f}{F} \dots (a)$$

Dementsprechend ist für den Schwerpunkt der oben betrachteten Kugelzone (Fig. 157), als deren Projection f ein Kreisring erscheint, für welchen offenbar, wenn der Kugelmittelpunkt C zum Koordinatenanfangspunkte gewählt wird und die Coordinaten von B durch $x_0 y_0$ und von A durch $x_1 y_1$ bezeichnet werden, $f = y_0^2 \pi - y_1^2 \pi = (R^2 - x_0^2) \pi - (R^2 - x_1^2) \pi = (x_1^2 - x_0^2) \pi$ und $F = 2 \pi R (x_1 - x_0)$ ist,

$$X = R \cdot \frac{(x_1^2 - x_0^2) \pi}{2 \pi R (x_1 - x_0)} = \frac{x_1 + x_0}{2}.$$

Mit Hilfe desselben Satzes (a) lässt sich auch der Schwerpunkt S eines auf einer Kugeloberfläche, deren Radius R und deren Mittelpunkt O ist, gelegenen sphärischen Dreiecks ABC bestimmen. Sind die den sphärischen Winkeln ABC gegenüberliegenden sphärischen Seiten BC, CA, AB in Bogenmaß ausgedrückt a, b, c , also ihre wahren Längen Ra, Rb, Rc , und nimmt man die durch die Seite BC gelegte Ebene OBC des größten Kreises zur yz -Ebene an, so ist die Fläche des Sectors OAB offenbar durch $\frac{1}{2} R \cdot Rc = \frac{1}{2} R^2 c$ und daher die Projection f_c dieses Sectors in die yz -Ebene durch $\frac{1}{2} R^2 c \cdot \cos B$ bestimmt und ebenso ist durch $\frac{1}{2} R^2 b \cdot \cos C$ die Projection f_b des Sectors OAC gegeben, während die Fläche f_a des Sectors OBC die Größe $\frac{1}{2} R^2 a$ hat. Nun ist leicht einzusehen, dass demnach die Projection f der sphärischen Dreiecksfläche F in die yz -Ebene einfach folgendermaßen ermittelt werden kann: $f = f_a - f_b - f_c = \frac{1}{2} R^2 (a - b \cos C - c \cos B)$, während bekanntlich $F = R^2 (A + B + C - \pi)$ ist, so dass die Substitution dieser Werte in die Gleichung (a) zu der Gleichung

$$X = \frac{1}{2} R \cdot \frac{a - b \cos C - c \cos B}{A + B + C - \pi} \dots (b)$$

führt. Analog ist der Abstand des Dreiecksschwerpunktes S von der Ebene des Sectors OCA durch $\frac{1}{2} R \cdot \frac{b - c \cos A - a \cos C}{A + B + C - \pi}$ und der Abstand von der Ebene OAB durch $\frac{1}{2} R \cdot \frac{c - a \cos B - b \cos A}{A + B + C - \pi}$ bestimmt.

Für ein sphärisches Zweieck mit dem sphärischen Winkel A ist der Abstand X des Schwerpunktes S von einer der beiden Ebenen der Begrenzungshalbkreise, da $F = 2 R^2 A$ und, wie leicht ersichtlich ist, $f = \frac{R^2 \pi}{2} - \frac{R^2 \pi}{2} \cos A = \frac{R^2 \pi}{2} (1 - \cos A)$ ist, zu berechnen aus

$$X = R \cdot \frac{f}{F} = \frac{\pi}{4} R \cdot \frac{1 - \cos A}{A} \dots (c)$$

was übrigens auch leicht aus (b) deduciert werden kann. Für einen Kugelquadranten ist $A = \frac{\pi}{2}$, $\cos A = 0$ zu setzen, daher

$$X = \frac{R}{2} \dots (d)$$

Das Gleiche gilt nach (b) für einen Kugeloctanten, für welchen $a = b = c = A = B = C = \frac{\pi}{2}$ ist.

Die Anwendung der allgemeinen Formeln (3) auf die Mantelhe eines senkrechten Kreiskegelstumpfes von der Höhe H (Fig. 158), sen Seite gegen die Achse unter dem Winkel α geneigt ist, und sen Grundflächen die Radien r_1 und r_2 und die Umfänge u_1 und u_2 en, führt, wenn man den Anfangspunkt O in den Mittelpunkt Kreises u_1 verlegt und daher von den Gleichungen $y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + r_1$, $ds = \sec \alpha \cdot dx$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r_2 - r_1}{H}$ ausgeht, zu den Folgerungen

$$FX = 2 \pi \sec \alpha \frac{H^2}{6} [2 r_2 + r_1] \text{ oder}$$

$$FX = \frac{1}{6} H^2 \sec \alpha (2 u_2 + u_1)$$

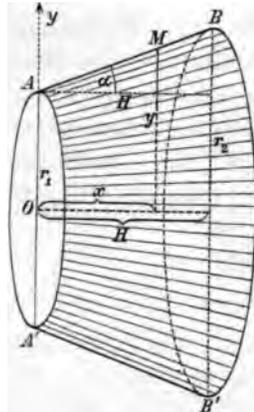
$$= 2 \pi H \sec \alpha \frac{r_1 + r_2}{2} = H \sec \alpha \cdot \frac{u_1 + u_2}{2}, \text{ so}$$

$$\text{dass } X = \frac{H}{3} \cdot \frac{2 u_2 + u_1}{u_1 + u_2}$$

in Übereinstimmung mit der gleichlautenden sichtigung (1).

Anmerkung. Wie sich der Schwerpunkt eines zwischen zwei Meridianen gelegenen Theiles einer Rotationsfläche mit Hilfe des Trägheitsmomentes Meridiancurve bestimmen lässt, wird später gezeigt werden.

Fig. 158.



4. Schwerpunkte der Volumina im allgemeinen und der Polyeder im besonderen.

Ist μ die Dichtigkeit (cubische Dichtigkeit) eines Körpers im nkte xyz und dM , bzw. dV das Differential der Masse, bzw. s Volums für diesen Punkt, so ist (siehe S. 478)

$$\mu = \frac{dM}{dV} \dots (1)$$

o $dM = \mu \cdot dV$, und es sind daher zufolge der Gleichungen (3), 469, die Schwerpunktskoordinaten XYZ der Masse M durch die sichtigungen bestimmt

$$\left. \begin{aligned} MX &= \int_0^M x \cdot dM = \int_0^V \mu \cdot x \, dV \\ MY &= \int_0^M y \cdot dM = \int_0^V \mu \cdot y \, dV \\ MZ &= \int_0^M z \cdot dM = \int_0^V \mu \cdot z \, dV \end{aligned} \right\} (2)$$

In diesen Gleichungen ist μ im allgemeinen eine Function von xyz . Ist jedoch der Körper homogen, so ist μ constant, und es führt die Einsetzung der dann giltigen Gleichungen $M = \mu \cdot V$, $m = \mu \cdot v$ in die Gleichungen (4), S. 470, nach erfolgter Abkürzung durch μ zu den Relationen

$$VX = \Sigma (v \xi), \quad VY = \Sigma (v \eta), \quad VZ = \Sigma (v \zeta) \dots (3)$$

wo $\xi \eta \zeta$ die Coordinaten der Schwerpunkte der einzelnen Volumenelemente v bedeuten. XYZ ist dann bloß von der Ausdehnung und der Form des Körpervolums abhängig, weshalb man in diesem Falle kurzweg vom Schwerpunkte des betreffenden Volums spricht. Sind $\xi \eta \zeta$ die Coordinaten des Schwerpunktes eines unendlichen kleinen Volumelementes dV , so nehmen die Gleichungen (3) die Form an

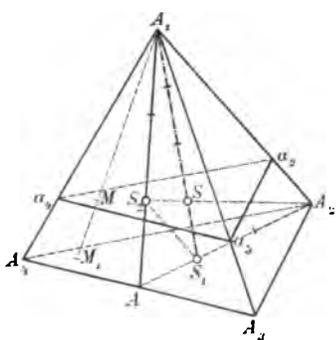
$$VX = \int_0^V \xi dV, \quad VY = \int_0^V \eta dV, \quad VZ = \int_0^V \zeta dV \dots (4)$$

Es bedarf nach dem Frthieren keines besonderen Beweises dafür, dass der Schwerpunkt S eines beliebigen Prismas der Mittelpunkt jener Geraden ist, welche die Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Grundflächen verbindet.

Anmerkung 1. Sind bei einem dreiseitigen Prisma die Punkte $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$, $(x_3 y_3 z_3)$ die Eckpunkte des einen Grunddreiecks F_1 und $(x_4 y_4 z_4)$, $(x_5 y_5 z_5)$, $(x_6 y_6 z_6)$ die Eckpunkte der zweiten Grundfläche F_2 , so ist für den Schwerpunkt S_1 der Grundfläche F_1 (siehe Gleichung 4, S. 488) $X_1 = \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3)$ und für den Schwerpunkt S_2 der zweiten Basis F_2 ist $X_2 = \frac{1}{3} (x_4 + x_5 + x_6)$; sonach ist für den Mittelpunkt der Geraden $S_1 S_2$, d. i. für den Schwerpunkt S des Prismas $X = \frac{1}{2} (X_1 + X_2) = \frac{1}{6} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$, und aus gleichen Gründen ist Y das arithmetische Mittel von allen y und Z das arithmetische Mittel von allen z .

Um den Schwerpunkt S einer beliebigen dreiseitigen Pyramide (eines Tetraëders) $A_1 A_2 A_3 A_4$ (Fig. 159) zu bestimmen, denke man sich dieselbe in unendlich kleinen Entfernungen durch unendlich viele zu irgend einer der Grenzebenen, z. B. zu $A_2 A_3 A_4$, parallel gelegten Ebenen in lauter Volumelemente getheilt, die als homogene materielle Dreiecke angesehen werden können. Die Schwerpunkte dieser dreieckförmigen Platten liegen sämtlich in jener Geraden, welche den Schwerpunkt S_1 des Dreiecks $A_2 A_3 A_4$ mit dem vierten Endpunkte A_1 der Pyramide verbindet, so dass die Gerade $S_1 A_1$ eine Schwerlinie ist.

Fig. 159.



Um nun S_1 selbst zu erhalten, hat man nur A_3A_4 im Punkte A zu halbieren und $AS_1 = \frac{AA_2}{3}$ zu machen. Aus gleichen Gründen ist, wenn $AS_2 = \frac{AA_1}{3}$ gemacht wird, S_2 der Schwerpunkt des Dreiecks $A_1A_3A_4$ und S_2A_2 eine zweite Schwerlinie der Pyramide. Die zwei so erhaltenen, in der Ebene des Dreiecks AA_1A_2 gelegenen Schwerlinien S_1A_1 und S_2A_2 schneiden sich im gesuchten Schwerpunkte S des Tetraëders. Da in dem Dreiecke AA_1A_2 sowohl $AS_2 = \frac{1}{3} AA_1$, als auch $AS_1 = \frac{1}{3} AA_2$ ist, so muss bekanntlich $S_1S_2 \parallel A_1A_2$ und auch $S_1S_2 = \frac{1}{3} A_1A_2$ sein, so dass in den ähnlichen Dreiecken S_1S_2S und A_1A_2S die Proportionen $\frac{S_1S}{A_1S} = \frac{S_2S}{A_2S} = \frac{S_1S_2}{A_1A_2} = \frac{1}{3}$ bestehen, also $S_1S = \frac{1}{3} A_1S$ ist. Theilt man demnach A_1S in drei gleiche Theile, so ist jeder Theil gleich S_1S , also ist $S_1S = \frac{1}{4} S_1A_1$, d. h. wenn man den Schwerpunkt S_1 der Basis $A_2A_3A_4$ der Pyramide mit der gegenüberliegenden Spitze A_1 verbindet und diese Gerade in vier gleiche Theile theilt, so ist der der Basis $A_2A_3A_4$ zunächst gelegene Theilpunkt der gesuchte Schwerpunkt der Pyramide.

Legt man durch den so erhaltenen Schwerpunkt S eine Ebene $a_2a_3a_4$ parallel zur Ebene $A_2A_3A_4$, so schneidet diese eine jede Gerade, die den Endpunkt A_1 mit einem beliebigen Punkte M_1 der Ebene $A_2A_3A_4$ verbindet, in einem Punkte M so, dass, wie sich aus dem Parallelismus der Transversalen MS und M_1S_1 ergibt, $M_1M = \frac{1}{4} M_1A_1$ ist. Es muss daher auch umgekehrt, wenn $MM_1 = \frac{1}{4} A_1M_1$ gemacht und durch M_1 eine parallele Ebene zu $A_2A_3A_4$ gelegt wird, diese Ebene eine Schwerebene sein.

Theilt man demnach eine mehr als dreiseitige Pyramide, deren Spitze A_1 ist, und deren Basis ein beliebiges Polygon von n Seiten ist, durch Ebenen, die durch A_1 und etwa die Diagonalen der Basis gelegt werden, in lauter dreiseitige Pyramiden, so müssen sämtliche Schwerpunkte dieser Theilpyramiden in jener Ebene gelegen sein, die man erhalten würde, wenn man den Schwerpunkt s der Basis mit der Spitze A_1 verbindet, A_1s in vier Theile theilt und durch den der Basis nächsten Theilpunkt S eine zur Basis parallele Ebene legt. Es muss sonach diese Ebene eine Schwerebene der n -seitigen Pyramide sein. Andererseits muss, wie die Theilung der Pyramide in dünne Platten parallel zur Basis lehrt, A_1s eine Schwerachse sein, somit der Durchschnittspunkt dieser Schwerachse A_1s

mit der früheren Schwerebene, d. i. der Punkt S selbst der Schwerpunkt der n -seitigen Pyramide sein. Es ist demnach nach der früheren Regel auch der Schwerpunkt einer jeden Pyramide bestimmbar.

Anmerkung 2. Dass bei einer jeden Pyramide $Z = A_1 S = \frac{3}{4} C$ ist, wo C die Länge der Schwerlinie $A_1 s$ bedeutet, lässt sich auch leicht folgendermaßen nachweisen. Theilt man die Pyramide in unendlich dünne Platten dV , die zur Basis F parallel sind, so ist für ein im allgemeinen schiefwinkeliges Achsensystem, dessen Anfangspunkt die Spitze A_1 der Pyramide, dessen xy -Ebene zur Basis parallel und dessen z -Achse $A_1 s$ gegen die Basis unter dem Winkel γ geneigt ist, wofern f die der Coordinate z entsprechende Schnittfläche bedeutet, in der Gleichung (4) $dV = f \cdot dz \cdot \sin \gamma$ und $f: F = z^2: C^2$, also $dV = \frac{F}{C^2} \sin \gamma \cdot z^2 dz$ und $\zeta = z$, also der Gleichung (4) zufolge $VZ = \int z \cdot dV = \frac{F}{C^2} \sin \gamma \cdot \int_0^C z^3 dz = \frac{1}{4} F C^2 \sin \gamma$ und $V = \int dV = \frac{F}{C^2} \sin \gamma \int_0^C z^2 dz = \frac{1}{3} F C \sin \gamma$, somit ist $Z = \frac{3}{4} C$.

Zerlegt man bei einer dreiseitigen Pyramide (Fig. 159) die resultierende Schwerkraft Q , als deren Angriffspunkt der Schwerpunkt S angesehen werden kann, in zwei gleichgerichtete Componenten Q_1 und q_1 , deren Angriffspunkte A_1 und S_1 sind, hierauf die letztere Componente q_1 , wie dies beim Dreiecke, S. 488, geschehen ist, in die gleichgerichteten Componenten $Q_2 Q_3 Q_4$, deren Angriffspunkte $A_2 A_3 A_4$ sind, so ist bekanntlich $\frac{Q_1}{SS_1} = \frac{q_1}{A_1 S} = \frac{Q}{A_1 S_1}$, also $Q_1 = \frac{SS_1}{A_1 S_1} \cdot Q = \frac{1}{4} Q$ und $q_1 = \frac{A_1 S}{A_1 S_1} Q = \frac{3}{4} Q$, ferner (siehe S. 488) $Q_2 = Q_3 = Q_4 = \frac{1}{3} q_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} Q = \frac{1}{4} Q$, so dass auch $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = \frac{1}{4} Q$ ist. Da nun offenbar S der Mittelpunkt der Kräfte $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ ist, so sind die Coordinaten XYZ den Gleichungen (4) auf S. 447 zufolge bestimmt durch

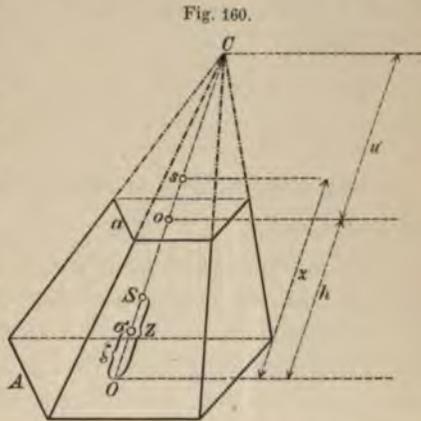
$$X = \frac{Q_1 x_1 + Q_2 x_2 + Q_3 x_3 + Q_4 x_4}{Q} = \frac{\frac{1}{4} Q (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}{Q} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

und analog ist $Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$, $Z = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}$, wenn $(x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2) \dots$ die Coordinaten der

Eckpunkte $A_1 A_2 \dots$ bedeuten; es ist sonach bei einer dreiseitigen Pyramide jede der Schwerpunktscoordinaten, wie dies auch bei der Geraden, dem Dreiecke, dem Parallelogramm und dem dreiseitigen Prisma der Fall war, das arithmetische Mittel der zu derselben Coordinatenachse parallelen Coordinaten der Eckpunkte.

Der Mittelpunkt der gleichen Kräfte Q_1 und Q_2 ist der Mittelpunkt B der Kante $A_1 A_2$ und ebenso ist A der Mittelpunkt der Kräfte Q_3 und Q_4 ; demnach muss der Mittelpunkt der beiden in B und A angreifenden gleichen Theilresultanten $(Q_1 + Q_2)$ und $(Q_3 + Q_4)$, mit anderen Worten der Mittelpunkt S der vier Kräfte $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ mit dem Mittelpunkte der Geraden AB zusammenfallen. Bei einer dreiseitigen Pyramide halbiert also der Schwerpunkt S die Verbindungslinie AB der Mittelpunkte zweier beliebiger Gegenkanten.

Der Schwerpunkt σ einer abgestumpften Pyramide (Fig. 160) liegt aus leicht ersichtlichen Gründen in der Geraden, welche die Schwerpunkte o und O der beiden parallelen Grundflächen f und F verbindet. Ist nun s der Schwerpunkt der Ergänzungspyramide v , deren Spitze C ist, und S der Schwerpunkt der ganzen aus dem



Pyramidalstumpfe und der letzteren Pyramide v bestehenden Pyramide V und ist $\overline{Oo} = h$, $\overline{Os} = z$, $\overline{Os} = z$ und $\overline{O\sigma} = \zeta$, so ist der Gleichung (3) zufolge

$$VZ = vz + (V - v) \cdot \zeta, \text{ also } \zeta = \frac{VZ - vz}{V - v}$$

Ist γ der Neigungswinkel der Geraden Oo gegen die Grundflächen und $\overline{oC} = u$, so ist $V = \frac{1}{3} F (h + u) \cdot \sin \gamma$, $Z = \frac{1}{4} (h + u)$, $v = \frac{1}{3} f u \sin \gamma$ und $z = h + \overline{os} = h + \frac{1}{4} u$. Substituiert man diese Werte in die Gleichung für ζ , so wird

$$\zeta = \frac{1}{4} \cdot \frac{F (h + u)^2 - f u^2 - 4 f h u}{F (h + u) - f u}$$

Nun ist bekanntlich, wenn A und a zwei parallele Seiten der beiden Grundflächen oder irgend welche zwei homologe Dimensionen dieser Flächen, welche bekanntlich den Quadratwurzeln aus diesen Flächen direct proportioniert sind, bezeichnen, $F = k A^2$, $f = k a^2$, wo k die Proportionalitätsconstante bedeutet und $\frac{u}{a} = \frac{h + u}{A} = \frac{h}{A - a}$, also $u = a \cdot \frac{h}{A - a}$ und $h + u = A \cdot \frac{h}{A - a}$. Substituiert man diese Werte in die frühere Gleichung, so ergibt sich $\zeta = \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{A - a} \cdot \frac{A^4 - a^4 - 4 a^3 (A - a)}{A^3 - a^3}$

also $\zeta = \frac{1}{4} h \cdot \frac{(A^2 + a^2)(A + a) - 4a^3}{A^3 - a^3}$. Dividiert man Zähler und Nenner des letzten Bruches durch $A - a$, so findet man

$$\overline{O\sigma} = \zeta = \frac{h}{4} \cdot \frac{A^2 + 2Aa + 3a^2}{A^2 + Aa + a^2} = \frac{h}{4} \cdot \frac{F + 2\sqrt{Ff} + 3f}{F + \sqrt{Ff} + f} \dots (5)$$

Vertauscht man A mit a und F mit f , so findet man für den Abstand Z des Schwerpunktes σ vom Schwerpunkte o der anderen Grundfläche f

$$Z = h - \zeta = \frac{h}{4} \cdot \frac{a^2 + 2aA + 3A^2}{a^2 + aA + A^2} = \frac{h}{4} \cdot \frac{f + 2\sqrt{fF} + 3F}{f + \sqrt{fF} + F}$$

Für eine senkrechte abgekürzte Pyramide ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und h die Höhe derselben.

Um auf graphischem Wege den Schwerpunkt σ einer abgekürzten Pyramide zu finden, bestimme man in bekannter Weise zunächst den Schwerpunkt S der vollen Pyramide V und den Schwerpunkt s der Ergänzungspyramide v . Da nun nach dem Schwerpunktsmomentensatze $V \cdot \overline{\sigma S} = v \cdot \overline{\sigma s}$, also $\sigma S : \sigma s = v : V$ ist, und da ferner S zwischen σ und s gelegen sein muss, so hat man nur durch S und s zwei parallele Gerade — etwa senkrecht zu der schon bestimmten Geraden sS — zu führen und auf jeder dieser Parallelen von S , bzw. s aus in derselben Richtung eine zu v , bzw. V proportionale Strecke SM , bzw. sm aufzutragen, so dass $SM : sm = v : V$ ist, und hat fernerhin die Endpunkte m und M dieser Strecken zu verbinden; der Durchschnittspunkt σ dieser Geraden mM mit der Schwerlinie sS ist den beiden letzten Proportionen zufolge der gesuchte Schwerpunkt.

Um nun auf einfachstem Wege diese proportionalen Strecken SM und sm , für welche $SM : sm = v : V$ ist, zu ermitteln, wähle man etwa SM beliebig und beachte, dass $v : V = a^3 : A^3$ also $SM : sm = a^3 : A^3$ und $sm = SM \cdot \frac{A^3}{a^3}$ ist (wo a und A die oben erwähnte Bedeutung haben, also a und A etwa die gleichlaufenden Seitenkanten der Pyramiden v und V bedeuten). Man braucht demnach, um sm zu construieren, nur in die Winkelfläche eines beliebigen Winkels φ von dem beliebigen Scheitel S als Centrum zwei concentrische Kreisbögen einzuzeichnen, deren Radien a und A sind, ferner die beiden Diagonalen c und d (Antiparallelen) des so entstandenen Ringsectors (Kreisbandes) zu ziehen, auf dem einen Schenkel des Winkels φ vom Scheitel S aus die Länge SM abzuschneiden, von M aus eine Parallele MN zu jener Diagonale c des Ringsectors zu führen, die von dem auf diesem Schenkel SM gelegenen Endpunkte

Radius a ausgeht, hat ferner den Durchschnittspunkt N dieser Parallelen MN mit dem zweiten Schenkel zu bestimmen (so dass $N = SM \cdot \frac{A}{a}$ ist), von N aus eine Parallele zu der zweiten Diagonale d (Antiparallelen) bis zum Durchschnitte M' mit dem ersten Schenkel zu führen (so dass $SM' = SN \cdot \frac{A}{a} = SM \cdot \frac{A^2}{a^2}$ ist) und schließlich wiederum von M' eine Parallele zur ersten Diagonale c zu construieren, welche den zweiten Schenkel SN in einem Punkte N' schneidet, für welchen $SN' = SM' \cdot \frac{A}{a} = SM \cdot \frac{A^3}{a^3}$, also der gesuchten Proportionalen sm gleich ist. Nachdem auf diese Weise sm gefunden wurde, hat man so vorzugehen, wie dies oben auseinandergesetzt wurde.

Der Schwerpunkt eines Prismaoids, d. i. eines Polyeders, welches von zwei parallelen Grundebenen und von ebenen, theils dreieckigen, theils trapezförmigen Seitenflächen, deren Ebenen durch die Ecken der Grundebenen, beziehungsweise Eckpunkte eines in der einen Grundebene eingeschlossenen Polygons willkürlich gelegt sind, eingeschlossen ist, hat die Eigenschaft, dass für denselben, wenn man eine zu den Grundebenen parallele Ebene zur xy -Ebene eines (im allgemeinen dreiwinkligen) dreiachsigen Coordinatensystems xyz wählt,

$$Z = \frac{F_0 z_0 + 4 F_1 z_1 + F_2 z_2}{F_0 + 4 F_1 + F_2} \dots (6)$$

wo F_0 und F_2 die Grundflächen, F_1 die Fläche des in gleichem Abstände von den beiden Grundflächen zu diesen parallel gelegten mittleren Querschnitts bedeutet, und $z_0 z_1 z_2$ sich auf den in der beliebigen angenommenen z -Achse gelegenen Punkt der Flächen $F_0 F_1 F_2$ beziehen. Es lässt sich dies folgendermaßen nachweisen:

Ist ν der Neigungswinkel der willkürlichen z -Achse gegen die Grundebenen, so ist $dV = F \cdot \sin \nu \cdot dz$, wofür man sich das Prismaoid durch Schnitte parallel zu den Grundflächen in lauter sehr dünne Platten von der Höhe $dz \cdot \sin \nu$ zerlegt denkt und durch F die Fläche eines beliebigen Schnittes, dessen sämtliche Punkte die zur z -Achse parallele Coordinate z haben, bezeichnet.

Sind die in irgend einer der Seitenflächen — etwa der r -ten trapezförmigen dreieckförmigen Seitenfläche — des Prismaoids gelegenen Seiten der Polygone F_0 , F und F_2 durch u_0 , U_r und u_2 bezeichnet (wo auch $u_0 = 0$ oder $u_2 = 0$ sein kann), so ist aus bekannten geometrischen Gründen $(U_r - u_0) : (u_2 - u_0) = (z - z_0) : (z_2 - z_0)$, und es ergibt sich demnach aus dieser Gleichung, in welcher nur U_r und z nur constante Glieder vorkommen, U_r als eine lineare Function von z von der Form $U_r = a_r + b_r z$. Legt man nun durch jene Seitenkante des Prismaoids, die als die erste angenommen wurde, eine Ebene, wählt ferner die Schnittlinie derselben mit der Ebene von F zur X -Achse und den in

dieser Seitenkante gelegenen Eckpunkt des Polygons F zum Anfangspunkte eines ebenen, und zwar in der Ebene dieses Polygons liegenden orthogonalen Achsensystems, so sind die Coordinaten X_r, Y_r irgend eines Eckpunktes des Polygons F , wie sich durch Projection des entsprechenden zwischen diesen Punkte und dem Coordinatenanfangspunkte gelegenen Polygonalzuges auf die X - und Y -Achse sofort ergibt, bestimmt durch

$$\begin{aligned} X_r &= U_1 \cos(X U_1) + U_2 \cos(X U_2) + \dots + U_r \cos(X U_r) \\ Y_r &= U_1 \sin(X U_1) + U_2 \sin(X U_2) + \dots + U_r \sin(X U_r) \end{aligned}$$

wo die Richtungswinkel $(X U_1), (X U_2) \dots$ wegen des Parallelismus aller X -Achsen in allen möglichen Flächen F von z unabhängige constante Werte haben.

Da nun, wie oben gezeigt wurde, $U_1 U_2 \dots U_r$ lineare Functionen von z sind, so müssen den letzten Gleichungen gemäß auch X_r und Y_r lineare Functionen von z sein. Bestimmt man demnach die Größe der Polygonfläche F nach der auf S. 493 abgeleiteten Regel, indem man die den einzelnen Theildreiecken

entsprechenden Ausdrücke von der Form $\frac{1}{2} [X_{r-1} Y_r - Y_{r-1} X_r]$ summiert, so enthalten alle Theilglieder von F nur Producte je zweier linearer Functionen von z , sind also ganze rationale Functionen von z , und zwar zweiten Grades, und es muss demnach auch F eine derartige Function zweiten Grades von der Form $F = A + Bz + Cz^2$ sein.

Da bei einem jeden Prisma die Fläche F stets durch eine ganze rationelle Function von z , und zwar von der zweiten Ordnung in der Form $F = A + Bz + Cz^2$ darstellbar ist, so muss $Fz = Az + Bz^2 + Cz^3$ von dritter Ordnung sein, und zufolge Gleichung (4) ist, wenn man durch h den Wert $h = z_1 - z_0 = z_2 - z_1 = \frac{z_2 - z_0}{2} = \frac{H}{2}$ bezeichnet,

$$\begin{aligned} VZ &= \int_0^V z \cdot dV = \int_{z_0}^{z_2} Fz \cdot \sin v dz = \sin v \int_{z_0}^{z_2} Fz dz = \left. \begin{aligned} &= \sin v \cdot \frac{h}{3} (F_0 z_0 + 4F_1 z_1 + F_2 z_2) \end{aligned} \right\} (7) \end{aligned}$$

wie man sich sofort überzeugt, wenn man $Fz = Az + Bz^2 + Cz^3$ zwischen den Grenzen z_0 und z_2 integriert und, nach Einsetzung der Werte $z_1 = z_0 + h$ und $z_2 = z_0 + 2h$ in das erhaltene Resultat dieses mit der in gleicher Weise für sich berechneten Summe $F_0 z_0 + 4F_1 z_1 + F_2 z_2$ vergleicht, und ebenso lässt sich nachweisen:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^V dV = \int_{z_0}^{z_2} F \cdot \sin v dz = \sin v \cdot \int_{z_0}^{z_2} F dz = \left. \begin{aligned} &= \sin v \cdot \frac{h}{3} (F_0 + 4F_1 + F_2) \end{aligned} \right\} (8) \end{aligned}$$

Die Division der beiden erhaltenen Werte (7) und (8) von VZ und V , welche lehren, dass die Simpson'sche Regel in ihrer An-

endung auf die Berechnung der Integrale $\int F dz$ und $\int F z dz$ für $= 1$ beim Prisma nicht zu angenäherten, sondern zu streng richtigen Resultaten führt, ergibt in der That die obige Gleichung (6).

In der Formel (6) sind alle für die bisher behandelten Polyeder, nämlich das Prisma, die Pyramide, den Pyramidalstumpf erhaltenen Resultate enthalten. So ist z. B. für den Pyramidalstumpf bekanntlich $F_1 = \frac{1}{2} (\sqrt{F_0} + \sqrt{F_2})$, also $F_1 = \frac{1}{4} (F_0 + F_2 + 2\sqrt{F_0 F_2})$, so dass, wenn $z_0 = 0$, $z_1 = \frac{H}{2}$, $z_2 = H$ gesetzt wird

$$= \frac{(F_0 + F_2 + 2\sqrt{F_0 F_2}) \cdot \frac{H}{2} + F_2 H}{2 F_0 + 2 F_2 + 2\sqrt{F_0 F_2}} = \frac{H}{4} \cdot \frac{F_0 + 2\sqrt{F_0 F_2} + 3 F_2}{F_0 + \sqrt{F_0 F_2} + F_2}$$

t, was mit der Gleichung (5) übereinstimmt.

Nimmt man als Grundflächen F_0 und F_2 des Prismatoids unähnliche Rechtecke mit den Seiten $a_0 b_0$, bzw. $a_2 b_2$ an, wo $a_0 \parallel a_2$, $b_0 \perp b_2$ ist, so wird das Prisma ein sogenannter Obelisk, dessen vier Seitenflächen Trapeze sind. Es ist dann in den obigen Formeln $F_0 = a_0 b_0$, $F_2 = a_2 b_2$, $F_1 = a_1 b_1 = \frac{a_0 + a_2}{2} \cdot \frac{b_0 + b_2}{2}$, $h = \frac{H}{2}$ zu setzen, und es ist demgemäß nach (7) und (8) für $z_0 = 0$, $z_2 = 2 z_1 = H$ das Volum

$$V = \frac{H \sin \nu}{6} [2 a_0 b_0 + a_0 b_2 + a_2 b_0 + 2 a_2 b_2] \text{ und}$$

$$VZ = \sin \nu \cdot \frac{H^2}{12} [a_0 b_0 + a_0 b_2 + a_2 b_0 + 3 a_2 b_2], \text{ also}$$

$$Z = \frac{H}{2} \cdot \frac{a_0 b_0 + a_0 b_2 + a_2 b_0 + 3 a_2 b_2}{2 a_0 b_0 + a_0 b_2 + a_2 b_0 + 2 a_2 b_2}.$$

Ist die Basis F_0 des Prismatoids ein Trapez, dessen parallele Seiten a_0 und a_1 den beliebigen senkrechten Abstand b_0 haben, und steht die Basis F_2 in eine zu a_0 und a_1 parallele Kante a_2 über, so wird aus dem Prisma ein schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma. Es ist F_1 dann ein Trapez, dessen Höhe $\frac{b_0}{2}$ und dessen parallele Seiten $\frac{a_0 + a_2}{2}$ und $\frac{a_1 + a_2}{2}$ sind; demnach ist $F_1 = \frac{1}{8} b_0 (a_0 + a_1 + 2 a_2)$, $F_0 = \frac{1}{2} b_0 (a_0 + a_1)$, $F_2 = 0$ und zufolge (8) $V = \frac{b_0 \cdot H \sin \nu}{2} \cdot \frac{a_0 + a_1 + a_2}{3}$. (Es ist $\frac{b_0 H \sin \nu}{2}$ der Flächeninhalt des zu den Kanten a_0, a_1, a_2 senkrechten Querschnittes.) Für $z_0 = 0$ ist $z_1 = \frac{H}{2}$, also $VZ = \frac{b_0 H \sin \nu}{2} \cdot \frac{H}{12} (a_0 + a_1 + 2 a_2)$ und $Z =$

$$= \frac{H}{4} \cdot \frac{a_0 + a_1 + 2a_2}{a_0 + a_1 + a_2}.$$
 Ist im letzteren Falle F_0 ein Rechteck, also $a_0 = a_1$ oder im früheren Obelisk $b_2 = 0$, so wird V ein Keil, für welchen also $V = \frac{b_0 H \sin \nu}{2} \cdot \frac{2a_0 + a_2}{3}$, $VZ = \frac{b_0 H \sin \nu}{2} \cdot \frac{H}{6} (a_0 + a_2)$, $Z = \frac{H}{2} \cdot \frac{a_0 + a_2}{2a_0 + a_2}$ ist.

Zur Bestimmung des Schwerpunktes eines beliebigen Polyeders auf constructivem Wege führt folgende einfache Betrachtung:

Der Schwerpunkt S_{12} einer von den Mantelflächen zweier beliebiger Pyramiden V_1 und V_2 , die eine gemeinsame Basis haben, eingeschlossenen Doppelpyramide V_{12} lässt sich graphisch auf analoge Art bestimmen, wie dies auf S. 490 bei einem Trapezoid geschehen ist.

Ist nämlich die Ebene der Fig. 148 die durch die Spitze C der Pyramide V_1 , durch die Spitze A der Pyramide V_2 und durch den Schwerpunkt F der gemeinsamen Basis der beiden Pyramiden gelegte Ebene, welche die gemeinsame Basisebene in der Geraden DB schneidet, so sind, wenn $FS_1 = \frac{1}{4}FC$ und $FS_2 = \frac{1}{4}FA$ gemacht wird, S_1 und S_2 die Schwerpunkte von V_1 und V_2 ; demnach ist S_1S_2 eine Schwerlinie der Doppelpyramide V_{12} . Da nun die Volumina V_1 und V_2 der Pyramiden von gleicher Basis sich wie die Höhen der Pyramiden verhalten, also auch wie die in der Geraden CA gelegenen Hypothenusen CE und EA der einander ähnlichen, diesen Höhen als Katheten zugehörigen Scheiteldreiecke, so lässt sich, wenn H der Durchstoßpunkt der Geraden S_1S_2 mit der gemeinsamen Grundfläche und S_{12} der Schwerpunkt der Doppelpyramide V_{12} ist, in genau derselben Weise, wie dies auf S. 490 geschehen ist, leicht zeigen, dass $HS_2 = S_1S_{12}$ und $S_1H = S_{12}S_2$ ist, dass man also, um S_{12} zu finden, nur etwa den Abschnitt S_1H von S_2 aus auf der Schwerlinie S_1S_2 in entgegengesetzter Richtung abzuschneiden hat.

Theilt man dementsprechend die einzelnen Seitenflächen des Polyeders in lauter Dreiecke und legt durch einen beliebigen Punkt O des Raumes (am besten durch einen Punkt O innerhalb des Polyeders) und durch die Seiten aller dieser Dreiecke Ebenen, wodurch man eine Aufeinanderfolge von lauter dreieckigen Pyramiden (Tetraëdern) $V_1V_2V_3V_4 \dots$ erhält, von denen je zwei aufeinanderfolgende eine gemeinsame Basis haben, so lässt sich dasselbe einfache graphische Verfahren, das auf S. 491 und 492 bei einem ebenen Polygon benützt wurde, auch zur Bestimmung des Schwerpunktes S des Polyeders anwenden, nur muss es statt „Dreieck“ hier stets „Tetraëder“ und statt „Viereck“ hier „Doppeltetraëder“ heißen. Man hat also zunächst außer den Schwerpunkten $S_1S_2S_3 \dots$ von $V_1V_2V_3 \dots$ auf die oberwähnte Art

nächst die Schwerpunkte $S_{12}, S_{23}, S_{34} \dots$ der Doppelpyramiden $V_{12}, V_{23}, V_{34} \dots$ zu ermitteln, hierauf den Durchschnittspunkt S_{123} von $S_1 S_2$ und $S_1 S_{23}$ zu bestimmen, hierauf den Durchschnittspunkt S_{1234} in $S_{123} S_4$ mit $S_{12} S_{34}$, dann jenen von $S_{1234} S_5$ mit $S_{123} S_{45}$ u. s. w.; \mathbf{r} so zuletzt erhaltene Durchschnittspunkt ist der gesuchte Schwerpunkt S des Polyeders.

Auch die Coordinaten (XYZ) des Schwerpunktes S eines beliebigen Polyeders lassen sich aus den gegebenen orthogonalen Coordinaten der Eckpunkte dieses Polyeders auf ganz ähnliche Weise berechnen, wie dies bei einem ebenen Polygon (S. 492 und 493) der Fall war.

Theilt man nämlich, wie früher, die Seitenflächen des Polyeders durch Diagonalen in lauter Dreiecke, deren Spitzen irgend welche drei Eckpunkte A, A', A'' des Polyeders sind, und deren Coordinaten $(y z), (x' y' z'), (x'' y'' z'')$ seien, so hat der Schwerpunkt jenes Tetraeders v , dessen Grundfläche das Dreieck $AA'A''$ und dessen Spitze der beliebige Anfangspunkt O des orthogonalen Coordinatensystems ist, bekanntlich (s. S. 516) die Coordinaten

$$\xi = \frac{x + x' + x''}{4}, \eta = \frac{y + y' + y''}{4}, \zeta = \frac{z + z' + z''}{4} \quad (9)$$

und das Volum v dieses Tetraeders ist (abgesehen vom Zeichen) bestimmt durch den sechsten Theil der sogenannten Determinante des Systems der neun Coordinaten der Punkte $AA'A''$, d. i. durch den Ausdruck:

$$v = \frac{1}{6} \left[x'' (y' z - y z') + x' (y z'' - y'' z) + x (y'' z' - y' z'') \right] \quad (10)$$

Dies geht etwa aus folgender einfacher, instructiver Erwägung hervor:

Stellt etwa die Kante OA' eine auf den Angriffspunkt O wirkende Kraft R und die Gegenkante des Tetraeders AA'' eine zweite auf den Angriffspunkt A einwirkende Kraft P dar, so ist das als Grundfläche des Tetraeders anzusehende Dreieck AAA'' jenes Momentendreieck, durch welches das Moment M der Kraft P in Bezug auf den Punkt O dargestellt ist, und daher $\frac{1}{2} M$ die Maßzahl dieser Grundfläche AAA'' .

Die Höhe der Pyramide, das ist die vom Endpunkte A' der Kante $OA' = R$ auf die Grundfläche geführte Normale hat, wenn (RM) den Neigungswinkel dieser Senkrechten (deren Richtung mit der Achse des Moments M übereinstimmt) gegen die Richtung von R bedeutet, zur Maßzahl $R \cos (RM)$, und ist das Volum v der Pyramide dem dritten Theil des Productes aus der Basis M und der Höhe $R \cos (RM)$ gleich, also $v = \frac{1}{6} R \cdot M \cos (RM)$. Nun ist (s. S. 72) durch $M \cos (RM)$ das Moment $M_R^{(P)}$ der Kraft P in Bezug auf die Kante $OA' = R$ bestimmt, das nach Gleichung (8) S. 73 auch der Summe $M_x \cos (xR) + M_y \cos (yR) + M_z \cos (zR)$ gleich ist, wo M_x, M_y, M_z die durch

die Gleichungen (5) und (6) auf S. 71 und 72 bestimmten Momente der Kraft P bezüglich der drei Coordinatenachsen bedeuten.

Dementsprechend besteht die Beziehung: $v = \frac{1}{6} R \cdot M \cos(RM) = \frac{1}{6} R \cdot M_R^P = \frac{1}{6} R [M_x \cos(xR) + M_y \cos(yR) + M_z \cos(zR)]$, oder wenn man die bekannten Werte der Componenten R_x, R_y, R_z der Kraft R (siehe Gleichung (3), S. 68) berücksichtigt, $v = \frac{1}{6} R \cdot M_R^P = \frac{1}{6} (R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z)$; das heißt, es ist die Maßzahl v des Tetraëderinhalts dem sechsten Theil der Invariante $RM \cos(RM) = R M_R^P = R \mu$ (vergl. S. 437 und Gleichung (4), S. 441) des aus den zwei Kräften P und R , deren Richtungslinien sich kreuzen, gebildeten Kraftsystems gleich. Setzt man nun in den letztgefundenen Wert von v für M_x, M_y, M_z die bekannten Werte $M_x = yZ - zY$ u. s. w. ein und setzt aus bekannten Gründen $X = x'' - x, Y = y'' - y, Z = z'' - z$ und $R_x = x', R_y = y', R_z = z'$, so gelangt man zu der obigen Gleichung (10).

Nachdem mit Hilfe der Gleichungen (9) und (10) aus den gegebenen Coordinaten der Eckpunkte des Polyeders sowohl v , als auch $(\xi \eta \zeta)$ für jedes einzelne Tetraëder berechnet worden sind, hat man schließlich die Coordinaten (XYZ) des Schwerpunktes S des ganzen Polyeders mittels der Gleichungen (3) $X = \frac{\sum(v\xi)}{\sum v}$, $Y = \frac{\sum(v\eta)}{\sum v}$, $Z = \frac{\sum(v\zeta)}{\sum v}$ zu bestimmen.

§ 85. Schwerpunkte der von krummen Flächen begrenzten Volumina. Guldin'sche Regeln.

Der Schwerpunkt einer Kugel, eines Ellipsoids u. s. w. überhaupt solcher Volumina, die einen Mittelpunkt haben, ist dieser Mittelpunkt.

Der Schwerpunkt eines von einer beliebigen Cylinderfläche und von zwei parallelen Grundebenen begrenzten Cylinders ist offenbar auf dieselbe Weise zu bestimmen wie jener eines Prismas: der Schwerpunkt eines von einer beliebigen Kegelfläche und einer, bzw. zwei parallelen Ebenen begrenzten Kegels, bzw. Kegelstumpfes auf dieselbe Weise wie jener einer Pyramide (siehe S. 515), bzw. eines Pyramidalstumpfes (siehe S. 518).

Anmerkung. In Betreff der Ermittlung der Lage des Schwerpunktes und der Bestimmung des Volums eines schief abgeschnittenen Cylinders, bzw. Prismas, sei auf die letzte Anmerkung des § 95 hingewiesen.

Setzt man in der für den Kegelstumpf giltigen Gleichung (5) auf S. 518 in dem besonderen Falle, dass die Basisflächen Kreise mit den Radien R und r sind und h den Abstand der beiden Kreismittelpunkte bedeutet, $F' = R^2 \pi$ und $f = r^2 \pi$, so findet man

$$x = \frac{h}{4} \cdot \frac{R^2 - 2Rr - 3r^2}{R^2 - Rr - r^2}, \quad Z = \frac{h}{4} \cdot \frac{r^2 + 2rR + 3R^2}{r^2 - rR + R^2} \dots \dots \dots$$

Desgleichen müssen für einen Körper, welcher von zwei parallelen Ebenen und einer Mantelfläche begrenzt ist, wenn diese krumme Mantelfläche durch die Bewegung einer geraden Erzeugenden entsteht, die in beliebiger Weise längs zwei beliebiger Curven schleift, welche in den früher erwähnten parallelen Ebenen gelegen sind, die Gleichungen (6), (7) und (8) auf S. 519 und 520 gültig sein.

Entsteht aber die Mantelfläche nicht auf die erwähnte Weise, so muss man zurückgehen auf die ursprünglichen Gleichungen $dV = F \sin \nu \cdot dz$ (siehe S. 519),

$$VZ = \int_0^V z \cdot dV = \sin \nu \cdot \int_{z_0}^{z_{2n}} Fz dz \text{ und } V = \int_0^V dV = \sin \nu \cdot \int_{z_0}^{z_{2n}} F dz,$$

wo F eine beliebige, zu den parallelen Grundflächen F_0 und F_{2n} , für welche $z = z_0$ und $z = z_{2n}$ ist, (und auch zur xy -Ebene des im allgemeinen schiefwinkligen Coordinatensystems) parallele Querschnittsfläche vorstellt, deren Punkten das variable z entspricht, und wo ν den Neigungswinkel der z -Achse gegen die xy -Ebene bedeutet. Theilt man den zwischen den parallelen Grundebenen gelegenen Theil $z_{2n} - z_0$ der z -Achse in $2n$ gleiche Theile, wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet, führt durch die so erhaltenen Theilpunkte zu den Grundebenen parallele Schnitte, denen die Querschnittsflächen $F_0 F_1 F_2 \dots F_{2n}$ und die Coordinaten $z_0 z_1 z_2 \dots z_{2n}$ entsprechen, so lassen sich die in den beiden letzten Gleichungen enthaltenen bestimmten Integrale nach der Simpson'schen Regel näherungsweise berechnen, so dass dann

$$\left. \begin{aligned} VZ &= \sin \nu \cdot \frac{h}{3} (F_0 z_0 + 4F_1 z_1 + 2F_2 z_2 + \dots \\ &\quad + 4 \cdot F_{2n-1} z_{2n-1} + F_{2n} z_{2n}) \\ V &= \sin \nu \cdot \frac{h}{3} (F_0 + 4F_1 + 2F_2 + \dots + 4F_{2n-1} + F_{2n}) \end{aligned} \right\} (2)$$

gesetzt werden kann, wo $h = \frac{z_{2n} - z_0}{2n}$ ist. Die Division der beiden letzten Gleichungen liefert den angenäherten Wert von Z . So ist z. B. für $z_0 = 0, z_{2n} = H,$

$$Z = \frac{H}{2n} \cdot \frac{1 \cdot 0 \cdot F_0 + 4 \cdot 1 \cdot F_1 + 2 \cdot 2 \cdot F_2 + 4 \cdot 3 \cdot F_3 + \dots + 4 \cdot (2n-1) F_{2n-1} + 1 \cdot 2n F_{2n}}{F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + \dots + 4F_{2n-1} + F_{2n}}$$

und für $n = 1,$ bzw. $n = 2$

$$Z = H \cdot \frac{2F_1 + F_2}{F_0 + 4F_1 + F_2}, \text{ bzw. } Z = H \cdot \frac{F_1 + F_2 + 3F_3 + F_4}{F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + F_4}$$

Diese Formeln bringt man in mancherlei Fällen der Praxis mit Vortheil zur Anwendung.

Der Schwerpunkt S des Segmentes eines Ellipsoids oder jezt einer Platte V , die von einem Ellipsoid, dessen orthogonale Hauptdurchmesser $2A, 2B, 2C$ als Coordinatenachsen angenommen seien, und von zwei zu einer Achse — etwa der z -Achse — senkrechten Ebenen (für welche Grenzebenen $z = z_0$ und $z = z_1$ sei) eingeschlossen ist, lässt sich folgendermaßen bestimmen:

Zunächst ist S in der z -Achse, da diese eine Symmetrieachse des Körpers ist, gelegen. Theilt man das Volum V durch senkrecht zur z -Achse geführte Schnitte in lauter elementare Lamellen dV von der Dicke dz , so ist, wenn durch a und b die Halbachsen des im Abstände z vom Mittelpunkte O des Ellipsoids befindlichen elliptischen Schnittes F bezeichnet sind, $dV = F \cdot dz = ab \pi \cdot dz$. Nun sind a und z die Coordinaten eines Punktes des in der xz -Ebene gelegenen elliptischen Hauptschnittes, dessen Halbachsen A und C sind, und ebenso b und z die Coordinaten eines Punktes der in der yz -Ebene gelegenen Ellipse mit den Halbachsen B und C , also

$$\frac{a^2}{A^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1 \text{ und } \frac{b^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1, \text{ also } a = A \sqrt{1 - \frac{z^2}{C^2}}, b = B \sqrt{1 - \frac{z^2}{C^2}}.$$

Substituiert man die beiden letzten Werte in die obige Gleichung, so wird $dV = \pi \cdot A B \left(1 - \frac{z^2}{C^2}\right) dz$. Es ist sonach zufolge Gleichung (4) des § 84

$$VZ = \int z dV = \pi \cdot A B \int_{z_0}^{z_1} \left(z - \frac{z^3}{C^2}\right) dz = \pi \cdot A B \left[\frac{z_1^2 - z_0^2}{2} - \frac{1}{4} \frac{z_1^4 - z_0^4}{C^2} \right]$$

$$V = \int dV = \pi \cdot A B \int_{z_0}^{z_1} \left(1 - \frac{z^2}{C^2}\right) dz = \pi \cdot A B \left[(z_1 - z_0) - \frac{1}{3} \frac{z_1^3 - z_0^3}{C^2} \right].$$

Durch Division dieser beiden Gleichungen ergibt sich der von A und B völlig unabhängige Wert

$$Z = \frac{3}{4} \frac{(z_1 + z_0) (2 C^2 - z_1^2 - z_0^2)}{(z_1^2 - z_1 z_0 - z_0^2)} \dots (a)$$

Dieser Formel zufolge ist die Lage der Schwerpunkte für alle jene Platten dieselbe, bei welchen die Abstände z_0 und z_1 der Grundebenen von dem Mittelpunkte des Ellipsoids dieselben sind, wenn nur die Länge C der zu den Grundebenen senkrechten Halbachse des Ellipsoids die gleiche bleibt, mögen die beiden anderen Halbachsen welche Werte immer haben.

Es ist also der gesuchte Schwerpunkt S , wie dies übrigens auch die Übereinstimmung der Formel (a) mit der folgenden Gleichung (5) lehrt, identisch mit dem Schwerpunkte der entsprechenden körperlichen Kugelzone (Kugelschichte, wofern C den Radius R der zugehörigen Kugeloberfläche bedeutet.

Für $z_1 = C$ und $z_0 = C - H$ ergeben sich aus den letzten Gleichungen für ein ellipsoidisches Segment von der Höhe H folgende Formeln:

$$\left. \begin{aligned} VZ &= \pi \frac{AB}{C^2} H^2 \left(C - \frac{H}{2}\right)^2, & V &= \pi \frac{AB}{C^2} H^2 \left(C - \frac{H}{3}\right) \\ Z &= \left(C - \frac{H}{2}\right)^2 : \left(C - \frac{H}{3}\right) \end{aligned} \right\} (b)$$

Aus der letzten Formel lässt sich ein einfaches constructives Verfahren, durch welches man die Lage des Schwerpunktes des ellipsoidischen Segments (bezw. eines Kugelsegments) bestimmen kann, entnehmen: Man schneide von der

Hauptachse $2C$ (bezw. von dem Durchmesser) — und zwar ausgehend von jenem in dieser Achse gelegenen Scheitel des Ellipsoids, der nicht dem Segmente angehört — den dritten Theil der Höhe H des Segments ab, wodurch man zu einem Punkte E gelangt, für welchen $\overline{OE} = C - \frac{H}{3}$ ist, ebenso schneide man auf einem zu $2C$ senkrechten Durchmesser — vom Mittelpunkte O des Ellipsoids ausgehend — die Strecke $\overline{OF} = C - \frac{H}{2}$ ab, verbinde die so erhaltenen Punkte E und F und führe zu dieser Geraden EF durch F in der Ebene OFE eine Normale, welche die Achse $2C$ in dem gesuchten Schwerpunkte durchschneidet.

Setzt man in (a) $z_0 = 0$ und $z_1 = C$, so geht das Volum V in das auf der positiven Seite der xy -Ebene gelegene halbe Ellipsoid über, für welches dann nach obigen Gleichungen $V = \frac{2}{3} \pi \cdot ABC$ und $Z = \frac{3}{8} C$ wird.

Es ist leicht einzusehen, dass die Formel (a) auch giltig ist für eine von zwei beliebigen parallelen Ebenen begrenzte Platte des Ellipsoids, wofern man nur die zu diesen Ebenen durch den Mittelpunkt des Ellipsoids geführte parallele Diametralebene zur xy -Ebene wählt, ferner durch a und b , beziehungsweise A und B zwei conjugierte Semidiameter der entsprechenden zu den Grenzebenen parallelen elliptischen Schnitte bezeichnet, und wofern zur z -Achse der die Mittelpunkte aller dieser Ellipsen verbindende Diameter $2C$ angenommen wird. Da jede durch die z -Achse gelegte Ebene eine Diametralebene ist, so liegt der Schwerpunkt S in der z -Achse, und zwar in dem durch (a) bestimmten Abstände von dem Mittelpunkte des Ellipsoids.

Ebenso einfach, wie es hier mit den Abschnitten eines Ellipsoids geschehen ist, lassen sich auch in gleicher Weise die Abschnitte eines einflächigen oder zweiflächigen Hyperboloids behandeln.

Für eine aus einem elliptischen Paraboloid, dessen Gleichung (auf die Hauptachsen bezogen) $\frac{x^2}{P} + \frac{y^2}{Q} = z$ sei, durch zwei senkrecht zur z -Achse im Abstände z_0 und z_1 vom Scheitel O geführte Schnitte herausgeschnittene Platte ist in ganz analoger Weise in dem einen parabolischen Hauptschnitte $x = 0$ und $y = b$ und in dem zweiten parabolischen Hauptschnitte $y = 0$ und $x = a$ zu setzen, so dass die Achsen einer der früheren elliptischen Lamellen $b = \sqrt{Qz}$ und $a = \sqrt{Pz}$ sind und demnach $dV = F \cdot dz = ab\pi \cdot dz = \sqrt{PQ} \cdot z \, dz$, $VZ = \int z \, dV = \sqrt{PQ} \int_{z_0}^{z_1} z^2 \, dz = \sqrt{PQ} \cdot \frac{z_1^3 - z_0^3}{3}$ und $V = \int dV = \sqrt{PQ} \int_{z_0}^{z_1} z \, dz = \sqrt{PQ} \cdot \frac{z_1^2 - z_0^2}{2}$ ist. Die Division der beiden letzten Gleichungen lehrt, dass

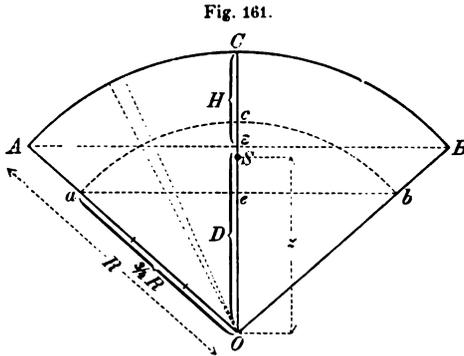
$$Z = \frac{2}{3} \frac{z_1^3 - z_0^3}{z_1^2 - z_0^2} \dots (b)$$

also Z von den Parametern P und Q völlig unabhängig ist. Für das durch einen Schnitt im Abstände $z = c$ abgetrennte Segment des Paraboloids ist $z_0 = 0$ und $z_1 = c$ zu setzen, so dass dann $Z = \frac{2}{3} c$ wird.

Es unterliegt keinen Schwierigkeiten, auf gleiche Art nachzuweisen, dass nach der Formel (b) auch die Lage des Schwerpunktes für eine Platte (bezw. ein Segment), die durch zwei beliebige parallele ebene Schnittflächen aus dem Paraboloid herausgeschnitten ist, bestimmt werden kann, wofern nur als z -Achse die die Mittelpunkte dieser elliptischen Schnittflächen verbindende, zur früheren

z -Achse parallele Gerade (d. i. der den Schnittflächen conjugierte Diameter) und als Anfangspunkt O des schiefwinkeligen Achsensystems der Durchschnittspunkt dieser Geraden mit dem Paraboloid, ferner also als xy -Ebene die das Paraboloid in diesem Punkte O tangierende Ebene angenommen wird.

Der Schwerpunkt eines Kugelsectors (Kugelausschnittes), der durch Rotation eines Kreisectors $OACB$ (Fig. 161) um seine



Mittellinie OC entsteht, liegt zunächst in der Symmetrieachse OC . Theilt man die dem Kugelsector zugehörige Calotte in lauter gleiche unendlich kleine Flächenelemente, so können diese als Grundflächen von Kegeln, bzw. Pyramiden, deren Spitze O ist, angenommen werden. Bekanntlich sind die Schwerpunkte aller dieser elementaren Kegeln,

aus denen der Kugelsector besteht, in einer Calotte acb gelegen, deren Radius $\overline{Oa} = \frac{3}{4} R$ ist, wenn R den Radius OA bedeutet, und es lässt sich dann auf dieselbe Weise, wie dies beim Kreisector geschehen ist, nachweisen, dass der gesuchte Schwerpunkt identisch ist mit dem Schwerpunkte dieser Calotte acb , der bekanntlich der Mittelpunkt S ihrer Achse ce ist. Es ist sonach $OS = Oc - Sc = Oa - \frac{1}{2} \cdot ce = \frac{3}{4} OA - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} CE$.

Ist die Höhe CE der dem Kugelsector $OACB$ zugehörigen Calotte durch H und der Abstand OE ihrer kreisförmigen Basis von dem Kugelcentrum durch D bezeichnet, so ist sonach

$$\overline{OS} = Z = \frac{3}{4} R - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot H = \frac{3}{8} [2R - H] = \frac{3}{8} [R + D].$$

Ist 2α der Öffnungswinkel des Kugelsectors, so ist $D = R \cos \alpha$, also $Z = \frac{3}{8} R (1 + \cos \alpha) = \frac{3}{4} R \cos^2 \frac{\alpha}{2}$. Für eine Halbkugel ist $D = 0$, also $\overline{OS} = Z = \frac{3}{8} R$.

Da die Fläche f der Basiscalotte des Sectors dem Producte aus dem Umfange $2R\pi$ des größten Kegelkreises in die Höhe $H = R - R \cos \alpha = R (1 - \cos \alpha)$ der Calotte gleich, also durch $f = 2R^2\pi (1 - \cos \alpha)$ bestimmt ist, so ist das Volum V des Kugelsectors $V = \frac{1}{3} f R = \frac{2}{3} R^3 \pi (1 - \cos \alpha)$ und demnach das Schwerpunktsmoment des Kugelsectors $VZ = \frac{1}{4} R^4 \pi (1 - \cos^2 \alpha) = \frac{1}{4} \pi R^4 \sin^2 \alpha$. Es ist demnach das Schwerpunktsmoment des von einer Kegelfläche (mit dem

Öffnungswinkel 2α und der Spitze O) und zwei concentrischen Kugelflächen (mit den Radien R und r und dem Centrum O) begrenzten Sectors einer Kugelschale der Differenz $\frac{1}{4} \pi (R^2 - r^2) (1 - \cos^2 \alpha)$ gleich und das Volum derselben $\frac{2}{3} \pi (R^3 - r^3) (1 - \cos \alpha)$, also der Abstand des Schwerpunktes dieses Sectors vom Kugelcentrum durch den Quotienten der beiden letzten Ausdrücke, d. i. durch $\frac{3}{8} \frac{R^2 - r^2}{R^3 - r^3} (1 + \cos \alpha)$ bestimmt. Für den von zwei Kegelflächen mit der Spitze O und den Öffnungswinkeln 2α und $2\alpha_0$ und den früheren beiden concentrischen Kugelflächen begrenzten Raum ist ebenso das Schwerpunktsmoment $\frac{1}{4} \pi (R^2 - r^2) (\cos^2 \alpha_0 - \cos^2 \alpha)$ und das Volum desselben ist $\frac{2}{3} \pi (R^3 - r^3) (\cos \alpha_0 - \cos \alpha)$, also ist der Abstand des Schwerpunktes vom Kugelcentrum der Quotient $\frac{3}{8} \frac{R^2 - r^2}{R^3 - r^3} (\cos \alpha_0 + \cos \alpha)$ dieser beiden letzten Ausdrücke.

Um auf graphischem Wege den Schwerpunkt des oben behandelten Sectors einer Kugelschale, der durch Drehung eines ebenen Kreisringsectors (Kreisbandes) um dessen Symmetrieachse entsteht, und der als eine Differenz $V - v$ zweier Kugelsectoren V und v , deren Radien, wie oben, R und r seien, angesehen werden kann, zu erhalten, bestimmt man auf die früher erwähnte Weise die Schwerpunkte S und s der beiden Kugelausschnitte V und v und gehe im übrigen genau so vor, wie dies bei der graphischen Schwerpunktsbestimmung für eine abgestumpfte Pyramide erläutert wurde, indem auch hier bekanntlich $v:V = r^2:R^2$ ist, also die dort angewendeten Zeichen A und a hier die Bedeutung $A = R$, $a = r$ haben. Da ferner als Winkel φ (S. 518) der halbe Mittelpunktswinkel α der Kugelsectoren und $SM = r$ angenommen werden kann, so kann man die Antiparallelen in den innerhalb des Winkels α gelegenen Kreissector verzeichnen, wodurch sich die Construction vereinfacht.

Der Schwerpunkt eines von einer Umdrehungsfläche (S. 509, Fig. 156) und zwei zur Umdrehungsachse Ox senkrechten Ebenen $A\alpha A'$ und $B\beta B'$ eingeschlossenen Umdrehungskörpers (Rotationskörpers) ist zunächst in der Achse Ox gelegen, da diese eine Symmetrieachse ist. Denkt man sich den Rotationskörper in ähnlicher Weise in unendlich kleine Volumelemente dV zerlegt, wie dies in Fig. 156 geschehen ist, so können diese als senkrechte Kreiscylinder von der Höhe $\overline{mn} = dx$, ferner kann $y = \overline{Mm}$ als der Radius der kreisförmigen Querschnittsfläche f und der Fußpunkt m der Ordinate y (der Kreismittelpunkt) als der Schwerpunkt des Volumelements dV angesehen werden, so dass in Gleichung (4) (S. 514) $\xi = x$ und

$$dV = f \cdot dx = y^2 \pi \cdot dx$$

gesetzt werden kann und nach Gleichung (4) auf S. 514

$$\left. \begin{aligned} VX &= \int_0^V x dV = \int_{x_0}^{x_1} x \cdot y^2 \pi dx = \pi \int_{x_0}^{x_1} x y^2 dx \\ V &= \int_0^V dV = \int_{x_0}^{x_1} y^2 \pi \cdot dx = \pi \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx \end{aligned} \right\} (3)$$

ist, wo x_0 und x_1 die Abscissen der Mittelpunkte a und b der beiden parallelen Grundflächen bedeuten.

Die Division der Gleichungen (3) liefert den Wert von X .

Ist dagegen ein Rotationskörper von zwei Rotationsflächen F'' und F' (mit gemeinsamer Achse), deren erzeugende Meridiancurven die Gleichungen $y'' = f(x)$ und $y' = \varphi(x)$ haben, und von zwei Parallelkreisen eingeschlossen, so ist offenbar

$$\text{somit} \quad dV = (y''^2 \pi - y'^2 \pi) \cdot dx = \pi (y''^2 - y'^2) dx,$$

$$\left. \begin{aligned} VX &= \int x dV = \pi \int_{x_0}^{x_1} x (y''^2 - y'^2) dx \\ V &= \int dV = \pi \int_{x_0}^{x_1} (y''^2 - y'^2) dx \\ X &= \frac{\int_{x_0}^{x_1} x (y''^2 - y'^2) dx}{\int_{x_0}^{x_1} (y''^2 - y'^2) dx} \end{aligned} \right\} (4)$$

Den Gleichungen (3) entsprechend ist z. B. für eine körperliche Kugelzone (Kugelschichte) $ABA'B'$ (Fig. 157, S. 510), wofern man den Kugelmittelpunkt C zum Coordinatenanfangspunkte und die Achse der Zone zur x -Achse wählt, und wenn man die Abscissen der Mittelpunkte E und F der Grundflächen durch x_0 und x_1 und den Kugelradius durch R bezeichnet, der Kreisgleichung $y^2 = R^2 - x^2$ gemäß:

$$\begin{aligned} VX &= \pi \int_{x_0}^{x_1} x y^2 dx = \pi \int_{x_0}^{x_1} (R^2 - x^2) x dx = \pi \left\{ \frac{R^2 (x_1^2 - x_0^2)}{2} - \frac{x_1^4 - x_0^4}{4} \right\} \\ V &= \pi \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx = \pi \int_{x_0}^{x_1} (R^2 - x^2) dx = \pi \left\{ R^2 (x_1 - x_0) - \frac{x_1^3 - x_0^3}{3} \right\} \end{aligned}$$

so dass die Division dieser Gleichungen in Übereinstimmung mit Gleichung (a) S. 526 ergibt:

$$\overline{OS} = X = \frac{1}{2} (x_1 + x_0) \cdot \frac{R^2 - \frac{1}{2} (x_1^2 + x_0^2)}{R^2 - \frac{1}{3} (x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2)} \dots (5)$$

Sind y_0 und y_1 die Radien der Grundflächen der Kugelschichte und H die Höhe der letzteren, so ist offenbar $y_1^2 = R^2 - x_1^2$, $y_0^2 = R^2 - x_0^2$, $H = x_1 - x_0$, so dass $y_1^2 + y_0^2 = 2R^2 - (x_1^2 + x_0^2)$, $3y_1^2 + 3y_0^2 + H^2 = 6R^2 - 2(x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2)$, $\frac{y_0^2 - y_1^2}{H} = x_1 + x_0$.

$$\begin{aligned} \text{also } \frac{y_1^2 + y_0^2}{2} &= R^2 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_0^2), \quad \frac{3y_1^2 + 3y_0^2 + H^2}{6} = \\ &= R^2 - \frac{1}{3}(x_1^2 + x_1x_0 + x_0^2) \quad \text{und} \quad x_1 = \frac{1}{2} \frac{y_0^2 - y_1^2}{H} + \frac{H}{2}, \quad x_0 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{y_0^2 - y_1^2}{H} - \frac{H}{2} \text{ ist.} \end{aligned}$$

Substituiert man diese Werte in die Gleichung (5), so findet man

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{3}{2H} \frac{y_0^4 - y_1^4}{3(y_0^2 + y_1^2) + H^2} \\ d = \overline{ES} = X - x_0 &= \frac{H}{2} \frac{H^2 + 2y_0^2 + 4y_1^2}{H^2 + 3y_0^2 + 3y_1^2} \end{aligned} \right\} (6)$$

Da bei einer Kugelzone die Fläche F eines jeden zu ihren Grundflächen $F_0 = \pi y_0^2$ und $F_1 = \pi y_1^2$ parallelen Querschnittes (eines Parallelkreises) eine ganze rationale Function des Abstandes z derselben von der Grundfläche F_0 und zwar vom zweiten Grade ist, so lässt sich die soeben berechnete Entfernung $\overline{ES} = Z$ des Schwerpunktes von der Grundfläche F_0 auch einfach nach der Formel (6) auf S. 519, beziehungsweise nach den auch für den vorliegenden Fall anwendbaren Gleichungen (7) und (8) auf S. 520 bestimmen, sofern man in diesen Gleichungen für die mittlere Querschnittsfläche F_1 den leicht zu ermittelnden Wert $F_1 = \frac{1}{4} \pi [H^2 + 2(y_0^2 + y_1^2)]$, ferner für $v = \frac{\pi}{2}$, $z_0 = 0$, $z_1 = h = \frac{1}{2} H$ und $z_2 = H$ einsetzt. Man gelangt so zu der Gleichung $V = \frac{1}{6} \pi H [H^2 + 3(y_0^2 + y_1^2)]$ und zu dem früheren Werte von ES .

Wie man auf einfache Weise constructiv den Schwerpunkt eines Kugelsegments bestimmen kann, wurde schon früher bei einem ellipsoidischen Segment (S. 527) gezeigt.

Um auch den Schwerpunkt s einer Kugelschichte v auf constructivem Wege zu finden, hat man etwa die Kugelschichte v als Differenz $v = V - V'$ zweier Kugelsegmente V und V' anzusehen, deren Schwerpunkte S und S' nach der eben erwähnten Art leicht gefunden werden können. Sind nun H und H' die Höhen dieser Kugelabschnitte, so ist nach einer bekannten Formel der Stereometrie (wie dies übrigens auch der früher erhaltene Wert von V für $x_1 = R$ und $x_0 = R - H$ lehrt) $V = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right)$ und $V' = \pi H'^2 \left(R - \frac{H'}{3}\right)$ so dass $V : V' = \left(R - \frac{H}{3}\right) : \left(R - \frac{H'}{3}\right) \cdot \frac{H'^2}{H^2}$ ist. Das letzte Glied dieser Proportion lässt sich leicht etwa derart construieren, dass man zwei concentrische Kreise, deren Mittelpunkt C der Scheitel irgend eines beliebigen Winkels φ ist, und deren Radien H und H' oder zu H und H' proportionale Längen sind, verzeichnet, hierauf in dem dadurch entstandenen, dem Mittelpunktwinkel φ zugehörigen Ringsector (Kreisband) die beiden Diagonalen (Antiparallelen) zieht, auf dem einen Winkelschenkel vom Scheitel C aus die Strecke $R - \frac{H'}{3}$ abschneidet, von dem so erhaltenen Endpunkte D dieser Strecke eine Parallele zu jener Diagonale, die vom Durchschnittspunkte des Kreises H mit diesem Schenkel ausgeht, führt, und zwar bis zum Durchschnitte E mit dem zweiten Schenkel, und schließlich von E eine Parallele zur zweiten Diagonale (Antiparallelen) zieht,

welche wiederum den ersten Schenkel in einem Punkte F schneidet, für welchen offenbar $\overline{CF} = \left(R - \frac{H'}{3}\right) \cdot \frac{H'^2}{H^2}$ ist.

Wenn man also der letzten Proportion zufolge aus denselben Gründen, wie sie schon bei wiederholten Constructionen auseinandergesetzt wurden, in S und S' Parallele zieht (etwa senkrechte zur Geraden SS') und auf diesen Parallelen nach derselben Richtung die Strecken $\overline{SM} = \overline{CF} = \left(R - \frac{H'}{3}\right) \cdot \frac{H'^2}{H^2}$ und $\overline{S'M'} = R - \frac{H'}{3}$ aufträgt, so schneidet die Gerade $M'M$, welche die Endpunkte dieser Strecken verbindet, die Schwerlinie $S'S$ in dem gesuchten Schwerpunkte der körperlichen Kugelzone.

Dieselbe Construction lässt sich auch auf die Bestimmung des Schwerpunktes der Zone eines Ellipsoids, deren Achse in eine der Hauptachsen, z. B. $2C$, fällt, in Anwendung bringen, da für dieselbe zufolge der Formel (b) auf S. 506, $V = \pi \cdot \frac{AB}{C^2} H^2 \left(C - \frac{H}{3}\right)$ und $V' = \pi \cdot \frac{AB}{C^2} H'^2 \left(C - \frac{H'}{3}\right)$ u. s. w. ist. Man hat nur bei der früheren Construction R durch die Halbachse C zu ersetzen.

Für ein Kugelsegment (Kugelabschnitt) von der Höhe H , dessen kreisförmige Basis den Radius r hat, hat man in den Formeln (6) $y_1 = 0$ und $y_0 = r$ zu setzen, so dass X und der Abstand d des Schwerpunktes S von der Basis gegeben ist durch

$$X = \frac{3}{2} \cdot \frac{r^4}{H(3r^2 + H^2)}, \quad d = \overline{ES} = \frac{H}{2} \cdot \frac{H^2 + 2r^2}{H^2 + 3r^2} \quad \dots (7)$$

Setzt man in (5) $x_0 = R - H$ und $x_1 = R$ oder in (7) aus bekannten Gründen $r^2 = H(2R - H)$, so gelangt man zu der schon aus der letzten Gleichung (b) auf S. 526 sich ergebenden Formel $X = \frac{3}{4} \frac{(2R - H)^2}{3R - H}$, zu welcher man übrigens auch auf elementarem Wege sofort gelangen kann, wenn man das bekannte Schwerpunktsmoment des entsprechenden Kugelsectors in Bezug auf die zur Symmetrieachse senkrechte Ebene (die durch das Kugelcentrum O zu legen ist) gleichsetzt der Summe aus dem zu suchenden Schwerpunktsmomente des Kugelsegments und aus jenem des entsprechenden Ergänzungskegels.

Für eine Halbkugel ist $x_0 = 0$, $x_1 = R$, $y_0 = r = R$, $y_1 = 0$, $H = R$ zu setzen, so dass zufolge (5) und (6)

$$X = d = \frac{3}{8} R \quad \dots (8)$$

ist.

Für die Zone eines durch Rotation einer Parabel um ihre Achse erhaltenen Rotationsparaboloids ist, wenn man den Coordinatenanfangspunkt in den Scheitel verlegt und voraussetzt, dass die Zone durch zwei zur Achse senkrechte Ebenen, die von dem Scheitel die Entfernungen x_0 und x_1 haben, begrenzt wird, $y^2 = Px$ zu setzen, wo P den Parameter der erzeugenden Parabel bedeutet. Es ist somit nach (3)

$$VX = \pi \int_{x_0}^{x_1} x y^2 dx = \pi \int_{x_0}^{x_1} P x^2 dx = \pi \cdot P \cdot \frac{x_1^3 - x_0^3}{3}$$

$$V = \pi \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx = \pi \int_{x_0}^{x_1} P x dx = \pi P \cdot \frac{x_1^2 - x_0^2}{2}$$

so dass sich durch Division $X = \frac{2}{3} \frac{x_1^3 - x_0^3}{x_1^2 - x_0^2}$ ergibt. Für ein Segment dieses Rotationsparaboloids, dessen zur Achse senkrechter Grundkreis vom Scheitel die Entfernung x_1 hat, ist $x_0 = 0$, also $X = \frac{2}{3} \frac{x_1^3}{x_1^2} = \frac{2}{3} x_1$ zu setzen, so dass der Schwerpunkt übereinstimmt mit jenem des eingeschriebenen Dreiecks, dessen Spitzen der Parabelsichel und die Endpunkte des erzeugenden Parabelbogens sind.

Anmerkung. Wie man, ausgehend von der Gleichung einer geraden Erzeugenden, $y = \frac{R-r}{h} x + r$ mittels der Formeln (3), in welchen $x_0 = 0$, $x_1 = h$ zu setzen, leicht zu der Gleichung (1) für den Schwerpunkt eines senkrechten abgekürzten Kreiskegels gelangen kann, bedarf keiner näheren Auseinandersetzung.

Betreffs der Bestimmung des Schwerpunktes eines im allgemeinen von zwei Meridianebenen, zwei Rotationsflächen und zwei Parallelkreisen begrenzten Volums sei auf die entsprechenden Anmerkungen des § 95 und 96 hingewiesen.

Die Gleichungen (3) auf S. 482 und 486 gestatten eine interessante Anwendung auf die Bestimmung der Größe einer Rotationsfläche F mittels der (als leichter bestimmbar vorausgesetzten) Lage des Schwerpunktes S der entsprechenden erzeugenden ebenen Curve L — der Meridiancurve — und ebenso der Größe eines durch Umdrehung einer ebenen Fläche F um eine (in der Ebene von L , bzw. F gelegene) Achse erzeugten Umdrehungskörpers V mittels der bekannten Lage des Schwerpunktes S der erzeugenden Fläche F , welche Methode der Berechnung der Umdrehungsfläche F und des Volums V eines Umdrehungskörpers die barycentrische Methode oder die Regel Guldins (Guldinische Regel) genannt wird.

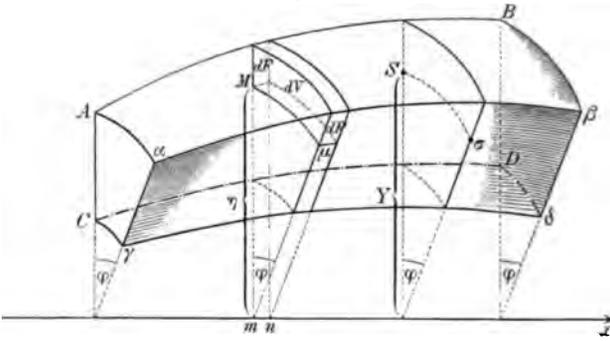
Ist nämlich $dF = \overline{MN} \mu \nu$ (Fig. 156, S. 509) jenes Flächenelement der Rotationsfläche $F = fl (A B \alpha \beta)$, welche durch Umdrehung der erzeugenden offenen oder geschlossenen Curve AB (die sich jedoch nicht zu beiden Seiten der Rotationsachse erstrecken darf) von der Länge L um den Winkel φ entsteht, und ist ds das entsprechende Bogenelement \overline{MN} der Meridiancurve AB , das den (positiven) Abstand y von der Rotationsachse (der x -Achse) hat, so ist $dF = \text{arc } M\mu \cdot ds = y \varphi \cdot ds$, so dass z. B. bei der vollen Umdrehung $\varphi = 2\pi$ wird, wo dann diese Formel mit der Gleichung (2) auf S. 510 übereinstimmt. Es ist sonach

$$F = \int_0^F dF = \int_0^L y \varphi \cdot ds = \varphi \cdot \int_0^L y ds$$

Ist ferner S der Schwerpunkt der ebenen Meridiancurve AB und $Y = \overline{Ss}$ sein normaler (positiver) Abstand von der x -Achse, so ist nach Gleichung (3) auf S. 482 $L \cdot Y = \int_0^L y ds$, somit $F = L \cdot Y \varphi$.

Beschreibt nun der Schwerpunkt S bei der Erzeugung der Rotationsfläche den Weg $S\sigma$ (Fig. 156), so ist $\overline{S\sigma} = \overline{Ss} \cdot \varphi = Y\varphi$, daher $F = L \cdot \overline{S\sigma}$, d. h. die Größe der Umdrehungsfläche F ist stets gleich dem Producte aus der Länge L der Meridiancurve in den Weg $S\sigma$, den der Schwerpunkt dieser Curve bei der Erzeugung der Fläche F zurücklegt.

Fig. 162.



Es sei anderseits $ABCD$ (Fig. 162) eine ebene, von den beliebigen Curven AB und CD und zwei zur x -Achse (Rotationsachse) senkrechten Geraden AC und BD (die auch Null werden können) begrenzte Fläche F , deren Schwerpunkt S den nach der Gleichung (6) auf S. 500 bestimmbaren (positiven) Abstand Y von der x -Achse hat, und es rotiere diese Fläche um die diese Fläche F nicht schneidende x -Achse um den Winkel φ , wobei der Schwerpunkt S den Bogen $S\sigma = Y \cdot \varphi$ und das dem beliebigen Punkte M der Fläche F benachbarte Flächenelement dF ein Volumelement dV beschreibt, das, wenn $M\mu$ der Weg des Punktes M ist, durch $dV = M\mu \cdot dF = r \varphi \cdot dF$ bestimmt ist, wo $r = \overline{Mm}$ die (positive) Ordinate des Punktes M ist. Es ist dann $V = \int_0^V dV = \int_0^F r \varphi \cdot dF = \varphi \cdot \int_0^F r dF$. Nun ist zufolge der Gleichung (3) auf S. 486 $\int_0^F r dF = FY$.

aher $V = F \cdot Y \cdot \varphi = F \cdot \overline{S\sigma}$, d. h. das Volum V des Umdrehungs-
körpers ist gleich dem Producte aus der erzeugenden ebenen Fläche F
in den Weg des Schwerpunktes dieser Fläche. (Ist z. B. F das über
 u stehende Rechteck und findet eine ganze Umdrehung statt, so
ist $F = y dx$, $Y = \frac{1}{2} y$ und $\varphi = 2\pi$, so dass dann die letzte
Gleichung mit der drittletzten Gleichung auf S. 529 überein-
kommt.)

Rotiert z. B. ein Kreis vom Radius r , dessen Mittelpunkt von
der Rotationsachse die Entfernung Y hat, um diese Achse, so ist die
Oberfläche des bei der vollen Umdrehung erzeugten Ringes, da
 $L = 2r\pi$ und $\varphi = 2\pi$ ist, $L \cdot 2\pi Y = 4\pi^2 \cdot rY$, und das innerhalb
dieser Ringfläche gelegene Volum V hat, da $F = r^2\pi$ ist, die Größe
 $V = F \cdot 2\pi Y = 2\pi^2 \cdot r^2 Y$.

Guldin's Regel lässt sich auch anwenden auf die Bestimmung
der Größen jener Flächen, beziehungsweise Räume, die bei der Ro-
tation von ebenen Curven, beziehungsweise Flächen um augen-
blickliche Achsen entstehen, die in der Ebene e dieser erzeugenden
Curven, beziehungsweise Flächen gelegen sind, wenn auch diese
Achsen ihre Lage in dieser Ebene e stetig oder discontinuierlich
ändern; es steht nämlich auch in diesem Falle die Ebene e der er-
zeugenden Curve, beziehungsweise Fläche auf der Bahn eines jeden
Punktes, also auch des Schwerpunktes stets senkrecht. Findet da-
gegen (vergl. S. 365) neben einer Rotation um eine in der Ebene e
gelegene Momentenachse a auch gleichzeitig eine fortschreitende Be-
wegung parallel zu der Achse a statt, so dass a zur augenblicklichen
Parallelachse wird, und bleibt dabei diese Achse a stets senkrecht
zur fixen Ebene E , so hat man behufs der Bestimmung der er-
zeugten Fläche, beziehungsweise des erzeugten Volums die erzeu-
gende Curve, beziehungsweise Fläche mit der Projection der Bahn
des Schwerpunktes der letzteren auf die Ebene E zu multiplicieren.
So ist z. B. das Volum eines Schraubengewindes das Product aus
der erzeugenden Fläche F [die ein Rechteck, Dreieck u. s. w. sein
kann] und $2r\pi$, wo r den Abstand des Schwerpunktes der Fläche F
von der Achse der Schraubenspindel bedeutet.)

Anmerkung 3. Guldin's Regel findet sich schon in den „*συναγωγὰι*
θηματικαὶ“ (lib. VII)⁴ des griechischen Mathematikers Pappos, der im 4. Jahr-
hundert n. Chr. in Alexandrien lebte, vor, indem es daselbst heißt: „Die Figuren,
die durch Rotation einer Linie oder einer Fläche um eine Achse erzeugt werden,
halten im zusammengesetzten Verhältnisse mit den Leitfiguren und dem durch
den Schwerpunkt derselben beschriebenen Wege.“ Guldin (geb. 1577, † 1663),
der den Satz des Pappos nicht kannte, veröffentlichte die von ihm neu gefundene
Regel, die auch gewöhnlich nach ihm benannt wird, in seinen Schriften „*De*
centro gravitatis“ (1635)⁴ und „*Centrobaryca*“ (1643)⁴.

§ 86. Gleichgewicht eines schweren starren Körpers.

Da die auf die einzelnen materiellen Punkte eines starren Körpers einwirkenden Schwerkkräfte q nach § 78 eine vertical nach abwärts gerichtete Resultierende Q haben, als deren Angriffspunkt der Schwerpunkt S des Körpers angesehen werden kann, so kann sich der schwere Körper nur dann im Gleichgewichte befinden, wenn diese Kraft Q durch eine gleiche, entgegengesetzt gerichtete äußere Kraft, deren Richtungslinie gleichfalls die verticale Schwerlinie ist, z. B. durch den entgegengesetzt gerichteten Widerstand eines oder mehrerer fixer Punkte oder durch jenen einer unterstützenden Fläche u. s. w. aufgehoben wird.

a) Ist ein Punkt O (Drehungspunkt) des Körpers fix, so muss demzufolge im Gleichgewichtszustande der Drehpunkt in der verticalen Schwerachse gelegen sein, also der Schwerpunkt S sich im Ruhezustande vertical unterhalb oder vertical oberhalb des Drehpunktes O befinden oder mit demselben zusammenfallen, und zwar ist, wie eine der Fig. 37 und 38 entsprechende Kräftezerlegung sofort lehrt, im ersten Falle das Gleichgewicht ein stabiles, im zweiten ein labiles, im letzten Falle aber ein neutrales (indifferentes). In allen diesen Fällen verschwindet in der Gleichgewichtslage das resultierende Moment bezüglich einer jeden durch den Drehpunkt O gelegten Achse, da der Drehpunkt in der Richtungslinie der Resultierenden Q gelegen ist (entsprechend den Gleichgewichtsbedingungen (2) des § 76 *a*, S. 453).

Experimentell kann man daher die Lage des Schwerpunktes eines Körpers finden, wenn man denselben in einem Punkte A aufhängt und nach eingetretenem Ruhezustande die Lage der durch A gehenden Verticalen Ax im Körper und ebenso für einen zweiten Aufhängepunkt A' die Richtung $A'x'$ ermittelt und schließlich den Durchschnittspunkt von Ax mit $A'x'$ bestimmt.

b) Ist der Körper im Punkte O durch eine unterhalb des Schwerpunktes S befindliche Ebene E unterstützt, so muss nicht nur, wie früher, im Zustande des Gleichgewichtes SO vertical sein, sondern es muss zudem nach § 76 *b* (S. 456) die Unterstützungsebene E senkrecht zu Q , also horizontal sein.

c) Ist der Körper um eine fixe Achse — die x -Achse — drehbar, so muss nach § 77 *a* (S. 458) im Zustande des Gleichgewichtes das der algebraischen Summe $\sum M_i$ der Drehmomente sämtlicher Schwerkkräfte q gleiche Drehmoment M_r der resultierenden Kraft Q verschwinden, was bekanntlich nur dann möglich ist, wenn entweder die verticale Schwerlinie zur Drehachse parallel (also letztere vertical) ist oder dieselbe durchschneidet. Im ersten Falle,

an welchem die Drehachse eine verticale Lage hat, ist, da dann in jeder Stellung des Körpers $M_x = 0$ ist, das Gleichgewicht ein neutrales, im letzteren Falle aber, wie die Kräftezerlegung in Fig. 37 und 38 lehrt, stabil, labil oder indifferent, je nachdem der Schwerpunkt S vertical unterhalb oder oberhalb der Drehachse oder aber in der Drehachse selbst gelegen ist.

d) Ist der Körper längs einer Geraden (Unterstützungssache) in zwei oder mehreren Unterstützungspunkten durch eine fixe Ebene E unterstützt, so muss nach § 77 c (S. 462) im Zustande des Gleichgewichtes die Unterstützungsebene E auf der Richtung der resultierenden Kraft Q senkrecht stehen, also horizontal sein, und zudem muss die Richtungslinie von Q die Unterstützungssache in einem zwischen den Unterstützungspunkten gelegenen Punkte schneiden. In der durch die Unterstützungssache gelegten Verticalebene muss demnach der Schwerpunkt S des im Gleichgewicht sich befindenden Körpers gelegen sein, so dass man hienach auf experimentalem Wege den Schwerpunkt als den Durchschnittspunkt dreier Schwerebenen durch nacheinander vorgenommene Unterstützung des Körpers in drei Geraden ermitteln kann.

e) Ist der Körper in mehr als zwei — nicht in derselben Geraden gelegenen — Punkten durch eine fixe Ebene E unterstützt, so muss nach § 77 e die Ebene E auf der Richtung von Q senkrecht stehen, also horizontal sein und zudem muss die Richtungslinie von Q , d. i. die verticale Schwerachse SA (Fig. 140, S. 465) die Ebene E in einem innerhalb des Unterstützungspolygons $A_1A_2A_3$ gelegenen Punkte A schneiden. Wirkt außer der Schwere noch eine äußere Kraft P ein, die den Körper in eine der Kanten A_1A_2 (Fig. 140) des Unterstützungspolygons (die x Achse) im entgegengesetzten Sinne von jenem der Schwerkraft Q zu drehen sucht, und ist M_P das (positive) Drehmoment dieser Kraft, so ist das resultierende Drehmoment $M_x = \sum M_x$ bezüglich der Drehkante A_1A_2 (siehe S. 467) die Summe aus M_P und dem Momente der Kraft Q bezüglich dieser Kante, das man findet, wenn man durch die verticale Schwerachse SA (Fig. 140) eine zur Kante A_1A_2 senkrechte Ebene legt, die diese Kante im Punkte a schneidet, und $-Q$ mit dem Abstände $\overline{Aa} = d$ multipliciert. Es ist also $M_x = M_P - Qd$. Ist nun $M_x > 0$, so kann nach § 77 e das Gleichgewicht nicht bestehen, wenn auch die Drehkante festgehalten wird, für $M_x < 0$ besteht aber Gleichgewicht, so dass in dem für die Beurtheilung des Maües der Stabilität wichtigen Grenzfalle $M_x = 0$, also $M_P = Qd$ ist. Dieses Product Qd aus dem Gewichte Q und dem Abstände d der verticalen Schwerlinie von der Drehkante ist das sogenannte Stabilitätsmoment bezüglich dieser

Kante. Die Kraft P , die der letzten Gleichung entspricht, hat einen solchen Wert, dass, wenn dieselbe um das geringste vermehrt wird, sofort eine Störung des Gleichgewichtes, nämlich eine Drehung um die Kante $A_1 A_2$ eintritt. Bei dieser Drehung beschreibt der Schwerpunkt in der Ebene $S A a$ eine Kreisbahn, deren Mittelpunkt a ist; ist nun S' (Fig. 140) der höchste Punkt dieser Kreisbahn, so dass $S'a$ vertical ist, so muss, so lange der Schwerpunkt sich zwischen S und S' befindet, der der eigenen Schwere ruhig überlassene Körper offenbar in seine frühere Lage zurückkehren, was nicht mehr der Fall ist, sobald die Lage S' überschritten ist. Der größte Drehwinkel λ , der gestattet ist, ohne befürchten zu müssen, dass der Körper etwa nicht mehr in seine ursprüngliche Lage zurückfällt, ist demnach, da

$$\lambda = \sphericalangle S'aS = \sphericalangle aSA \text{ ist, bestimmt durch } \operatorname{tg} \lambda = \frac{aA}{AS} = \frac{d}{h}$$

Während also die Höhe $h = \overline{AS}$ des Schwerpunktes über der horizontalen Unterstüßungsfläche für das Stabilitätsmoment irrelevant ist, ist sie für die Größe des Winkels λ bei gleichbleibendem d bestimmend, und zwar wird λ größer, wenn h kleiner wird, d. h. wenn der Schwerpunkt S tiefer liegt.

Dass der Schwerpunkt eines starren Körpers, wie aus allen den hier behandelten Fällen zu ersehen ist, in der Gleichgewichtslage des Körpers entweder die tiefste oder aber die höchste aller möglichen Lagen einnehmen muss, und dass dieses Gleichgewicht im ersten Falle ein stabiles, im letzteren aber ein labiles ist, dass ferner in dem zuletzt behandelten, durch Fig. 140 veranschaulichten Falle die mechanische Arbeit, die aufgewendet, beziehungsweise die lebendige Kraft, die dem Körper ertheilt werden muss, um den Schwerpunkt S in die höchste, nicht zu überschreitende Lage S' zu überführen, um so größer ist, je größer Q und d und je kleiner h ist, d. h. je tiefer der Schwerpunkt S liegt, dies alles lässt sich leicht aus dem Werte des Potentials U der Schwere entnehmen, der sich aus folgender Betrachtung ergibt:

Da für die durch die Verbindung der materiellen Punkte zu einem starren System bedingten (inneren) Kräfte p , wie dies schon wiederholt hervorgehoben wurde und in einem folgenden Capitel auch nachgewiesen werden wird, die Summe der mechanischen Arbeiten Null ist, und da dasselbe, wie bekannt, auch bei beschränkter Beweglichkeit für die Widerstände fixer Punkte und Achsen und für die normalen Widerstände jener Flächen gilt, längs welcher die etwa vorgeschriebene Bewegung vor sich gehen muss, so hat man behufs der Bestimmung der geleisteten Arbeit bei jeder Bewegung eines schweren starren Körpers nur die Schwerkkräfte q allein als die durch die Verbindungen nicht bedingten („wirkenden“) Kräfte P

siehe S. 324) zu berücksichtigen. Nun ist bekanntlich (siehe S. 183), wenn man ein fixes orthogonales System, dessen positive z -Achse vertical nach aufwärts gerichtet ist, zugrunde legt, die in der Zeit t geleistete mechanische Arbeit A_q der auf irgend einen materiellen Punkt des starren Körpers einwirkenden Schwerkraft q durch $A_q = q (z_0 - z)$ bestimmt, wofern sich z_0 auf den Horizont des Anfangspunktes und z auf die Lage zur Zeit t bezieht. Es ist demnach, wie sich durch Summation aller dieser derselben Zeit t entsprechenden, auf alle einzelnen Punkte des Körpers bezüglichen Gleichungen ergibt, $\Sigma A_q = \Sigma (q z_0) - \Sigma (q z)$. Bedeutet nun Q das Gewicht, M die Masse des ganzen Körpers und Z_0 die verticale Coordinate des Schwerpunktes S des Körpers zur Zeit Null und Z jene zur Zeit t , so ist nach Gleichung (2), S. 469, $Q Z = \Sigma (q z)$ und $Q Z_0 = \Sigma (q z_0)$; und demnach ist

$$\Sigma A_q = Q Z_0 - Q Z \dots (1)$$

Aus dieser Gleichung ist (siehe S. 325) sofort zu ersehen, dass das Potential U (die Kräftefunction) des Systems der auf einen starren Körper wirkenden Schwerkräfte, kurz das Gesamtpotential U der Schwere (abgesehen etwa von einem constanten Summanden) durch

$$U = Q Z \dots (2)$$

d. i. durch das Product aus dem Gewichte Q des Körpers in die verticale Coordinate Z des Schwerpunktes gegeben ist (vergl. Gleichung (2) auf S. 202).

Da nun in der Gleichgewichtslage nach S. 329 das Potential U ein Maximum oder Minimum sein muss und Q einen unveränderlichen Wert hat, so lehrt die Gleichung (2), dass auch Z ein Maximum oder Minimum sein muss, also der Schwerpunkt die höchste oder tiefste von allen möglichen benachbarten Lagen einnehmen muss.

Da ferner bei einer jeden Bewegung durch die Gleichgewichtslage oder von der Gleichgewichtslage aus, im zweiten Falle, wenn U ein Minimum ist, also der Schwerpunkt die tiefste Lage einnimmt, nach Gleichung (9), S. 325, die kinetische Energie $\Sigma \frac{m v^2}{2}$ in der Gleichgewichtslage ein Maximum ist, also in jeder möglichen Nachbarlage dieselbe kleiner werden muss, so muss, wenn dem Körper in der Gleichgewichtslage ein schwacher Impuls ertheilt worden ist, so dass $\Sigma \frac{m v^2}{2}$ unendlich klein ist, diese lebendige Kraft in jeder der folgenden Lagen noch kleiner werden, also jedes v und auch $\Sigma \frac{m v^2}{2}$ bei der folgenden Bewegung unendlich klein bleiben, d. h. der Körper wird sich nur unendlich wenig von der Gleichgewichts-

lage entfernen können, um hierauf, nachdem $\Sigma \frac{m v^2}{2}$ bis auf Null gesunken ist, wieder in seine frühere Lage, beziehungsweise eine von ihr unendlich wenig verschiedene Gleichgewichtslage zurückzukehren, mit anderen Worten: das Gleichgewicht ist ein stabiles. Nimmt jedoch der Schwerpunkt in der Gleichgewichtslage den höchsten Standpunkt ein, so dass Z und demnach auch U ein Maximum, also $\Sigma \frac{m v^2}{2}$ ein Minimum ist, so muss bei der Bewegung von dieser Gleichgewichtslage aus die Wirkung der Schwere sich darin äußern, dass die lebendige Kraft $\Sigma \frac{m v^2}{2}$ zunimmt, es hat mit anderen Worten die Schwerkraft das Bestreben, den Körper von seiner Gleichgewichtslage noch mehr zu entfernen, d. h. das Gleichgewicht ist ein labiles. Bleibt dagegen der Schwerpunkt in jeder Nachbarlage in gleicher Höhe, so behält Z denselben Wert, es ändert sich daher weder U , noch $\Sigma \frac{m v^2}{2}$, und das Gleichgewicht ist ein neutrales. Es ist nunmehr leicht einzusehen, dass und wann bezüglich gewisser Bewegungen aus der Gleichgewichtslage das Gleichgewicht ein stabiles, bezüglich anderer möglicher Bewegungen dagegen ein labiles, beziehungsweise neutrales sein kann.

Die der Arbeit der Schwere entgegengesetzt gleiche mechanische Arbeit jener äußeren Kräfte P , die auf den Körper in dem durch Fig. 140 dargestellten Falle einwirken müssen, um den Körper um die Kante $A_1 A_2$ so lange zu drehen, bis der Schwerpunkt S die höchste Lage S' einnimmt, in welcher die Gefahr des Umkippen eben eintritt, oder die nach Gleichung (8), S. 324, an Größe gleiche kinetische Energie, die man dem Körper in der Gleichgewichtslage ertheilen muss, damit der Körper in die erwähnte Schlusslage gelange, in welcher nämlich der Schwerpunkt in S' sich befindet und in welcher alle Punkte des Körpers die Geschwindigkeit Null erlangen sollen, ist nach Gleichung (1) $Q(Z - Z_0)$, also dem absoluten Zahlwerte nach (siehe Fig. 140) gegeben durch $Q \cdot (aS' - AS) = Q \cdot (aS - h) = Q[\sqrt{h^2 + d^2} - h]$. Diese aufzuwendende Arbeit der äußeren Kräfte nimmt also mit Q und d zu; ferner nimmt dieselbe zu, wenn h bei constantem Q und d kleiner wird, wie sofort zu ersehen ist, wenn man den letzten Ausdruck mit der Summe $\sqrt{h^2 + d^2} + h$ multipliciert und das so erhaltene Product durch diese Summe dividirt, wodurch dieser Ausdruck die Form $\frac{Q d^2}{h + \sqrt{h^2 + d^2}}$ annimmt. Würde

die mechanische Arbeit der äußeren Kräfte, beziehungsweise die dem Körper ursprünglich ertheilte kinetische Energie diesen Wert um noch so wenig überschreiten, so besäße derselbe in der betrachteten

renzlage nicht mehr die lebendige Kraft Null, so dass derselbe eh über diese Lage hinausbewegen und demnach umkippen müsste. In diesem Sinne — und zwar lediglich in diesem Sinne — ist demnach die Stabilität des unterstützten Körpers um so größer, je kleiner ρ , also je tiefer der Schwerpunkt des Körpers gelegen ist.

Capitel IX.

Dynamik des starren Punktsystems.

§ 87. Einleitung.

Wirken auf die einzelnen Punkte eines starren Körpers äußere Kräfte ein, so ist die Bewegung irgend eines dieser materiellen Punkte m des Körpers, auf den etwa die äußeren Kräfte $P_1 P_2 \dots$ einwirken, im allgemeinen keinesfalls übereinstimmend mit jener Bewegung, die bei demselben anfänglichen Bewegungszustande des Punktes unter der Einwirkung derselben äußeren Kräfte $P_1 P_2 \dots$ intreten würde, wenn dieser Punkt m außer aller Verbindung mit den anderen Punkten des starren Körpers stünde und daher frei beweglich wäre. Der Grund davon ist der, dass — selbst wenn man von allen etwa vorhandenen Widerständen fixer Punkte, fixer Achsen u. s. w. absieht — nach früheren Auseinandersetzungen infolge der starren Verbindung der Punkte die im § 58 betrachteten inneren Kräfte $p_1 p_2 \dots$ hinzutreten, welche von der Einwirkung der anderen materiellen Punkte des Körpers auf den Punkt m herrühren. Erst nachdem diese durch die Starrheit hervorgerufenen Kräfte $p_1 p_2 \dots$ zu den äußeren Kräften $P_1 P_2 \dots$ hinzugefügt worden sind, ist es gestattet, den Punkt m als einen freibeweglichen zu betrachten.

Sind diese inneren Kräfte nur anziehende oder abstoßende, so ist es gestattet, stets das im § 55 erörterte d'Alembert'sche Princip zur Anwendung zu bringen und dadurch eine jede Aufgabe der Dynamik auf eine der im Capitel VIII behandelten Aufgaben der Statik zurückzuführen. Die zu den äußeren Kräften hinzuzufügenden fictiven Kräfte, welche den äußeren Kräften nach d'Alembert's Princip bei starren Körpern stets das Gleichgewicht halten, sind für einen materiellen Punkt m , dessen Coordinaten xyz sind, bekanntlich die zu den Coordinatenachsen parallelen Kräfte — $m \frac{d^2 x}{dt^2}$, — $m \frac{d^2 y}{dt^2}$, — $m \frac{d^2 z}{dt^2}$, und ihre Resultante ist der Trägheitswiderstand — $P = -m \cdot p$, wo p die totale Beschleunigung des Punktes m bedeutet, der aber es können als die hinzuzufügenden fictiven Kräfte (als Componenten des Trägheitswiderstandes) die entgegengesetzte Tan-

gentialkraft $\left(-m \frac{dv}{dt}\right)$ und die fictive Centrifugalkraft (Fliehkraft) $\left(-\frac{mv^2}{\rho}\right)$ angenommen werden, deren Richtungen aus Früherem bekannt sind.

Bewegen sich alle Punkte des Körpers gleichförmig, so ist die fictive Tangentialkraft $\left(-m \frac{dv}{dt}\right)$ für jeden Punkt Null, und es halten dann dem d'Alembert'schen Principe zufolge die äußeren Kräfte den Centrifugalkräften $\left(-\frac{mv^2}{\rho}\right)$ allein das Gleichgewicht.

Wirken keine äußeren Kräfte auf den starren Körper ein oder aber solche, die sich das Gleichgewicht halten, so müssen nach d'Alembert's Princip die entgegengesetzten Tangentialkräfte den fictiven Fliehkraften oder, falls die Bewegung der Punkte eine gleichförmige ist, die Fliehkraften untereinander sich das Gleichgewicht halten.

A. Dynamik der fortschreitenden Bewegung.

§ 88. Dynamische Bedingung für eine fortschreitende Bewegung.

Ist die Bewegung des starren Körpers eine einfache translatorische Bewegung, so sind (siehe S. 344) die gleichzeitigen Geschwindigkeiten v und deren Richtungen für alle Punkte des Körpers dieselben, daher haben auch die Geschwindigkeitscomponenten $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$ und sonach auch die gleichzeitigen componentalen Beschleunigungen $p_x = \frac{d^2x}{dt^2}$, $p_y = \frac{d^2y}{dt^2}$, $p_z = \frac{d^2z}{dt^2}$ für alle materiellen Punkte denselben Wert, wenn auch dieselben im allgemeinen von einem Zeitmoment zum anderen sich ändern.

Beziehen sich nun die Summenzeichen Σ auf die einzelnen materiellen Punkte des starren Körpers und sind durch $P_x P_y P_z$ die Componenten der einwirkenden äußeren Kräfte bezeichnet, so ist nach d'Alembert's Princip, wenn

$$X = P_x - m p_x, \quad Y = P_y - m p_y, \quad Z = P_z - m p_z$$

ist, den Gleichungen (1), S. 313, zufolge zu setzen:

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0, \\ \Sigma (yZ - zY) &= 0, \quad \Sigma (zX - xZ) = 0, \quad \Sigma (xY - yX) = 0. \end{aligned}$$

Setzt man die Werte aus den drei ersten Gleichungen in die sechs letzten Gleichungen ein, hebt $p_x p_y p_z$ als gemeinsame Factoren vor das Summenzeichen heraus und bezeichnet durch $R_x R_y R_z$,

$M_x M_y M_z$ die bekannten Ausdrücke $R_x = \Sigma P_x$, $R_y = \Sigma P_y$, $R_z = \Sigma P_z$,
 $M_x = \Sigma (y P_z - z P_y)$, $M_y = \Sigma (z P_x - x P_z)$, $M_z = \Sigma (x P_y - y P_x)$,
 ferner durch $\xi \eta \zeta$ die Schwerpunktskoordinaten und durch M die
 gesammte Körpermasse, so findet man in Übereinstimmung mit den
 sechs kinetischen Grundgleichungen des § 55 nach der Heraushebung
 von $p_x p_y p_z$

$R_x = \Sigma P_x = p_x \cdot \Sigma m = M \cdot p_x$, $R_y = \Sigma P_y = p_y \cdot \Sigma m = M \cdot p_y$,
 $R_z = \Sigma P_z = p_z \cdot \Sigma m = M \cdot p_z$, $M_x = p_z \cdot \Sigma m y - p_y \cdot \Sigma m z =$
 $= M \eta \cdot p_z - M \zeta \cdot p_y$ und ebenso $M_y = M \zeta p_x - M \xi p_z$, $M_z =$
 $= M \xi p_y - M \eta p_x$. Die drei ersten dieser sechs Gleichungen drücken
 das durch die Gleichungen (3) auf S. 333 ausgedrückte Gesetz der
 Bewegung des Schwerpunktes aus. Substituiert man die Werte von
 $p_x p_y p_z$ aus den drei ersten Gleichungen in die drei letzteren, so
 findet man

$$\eta \cdot R_z - \zeta R_y = M_x, \quad \zeta \cdot R_x - \xi \cdot R_z = M_y, \quad \xi R_y - \eta R_x = M_z. \quad (1)$$

als die drei dynamischen Bedingungen für eine progressive Bewegung.

Diese drei Gleichungen, aus denen sofort gefolgert werden kann,
 dass die Invariante $R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 0$ sein muss, lehren
 [siehe S. 441, Gleichung (5) und (6)], dass *a*) die einwirkenden
 äußeren Kräfte im Falle einer fortschreitenden Bewegung
 sich, falls $R^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 > 0$ ist, auf eine resultierende
 Einzelkraft R reducieren lassen müssen, dass ferner *b*) in
 der Richtungslinie dieser Resultanten R der Punkt $\xi \eta \zeta$, d. i.
 der Schwerpunkt, gelegen sein müsse oder, falls $R = 0$, also
 auch $R_x = R_y = R_z = 0$ ist, dass den obigen Gleichungen (1) zufolge
 auch $M_x = M_y = M_z = 0$ sein müsse, dass sonach die äußeren Kräfte
 sich das Gleichgewicht halten müssen. Dazu kommt noch die
 selbstverständliche Bedingung, dass auch im Anfangszustande die Bewe-
 gung eine translatorische sei, also dass *c*) die Anfangsgeschwin-
 digkeiten aller Punkte gleichgerichtet und einander gleich
 sein müssen, oder aber dass der Körper anfangs (vor dem Ein-
 wirken der Kräfte) im Ruhezustande sich befinden müsse.

Halten sich die äußeren Kräfte das Gleichgewicht (ist also
 $R_x = R_y = R_z = 0$, daher auch $p_x = p_y = p_z = 0$), so bewegt sich,
 wie dies schon auf S. 334 nachgewiesen wurde, der Schwerpunkt,
 daher auch jeder Punkt des fortschreitenden Körpers in einer geraden
 Linie, und zwar gleichförmig, wenn nicht etwa im Anfangszustande
 die gemeinsame Geschwindigkeit $v = 0$ war, in welchem Falle $v = 0$
 bleibt, also der Körper in Ruhe verharret.

Zu den in diesem Paragraphen deducierten Folgerungen *a*) und *b*)
 kann man in einfacherer Weise gelangen, wenn man die (dem d'Alembert'schen Principe zufolge) den äußeren Kräften das Gleichgewicht

haltenden entgegengesetzten Tangentialkräfte $\left(-m \frac{dv}{dt}\right)$ und Fliehkräfte $\left(-\frac{mv^2}{\rho}\right)$ zusammensetzen würde. Die Kräfte $\left(-m \frac{dv}{dt}\right)$ sind nämlich bei einer fortschreitenden Bewegung aus leicht begreiflichen Gründen gleichgerichtet, und ihr bloß von der relativen Größe dieser Kräfte abhängiger Mittelpunkt ist, da dieselben den Massen m direct proportional sind, zufolge des Lehrsatzes auf S. 447 derselbe wie der Mittelpunkt der gleichfalls den Massen direct proportionalen Schwerkkräfte, d. i. der Schwerpunkt S , und das Gleiche gilt für den Mittelpunkt der ebenfalls gleichgerichteten Fliehkräfte, da v und ρ für alle materiellen Punkte des Körpers zur selben Zeit denselben Wert haben. Es muss sonach aus allen entgegengesetzten Tangentialkräften und allen Fliehkräften eine Einzelkraft resultieren, als deren Angriffspunkt dieser Mittelpunkt, d. i. der Schwerpunkt S , des Körpers angesehen werden kann, und es müssen daher auch die diesem Kräftesysteme, also auch dieser Einzelkraft das Gleichgewicht haltenden äußeren Kräfte sich auf eine Resultante R zurückführen lassen, die dieser Einzelkraft $(-R)$ entgegengesetzt gleich ist, und in deren Richtungslinie der Schwerpunkt S des Körpers gelegen ist.

Findet die Änderung $\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z$ der Geschwindigkeiten v_x, v_y und v_z unter der Einwirkung der continuierlichen Kräfte P in jenem Zeitintervalle t statt, das zwischen der Zeit t und der Zeit $t + \Delta t$ gelegen ist, so ist nach Gleichung (4), S. 334

$$\int_t^{t+\Delta t} \Sigma P_x \cdot dt = M \cdot \Delta v_x, \quad \int_t^{t+\Delta t} \Sigma P_y \cdot dt = M \cdot \Delta v_y, \quad \int_t^{t+\Delta t} \Sigma P_z \cdot dt = M \cdot \Delta v_z \quad (2)$$

zu setzen.

Die auf der linken Seite in diesen Gleichungen (2) vorkommenden Integrale bestimmen (siehe S. 127) die mechanischen Antriebe der Componenten $R_x = \Sigma P_x, R_y = \Sigma P_y, R_z = \Sigma P_z$ der resultierenden Kraft R für die drei geradlinigen, zu den Coordinatenachsen parallelen componentalen Bewegungen des Schwerpunktes innerhalb des der variablen Zeit t folgenden beliebigen Zeitintervalls $= \Delta t$. Diese drei Kraftantriebe

$$\Pi_x = \int_t^{t+\Delta t} R_x dt, \quad \Pi_y = \int_t^{t+\Delta t} R_y dt, \quad \Pi_z = \int_t^{t+\Delta t} R_z dt, \quad \dots \quad (3)$$

sind durch Strecken, die zu den Achsen xyz parallel sind, der Richtung und Größe nach darstellbar, und es resultiert aus diesen Strecken (als den Componenten) eine Vectorgröße Π von bestimmter Richtung und Größe, für welche $\Pi \equiv \Pi_x \hat{i} + \Pi_y \hat{j} + \Pi_z \hat{k}$ ist, und die als der resultierende Kraftantrieb für das der Zeit t folgende Zeitintervall Δt bezeichnet sei. Als Anfangspunkt dieser Vectorgröße Π sei die durch xyz bestimmte Lage des betrachteten Punktes zur Zeit t gewählt. Der resultierende Kraftantrieb Π der Resultanten R sämtlicher einwirkenden Kräfte ist den Gleichungen (2) zufolge gleichgerichtet

mit jenem Vector, dessen zu den — etwa als orthogonal vorausgesetzten — Achsen xyz parallelen Componenten $\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z$ die Änderungen der entsprechenden Geschwindigkeitscomponenten sind, d. i. den Auseinandersetzungen des § 32 zufolge mit der Sehne $v \wedge v \equiv \overline{mm'}$ (Fig. 47 b, S. 111) des Hodographen der Schwerpunktsbewegung, welche die geometrische Änderung der Geschwindigkeit v des Schwerpunktes innerhalb des Zeitelements Δt darstellt, und zwar ist die Größe des resultierenden Kraftantriebes Π den Gleichungen (2) gemäß bestimmt durch

$$\Pi = \sqrt{\Pi_x^2 + \Pi_y^2 + \Pi_z^2} = M \cdot \sqrt{(\Delta v_x)^2 + (\Delta v_y)^2 + (\Delta v_z)^2} = M \cdot \overline{mm'} \dots (4)$$

Je kleiner der Zeitintervall Δt gewählt wird, desto näher rückt in Fig. 47 b der Punkt m' an m , desto weniger unterscheidet sich also die Richtung der Sehne mm' , sonach auch die gleiche Richtung des resultierenden Kraftantriebes Π von der Richtung mu der Tangente des Hodographen, d. i. von der Richtung der Kraft R zur Zeit t , so dass, wenn Δt ungemein klein wird, die Richtung des resultierenden Kraftantriebes Π als identisch mit der Richtung der Kraft R angesehen werden kann — was übrigens schon auch aus den Gleichungen (3) ersichtlich ist. — Dieser resultierende Antrieb Π einer Kraft in einem ungemein kleinen Zeitelement wird von hervorragenden Autoren (Lord Kelvin und anderen) Impuls genannt, und dieser Name „Impuls Π der Kraft R “ möge auch hier beibehalten werden. Ändert sich bei irgend einer Bewegung entweder a) die Größe der Geschwindigkeit v in einem ungemein kleinen Zeitelemente Δt um einen endlichen Wert Δv — oder b) ändert sich der Richtungswinkel der Bewegungsrichtung (Geschwindigkeitsrichtung) um einen endlichen Winkel $\Delta \varphi$ (so dass der der Zeit t entsprechende Punkt M der Bahn zu einem Eckpunkte — einer Spitze — derselben wird und $\Delta \varphi$ den Neigungswinkel der beiden Tangenten in diesem Punkte bedeutet), — oder c) ändert sich sowohl die Größe als die Richtung der Geschwindigkeit v in einer ungemein kleinen Zeit um die endlichen Werte Δv und $\Delta \varphi$, so hat auch der Impuls $\Pi = M \cdot \overline{mm'}$ einen endlichen Wert. In allen diesen drei Fällen abc entspricht demnach einem endlichen Werte des Impulses den Gleichungen (3) zufolge, da Δt äußerst gering angenommen ist, ein verhältnismäßig sehr bedeutender Wert der Kraft R , von der dieser Impuls Π herrührt.

Da nach den gegebenen Erklärungen der resultierende Antrieb (Impuls) Π irgend einer Kraft P gerade so wie andere bisher behandelte Vectorgrößen (Kraft, Bewegungsgröße u. s. w.) durch eine im Raume der Größe, Richtung und der Lage nach genau bestimmte Strecke dargestellt ist, so lässt sich auf dieselbe in gleicher Weise auch der Begriff des Moments bezüglich einer beliebigen Achse in Anwendung bringen, und zwar ist aus den Entwicklungen auf S. 70–72, in welchen überall statt „Kraft“ nur resultierender Kraftantrieb, beziehungsweise „Impuls Π der Kraft P “, zu setzen ist, sofort zu entnehmen, dass die Momente $M_x^{(\Pi)}, M_y^{(\Pi)}, M_z^{(\Pi)}$ von Π in Bezug auf die Coordinatenachsen, wenn xyz die Coordinaten des in Betracht gezogenen Angriffspunktes der Kraft P zur Zeit t sind, den Gleichungen entsprechen:

$$M_x^{(\Pi)} = y \Pi_z - z \Pi_y, M_y^{(\Pi)} = z \Pi_x - x \Pi_z, M_z^{(\Pi)} = x \Pi_y - y \Pi_x \dots (5)$$

so dass, da nach (3) $\Pi_x = \int_t^{t+\Delta t} P_x dt$, $\Pi_y = \int_t^{t+\Delta t} P_y dt$, $\Pi_z = \int_t^{t+\Delta t} P_z dt$ ist, auch

$$M_x^{(II)} = y \int_t^{t+\Delta t} P_z \cdot dt - z \int_t^{t+\Delta t} P_y \cdot dt = \int_t^{t+\Delta t} (y P_z - z P_y) dt = \int_t^{t+\Delta t} M_x^{(I)} dt \left. \begin{array}{l} \dots (6) \\ \text{und ebenso } M_y^{(II)} = \int_t^{t+\Delta t} M_y^{(I)} dt, M_z^{(II)} = \int_t^{t+\Delta t} M_z^{(I)} dt \end{array} \right\}$$

ist.

Da bei einem seiner eigenen Schwere überlassenen freibeweglichen starren Körper, auf welchen keine weiteren äußeren Kräfte einwirken, alle auf die einzelnen materiellen Punkte einwirkenden Schwerkraft eine Resultante haben, als deren Angriffspunkt der Schwerpunkt angesehen werden kann, so muss den Entwicklungen auf S. 543 zufolge jede Bewegung des freien Falles im luftleeren Raume vom Ruhezustande aus eine translatorische sein, d. h. es müssen alle Dimensionen des Körpers stets zu ihrer ursprünglichen Lage parallel bleiben, und dasselbe würde auch bei einer jeden Wurfbewegung des schweren Körpers im luftleeren Raume der Fall sein, wenn nur die Anfangsgeschwindigkeiten aller Punkte gleichgerichtet und gleich sind; würde letzteres nicht der Fall sein, so müsste der Körper während seiner Bewegung um den die parabolische Bahn zurücklegenden Schwerpunkt sich drehen (rotierendes Geschoss).

§ 89. Mechanische Arbeit und lebendige Kraft im Falle einer fortschreitenden Bewegung.

Wählt man die der beliebigen Zeit t entsprechende Bewegungsrichtung, die bei einer fortschreitenden Bewegung für alle Punkte dieselbe ist, zur positiven x -Richtung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so ist die elementare mechanische Arbeit dA_P irgend einer auf irgend einen der materiellen Punkte einwirkenden Kraft P für das Zeitelement dt (siehe S. 181) gegeben durch $dA_P = P \cdot dn = P \cdot ds \cos(xP)$ (siehe Fig. 61), wenn durch ds das in der Zeit dt zurückgelegte Wegelement bezeichnet wird, das für alle Punkte dasselbe ist. Es ist sonach für dasselbe Zeitelement dt , wenn sich das Summenzeichen Σ auf irgend welche materielle Punkte, also auch auf jene äußeren Kräfte bezieht, die in diesen materiellen Punkten angreifen,

$$\Sigma (dA_P) = \Sigma [P \cdot ds \cdot \cos(xP)] = ds \cdot \Sigma (P \cos xP) \dots (1)$$

Halten sich die Kräfte eines gewissen Kräftecomplexes das Gleichgewicht, so ist für diesen Kräftecomplex bekanntlich $\Sigma (P \cos xP) = 0$, also auch $\Sigma (dA_P) = 0$, d. h. die Summe der elementaren mechanischen Arbeiten der sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte und daher auch der Gesamteffect $\Sigma e_P = \Sigma \frac{dA_P}{dt}$ dieser

Kräfte gleich Null, somit ist, wenn diese Kräfte sich dauernd das Gleichgewicht halten, für diese Kräfte auch $\Sigma A_P = 0$.

Da ferner für zwei Kräfte P und $-P$ eines Kräftepaares ebenfalls $\Sigma(P \cos x P) = 0$ ist, so lehrt die Gleichung (1), dass auch die mechanische Arbeit eines jeden Kräftepaares, d. i. die Summe der mechanischen Arbeiten der Kräfte P und $-P$ desselben bei einer fortschreitenden Bewegung stets Null ist.

Die Gleichung (1) lehrt ferner, dass $\Sigma e_P = \frac{ds}{dt} \cdot \Sigma(P \cos x P) = = v \cdot \Sigma(P \cos x P)$, d. h. der Gesamteffect eines Kräftesystems bei einer fortschreitenden Bewegung ist durch das Product aus der Geschwindigkeit v und der Summe der in der Bewegungsrichtung wirksamen Componenten dieses Kräftesystems ausgedrückt.

Bezieht sich das Summenzeichen auf alle äußeren Kräfte, so stellt der Factor $\Sigma(P \cos x P)$ in der Gleichung (1) die x -Componente R_x der Resultierenden R aller äußeren Kräfte vor, als deren Angriffspunkt nach § 88 der Schwerpunkt angesehen werden kann. Da sich nun der Schwerpunkt stets so bewegt wie ein frei beweglicher Punkt, dessen Masse der gesamten Masse M des Körpers gleich ist, und auf den die Kraft R einwirkt, so muss die in der Bewegungsrichtung dieses Punktes, beziehungsweise wenn $R_x < 0$ ist, die in der entgegengesetzten Richtung wirkende Kraft $R_x = \Sigma(P \cos x P)$ die Tangentialkraft $M \cdot \frac{dv}{dt}$ für diesen materiellen Punkt sein, wo v die gemeinsame Geschwindigkeit der einzelnen Punkte des Körpers, also auch jene des Schwerpunktes zur Zeit t bedeutet, es ist demnach $\Sigma(dA_P) = ds \cdot \Sigma(P \cos x P) = R_x ds = M \cdot \frac{dv}{dt} \cdot ds$. Weil aber $ds = = v \cdot dt$ ist und $R_x ds = R \cdot [ds \cdot \cos x R]$ die elementare mechanische Arbeit dA_R der resultierenden Kraft R darstellt (siehe S. 181), so muss $\Sigma(dA_P) = M \cdot \frac{dv}{dt} \cdot v dt = Mv dv = dA_R$ sein.

Das Differential einer Summe kommt stets der Summe der Differentiale der einzelnen Summanden gleich; es ist sonach auch $d(\Sigma A_P) = \Sigma(dA_P) = Mv dv$. Integriert man die beiden letzten Gleichungen für die endliche Zeit t , so ist, wenn $v = v_0$ für $t = 0$ ist,

$$\left. \begin{aligned} \Sigma A_P &= \frac{Mv^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} \\ \Sigma A_P &= A_R \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Der Ausdruck $\frac{Mv^2}{2} = \Sigma\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ stellt die Summe der lebendigen Kräfte aller materiellen Punkte des Körpers, also kurz die gesammte

lebendige Kraft des Körpers vor, so dass die durch die Gleichungen (6) und (7) S. 182 ausgedrückten Gesetze nicht nur für einen materiellen Punkt, sondern auch für eine fortschreitende Bewegung eines starren Körpers Giltigkeit haben. Übrigens sei bemerkt, dass die erste Gleichung (2) schon mit der ersten Gleichung (4) S. 334 identisch ist.

Halten sich bei einer progressiven Bewegung die äußeren Kräfte dauernd das Gleichgewicht, so ist nach Obigem $\Sigma A_P = 0$, also nach Gleichung (2) $v = v_0$, d. h. die progressive Bewegung ist eine gleichförmige, wie schon auf S. 543 gezeigt wurde.

B. Dynamik der rotierenden Bewegung.

§ 90. Dynamische Bedingung für eine Rotation um eine fixe Achse mit der Winkelbeschleunigung γ . Druck auf die fixen Punkte.

Sieht man bei einem um eine fixe Achse z rotierenden Körper von dem Drucke auf diese Achse ab, so sind nach § 77 a) alle Kräfte, deren Richtungslinien die Drehachse schneiden oder mit derselben

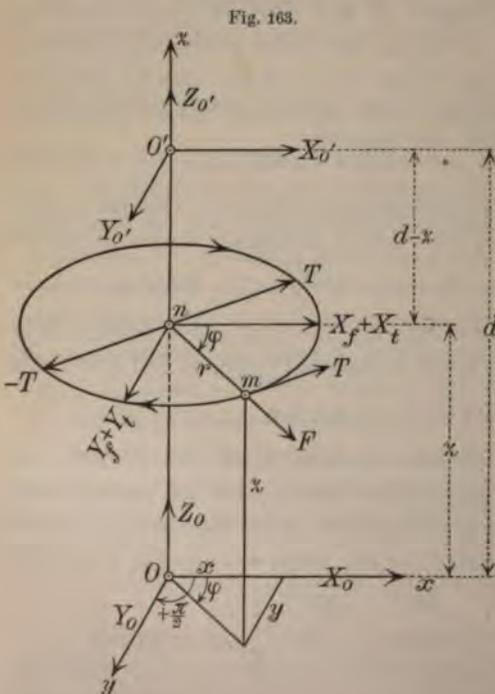


Fig. 163.

parallel sind, unwirksam, ferner je zwei Kräfte äquivalent, deren Drehungsmomente bezüglich dieser Achse gleich sind, ferner zwei Kräftesysteme äquivalent, deren Drehmomentensummen dieselben sind, und die einzige nothwendige und hinreichende Gleichgewichtsbedingung ist das Verschwinden der Summe der Drehungsmomente. Wenn man demnach mit Zuhilfenahme des d'Alembert'schen Princips die Summe $\Sigma M_z^{(P)}$ aus den Drehungsmomenten $M_z^{(P)}$ der einwirkenden äußeren Kräfte P um die Summe der Drehmomente $T \cdot r$ der ent-

gegengesetzten Tangentialkräfte $T = -m \frac{dv}{dt} = -m r \cdot \gamma$ vermehren und diese Gesamtsumme $\Sigma M_z^{(P)} + \Sigma (-m r \gamma \cdot r) = \Sigma M_z^{(P)} - \gamma \Sigma (m r^2)$

gleich Null setzen würde (das Drehmoment jeder einzelnen Fliehkraft ist aus leicht begreiflichen Gründen an und für sich schon Null), so würde man sofort auf einfache Weise die gesuchte dynamische Bedingungsgleichung ermitteln. Um aber auch zugleich den Druck P_o und $P_{o'}$ auf die fixen Punkte O und O' (Fig. 163) der Rotationsachse (auf die Zapfenlager), deren Abstand d sei, zu bestimmen, welchem Drucke nach dem Princip der Wechselwirkung die gleichen, jedoch entgegengesetzt gerichteten Widerstände (des Zapfenlagers) $-P_o$ und $-P_{o'}$ als auf den rotierenden Körper (nämlich auf die Zapfen O und O' desselben) wirkende Kräfte entsprechen, so hat man bei Anwendung des d'Alembert'schen Princip's, demzufolge die äußeren Kräfte, nämlich alle Kräfte P und die beiden Widerstände ($-P_o$) und ($-P_{o'}$) den Reactionen $T = -m \frac{dv}{dt} = -mr\gamma$ gegen die tangentielle Beschleunigung und den Centrifugalkräften F stets das Gleichgewicht halten, von den sechs (nothwendigen und hinreichenden) Gleichgewichtsbedingungen (1), S. 367, Anwendung zu machen.

Bedeutet w die Winkelgeschwindigkeit, $\gamma = \frac{dw}{dt}$ die Winkelbeschleunigung und $r = \overline{mn}$ den Abstand irgend eines materiellen Punktes, dessen Masse m ist, von der Rotationsachse, ferner v dessen Geschwindigkeit, so ist nach Gleichung (1) und (3), S. 348, $v = rw$ und $\frac{dv}{dt} = r\gamma$, daher die Centrifugalkraft $F = \frac{mv^2}{r} = \frac{mr^2w^2}{r} = mr \cdot w^2$ und, wie oben, $T = -m \frac{dv}{dt} = -mr \cdot \gamma$.

Wird nun der fixe Punkt O zum Anfangspunkte, die Richtung von O nach dem anderen Fixpunkte O' zur positiven Richtung der z -Achse eines mit dem Körper in unveränderlicher Verbindung stehenden, an der Rotation desselben theilnehmenden orthogonalen Achsensystems angenommen, und die positive x - und y -Achse so gewählt, dass die kürzeste Drehung von der positiven x -Achse nach der positiven y -Achse mit dem Sinne der thatsächlichen Rotationsbewegung übereinstimmt, so ist, wenn φ den Richtungswinkel des zur z -Achse senkrechten Radiusvectors $r = \overline{m\overline{m}}$ des Punktes m (xyz) zur Zeit t , also auch den Richtungswinkel der Centrifugalkraft in Bezug auf die positive x -Achse bedeutet, $\cos \varphi = \frac{x}{r}$, $\sin \varphi = \frac{y}{r}$ und $\varphi + \frac{\pi}{2}$ ist der Richtungswinkel der Bewegungsrichtung des Punktes m bezüglich der x -Achse, so dass die XYZ -Componenten der Tangentialkraft $m \frac{dv}{dt} \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right)$, $m \frac{dv}{dt} \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right)$, 0 sind, sonach die Componenten X, Y, Z der entgegengesetzten Tangentialkraft T die entgegengesetzt gleichen Werte haben. Sind durch X_o, Y_o, Z_o , bezw.

X_o, Y_o, Z_o , die orthogonalen Componenten des Achsendruckes P_o , bezw. $P_{o'}$, also durch $-X_o, -Y_o, -Z_o$, bezw. $-X_{o'}, -Y_{o'}, -Z_{o'}$, jene der Lagerreactionen $-P_o$, bezw. $-P_{o'}$, ferner durch P_x, P_y, P_z , jene einer beliebigen äußeren Kraft P , schliesslich durch X_f, Y_f, Z_f jene der Fliehkraft bezeichnet, so ist

$X_f = F \cdot \cos \varphi = m r w^2 \cdot \frac{x}{r} = m x \cdot w^2$, $Y_f = F \cdot \sin \varphi = m r w^2 \cdot \frac{y}{r} = m y \cdot w^2$ und $Z_f = 0$, daher, wenn $\xi \eta \zeta$ die Schwerpunktscoordinaten, $M_x^{(F)}, M_y^{(F)}, M_z^{(F)}$ die Momente der Fliehkräfte bezüglich der Achsen bezeichnen,

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X_f &= \Sigma (m x w^2) = w^2 \cdot \Sigma m x = M \xi w^2 \\ \Sigma Y_f &= \Sigma (m y w^2) = w^2 \cdot \Sigma m y = M \eta w^2 \\ \Sigma Z_f &= 0 \\ \Sigma M_x^{(F)} &= \Sigma (y Z_f - z Y_f) = -w^2 \Sigma (m y z) \\ \Sigma M_y^{(F)} &= \Sigma (z X_f - x Z_f) = w^2 \Sigma (m z x) \\ \Sigma M_z^{(F)} &= \Sigma (x Y_f - y X_f) = \Sigma m w^2 (x y - y x) = 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

Ferner sind die Componenten der Kraft T

$$X_t = -m \frac{dv}{dt} \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) = m r \gamma \cdot \sin \varphi = m r \gamma \cdot \frac{y}{r} = m y \cdot \gamma$$

$$Y_t = -m \frac{dv}{dt} \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) = -m r \gamma \cdot \cos \varphi = -m r \gamma \cdot \frac{x}{r} = -m x \gamma$$

$Z_t = 0$, somit, wenn $M_x^{(T)}, M_y^{(T)}, M_z^{(T)}$ die Momente der Kräfte T bezüglich der drei Achsen bedeuten,

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X_t &= \Sigma (m y \cdot \gamma) = \gamma \cdot \Sigma m y = M \eta \gamma \\ \Sigma Y_t &= \Sigma (-m x \gamma) = -\gamma \cdot \Sigma m x = -M \xi \gamma \\ \Sigma Z_t &= 0 \\ \Sigma M_x^{(T)} &= \Sigma (y Z_t - z Y_t) = -\Sigma (-m x \gamma \cdot z) = \gamma \cdot \Sigma (m z x) \\ \Sigma M_y^{(T)} &= \Sigma (z X_t - x Z_t) = \Sigma (m y \gamma \cdot z) = \gamma \cdot \Sigma (m y z) \\ \Sigma M_z^{(T)} &= \Sigma (x Y_t - y X_t) = -\Sigma m \gamma (x^2 + y^2) = -\gamma \cdot \Sigma (m r^2) \end{aligned} \right\} (2)$$

Die Momente der Kraft $-P_o$ sind Null, weil der Angriffspunkt O derselben der Durchschnittspunkt der drei Achsen ist und die Momente M'_x, M'_y, M'_z der Kraft $-P_o$ bezüglich der drei Achsen sind, da dem Punkte O die Coordinaten (o, o, d) zukommen,

$$\left. \begin{aligned} M'_x &= (o \cdot -Z_o) - (d \cdot -Y_o) = d \cdot Y_o \\ M'_y &= (d \cdot -X_o) - (o \cdot -Z_o) = -d \cdot X_o \\ M'_z &= 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

Da nun nach d'Alembert's Princip $\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma Z = 0$ u. s. w. ist, so muss, wenn man die Werte aus (1), (2), (3) bertück-

chtigt und die Momentensummen $\Sigma M_x^{(P)}$, $\Sigma M_y^{(P)}$, $\Sigma M_z^{(P)}$ der äußeren Kräfte P bezüglich der Coordinatenachsen durch $M_x M_y M_z$ bezeichnet,

$$\begin{aligned} \Sigma P_x + M\xi \cdot w^2 + M\eta \cdot \gamma - X_o - X_{o'} &= 0 \\ \Sigma P_y + M\eta \cdot w^2 - M\xi \cdot \gamma - Y_o - Y_{o'} &= 0 \\ \Sigma P_z - Z_o - Z_{o'} &= 0 \\ M_x - w^2 \cdot \Sigma (m y z) + \gamma \cdot \Sigma (m z x) + d \cdot Y_{o'} &= 0 \\ M_y + w^2 \cdot \Sigma (m z x) + \gamma \cdot \Sigma (m y z) - d \cdot X_{o'} &= 0 \\ M_z - \gamma \Sigma (m r^2) &= 0 \end{aligned}$$

ein. Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Werte

$$\left. \begin{aligned} X_{o'} &= \frac{M_y}{d} + w^2 \cdot \frac{\Sigma (m z x)}{d} + \gamma \cdot \frac{\Sigma (m y z)}{d} \\ Y_{o'} &= -\frac{M_x}{d} + w^2 \cdot \frac{\Sigma (m y z)}{d} - \gamma \cdot \frac{\Sigma (m z x)}{d} \\ X_o &= \left(\Sigma P_x - \frac{M_y}{d} \right) + w^2 \left[M\xi - \frac{\Sigma (m z x)}{d} \right] + \gamma \cdot \left[M\eta - \frac{\Sigma (m y z)}{d} \right] \\ Y_o &= \left(\Sigma P_y + \frac{M_x}{d} \right) + w^2 \left[M\eta - \frac{\Sigma (m y z)}{d} \right] - \gamma \cdot \left[M\xi - \frac{\Sigma (m z x)}{d} \right] \\ Z_o + Z_{o'} &= \Sigma P_z \\ X_z &= \gamma \cdot \Sigma (m r^2) \end{aligned} \right\} (4)$$

Die ersten Summanden rechterseits in diesen Ausdrücken für $X_{o'}, Y_{o'}, X_o, Y_o$, welche sich ergeben, wenn w und γ gleich Null gesetzt werden, bestimmen, wie schon aus ihrer Identität mit den Ausdrücken in den Gleichungen (6) auf S. 459 hervorgeht, die Componenten des statischen Druckes, der durch die äußeren Kräfte in O und O' hervorgerufen wird, während die übrigen Summanden die Componenten des in Folge der Bewegung des Körpers durch die Fliehkräfte F und die entgegengesetzten Tangentialkräfte T veranlassten kinetischen Druckes in O und O' darstellen, und zwar rühren die ersten Summanden mit dem Coëfficienten w^2 von den Fliehkräften F und die übrigen mit dem Factor γ von den Kräften T her.

Dem Drucke $P_{o'}$, dessen Componenten $X_{o'}, Y_{o'}, Z_{o'}$ sind, wird in O' durch den hinzutretenden Widerstand ($-P_{o'}$) des fixen Punktes O' und dem Drucke P_o (X_o, Y_o, Z_o) in O durch den Widerstand ($-P_o$) des fixen Punktes O das Gleichgewicht gehalten.

Instructiver als die frühere ist folgende Deduction der Werte für die Componenten des kinetischen Druckes in O und O' :

Die in einem jeden Punkte m des rotierenden Körpers wirkende Fliehkraft $F = m r w^2$ lässt sich vom Punkte m nach dem durch die Richtungslinie der Kraft F gelegenen Mittelpunkte n des zugehörigen Rotationskreises verlegen und daselbst in ihre Componenten $X_f = F \cos \varphi = m x w^2$ und $Y_f = F \sin \varphi = m y w^2$ zerlegen. Fügt

man ferner im Punkte n die entgegengesetzt gleichen, zur Kraft T parallelen Kräfte T und $-T$ (Fig. 163) hinzu, wodurch an der Wirkung des Kräftesystems nichts geändert wird, so erhält man das Kräftepaar T und $(-T)$, dessen Arm mn ist, das keinen Einfluss auf die Zapfen O und O' ausübt, wohl aber den von der Momentensumme M_z aller dieser Kräftepaare herrührenden, durch die Gleichung $M_z = \gamma \cdot \Sigma (m r^2)$ bestimmten Einfluss auf die Winkelbeschleunigung γ der Rotation bedingt, während die übrigbleibende in n wirkende Kraft $T = -m r \gamma$ infolge ihrer früher bestimmten Componenten $X_t = m y \gamma$ und $Y_t = -m x \gamma$, welche zu den früheren im selben Punkte n angreifenden Componenten X_f und Y_f hinzutreten, nach der x - und y -Richtung in den fixen Punkten O und O' einen kinetischen Druck hervorruft. Zerlegt man nämlich, um die X -Componenten $X_o^{(K)}$ und $X_o'^{(K)}$ dieses kinetischen Druckes in den Punkten O und O' zu bestimmen, die in n wirksame Kraft $X_t + X_f$ in diese parallelen Componenten mittels der Gleichung (4) auf S. 378, so findet man (siehe Fig. 163)

$$\frac{X_o'^{(K)}}{z} = \frac{X_o^{(K)}}{d-z} = \frac{X_f + X_t}{d} = \frac{m x \cdot \omega^2 + m y \cdot \gamma}{d}$$

und in analoger Weise ergibt sich für die Y -Componenten

$$\frac{Y_o'^{(K)}}{z} = \frac{Y_o^{(K)}}{d-z} = \frac{Y_f + Y_t}{d} = \frac{m y \cdot \omega^2 - m x \gamma}{d}$$

Bestimmt man aus diesen Gleichungen $X_o^{(K)}$, $X_o'^{(K)}$, $Y_o^{(K)}$, $Y_o'^{(K)}$ und summiert die den einzelnen Punkten m zugehörigen Werte, indem man dabei beachtet, dass $\Sigma (m x) = M \xi$ und $\Sigma (m y) = M \eta$ ist, so ergeben sich, wie leicht zu ersehen ist, für die Componenten $\Sigma X_o'^{(K)}$ und $\Sigma Y_o'^{(K)}$ des kinetischen Druckes in O' und für die Componenten $\Sigma X_o^{(K)}$ und $\Sigma Y_o^{(K)}$ des kinetischen Druckes in O dieselben Werte wie in (4).

Da sich die relativen Lagen der einzelnen Punkte bezüglich des an der Rotation theilnehmenden, mit dem Körper in unveränderlicher Verbindung stehenden Achsensystems xyz während der Bewegung nicht ändern, so haben die in der Gleichung (4) enthaltenen Größen $\Sigma (m z x)$, $\Sigma (m y z)$, $\Sigma (m r^2)$, ξ , η , d constante Werte.

Die letzte der Gleichungen (4), welche auch auf die zu Anfang dieses Paragraphs angedeutete Art auf ganz einfache Weise sofort abgeleitet werden kann, ist die dynamische Bedingungsgleichung für das Stattfinden einer Rotation um eine fixe Achse mit der Winkelbeschleunigung γ .

Die ihrer Natur nach positive Summe $\Sigma (m r^2) = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots$ der Producte aus der Masse m eines jeden einzelnen materiellen Punktes in das Quadrat seines Abstandes r von irgend einer Achse

des Körpers (hier der x -Achse), welche Summe bei jedem starren Körper einen unveränderlichen Wert hat und für die Dynamik der rotierenden Bewegung von schwerwiegender Bedeutung ist, führt den Namen „quadratisches Moment“ oder zumeist nach Euler („Theoria motus corporum solidorum“, 1765) „Trägheitsmoment“ der Masse M bezüglich dieser Achse. In gleicher Weise bezeichnet man die analoge Summe $\Sigma (m r^2)$, wenn r den Abstand der einzelnen Massenpunkte von einem bestimmten Punkte O des Körpers bedeutet, als das polare quadratische Moment oder als das polare Trägheitsmoment J_o des materiellen Punktsystems (oder der Masse M) in Bezug auf diesen Pol O und, wenn r den Abstand von einer bestimmten Ebene bedeutet, als das quadratische Moment (Trägheitsmoment) des Punktsystems in Bezug auf diese Ebene.

Die letzte Gleichung (4) drückt das wichtige Grundgesetz aus, demzufolge bei einer jeden Rotation eines starren Körpers um eine fixe Achse stets die Summe der Drehungsmomente der äußeren Kräfte P (bezüglich der Drehachse) gleich ist dem Producte aus dem Trägheitsmomente der Körpermasse bezüglich der Drehungsachse, das kürzshalber durch J_x bezeichnet werden möge, in die gleichzeitige Winkelbeschleunigung γ , also

$$M_x = \Sigma M_x^{(P)} = J_x \gamma = J_x \cdot \frac{dw}{dt} \dots (5)$$

Aus dieser Hauptgleichung (5) ist zu entnehmen, dass die notwendige und hinreichende dynamische Grundbedingung für eine gleichförmige Rotation um eine fixe Achse, bei welcher (siehe S. 348) $\gamma = \frac{dw}{dt}$ stetig den Wert Null hat, die ist, dass $M_x = \Sigma M_x^{(P)}$, d. h. die algebraische Summe der Drehungsmomente der äußeren Kräfte P stetig den Wert Null beibehalte.

Wirken demnach keine äußeren Kräfte (außer den Lagerwiderständen) auf den rotierenden Körper ein oder solche, die sich dauernd das Gleichgewicht halten (für welche also $M_x = \Sigma M_x^{(P)} = 0$ ist), so dauert auch die irgendwie eingeleitete rotierende Bewegung mit unveränderlicher Winkelgeschwindigkeit stetig an.

Ist dagegen die Momentensumme $M_x = \Sigma M_x^{(P)}$ von Null verschieden und constant, so ist auch der Gleichung (5) zufolge, da J_x sich nicht ändert, γ constant, d. h. die rotierende Bewegung ist eine gleichförmig veränderte (siehe S. 349) — und umgekehrt — und zwar ist, je nachdem $\Sigma M_x^{(P)} > 0$ oder $\Sigma M_x^{(P)} < 0$ ist, also je nachdem die Summe der Drehungsmomente der im Sinne der tatsächlichen Rotation (im positiven Sinne) drehenden Kräfte größer oder aber kleiner ist als der absolute Wert der Momentensumme der entgegengesetzt drehenden Kräfte, γ positiv oder negativ, also die Ro-

tation im ersten Falle eine gleichförmig beschleunigte, im zweiten Falle aber eine gleichförmig verzögerte.

Ist schließlich die algebraische Summe der Drehungsmomente $\Sigma M_z^{(P)}$ variabel, so ist die Rotation eine ungleichförmig geänderte, und zwar beschleunigt oder verzögert, je nachdem $\Sigma M_z^{(P)} > 0$ oder < 0 ist.

In allen Fällen wird die fragliche Winkelbeschleunigung zufolge (5) aus der Gleichung $\gamma = \frac{\Sigma M_z^{(P)}}{J_z}$ zu berechnen sein.

Dass zu den äußeren Kräften, auf welche sich die Summe $\Sigma M_z^{(P)}$ bezieht, stets auch der Reibungswiderstand, Luftwiderstand u. s. w. zuzurechnen sind, bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung.

Die vier ersten Gleichungen (4) gestatten die Componenten X_o, Y_o des Druckes P_o , und die Componenten X_o', Y_o' des Druckes P_o' , also Richtung und Größe des zur Achse normalen Druckes in den beiden fixen Punkten O und O' der Achse zu bestimmen. Die zur Achse parallelen Componenten Z_o und Z_o' dieses Achsdruckes sind der fünften Gleichung in (4) zufolge nur der Summe nach bestimmbar.

Es möge hier nebenbei ausdrücklich bemerkt werden, dass es in Wirklichkeit fast immer nur eines der beiden Zapfenlager O und O' ist, welches den gesammten Druck $Z_o + Z_o'$ aufnimmt, und der entsprechende Zapfen wird dann in der Maschinenkunde gewöhnlich als ein „Stützzapfen“ oder „Spurzapfen“ bezeichnet im Gegensatze zum „Tragzapfen“, bei welchem vorwiegend auf die X - und Y -Componenten des Zapfendruckes Rücksicht zu nehmen ist.

Diese Kräfte P_o und P_o' werden durch die Reactionen der Zapfenlager $-P_o$ und $-P_o'$ aufgehoben, und da die dynamische Function der Lager nur in der Hervorrufung dieser Kräfte $-P_o$ und $-P_o'$ beruht, so würde dieselbe Rotation um die fixe Achse auch stattfinden, wenn der Körper freibeweglich wäre und wofern auf die Punkte O und O' die mittels der Gleichungen (4) bestimmaren äußeren Kräfte $-P_o$ und $-P_o'$ einwirken würden.

Aus diesen Gleichungen (4) ist auch zu entnehmen, dass selbst dann, wenn sich die äußeren Kräfte P unter sich das Gleichgewicht halten, also $\Sigma P_x = \Sigma P_y = \Sigma P_z = M_x = M_y = M_z = 0$ wird und demgemäß die Rotation eine gleichförmige, nämlich $\gamma = 0$ ist, ein kinetischer Druck auf die fixen Punkte der Rotationsachse einwirkt, indem dann $X_{o'} = w^2 \frac{\Sigma (m x z)}{d}$ u. s. w. ist.

Setzt man voraus, dass sich etwa infolge eines plötzlichen Stosses die Winkelgeschwindigkeit w des um die fixe z -Achse rotierenden Körpers in einem ungemein kleinen Zeitelement Δt , das der Zeit t unmittelbar benachbart ist, um einen endlichen Wert Δw ändert, so hat man wie auf S. 545 die diesem Zeitelement Δt entsprechenden Impulse in Rechnung zu ziehen. Um daher die Stoßwirkungen auf die beiden Zapfen O und O' zu ermitteln, hat man die

Gleichungen (4) nach der Zeit zu integrieren und die Integration zwischen den Grenzen t und $t + \Delta t$ auszuführen.

Die zwischen diesen Grenzen genommenen Integrale $\pi_x^{(o')} = \int X_o dt, \pi_y^{(o')} = \int Y_o dt, \pi_z^{(o')} = \int Z_o dt$ bestimmen dann die Componenten des Stoßimpulses π_o auf den Zapfen O' und die Integrale $\pi_x^{(o)} = \int X_o dt, \pi_y^{(o)} = \int Y_o dt, \pi_z^{(o)} = \int Z_o dt$ die

Componenten des Impulses π_o auf den Zapfen O . $\pi_x = \int P_x dt, \pi_y = \int P_y dt, \pi_z = \int P_z dt$ sind die Componenten des im Punkte xyz thätigen Impulses der

Kraft P . Die bei der Integration der Gleichungen (4) sich ergebende Zeitintegrale der Kräfte momentensummen M_x, M_y, M_z lassen sich auch folgendermassen ausdrücken: Es ist das zwischen den Grenzen t und $t + \Delta t$ genommene Integral

$$\int M_x dt = \int \Sigma M_x^{(P)} dt = \int \Sigma (y P_x - z P_y) dt = \Sigma [y \int P_x dt - z \int P_y dt] =$$

$$= \Sigma [y \pi_x - z \pi_y] dt = \Sigma M_x^{(M)}$$

also gleich der Summe der Momente der Impulse aller äusseren Kräfte bezüglich der x -Achse, die durch μ_x bezeichnet sei. Ebenso ist $\int M_y dt = \Sigma M_y^{(M)} = \mu_y, \int M_z dt = \Sigma M_z^{(M)} = \mu_z$; ferner ist, wenn man den

Rotationswinkel, der den Radiusvector des beliebigen Punktes m zur Zeit t mit der Lage desselben Radius zur Zeit Null einschließt, durch φ bezeichnet, $w = \frac{d\varphi}{dt}$, daher $\int_t^{t+\Delta t} w^2 dt = \int_\varphi^{w+\Delta w} w \cdot d\varphi$; es ist sonach dieses Integral, wenn man durch

W den grössten — jedenfalls endlichen — Wert, den die Winkelgeschwindigkeit in dem ungemein kleinen Zeitelement Δt annimmt, bezeichnet, sicher kleiner als $W \cdot \Delta \varphi$, somit kann, da die Änderung $\Delta \varphi$ des Rotationswinkels in dem Zeitelement Δt nur ungemein gering sein kann, das letzte Integral und auch das Product aus demselben und aus irgend einem der constanten Factoren von w^2 , die in den Gleichungen (4) vorkommen, gegen die anderen Glieder beim Übergange zu den Grenzwerten vernachlässigt werden. Schliesslich ist zu berücksichtigen,

dass $\gamma = \frac{dw}{dt}$, daher $\int_t^{t+\Delta t} \gamma dt = \int_t^{t+\Delta t} \frac{dw}{dt} dt = \int_w^{w+\Delta w} dw = \Delta w$ ist. Es führt sonach die

auf das Zeitintervall Δt ausgedehnte Integration der Gleichungen (4) nach der Zeit zu folgenden Gleichungen für die Componenten des Impulses π_o und π_o und für die Momentensumme μ_x

$$\left. \begin{aligned} \pi_x^{(o')} &= \frac{\mu_y}{d} + \Delta w \cdot \frac{\Sigma (m y z)}{d} \\ \pi_y^{(o')} &= -\frac{\mu_x}{d} - \Delta w \cdot \frac{\Sigma (m z x)}{d} \\ \pi_x^{(o)} &= \left(\Sigma \pi_x - \frac{\mu_y}{d} \right) + \Delta w \left[M \eta - \frac{\Sigma (m y z)}{d} \right] \\ \pi_y^{(o)} &= \left(\Sigma \pi_y + \frac{\mu_x}{d} \right) - \Delta w \left[M \xi - \frac{\Sigma (m z x)}{d} \right] \\ \pi_z^{(o)} + \pi_z^{(o')} &= \Sigma \pi_z \\ \mu_x &= \Delta w \cdot \Sigma (m r^2) = J_x \cdot \Delta w \end{aligned} \right\} (6)$$

§ 91. Mechanische Arbeit der äußeren Kräfte bei einer Rotation um eine fixe Achse.

Es sei P irgend eine der äußeren Kräfte, die auf den um eine fixe Achse (die z -Achse) rotierenden starren Körper einwirken, die thatsächliche Rotationsrichtung sei zur positiven angenommen, und dt sei das positiv genommene, von dem Angriffspunkte m dieser Kraft P in der Zeit dt zurückgelegte Kreisbogenelement, so dass $ds = r \cdot d\varphi$ ist, wenn r den Radiusvector des Punktes m und $d\varphi$ den positiven unendlich kleinen Rotationswinkel für das Zeitelement dt bedeutet. Die elementare mechanische Arbeit dA_P dieser Kraft in der Zeit dt lässt sich folgendermaßen ausdrücken:

Zerlegt man die Kraft P in drei orthogonale Componenten, von welcher die eine Componente Z (die axiale Componente) parallel zur Rotationsachse, die zweite R (die radiale Componente) längs des Radiusvectors r und die dritte T (tangentielle Componente) tangentiell zum Rotationskreise wirkt, so ist zufolge Gleichung (6), S. 182 $dA_P = dA_Z + dA_R + dA_T$. Da nun die Richtungen von Z und R auf der Bewegungsrichtung senkrecht stehen, so ist (siehe S. 183) $dA_Z = 0$, $dA_R = 0$; da ferner T in der Bewegungsrichtung, beziehungsweise in der entgegengesetzten wirkt, so ist, wenn T im ersten Falle positiv, im letzteren negativ in Rechnung gebracht wird, $dA_T = -T \cdot ds = -T \cdot r d\varphi$, daher $dA_P = Tr \cdot d\varphi$. Nach dem Momentensatze (siehe S. 71) ist aber, wenn $M_z^{(P)}$ das Drehungsmoment der Kraft P bezeichnet, $M_z^{(P)} = M_z^{(Z)} + M_z^{(R)} + M_z^{(T)}$, oder da dem Begriffe des statischen Moments bezüglich einer Achse (der z -Achse) zufolge (siehe S. 71) $M_z^{(Z)} = 0$, $M_z^{(R)} = 0$ und $M_z^{(T)} = T \cdot r$ ist, so ist $M_z^{(P)} = T \cdot r$, somit

$$e_P = \frac{dA_P}{dt} = M_z^{(P)} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = M_z^{(P)} \cdot w \quad \left. \vphantom{e_P} \right\} \dots (1)$$

wenn durch e_P der auf S. 130 definierte Effect der Kraft P und durch w die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Körpers bezeichnet ist.

Bezieht sich demgemäß das Summenzeichen Σ auf die zu derselben Zeit t einwirkenden Kräfte irgend eines Kräftesystems, so ist, da der Rotationswinkel $d\varphi$ bei allen materiellen Punkten für dasselbe Zeitintervall dt derselbe ist,

$$\left. \begin{aligned} \Sigma(dA_P) &= \Sigma(M_z^{(P)} \cdot d\varphi) = d\varphi \cdot \Sigma M_z^{(P)} \\ \Sigma e_P &= \Sigma \frac{dA_P}{dt} = w \cdot \Sigma M_z^{(P)} \end{aligned} \right\} (2)$$

Bei jeder Rotation um eine Achse ist somit der Gesamteffect irgend eines Kräftesystems, d. i. die Summe der Effecte aller Kräfte desselben gleich dem Producte aus der Winkelgeschwindigkeit und aus der Summe der Drehungsmomente dieser Kräfte in Bezug auf die Rotationsachse.

Halten sich alle Kräfte P irgend eines Kräftesystems für die unendlich kleine Zeit dt das Gleichgewicht, so ist der bekannte Gleichgewichtsbedingung zufolge $\Sigma M_z^{(P)} = 0$, folglich auch nach (2) $\Sigma (dA_P) = 0$, d. h. es ist die gesammte, bei der Rotation in dem Zeitintervall dt von diesen Kräften geleistete mechanische Arbeit und daher auch der Gesamteffect dieser Kräfte gleich Null. Herrscht also während der Rotation durch eine endliche Zeit t hindurch dauernd Gleichgewicht unter den Kräften P , so ist auch für diese ganze Zeit $\Sigma A_P = 0$.

Für die zwei Kräfte P und $-P$ eines Kräftepaars ist bekanntlich für dieselben (siehe S. 430) $\Sigma M_z^{(P)}$ gleich dem Momente des Kräftepaars in Bezug auf die z -Achse; es ist demnach der zweiten Gleichung (2) zufolge der Effect $(e_P + e_{-P})$ eines Kräftepaars bei einer jeden Rotation gleich dem Producte aus der Winkelgeschwindigkeit und das Moment des Kräftepaars in Bezug auf die Rotationsachse. Ist daher die Ebene des Kräftepaars zur Rotationsachse parallel, so ist der Effect desselben Null.

Da ferner $\Sigma (dA_P) = d(\Sigma A_P)$ ist, so führt die auf die Zeit t ausgedehnte Integration der Gleichungen (1) und (2), wenn die Summe der Drehungsmomente $M_z^{(P)}$ der Kräfte jenes Kräftesystems, auf welche sich die Summe ΣA_P bezieht, durch M_z bezeichnet wird, zu den Gleichungen

$$A_P = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z^{(P)} \cdot d\varphi, \quad \Sigma A_P = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z \cdot d\varphi \dots (3)$$

Um daher die mechanische Arbeit, welche eine beliebige Kraft P in einer beliebigen Zeit während der Rotation eines Körpers leistet, zu bestimmen, hat man nur das Drehungsmoment dieser Kraft P als Function des variablen Rotationswinkels φ auszudrücken und dieses Drehungsmoment nach dieser Variablen φ für die in Betracht gezogene Zeit, innerhalb welcher der Rotationswinkel φ vom Anfangswerte φ_0 in den Endwert φ übergeht, zu integrieren oder kurz gesagt: Die mechanische Arbeit einer Kraft P ist das Winkelintegral des Drehungsmoments dieser Kraft, und die gesammte mechanische Arbeit ΣA_P eines Kräftesystems ist gleich dem entsprechenden Winkelintegral der Drehmomentensumme $M_z = \Sigma M_z^{(P)}$.

Differenziert man sonach bei einer rotierenden Bewegung um eine Achse die gesammte Arbeit ΣA_P aller Kräfte irgend eines

Systems (bezw. [siehe S. 325] deren entgegengesetztes Gesamtpotential $-U$) nach dem Rotationswinkel, so ist der erhaltene Differentialquotient $\frac{d\Sigma A_P}{d\varphi}$ gleich der Summe der Drehmomente dieser Kräfte.

Ist demgemäß die Momentensumme M_z constant — ein Fall, der in der angewandten Mechanik häufig vorkommt — so ist $\Sigma A_P = M_z \cdot \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = M_z (\varphi - \varphi_0)$, sonach für eine volle Umdrehung, für welche der Rotationswinkel $\varphi - \varphi_0 = 2\pi$ ist,

$$\Sigma A_P = 2\pi \cdot M_z \dots (4)$$

Da bei Kräften irgend eines auf den Körper einwirkenden Kräftesystems, die sich auf eine Resultante R zurückführen lassen, das Moment dieser Resultanten bezüglich der z -Achse (siehe S. 441) stets gleich ist der Summe der Momente dieser Kräfte in Bezug auf dieselbe Achse, so lehrt die Gleichung (3) sofort, dass (nicht nur bei einer fortschreitenden Bewegung — siehe Gleichung (2), S. 547 — sondern auch) bei einer jeden Rotation um eine Achse die mechanische Arbeit A_R der Resultanten stets gleich ist der Summe mechanischer Arbeiten der componentalen Kräfte.

Haben z. B., wie dies bei einem schweren, um eine fixe horizontale Achse drehbaren Körper der Fall ist, alle äußeren Kräfte eine constante Resultante P von constanter, zur Drehachse senkrechter Richtung, und ist der in der constanten Entfernung $aS = \overline{aS} = e$ von der Drehachse befindliche Punkt S (Fig. 140, S. 465) des Körpers (z. B. der Schwerpunkt) der stete Angriffspunkt der Resultanten, so ist, wenn φ der Winkel ist, den die Richtung der Kraft mit Sa einschließt, $M_z = Pe \sin \varphi$, also wenn λ (Fig. 140) der anfängliche und $\varphi = 0$ der schließliche Wert von φ ist, $A_P = \int_{\lambda}^0 Pe \sin \varphi \cdot d\varphi = -Pe (1 - \cos \lambda)$ oder (vergl. S. 540), da in Fig. 140 $e = \overline{aS} = \sqrt{d^2 + h^2}$ und $e \cos \lambda = \overline{AS} = h$ ist, $A_P = -P[\sqrt{d^2 + h^2} - h]$.

Da nach Gleichung (5), S. 553, das aus allen einwirkenden Kräften resultierende Drehmoment $M_z = J_z \gamma = J_z \cdot \frac{dw}{dt}$ ist, wo w die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet, und da ferner $d\varphi = w dt$ ist, so führt die Substitution in die Gleichung (3) zu der Folgerung, dass, wenn sich das Summenzeichen Σ auf alle überhaupt einwirkenden äußeren Kräfte bezieht,

$$\Sigma A_P = \int_0^t J_z \cdot \frac{dw}{dt} \cdot w dt = \int_{w_0}^w J_z w dw = J_z \int_{w_0}^w w dw = \frac{J_z w^2}{2} - \frac{J_z w_0^2}{2} \quad (5)$$

ist, d. h. bei jeder Rotation um eine Achse ist die Summe der mechanischen Arbeiten aller äußeren Kräfte ausgedrückt durch die gleichzeitige Änderung des Productes aus dem halben Trägheitsmomente in das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit.

Das in dieser Gleichung vorkommende Product $\frac{J_z w^2}{2}$ aus dem halben Trägheitsmomente und dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit stellt die gesammte kinetische Energie des rotierenden Körpers (die Summe der lebendigen Kräfte der einzelnen materiellen Punkte) zur Zeit t dar, denn es ist diese Energie, da $v = rw$ ist, bestimmt durch

$$\Sigma \left(\frac{m v^2}{2} \right) = \Sigma \left(\frac{m r^2 w^2}{2} \right) = \frac{w^2}{2} \cdot \Sigma (m r^2) = J_z \frac{w^2}{2} \dots (6)$$

Die Gleichung (5) drückt also das Princip der lebendigen Kraft in seiner Anwendung auf die rotierende Bewegung eines starren Körpers aus.

Eine der Gleichung (5) analoge Gleichung erhält man durch Integration der Grundgleichung $\Sigma M_z^{(P)} = M_z = J_z \cdot \gamma = J_z \cdot \frac{dw}{dt}$ nach der Zeit t ; es ist nämlich

$$\int_0^t \Sigma M_z^{(P)} \cdot dt = \int_0^t M_z \cdot dt = \int_{w_0}^w J_z \cdot dw = J_z w - J_z w_0 \dots (7)$$

Die letzte Differenz drückt auch die Änderung der Momentensumme $\Sigma M^{(z)}$ der Bewegungsgrößen $mv = mrw$ der einzelnen Punkte des Körpers in Bezug auf die z -Achse aus, denn es ist $\Sigma M^{(z)} = \Sigma (m r w \cdot r) = w \Sigma (m r^2) = J_z w$. Die Relation (7) ist also schon in dem durch die Gleichung (7), S. 322, ausgesprochenen Gesetze enthalten.

Erfolgt diese Änderung $J_z (w - w_0) = J_z \cdot \Delta w$ der Momente der Bewegungsgrößen in einem ungemein kleinen Zeitelemente infolge der Impulse verhältnismäßig bedeutender Kräfte, so ist diese Änderung $J_z \cdot \Delta w$ der letzten Gleichung (6), S. 555 zufolge der Summe μ_z der Momente dieser Impulse in Bezug auf die Drehachse gleich.

§ 92. Bedeutung des Trägheitsmomentes. Trägheitshalbmesser. Trägheitsmomente in Bezug auf die Coordinatenachsen und auf parallele Achsen. Reducierte Länge.

Der Gleichung (5) auf S. 553 zufolge ist die Rotation zweier verschiedener Körper bei einem gegebenen Kräftesystem (oder wofern

wenigstens die Summe $M_z = \Sigma M_z^{(P)}$ der Drehungsmomente der einwirkenden äußeren Kräfte P bei beiden Körpern die gleiche ist und bei derselben anfänglichen Winkelgeschwindigkeit w_0 nur dann, aber auch sicher dann eine übereinstimmende, also die Winkelbeschleunigung γ in einer jeden beliebigen Zeit für beide Körper dieselbe, wenn die Trägheitsmomente J_z der beiden Körper bezüglich der fixen Drehachsen den gleichen Wert haben. Zwei rotierende Massen haben also dann den gleichen Einfluss auf die Art der rotierenden Bewegung, kurz auf den Bewegungszustand, sie sind mit anderen Worten bezüglich der kinetischen Wirkung nur dann äquivalent (ersetzbar), wenn beiden dasselbe Trägheitsmoment J in Bezug auf die Rotationsachse zukömmt, während den Gleichungen des § 88 gemäß die kinetische Äquivalenz der Massen bei einer translatorischen Bewegung die Gleichheit der Massen bedingt.

Anmerkung 1. Die Dimension des Trägheitsmomentes J ist, da jeder Summand desselben die Form $m r^2$ hat, $m l^2$, während die Dimension des im Bogenmaße ausgedrückten Rotationswinkels φ als des Verhältnisses zweier Längen $[\varphi] = l:l = 1 = l^0$, jene der Winkelgeschwindigkeit: $[w] = \left[\frac{\varphi}{t} \right] = \frac{1}{t} = t^{-1}$ und die der Winkelbeschleunigung: $[\gamma] = \left[\frac{w}{t} \right] = \frac{t^{-1}}{t} = t^{-2}$ ist.

Falls nun eine einem rotierenden Körper von der Masse M und dem Trägheitsmomente J im obbesagten Sinne äquivalente Masse M auf einer senkrechten Kreiscylinderfläche vertheilt wäre, deren Radius R und dessen Achse die Rotationsachse ist, so wäre das Trägheitsmoment dieser Masse der Gleichung $J = \Sigma (m R^2)$ entsprechend (da in dieser Summe R^2 als gemeinsamer Factor herausgehoben werden kann) $M \cdot R^2$, somit wegen der vorausgesetzten Äquivalenz der Massen $J = M \cdot R^2$, so dass sich für ein jedes gegebene R das entsprechende M , d. i. die sogenannte „auf den Radius R reducierte Masse M des Körpers“, aus der Gleichung $M = \frac{J}{R^2}$ und umgekehrt aus derselben Gleichung R für ein gegebenes M berechnen lässt.

Nimmt man $R = 1$ an, so ergibt sich $J = M$. Demnach lässt sich der dynamische Begriff des Trägheitsmomentes J (seiner Maßzahl nach) definieren als die auf den Radius (Abstand von der Achse) 1 reducierte Masse, d. i. jene Masse M , die auf der erwähnten Cylinderfläche vom Radius 1 vertheilt sein müsste, um im obigen Sinne der Masse M des Körpers äquivalent zu sein.

Da der im Abstände 1 von der fixen Drehungsachse befindliche Punkt E (siehe S. 348) sich in einer zur Drehachse senkrechten Kreisbahn mit der tangentiellen Beschleunigung γ bewegt, da ferner die in der Bewegungsrichtung dieses Punktes angenommene, dem

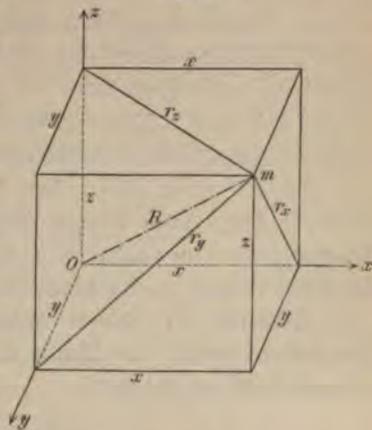
Systeme der einwirkenden äußeren Kräfte äquivalente Kraft R (tangentielle Kraft) die Größe $M_s = \Sigma M_s^{(P)}$ (siehe S. 460) hat, und da schließlich die auf den Punkt E reducierte Masse des Körpers J_s ist, so lehrt die Grundgleichung (5) auf S. 553 nämlich $M_s = J_s \cdot \gamma$, derzufolge in Übereinstimmung mit S. 176 die Tangentialkraft M_s dem Producte aus der Masse J_s und der tangentiellen Beschleunigung γ des Punktes E gleich ist, dass der Punkt E sich in seiner ihm vorgeschriebenen Kreisbahn genau so bewegen muss wie ein materieller Punkt von der Masse J_s , auf welchen eine dem Kraftsysteme äquivalente Kraft einwirkt.

Setzt man umgekehrt in der früheren Gleichung $J = M \cdot R^2$ die Masse M gleich der Masse M des Körpers und bezeichnet durch ρ den entsprechenden Wert des Radius R , so ist $J = M \cdot \rho^2$, somit

$$\rho = \sqrt{\frac{J}{M}} \dots (1)$$

Den mittels dieser Formel zu berechnenden Radius ρ jener senkrechten Cylinderfläche, deren Achse die Rotationsachse ist, und die zugleich die Eigenschaft besitzt, dass eine auf derselben vertheilte, der Körpermasse gleiche Masse M , trotzdem dieselbe anders gelagert ist als die Körpermasse, dennoch der Masse des Körpers in obigem Sinne äquivalent ist (also dasselbe Trägheitsmoment J besitzt), bezeichnet man als den Trägheitshalbmesser (rayon d'inertie) oder (in englischen Werken) den Gyrationradius für jene Achse, auf welche sich das Trägheitsmoment J bezieht. —

Fig. 164.



Sind durch $J_x J_y J_z$ die Trägheitsmomente der Masse M eines starren Körpers bezüglich dreier orthogonalen Achsen, die mit dem Körper in unveränderlicher Verbindung stehen, ferner durch $x y z$ die Coordinaten eines beliebigen materiellen Punktes des Körpers von der Masse m und durch $r_x r_y r_z$ die senkrechten Abstände dieses Punktes von den Coordinatenachsen bezeichnet, so ist, wie die Fig. 164 sofort lehrt, $r_x^2 = y^2 + z^2$, $r_y^2 = z^2 + x^2$ und $r_z^2 = x^2 + y^2$, somit

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \Sigma (m r_x^2) = \Sigma m (y^2 + z^2) \\ J_y &= \Sigma (m r_y^2) = \Sigma m (z^2 + x^2) \\ J_z &= \Sigma (m r_z^2) = \Sigma m (x^2 + y^2) \end{aligned} \right\} (2)$$

Diese drei Gleichungen dienen dazu, die Trägheitsmomente $J_x J_y J_z$ bezüglich dreier orthogonalen Achsen durch die Coordinaten der einzelnen Massenpunkte auszudrücken.

Durch Addition der Gleichungen (2) findet man, dass $J_x + J_y + J_z = 2 \cdot \Sigma m (x^2 + y^2 + z^2)$ ist. Bezeichnet man durch R die Abstände der einzelnen Massenpunkte m von dem Anfangspunkte O des Achsensystems, so ist $x^2 + y^2 + z^2 = r_x^2 + z^2 = R^2$, also

$$J_x + J_y + J_z = 2 \cdot \Sigma [m R^2] = 2 \cdot J_o \quad (3)$$

Diese Gleichung lehrt, dass die Summe der Trägheitsmomente eines starren Punktsystems in Bezug auf drei durch einen Punkt O gelegte orthogonale Achsen lediglich von der Lage dieses Punktes abhängig, dagegen von der Lage der Achsen unabhängig ist, also für alle orthogonalen Achsensysteme mit demselben Anfangspunkte O denselben Wert beibehält, nämlich doppelt so groß ist als das polare Trägheitsmoment J_o für diesen Punkt O .

Zugleich ersieht man aus den Gleichungen (2) sofort, dass

$$\frac{J_y + J_z - J_x}{2} = \Sigma (m x^2), \quad \frac{J_z + J_x - J_y}{2} = \Sigma (m y^2),$$

$$\frac{J_x + J_y - J_z}{2} = \Sigma (m z^2)$$

ist, dass man also mittels der Trägheitsmomente $J_x J_y J_z$ in Bezug auf die Coordinatenachsen nicht nur, wie früher gezeigt wurde, das polare Trägheitsmoment $J_o = \Sigma (m R^2)$ bezüglich des beliebig gewählten Coordinatenanfangspunktes O , sondern auch die Trägheitsmomente $\Sigma (m x^2)$, $\Sigma (m y^2)$, $\Sigma (m z^2)$ bezüglich der beliebig gewählten Coordinatenebenen sofort zu bestimmen im Stande ist. —

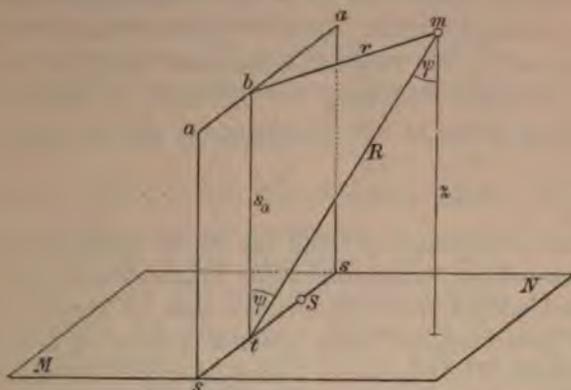
Ist aa (Fig. 165) eine beliebige Achse von unveränderlicher relativer Lage zum Körper und ss die zu dieser Achse durch den Schwerpunkt S des Körpers parallel geführte Achse, ist ferner $M = \Sigma m$ die Körpermasse, s_a der Abstand des Schwerpunktes S von der Achse aa (der Abstand der beiden Achsen) und sind durch J_a und J_s die Trägheitsmomente der Masse des Körpers bezüglich der Achse a und s bezeichnet, so ist stets

$$J_a = J_s + M \cdot s_a^2 \dots (4)$$

Um dies nachzuweisen, lege man durch die parallelen Achsen aa und ss eine Ebene und wähle die zu dieser Ebene durch ss senkrecht gelegte Ebene MN zur xy -Ebene eines orthogonalen Achsensystems. Legt man nun weiter durch den beliebigen Punkt m des Körpers eine Ebene senkrecht zu den beiden Achsen aa und ss , welche die

selben in den Punkten b und t schneidet, und bezeichnet durch r und R die Abstände \overline{mb} und \overline{mt} des Punktes m von den erwähnten

Fig. 165.



Achsen und den spitzen oder stumpfen Winkel mtb durch ψ , so ist in dem Dreiecke mtb

$$r^2 = R^2 + s_a^2 - 2 R s_a \cos \psi.$$

Nun ist für den Punkt m und für das erwähnte Koordinatensystem $z = R \cos \psi$, wo z in Übereinstimmung mit dem Zeichen des Cosinus des spitzen oder stumpfen Winkels ψ positiv oder negativ ist, je nachdem m auf der positiven oder negativen Seite der Ebene MN gelegen ist. Es ist sonach $r^2 = R^2 + s_a^2 - 2 s_a \cdot z$. Multipliziert man diese Gleichung mit der Masse m des materiellen Punktes m und addiert alle die auf diese Art für die einzelnen materiellen Punkte des Körpers erhaltenen Gleichungen, deren Anzahl der Anzahl der materiellen Punkte gleichkommt, so findet man $\Sigma(m r^2) = \Sigma(m R^2) + \Sigma(m s_a^2) - 2 \Sigma(s_a \cdot m z)$, oder da dem Begriffe des Trägheitsmomentes gemäß $\Sigma(m r^2) = J_a$, $\Sigma(m R^2) = J_s$ ist, so ist $J_a = J_s + \Sigma(m s_a^2) - 2 s_a \cdot \Sigma(m z)$. Nun ist, wenn Z der Abstand des Schwerpunktes von der xy -Ebene ist, nach dem bekannten Schwerpunktsmomentensatze (Gleichung 3, S. 469) $\Sigma(m z) = MZ$ und, da S in der xy -Ebene liegt, $Z = 0$, also auch $\Sigma(m z) = 0$, somit $J_a = J_s + \Sigma(m s_a^2)$. Es ist sonach bei einem jeden Körper das Trägheitsmoment J_a der ganzen Masse bezüglich einer beliebigen Achse a stets gleich der Summe aus dem Trägheitsmomente J_s dieser Masse bezüglich der zu a parallelen Schwerachse s und aus dem Producte dieser Masse in das Quadrat des Abstandes s_a dieser beiden Achsen s und a .

Aus dieser Gleichung ist zu entnehmen, dass von allen Trägheitsmomenten eines Körpers bezüglich aller parallelen Achsen stets jenes bezüglich der Schwerpunktsachse das kleinste (ein Minimum) sei, und dass die Trägheitsmomente bezüglich der einzelnen Lagen der Erzeugenden einer senkrechten Kreiscylinderfläche, deren geometrische Achse den Schwerpunkt des Körpers enthält, einander gleich sind.

Sind ϱ_a und ϱ_s die Trägheitshalbmesser bezüglich der Achsen a , bzw. s , so ist nach Gleichung (1) $J_a = M \cdot \varrho_a^2$ und $J_s = M \cdot \varrho_s^2$. Setzt man diese Werte in die Gleichung (4) ein, so findet man

$$\varrho_a^2 = \varrho_s^2 + s_a^2 \dots (5)$$

Aus den Gleichungen (4) und (5) ist zu ersehen, dass man nur die Trägheitsmomente, beziehungsweise Trägheitshalbmesser in Bezug auf die verschiedenen Schwerpunktsachsen zu kennen braucht, um sofort auch jene bezüglich aller anderen Achsen zu kennen, und es werden demnach die folgenden Untersuchungen wesentlich auf die Bestimmung der Trägheitshalbmesser der verschiedenen Körper in Bezug auf die Schwerpunktsachsen hinzielen. —

Von dem Trägheitsradius ϱ_a eines Körpers in Bezug auf eine Achse a und von dem Abstände s_a des Schwerpunktes S von dieser Achse a — also lediglich von der Massenvertheilung um diese Achse a — ist eine bestimmte dritte Länge l_a abhängig, die für manche Untersuchungen der Mechanik von Wichtigkeit ist, und die deshalb hier kurz behandelt werden soll; es ist dies die vierte Proportionale zu s_a , ϱ_a und ϱ_a .

Man bezeichnet diesen Quotienten ($\varrho_a^2 : s_a$) aus dem Quadrate des Trägheitshalbmessers ϱ_a in Bezug auf irgend eine Achse a dividirt durch die Schwerpunktsdistanz s_a von dieser Achse als die reducierte Länge l_a des Körpers bezüglich dieser Achse a .

Der Gleichung $J_a = M \varrho_a^2$ zufolge ist auch

$$l_a = \frac{\varrho_a^2}{s_a} = \frac{J_a}{M \cdot s_a} \dots (6)$$

Man kann sonach die reducierte Länge l_a auch als den Quotienten aus dem Trägheitsmomente J_a und dem Schwerpunktsmomente $M s_a$ definieren.

Ist außer der Lage des Schwerpunktes S und jener der Achse a der Trägheitsradius ϱ_s in Bezug auf die zur Achse a parallele Schwerachse gegeben, so lassen sich die hier betrachteten Längen ϱ_a und l_a leicht durch folgende Construction finden: Man lege durch den Schwerpunkt S des Körpers eine zur Achse a senkrechte Ebene

(Fig. 166), welche die Achse a im Punkte A schneidet, errichtet in S auf $AS = s_a$ die Senkrechte $SN = q_s$, so dass nach (5) die Hypothenuse $AN = \sqrt{q_s^2 + s_a^2} = q_a$ der Trägheitshalbmesser für die Achse a ist, und führe in N zu AN eine Normale, welche die Verlängerung von AS im Punkte C schneidet; es ist dann bekanntlich in dem bei N rechtwinkligen Dreiecke ANC die Kathete AN die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Hypothenuse AC und AS , d. h. $\overline{AC} = \frac{AN^2}{AS} = \frac{q_a^2}{s_a}$;

es ist also nach (6) $\overline{AC} = l_a$ die reducierte Länge des Körpers in Bezug auf die Achse a .

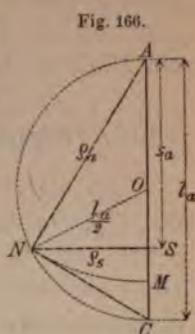
Die Fig. 166 lehrt sofort, dass stets $l_a > q_a > s_a$ ist. Trägt man daher auf der zur Achse a senkrechten Schwerlinie AS von A aus gegen den Schwerpunkt S hin den Trägheitshalbmesser $q_a = \overline{AN} = \overline{AM}$ und die reducierte Länge $l_a = \overline{AC}$ auf, so ist der Endpunkt C der reducierten Länge — der sogenannte Schwingungsmittelpunkt — der von der Achse am weitesten entfernte Punkt, während der Endpunkt M des Trägheitshalbmessers zwischen S und C zu liegen kommt.

Da dem Begriffe des Trägheitshalbmessers zufolge die Masse des Körpers äquivalent ist einer gleich großen im Endpunkte M des Trägheitshalbmessers vereinigt gedachten Masse, so kann man bei einem jeden um eine Achse a rotierenden Körper gleichsam den Sitz der ganzen Masse des Körpers nach dem Endpunkte M des Trägheitshalbmessers verlegen, während bei einem schweren Körper als der stete Angriffspunkt der resultierenden Schwerkraft der der Achse nähere Schwerpunkt S angesehen werden, also das Gewicht des Körpers gleichsam in S vereinigt gedacht werden kann, so dass bei einer jeden Rotation eines schweren Körpers der Sitz M der auf einen Punkt reducierten Masse M des Körpers von dem Angriffspunkte S der resultierenden Schwerkraft stets verschieden ist.

Aus der Fig. 166 ist weiter zu ersehen, dass in dem bei N rechtwinkligen Dreiecke die vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypothenuse geführte Normale NS die mittlere Proportionale der beiden Abschnitte der Hypothenuse, also $q_s^2 = s_a(l_a - s_a)$ ist; es ist demnach, was auch durch Einsetzung von (5), bzw. (4) in (6) gefunden werden kann,

$$l_a = \frac{q_s^2}{s_a} + s_a = \frac{J_s}{M \cdot s_a} + s_a \dots (7)$$

Die durch C parallel zur Achse a geführte Achse, ferner gewisse Punkte der letzteren, wie z. B. der Mittelpunkt des Stoßes

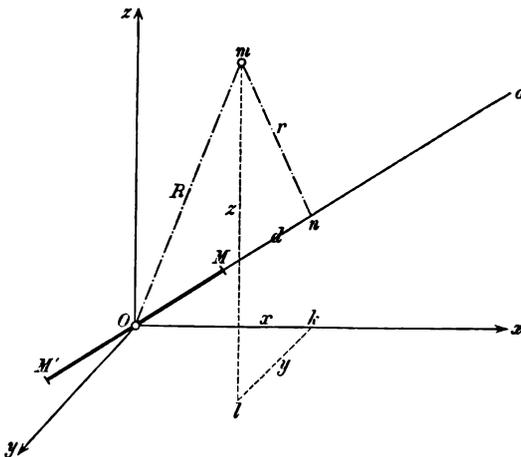


(siehe S. 576), der Schwingungsmittelpunkt C (siehe § 98), der Mittelpunkt des Druckes (siehe § 104) u. s. w., spielen in einigen folgenden Auseinandersetzungen eine wichtige Rolle. Betreffs der Bestimmung jener Achsen a des Körpers, für welche die reducierten Längen l , den gleichen Wert haben, und jener Achsen, für welche dieselbe ein Minimum ist, u. s. w. sei hingewiesen auf § 98.

§ 93. Trägheitsellipsoid. Trägheitshauptachsen. Centralellipsoid.

Es sei O (Fig. 167) ein beliebiger Punkt des Körpers, ferner Ox, Oy, Oz drei beliebige durch O geführte orthogonale Coordinatenachsen von unveränderlicher Lage gegen den starren Körper und Oa eine beliebige Achse, deren Richtungswinkel gegen die Coordinatenachsen $\alpha\beta\gamma$ sind, und bezüglich welcher das Trägheitsmoment J_a des Körpers zu berechnen ist.

Fig. 167.



Sind $\overline{Ok} = x$, $\overline{kl} = y$, $\overline{lm} = z$ die orthogonalen Coordinaten eines beliebigen Massenpunktes von der Masse m und $\overline{mn} = r$ der senkrechte Abstand desselben von der Achse Oa , ist ferner $\overline{Om} = R$ und $\overline{On} = d$, so ist offenbar

$$r^2 = R^2 - d^2 \dots (1)$$

Nun ist (siehe Fig. 164) $R^2 = x^2 + r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und die orthogonale Projection d der Strecke Om auf die Achse a gleich der Projection des denselben Anfangspunkt O und denselben Endpunkt m besitzenden Polygonalzuges $Oklm$, dessen einzelne Theilstrecken $\overline{Ok} = x$, $\overline{kl} = y$, $\overline{lm} = z$ auf die Achse a die Projectionen $x \cos \alpha$, $y \cos \beta$, $z \cos \gamma$ haben, daher ist $d = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$.

Substituiert man die so gefundenen Werte von R^2 und d in die Gleichung (1), so findet man

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2 = x^2 (1 - \cos^2 \alpha) + y^2 (1 - \cos^2 \beta) + z^2 (1 - \cos^2 \gamma) - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha - 2xy \cos \alpha \cos \beta.$$

Da nun $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ ist, so ist weiter

$$= x^2 (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + y^2 (\cos^2 \gamma + \cos^2 \alpha) + z^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha - 2xy \cos \alpha \cos \beta, \text{ also} \\ r^2 = \cos^2 \alpha (y^2 + z^2) + \cos^2 \beta (z^2 + x^2) + \cos^2 \gamma (x^2 + y^2) - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha - 2xy \cos \alpha \cos \beta.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit der Masse m des materiellen Punktes und addiert alle die auf dieselbe Weise für die einzelnen materiellen Punkte m des Körpers erhaltenen Gleichungen, so findet man nach Heraushebung der gemeinsamen Factoren $\cos^2 \alpha$ s. w.

$$r^2 = \cos^2 \alpha \Sigma m (y^2 + z^2) + \cos^2 \beta \Sigma m (z^2 + x^2) + \cos^2 \gamma \Sigma m (x^2 + y^2) - 2 \cos \beta \cos \gamma \Sigma (m y z) - 2 \cos \gamma \cos \alpha \Sigma (m z x) - 2 \cos \alpha \cos \beta \Sigma (m x y).$$

Bezeichnet man demnach durch J_a, J_x, J_y, J_z die Trägheitsmomente bezüglich der Achsen Oa, Ox, Oy, Oz [siehe Gleichung (2) auf S. 561] und durch D_x, D_y, D_z die schon in den Gleichungen (4) und (6) auf S. 551 und 555 vorkommenden constanten Werte:

$$D_x = \Sigma (m y z), \quad D_y = \Sigma (m z x), \quad D_z = \Sigma (m x y) \quad \dots \quad (2)$$

welche man nach Rankine die Deviationsmomente (mitunter auch besonders in technischen Schriften Centrifugalmomente) nennt, so ist

$$\left. \begin{aligned} J_a &= J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \cos^2 \beta + J_z \cdot \cos^2 \gamma \\ &- 2 D_x \cos \beta \cos \gamma - 2 D_y \cos \gamma \cos \alpha - 2 D_z \cos \alpha \cos \beta \end{aligned} \right\} (3)$$

Durch diese wichtige Gleichung ist das gesuchte Trägheitsmoment J_a bestimmt.

Anmerkung 1. Nicht nur die Trägheitsmomente, sondern auch die Deviationsmomente haben den Gleichungen (2) gemäß die Dimension $m l^2$, so dass Trägheitsmomente und Deviationsmomente Größen derselben Art sind.

Schneidet man, um auch die für die graphische Statik und Dynamik wichtige geometrische Bedeutung dieser Gleichung zu ermitteln, auf einer jeden durch O gelegten Achse Oa von O aus nach beiden Seiten solche Strecken $OM = OM'$ (Fig. 167) ab, die dem Trägheitshalbmesser ρ_a des Körpers für diese Achse, also nach Gleichung (1) auf S. 561 der Quadratwurzel aus dem Trägheitsmomente bezüglich dieser Achse Oa invers proportional sind, so dass

demnach $OM = OM' = \frac{\varepsilon^2}{\varrho_a}$ ist, wo ε eine beliebige Proportionalitätsconstante bedeutet, also auch nach Gleichung (1) auf S. 561

$$\overline{OM} = \overline{OM'} = \frac{\varepsilon^2}{\varrho_a} = \frac{\varepsilon^2 \sqrt{M}}{\sqrt{J_x}} \dots (4)$$

ist, und bezeichnet man die Coordinaten des so erhaltenen Punktes M , bzw. M' durch X, Y, Z , so ist

$$X = \pm \varepsilon^2 \sqrt{\frac{M}{J_x}} \cos \alpha, \quad Y = \pm \varepsilon^2 \sqrt{\frac{M}{J_y}} \cos \beta, \quad Z = \pm \varepsilon^2 \sqrt{\frac{M}{J_z}} \cos \gamma,$$

wo sich die oberen Zeichen auf den einen, die unteren auf den anderen der Punkte M und M' beziehen. Dividirt man nun die Gleichung (3) durch J_a und beachtet die drei letzten Gleichungen, so findet man

$$\left. \begin{aligned} M \cdot \varepsilon^4 &= J_x \cdot X^2 + J_y \cdot Y^2 + J_z \cdot Z^2 - 2 D_x Y Z \\ &\quad - 2 D_y Z X - 2 D_z X Y \end{aligned} \right\} (5)$$

Wenn man demnach für alle möglichen durch den Punkt O gelegten Achsen die Lage der Punkte M und M' derart bestimmt, dass ihre Distanz von O dem Trägheitsradius, also auch der Quadratwurzel aus dem Trägheitsmomente, für diese Achsen invers proportional ist, so liegen alle diese Punkte in einer Fläche E , deren Mittelpunkt O ist, und deren Gleichung nach (5) eine Gleichung des zweiten Grades ist, demnach in einer Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung.

Da nun die Coëfficienten J_x, J_y, J_z der zweiten Potenzen der Coordinaten XYZ in (5) ihrer Natur nach positive Größen sind, und da den obigen Erklärungen zufolge im allgemeinen kein Radius unendlich groß und sicherlich keiner imaginär ist, weshalb diese Mittelpunktsfläche E keinesfalls ein Hyperboloid sein kann, so ist die besagte Fläche E jedenfalls ein Ellipsoid. Man bezeichnet dieses Ellipsoid E , in welchem jeder Radius OM , wie gezeigt wurde, der reciproken Quadratwurzel aus dem Trägheitsmomente des Körpers in Bezug auf diesen Radius proportional ist, als das Ellipsoid der Trägheitsmomente, Poinso't's Momentenellipsoid, oder kurzweg als das „Trägheitsellipsoid“ des beliebig gewählten Punktes O . Ein durch diesen Mittelpunkt O des Trägheitsellipsoids geführter ebener elliptischer Schnitt des letzteren führt den Namen der „Trägheitsellipse“ für den Punkt O und für die Ebene dieses Schnittes.

Da aber jedes Ellipsoid, also auch das Trägheitsellipsoid E drei Halbachsen OA, OB, OC (Fig. 168) hat, die gegenseitig aufeinander senkrecht stehen, und von denen die eine Halbachse OA der größte Radius des Ellipsoids, die andere OB der kleinste Radius

Dasselbe ist, während die dritte auf der Ebene der beiden ersteren senkrecht steht, so muss das nach Obigem dem reciproken Quadrate des Radius OM proportionale Trägheitsmoment für eine von drei bestimmten durch den Punkt O geführten senkrechten Achsen, nämlich für OA am kleinsten und für eine zweite OB derselben am größten sein unter allen den verschiedenen Trägheitsmomenten, die sich für alle die einzelnen durch O zu legenden Achsen ergeben.

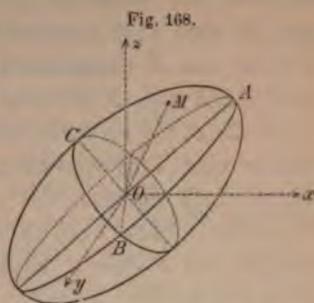
Man bezeichnet diese Achsen, also die Achse OA des kleinsten Trägheitsmomentes, jene des größten Trägheitsmomentes OB und die auf der Ebene dieser beiden Achsen senkrechte Achse OC als die Hauptträgheitsachsen, Trägheitshauptachsen oder kurzweg als Hauptachsen des Punktes O . Sie stimmen, wie gezeigt wurde, mit den Achsen des Trägheitsellipsoids überein, stehen aufeinander senkrecht, und es gibt für jeden Punkt O des Körpers drei solche Hauptachsen.

Die Trägheitsmomente bezüglich der drei Hauptachsen des Punktes O werden die Hauptträgheitsmomente für diesen Punkt O genannt.

Anmerkung 2. Das hier behandelte Ellipsoid E wurde schon von Cauchy (*Exercices de Mathématiques*, 1824) gefunden, doch wurde die große Bedeutung desselben für die Rotationstheorie erst von Poinso't erkannt (*P., Théorie nouvelle de la rotation des corps*, 1834).

Die Trägheitsmomente in Bezug auf Ebenen wurden zuerst von Binet (1811) behandelt. Auch für diese letzteren besteht, wie sich ebenso zeigen lässt, ein Ellipsoid von ähnlicher Eigenschaft, dessen Radien nämlich invers proportional sind der Quadratwurzel aus dem Trägheitsmomente in Bezug auf jene Ebene, die durch den Mittelpunkt des Ellipsoids senkrecht zu diesem Radius gelegt werden kann. Die Hauptachsen dieses Binet'schen Ellipsoids stimmen mit den Hauptachsen des früheren Trägheitsellipsoids überein.

Verlegt man eine der orthogonalen Coordinatenachsen, z. B. die x -Achse, in eine der Hauptachsen des Punktes O , z. B. in die Hauptachse OA , so ist die yz -Ebene, die dann auf dieser Achse OA des Ellipsoids E im Mittelpunkte O des Ellipsoids senkrecht steht, d. i. die Ebene BOC , mögen auch die Achsen y und z in dieser Hauptschnittsebene welche Lagen auch immer haben, bekanntlich eine Symmetrieebene des Ellipsoids E , so dass dann eine jede zur x -Achse parallele Sehne, die durch einen beliebigen innerhalb des Ellipsoids gelegenen Punkt der yz -Ebene, dessen Coordinaten o, Y, Z sind, gelegt wird, durch die yz -Ebene halbiert wird; es müssen mit



anderen Worten einem jeden beliebigen Werte von Y und Z sich aus (5) zwei entgegengesetzt gleiche Werte von X ergeben, was nur dann möglich ist, wenn die Gleichung (5) für einen jeden Wert des Y und Z eine rein quadratische Gleichung ist, demnach das die erste Potenz von X enthaltende Glied $-2(D_y Z + D_z Y) X$ verschwindet, was, da Y und Z beliebig sind, nur dann möglich ist, wenn sowohl $D_y = \Sigma(mzx) = 0$ als auch $D_z = \Sigma(mxy) = 0$ ist. Ist also eine Achse eine Trägheits-Hauptachse für den Punkt O , so muss sie die Eigenschaft haben, dass, wenn man diese Hauptachse zur x -Achse eines orthogonalen Coordinatensystems wählt, die beiden den Factor x enthaltenden Größen (2), nämlich die Deviationsmomente $\Sigma(mzx) = 0$ und $\Sigma(mxy) = 0$ verschwinden. Ist demgemäß z. B. die z -Achse eine Hauptachse für O , so ist $\Sigma(mzx) = 0$, $\Sigma(myz) = 0$. Dies sind die mathematischen Kennzeichen einer Hauptachse.

Verlegt man demnach alle drei orthogonalen Achsen in die drei Trägheitshauptachsen des Punktes O , so ist $D_x = 0$, $D_y = 0$, $D_z = 0$, daher nach (3) und (5)

$$\left. \begin{aligned} J_a &= J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma \\ M \cdot \varepsilon^4 &= J_x \cdot X^2 + J_y \cdot Y^2 + J_z \cdot Z^2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Die erste dieser Gleichungen lehrt, dass man bloß die drei Hauptträgheitsmomente $J_x J_y J_z$ für irgend einen Punkt O zu kennen braucht, um mit Hilfe dieser Gleichung das Trägheitsmoment in Bezug auf eine jede durch diesen Punkt geführte, gegen die Hauptachsen unter den gegebenen Richtungswinkeln $\alpha \beta \gamma$ geneigte Achse Oa sofort berechnen zu können. Sind abc die drei Halbachsen des Trägheitsellipsoids, so ist in unserem Falle nach (4) $J_x = \frac{M \varepsilon^4}{a^2}$, $J_y = \frac{M \varepsilon^4}{b^2}$, $J_z = \frac{M \varepsilon^4}{c^2}$, so dass die zweite Gleichung (6), d. i. jene des Trägheitsellipsoids, in der bekannten Form $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$ erscheint.

Sind die Trägheitsmomente bezüglich zweier Hauptachsen des Punktes O einander gleich, also etwa in der Gleichung (6) $J_x = J_y$, so sind auch die in diesen Achsen, also in der x - und y -Achse, gelegenen Halbachsen des Trägheitsellipsoids gleich, so dass der in der xy -Ebene gelegene elliptische Hauptschnitt desselben ein Kreis, also das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid wird, dessen geometrische Achse die z -Achse ist; es sind demnach dann alle in der xy -Ebene gelegenen Radien des Trägheitsellipsoids, also auch die Trägheitsmomente für alle in der xy -Ebene durch O geführten Achsen, einander gleich; alle diese Radien können ferner als Halbachsen des

Ellipsoids E angesehen werden; in diesem Falle sind also neben der z -Achse alle in der Äquatorialebene (xy -Ebene) gelegenen Durchmesser, deren Zahl unendlich groß ist, Hauptachsen für den Punkt O ; ferner ist dann nach (6) $J_a = J_x (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) + J_z \cos^2 \gamma$ oder, da $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1 - \cos^2 \gamma = \sin^2 \gamma$ ist,

$$J_a = J_x \sin^2 \gamma + J_z \cos^2 \gamma \dots (7)$$

Es hängt also J_a in diesem Falle bloß von J_x , J_z und dem Neigungswinkel γ der Achse a gegen die z -Achse ab, somit das Trägheitsmoment J_a für alle gegen die z -Achse gleichgeneigten, durch O geführten Erzeugenden a einer Kreiskegelfläche, deren Achse z ist, dasselbe. Ist zudem O der Schwerpunkt des Körpers, so pflegt man den hier behandelten Fall, in welchem $J_x = J_y$ ist, durch die Bezeichnung einer „kinetischen Symmetrie des Körpers in Bezug auf die z -Achse“ zu kennzeichnen.

Ist $J_x = J_y = J_z$, so wird aus dem Trägheitsellipsoid eine Kugelfläche, und es sind demgemäß dann die Trägheitsmomente für alle durch O gelegten Achsen einander gleich, und alle durch O gelegten Achsen im Raume sind Hauptachsen für den Punkt O . Es besitzt dann der Körper „in Bezug auf diesen Punkt O kinetische Symmetrie“.

Von einem Punkte O zum anderen ändert sich im allgemeinen die Lage der Hauptachsen und auch die Gestalt des Trägheitsellipsoids. Der Gleichung (4) auf S. 562 zufolge lassen sich aber alle Trägheitsmomente bestimmen, wofern man das dem Schwerpunkte S des Körpers zugehörige Trägheitsellipsoid kennt, welches wichtigste Trägheitsellipsoid man nach Poinsot als das Centralellipsoid (l'ellipsoïde central) bezeichnet. Die Achsen dieses Centralellipsoids nennt man die Hauptcentralachsen (Centralhauptachsen) oder Schwerpunkthauptachsen.

Da für die größte Achse dieses Centralellipsoids das Trägheitsmoment den kleinsten Wert von allen den einzelnen Schwerachsen entsprechenden Werten hat, und da nach der Gleichung (4) auf S. 562 alle anderen Trägheitsmomente für die verschiedenen Achsen des Körpers größer sind als jene für die parallelen Schwerachsen, so ist das Trägheitsmoment bezüglich der erwähnten längsten Achse des Centralellipsoids das aller kleinste Trägheitsmoment des Körpers.

Das Trägheitsmoment J_a für irgend eine Achse a im Körper, die den Abstand s_a vom Schwerpunkte S hat, lässt sich mit Hilfe des Centralellipsoids bestimmen, indem man den durch S zur Achse a parallel geführten Radius r des Centralellipsoids ermittelt; es ist

nämlich dann nach (4) $J_s = M \cdot \frac{\varepsilon^2}{r^2}$ und demnach $J_a = J_s + M \cdot s_a^2 =$
 $= M \left(\frac{\varepsilon^2}{r^2} + s_a^2 \right)$, wo M die Masse des Körpers bedeutet.

Für alle Punkte, die in irgend einer Geraden gelegen sind, müssen die in diese Gerade fallenden Radien der diesen Punkten zugehörigen Trägheitsellipsoide offenbar gleich sein.

Sind xyz die Hauptcentralachsen eines Körpers und $\varrho_x \varrho_y \varrho_z$ die Trägheitshalbmesser für diese Achsen, so ist das Trägheitsmoment bezüglich einer a irgend einer Achse a parallelen Schwerpunktsachse s der Gleichung (6) zufolge durch $J_a = M [\varrho_x^2 \cos^2(x a) + \varrho_y^2 \cos^2(y a) + \varrho_z^2 \cos^2(z a)]$ und daher die reduzierte Länge eines Körpers in Bezug auf die Achse a der Gleichung (7) auf S. 563 zufolge durch

$$l_a = \frac{\varrho_x^2 \cos^2(x a) + \varrho_y^2 \cos^2(y a) + \varrho_z^2 \cos^2(z a)}{s_a} + s_a \dots (8)$$

bestimmt.

§ 94. Folgesätze über die Lage und die Eigenschaften der Trägheitshauptachsen. Mittelpunkt des Stoßes. Freie Achsen.

a) Ist die Masse eines Körpers symmetrisch vertheilt bezüglich irgend einer Ebene, d. h. derart gelagert, dass je zwei symmetrisch zu dieser Ebene gelegene Massenpunkte auch gleiche Massen haben, so ist eine jede Normale dieser Ebene eine Hauptachse für den in der Ebene gelegenen Fußpunkt derselben; denn nimmt man diese Symmetrieebene etwa zur xy -Ebene eines orthogonalen Achsensystems aa , so sind für einen beliebig in dieser Ebene gewählten Koordinatenanfangspunkt O und für je zwei symmetrisch gelagerte gleiche Massen m und m' , für welche $m = m'$ ist, die Summen $m x z + m' x' (-z) = 0$ und $m y z + m' y' (-z) = 0$, daher auch die Gesamtsummen $\Sigma m x z = 0$ und $\Sigma m y z = 0$, was das mathematische Kennzeichen dafür ist, dass die z -Achse eine Hauptachse für den Punkt O ist. Ist demgemäß O identisch mit dem Schwerpunkte des Körpers, so ist die z -Achse eine Hauptcentralachse.

Daher ist z. B. eine jede zur Achse eines homogenen senkrechten Prismas, eines homogenen senkrechten Cylinders u. s. w. parallele Gerade eine Trägheitshauptachse für den Durchstoßpunkt mit der mittleren Querschnittsfläche desselben.

b) Hat ein Körper zwei derartige Symmetrieebenen, so ist die Durchschnittslinie derselben eine Hauptachse für jeden Punkt O dieser Geraden. Denn führt man durch diesen Punkt O zwei Normale zu den Symmetrieebenen, so sind beide nach (a) Hauptachsen für O , somit die dritte Hauptachse senkrecht zu diesen beiden, d. h. diese dritte Hauptachse für den Punkt O ist die Durchschnittslinie der beiden Symmetrieebenen. Da nun zufolge des Lehrsatzes (e) auf S. 471 eine jede solche Achse auch den Schwerpunkt S des

Körpers enthalten muss, so ist diese Achse auch eine Hauptcentralachse des Körpers.

c) Sind im letzteren Falle die Symmetrieebenen zudem nicht senkrecht zu einander, so ist für jeden Punkt O der Durchschnittslinie, wenn die letztere zur z -Achse eines orthogonalen Achsensystems gewählt wird, $J_x = J_y$, und alle zu dieser Durchschnittslinie senkrechten durchgeführten Achsen sind Hauptachsen für den Punkt O . Denn da die durch O zu den Symmetrieebenen geführten Normalen nach (a) Hauptachsen für den Punkt O sind und nicht aufeinander senkrecht stehen, so muss das Trägheitsellipsoid E des Punktes O zwei zu diesen Normalen übereinstimmende, in der xy -Ebene gelegene, nicht aufeinander senkrechte Achsen besitzen, was offenbar nur dann möglich ist, wenn E ein Rotationsellipsoid ist, dessen Äquatorialene die xy -Ebene ist, also wenn der auf S. 570 behandelte Fall eintritt, in welchem $J_x = J_y$ ist. Demgemäß muss in diesem Falle auch das Centralellipsoid, dessen Mittelpunkt der in der z -Achse gelegene Schwerpunkt S ist, ein Rotationsellipsoid sein, dessen geometrische Achse die z -Achse ist, bezüglich welcher kinetische Symmetrie besteht.

d) Kann ein Körper aus unendlich dünnen, parallelen ebenen Platten bestehend gedacht werden, deren Schwerpunkte durchwegs derselben, zu den Ebenen der Platten senkrechten Geraden, die die z -Achse gewählt sei, gelegen sind, so ist diese Achse eine Hauptcentralachse des Körpers, d. i. eine Achse des Centralellipsoids; denn setzt man die x - und y -Achse des rechtwinkligen Achsensystems xyz durch den Schwerpunkt S des Körpers, der nach dem Satze c) auf S. 470 in der z -Achse gelegen ist, und bezieht sich z_n auf irgend eine dieser Platten, deren Schwerpunkt S_n dann die Coordinaten $X_n = 0, Y_n = 0, Z_n = z_n$ hat, so ist für eine solche Platte, deren Masse M_n sei, $\sum m x z_n = z_n \cdot \sum m x = z_n \cdot M_n X_n = z_n M_n \cdot 0 = 0$ und $\sum m y z_n = z_n \cdot \sum m y = z_n \cdot M_n Y_n = 0$, daher auch die Gesamtsumme $\sum m x z = 0, \sum m y z = 0$, sonach ist die z -Achse eine Hauptachse für den Schwerpunkt S .

e) Ist die Masse eines Körpers symmetrisch vertheilt bezüglich der Achse (der z -Achse), so ist diese eine Schwerpunkthauptachse, was eine unmittelbare Folgerung des Lehrsatzes d) ist.

f) Enthält eine der Hauptachsen (z -Achse) eines Punktes O den Schwerpunkt S des Körpers, so ist diese Achse auch eine Schwerpunkthauptachse, und die beiden anderen Hauptcentralachsen sind den beiden anderen Hauptachsen (x und y) des Punktes O parallel und umgekehrt: Jede Hauptcentralachse ist auch eine Trägheitshauptachse für jeden in derselben gelegenen Punkt O u. w. Nimmt man nämlich die zu der x - und y -Achse durch S parallel geführten Achsen als die x' - und y' -Achsen eines zweiten

orthogonalen Coordinatensystems $x'y'z'$ an und bezeichnet durch XYZ die Schwerpunktscoordinaten bezüglich des xyz -Systems, so ist zufolge der Annahme $X=0$ und $Y=0$, und für einen beliebigen Massenpunkt m des Körpers ist $x = x' + X = x'$, $y = y' + Y = y'$, $z = z' + Z$, daher

$$\begin{aligned}\Sigma m x z &= \Sigma m x (z' + Z) = \Sigma m x' z' + Z \cdot \Sigma m x = \Sigma m x' z' + Z \cdot M X \\ \Sigma m y z &= \Sigma m y (z' + Z) = \Sigma m y' z' + Z \cdot \Sigma m y = \Sigma m y' z' + Z \cdot M Y,\end{aligned}$$

so dass, da $X=0$ und $Y=0$ ist, $\Sigma m x z = \Sigma m x' z'$, $\Sigma m y z = \Sigma m y' z'$ und $\Sigma m x y = \Sigma m x' y'$ ist, also das Verschwinden der rechten, bezw. der linken Glieder dieser letzten drei Gleichungen zugleich das Verschwinden der linken, bezw. rechten Glieder zur Folge hat, wodurch der Satz und dessen Umkehrung bewiesen ist.

Auf dieselbe Weise lässt sich nachweisen, dass jede zu einer Hauptcentralachse parallele Achse a eine Hauptachse für jenen Punkt ist, in welchem die zu diesen Achsen senkrechte Schwerebene die Achse a schneidet u. s. w.

Anmerkung. Um zu erkennen, ob eine Achse des Körpers eine Hauptachse für irgend einen ihrer Punkte ist, wähle man diese Achse zur z -Achse und einen beliebigen Punkt O derselben zum Anfangspunkte eines orthogonalen Achsensystems und untersuche, ob die Ausdrücke $\frac{\Sigma m z x}{M \xi}$ und $\frac{\Sigma m y z}{M \eta}$ (wo ξ und η die Schwerpunktscoordinaten sind) denselben Wert haben, der durch c bezeichnet sei. Ist dies der Fall, so ist die Achse eine Hauptachse für den Punkt (o, o, c) . Denn wählt man ein dem früheren paralleles Achsensystem $x'y'z'$, dessen Anfangspunkt der letztere Punkt (o, o, c) ist, so ist für dasselbe, da $x = x'$, $y = y'$, $z = z' + c$, ferner $\Sigma m z x = M \xi c$, $\Sigma m y z = M \eta c$, $\Sigma m x = M \xi$, $\Sigma m y = M \eta$ ist,

$$\begin{aligned}\Sigma (m x' z') &= \Sigma m x (z - c) = \Sigma (m x z) - c \Sigma m x = M \xi c - c \cdot M \xi = 0 \\ \Sigma (m y' z') &= \Sigma m y (z - c) = \Sigma (m y z) - c \Sigma m y = M \eta c - c \cdot M \eta = 0.\end{aligned}$$

Zur graphischen Bestimmung der Trägheitshauptachsen für alle Raumpunkte A , wenn die Hauptcentralachsen (Schwerpunktschwerachsen) und die Hauptträgheitsmomente für den Schwerpunkt S , also auch das Poinsot'sche Centralellipsoid E bekannt sind, bedient man sich mit Vortheil der dem Poinsot'schen Centralellipsoid E reciproken Fläche C , die gleichfalls ein Ellipsoid ist (welches mitunter, so z. B. von W. Thomson (Lord Kelvin) und Tait in deren berühmtem Werke „Treatise on natural Philosophy, 1867“ im Gegensatze zu Poinsot's Bezeichnung das Centralellipsoid genannt wird). Man legt nämlich durch den Punkt A die drei diesem reciproken Centralellipsoid C confocalen Flächen zweiter Ordnung (ein Ellipsoid, ein einfaches [einfächliges] Hyperboloid und ein zweifächliges Hyperboloid) hindurch, und es stimmen dann die drei Trägheitshauptachsen des Punktes A mit den Normalen dieser drei confocalen Flächen überein. — Als die dem Centralellipsoid E reciproke Fläche C ist hier jene Fläche zu bezeichnen, für welche die tangierende Ebene für irgend einen Punkt derselben einen normalen Abstand SN vom Schwerpunkte S (dem Mittelpunkte des Centralellipsoids E) hat, der dem in derselben Senkrechten SN gelegenen Semidiameter (Radius) SM der Fläche E reciprok (invers) proportional ist, so zwar, dass das Product $\overline{SM} \cdot \overline{SN}$ den früher betrachteten constanten

Wert ε^2 hat, oder nach Gleichung (4) auf S. 568 \overline{SN} dem Trägheitshalbmesser ϱ in Bezug auf diese Achse SNM gleich ist. Es lässt sich nun zeigen, dass diese dem Centralellipsoid E reciproke Fläche C ein Ellipsoid von denselben Achsenrichtungen ist, dessen Halbachsen den Trägheitsradien in Bezug auf diese Hauptcentralachsen gleichkommen, so dass, wenn man diese Achsen zu Coordinatenachsen wählt, die Gleichung des reciproken Centralellipsoids $\frac{x^2}{\varrho_x^2} + \frac{y^2}{\varrho_y^2} + \frac{z^2}{\varrho_z^2} = 1$ ist, während zufolge Gleichung (6) auf S. 570 Poinso't's Centralellipsoid E die Gleichung $\varepsilon^2 = \varrho_x^2 \cdot x^2 + \varrho_y^2 \cdot y^2 + \varrho_z^2 \cdot z^2$ hat. Ebenso entspricht jedem Binet'schen Trägheitsellipsoid (vergl. Anm. auf S. 569) ein reciprokes Trägheitsellipsoid von ähnlichen Eigenschaften. — Der Nachweis dieser Behauptungen und die nähere Erörterung der interessanten Anwendungen dieser Flächen zur Bestimmung der Achsen gleichen Trägheitsmoments u. s. w. fällt außerhalb des Rahmens dieses Lehrbuches.

g) Ist O ein fixer Punkt einer Achse der (z -Achse), um welche eine Rotation des starren Körpers stattfindet, so verschwindet — und zwar nur dann — der kinetische Druck auf einen jeden beliebigen anderen Punkt O' dieser Achse, wenn diese Achse eine Trägheitshauptachse für den fixen Punkt O ist.

Nach Gleichung (4), S. 551, ist nämlich die X -Komponente des kinetischen Druckes im Punkte O' durch $w^2 \cdot \frac{\Sigma(mzx)}{d} + \gamma \cdot \frac{\Sigma(myz)}{d}$ und die Y -Komponente desselben durch $w^2 \cdot \frac{\Sigma(myz)}{d} - \gamma \cdot \frac{\Sigma(mzx)}{d}$

bestimmt. Soll demnach der kinetische Druck auf den Punkt O' , somit auch eine jede dieser beiden Componenten verschwinden, so muss diesen Werten entsprechend entweder die Winkelgeschwindigkeit $w = 0$ und zugleich die Winkelbeschleunigung $\gamma = 0$ sein, d. h. der Körper dauernd in Ruhe verbleiben — ein Fall, der hier ausgeschlossen ist — oder aber, was hier angenommen werden muss, $\Sigma(mzx) = 0$ und $\Sigma(myz) = 0$ werden, also die z -Achse eine Hauptachse für den fixen Punkt O sein — und umgekehrt.

Ist überdies auch der statische Druck auf den Punkt O' Null, sonach den Gleichungen (4), S. 551, oder den Gleichungen (6), S. 459, gemäß $M_y = 0$ und $M_x = 0$, lässt sich mit anderen Worten das ganze äußere Kräftesystem auf eine Reductionsresultante R , deren Angriffspunkt O ist, und ein Kräftepaar M_x , dessen Ebene zur Rotationsachse senkrecht steht, reducieren, worunter auch die drei Fälle: a) $R = 0$, d. i. die Reduction auf das letztgenannte Kräftepaar und b) $M_x = 0$, d. i. das Bestehen einer Resultanten mit dem Angriffspunkte O und auch der Fall c) $M_x = 0$ und $R = 0$, d. h. das Stattfinden des Gleichgewichtes mit einbegriffen sind, so herrscht überhaupt gar kein Druck auf irgend einen Punkt O' der Rotationsachse — mit Ausnahme des fixen Punktes O — demnach auch kein Gegen-
druck von Seite des Zapfenlagers an dieser Stelle O' , so dass dieses

auch ganz entfernt werden könnte, ohne dass die Rotationsachse dadurch aufhört, eine fixe Achse zu sein, ohne dass also bei der Rotation um die nun frei bewegliche Achse die räumliche Lage und die relative Lage dieser Achse im Körper sich irgendwie ändert, wofür nur der Punkt O festgehalten wird. Wegen dieser Eigenschaft bezeichnet man die Trägheitshauptachsen des Punktes O auch als die permanenten Rotationsachsen für diesen Punkt O .

Dass in dem hier besprochenen Falle der Gleichung (5), S. 553, gemäß $\gamma = \frac{M_x}{J_z}$ ist, und dass daher, falls stetig $M_x = 0$ ist, also falls etwa die äußeren Kräfte sich das Gleichgewicht halten, oder aber falls die äußeren Kräfte sich auf die im fixen Punkte O angreifende Resultante R reducieren lassen, die einmal irgendwie eingeleitete Rotation um die Hauptachse des Punktes O gleichförmig ins Endlose vor sich geht, ohne dass die Lage der Achse sich ändert, bedarf nicht weiter auseinandergesetzt zu werden.

Unter der Voraussetzung, dass in den Gleichungen (6), S. 555, $\mu_x = 0$, $\mu_y = 0$ und $\Sigma \Pi_x = 0$ ist, und das ferner die z -Achse eine Hauptachse für den Punkt O ist, findet — diesen Gleichungen (6) zufolge — auch kein Stoßimpuls auf den Punkt O statt, wenn sich auch die Winkelgeschwindigkeit w des um die z -Achse rotierenden Körpers in dem ungemein kleinen Zeitelemente Δt um den beliebig großen Wert Δw ändert. Ist nur ein einziger äußerer Impuls Π vorhanden, so muss dieser in der durch O senkrecht zur Rotationsachse hindurchgelegten xy -Ebene wirken, da offenbar nur in diesem Falle Π_x und die Momente μ_x und μ_y dieses Impulses verschwinden. Ist μ_x dessen Moment bezüglich des Punktes O , so ist der letzten Gleichung (6), S. 555, gemäß $\Delta w = \frac{\mu_x}{J_z}$.

Soll in diesem Falle auch kein Stoßimpuls im Punkte O erfolgen, so müssen auch noch in den Gleichungen (6), S. 555, $\Pi_x^{(0)} = 0$ und $\Pi_y^{(0)} = 0$ sein; wählt man nun die y -Achse — einen einzigen Impuls Π vorausgesetzt — parallel und gleichgerichtet mit diesem Impulse Π , so ist $\Pi_x = 0$, $\Pi_y = \Pi$, $\Pi_z = 0$ zu setzen, so dass demnach den genannten Gleichungen gemäß $\Pi_x^{(0)} = \Delta w \cdot M \eta = 0$ und $\Pi_y^{(0)} = \Pi - \Delta w \cdot M \xi = 0$, also $\eta = 0$ und $\Pi = M \xi \cdot \Delta w$ sein muss. Bezeichnet man die Abscisse des Punktes A , in welchem die Richtungslinie des Impulses Π die x -Achse trifft, durch l_x (die Entfernung dieser Richtungslinie vom Punkte O), so ist offenbar $\mu_x = l_x \cdot \Pi$, also $\Delta w = \frac{\mu_x}{J_z} = \frac{l_x \Pi}{J_z}$, sonach $\Pi = M \xi \cdot \Delta w = \frac{J_z}{l_x} \cdot \Delta w$,

oder für jeden Wert des Π muss dann $l_x = \frac{J_z}{M \xi}$ sein. Den durch diese Coordinaten $(l_x, 0, 0)$ bestimmten Punkt A bezeichnet man als den Mittelpunkt des Stoßes für die z -Achse. Jeder auf diesen Punkt A einwirkende, zur y -Achse parallele Impuls Π ist ohne jeglichen Einfluss auf die Rotationsachse, die dadurch in keiner Weise erschüttert wird. Der Mittelpunkt des Stoßes liegt also einerseits zufolge $\mu_x = \mu_y = \Pi_x = 0$ in der xy -Ebene, d. i. in der durch jenen Punkt der Drehachse, für welchen dieselbe eine Hauptachse ist (vergl. Anm. auf S. 574), zur Drehachse normal gelegten Ebene, als auch andererseits (der Gleichung $\eta = 0$ entsprechend) in der durch die Drehachse gelegten Schwerenebene, und zwar, da ξ und l_x gleichbezeichnet sind, mit dem Schwerpunkte auf derselben Seite der Drehachse. Sein Abstand

in der Drehachse $l_z = (J_z : M\xi)$ ist der reducierten Länge des Körpers Bezug auf diese Achse gleich, demnach größer als der Schwerpunktsstand. Die Richtung des Impulses Π , der, wie groß derselbe auch sein mag, keine Schütterung zur Folge hat, muss zu der oberwähnten Schwerebene senkrecht sein.

Anmerkung 1. Es ist klar, dass $X_{o'}$ und $Y_{o'}$ zufolge der Gleichungen (4), 551 auch dann Null werden können, wenn weder der statische, noch der kinetische Druck auf den Punkt O' für sich verschwindet, wohl aber die Summe der Komponenten beider und ebenso die Summe der beiden Y -Komponenten.

h) Ist die Achse eines rotierenden starren Körpers eine der drei Hauptcentralachsen desselben, so findet — und zwar nur in diesem Falle — kein kinetischer Druck auf irgend einen Punkt dieser Achse statt.

Der kinetische Druck auf den Punkt O der Rotationsachse (Achse) hat nämlich — den Gleichungen (4), S. 551, zufolge — zur X -Komponente $w^2 \left[M\xi - \frac{\Sigma(mzx)}{d} \right] + \gamma \left[M\eta - \frac{\Sigma(myz)}{d} \right]$ und zur Y -Komponente $w^2 \left[M\eta - \frac{\Sigma(myz)}{d} \right] - \gamma \left[M\xi - \frac{\Sigma(mzx)}{d} \right]$.

Soll sonach nicht nur kein kinetischer Druck auf den Punkt O' vorhanden sein, so dass nach (g) $\Sigma(mzx) = 0$ und $\Sigma(myz) = 0$, also die Rotationsachse eine Hauptachse für den Punkt O ist, sondern soll auch der Punkt O keinen kinetischen Druck erfahren, so muss den obangeführten Werten für die X - und Y -Komponente gemäß $w^2 M\xi + \gamma M\eta = 0$ und $w^2 M\eta - \gamma M\xi = 0$ sein, was, da die Winkelgeschwindigkeit w^2 jedenfalls von Null verschieden ist, dann, aber auch nur dann der Fall sein kann, wenn $\xi = 0$ und $\eta = 0$ ist, also wenn der Schwerpunkt S des Körpers in der z -Achse, d. i. in der Rotationsachse liegt, so — zufolge (f) — wenn die Rotationsachse eine Hauptcentralachse ist. Eine Achse, die während einer Rotation um dieselbe Achse keinen kinetischen Druck erfährt, wird eine freie Achse (natürliche Achse) des Körpers genannt. Es sind demnach die drei Hauptachsen eines Körpers identisch mit den Hauptcentralachsen, d. i. mit den Hauptachsen des Centralellipsoids, und es hat demgemäß jeder Körper mindestens drei aufeinander senkrechte, im Schwerpunkt sich schneidende freie Achsen.

Soll nun außerdem sowohl der statische Druck auf O' , als auch der statische Druck auf O verschwinden, so dass die Achse überhaupt keinen Druck erfährt, so muss nicht nur wie in (g) $M_x = 0$ und $M_y = 0$, sondern, wie die Gleichungen (4) auf S. 551 oder die Gleichungen (6) auf S. 459 lehren, überdies $R_x = \Sigma P_x = 0$, $R_y = \Sigma P_y = 0$ und $R_z = \Sigma P_z = 0$ sein, d. h. das ganze Kräftesystem der einwirkenden äußeren Kräfte muss sich entweder a) auf ein Kräftepaar $M_x = M$, dessen Ebene zur Rotationsachse senkrecht steht, reducieren, oder es muss b) sich $M = M_x = 0$ sein, d. h. es müssen die äußeren Kräfte sich das Gleich-

gewicht halten oder überhaupt keine äußeren Kräfte vorhanden sein. Im ersten Falle *a*) rotiert der Körper um die z -Achse mit der Winkelbeschleunigung $\gamma = M_z : J_z$, im zweiten Falle *b*) aber ist $\gamma = 0$, d. h. die eingeleitete Rotation bleibt stets gleichförmig, ohne dass in diesen Fällen ein Druck oder Zug auf die — mit einer der Schwerpunktsachsen übereinstimmende — Rotationsachse stattfindet, so dass die Rotationsachse stets die gleiche Lage im Körper und im Raume auch dann beibehält, wenn sie vollkommen frei ist.

Anmerkung 2. Befindet sich z. B. blos ein aus zwei materiellen Punkten, deren Massen m_1 und m_2 sind, bestehendes starres Punktsystem, auf welches keine äußeren Kräfte einwirken, in gleichförmiger Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit w um irgend eine zu $m_1 m_2$ im Massenmittelpunkte senkrechte Achse, die offenbar eine Hauptcentralachse ist, so dass die Entfernungen r_1, r_2 der beiden Punkte m_1, m_2 von dem gemeinsamen Mittelpunkte ihrer Kreisbahnen, da der letztere der Massenmittelpunkt ist (siehe S. 331) der Gleichung $m_1 r_1 = m_2 r_2$ genügen, so sind die zur Erhaltung der gleichförmigen Bewegungen der beiden Punkte in den entsprechenden Kreisbahnen nothwendigen Centripetalkräfte $m_1 r_1 w^2$ und $m_2 r_2 w^2$ einander gleich, und zwar werden diese Kräfte als innere Kräfte lediglich hervorgerufen durch die gegenseitige Anziehung der beiden Massen m_1 und m_2 , die eine Zugspannung $P_c = m_1 r_1 w^2 = m_2 r_2 w^2$ zur Folge hat. — Würden aber etwa in den beiden Punkten m_1 und m_2 in centripetaler Richtung gewisse äußere, sich das Gleichgewicht haltende Kräfte P und $-P$ thätig und etwa $P > P_c$ sein, so würde eine Druckspannung p von der Größe $p = P - P_c$ durch die Abstoßung der beiden Punkte hervorgerufen werden, so dass aus den äußeren Kräften $P, -P$ und den inneren Kräften $p, -p$ wieder die früheren Centripetalkräfte $P_c = m_1 r_1 w^2 = m_2 r_2 w^2$ resultieren würden.

Anmerkung 3. Zur Vermeidung eines jeden Druckes auf die Rotationsachse ist es nicht geradezu nothwendig, dass — wie im Falle (*h*) — der statische und der kinetische Druck beide einzeln für sich verschwinden, sondern es kann den Gleichungen $X_o' = 0, Y_o' = 0, X_o = 0, Y_o = 0, \Sigma P_z = 0$ (siehe Gleichungen 4, S. 551) noch in vielen anderen Fällen genügt werden, auch wenn die z -Achse keine Hauptcentralachse ist.

Anmerkung 4. Unter (*g*) wurde nachgewiesen, dass in dem Falle keine Erschütterung der Achse stattfindet, wenn ein Körper um eine Hauptachse (z -Achse) eines fixen Punktes O dieser Achse rotiert und ein Stoßimpuls in der durch O senkrecht zur Drehachse gelegten Ebene auf den früher bestimmten Mittelpunkt des Stoßes in einer Richtung (y -Richtung) einwirkt, die auf der den Schwerpunkt und die Drehachse enthaltenden Ebene senkrecht steht. Wie nun leicht aus den Gleichungen (6) auf S. 555 zu ersehen ist, wird auch dann $H_x^{(o')} = 0, H_y^{(o')} = 0, H_z^{(o')} = 0$ u. s. w., wenn die Coordinaten abc des Angriffspunktes A des zur y -Achse parallel wirkenden Stoßimpulses den Gleichungen genügen: $a = \frac{J_z}{M \xi}$, $c = \frac{\Sigma m z x}{M \xi}$, und wenn außerdem $\eta = 0$ und das Deviationsmoment $\Sigma m y z = 0$ ist.

Dieser scheinbar allgemeinere Fall unterscheidet sich jedoch von dem unter *g*) behandelten nicht, denn wählt man die orthogonale Projection des Punktes A auf die Drehachse zum Coordinatenanfangspunkte O , so wird $z = 0$, also auch $\Sigma (m z x) = 0$, so dass dann in der That, wie früher, die z -Achse eine Hauptachse für O ist und $\left(\frac{J_z}{M \xi}, 0, 0 \right)$ die Coordinaten des Stoßmittelpunktes sind.

Den früheren Gleichungen entsprechend ergibt sich, wie eine einfache Schlussfolgerung zeigt, in die hier nicht eingegangen werden soll, für eine jede Stoßrichtung im allgemeinen eine bestimmte, in der zur Stoßrichtung senkrechten Schwerebene E des Körpers gelegene z -Richtung für die Rotationsachse — und umgekehrt — und je nach der Wahl der in dieser Ebene E gelegenen, zur letzteren z -Richtung parallelen Drehachse auch ein bestimmter Punkt A , in welchem die Richtungslinie des zu dieser Ebene senkrechten Stoßes diese Ebene schneiden muss, wenn auf die Achse kein Stoßimpuls einwirken soll. Je nach der beliebigen Intensität Π des Stoßes richtet sich dann die Winkelgeschwindigkeitsänderung $\Delta \omega = \Pi : M \xi$.

Wie sich ferner leicht zeigen lässt, liegen die orthogonalen Projectionen O der Stoßmittelpunkte A auf die Rotationsachse z (für welche Punkte O dieselbe eine Trägheitshauptachse ist) bei gegebener Stoßrichtung y (welcher dann eine bestimmte Richtung der Rotationsachse z entspricht) in einer gleichseitigen Hyperbel, deren Ebene die zur Stoßrichtung y senkrechte Schwerebene E ist, deren Mittelpunkt ferner der Schwerpunkt ist, und deren Asymptoten die zur z -Richtung parallele und die zu derselben und zu der Stoßrichtung senkrechte Schwerachse sind, während der geometrische Ort der Punkte A eine bestimmte Gerade der Ebene E ist.

§ 95. Trägheitsmomente, Deviationsmomente und Trägheitshauptachsen ebener Linien und ebener Flächen im allgemeinen.

Es sei die Ebene einer beliebigen ebenen materiellen Linie, bezw. einer ebenen materiellen Fläche zur xy -Ebene eines orthogonalen Achsensystems gewählt, dessen Anfangspunkt O ein beliebiger Punkt dieser Ebene ist; es ist dann für jeden materiellen Punkt m derselben $z = 0$.

Die Gleichungen (2) auf S. 561 lehren, dass dann $J_x = \Sigma (m y^2)$, $J_y = \Sigma (m x^2)$ und $J_z = \Sigma m (x^2 + y^2) = \Sigma (m x^2) + \Sigma (m y^2)$, also stets

$$J_z = J_x + J_y \dots (1)$$

ist. Für jeden Punkt O der ebenen Fläche (Linie) ist demnach das Trägheitsmoment J_z bezüglich einer in diesem Punkte O zur Ebene normalen Achse oder, was hier offenbar auf das Gleiche hinauskommt, das polare Trägheitsmoment gleich der Summe der Trägheitsmomente in Bezug auf zwei durch den Pol O in der Ebene beliebig geführte orthogonale Achsen, sonach die letztere Summe, so lange der Punkt O und die z -Achse sich nicht ändern, von der Lage des rechtwinkligen Achsensystems unabhängig, was jedoch für das Deviationsmoment $D_z = \Sigma (m x y)$ nicht der Fall ist.

Ist die materielle Linie eine homogene, so ist (siehe S. 481) $m = \mu_l \cdot l$ und $M = \mu_l \cdot L$, wo μ_l die constante lineare Dichtigkeit und l und L die den Massen m und M zugehörigen Längen bedeuten; es ist demnach allgemein, wenn das Massenelement m als unendlich klein vorausgesetzt und sein Abstand von der beliebigen Achse a durch r bezeichnet wird, $J_a = \Sigma (m r^2) = \Sigma (\mu_l \cdot l r^2) = \mu_l \cdot \Sigma (l r^2)$, somit

auch, wenn $m = dM$ das im Längenelemente $l = ds$ enthaltene Massenelement und M die gesammte Masse bedeutet, $dM = \mu_l \cdot ds$ und

$$J_a = \int_0^M r^2 dM = \mu_l \cdot \int_0^L r^2 \cdot ds$$

und den obigen Gleichungen zufolge

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \int_0^M y^2 \cdot dM = \int_0^L y^2 \cdot \mu_l \cdot ds = \mu_l \cdot \int_0^L y^2 ds \\ J_y &= \int_0^M x^2 \cdot dM = \int_0^L x^2 \cdot \mu_l \cdot ds = \mu_l \cdot \int_0^L x^2 ds \\ J_z &= J_x + J_y = \mu_l \cdot \int_0^L (x^2 + y^2) \cdot ds \end{aligned} \right\} (2)$$

wo $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$ zu setzen ist. Ist die Gleichung der Linie $y = f(x)$ gegeben, so können durch Ausführung der angedeuteten Integrationen die Trägheitsmomente J_x, J_y, J_z berechnet werden.

Ist das Trägheitsmoment einer ebenen homogenen materiellen Fläche F bezüglich irgend einer Achse zu berechnen, so hat man in den früheren allgemeinen Gleichungen (siehe S. 485) $m = \mu_f \cdot f$, $M = \mu_f \cdot F$ und $dM = \mu_f \cdot dF$ zu setzen, wo μ_f die in der Flächeneinheit enthaltene (specifische) Masse (die constante Flächendichtigkeit) und m , bzw. dM die in dem Flächenelemente f , bzw. dF und M die in der ganzen Fläche F enthaltene Masse bedeutet. Demgemäß ist

$$\left. \begin{aligned} J_a &= \int_0^M r^2 dM = \int_0^F r^2 \cdot \mu_f \cdot dF = \mu_f \cdot \int_0^F r^2 dF \\ J_x &= \int_0^M y^2 \cdot dM = \int_0^F y^2 \cdot \mu_f \cdot dF = \mu_f \cdot \int_0^F y^2 dF \\ J_y &= \int_0^M x^2 dM = \int_0^F x^2 \cdot \mu_f \cdot dF = \mu_f \cdot \int_0^F x^2 dF \\ J_z &= J_x + J_y = \mu_f \cdot \int_0^F (x^2 + y^2) dF \end{aligned} \right\} (3)$$

u. s. w. Die in diesen Gleichungen vorkommenden, den Trägheitsmomenten der Massen völlig analogen Ausdrücke $\int_0^F r^2 dF, \int_0^F y^2 dF, \int_0^F x^2 dF$ u. s. w., die sich von den ersteren nur dadurch unterscheiden, dass in denselben überall die Massen durch die entsprechenden Flächen

ersetzt sind, spielen in der Hydrostatik, der Elasticitätslehre u. s. w. eine wichtige Rolle; dieselben seien als Trägheitsmomente der entsprechenden geometrischen Flächen oder kurzweg als die geometrischen Trägheitsmomente bezeichnet, und zum Unterschiede von den Trägheitsmomenten J der Massen diene künftighin stets zur Bezeichnung der Trägheitsmomente der Flächen das

Zeichen i , so dass $i_a = \Sigma (f r^2) = \int_0^F r^2 dF$, $i_x = \int_0^F y^2 dF$, $i_y = \int_0^F x^2 dF$

u. s. w., also nach (3) $J = \mu_f \cdot i$, $J_x = \mu_f \cdot i_x$, $J_y = \mu_f \cdot i_y$ u. s. w. ist, d. h. man bestimmt aus den Trägheitsmomenten J der Massen die entsprechenden geometrischen Trägheitsmomente i der Flächen, indem man die ersteren durch μ_f dividiert. Es sind demnach die Zahlwerte von J und i identisch, wofern $\mu_f = 1$ ist, also wofern vorausgesetzt wird, dass in jeder Flächeneinheit der homogenen materiellen Fläche die Masseneinheit enthalten ist. Dividiert man die bisherigen Gleichungen $J_z = J_x + J_y$, $J_a = J_s + M \cdot s_a^2$, $J = M Q^2$ (siehe S. 561 u. s. w.), welche bekannte Gesetze ausdrücken, durch μ_f , oder setzt, was auf dasselbe hinauskommt, $\mu_f = 1$, so gelangt man zu den analogen Gleichungen und Gesetzen $i_z = i_x + i_y$, $i_a = i_s + F \cdot s_a^2$, $i = F Q^2$ u. s. w., in welchem nur alle J durch i und alle Massen M durch die Flächen F ersetzt sind.

Der Definition $i = \Sigma (f r^2)$ des geometrischen Trägheitsmomentes i einer Fläche gemäß ist die Dimension desselben $[i] = [f] \cdot l^2 = l^2 \cdot l^2 = l^4$, d. h. es ist dasselbe in Bezug auf die Längengrößen von der vierten Dimension.

Da für alle materiellen Punkte m einer in der xy -Ebene gelegenen materiellen ebenen Fläche, bezw. ebenen Linie, $z = 0$ ist, so ist $\Sigma m z x = 0$, $\Sigma m y z = 0$, d. h. es ist die z -Achse eine Trägheitshauptachse für den beliebig in der xy -Ebene gewählten Coordinatenanfangspunkt O ; es ist sonach für jeden Punkt der Ebene einer beliebigen ebenen materiellen Linie oder ebenen materiellen Fläche die in diesem Punkte zur Ebene geführte Normale eine Trägheitshauptachse der Linie beziehungsweise der Fläche für diesen Punkt.

Bezeichnet man durch c die in die z -Achse fallende Halbachse des Trägheitsellipsoids des Punktes O und durch a und b die beiden anderen Halbachsen desselben, in deren Richtung die x - und y -Achse angenommen werden möge, so ist, da $J_z = J_x + J_y$ und zufolge Gleichung (4) auf S. 568 $J_z = \frac{M c^4}{c^2}$, $J_x = \frac{M a^4}{a^2}$, $J_y = \frac{M b^4}{b^2}$ ist, für jeden Punkt O der Ebene der Fläche, bezw. Linie

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \dots (4)$$

es ist demnach c abhängig von a und b , und da nach (4) $c < a$ und $c < b$ ist, so ist stets die zur Ebene der Fläche senkrechte Achse c die kleinste Achse des Trägheitsellipsoids.

Es ist ferner bei dieser Wahl der Coordinatenachsen nach Gleichung (6) auf S. 570, da $J_z = J_x + J_y$ ist, für eine beliebige durch O gelegte Achse a , deren Richtungswinkel $\alpha\beta\gamma$ sind, auch $J_a = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + (J_x + J_y) \cos^2 \gamma = J_x (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma) + J_y (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$ oder, da $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ ist, auch

$$J_a = J_x \cdot \sin^2 \beta + J_y \cdot \sin^2 \alpha \text{ und } i_a = i_x \sin^2 \beta + i_y \sin^2 \alpha \quad (5)$$

Wird die Achse a in der Ebene der materiellen Fläche, bezw. Linie, angenommen, so ist offenbar $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, also $\sin \beta = \cos \alpha$, somit

$$\left. \begin{aligned} J_a &= J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \sin^2 \alpha \\ i_a &= i_x \cdot \cos^2 \alpha + i_y \cdot \sin^2 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

so dass stets J_a zwischen J_x und J_y gelegen ist.

Dementsprechend ist die reducierte Länge l_a einer ebenen Fläche (Linie) bezüglich einer in der Ebene derselben im Abstände s_a vom Schwerpunkte gelegenen Achse a , wenn XY die in der Ebene der Fläche (Linie) gelegenen Hauptcentralachsen bezeichnen und ϱ_x, ϱ_y die entsprechenden Trägheitshalbmesser bedeuten, der Gleichung (8) auf S. 572 zufolge ausgedrückt durch

$$l_a = \frac{\varrho_x^2 \cos^2 (Xa) + \varrho_y^2 \sin^2 (Xa)}{s_a} + s_a \dots (7)$$

Projiziert man eine ebene Fläche F orthogonal auf eine zu irgend einer Raumachse z senkrechte Ebene — die xy -Ebene — so sind die Trägheitsradien ϱ_z und ϱ'_z der projizierten Fläche F' und ihrer Projection F'' bezüglich der z -Achse einander gleich, und ebenso auch die reducierten Längen l_z und l'_z . Denn es ist, wenn dF'' die Projection des Flächenelements dF , ferner $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ den Abstand der beiden Flächenelemente dF und dF'' von der z -Achse und α den Neigungswinkel der Fläche F

gegen die xy -Ebene bedeuten, $\varrho'_z{}^2 = \frac{i'_z}{F'} = \frac{fr^2 dF'}{F'} = \frac{fr^2 \cdot dF \cdot \cos \alpha}{F \cos \alpha} = \frac{fr^2 dF}{F} = \varrho_z^2$, also $\varrho_z = \varrho'_z$, ferner (s. § 81), wenn $(\xi \eta \zeta)$ und $(\xi' \eta' \zeta')$

die Coordinaten der Schwerpunkte S und S' der beiden Flächen F und F' bedeuten, $\xi' = \frac{fx \cdot dF'}{F'} = \frac{fx \cdot dF \cdot \cos \alpha}{F \cdot \cos \alpha} = \frac{fx dF}{F} = \xi$, $\eta' = \frac{fy dF'}{F'} = \frac{fy \cdot dF \cdot \cos \alpha}{F \cos \alpha} = \frac{fy dF}{F} = \eta$, d. h. es ist der Schwerpunkt S' die

orthogonale Projection des Schwerpunktes S auf die xy -Ebene, so dass S' und S dieselbe Entfernung s_z von der z -Achse haben, also auch $\frac{\varrho_z^2}{s_z} = \frac{\varrho'_z{}^2}{s_z}$, daher der Gleichung (6) auf S. 564 gemäß $l_z = l'_z$ ist.

Dieser Satz hat für Projectionen ebener Linien keine allgemeine Giltigkeit.

Da jede Ebene, welche durch eine in der xy -Ebene etwa sich vorfindende Symmetrieachse x der ebenen Fläche, bezw. Linie senkrecht zu der Ebene derselben geführt wird, eine Symmetrieebene derselben ist, so führt der Satz (a) auf S. 572 zu der Folgerung, dass auch jede in der Ebene der Fläche, bezw. Linie zur Symmetrieachse x senkrechte Gerade y eine Trägheitshauptachse für den Fußpunkt derselben ist.

Ist zudem $J_x = J_y$, so ist nach (1), (4) und (5)

$$\left. \begin{aligned} J_z &= 2 J_x \\ a^2 &= b^2 = 2 c^2 \\ J_a &= J_x (1 + \cos^2 \gamma) \end{aligned} \right\} (8)$$

Überdies haben die für diesen Fall im § 93 deducierten Folgerungen Giltigkeit.

Dieser letztere Fall trifft nach dem Satze c auf S. 573 unter anderem ein, wenn die Masse einer ebenen materiellen Fläche, bezw. Linie um zwei nicht aufeinander senkrechte, in der Ebene der Fläche gelegene Achsen symmetrisch angeordnet ist.

Anmerkung 1. Das Deviationsmoment Σmxy einer ebenen materiellen Fläche oder Linie, deren Ebene die xy -Ebene ist, lässt sich leicht durch die Hauptträgheitsmomente J_X und J_Y bezüglich der in der Ebene der Fläche liegenden Hauptcentralachsen X und Y ausdrücken, wenn die auf die Achsen x und y sich beziehenden Schwerpunkteordinaten ξ, η und die Richtungswinkel $(xX) = A, (xY) = \frac{\pi}{2} + A$ der Schwerpunkthauptachsen XY bekannt sind.

Wendet man nämlich die bekannten Transformationsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi + X \cos (xX) + Y \cos (xY) = \xi + X \cos A - Y \sin A \\ y &= \eta + X \sin (xX) + Y \sin (xY) = \eta + X \sin A + Y \cos A \end{aligned} \right\} (a)$$

an, in welchen XY die Coordinaten in Bezug auf die Hauptcentralachsen bedeuten, und berücksichtigt man, dass $\Sigma (mXY) = 0$ und dass ferner zufolge des bekannten Momentensatzes [S. 469, Gleichung (3)] $\Sigma (mX) = M \cdot 0 = 0$ und $\Sigma (mY) = M \cdot 0 = 0$ ist, so findet man, wenn man die Gleichungen (a) mit einander und hierauf mit m multipliciert und alle diese auf die einzelnen Punkte der Fläche sich beziehenden Producte addiert, dass

$$\Sigma (mxy) = M\xi\eta + \sin A \cos A [\Sigma (mX^2) - \Sigma (mY^2)] \dots (b)$$

ist. Da nun die Trägheitsmomente J_X und J_Y durch $J_Y = \Sigma (mX^2)$ und $J_X = \Sigma (mY^2)$ ausgedrückt sind, so ist $J_Y - J_X = \Sigma (mX^2) - \Sigma (mY^2)$, folglich zufolge (b)

$$\left. \begin{aligned} \Sigma (mxy) &= \int xy \cdot dM = M\xi\eta + \sin A \cos A (J_Y - J_X) \\ \Sigma (fxy) &= \int xy \cdot dF = F\xi\eta + \sin A \cos A (i_Y - i_X) \end{aligned} \right\} (c)$$

Die letzte Gleichung ergibt sich für homogene materielle Flächen durch Division der vorletzten Gleichung durch die Dichtigkeit (specifische Masse) μ_f der Fläche F .

Für ein zweites orthogonales Achsensystem $x'y'$ mit derselben x -Achse, dessen Anfangspunkt O' die Coordinaten $(a, 0)$ bezüglich des (xy) -Systems ist, und dessen y' -Achse mit der y -Achse gleichgerichtet ist, ist $x' = x - a$ und $y' = y$, daher

$$\Sigma(m x' y') = \Sigma[m(x - a)y] = \Sigma(mxy) - a \cdot \Sigma(my) = \Sigma(mxy) - a M \eta.$$

Es ist somit $\Sigma(m x' y') = 0$, wenn $a = \frac{\Sigma(mxy)}{M\eta}$ oder nach (c), wenn

$$a = \xi + \sin A \cos A \cdot \frac{J_Y - J_X}{M\eta} = \xi + \sin A \cos A \cdot \frac{\varrho_Y^2 - \varrho_X^2}{\eta} \dots (d)$$

ist, wo ϱ_Y und ϱ_X die Trägheitshalbmesser für die Achsen Y und X bedeuten, d. h. es ist eine jede in der Ebene der Fläche (Linie) beliebig gewählte x -Achse eine Trägheitshauptachse für jenen Punkt O' derselben, dessen Abscisse durch die Gleichung (d) bestimmt ist. Auch die im Punkte O' auf der x -Achse senkrechte y' -Achse ist offenbar für O' eine Hauptachse. Mit Hilfe des hier abgeleiteten Wertes von a ist es möglich, die Lage jenes Punktes A einer homogenen materiellen ebenen Fläche zu bestimmen, der bei einer Rotation um die beliebig gewählte x -Achse als Mittelpunkt des Stoßes fungiert. Man bezeichnet diesen Punkt A der ebenen Fläche F , da derselbe, wie in der Hydrostatik gezeigt werden wird, zugleich der Mittelpunkt jener parallelen Druckkräfte ist, mit welchen eine schwere incompressible Flüssigkeit auf die Elemente dieser in einer ebenen Gefäßwand gelegenen Fläche F wirkt (wofern nämlich die x -Achse jene Gerade ist, in welcher die Oberfläche der Flüssigkeit die Ebene der Gefäßwand schneidet) als den Druckmittelpunkt der Fläche F für die x -Achse. Da der Punkt A , wie auf S. 576 bewiesen wurde, in der durch den Schwerpunkt S der Fläche und die betreffende Achse (hier die x -Achse) gelegten Ebene auf derselben Seite der x -Achse, auf welcher der Schwerpunkt S sich befindet, gelegen ist, da ferner die orthogonale Projection desselben auf diese Achse jener durch (d) bestimmte Punkt O' sein muss, für welchen diese Achse x (sowie y') eine Hauptachse der Fläche F ist, und da schließlich die Entfernung b dieses Punktes A von der x -Achse der durch die Gleichung (7) bestimmten reducierten Länge l_x der Fläche F für diese Achse x gleich sein muss, so sind die Coordinaten ab des Druckmittelpunktes A bezüglich des Achsensystems xy (für welches $s_a = s_x = \eta$ zu setzen ist), bestimmt durch

$$\left. \begin{aligned} a &= \xi + \sin A \cos A \frac{\varrho_Y^2 - \varrho_X^2}{\eta} \\ b &= l_x = \eta + \frac{\varrho_X^2 \cos^2 A + \varrho_Y^2 \sin^2 A}{\eta} \end{aligned} \right\} (e)$$

Die Entfernung d des Druckmittelpunktes von dem Schwerpunkte S der Fläche ist diesen Gleichungen zufolge gegeben durch

$$d^2 = (a - \xi)^2 + (b - \eta)^2 = \frac{\varrho_X^4 \cos^2 A + \varrho_Y^4 \sin^2 A}{\eta^2} \quad (f)$$

Diese Gleichung lehrt, dass, je größer die Entfernung η des Schwerpunktes S von der x -Achse wird, desto weniger d sich von Null unterscheidet, und dass, wenn η unendlich groß wird, die Entfernung d Null wird, d. h. dass für eine jede unendlich entfernte Achse der Druckmittelpunkt mit dem Schwerpunkte identisch ist.

Anmerkung 2. Die Schwerpunkthauptachsen einer gegebenen homogenen ebenen materiellen Fläche F (bezw. einer ebenen homogenen materiellen Linie L)

können dann, wenn die Fläche F (Linie L) einen Durchmesser — die Y -Achse — besitzt, der alle zu einer zweiten Schwerachse — der X -Achse — parallelen Sehnen der Fläche F (Linie L) halbiert, oder wenn überhaupt $\Sigma(mXY) = 0$ ist, leicht bestimmt werden mit Zuhilfenahme des Binet'schen reciproken Central-Trägheitsellipsoids (siehe Anm. S. 575), das in unserem Falle, da $\varepsilon = 0$, also auch $\Sigma(m\varepsilon^2) = 0$ ist, offenbar in eine Ellipse e übergeht; es stimmen nämlich die beiden genannten — im allgemeinen schiefwinkligen — Achsen X und Y , wie aus der folgenden Untersuchung hervorgeht, überein mit den conjugierten Diametern $2A = 2\rho_X \sin(XY)$ und $2B = 2\rho_X \sin(XY)$ dieser mit Hilfe dieser Diameter leicht construierbaren reciproken Binet'schen Trägheitsellipse e , deren geometrische Hauptachsen bekanntlich die Hauptcentralachsen sind.

Es seien x und y die orthogonalen, in die Ebene der Fläche F (Linie L) fallenden Schwerpunktshauptachsen der letzteren, sonach der Koordinatenanfangspunkt O identisch mit dem Schwerpunkte. Da dem Begriffe der reciproken Binet'schen Trägheitsellipse e zufolge die in die x -Achse fallende Halbachse a der Ellipse e dem Trägheitsradius $\sqrt{\frac{\Sigma(mx^2)}{M}}$ der Fläche F in Bezug auf die y -Achse und ebenso die zweite Halbachse b dem Trägheitshalbmesser $\sqrt{\frac{\Sigma(my^2)}{M}}$ in Bezug auf die x -Achse gleichkommen muss, so ist

$$\Sigma(mx^2) = Ma^2, \Sigma(my^2) = Mb^2 \dots (a)$$

Sind nun $2A$ und $2B$ zwei beliebige conjugierte Diameter der Ellipse e , so ist für jenes Achsensystem, dessen Achsen X und Y mit diesen Diametern zusammenfallen, zunächst bekanntlich

$$tg(x, X) \cdot tg(x, Y) = -\frac{b^2}{a^2} \dots (b)$$

Aus den bekannten Transformationsgleichungen $x = X \cos(x, X) + Y \sin(x, Y)$, $y = X \sin(x, X) + Y \cos(x, Y)$ folgt:

$$\left. \begin{aligned} X \sin(X, Y) &= x \sin(x, Y) - y \cos(x, Y) \\ Y \sin(X, Y) &= y \cos(x, X) - x \sin(x, X) \end{aligned} \right\} (c)$$

Multipliziert man das Product dieser beiden Gleichungen mit der Masse m des dem Punkte (x, y) oder (X, Y) benachbarten unendlich kleinen Elements der homogenen materiellen Fläche F und bildet die Summe der allen den einzelnen Elementen der Fläche entsprechenden Ausdrücke, so findet man, wenn die Werte aus (a) eingeführt werden und für die Hauptcentralachsen x und y aus bekannten Gründen $\Sigma(mxy) = 0$ gesetzt wird,

$$\sin^2(X, Y) \cdot \Sigma(mXY) = -M[a^2 \sin(x, X) \sin(x, Y) + b^2 \cos(x, X) \cos(x, Y)].$$

Da der letzte Factor innerhalb der eckigen Klammer zufolge (b) verschwinden muss und $\sin(X, Y) \geq 0$ ist, so folgt aus dieser Gleichung nothwendigerweise, dass stets für je zwei conjugierte Diameter der Ellipse e die Gleichung besteht:

$$\Sigma(mXY) = 0 \dots (d)$$

Zugleich ist nach (c) und (a)

$$\begin{aligned} \sin^2(X, Y) \cdot \Sigma(mX^2) &= M[a^2 \sin^2(x, Y) + b^2 \cos^2(x, Y)] \\ \sin^2(X, Y) \cdot \Sigma(mY^2) &= M[a^2 \sin^2(x, X) + b^2 \cos^2(x, X)] \end{aligned}$$

oder da nach der Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ für die Diameter $2A$ und $2B$

$A^2 \left[\frac{\cos^2(x, X)}{a^2} + \frac{\sin^2(x, X)}{b^2} \right] = 1$ und $B^2 \left[\frac{\cos^2(x, Y)}{a^2} + \frac{\sin^2(x, Y)}{b^2} \right] = 1$ ist,
so ist auch $\sin^2(X, Y) \cdot \Sigma(m X^2) = M \cdot \frac{a^2 b^2}{B^2}$, $\sin^2(X, Y) \cdot \Sigma(m Y^2) = M \cdot \frac{a^2 b^2}{A^2}$.

Das der Ellipse e umschriebene Parallelogramm, dessen Seiten zu den conjugierten Diametern parallel sind, hat bekanntlich für alle Diameterpaare denselben Flächeninhalt; es ist demgemäß $A B \sin(X Y) = a b$ und daher des letzten Gleichungen zufolge $\Sigma(m X^2) = M A^2$, $\Sigma(m Y^2) = M B^2$.

Da nun die Trägheitsmomente J_X und J_Y für die Achsen X und Y durch $J_Y = \Sigma(m X^2) \cdot \sin^2(X, Y)$ und $J_X = \Sigma(m Y^2) \cdot \sin^2(X, Y)$ bestimmt sind, so ist auch

$$\frac{J_Y}{\sin^2(X, Y)} = \Sigma(m X^2) = M A^2; \quad \frac{J_X}{\sin^2(X, Y)} = \Sigma(m Y^2) = M B^2 \dots (4)$$

d. h. es ist der in die X -Achse fallende Semidiameter A der Quotient aus dem Trägheitsradius $\varrho_Y = \sqrt{\frac{J_Y}{M}}$ bezüglich des zweiten conjugierten Diameters $2B$ und aus dem Sinus des Neigungswinkels (XY) der beiden Diameter und ebenso umgekehrt B der Quotient aus dem Trägheitsradius $\varrho_X = \sqrt{\frac{J_X}{M}}$ und dem $\sin(X, Y)$.

Es ist klar, dass man die ganze Deduction auch leicht umkehren und so von den Gleichungen (e) und (d) mit Zuhilfenahme der Transformationsgleichungen (c) zu den Gleichungen (a) übergehen kann, welche dann lehren, dass, wenn $\Sigma(m X Y) = 0$ ist, stets jene Ellipse, deren conjugierte Diameter $2A$ und $2B$ die Richtung der X - und Y -Achse haben und durch die Gleichung (e) bestimmt sind, das reciproke Binet'sche Trägheitsellipsoid ist, wie die ursprüngliche Behauptung auch lautet. Die Achsen x und y der durch diese Diameter $2A$ und $2B$ bestimmten Ellipse sind also in der That Hauptcentralachsen.

Bezeichnet man kurzweg als „Centralellipse“ den elliptischen Durchschnitt des einer ebenen Fläche F' (bezw. einer ebenen Linie) entsprechenden Poincaré'schen Centralellipsoids mit der Ebene der Fläche, so stimmen bekanntlich die Achsen $2a'$ und $2b'$ derselben, ebenso wie jene der früheren Ellipse e mit den Schwerpunktshauptachsen x und y überein, nur haben die Halbachsen a' und b' (siehe Gleichung (4), S. 568) die Länge $a' = \frac{\varepsilon^2}{\varrho_x}$, $b' = \frac{\varepsilon^2}{\varrho_y}$, wo $\varrho_x^2 = \frac{J_x}{M} = \frac{\Sigma(m y^2)}{M}$ und $\varrho_y^2 = \frac{J_y}{M} = \frac{\Sigma(m x^2)}{M}$ ist, und es ist demnach $\Sigma(m x^2) = \frac{M \varepsilon^4}{b'^2}$, $\Sigma(m y^2) = \frac{M \varepsilon^4}{a'^2}$. Vergleicht man diese Werte mit den Gleichungen (a), so ersieht man, dass $\varepsilon^4 = a b' = a' b$, also $a : b = a' : b'$ ist. Da sonach die Achsen $2a$ und $2b$ der Ellipse e den gleichgelegenen Achsen $2a'$ und $2b'$ der Centralellipse direct proportional sind, so sind diese beiden Ellipsen auch einander ähnlich und daher auch die conjugierten Diameter in beiden gleich gelegen. Daraus ist zu ersehen, dass, was von der Ellipse e hier nachgewiesen wurde, auch für die Centralellipse giltig ist. Verschwindet nämlich die Summe $\Sigma(m X Y)$ für zwei Achsen X und Y , so sind diese Achsen zugleich conjugierte Diameter der Centralellipse, nur haben diese Diameter $2A$ und $2B$ nicht die aus (e) bestimmbaren früheren Werte $2A = \frac{2 \varrho_Y}{\sin(X Y)}$, $2B = 2 \frac{\varrho_X}{\sin(X Y)}$, sondern dieselben haben (s. Gleichung (4), S. 568) bekanntlich die Längen: $2A = 2 \frac{\varepsilon^2}{\varrho_x}$ und $2B = 2 \frac{\varepsilon^2}{\varrho_y}$, die den letzteren Werten direct proportional sind.

Nun besteht, wenn durch $\alpha = (X, Y)$ der positive spitze Winkel bezeichnet ist, den die Richtungen X und Y der conjugierten Semidiameter A und B einer Ellipse einschließen, für die beiden im Sinne der kürzesten Drehung von der Anfangsrichtung X aus nach der Richtung Y gerechneten Richtungswinkel φ der Richtungen x und y der Halbachsen a und b dieser Ellipse die leicht aus der Ellipsengleichung deducierbare Beziehung $\tan 2\varphi = B^2 \sin 2\alpha : (A^2 + B^2 \cos 2\alpha)$, und es ist ferner bekanntlich stets $a^2 + b^2 = A^2 + B^2$ und $ab = AB \sin \alpha$, so dass, wenn a die jedenfalls in der Winkelfläche des spitzen Neigungswinkels α gelegene grosse Halbachse [für welche der Winkel $\varphi = (X a) = -(a X)$ in der früheren Gleichung der weiteren Bedingung $\sin 2\varphi > 0$ entsprechen muss] und b die kleine Halbachse bezeichnet, stets $a = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \lambda$ und $b = \sqrt{A^2 + B^2} \sin \lambda$ ist, wofern 2λ den positiven spitzen Winkel bedeutet, der aus der Gleichung $\sin 2\lambda = 2AB \sin \alpha : (A^2 + B^2)$ bestimmbar ist.

Da nun für die früher betrachtete Centralellipse $\varepsilon^2 = A \cdot \varrho_x = B \cdot \varrho_r = a \cdot \varrho_x = b \cdot \varrho_y$ ist, so führt die Substitution der aus diesen Gleichungen bestimmbaren Werte von $ABab$ in die früheren Gleichungen zu der Folgerung, dass die früher durch φ bezeichneten Richtungswinkel (X, x) und (X, y) der Hauptcentralachsen x und y durch die Gleichung

$$\cotg 2\varphi = \cotg 2\alpha + \frac{\varrho_r^2}{\varrho_x^2 \sin 2\alpha} \dots (f)$$

und die Hauptträgheitshalbmesser bezüglich der Hauptcentralachsen x, y und z durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_x &= \frac{\varrho_x \varrho_r}{\cos \lambda \cdot \sqrt{\varrho_x^2 + \varrho_r^2}} = \sqrt{\varrho_x^2 + \varrho_r^2} \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin \alpha}, \varrho_y = \frac{\varrho_x \varrho_r}{\sin \lambda \cdot \sqrt{\varrho_x^2 + \varrho_r^2}} = \\ &= \sqrt{\varrho_x^2 + \varrho_r^2} \cdot \frac{\cos \lambda}{\sin \alpha}, \varrho_z = \sqrt{\varrho_x^2 + \varrho_y^2} = \frac{\sqrt{\varrho_x^2 + \varrho_r^2}}{\sin \alpha} \end{aligned} \right\} (g)$$

bestimmt sind, wo 2λ den der Bedingung

$$\sin 2\lambda = \frac{2 \varrho_x \varrho_r}{\varrho_x^2 + \varrho_r^2} \cdot \sin \alpha \dots (h)$$

entsprechenden spitzen Winkel bedeutet.

Die Centralellipse kann nur dann in einen Kreis übergehen, so dass dann alle Schwerachsen in der Ebene der Fläche freie Achsen sind, wenn $a = b = A = B$, also wenn der Gleichung $ab = AB \cdot \sin \alpha$ zufolge $\sin \alpha = 1$, d. h. $\alpha = (XY) = \frac{\pi}{2}$ ist, d. h. wenn jene Achsen X und Y , für welche $\Sigma(mXY) = 0$ ist, auf einander senkrecht stehen und überdies $\varrho_x = \varrho_r$ ist. In diesem Falle ist der Gleichung (h) zufolge $\sin 2\lambda = 1$, also $\lambda = \frac{\pi}{4}$, sonach $\sin \lambda = \cos \lambda$.

Wenn für die Achsen X und Y der ebenen Fläche ΣmXY nicht Null ist, sondern wenn $\sin^2 \alpha \cdot \Sigma mXY$ den von Null verschiedenen als gegeben vorausgesetzten Wert D_s hat, so lassen sich die Richtungswinkel $(X, x) = \varphi$ und (X, y) der Hauptcentralachsen x und y , wie sich dies auf Grund der früheren Transformationsgleichungen $x = X \cos \varphi + Y \cos(\alpha - \varphi)$, $y = -X \sin \varphi + Y \sin(\alpha - \varphi)$, ferner der Gleichung $\Sigma(mxy) = 0$ leicht zeigen lässt, durch die Gleichung (f) analoge Gleichung $\cotg 2\varphi = \cotg \alpha + \frac{1}{2} \cdot \frac{J_Y - J_X}{\sin \alpha (J_X \cos \alpha + D_s)}$ be-

stimmen und hierauf die Hauptträgheitsmomente $J_x = \sum m y^2 = M \cdot \varrho_y^2$ und $J_y = \sum m x^2 = M \varrho_x^2$ berechnen aus

$$J_x = \frac{J_Y \sin^2 \varphi + J_X \sin^2 (\alpha - \varphi) + D [\cos \alpha - \cos (\alpha - 2\varphi)]}{\sin^2 \alpha}$$

$$J_y = \frac{J_Y \cos^2 \varphi + J_X \cos^2 (\alpha - \varphi) + D (\cos \alpha + \cos (\alpha - 2\varphi))}{\sin^2 \alpha}$$

Nicht nur für die bisher betrachteten ebenen materiellen Flächen, sondern auch für beliebig im Raume ausgedehnte Körper besteht, wie sich in ähnlicher Weise zeigen lässt, folgender dem früheren analoger Satz: Verschwinden für drei beliebige Schwerpunktsachsen XYZ die Summen $\sum (mXY) = 0$, $\sum (mXZ) = 0$, $\sum (mYZ) = 0$, was sicher dann der Fall ist, wenn der Körper drei Diametraebenen von der auf S. 471 hervorgehobenen Eigenschaft besitzt (wenn nämlich alle zu einer jeden der drei Achsen parallelen Sehnen, welche Massenpunkte von gleicher Masse verbinden, durch die Ebene der beiden anderen Achsen halbiert werden), und schneidet man auf diesen drei Achsen vom Schwerpunkte beiderseits aus den Radius $\sqrt{\frac{\sum (mX^2)}{M}}$, bezw. $\sqrt{\frac{\sum (mY^2)}{M}}$, bezw. $\sqrt{\frac{\sum (mZ^2)}{M}}$ ab, so sind diese drei Radien die einander conjugierten Semidiameter eines Ellipsoids (des Binet'schen reciproken Trägheitsellipsoids), dessen Achsen xyz die Schwerpunkts-hauptachsen des Körpers sind.

Anmerkung 3. Die Kenntnis der Trägheitsmomente ebener Flächen und Linien gestattet auch eine nicht uninteressante (vom Verfasser gefundene) Anwendung auf die Bestimmung der Schwerpunkte der durch Rotation dieser Flächen (bezw. Linien) um irgend eine Achse erzeugten keilförmigen Theile von Rotationskörpern (bezw. Rotationsflächen), sowie auf die Bestimmung der Schwerpunkte schief abgeschnittener Cylinder und Prismen, deren Basisflächen diese ebenen Flächen sind.

a) Ist nämlich $ABCD$ (Fig. 162) irgend eine ebene Fläche F , die um die in ihrer Ebene gelegene (die Fläche F nicht schneidende) x -Achse, und zwar um den Winkel 2φ rotiert und bei dieser Rotation das keilförmige Volum V durchläuft, und hat der nach Gleichung (6) auf S. 500 bestimmbare Schwerpunkt dieser ebenen Fläche F die orthogonalen Coordinaten $\xi \eta$, so ist das Volumenelement dV , welches das Flächenelement dF , dessen orthogonale Coordinaten xy sind, bei dieser Rotation durchläuft, bekanntlich bestimmt durch

$$dV = 2\varphi y \cdot dF \quad \dots \quad (a)$$

und nach Guldin's Regel

$$V = \int dV = 2\varphi \cdot \int y \cdot dF = 2\varphi \cdot F\eta \quad \dots \quad (b)$$

Da die mittlere Meridianebene, die den Keilwinkel 2φ halbiert, eine Symmetrieebene des Volums V ist, so liegt in derselben der Schwerpunkt S dieses Volums V ; es sei diese mittlere Meridianebene zur xy -Ebene und der Anfangspunkt O des rechtwinkligen Achsensystems beliebig in der x -Achse gewählt.

Auch das Volumenelement dV hat offenbar seinen Schwerpunkt s in dieser xy -Ebene, und zwar sind die Coordinaten dieses Schwerpunktes (den bekannten Werten der Schwerpunktscoordinaten eines Kreisbogens S. 484 zufolge) $x_s = x$, $y_s = y \cdot \frac{\sin \varphi}{\varphi}$; es müssen sonach die Coordinaten a, b des Schwerpunktes S des Volums V den Gleichungen genügen

$$\left. \begin{aligned} Va &= \int x_s \cdot dV = \int x \cdot 2\varphi y \cdot dF = 2\varphi \cdot \int xy dF \\ Vb &= \int y_s \cdot dV = \int y \cdot \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cdot 2\varphi y dF = 2\sin\varphi \int y^2 dF \end{aligned} \right\} \text{(c)}$$

wo die Integration sich auf die ganze Fläche F erstreckt.

Nun ist $\int y^2 dF$ (siehe S. 581) das geometrische Trägheitsmoment i_x der erzeugenden Fläche F bezüglich der x -Achse, und das geometrische Deviationsmoment $\int xy dF$ ist bestimmt durch die letzte Gleichung auf S. 583, wofern $i_x = F \cdot \varrho x^2$ und $i_y = F \cdot \varrho y^2$ die Trägheitsmomente in Bezug auf die Hauptcentralachsen der erzeugenden Fläche F bedeuten; es führt sonach die Division von (c) durch (b) zu folgenden Werten für die Coordinaten des Schwerpunktes des keilförmigen Rotationskörpers V

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\int xy \cdot dF}{F \eta} = \xi + \sin A \cos A \frac{\varrho r^2 - \varrho x^2}{\eta} \\ b &= \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cdot \frac{\int y^2 dF}{F \eta} = \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cdot \frac{i_x}{F \eta} = \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cdot l_x \end{aligned} \right\} \text{(d)}$$

wenn l_x die reducierte Länge der Fläche F bezüglich der x -Achse bedeutet, die der Gleichung (7) auf S. 582 zufolge auch durch

$$l_x = \eta + \frac{\varrho x^2 \cos^2 A + \varrho r^2 \sin^2 A}{\eta} \dots \text{(e)}$$

ausgedrückt werden kann. (A hat hier dieselbe Bedeutung wie auf S. 583.)

Entsteht der Rotationskörper durch eine volle Umdrehung, so ist $\varphi = \pi$ zu setzen, so dass $b = 0$ wird, während a seinen auch aus der Gleichung (4), S. 530, bestimmbaren Wert beibehält.

Wählt man jenen Punkt der Rotationsachse, für welchen dieselbe eine Trägheitshauptachse der erzeugenden Fläche F ist, zum Coordinatenanfangspunkt O , so ist, wie dies auch die Übereinstimmung des Wertes a in (d) mit dem Werte a in der Gleichung (d) auf S. 584 lehrt, $a = 0$, und es ist dann offenbar auch die y -Achse eine Hauptachse für den Punkt O . Da nun der durch die Coordinaten $x = a$ und $y = l_x$ bestimmte Punkt der Druckmittelpunkt (Mittelpunkt des Stoßes) der erzeugenden Fläche F für die x -Achse ist und $b = \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cdot l_x$ die Ordinate des Schwerpunktes jenes Kreisbogens ist, dessen Radius l_x und dessen Centriwinkel 2φ ist, so drückt die Gleichung (d) folgendes dem Guldin'schen Theorem analoges Gesetz aus: Es ist der Schwerpunkt S eines durch Rotation einer Fläche F um eine Achse entstehenden Rotationskörpers stets identisch mit dem Schwerpunkte jenes Kreisbogens, den der der Rotationsachse entsprechende Druckmittelpunkt der Fläche F bei der Rotation beschreibt.

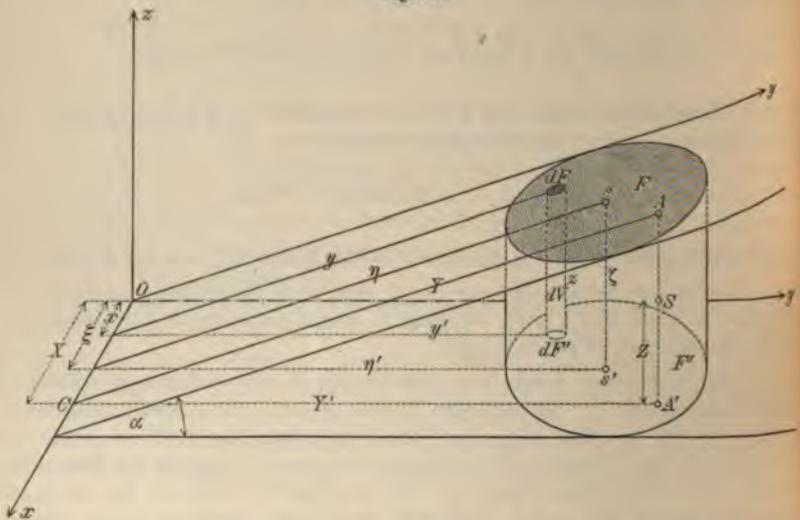
Man ersieht auch daraus, dass der Schwerpunkt eines durch volle Umdrehung um die Rotationsachse erzeugten Rotationskörpers stets identisch ist mit jenem Punkte der Rotationsachse, für welchen dieselbe eine Trägheitshauptachse der erzeugenden Fläche F ist.

Dass all das Gesagte der Wesenheit nach auch für die Bestimmung des Schwerpunktes von Rotationsflächen F , die durch Drehung einer ebenen Curve L um eine in ihrer Ebene gelegene x -Achse erzeugt werden, Giltigkeit hat, ersieht man sofort, wenn man bei Durchführung derselben Deduction aus bekannten Gründen in den Gleichungen (a)–(d) L statt F , ds statt dF , F statt V u. s. w. setzt.

b) Der Schwerpunkt S jenes Volums V (Fig. 169), das von einer beliebigen Cylinderfläche (bezw. prismatischen Fläche) und von zwei gegen die z -Achse parallele — Erzeugende derselben irgendwie geneigten Schnittflächen F und F' begrenzt wird, lässt sich, wenn die Lage des Schwerpunktes s und die Hauptträgheitsmomente einer dieser beiden letzteren Flächen bekannt sind, folgendermaßen ermitteln:

Es sei zunächst eine der beiden Flächen, etwa F' senkrecht zur Erzeugenden der Cylinderfläche angenommen, ferner die Ebene dieser Fläche F' zur xy' -Ebene und die Durchschnittslinie der Ebenen F und F' zur x -Achse eines orthogonalen Achsensystems gewählt.

Fig. 169.



Ein zweites orthogonales ebenes Achsensystem xy mit derselben x -Achse und demselben Anfangspunkte sei in der Ebene der Fläche F angenommen (siehe Fig. 169).

Sind nun $xy'z$ die orthogonalen Coordinaten eines beliebigen Elementes dF der Fläche F , und ist dF' die orthogonale Projection von dF in die xy' -Ebene, so ist jenes cylinderförmige Volumelement dV , dessen Erzeugende auf der Fläche F' senkrecht steht, und dessen Grundebene dF oder dF' ist, offenbar bestimmt durch $dV = z \cdot dF'$, und es ist sonach, wenn ξ, η', ζ die Coordinaten des Schwerpunktes s der Fläche F , also $(\xi, \eta', 0)$ jene des Schwerpunktes s' der Fläche F' (welcher zufolge S. 582 die orthogonale Projection s' des Punktes s ist) bedeuten (siehe S. 486),

$$V = \int dV = \int z \cdot dF' = F' \zeta \dots (f)$$

h. es ist stets das Volum V eines schief abgeschnittenen Cylinders (Prismas) gleich dem Producte aus der senkrechten Querschnittsfläche F' desselben und dem Abstände ζ der Schwerpunkte s und s' der beiden Basisflächen.

Dass dieser Satz auch für den Fall Giltigkeit hat, in welchem keine der Basisflächen auf der Erzeugenden des Cylinders senkrecht steht, ergibt sich sofort, wenn man eine mittlere senkrechte Querschnittsfläche F' annimmt, durch welche V in zwei Theile V_1 und V_2 getheilt wird; es ist dann nämlich $V = V_1 + V_2$ und daher zufolge (f) $V = F' \zeta_1 + F' \zeta_2 = F' (\zeta_1 + \zeta_2) = F' \zeta$.

Der Schwerpunkt S des Volums V ist zufolge des letzten Lehrsatzes (d) auf S. 471 gelegen in jener durch die x -Achse gelegten Ebene E , welche irgend eine Seitenkante des Volums V halbiert, da diese Ebene E für alle zur z -Achse parallelen Sehnen des Volums V eine Diametraebene ist; es ist sonach, wenn man die Coordinaten des Schwerpunktes S des Volums V durch x_s, y_s, z_s und den Neigungswinkel der Flächen F und F' durch α bezeichnet, $z_s = \frac{1}{2} y_s \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Der Schwerpunkt des Volumelements dV hat offenbar die Coordinaten $x, y, \frac{z}{2}$, und zwar ist $z = y' \operatorname{tg} \alpha$ und nach Gleichung (4), S. 514

$$\left. \begin{aligned} V \cdot x_s &= \int x \cdot dV = \int x z \cdot dF' = \int x \cdot y' \operatorname{tg} \alpha \cdot dF' = \operatorname{tg} \alpha \cdot \int x y' \cdot dF' \\ V \cdot y_s &= \int y' \cdot dV = \int y' z \cdot dF' = \int y' \cdot y' \operatorname{tg} \alpha \cdot dF' = \operatorname{tg} \alpha \cdot \int y'^2 \cdot dF' \\ V \cdot z_s &= \int \frac{z}{2} \cdot dV = \frac{1}{2} \int z^2 \cdot dF' = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \int y'^2 \cdot dF' = V \cdot \frac{1}{2} y_s \operatorname{tg} \alpha \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Dividirt man diese Gleichungen durch die Gleichung (f), nachdem man in derselben $\zeta = \eta' \operatorname{tg} \alpha$ gesetzt hat, so findet man, wenn man die letzte Gleichung auf S. 583 berücksichtigt und das Trägheitsmoment $\int y'^2 dF'$ der Fläche F' bezüglich der x -Achse durch i'_x , ferner deren Trägheitshalbmesser in Bezug auf die Hauptcentralachsen X' und Y' derselben durch $\varrho_{X'}$ und $\varrho_{Y'}$ und $(x X')$ durch A' bezeichnet,

$$\left. \begin{aligned} x_s &= \frac{\int x y' dF'}{F' \eta'} = \xi + \sin A' \cos A' \frac{\varrho_{Y'}^2 - \varrho_{X'}^2}{\eta'} \\ y'_s &= \frac{\int y'^2 dF'}{F' \eta'} = \frac{i'_x}{F' \eta'} = \frac{\varrho_{X'}^2}{\eta'} \\ z_s &= \frac{1}{2} y'_s \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \frac{i'_x}{F' \eta'} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \frac{\varrho_{X'}^2}{\eta'} \operatorname{tg} \alpha \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

Setzt man in allen diesen Formeln aus bekannten Gründen $y' = y \cos \alpha$, $\eta' = \eta \cos \alpha$, $y'_s = y_s \cdot \cos \alpha$, $dF' = dF \cdot \cos \alpha$ u. s. w., und berücksichtigt man die Gleichungen (c) auf S. 583, (6) auf S. 564 und (7) auf S. 582, so findet man die analogen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x_s &= \frac{\int x y dF}{F \eta} = \xi + \sin A \cos A \frac{\varrho_{Y'}^2 - \varrho_{X'}^2}{\eta} \\ y_s &= \frac{\int y^2 dF}{F \eta} = \frac{i_x}{F \eta} = \frac{\varrho_{X'}^2}{\eta} = l_x = \eta + \frac{\varrho_{X'}^2 \cos^2 A + \varrho_{Y'}^2 \sin^2 A}{\eta} \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

wo ϱ_X und ϱ_Y die Trägheitsradien in Bezug auf die in der Ebene der Fläche F gelegenen Schwerpunkthauptachsen XY der Fläche F bedeuten und $(x X) = A$ ist.

Dieselben Werte (i) würden sich ergeben, wenn die Durchschnittslinie der beiden Flächen F und F' , d. i. die x -Achse, nicht, wie hier angenommen, auf der Erzeugenden, d. i. der z -Achse senkrecht stünde, wenn jedoch wieder, wie früher, die y -Achse in der Fläche F senkrecht zur x -Achse angenommen würde.

Die Gleichungen (i) lehren, wenn man dieselben mit den Gleichungen in Anmerkung 1 zusammenhält, dass für jenen Punkt C der x -Achse, nämlich der Durchschnittslinie der beiden Flächen F und F' , dessen Coordinaten (x, y, z) sind, d. i. für die orthogonale Projection jenes Punktes A der Fläche F , welchem die zur Erzeugenden der Cylinderfläche parallele Schwerpunktschwerachse des Volumens V die Fläche F schneidet, die x -Achse eine Hauptachse der Fläche F ist, während die Entfernung $y_s = \overline{CA}$ des Punktes A von der x -Achse der reducirten Länge l_x der Fläche F in Bezug auf diese x -Achse gleich ist; es ist mit anderen Worten A identisch mit dem Druckmittelpunkte (Stoßmittelpunkte) der Fläche F bezüglich der x -Achse, und da dies auch für die zweite Fläche gültig ist, so hat man nur jene Druckmittelpunkte A und A' der beiden Flächen F und F' , die der Durchschnittslinie Ox dieser Flächen entsprechen, zu verbinden und diese zur Erzeugenden der Cylinderfläche parallele Gerade AA' zu halbieren; der Mittelpunkt dieser Geraden AA' ist der Schwerpunkt S des Volumens V . Diese Regel hat allgemeine Gültigkeit, mag die Durchschnittslinie der beiden Grundflächen F und F' auf der Erzeugenden der Cylinderfläche senkrecht stehen oder nicht.

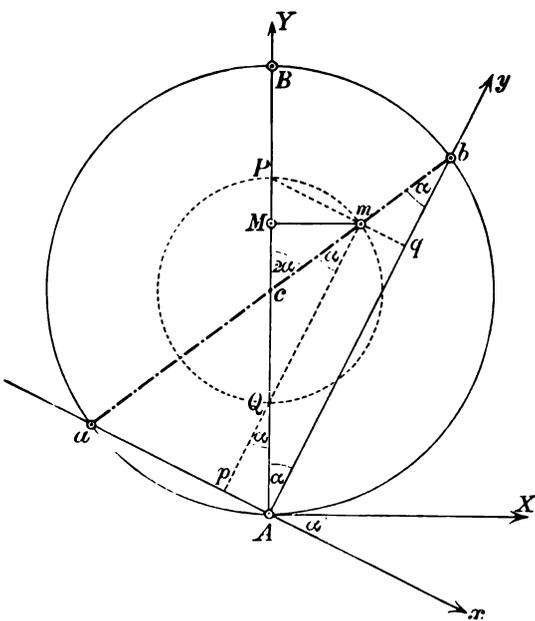
Wie man x_s und y_s mittels der Trägheitshalbmesser der Fläche F berechnen kann, ersieht man aus (i).

Anmerkung 4. Um auf constructivem Wege aus dem irgend einem Punkte A der ebenen Fläche zugehörigen Hauptträgheitsmomente $i_x = \Sigma (f y^2)$ und $i_y = \Sigma (f x^2)$ der Fläche und aus der Lage x und y der Trägheitshauptachsen die Trägheitsmomente $i_x = \Sigma (f Y^2)$; $i_y = \Sigma (f X^2)$ und das Deviationsmoment $\Sigma (f X Y)$ für zwei andere gegebene durch den Punkt A gelegte orthogonale Achsen X und Y zu bestimmen — und um auch umgekehrt aus i_x i_y und $\Sigma (f X Y)$ für die gegebene Achsen X und Y die Lage der Trägheitshauptachsen x und y und die Hauptträgheitsmomente i_x und i_y zu ermitteln, dafür

gibt es mehrere Methoden, von welchen dem Verfasser als die einfachste die von Prof. Land herrührende erscheint. Dieselbe besteht in folgendem Verfahren:

Im ersteren Falle trage man auf der gegebenen Achse Y in der als positiv angenommenen Richtung von A aus jene Strecke AB auf, deren Maß-

Fig. 170.



Zahl $\overline{AB} = i_x = i_x + i_y = i_x + i_y$ ist (siehe Fig. 170), und construere über \overline{AB} als Durchmesser einen Kreis, dessen Mittelpunkt c ist, und welcher die gegebenen Trägheitshauptachsen x und y in den Punkten a und b schneidet. Theilt man den diese beiden Durchschnittspunkte verbindenden Durchmesser \overline{ab} im Punkte m derart, dass $\overline{am} = i_x$, also $\overline{bm} = i_y$ wird, und projiciert diesen Punkt m auf die Achse Y durch die Normale mM , so bestimmt die auf die Coordinatenachsen X und Y sich beziehende Abscisse Mm des Punktes m den algebraischen Wert des Deviationsmoments $\overline{Mm} = \Sigma(fXY)$ und die Ordinate \overline{AM} desselben das Trägheitsmoment $\overline{AM} = i_x$, während $\overline{BM} = i_y$ ist.

Um dies nachzuweisen, hat man nur von den früheren Transformationsgleichungen (c), S. 585, in welchen, wenn (x, X) durch α bezeichnet wird, $(x, Y) = \alpha + \frac{\pi}{2}$, $(X, Y) = \frac{\pi}{2}$ zu setzen ist, Anwendung zu machen, so dass, da sonach

$$X = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad Y = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

und $\Sigma(fxy) = 0$ ist, in theilweiser Übereinstimmung mit der Gleichung (6), S. 582, sich ergibt:

$$\left. \begin{aligned} i_X &= \Sigma(fY^2) = i_x \cos^2 \alpha + i_y \sin^2 \alpha \\ i_Y &= \Sigma(fX^2) = i_x \sin^2 \alpha + i_y \cos^2 \alpha \\ \Sigma(fXY) &= \sin \alpha \cos \alpha (i_x - i_y) = \frac{1}{2} (i_x - i_y) \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \text{(a)}$$

Da nun $(y, Y) = (x, X) = \alpha$ ist, so hat der dem Peripheriewinkel (y, Y) zugehörige Centriwinkel bcb (Fig. 170) die Maßzahl 2α , und es ist $cm = am - ac = i_x - \frac{1}{2}(i_x + i_y) = \frac{1}{2}(i_x - i_y)$, sonach in der That $\overline{AM} = \overline{Ac} + \overline{cM} = \frac{1}{2}(i_x + i_y) + \overline{cm} \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{2}(i_x + i_y) + \frac{1}{2}(i_x - i_y) \cos 2\alpha = i_x \cos^2 \alpha + i_y \sin^2 \alpha = i_x$ und $\overline{BM} = \overline{AB} - \overline{AM} = (i_x + i_y) - (i_x \cos^2 \alpha + i_y \sin^2 \alpha) = i_x \sin^2 \alpha + i_y \cos^2 \alpha = i_y$, ferner $\overline{Mm} = \overline{cm} \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2}(i_x - i_y) \sin 2\alpha = \Sigma(fXY)$.

Führt man durch den Punkt m die zu den Trägheitshauptachsen x und y parallelen Geraden Pmq und mQp , welche die gegebene Achse Y in den Punkten P und Q und die Achsen x und y in den Punkten p und q schneiden, so ist in Fig. 170 $\overline{Ap} = \overline{qm} = \overline{bm} \cdot \sin \alpha = i_y \cdot \sin \alpha$ und $\overline{Aq} = \overline{pm} = \overline{am} \cdot \cos \alpha = i_x \cos \alpha$. Nun ist in den Dreiecken AQp und APq auch $\overline{Ap} = \overline{Aq} \cdot \sin \alpha$ und $\overline{Aq} = \overline{Ap} \cdot \cos \alpha$, also $\overline{Aq} = i_y$ und $\overline{Ap} = i_x$. Man kann also den maßgebenden Punkt m ohne Construction des Kreises auch derart in einfacher Weise bestimmen, dass man auf der gegebenen Y -Achse von A aus in derselben Richtung die Strecken $\overline{Ap} = i_x$ und $\overline{Aq} = i_y$ abschneidet und von P eine Parallele Pm zur x -Achse und von Q eine Parallele Qm zur y -Achse führt, die sich im gesuchten Punkte m schneiden. Projiciert man hierauf m auf die Y -Achse durch die Normale mM , so ist wie früher $\overline{Mm} = \Sigma(fXY)$ und $\overline{AM} = i_x$, während $i_Y = i_x + i_y - i_X = \overline{AP} + \overline{AQ} - \overline{AM}$ ist.

Sind umgekehrt für zwei gegebene, im Punkte A sich schneidende rechtwinklige Achsen X und Y die Trägheitsmomente i_X und i_Y und das Deviationsmoment $\Sigma(fXY)$ gegeben, so hat man, um die Lage der dem Punkte A zugehörigen Trägheitshauptachsen x und y und die Hauptträgheitsmomente i_x und i_y zu bestimmen, wie dies die Fig. 170 sofort lehrt, wieder über den auf der Y -Achse aufgetragenen Durchmesser $\overline{AB} = \overline{i_x} = i_x + i_y$ zunächst einen Kreis

zu beschreiben, AB in die zwei Strecken $\overline{AM} = i_x$ und $\overline{MB} = i_r$ zu theilen, in Theilungspunkte M die, je nachdem das Deviationsmoment $\Sigma(fXY)$ positiv oder negativ ist, mit der positiven X -Achse gleich- oder entgegengesetzt gerichtete Normale $\overline{Mm} = \Sigma(fXY)$ zu errichten und den Endpunkt m derselben mit dem Kreismittelpunkte c zu verbinden. Verlängert man nun die Gerade cm beiderseits bis zu den Durchschnittspunkten a und b mit dem Kreise und verbindet die letzteren mit dem Punkte A , so sind durch die so bestimmten Achsen Aa und Ab die Trägheitshauptachsen und durch die Strecken $\overline{am} = i_x$ und $\overline{mb} = i_y$ die Hauptträgheitsmomente bestimmt.

Man kann auch, nachdem $\overline{AM} = i_x$, $\overline{MB} = i_r$ und $\Sigma(fXY) = \overline{Mm} \perp \overline{AMB}$ construirt worden ist, den in der Fig. 170 punktierten Kreis benützen, dessen Centrum der Mittelpunkt c der Geraden AB und dessen Radius cm ist. Dieser Kreis schneidet die Achse Y in den Punkten P und Q , welche eine solche Lage haben, dass $\overline{AP} = i_x$, $\overline{AQ} = i_y$ ist, und dass die Sehnen Pm und Qm dieses Kreises zu den gesuchten Trägheitshauptachsen parallel sind.

Zugleich ersieht man aus Fig. 170, dass $\overline{Ac} = \overline{ac} = \overline{cb} = \frac{1}{2}(i_x + i_r)$, dass ferner $\overline{cM} = \overline{AM} - \overline{Ac} = i_x - \frac{1}{2}(i_x + i_r) = \frac{1}{2}(i_x - i_r)$ und $\overline{cm} = \sqrt{cM^2 + Mm^2}$ ist, so dass (wofern, wie früher, α den Winkel (xX) bedeutet, also $(Xx) = -\alpha$ ist) folgende für den Übergang von den beliebigen rechtwinkligen Achsen XY auf die Trägheitshauptachsen xy maßgebenden Gleichungen, die sich auch unmittelbar aus (a) folgen lassen, bestehen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{Mm}{cM} = 2 \cdot \frac{\Sigma(fXY)}{i_x - i_r} \\ i_x &= \overline{am} = \overline{ac} + \overline{cm} = \frac{1}{2}(i_x + i_r) + \sqrt{\frac{1}{4}(i_x - i_r)^2 + [\Sigma(fXY)]^2} \\ i_y &= \overline{mb} = \overline{cb} - \overline{cm} = \frac{1}{2}(i_x + i_r) - \sqrt{\frac{1}{4}(i_x - i_r)^2 + [\Sigma(fXY)]^2} \end{aligned} \quad (b)$$

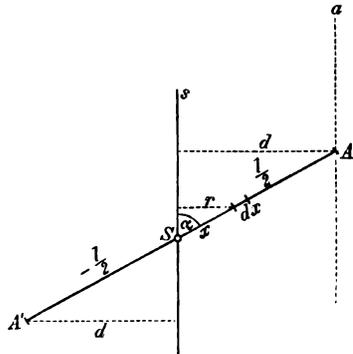
Bei der früheren Construction des durch den Coordinatenaufgangspunkt A gelegten Kreises vom Durchmesser $AB = ab = A'B' = i_x$ in Fig. 170 ist es nicht unumgänglich nothwendig, dass, wie dies für das Achsensystem XY der Fall war, die eine Achse in die Richtung des Durchmessers fällt, während die andere Achse den Kreis im Anfangspunkte A tangiert. Sind nämlich $x'y'$ zwei andere rechtwinklige durch A durchgelegte Achsen, und ist B' der zweite Durchschnittspunkt dieses Kreises Ab mit der y' -Achse, so hat man nur den früheren Punkt m des Durchmessers acb , für welchen $\overline{am} = i_x$ und $\overline{mb} = i_y$ ist, auf den dem Punkte B' zugehörigen Durchmesser $B'cA'$ orthogonal zu projicieren. Ist M' diese Projection, so ist, wie sich aus den Gleichungen auf S. 593 unmittelbar ergibt, wofern in denselben, wenn nunmehr durch α' der Winkel $(xx') = (yy') = (bA'B')$, also durch $2\alpha'$ der zugehörige Centriwinkel bcb' bezeichnet wird, überall die Bezeichnungen $\alpha XYABM$ durch $\alpha'x'y'A'B'M'$ ersetzt werden, $\overline{AM} = i_x$, $\overline{MB} = i_y$, und $\overline{Mm} = \Sigma(fx'y')$.

Von dieser Thatsache kann man mit Vortheil Anwendung machen, um auf constructivem Wege, wenn die Größen $i_x i_r$ und $\Sigma(fXY)$ für gewisse orthogonale Achsen XY gegeben sind, aus denselben die Größen $i_x', i_y', \Sigma(fx'y')$ für ein zweites Achsensystem $x'y'$ zu ermitteln, indem man nach der früheren Methode der Reihe nach die Punkte B , M und m und nach der letzteren Methode hierauf die Durchschnittspunkte $B'A'M'$ bestimmt.

96. Trägheitsmomente und Hauptachsen besonderer homogener ebener materieller Linien.

Bei einer materiellen geraden Linie (einem dünnen Stäbchen) (siehe S. 570) eine jede Normale in irgend einem Punkte derselben eine Hauptachse für diesen Punkt; denn nimmt man die materielle Gerade als x -Achse eines orthogonalen Achsensystems an, ist für jeden Punkt der Geraden $y = 0$ und $z = 0$, daher $\sum m x z = 0$, $\sum m x y = 0$, $\sum m y z = 0$. Da ferner $J_x = \sum m (y^2 + z^2) = 0$ wird, ist die in die x -Achse fallende Achse des Trägheitsellipsoids ∞ , geht also das Trägheitsellipsoid eines jeden Punktes der Geraden in eine senkrechte Kreiscylinderfläche über, deren Achse die materielle Gerade ist.

Fig. 171.



Für irgend eine durch den Mittelpunkt S (Fig. 171) der als homogen vorausgesetzten geraden Linie, deren Länge $\overline{AA'} = l$ und deren constante lineare Dichtigkeit μ sei, geführte Hauptachse s , die unter dem Winkel α gegen die Gerade geneigt ist, ist das Trägheitsmoment dJ_s der im Elemente dx befindlichen Masse $dM = \mu \cdot dx$, wenn die Entfernung dieses Elementes von der Achse s und x dessen Entfernung vom Schwerpunkte S bedeutet, bestimmt durch $dJ_s = r^2 \cdot dM = r^2 \cdot \mu \cdot dx = x^2 \sin^2 \alpha \cdot \mu dx$, daher ist das Trägheitsmoment J_s der ganzen Linie

$$= \int dJ_s = \mu \cdot \sin^2 \alpha \cdot \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \mu \sin^2 \alpha \cdot \left(\frac{1}{3} x^3 \right)_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{12} \mu l^3 \sin^2 \alpha$$

und $M = \mu \cdot l$ die längs der ganzen Linie vertheilte Masse, daher

$$J_s = \frac{1}{12} M \cdot l^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{3} M d^2 \dots (1)$$

wenn $d = \frac{l}{2} \cdot \sin \alpha$ (Fig. 171) die Entfernung eines der beiden äußersten Punkte A, A' von der Achse s bedeutet.

Die Gleichung (1) lehrt, dass man sich behufs der Bestimmung des Trägheitsmomentes J_s bezüglich irgend einer Schwerpunktsachse s in irgend einem der Endpunkte A und A' den dritten Theil der Masse M der Linie vereinigt zu denken hat, denn

diese äquivalente Masse hätte in diesem Falle ebenfalls das Trägheitsmoment $J_s = \frac{1}{3} M d^2 = \frac{1}{3} M \left(\frac{l \sin \alpha}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} M l^2 \sin^2 \alpha$.

Der Trägheitshalbmesser q_s ist bestimmbar aus

$$q_s = \sqrt{\frac{J_s}{M}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} l \sin \alpha = 0.2887 \cdot l \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} d = 0.57735 d$$

Für eine durch einen Endpunkt A der Geraden zur Achse s parallel geführte Achse a , deren Neigungswinkel gegen die Gerade a ist, ist das Trägheitsmoment J_a und der Trägheitshalbmesser q_a (siehe S. 562, Gleichung 4)

$$\left. \begin{aligned} J_a &= J_s + M \cdot d^2 = \frac{1}{3} M d^2 + M \cdot d^2 = \frac{4}{3} M d^2 = \frac{1}{3} M l^2 \sin^2 \alpha \\ q_a &= \sqrt{\frac{J_a}{M}} = \frac{1}{\sqrt{3}} l \sin \alpha = 0.57735 \cdot l \sin \alpha \end{aligned} \right\} (2)$$

Für eine solche Achse a ist also gleichfalls die auf den anderen Endpunkt A' , d. i. auf den Abstand $2d = l \sin \alpha$ reducierte Masse dem dritten Theile der Masse der materiellen Linie gleich.

Stehen die Achsen s und a auf der Geraden senkrecht, so ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, daher

$$J_s = \frac{1}{12} M l^2, J_a = \frac{1}{3} M l^2, q_s = \frac{1}{2\sqrt{3}} l, q_a = \frac{1}{\sqrt{3}} l \dots (3a)$$

Für eine zur Gerade AA' in der Entfernung r parallele Achse ist offenbar, da der Abstand r für alle Punkte der Geraden denselben Wert hat,

$$J = \int r^2 \cdot dM = r^2 \cdot \int dM = M r^2 \dots (3b)$$

Wie man mit Hilfe des Wertes (1) das Trägheitsmoment für jede andere Achse mit Hilfe der Gleichung (4) S. 562 bestimmen kann, bedarf keiner weiteren Erörterung.

Anmerkung 1. Mit Hilfe dieser Formeln kann man zufolge der Auseinandersetzungen der Anmerkung 3 des früheren Paragraphen sehr leicht die Coordinaten a und b des Schwerpunktes S jenes Theiles F der Mantelfläche eines senkrechten Kreiskegelstumpfes (dessen Grundflächen die Radien r_2 und r_1 haben, und dessen Höhe H ist) oder eines Kegels, bezw. eines Cylinders ermitteln, welcher Theil F durch zwei achsiale ebene Schnitte, deren Neigungswinkel 2φ ist, begrenzt wird, und der auch durch Rotation einer Geraden AA' (Fig. 172) um irgend eine dieselbe schneidende oder zu derselben parallele Achse Ox entsteht.

Wendet man nämlich die in den Gleichungen (d) und (e) auf S. 589 in Fig. 172 gebrauchte Bezeichnung an, so ist zufolge (3 a) $\rho r^2 = \frac{1}{12} l^2$, er $\rho x^2 = 0$, $\sin A = \frac{r_2 - r_1}{l}$, $\cos A = \frac{H}{l}$, $\xi = \frac{H}{2}$, $\eta = \frac{r_1 + r_2}{2}$, daher zu-
e der erwähnten Gleichungen (d) und (e)

$$a = \frac{H}{3} \cdot \frac{2r_2 + r_1}{r_1 + r_2}, \quad b = \frac{2}{3} \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cdot \frac{r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2}{r_1 + r_2}$$

Der Wert des a stimmt mit der entsprechenden Gleichung (1) auf S. 508 rein.

Für einen Sector der Mantelfläche eines vollen Kreiskegels ist $r_1 = 0$, $r_2 = R$, also $a = \frac{2}{3} H$, $b = \frac{2}{3} R \frac{\sin \varphi}{\varphi}$ zu setzen; für den Theil einer senkrechten Kreiscylinderfläche ist $r_1 = r_2 = R$, also $a = \frac{H}{2}$, $b = R \frac{\sin \varphi}{\varphi}$ u. s. w.

Das Trägheitsmoment J_y des homogenen Kreisbogens \widehat{AB} (Fig. 145, S. 484) in Bezug den mittleren Radius OC (die z -Achse), der zugleich als Symmetrieachse eine Schwerpunktsachse darstellt, und das Trägheitsmoment J_x in Bezug die im Kreismittelpunkte O der OC senkrechte x -Achse lässt sich, wenn die Bezeichnung der Fig. 145 beibehalten wird, leicht gleichermaßen bestimmen. Es

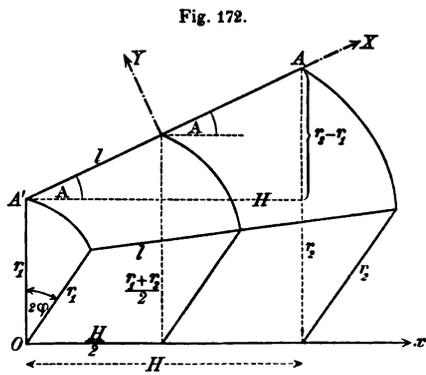


Fig. 172.

Es sind die Trägheitsmomente dJ_x und dJ_y der im Bogenelemente $ds = r \cdot d\varphi$ enthaltenen Masse dM bestimmt durch

$$dJ_x = y^2 \cdot dM = y^2 \cdot \mu_1 ds = r^2 \cos^2 \varphi \cdot \mu_1 \cdot r d\varphi = r^3 \mu_1 \cdot \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \cdot d\varphi$$

$$dJ_y = x^2 \cdot dM = x^2 \cdot \mu_1 ds = r^2 \sin^2 \varphi \cdot \mu_1 \cdot r d\varphi = r^3 \mu_1 \cdot \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \cdot d\varphi$$

mit

$$= \int dJ_x = \frac{r^3 \mu_1}{2} \left[\int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi + \frac{1}{2} \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos 2\varphi \cdot d(2\varphi) \right] = \frac{r^3 \mu_1}{2} (2\alpha + \sin 2\alpha)$$

$$= \int dJ_y = \frac{r^3 \mu_1}{2} \left[\int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi - \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos 2\varphi \cdot d(2\varphi) \right] = \frac{r^3 \mu_1}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha)$$

$$= \int dM = \int_{-\alpha}^{\alpha} \mu_1 \cdot r d\varphi = \mu_1 \cdot r \cdot 2\alpha$$

Bestimmt man μ_1 aus der letzten Gleichung und substituiert seinen Wert in die früheren Gleichungen, so findet man:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= M \cdot \frac{r^2}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right), J_y = M \cdot \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) \\ \varrho_x^2 &= \frac{r^2}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right), \varrho_y^2 = \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) \end{aligned} \right\} (4a)$$

und für die zur x -Achse parallele Schwerpunktsachse SE ist somit

$$J_x = J_x - M \cdot \overline{OS^2} = M \cdot \frac{r^2}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} - 2 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \right) \quad (4b)$$

Dass für die Achse, welche auf der Ebene des Kreisbogens im Kreismittelpunkte senkrecht steht, d. i. für die z -Achse $J_z = J_x + J_y = Mr^2$ ist, ergibt sich schon daraus, dass alle Punkte des Kreisbogens von der z -Achse denselben Abstand r haben.

Die Hauptcentralachsen des Kreisbogens sind offenbar CSO , SE und die auf der Ebene der Fig. 145 im Schwerpunkte S senkrechte Achse.

Dass für die volle Kreisperipherie, für welche $\alpha = \pi$ ist, $J_x = J_y = \frac{M}{2} \cdot r^2$ ist, ersieht man schon daraus, dass wegen der gleichen Massenvertheilung um die x - und y -Achse, d. i. um zwei senkrechte Durchmesser $J_x = J_y$, ferner $J_z = Mr^2$, also $Mr^2 = J_z = J_x + J_y = 2J_x$ ist. Das Centralellipsoid ist in diesem Falle ein Rotationsellipsoid, dessen geometrische Achse die z -Achse ist.

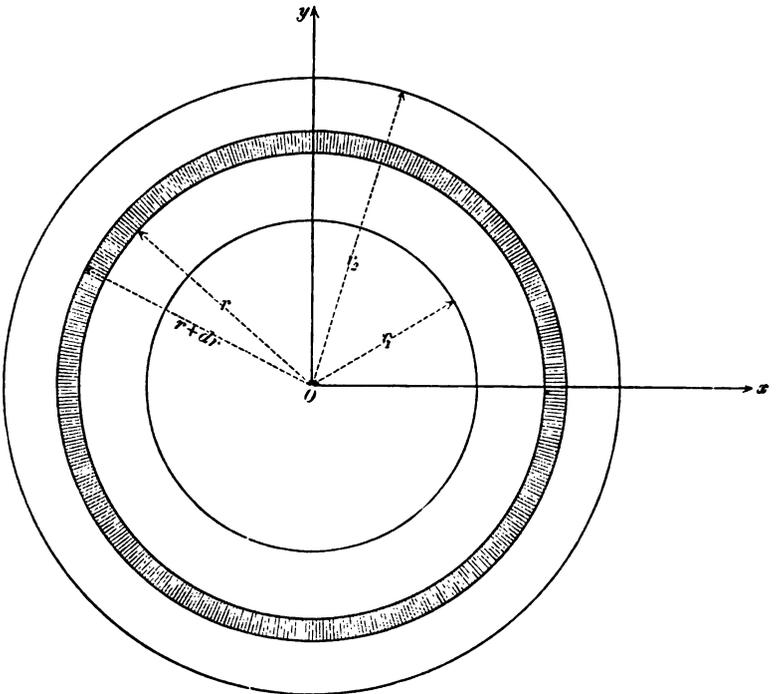
Auch für die halbe Kreisperipherie, d. i. für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist $J_x = J_y = \frac{M}{2} \cdot r^2$, also $\varrho_x = \varrho_y = r \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.707r$ und $J_x = 0.094Mr^2$.

Anmerkung 2. Auf dieselbe Art wie in der Anmerkung 1 lässt sich auf Grund der Formeln 4 a und 4 b mit Hilfe der Gleichungen (d) und (e) auf S. 589 unmittelbar die Lage des Schwerpunktes jener Fläche F bestimmen, die durch Rotation eines irgend einem Kreise angehörigen Kreisbogens um einen Durchmesser dieses Kreises oder um irgend eine andere in der Ebene des Kreises gelegene Achse (x -Achse), und zwar bei irgend einem Rotationswinkel 2φ entsteht, so z. B. die Lage des Schwerpunktes eines von zwei beliebigen Meridianen und zwei beliebigen Parallelkreisen eingeschlossenen Theiles einer Kugelzone, eines sphärischen Zweiecks u. s. w.

§ 97. Trägheitsmomente und Hauptachsen besonderer homogener ebener materieller Flächen.

Das Trägheitsmoment einer materiellen homogenen kreisförmigen Scheibe, beziehungsweise eines Kreisringes (Fig. 173), dessen innerer Kreis den Radius r_1 , der äußere den Radius r_2 hat, ist für zwei senkrechte Durchmesser (x - und y -Achse) von demselben Wert $J_x = J_y$, daher ist für die zur Kreisfläche im Mittelpunkte O senkrechte Achse (z -Achse) $J_z = 2J_x$. Zugleich sind die letztere Achse und alle Durchmesser Hauptcentralachsen.

Fig. 173.



Theilt man die Fläche F des Kreises, beziehungsweise Kreisringes in lauter concentrische ungemein schmale Kreisringe dF (siehe Fig. 173), die von Kreisen mit den Radien r und $r + dr$ begrenzt sind, so ist für das Trägheitsmoment dJ_x eines solchen elementaren Kreisringes dM , wie oben, $dJ_x = r^2 \cdot dM$, und da, wenn μ_f die Flächendichtigkeit bedeutet, $dM = \mu_f \cdot dF = \mu_f \cdot 2r\pi \cdot dr$ ist,

$$dJ_x = \mu_f \cdot 2r^3\pi \cdot dr, \text{ daher}$$

$$J_x = \int dJ_x = 2\mu_f\pi \cdot \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr = 2\mu_f\pi \cdot \frac{r_2^4 - r_1^4}{4}$$

und da $M = \mu_f \cdot F = \mu_f \cdot (r_2^2 - r_1^2) \pi$ ist, so ergibt die Division der beiden letzten Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2} M(r_1^2 + r_2^2), \text{ sonach ist} \\ J_y &= J_x = \frac{J_x}{2} = \frac{1}{4} M(r_1^2 + r_2^2) \\ i_x &= \frac{J_x}{\mu_f} = \frac{1}{2} F(r_1^2 + r_2^2) = \frac{\pi}{2} (r_2^4 - r_1^4) = 1.5708 (r_2^4 - r_1^4) \\ i_y &= i_x = \frac{i_x}{2} = \frac{\pi}{4} (r_2^4 - r_1^4) = 0.7854 (r_2^4 - r_1^4) \end{aligned} \right\} (1)$$

Bezeichnet man durch r den mittleren Halbmesser $\frac{r_1 + r_2}{2}$ und durch b die Breite des Kreisringes, so ist $r_1 = r - \frac{b}{2}$ und $r_2 = r + \frac{b}{2}$, daher $r_1^2 + r_2^2 = 2r^2 + \frac{1}{2}b^2$ zu setzen; es ist demnach nach (1) auch

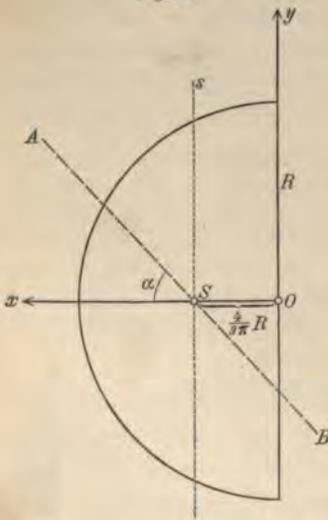
$$J_x = M \left(r^2 + \frac{b^2}{4} \right), \quad J_x = J_y = \frac{1}{2} M \left(r^2 + \frac{b^2}{4} \right)$$

Für eine volle Kreisscheibe vom Radius R ist in (1) $r_1 = 0$ und $r_2 = R$ zu setzen, also

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2} MR^2, \quad J_y = J_x = \frac{1}{2} MR^2 \\ i_x &= \frac{\pi}{2} R^2 = 1.5708 R^2, \quad i_y = i_x = \frac{\pi}{4} R^2 = 0.7854 R^2 \end{aligned} \right\} (2)$$

Die auf den Kreishalbmesser (auf den Kreisumfang) reducierte Masse ist demnach für die geometrische Achse der Kreisscheibe gleich der halben Masse derselben, in Bezug auf den Durchmesser der vierte Theil derselben. Am einfachsten denke man sich stets die Masse der Kreisscheibe für was immer für eine Schwerachse durch vier in den vier Endpunkten zweier zueinander senkrechter Durchmesser befindliche äquivalente Massen ersetzt, deren jede dem achten Theile der ganzen Masse gleichkommt.

Fig. 174.



Die Trägheitshalbmesser sind $\varrho_x =$
 $= \sqrt{\frac{J_x}{M}} = R \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.7071 R$ $\varrho_x = \varrho_y =$
 $= \sqrt{\frac{J_y}{M}} = \frac{1}{2} R$ u. s. w.

Da die beiden Quadranten einer halbkreisförmigen Fläche (Fig. 174) sowohl gegen den Grenzdurchmesser der letzteren (y -Achse), als auch gegen die Mittellinie (x -Achse) die genau gleiche Lage haben, so ist für den Halbkreis $i_x = i_y$ und aus begreiflichen Gründen i_y die Hälfte des entsprechenden Wertes in (2), also $i_x = i_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} R^2 = \frac{\pi}{8} R^2 =$

$= 0.3927 R^2$ und das geometrische Trägheitsmoment i_s in Bezug auf die durch den Schwerpunkt S , dessen Abstand vom Kreismittel-

unkte O (siehe S. 495) $s_y = \frac{4}{3\pi} R$ ist, parallel zur Basis geführte Achse s , welche die dritte Schwerpunkthauptachse (siehe S. 583) ist,

$$i_s = i_y - F \cdot s_y^2 = \frac{\pi}{8} R^4 - \frac{R^2 \pi}{2} \cdot \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 R^2 = 0.10976 R^4$$

und für die in der Kreisfläche liegende gegen die x -Achse unter dem Winkel α geneigte Schwerachse ASB ist nach Gleichung (6) 582 $i = i_x \cos^2 \alpha + i_s \sin^2 \alpha = (0.3927 \cos^2 \alpha + 0.1098 \sin^2 \alpha) \cdot R^4$.

Das Trägheitsmoment eines homogenen Kreissectors, dessen Radius R und dessen Mittelpunktswinkel 2α ist, bezüglich der diesen Mittelpunktswinkel halbierenden Symmetrieachse (der y -Achse) und jenes bezüglich der im Kreismittelpunkte O auf dieser Symmetrieachse in der Ebene des Sectors senkrechten x -Achse lässt sich leicht gendernmaßen bestimmen:

Theilt man den Kreissector durch concentrische Kreisbogen in endlich schmale Flächenelemente dF und ist durch r der Radius und durch dr die Dicke eines solchen Elements dF bezeichnet, auf welchem die Masse dM vertheilt ist, so sind die Trägheitsmomente dJ_x und dJ_y dieser als materielle Kreisbogen von der Länge $2\alpha r$ zuzehenden Massen dM zufolge 4a) auf S. 598

$$dJ_x = dM \cdot \frac{r^2}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right), \quad dJ_y = dM \cdot \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right).$$

Da nun $dM = \mu_f \cdot dF = \mu_f \cdot 2\alpha r \cdot dr$ ist, so ist

$$\left. \begin{aligned} &= \int dJ_x = \frac{1}{2} \mu_f (2\alpha + \sin 2\alpha) \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{4} \mu_f (\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha) \cdot R^4 \\ &= \int dJ_y = \frac{1}{2} \mu_f (2\alpha - \sin 2\alpha) \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{4} \mu_f (\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha) \cdot R^4 \\ &= \int dJ_x = \int r^2 \cdot dM = 2\alpha \cdot \mu_f \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \mu_f \alpha \cdot R^4 = J_x + J_y \end{aligned} \right\} (3)$$

Da nun $M = \int dM = \mu_f \alpha R^2$ ist, so ist

$$\begin{aligned} \rho = \frac{J_x}{M} &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) \cdot R^2, \quad \rho_y^2 = \frac{J_y}{M} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) R^2 \\ \rho_x^2 &= \frac{J_x}{M} = \frac{1}{2} R^2 \end{aligned}$$

und für die zur x -Achse parallele Schwerachse X , welche eine Hauptcentralachse ist, ist zufolge (1) S. 495

$$e_x^2 = e_x'^2 - Y^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) R^2 - \frac{4}{9} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \cdot R^2$$

Für den Sector eines Kreisringes mit dem Centriwinkel 2α , der zwischen zwei Kreislinien, deren Radien R und r sind, gelegen ist, sind die Integrationsgrenzen in (3) R und r , daher

$$J_x = \frac{1}{4} \mu_f (\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha) (R^4 - r^4), \quad J_y = \frac{1}{4} \mu_f (\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha) (R^4 - r^4)$$

und $M = \mu_f \alpha (R^2 - r^2)$ zu setzen, daher

$$e_x^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) (R^2 + r^2), \quad e_y^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) (R^2 + r^2)$$

und zufolge Gleichung (4), S. 497 für die zur x -Achse parallele Schwerachse X , die eine Hauptcentralachse ist,

$$e_x^2 = e_x'^2 - r^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) (R^2 + r^2) - \frac{4}{9} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \left(\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \right)^2$$

Anmerkung 1. Setzt man die hier abgeleiteten Werte von e_x und $e_y = e_y'$ in die Gleichungen (d) und (e) auf S. 589 ein, so erhält man die Coordinaten a und b des Schwerpunktes jenes Volums V , welches durch Rotation irgend eines Ringsectors, bezw. Kreissectors, Halbkreises u. s. w. um irgend eine in der Ebene derselben gelegene Achse durch den Rotationswinkel 2φ entsteht. Man gelangt so unter anderem, wenn als Rotationsachse eine durch den Kreismittelpunkt gelegte Achse angenommen wird, bei der Berechnung von a zu den auf S. 528 und 529 abgeleiteten Formeln. Ebenso kann man leicht mittels der Gleichungen (h) und (i), S. 591, den Schwerpunkt S eines schief abgeschnittenen Cylinders bestimmen, dessen eine Basisfläche ein Kreis, Halbkreis, Kreissector oder Ringsector ist. Man findet so z. B. für einen schief abgeschnittenen Kreiscylinder, dessen zur Seite des Cylinders senkrechte Basisfläche F' (siehe Fig. 169) ein Kreis vom Radius r ist, wenn zur x -Achse die Durchschnittsline der beiden Basisflächen und zum Anfangspunkte die orthogonale Projection des Kreismittelpunktes gewählt und durch H der Abstand ss' der beiden Basis-schwerpunkte bezeichnet wird, $x_s = 0$, $y'_s = l'_x = \eta' + \frac{1}{4} \frac{r^2}{\eta'} = H \cotang \alpha + \frac{1}{4} \frac{r^2 \operatorname{tg} \alpha}{H}$, $z_s = \frac{1}{2} y'_s \operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{2} + \frac{1}{8} \frac{r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{H}$. Der Abstand des Schwerpunktes S von der Achse ss' ist sonach $\frac{1}{4} \cdot \frac{r^2 \operatorname{tg} \alpha}{H}$.

Das Trägheitsmoment eines homogenen Parallelogramms $A_1 A_2 A_3 A_4$ (Fig. 175), dessen Seiten a und b den Winkel α einschließen, zunächst in Bezug auf die im Mittelpunkte S desselben auf seiner Ebene normale Schwerpunkthauptsache — die z -Achse — lässt sich leicht folgenderart berechnen:

Theilt man das Parallelogramm durch unendlich nahe aneinander liegende, zur Seite a parallele Gerade in Streifen dM , die als homogene materielle gerade Linien angesehen werden können, so

Liegen die Mittelpunkte C der letzteren in der zur zweiten Seite b **parallelen** Mittellinie $C_1 C_2$ des Parallelogramms, die als x -Achse **angenommen** sei. Das **Trägheitsmoment** dJ_s eines solchen **Streifens** dM in Bezug auf **die** durch den Mittelpunkt **(Schwerpunkt)** C desselben zur z -Achse **parallele** Achse s ist **zufolge** Gleichung (1), S. 595,

$$dJ_s = \frac{1}{12} a^2 \cdot dM \text{ und zufolge}$$

der Gleichung (4), S. 562, **wenn** $SC = x$ die **Abscisse** **dieses** Streifens ist, das **Trägheitsmoment** in Bezug auf die z -Achse $dJ_z = dJ_s + x^2 \cdot dM =$

$$= \left(\frac{1}{12} a^2 + x^2 \right) dM. \text{ Da nun } dM = \mu_f \cdot dF = \mu_f \cdot a \sin \alpha \cdot dx \text{ ist, so muss}$$

$$J_z = \int dJ_z = \mu_f \cdot a \sin \alpha \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{1}{12} a^2 + x^2 \right) dx = \mu_f a \sin \alpha \left[\frac{1}{12} a^2 b + \frac{1}{12} b^3 \right] = \\ = \frac{1}{12} \mu_f a b \sin \alpha (a^2 + b^2)$$

sein und, da $M = \mu_f \cdot F = \mu_f a b \sin \alpha$ ist,

$$J_z = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) \dots (4)$$

Demgemäß ist der **Trägheitshalbmesser** ρ_z , ferner das **geometrische Trägheitsmoment** i_z der **Fläche** F des Parallelogramms **bezüglich** der z -Achse **bestimmt** durch die **Gleichungen**

$$\rho_z^2 = \frac{1}{12} (a^2 + b^2), i_z = F \cdot \rho_z^2 = a b \sin \alpha \cdot \rho_z^2 = \frac{1}{12} a b \sin \alpha (a^2 + b^2) \dots (5)$$

Da ferner das **Trägheitsmoment** dJ_x des Streifens dM **bezüglich** der zur Seite b **parallelen** Schwerachse SC — der x -Achse — **zufolge** der Gleichung (1), S. 595, $dJ_x = \frac{1}{12} dM \cdot a^2 \sin^2 \alpha$ ist, so ist

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \int dJ_x = \frac{1}{12} a^2 \sin^2 \alpha \cdot \int dM = \frac{1}{12} M a^2 \sin^2 \alpha \\ \text{daher} \quad \rho_x^2 &= \frac{1}{12} a^2 \sin^2 \alpha, i_x = \frac{1}{12} F a^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{12} a^3 b \cdot \sin^3 \alpha \end{aligned} \right\} (6)$$

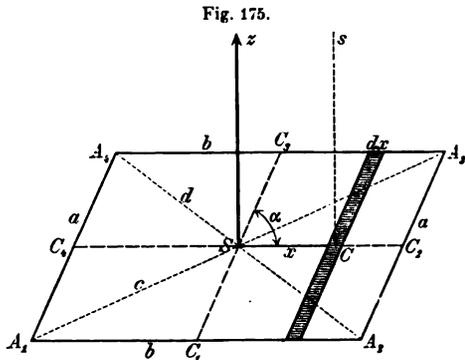


Fig. 175.

Wählt man die zur x -Achse conjugierte, zur Seite a parallele Schwerachse C_1SC_3 zur Y -Achse, so ist aus gleichen Gründen

$$J_Y = \frac{1}{12} M b^2 \sin^2 \alpha, \quad \varrho_Y^2 = \frac{1}{12} b^2 \sin^2 \alpha, \quad i_Y = \frac{1}{12} a b^3 \sin^3 \alpha \quad \dots \quad (7)$$

Dagegen wäre für die zur zx -Ebene senkrechte Schwerpunktsachse y (die Höhenachse des Parallelogramms) zufolge der Gleichung (1) auf S. 579

$$J_y = J_z - J_x = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) - \frac{1}{12} M a^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{12} M [a^2 \cos^2 \alpha + b^2]$$

Die Trägheitsmomente J_a und J_b in Bezug auf die Seiten a und b des Parallelogramms, welche von den zu denselben parallelen Schwerachsen Y und x die Entfernungen $s_a = \frac{1}{2} b \sin \alpha$, $s_b = \frac{1}{2} a \sin \alpha$ haben, sind den früheren Gleichungen gemäss

$$\left. \begin{aligned} J_a &= J_Y + M \cdot s_a^2 = \frac{1}{12} M b^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} M b^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{3} M b^2 \sin^2 \alpha \\ J_b &= J_x + M \cdot s_b^2 = \frac{1}{12} M a^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} M a^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{3} M a^2 \sin^2 \alpha \\ \text{daher} \\ \varrho_a^2 &= \frac{1}{3} b^2 \sin^2 \alpha, \quad \varrho_b^2 = \frac{1}{3} a^2 \sin^2 \alpha, \quad i_a = F \varrho_a^2 = \frac{1}{3} a b^3 \sin^3 \alpha, \\ i_b &= F \varrho_b^2 = \frac{1}{3} a^3 b \cdot \sin^3 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Sind c und d die Diagonalen $\overline{A_1 A_3}$ und $\overline{A_2 A_4}$ des Parallelogramms, so ist in dem Dreiecke $A_2 A_1 A_3$, da α der Winkel $A_2 A_1 A_3$ ist, nach dem Carnotschen Satze $d^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos \alpha$ und im Dreiecke $A_1 A_2 A_4$ nach demselben Satze $c^2 = a^2 + b^2 + 2 a b \cos \alpha$, daher $c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$, d. h. die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der doppelten Summe der Quadrate der Seiten. Setzt man demgemäß statt $a^2 + b^2$ den gleichen Wert $\frac{c^2 + d^2}{2}$ in die Gleichung (4) ein, so findet man

$$J_z = \frac{1}{24} M (c^2 + d^2) \quad \dots \quad (9)$$

Diese Gleichung lehrt, dass die Masse M des Parallelogramms bezüglich der Schwerpunktsachse z äquivalent ist vier in den Eckpunkten $A_1 A_2 A_3 A_4$ des Parallelogramms befindlichen Massen, von denen jede dem zwölften Theile der Masse M des Parallelogramms gleich ist, denn jede der beiden Massen in A_2 und A_4 hat dann das Trägheitsmoment $\frac{1}{12} M \left(\frac{c}{2}\right)^2$ und jede der Massen in A_1 und A_3 das Trägheitsmoment $\frac{1}{12} M \left(\frac{d}{2}\right)^2$, so dass in der That die Summe dieser vier Trägheitsmomente dem obigen Werte (13) gleichkommt. Würde man die äqui-

valenten Massen in den vier Mittelpunkten $C_1 C_2 C_3 C_4$ der Seiten annehmen, so müsste jede dieser Massen der Gleichung (4) zufolge $\frac{1}{6} M$ sein.

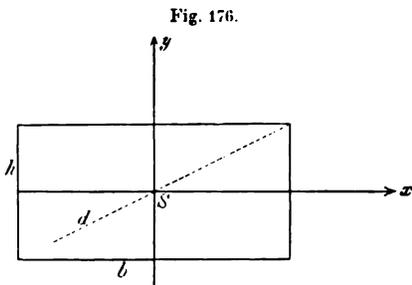
Dass übrigens dieser Lehrsatz nicht nur, wie oben nachgewiesen wurde, für die zur Ebene des Parallelogramms senkrechte, sondern auch für eine jede andere Schwerpunktsachse z Giltigkeit hat, ist sofort zu ersehen aus dem auf S. 582 nachgewiesenen Satze, demzufolge der Trägheitsradius ϱ_z einer ebenen Fläche F bezüglich einer Achse — hier der z -Achse — stets gleich ist dem Trägheitsradius ϱ_z' der Projection F' dieser Fläche F auf eine zu dieser Achse senkrechte Ebene, für welche letztere zufolge der Gleichung (4) und (9) $\varrho_z'^2 = \frac{1}{12} (a'^2 + b'^2) = \frac{1}{24} (c'^2 + d'^2)$ ist, wofern a' und b' nicht die Seiten a und b und c' und d' nicht die Diagonalen c und d des ursprünglich projicierten Parallelogramms F , sondern jene des Parallelogramms F' , sonach die orthogonalen Projectionen von a, b, c, d in die zur z -Achse senkrechte Ebene bedeuten; mit anderen Worten, es sind im Einklange mit der obigen Behauptung $\frac{a'}{2}, \frac{b'}{2}$ die senkrechten Abstände der Seitenmittelpunkte von der z -Achse und $\frac{c'}{2}, \frac{d'}{2}$ die senkrechten Abstände der Eckpunkte von derselben Achse. Aus diesem allgemeinen Lehrsätze lassen sich auch die früheren Gleichungen (4) bis (7) unmittelbar folgern.

Anmerkung 2. Die in die Ebene eines Parallelogramms fallenden Hauptcentralachsen lassen sich leicht mit Zuhilfenahme der in der Anmerkung 2 des Paragraphen 95 deducierten Methode bestimmen. Da nämlich die zu den Seiten a und b des Parallelogramms parallelen Mittellinien $C_1 C_3$ und $C_2 C_4$ (Fig. 175) offenbar die Eigenschaft haben, dass jede derselben die zu der anderen parallelen Sehnen des Parallelogramms halbiert, so haben diese (siehe S. 586) die Lage zweier conjugierter Diameter der reciproken Binet'schen Ellipse e oder auch jener der Centralellipse, und die Länge der in die Gerade $C_1 C_3$, d. i. in die Achse Y fallenden Semidiameter B der letzteren ist $B = \frac{\varepsilon^2}{\varrho_Y}$, also der Gleichung (7) zufolge $B = \sqrt{12} \cdot \frac{\varepsilon^2}{b \sin \alpha}$, während die Länge des zu b parallelen Semidiameters A der Centralellipse, dessen Richtung $C_2 C_4$ nunmehr zur Richtung der X -Achse (früher x -Achse) des schiefwinkligen Achsensystems XY gewählt sei, den Wert $A = \frac{\varepsilon^2}{\varrho_X}$, sonach zufolge (6) den Wert $A = \sqrt{12} \cdot \frac{\varepsilon^2}{a \sin \alpha}$ hat. Da nun in zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen mit demselben Mittelpunkte S die conjugierten Diameter gleich gelegen sind, ebenso auch die Achsen, da ferner das Verhältnis zweier in dieselbe Richtung fallenden Semidiameter in solchen Ellipsen für alle Diameter dasselbe ist, so kann man behufs der Bestimmung der mit den Achsen der Centralellipse übereinstimmenden Centralhauptachsen statt derselben eine ihr ähnliche und ähnlich gelegene Ellipse wählen, deren conjugierte Diameter auch die Lage $C_1 C_3$ und $C_2 C_4$ haben und sich verhalten wie $B:A$, d. i. wie $a:b$. Man kann dementsprechend die Mittellinien $C_1 C_3$ und $C_2 C_4$, deren Längen $2a$ und $2b$ sind, selbst als die conjugierten Diameter einer solchen der Centralellipse ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipse ansehen. Man hat sonach nur diese Ellipse, deren conjugierte Diameter $C_2 C_4$ und $C_1 C_3$ sind, und die daher von den Seiten des gegebenen Parallelogramms tangiert wird, zu construieren, mit anderen Worten, dem gegebenen Parallelogramm (in bekannter Weise) eine Ellipse einzuschreiben, die das Parallelogramm in den Seitenmittelpunkten berührt, und

die Hauptachsen dieser Ellipse zu bestimmen. Die letzteren sind dann die gesuchten Hauptcentralachsen. Wählt man diese letzteren als die Achsen x und y eines zweiten (rechtwinkligen) Achsensystems, so ist, da nach (6) und (7) $e_x = \sqrt{\frac{1}{12}} \cdot a \sin \alpha$ und $e_y = \sqrt{\frac{1}{12}} \cdot b \sin \alpha$ ist, den Gleichungen (f), (g), (h) auf S. 587 zufolge $e_x = \sqrt{\frac{1}{12} (a^2 + b^2)} \cdot \sin \lambda$, $e_y = \sqrt{\frac{1}{12} (a^2 + b^2)} \cdot \cos \lambda$, $\sin 2\lambda = \frac{2ab}{a^2 + b^2} \cdot \sin \alpha$, $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{b^2 + a^2 \cos 2\alpha}$, wo φ irgend einen der beiden Neigungswinkel (X, x) und (X, y) der Hauptcentralachsen x und y gegen die Achse $C_1 C_2$ bedeutet, und sowohl (X, x), als auch α und 2λ als positive spitze Winkel vorausgesetzt sind. (Ist $e_x < e_y$, also $a < b$, so fällt die große Halbachse der Centralellipse, d. i. die Achse x des kleinsten Trägheitsmomentes, für welche $\lambda < \frac{\pi}{4}$ ist, in die Winkelfläche $A_1 S C_2$ (Fig. 175).

Anmerkung 3. Mit Hilfe der Formeln (4), (5) u. s. w. kann man auch leicht sofort mittels der in Anmerkung 3, § 95, abgeleiteten Gleichungen d. (h) und (i) den Schwerpunkt desjenigen Volums bestimmen, das entsteht, wenn ein Parallelogramm um irgend eine in der Ebene desselben liegende Achse durch irgend einen Winkel 2φ rotiert (z. B. den Schwerpunkt eines Keiles, dessen Rückenfläche einer Cylinderfläche angehört, des keilförmigen Ausschnittes eines Hohlcyllinders u. s. w.), und auch den Schwerpunkt eines schief abgeschnittenen beliebigen Parallelepipeds.

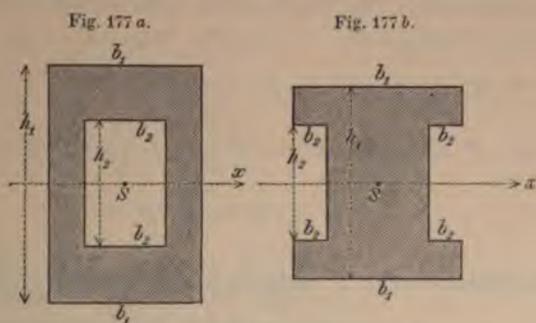
Bei einem Rechtecke (Fig. 176) sind die zu der Basis b und der Höhe h parallelen Schwerpunktsachsen x und y , da dieselben Symmetrieachsen des Rechteckes sind, auch die Hauptcentralachsen, während die dritte Schwerpunktschwerachse z , wie bei allen ebenen Flächen, auf der Ebene der Fläche in S senkrecht steht. Es ist ferner den Gleichungen (4) bis (8) zufolge, da $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $a = h$ zu setzen ist,



$$\left. \begin{aligned} J_x &= \frac{1}{12} M h^2, & J_y &= \frac{1}{12} M b^2, \\ J_z &= J_x + J_y = \frac{1}{12} M (b^2 + h^2) = \frac{1}{12} M d^2 \\ J_b &= \frac{1}{3} M h^2, & J_h &= \frac{1}{3} M b^2, & i_b &= \frac{1}{3} F h^2 = \frac{1}{3} b h^3 \\ i_x &= \frac{1}{12} F h^2 = \frac{1}{12} b h^3, & i_y &= \frac{1}{12} F b^2 = \frac{1}{12} b^3 h, \\ i_z &= \frac{1}{12} b h (b^2 + h^2) = \frac{1}{12} b h d^2 \end{aligned} \right\} (10)$$

wenn d die Diagonale des Rechteckes bedeutet.

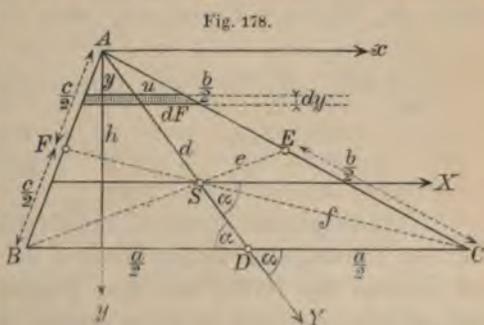
Aus allen diesen Formeln (10) ist die einfache, früher auch für eine homogene materielle gerade Linie aufgestellte Regel zu entnehmen, dass man behufs der Bestimmung des Trägheitsmomentes J eines homogenen materiellen Rechteckes bezüglich irgend einer der Achsen x, y, z, b, h sich nur in irgend einem der vier Eckpunkte den **dritten** Theil der Masse M (bei der Bestimmung des geometrischen Trägheitsmomentes i den dritten Theil der Fläche F) concentrirt zu denken hat. Das Trägheitsmoment des derart im Abstände $r = \frac{h}{2}, \frac{b}{2}, \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + h^2}$, h, b fingierten materiellen Punktes von der Masse $m = \frac{1}{3} M$, nämlich $m r^2$ stimmt in allen diesen Fällen mit dem gesuchten Trägheitsmomente überein.



Dass der drittletzten Formel in (10) zufolge für die Fläche (Fig. 177 a) $i_x = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 - \frac{1}{12} b_2 h_2^3$ und für Fig. 177 b $i_x = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 - 2 \cdot \frac{1}{12} b_2 h_2^3$ ist, bedarf keiner Erläuterung.

Übergeht das Rechteck (Fig. 176) in ein Quadrat, ist also $b = h$, so ist $J_x = J_y = \frac{1}{12} M b^2$, und es sind alle durch den Mittelpunkt des Quadrates in der Ebene desselben geführten Achsen Hauptcentralachsen.

Der Wert des Trägheitsmomentes eines homogenen Dreieckes ABC (Fig. 178) zunächst in Bezug auf eine zur Basis $BC = a$ durch die gegenüberliegende Spitze A geführte Parallele



— die x -Achse — lässt sich auf folgende Art leicht deducieren: Es sei die von A aus senkrecht zu a gelegte Dreieckshöhe h zur y -Achse gewählt.

Theilt man das Dreieck durch unendlich viele, ungemein nahe, zur Basis a parallele Transversale in ungemein schmale Streifen, die als homogene materielle gerade Linien angesehen werden können, und ist u die Länge, y die Ordinate, dy die Breite, dF die Fläche und di_x das geometrische Trägheitsmoment eines solchen Streifens, so ist offenbar $di_x = dF \cdot y^2$ und $dF = u \cdot dy$, also $di_x = u \cdot y^2 \cdot dy$. Zufolge der bekannten Proportion $u : a = y : h$ ist aber $u = ay : h$, daher $dF = \frac{a}{h} \cdot y \cdot dy$ und $di_x = \frac{a}{h} \cdot y^3 \cdot dy$, somit

$$F = \frac{a}{h} \cdot \int_0^h y \, dy = \frac{a}{h} \cdot \frac{h^2}{2} = \frac{ah}{2} \quad \text{und} \quad i_x = \frac{a}{h} \cdot \int_0^h y^3 \, dy = \frac{1}{4} ah^3 = \frac{1}{2} Fh^2 \quad (11)$$

Das geometrische Trägheitsmoment i_x bezüglich der zur x -Achse parallelen Schwerpunktsachse X , welche bekanntlich die Entfernung $s_x = \frac{2}{3} h$ von der x -Achse hat, ist sonach

$$i_x = i_x - F \cdot s_x^2 = \frac{1}{2} Fh^2 - F \left(\frac{2}{3} h \right)^2 = \frac{1}{18} Fh^2 = \frac{1}{36} ah^3 \quad \left. \begin{array}{l} \text{und} \\ e_x^2 = i_x : F = \frac{1}{18} h^2 \end{array} \right\} (12)$$

und das Trägheitsmoment i_a bezüglich der Basis a , welche in der Entfernung $s_a = \frac{1}{3} h$ von der parallelen Schwerpunktsachse X sich befindet,

$$i_a = i_x + F \cdot s_a^2 = \frac{1}{18} Fh^2 + F \cdot \left(\frac{1}{3} h \right)^2 = \frac{1}{6} Fh^2 = \frac{1}{12} ah^3 \dots (13)$$

Die analogen Trägheitsmomente der Masse M einer homogenen materiellen dreieckförmigen Platte, deren Flächendichtigkeit μ_f ist, sind, da $M = \mu_f \cdot F = \mu_f \cdot \frac{ah}{2}$ ist,

$$\left. \begin{array}{l} J_x = \frac{1}{2} Mh^2 = \frac{1}{4} \mu_f \cdot ah^3, \quad J_x = \frac{1}{18} Mh^2 = \frac{1}{36} \mu_f \cdot ah^3, \\ J_a = \frac{1}{6} Mh^2 = \frac{1}{12} \mu_f \cdot ah^3 \end{array} \right\} (14)$$

Das Trägheitsmoment J_n des Dreieckes bezüglich einer Achse n , die im Mittelpunkte D der Basis a zur Dreiecksebene normal steht, ist offenbar die Hälfte von dem Trägheitsmomente $2J_n$ jenes Parallelogramms, das sich ergeben würde, wenn man von B und C Parallele zu den Gegenseiten $\overline{CA} = b$ und $\overline{AB} = c$ führen würde, d. i. jenes Parallelogramms, dessen Mittelpunkt D und dessen Seiten b und c sind; das Gleiche gilt auch von der Masse M und der Fläche F .

Zufolge der Gleichung (4) ist sonach $2J_n = \frac{1}{12} \cdot 2M(b^2 + c^2)$, also

$$J_n = \frac{1}{12} M(b^2 + c^2) \dots (15)$$

Sind nun d, e, f die von den Spitzen ABC aus gezogenen Medianen des Dreiecks und α der spitze Winkel (a, d) , so ist im Dreiecke ABD $c^2 = d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2d \frac{a}{2} \cos \alpha$ und im Dreiecke ACD analog $b^2 = d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2d \cdot \frac{a}{2} \cos \alpha$,
sonach

$$b^2 + c^2 = 2d^2 + \frac{a^2}{2} \text{ und } d^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2 \dots (16)$$

Für die durch den Schwerpunkt S des Dreiecks zur Dreiecksebene senkrecht geführte Achse s ist, da bekanntlich $\overline{SD} = \frac{1}{3}d$ ist, $J_s = J_n - M \cdot \left(\frac{1}{3}d\right)^2$, daher, wie sich durch die Einführung der eben berechneten Werte aus (15) und (16) ergibt

$$J_s = \frac{1}{36} M(a^2 + b^2 + c^2) \dots (17)$$

Durch Addition der drei dem Werte (16) von d^2 analogen auf die anderen Meridianen e und f sich beziehenden Gleichungen findet man, dass $d^2 + e^2 + f^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$, so dass J_s auch in folgenden Formen ausgedrückt werden kann

$$J_s = \frac{1}{27} M(d^2 + e^2 + f^2) = \frac{1}{3} M \left[\left(\frac{d}{3}\right)^2 + \left(\frac{e}{3}\right)^2 + \left(\frac{f}{3}\right)^2 \right] = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. (18)$$

$$= \frac{1}{12} M \left[\left(\frac{2}{3}d\right)^2 + \left(\frac{2}{3}e\right)^2 + \left(\frac{2}{3}f\right)^2 \right]$$

Die letzten Gleichungen (17) und (18), welche nach dem Satze (S. 582), demzufolge der Trägheitsradius einer Fläche bezüglich einer Achse auch gleich ist dem Trägheitsradius ihrer Projection auf die zur Achse senkrechte Ebene E , auch für jede andere durch S geführte Achse Giltigkeit haben, wofern abc die orthogonalen Projectionen der Dreiecksseiten auf die Ebene E und def die Projectionen der Medianen sind, lehren, dass die Masse eines homogenen Dreiecks in Bezug auf eine jede Schwerpunktsachse s , wie dies auch bei dem Parallelogramm der Fall war, äquivalent ist drei in den Eckpunkten ABC befindlichen Massen, deren jede einem Zwölftel der Dreiecksmasse gleicht, oder auch für alle Schwerpunktsachsen äquivalent dreien in den Mittelpunkten DEF der drei Seiten befindlichen Massen, von denen jede $\frac{1}{3} M$ ist, denn es sind in Übereinstimmung mit (18) die Abstände der Eckpunkte ABC von der erwähnten Schwerpunktsachse stets $\frac{2}{3}d, \frac{2}{3}e, \frac{2}{3}f$, und die Achsendistanzen der Mittelpunkte DEF sind $\frac{d}{3}, \frac{e}{3}, \frac{f}{3}$.

Für eine z. B. durch A zur früheren Achse s parallel geführte Achse: ist $J_s = J_s + M \left(\frac{2}{3} d \right)^2$ oder, wie sich durch Einführung der früheren Werte aus (16) und (17) ergibt, $J_s = \frac{1}{12} M [3(b^2 + c^2) - a^2]$ und sonach $J_s = J_s - J_x = J_s - \frac{1}{2} M h^2 = \frac{1}{24} M \left[a^2 + 3 \frac{(b^2 - c^2)^2}{a^2} \right]$.

Anmerkung 4. Da die in die Richtung der Mediane ASD fallende Achse Y alle zu der Basis $\overline{BC} = a$, also auch die zur parallelen Schwerachse X parallelen Sehnen des Dreiecksumfangs halbiert, so sind (siehe S. 586 und Anm. 2) die Achsen X und Y conjugierte Durchmesser der Centralellipse, deren Hauptachsen die Richtung der in der Dreiecksebene liegenden beiden Hauptcentralachsen des Dreiecks haben, und zwar sind, wenn α (Fig. 178) den spitzen Winkel (XY) bedeutet, die Längen A und B dieser Semidiameter $A = \frac{e^2}{e_x} = \sqrt{18} \cdot \frac{e^2}{h} = \sqrt{18} \cdot \frac{e^2}{d \sin \alpha} = \frac{3 \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{e^2}{F} \cdot a$ und $B = \frac{e^2}{e_y}$. Nun ist analog der Gleichung (13) das Trägheitsmoment $\frac{1}{2} i_x$ jedes der beiden flächengleichen Dreiecke ABD und ACD , welche die gemeinsame Basis d und die gleiche Höhe $\frac{a}{2} \sin \alpha$ haben, bezüglich der Y -Achse $\frac{1}{6} \cdot \frac{F}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} \sin \alpha \right)^2 = \frac{1}{48} F \cdot a^2 \sin^2 \alpha$; sonach ist $i_x = F \cdot e_x^2 = \frac{1}{24} F \cdot a^2 \sin^2 \alpha$, daher $B = \frac{e^2}{e_y} = \sqrt{24} \cdot \frac{e^2}{a \cdot \sin \alpha} = \sqrt{6} \cdot \frac{e^2}{F} \cdot d$. Ebenso sind die in die Richtung von e und f fallenden Semidiameter der Centralellipse $\sqrt{6} \frac{e^2}{F} \cdot e$ und $\sqrt{6} \cdot \frac{e^2}{F} \cdot f$; es ist demnach das Verhältnis der drei in die Richtungen SD, SE, SF fallenden Semidiameter $d:e:f$ oder $\frac{2}{3} d : \frac{2}{3} e : \frac{2}{3} f = SA:SB:SC$. Wenn man demnach (vergl. Anm. 2) eine Ellipse construirt, deren Mittelpunkt S ist, und welche die drei Eckpunkte ABC des Dreiecks enthält, so sind die Achsen dieser dem Dreieck umschriebenen Ellipse, deren Tangenten in ABC zu den Dreiecksseiten abc parallel sind, die Schwerpunkthauptachsen. Dasselbe ist, da $d:e:f = \frac{1}{3} d : \frac{1}{3} e : \frac{1}{3} f = SD:SE:SF$ ist, auch der Fall bei jener dem Dreieck eingeschriebenen Ellipse, die durch die Mittelpunkte DEF der Seiten geführt ist, und welche zugleich die Dreiecksseiten abc berührt.

Die Richtungswinkel φ der beiden im Schwerpunkte S sich schneidenden Achsen x und y aller dieser Ellipsen in Bezug auf die Achse X sind der Gleichung (f) auf S. 587 zufolge, da $e_x = h \sqrt{\frac{1}{18} - d \sin \alpha} \cdot \sqrt{\frac{1}{18}}$, $e_y = a \sin \alpha \cdot \sqrt{\frac{1}{24}}$ ist, aus der Gleichung $\cotg 2 \varphi = \cotg 2 \alpha + \frac{3}{4} \frac{a^2}{d^2 \sin^2 \alpha}$ bestimmbar, wobei es keiner Schwierigkeit unterliegt, die letztere Summe entweder durch die drei Dreiecksseiten abc oder die drei Dreieckswinkel auszudrücken. Die Hauptträgheitshalbmesser bezüglich der drei Hauptcentralachsen xyz des Dreiecks haben den Gleichungen (g) und (h) auf S. 587 gemäß die Werte

$$e_x = \frac{1}{12} \sqrt{8d^2 + 6a^2 \sin \lambda}, \quad e_y = \frac{1}{12} \sqrt{8d^2 + 6a^2 \cos \lambda}, \quad e_z = \frac{1}{12} \sqrt{8d^2 + 6a^2}$$

wofern $\sin 2\lambda = 4 \sqrt{3} \cdot \frac{ad}{4d^2 + 3a^2} \cdot \sin \alpha$ ist.

Anmerkung 5. Mittels der hier abgeleiteten Gleichungen und jener der Anmerkung 3 auf S. 588 ist es leicht, den Schwerpunkt eines jeden keilförmigen

Körpers zu bestimmen, der durch Rotation eines beliebigen Dreiecks um irgend eine in der Dreiecksebene gelegene Achse entsteht (z. B. des keilförmigen Ausschnittes eines Kegels oder Hohlkegels), und ebenso den Schwerpunkt eines jeden schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas.

Ist das Dreieck ABC ein rechtwinkliges Dreieck und a die Hypotenuse desselben, also $b^2 + c^2 = a^2$, so führen die bisherigen Formeln zu einfachen Werten, die sich übrigens auch aus (10) leicht ableiten lassen. Ist a die Basis eines gleichschenkeligen Dreiecks und F dessen Flächeninhalt, so ist für die auf der Basis a senkrechte Mittellinie y desselben, da die Höhe h die Basis a halbiert, und da h als die gemeinsame Basis der beiden Dreieckshälften, deren Höhe ($a:2$) ist, angesehen werden kann, zufolge (13)

$$i_y = \frac{1}{6} \cdot \frac{F}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{F}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{24} F a^2 = \frac{1}{48} a^2 h$$

Die Mittellinie y des gleichschenkeligen Dreiecks ist als Symmetrieachse eine Hauptcentralachse wie auch die zur Basis a parallele Schwerachse x , für welche letztere nach (12) $i_x = \frac{1}{18} F h^2 = \frac{1}{36} a h^2$ ist. Für die zur Dreiecksebene senkrechte Hauptcentralachse z ist $i_z = i_y + i_x = \frac{1}{24} F a^2 + \frac{1}{18} F h^2$.

Ist das Dreieck ein gleichseitiges, also $h^2 = \frac{3}{4} a^2$, so sind alle drei Mittellinien Symmetrieachsen, demnach $i_x = i_y = \frac{\sqrt{3}}{96} a^4$, und alle durch den Schwerpunkt in der Dreiecksebene geführten Achsen sind freie Achsen, für welche $i = \frac{\sqrt{3}}{96} a^4$ ist, während $i_z = 2i$ ist.

Das Trägheitsmoment eines regulären in der xy -Ebene gelegenen Polygons von der Fläche F , dessen Seite a , dessen Seitenanzahl n , dessen Mittelpunkt O ist, und dessen eingeschriebener Kreis den Halbmesser r besitzt, lässt sich etwa folgendermaßen berechnen: Verbindet man den Mittelpunkt O mit den einzelnen Eckpunkten und den Seitenmittelpunkten, so zerfällt das Polygon in $2n$ congruente Dreiecke \mathcal{A} von der Fläche $\frac{F}{2n}$. Führt man die x -, bzw. y -Achse durch O parallel, beziehungsweise senkrecht zu einer Seite a , so sind die Trägheitsmomente i_x^A und i_y^A des entsprechenden Dreiecks $\frac{F}{2n}$ bezüglich dieser Achsen nach (11) $i_x^A = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{2n} \cdot r^2$, bzw. nach (13) $i_y^A = \frac{1}{6} \cdot \frac{F}{2n} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2$, somit das Trägheitsmoment i_z^A des Dreiecks \mathcal{A} bezüglich der zur Ebene des Polygons senkrechten Schwerachse $i_z^A = i_x^A + i_y^A = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{2n} \cdot r^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{F}{2n} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Da nun

dieser Wert für alle $2n$ Dreiecke \mathcal{A} derselbe ist, so ist das Trägheitsmoment i_x des ganzen Polygons bezüglich der x -Achse

$$\left. \begin{aligned} i_x &= 2n \cdot i_x^{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} F(r^2 + \frac{1}{12} a^2) \\ J_x &= \frac{1}{2} M(r^2 + \frac{1}{12} a^2) \end{aligned} \right\} (19)$$

und da das reguläre Polygon mehrere in der Ebene desselben gelegene, in O sich schneidende Symmetrieachsen hat, so ist (siehe S. 583) für eine jede durch O in der Ebene des Polygons geführte Achse

$$\left. \begin{aligned} i_x &= i_y = \frac{i_x}{2} = \frac{1}{4} F(r^2 + \frac{1}{12} a^2) \\ J_x &= J_y = \frac{1}{4} M(r^2 + \frac{1}{12} a^2) \end{aligned} \right\} (20)$$

Für $a = 0$ ergeben sich aus (19) und (20) die für den Kreis geltigen Werte der Gleichung (2).

Anmerkung 6. In bekannter Weise kann man (siehe Anm. 3, S. 585) mittels der Formeln (20) den Schwerpunkt eines durch Rotation eines regulären Polygons um einen beliebigen Rotationswinkel entstehenden Rotationskörpers und jenen eines beliebigen schief abgeschnittenen Prismas bestimmen, dessen Querschnitt ein reguläres Polygon ist.

Das Trägheitsmoment i_x und i_y einer homogenen ebenen materiellen Fläche, die von einer beliebigen Curve, deren Gleichung bezüglich eines beliebigen Achsensystems $y = f(x)$ ist, ferner von der Abscissenachse und den Ordinaten zweier beliebiger Punkte K und K' (S. 498, Fig. 153), deren Abscissen a und a' sind, eingeschlossen ist, lässt sich folgendermaßen berechnen: Theilt man die Fläche in der in Fig. 153 angedeuteten Weise, so dass man die einzelnen Elemente als materielle gerade Linien ansehen kann, so ist den entsprechenden Formeln auf S. 498 zufolge $dF = h \cdot dx = y \sin \alpha \cdot dx$ und nach Gleichung (2), S. 596 $e_x^2 = \frac{1}{3} y^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{3} h^2$, somit $di_x = \frac{1}{3} h^2 \cdot dF = \frac{1}{3} y^2 \sin^2 \alpha \cdot dF$ und, wenn $r = x \sin \alpha$ den Abstand der laufenden Ordinate MN (Fig. 153) von der zu derselben parallelen y -Achse bedeutet, $di_x = r^2 dF = x^2 \sin^2 \alpha \cdot dF$, somit $di_x = \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \cdot y^3 dx$ und $di_y = \sin^2 \alpha \cdot x^2 y dx$ und

$$\left. \begin{aligned} i_x &= \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \cdot \int_a^{a'} y^3 dx, \quad i_y = \sin^2 \alpha \cdot \int_a^{a'} x^2 y dx \\ J_x &= \mu_f \cdot i_x = \frac{1}{3} \mu_f \cdot \sin^2 \alpha \int_a^{a'} y^3 dx, \quad J_y = \mu_f \cdot i_y = \mu_f \cdot \sin^2 \alpha \cdot \int_a^{a'} x^2 y dx \end{aligned} \right\} (21)$$

Da ferner $M = \mu_f \cdot F = \mu_f \cdot \int dF = \mu_f \sin \alpha \cdot \int_a^{\alpha'} y dx$ ist, so führt die Division der Gleichungen (21) durch die letzte Gleichung zu den Relationen

$$J_x = \frac{1}{3} M \sin^2 \alpha \frac{\int y^3 dx}{\int y dx}, \quad J_y = M \sin^2 \alpha \cdot \frac{\int x^2 y dx}{\int y dx}$$

aus welchen sich leicht die Werte der Trägheitshalbmesser $e_x = \sqrt{\frac{J_x}{M}}$, $e_y = \sqrt{\frac{J_y}{M}}$ bestimmen lassen.

Wird die Fläche von einer geschlossenen Curve oder von zwei Curven $A'B'$ und $A''B''$ (S. 499, Fig. 154), deren laufende Ordinaten y' und y'' sind und zwei parallelen Endordinaten, deren zugehörige Abscissen a und b sind, eingeschlossen, so ist offenbar (vergl. S. 499)

$$\left. \begin{aligned} i_x &= \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \int_a^b (y'^3 - y''^3) dx \\ i_y &= \sin^2 \alpha \int_a^b x^2 (y' - y'') dx \end{aligned} \right\} (22)$$

Ist das Coordinatensystem ein orthogonales, so ist in allen diesen Gleichungen $\sin \alpha = 1$ zu setzen, und in diesem Falle ist $i_z = i_x + i_y$.

Für das in Fig. 155 (S. 500) dargestellte halbe Parabelsegment AOB ist (siehe S. 501) $y^2 = \frac{b^2}{a} x$, daher $x = \frac{a}{b^2} y^2$, $dx = 2 \frac{a}{b^2} y \cdot dy$ zu setzen; es ist sonach

$$\begin{aligned} i_x &= \frac{1}{3} \sin^3 \alpha \cdot \int_0^a y^3 dx = \frac{2}{3} \frac{a}{b^2} \sin^3 \alpha \cdot \int_0^b y^4 dy = \frac{2}{15} a b^3 \sin^3 \alpha \\ i_y &= \sin^3 \alpha \cdot \int_0^a x^2 y dx = 2 \frac{a^3}{b^6} \sin^3 \alpha \cdot \int_0^b y^6 dy = \frac{2}{7} a^3 b \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

Das Gleiche gilt für das andere halbe Parabelsegment $A'OB'$, so dass für das ganze Parabelsegment AOA' die doppelten Werte erhalten werden, nämlich $i_x = \frac{4}{15} a b^3 \sin^3 \alpha$, $i_y = \frac{4}{7} a^3 b \sin^3 \alpha$.

Die Fläche dieses Parabelsegments AOA' ist nach Gleichung (9), S. 501 durch $F = \frac{4}{3} a b \sin \alpha$ gegeben, daher ist $i_x = \frac{1}{5} F \cdot b^2 \sin^2 \alpha$, $i_y = \frac{3}{7} F \cdot a^2 \sin^2 \alpha$.

Für die zur Basis AA' des Parabelsegments parallele Schwerachse SS' (Fig. 155) ist, da ihr Abstand von der y -Achse gemäß der Gleichung (10), S. 502 $s_y = X \sin \alpha = \frac{3}{5} a \sin \alpha$ ist, das Trägheitsmoment des Parabelsegments AOA' $i_s = i_y - F s_y^2 = \frac{12}{175} F a^2 \sin^2 \alpha = \frac{16}{175} a^2 b \sin^2 \alpha$.

Wählt man die zur Parabelachse parallele Schwerachse OB (die bisherige x -Achse) zur Y -Achse und die zur Endsehne AA' parallele Schwerachse SS' zur X -Achse eines schiefwinkligen Systems, so hat dasselbe die in der Anmerkung 2 S. 585 vorausgesetzte Eigenschaft, und zwar haben den letzten Formeln zufolge die entsprechenden Trägheitshalbmesser ϱ_x und ϱ_r die Werte $\varrho_x = \sqrt{\frac{i_x}{F}} = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{3}{7}} a \sin \alpha$ und $\varrho_r = \sqrt{\frac{1}{5}} b \sin \alpha$. Die gleichgelegenen Semidiameter A und B der Centralellipse des Parabelsegments, durch welche die Centralellipse vollkommen bestimmt ist, sind demgemäß $A = \frac{\varepsilon^2}{\varrho_x} = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{7}{3}} \frac{\varepsilon^2}{a \sin \alpha}$ und $B = \frac{\varepsilon^2}{\varrho_r} = \sqrt{5} \frac{\varepsilon^2}{b \sin \alpha}$. Die Richtungswinkel der Centralhauptachsen und die Hauptträgheitsradien lassen sich nunmehr unmittelbar aus den Formeln (f) und (g) auf S. 587 berechnen.

Ist der Durchmesser Ox die Parabelachse, so dass dann $AA' \perp Ox$ ist, so hat man $\sin \alpha = 1$ zu setzen. In diesem Falle ist das Trägheitsmoment i_s für die zur Fläche des Parabelsegments senkrechte Achse, je nachdem dieselbe durch den Parabelscheitel O , bzw. durch den Schwerpunkt s , bzw. durch den Mittelpunkt B der Sehne AA' geführt ist, $i_s = i_x + i_y = F \left(\frac{1}{5} b^2 + \frac{3}{7} a^2 \right)$, bzw. $i_s = i_x + i_s = \frac{1}{5} F \left(b^2 + \frac{12}{35} a^2 \right)$, bzw. $i_s = \frac{1}{5} F \left(b^2 + \frac{12}{35} a^2 \right) + F \left(\frac{2}{5} a \right)^2 = \frac{1}{5} F \left(b^2 + \frac{8}{7} a^2 \right)$ u. s. w.

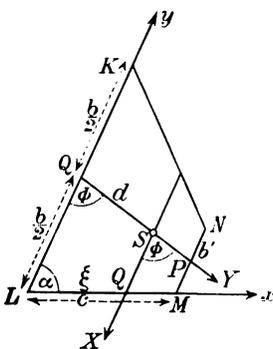


Fig. 179.

Für das Trapez $LMNK$ (Fig. 179), dessen Seite $LM = c$ und dessen Grundlinien $LK = b$ und $MN = b'$ sind, besteht, wenn LM zur x -Achse und LK zur y -Achse eines im allgemeinen schiefwinkligen Koordinatensystems gewählt werden, für jeden Punkt von KN bekanntlich die Gleichung $y = Ax + b$, wo für A zufolge der für N giltigen Gleichung $b' = Ac + b$ zu setzen ist: $A = \frac{b' - b}{c}$.

Es ist demnach $dy = A \cdot dx = \frac{b' - b}{c} dx$ und $dx = \frac{c}{b' - b} dy$, daher

$$i_x = \frac{1}{3} \sin^3 \alpha \cdot \int_0^c y^3 dx = \frac{1}{3} \sin^3 \alpha \cdot \frac{c}{b'-b} \int_b^{b'} y^3 dy = \left. \begin{aligned} &= \frac{1}{12} c \sin^3 \alpha \cdot \frac{b'^4 - b^4}{b'-b} = \frac{1}{12} c \sin^3 \alpha (b'+b)(b'^2 + b^2) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$i_y = \sin^3 \alpha \cdot \int_0^c x^2 y dx = \sin^3 \alpha \cdot \int_0^c (Ax^3 + bx^2) dx = \sin^3 \alpha \left(\frac{1}{4} (b'-b) c^3 + \frac{1}{3} b c^3 \right) = c^3 \sin^3 \alpha \cdot \frac{3b'+b}{12}$ und da die Trapezhöhe $h = c \sin \alpha$ und $F = \frac{1}{2} (b+b') h = \frac{1}{2} (b+b') c \sin \alpha$ ist, so ergibt sich durch Division der Werte von i_x und i_y durch den letzten Wert von F

$$i_x = \frac{1}{6} F \cdot \sin^2 \alpha (b^2 + b'^2), \quad i_y = \frac{1}{6} F h^2 \cdot \frac{3b'+b}{b'+b} \quad \dots \quad (24)$$

Die letzte Formel ließe sich auch leicht aus den Gleichungen (11) und (13) durch Theilung des Trapezes in zwei Dreiecke ableiten.

Ebenso liefern umgekehrt die Formeln (24) sofort jene für die Trägheitsmomente des Parallelogramms und des Dreiecks, je nachdem man $b'=b$ oder $b=0$, bzw. $b'=0$ setzt.

Aus den auf S. 490 ermittelten Werten der Abscisse ξ und der Ordinate η des Trapezschwerpunktes und aus (24) ergeben sich, wofern man nur in den Gleichungen (6) auf S. 490 $A=b$ und $a=b'$ setzt, die Trägheitsmomente für die zur x - und y -Achse parallelen Schwerpunktsachsen, die durch $i_x = F \eta^2 \sin^2 \alpha$ und $i_y = F \xi^2 \sin^2 \alpha$ bestimmt sind.

Anmerkung 7. Da die die Mittelpunkte Q und P der beiden parallelen Grundlinien b und b' eines Trapezes verbindende Mittellinie $\overline{QP} = d$ alle zu den Grundlinien parallelen Sehnen des Trapezes halbiert, so haben diese Mittellinie Y und die zu den Grundlinien parallele Schwerachse X , deren Neigungswinkel $(X, Y) = \Phi$ sei (siehe S. 586), die Richtungen zweier conjugierten Diameter der Centralellipse.

Da nun die Länge dieser Diameter, d. i. $2B = 2 \frac{\xi^2}{\varrho_X}$ und $2A = 2 \frac{\eta^2}{\varrho_Y}$ sich mit Hilfe der Formel (24) leicht bestimmen lässt, so kann man die entsprechende Centralellipse leicht construieren und deren Achsen, d. i. die Centralhauptachsen des Trapezes sind dann leicht bestimmbar. Es ist nämlich $i_x = i_y = F \xi^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{6} F h^2 \frac{3b'+b}{b'+b} - F \left(\frac{1}{3} c \frac{b+2b'}{b'+b} \right)^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{18} F \frac{h^2}{(b+b')^2} (b^2 + 4bb' + b'^2) = \frac{1}{18} F \cdot \frac{b^2 + 4bb' + b'^2}{(b+b')^2} \cdot d^2 \sin^2 \Phi$, und da d eine der nicht parallelen Seiten irgend eines der beiden flächengleichen Theiltrapeze $LM P Q$ und $KN P Q$ ist, so ist der ersten Gleichung (24) zufolge $i_x = \frac{1}{6} \cdot \frac{F}{2} \sin^2 \Phi \left[\left(\frac{b}{2} \right)^2 + \left(\frac{b'}{2} \right)^2 \right] \cdot 2 = \frac{1}{24} F \cdot (b^2 + b'^2) \sin^2 \Phi$, sonach $\varrho_X = \sqrt{\frac{i_x}{F}} = \sqrt{\frac{1}{18} \frac{b^2 + 4bb' + b'^2}{(b+b')^2} \cdot d \sin \Phi}$

oder da $h = d \sin \phi$ die Höhe des Trapezes ist,

$$e_x = \sqrt{\frac{i_x}{F'}} = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{9} \left(\frac{b-b'}{b+b'}\right)^2} \dots (25)$$

und $e_r = \sqrt{\frac{i_r}{F}} = \sqrt{\frac{1}{24} (b^2 + b'^2)} \cdot \sin \phi$, so dass mittels der Gleichungen (f), (g), (h) auf S. 587, in welchen nur α durch ϕ zu ersetzen ist, sich sowohl die Neigungswinkel ϕ der Hauptcentralachsen, als auch die Hauptträgheitshalbmesser des Trapezes leicht berechnen lassen.

Mittels der Formeln (24) lässt sich auch (siehe Anm. 3, S. 588) der Schwerpunkt des durch Rotation eines Trapezes entstehenden Körpers, z. B. des keilförmigen Ausschnittes eines senkrechten Kegelstumpfes u. s. w., bestimmen.

Das Trägheitsmoment eines unregelmäßigen Polygons für eine beliebige in der Ebene desselben gelegene Achse x lässt sich mit Hilfe der oben abgeleiteten Formel (23) derart berechnen, dass man von den einzelnen Eckpunkten des Polygons zur beliebigen y -Achse parallele Ordinaten $y_1 y_2 \dots y_m y_{m+1} \dots$ führt, deren Abscissen $x_1 x_2 \dots x_m x_{m+1} \dots$ seien; die von den äußersten Ordinaten, der x -Achse und dem einen oder anderen Theile des Polygonumfangs eingeschlossenen Flächen F und F' , deren Summe oder Differenz die Fläche des Polygons ist, bestehen aus Trapezen von der Form $KLMN$ (Fig. 179), und zwar ist $c = x_{m+1} - x_m$ (wo das Zeichen des c , je nachdem das entsprechende Trägheitsmoment additiv oder subtractiv in Rechnung kommt, schon mit berücksichtigt ist), ferner $b' = y_{m+1}$ und $b = y_m$ zu setzen. Es ist demnach nach Gleichung (24) allgemein

$$i_x = \frac{1}{12} \sin^3 \alpha \cdot \Sigma [(x_{m+1} - x_m) (y_m + y_{m+1}) (y_m^2 + y_{m+1}^2)] \dots (26)$$

wobei die richtigen Vorzeichen der einzelnen Summanden von i_x schon durch die Berücksichtigung der entsprechenden Qualitätszeichen von $x_m x_{m+1} y_m y_{m+1}$ sich ergeben.

Am einfachsten nehme man bei der Berechnung dieses Trägheitsmomentes $\alpha = \frac{\pi}{2}$, also $\sin \alpha = 1$ an.

Das Trägheitsmoment einer Ellipse für zwei conjugierte Durchmesser (x und y) derselben, die den Winkel α einschließen, und für die durch den Mittelpunkt O auf der Ebene derselben senkrechte Achse (z -Achse) lässt sich mit Hilfe der allgemeinen Gleichungen (21) einfach folgendermaßen berechnen:

Ist der in der x -Achse, bzw. y -Achse gelegene Semidiameter durch a , bzw. b bezeichnet, so ist bekanntlich $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ferner müssen die Trägheitsmomente i_x und i_y des von den Radien a und b und der Ellipse eingeschlossenen Sectors F zufolge (21) den Gleichungen

chungen $\mathfrak{I} i_x = \sin^3 \alpha \int_0^a y^3 dx$, $i_y = \sin^2 \alpha \int_0^a x^2 y dx$ entsprechen. Dividiert man die vorletzte Gleichung durch b^2 , die letzte durch a^2 und addiert dieselben, so findet man

$$\mathfrak{I} \frac{i_x}{b^2} + \frac{i_y}{a^2} = \sin^3 \alpha \int_0^a \left(\frac{x^3}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) y dx = \sin^3 \alpha \int_0^a y dx$$

oder da $\sin \alpha \cdot \int_0^a y dx$ bekanntlich die Fläche F bestimmt, so ist $\mathfrak{I} \frac{i_x}{b^2} + \frac{i_y}{a^2} = F \cdot \sin^3 \alpha$. Vertauscht man die x - mit der y -Achse, also auch a und b (indem man nämlich bei der Ableitung der den Gleichungen (21) analogen Gleichungen die Fläche F nicht in Streifen parallel zur x -Achse, sondern in schmale Flächenstreifen parallel zur y -Achse theilt, wodurch man zu den Gleichungen $\mathfrak{I} i_y = \sin^3 \alpha \cdot \int_0^b x^3 \cdot dy$ und $i_x = \sin^2 \alpha \cdot \int_0^b y^2 x \cdot dy$ gelangt), so erhält man $\mathfrak{I} \frac{i_y}{a^2} + \frac{i_x}{b^2} = F \cdot \sin^2 \alpha$, so dass aus den beiden gefundenen Werten von $F \cdot \sin^2 \alpha$ sich i_x und i_y bestimmen lässt, und zwar ist

$$\left. \begin{aligned} i_x &= \frac{1}{4} F \cdot b^2 \sin^2 \alpha, & i_y &= \frac{1}{4} F a^2 \sin^2 \alpha \\ J_x &= \frac{1}{4} M \cdot b^2 \sin^2 \alpha, & J_y &= \frac{1}{4} M \cdot a^2 \sin^2 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Da diese Gleichungen für alle die vier durch die conjugierten Diameter begrenzten Theilflächen der Ellipse Giltigkeit haben, so bestehen sie, wie die Addition der vier entsprechenden Gleichungen lehrt, auch für die Summe derselben, d. i. für die ganze Ellipse. Sind die Radien a und b die Halbachsen der Ellipse, so ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $F = ab\pi$ zu setzen, und es ist dann $i_x = i_x + i_y$, also

$$i_x = \frac{1}{4} F(a^2 + b^2) = \frac{1}{4} ab\pi(a^2 + b^2), \quad J_x = \frac{1}{4} M(a^2 + b^2) \quad (28)$$

Die xyz -Achsen sind im letzteren Falle die Schwerpunkts-hauptachsen.

Ist z eine beliebige durch den Mittelpunkt der Ellipse gelegte räumliche Achse und bedeuten a und b die senkrechten Entfernungen der Endpunkte der beiden Halbachsen von dieser Achse z , so behält die letzte Gleichung (28) auch dann ihre Giltigkeit, wie man sofort

ersieht, wenn man sich die Ellipse in eine zur z -Achse senkrechte Ebene projiziert denkt und von dem Lehrsatz auf S. 582 Anwendung macht.

Man hat sich demgemäß ebenso wie bei einem Kreise die Masse der als homogen vorausgesetzten elliptischen Scheibe für eine jede Schwerachse durch vier in den vier Endpunkten der beiden Hauptachsen befindliche äquivalente Massen ersetzt zu denken, deren jede dem **achten** Theile der Masse der elliptischen Platte gleichkommt.

Das Trägheitsmoment einer von einer geschlossenen Curve oder von zwei gegebenen Curven, deren Gleichungen nicht gegeben sind, und zwei parallelen Geraden (bezw. den Tangenten der geschlossenen Curve) begrenzten Fläche F lässt sich entweder, indem man dieselbe durch zu den letzteren Geraden parallele Sehnen in derartige Flächenelemente theilt, die als Trapeze angesehen werden können, näherungsweise nach der für unregelmäßige Polygone auseinandergesetzten Methode, d. i. nach der Formel (26), oder aber derart berechnen, dass zur näherungsweisen Wertermittlung der bestimmten Integrale der allgemeinen Gleichungen (21) bezw. (22) die Simpson'sche Regel angewendet wird. Ist demgemäß die x -Achse eine beliebige Gerade in der Ebene der Fläche und die y -Achse parallel zu den beiden geraden Begrenzungslinien, so theile man den von den beiden letzteren eingeschlossenen Theil der x -Achse, d. i. $a' - a$ in eine gerade Anzahl ($2n$) gleicher Theile und führe die zur y -Achse parallelen Ordinaten $y_0 y_1 \dots y_{2n}$. Es ist dann der Gleichung (21) und der Simpson'schen Regel zufolge für eine jede der von den parallelen Endordinaten, der Abscissenachse und dem einen oder anderen Curventheile eingeschlossenen Flächen F' , bezw. F'' (Fig. 154, S. 499)

$$\left. \begin{aligned} i_x &= \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \cdot \frac{a' - a}{3 \cdot 2n} [y_0^3 + 4y_1^3 + 2y_2^3 + \dots + 4 \cdot y_{2n-1}^3 + y_{2n}^3] \\ i_y &= \sin^2 \alpha \frac{a' - a}{3 \cdot 2n} [x_0^2 y_0 + 4x_1^2 y_1 + 2x_2^2 y_2 + \dots + \\ &\quad + 4x_{2n-1}^2 y_{2n-1} + x_{2n}^2 y_{2n}] \end{aligned} \right\} (29)$$

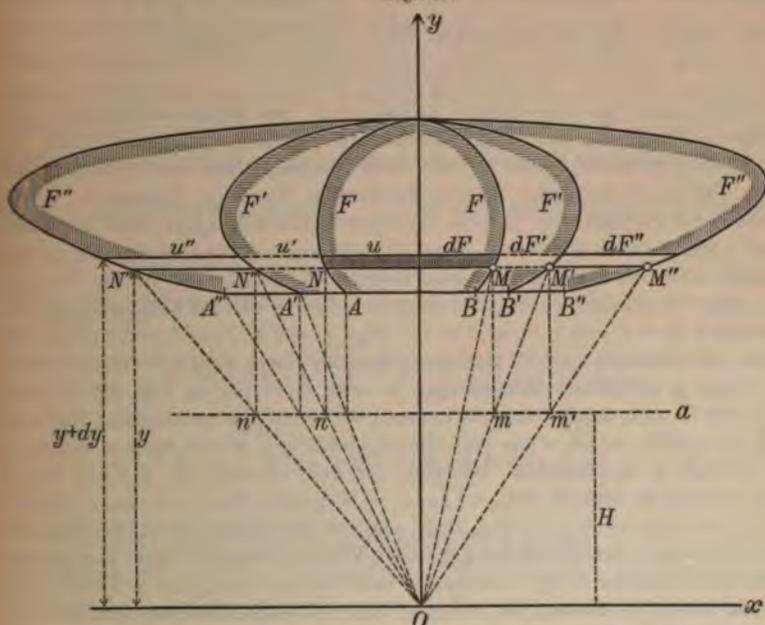
Bei Anwendung der letzten Gleichung für die Berechnung des Trägheitsmoments i_y der Fläche $F = F' - F''$ bedeuten offenbar $y_0 y_1 y_2 \dots y_{2n}$ [siehe Gleichung (22)] die parallelen Sehnen der ganzen Fläche, wie sich dies durch Subtraction der beiden den Flächen F und F'' entsprechenden Gleichungen (29) sofort ergibt.

Anmerkung 8. Graphische Bestimmung der Trägheitsmomente und der statischen Schwerpunktsmomente gegebener ebener Flächen.

a) Verfahren nach Nebls.

Um das Schwerpunktmoment und das Trägheitsmoment einer in der xy -Ebene gelegenen ebenen Fläche F auf eine gegebene Basis H zu reducieren, d. h. jene Flächen F' (erste reduzierte Fläche) und F'' (zweite reduzierte Fläche) zu bestimmen, für welche das Schwerpunktmoment $\int y dF$ der gegebenen Fläche F bezüglich irgend einer zur Ebene der Fläche normalen zx -Ebene (Momentenebene) der Gleichung $\int y dF = H \cdot F'$ und das Trägheitsmoment $\int y^2 dF$ der Fläche F bezüglich irgend einer in der Ebene der Fläche gelegenen Achse —

Fig. 180.



der x -Achse — der Gleichung $\int y^2 dF = H^2 F''$ entspricht (wobei ein orthogonales Koordinatensystem zugrunde gelegt ist), construiri man in der Entfernung H (siehe Fig. 180) eine in der Ebene der gegebenen Fläche $ABMNA$ zur x -Achse parallele Achse a , projiciere die einzelnen Punkte M des Umfanges der Fläche F orthogonal auf die letztere Achse in den Punkten m , verbinde diese Punkte m mit dem beliebig in der x -Achse gewählten Anfangspunkte O und verlängere diese Polstrahlen Om bis zum Durchschnitte M' mit der durch M zur x -Achse parallel gelegten Sehne $\overline{NM} = u$. Der geometrische Ort sämtlicher Punkte M' bestimmt die Grenzlinie $A'B'M'N'A'$ der gesuchten Fläche F' , und wenn man auf diese Grenzcurve der Fläche F' das frühere Verfahren abermals zur Anwendung bringt, also den Fußpunkt m' der Normalen $M'm'$ mit O verbindet und Om' verlängert bis zum Durchschnitte M'' mit der zur x -Achse parallelen Sehne u , beziehungsweise mit der in dieselbe Gerade fallenden Sehne

$\overline{N'M'} = u'$ der Fläche F' , so bestimmen die so erhaltenen Durchschnittspunkte M'' in ihrer Gesamtheit den Umfang $A''B''M''N''A''$ der zweiten reducierten Fläche F'' . Bezeichnet man nämlich durch y die Ordinate von M' und durch dF, dF', dF'' die Flächenelemente der Flächen $FF'F''$, nämlich jene schmalen Flächenstreifen, deren Basis $\overline{MN} = u, \overline{M'N'} = u', \overline{M''N''} = u''$ und deren Höhe dy ist, so dass $dF = u \cdot dy, dF' = u' \cdot dy, dF'' = u'' \cdot dy$ ist, so lehrt die Ähnlichkeit der Dreiecke Omn und $OM'N'$, in welchen die Grundlinien $mn = u$ und $\overline{M'N'} = u'$ den Höhen H und y proportional sind, dass $u : u' = H : y$, also $u \cdot y = u' \cdot H$ ist, und in gleicher Weise folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $O_m'n'$ und $OM''N''$, dass $u'y = u''H$, so dass $dF' = u' \cdot dy = \frac{u \cdot dy}{H} \cdot y = \frac{dF}{H} \cdot y$ und $dF'' = u'' \cdot dy = \frac{u' \cdot dy}{H} \cdot y = \frac{dF'}{H} \cdot y$, sonach in der That $H \cdot F' = \int y dF = F \cdot Y$ und $H \cdot F'' = \int y \cdot dF' = \frac{1}{H} \int y^2 dF$ ist, wobei Y die Ordinate des Schwerpunktes S der Fläche F bedeutet.

b) Verfahren nach Mohr.

Minder genau als das frühere Verfahren ist die Mohr'sche Methode der constructiven Ermittlung der Trägheitsmomente gegebener ebener Flächen bezüglich einer gegebenen Achse g , die darin beruht, dass man zunächst die gegebene Fläche F in solche Theile (Rechtecke, Dreiecke, Trapeze u. s. w.) theilt, deren Schwerpunkte $S_1 S_2 S_3 S_4$ und deren Flächen $f_1 f_2 f_3 f_4$ leicht bestimmbar sind. Nimmt man nun etwa diese Schwerpunkte als Angriffspunkte von gleichgerichteten, zur Achse g parallelen Kräften $P_1 P_2 P_3 P_4$ an, die den Flächen $f_1 f_2 f_3 f_4$ proportional sind, so dass bei entsprechender Wahl der Kräfteeinheit und Längeneinheit $P_1 = f_1 = 0 \cdot 1, P_2 = f_2 = 1 \cdot 2, P_3 = f_3 = 2 \cdot 3, P_4 = f_4 = 3 \cdot 4$ (Fig. 126, S. 416), ist, und reducirt man die statischen Momente dieser Kräfte für irgend einen in der Achse g gelegenen Momentenpol m oder O in der in Fig. 126 (S. 416) und Fig. 123 (S. 412) dargestellten bekannten Weise auf eine gemeinsame Basis H (siehe S. 411—413), so ist, wenn man die algebraischen Werte der zur Achse g — der x -Achse — senkrechten Ordinaten der Schwerpunkte $S_1 S_2 S_3 S_4$ durch $y_1 y_2 y_3 y_4$ bezeichnet (siehe S. 412), $0 \cdot 1 : a_0 a_1 = H : y_1$, also $f_1 y_1 = H \cdot a_0 a_1$, ebenso $f_2 y_2 = H \cdot a_1 a_2, f_3 y_3 = H \cdot a_2 a_3, f_4 y_4 = H \cdot a_3 a_4$; es ist sonach das auf die Basis H reducierte Schwerpunktsmoment der gegebenen Fläche F bestimmt durch $a_0 a_4$, indem die algebraische Summe $\Sigma(fy) = H \cdot [a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4]$, d. i. $FY = H \cdot a_0 a_4$ ist. Würde sohin die Achse g (die x -Achse) eine Schwerpunktsachse der Fläche F sein, so müsste $Y = 0$, daher auch $\Sigma(fy) = 0$ sein, also a_0 mit a_4 zusammenfallen. Da ferner in dem entsprechenden Seilpolygon $O I II III IV V$ (Fig. 123, S. 412) die Dreiecke $a_0 I a_1, a_1 II a_2, a_2 III a_3, a_3 IV a_4$, deren Grundlinien $a_0 a_1, a_1 a_2, a_2 a_3, a_3 a_4$ und deren Höhen $y_1 y_2 y_3 y_4$ sind, die Flächen $F_1 = \frac{1}{2} a_0 a_1 \cdot y_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{f_1 y_1}{H} \cdot y_1 = \frac{1}{2} \frac{f_1 y_1^2}{H}$, $F_2 = \frac{1}{2} \frac{f_2 y_2^2}{H}$ u. s. w. besitzen, so ist die Summe Φ dieser Dreiecksflächen, d. i. die resultierende Fläche $a_0 I II III IV a_4 a_0$ ihrer Größe nach auch gleich $\Phi = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = \frac{1}{2H} \Sigma(fy^2)$, also $\Sigma(fy^2) = 2H \cdot \Phi$, daher $\Sigma(fy^2)$ durch die so erhaltene Fläche Φ graphisch dargestellt. Nur kann die Bemerkung nicht unterdrückt werden, dass $\Sigma(fy^2)$ stets kleiner sein muss als das gesuchte Trägheitsmoment der Fläche F , indem z. B. das Trägheitsmoment des Flächentheiles f_1 nicht $f_1 y_1^2$, sondern die arithmetische Summe aus $f_1 y_1^2$ und aus dem Trägheitsmomente dieser Fläche f_1 bezüglich der zur Achse g durch den Punkt S_1 gelegten Schwerachse ist, so dass das Mohr'sche Verfahren in jedem Falle zu einer ungenauen, nämlich zu einem um die Summe der Träg-

heitsmomente der einzelnen Flächentheile $f_1 f_2 f_3 f_4$ bezüglich der entsprechenden parallelen Schwerachsen kleineren Resultate führen muss.

§ 98. Trägheitsmomente von Rotationsflächen.

Für eine homogene Rotationsfläche (Fig. 156, S. 509), deren geometrische Achse die x -Achse ist, lassen sich bei Zugrundelegung eines orthogonalen Achsensystems die Trägheitsmomente $J_x J_y J_z$ folgendermaßen bestimmen: Theilt man die Rotationsfläche in der in Fig. 156 angedeuteten Weise, so ist nach Gleichung (2), S. 510 $dF = 2\pi \cdot y \, ds$, wo y die Ordinate und ds ein Längenelement der Meridiancurve AB bedeutet, deren Gleichung $y = f(x)$ als gegeben vorausgesetzt ist, daher ist $dM = \mu_f \cdot dF = 2\pi \mu_f \cdot y \, ds$ und das Trägheitsmoment dJ_x dieser elementaren Ringfläche, die als materielle Kreislinie angesehen werden kann (siehe S. 598), bezüglich der x -Achse $dJ_x = y^2 \cdot dM$ und jenes bezüglich des zur y -Achse (oder zur z -Achse) parallelen Durchmessers derselben, der eine Schwerpunktsachse dieses Kreisringes darstellt, $\frac{1}{2} y^2 dM$, sonach bezüglich der y -Achse zufolge Gleichung (4), S. 562, $dJ_y = \frac{1}{2} y^2 dM + x^2 dM = (x^2 + \frac{1}{2} y^2) dM$, daher

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \int dJ_x = \int_0^M y^2 dM = 2\pi \mu_f \cdot \int_0^L y^3 ds \\ J_z &= J_y = \int dJ_y = \int_0^M (x^2 + \frac{1}{2} y^2) dM = 2\pi \mu_f \cdot \int_0^L (x^2 + \frac{1}{2} y^2) y ds \end{aligned} \right\} (30)$$

Verlegt man den Koordinatenanfangspunkt in den mittelst der Gleichung (3), S. 510, bestimmbaren Schwerpunkt der Rotationsfläche, so sind $J_x J_y J_z$ die Trägheitsmomente für die Schwerpunktsauptachsen.

So ist z. B. für die Mantelfläche eines senkrechten Kegelstumpfes (Fig. 158, S. 513), wenn der Mittelpunkt des Grundkreises vom Radius r_1 der Koordinatenanfangspunkt ist, in (30) $y = tg \alpha \cdot x + r_1$, $ds = sec \alpha \cdot dx$, $tg \alpha = \frac{r_2 - r_1}{H}$ zu setzen, und für eine senkrechte Kreiskegelfläche mit dem Grundradius r , wenn l die Seitenlänge derselben und der Koordinatenanfangspunkt die Spitze der Kegel-
fläche ist, $ds = \frac{l}{r} dy$, daher $J_x = 2\pi \mu_f \cdot \frac{l}{r} \int_0^r y^3 dy = \frac{1}{2} \mu_f \cdot \pi r^3 \cdot l$,
und da $M = \mu_f r \pi \cdot l$ ist, $J_x = \frac{1}{2} M r^2$ u. s. w.

Für eine Kugelcalotte (Fig. 157, S. 510) von der Höhe H ist $y^2 = 2Rx - x^2$ und $y \, ds = R \, dx$ (siehe S. 511), also $J_x = 2\pi \mu_f \cdot$

$\int_0^H (2Rx - x^2) R dx$, somit $J_x = 2\pi\mu_f \cdot R H^2 [R - \frac{1}{3}H]$, und da $M = \mu_f \cdot 2\pi R \cdot H$ ist, $J_x = MH [R - \frac{1}{3}H]$; für die Halbkugelfläche, für welche $H = R$ ist, ist $J_x = \frac{2}{3}MR^2$ und $\rho_x = \sqrt{\frac{J_x}{M}} = R \sqrt{\frac{2}{3}}$, ebenso auch für die ganze Kugelfläche, für welche $H = 2R$ ist.

Entsteht die Rotationsfläche nicht durch eine volle Umdrehung, sondern durch eine Drehung um den Winkel 2φ , so ist, wenn man wieder die Rotationsachse zur x -Achse, ferner irgend eine in der mittleren, den Winkel 2φ habierenden Meridianebene gelegene, zur x -Achse senkrecht geführte Achse zur y -Achse eines orthogonalen Coordinatensystems wählt, und wenn wieder $y = f(x)$ die Gleichung der Meridiancurve ist, statt der früheren Gleichungen offenbar zu setzen $dF = 2\varphi \cdot y ds$, $dM = \mu_f \cdot dF = 2\varphi \mu_f \cdot y ds$, $dJ_x = y^2 \cdot dM$, ferner ist das Trägheitsmoment des Massenelements dM , das als ein homogener Kreisbogen vorausgesetzt werden kann, in Bezug auf eine Achse, die in einem Punkte, in welchem die Ebene dieses Kreisbogens die x -Achse schneidet, parallel zur y -Achse, beziehungsweise senkrecht zur xy -Ebene geführt werden kann, nach Gleichung (4 a), S. 598, bestimmt durch $\frac{1}{2} dM \cdot y^2 \left(1 - \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi}\right)$, bezw. durch $\frac{1}{2} dM \cdot y^2 \left(1 + \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi}\right)$, demnach das Trägheitsmoment für die y -Achse, bezw. z -Achse (welch letztere senkrecht zur xy -Ebene im Anfangspunkte des Coordinatensystems angenommen ist) nach dem Satze (4), S. 562

$$dJ_y = \frac{1}{2} dM \cdot y^2 \left(1 - \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi}\right) + dM \cdot x^2, \quad dJ_z = \frac{1}{2} dM \cdot y^2 \left(1 + \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi}\right) + dM \cdot x^2$$

Setzt man in die gefundenen Werte von dJ_x , dJ_y , dJ_z den obigen Wert von dM ein, so findet man

$$\left. \begin{aligned} J_x &= 2\varphi \cdot \mu_f \cdot \int_0^L y^2 ds, \quad J_y = 2\varphi \cdot \mu_f \cdot \int_0^L x^2 y ds + \frac{1}{2} \mu_f (2\varphi - \sin 2\varphi) \int_0^L y^2 ds \\ J_z &= 2\varphi \mu_f \int_0^L x^2 y ds + \frac{1}{2} \mu_f (2\varphi + \sin 2\varphi) \int_0^L y^2 ds \end{aligned} \right\} (31)$$

Für $\varphi = \pi$ gehen diese Gleichungen in die Gleichungen (30) über.

Ist die erzeugende Curve eine geschlossene, durch die Rotationsachse nicht geschnittene Curve, so denke man sich dieselbe etwa durch zwei zur Rotationsachse senkrechte Tangenten in zwei Theile getheilt und berechne die Trägheitsmomente der von jedem dieser Theile erzeugten Rotationsflächen, die man dann zu summieren hat, oder aber man setze (was auf dasselbe hinauskommt), wenn $y' = f(x)$ die Gleichung des einen und $y'' = F(x)$ die Gleichung des zweiten Curventheiles ist, in den drei letzten Gleichungen überall $y' + y''$ statt y und $y'^2 + y''^2$ statt y^2 ein (wobei y' und y'' als positiv anzunehmen sind).

Ist im letzteren Falle die Meridiancurve symmetrisch bezüglich einer zur Rotationsachse im Abstände b parallelen Achse X und sind durch ρ_x und ρ_r die Trägheitshalbmesser der Meridiancurve bezüglich der Achsen X und y bezeichnet, so dass, wenn l die Länge einer der symmetrischen Curvenhälften ist, deren Punkte in Bezug auf diese Achsen X und y die Coordinaten $X = x$ und Y haben,

$y'' = b + Y$, $y' = b - Y$, $\int_0^l Y^2 ds = l \cdot \varrho x^2$, $\int_0^l x^2 ds = l \cdot \varrho r^2$ ist, so lassen sich M , J_x , J_y , J_z sehr einfach auch auf folgende Art bestimmen: Es ist $M = 2 \varphi \mu_r \cdot \int_0^l (y' + y'') ds = 2 \varphi \mu_r \int_0^l 2b \cdot ds = 4 \varphi \mu_r b l$, was schon die Guldin'sche Regel lehrt, ferner $\int_0^l (y'^2 + y''^2) ds = \int_0^l (2b^2 + 6bY) ds = 2b^2 l + 6b \cdot l \varrho x^2$ und $\int_0^l x^2 (y' + y'') ds = \int_0^l 2b \cdot x^2 ds = 2bl \varrho r^2$. Setzt man diese Werte in die obigen Gleichungen ein, so findet man

$$\left. \begin{aligned} J_x &= M(b^2 + 3 \varrho x^2), \quad J_y = M \left[\varrho r^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi} \right) (b^2 + 3 \varrho x^2) \right] \\ J_z &= M \left[\varrho r^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi} \right) (b^2 + 3 \varrho x^2) \right] \end{aligned} \right\} (32)$$

Die erste dieser Gleichungen drückt die von Townsend für Rotationsflächen und Rotationskörper gefundene Regel aus.

(Übrigens lassen sich die drei letzten Gleichungen einfach auch unmittelbar auf Grund der Annahme, dass die X-Achse eine Symmetrieachse der Curve ist, ohne Zuhilfenahme der früher abgeleiteten Gleichungen deducieren.)

Ist z. B. die erzeugende Linie eine zur Rotationsachse x senkrechte Gerade von der Länge $l = y'' - y'$, wo y' die Ordinate des der Drehungsachse näher gelegenen und y'' jene des entfernteren Endpunktes bedeutet, so sind die Trägheitsradien ϱ_x und ϱ_r der Geraden l zufolge der früheren Regel bestimmt durch $\varrho x^2 = \frac{1}{12} l^2 = \frac{1}{12} (y'' - y')^2$, $\varrho r^2 = x^2$ und $b = \frac{1}{2} (y' + y'')$, daher die Trägheitsmomente des durch die Drehung der Geraden l um den Winkel 2φ entstandenen Ringsectors nach (32)

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2} M (y'^2 + y''^2), \quad J_y = Mx^2 + \frac{1}{4} M \left(1 - \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi} \right) (y'^2 + y''^2) \\ J_z &= Mx^2 + \frac{1}{4} M \left(1 + \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi} \right) (y'^2 + y''^2) \end{aligned} \right\} (33)$$

Für $y' = 0$ und $y'' = r$ erhält man die Trägheitsmomente eines Kreissectors.

§ 99. Trägheitsmomente besonderer homogener Körper.

Für einen homogenen Körper, der in seiner ganzen Ausdehnung eine constante cubische Dichtigkeit (absolute Dichte) μ hat, ist zufolge der Gleichung (1), S. 472, $dM = \mu \cdot dV$ und $M = \mu \cdot V$, daher das axiale Trägheitsmoment dJ des Massenpunktes dM , der den Abstand r von der Achse hat, durch $dJ = r^2 \cdot dM = \mu r^2 \cdot dV$, und jenes der ganzen Masse im allgemeinen durch $J = \int dJ = \int_0^V \mu r^2 dV = \mu \cdot \int_0^V r^2 dV$ bestimmt.

Das letzte Integral ist nur von der Größe und Form des Körpers und von dessen Lage zur Achse, also von rein geometrischen Größen abhängig, weshalb auch dieses Integral als das geometrische Trägheitsmoment des Körpers zu bezeichnen ist.

Die Bestimmung des Trägheitsmoments J_z eines homogenen Parallelepipeds, Prismas, Cylinders und Hohlcyinders bezüglich einer die Schwerpunkte der beiden Grundflächen verbindenden Schwerachse z lässt sich zurückführen auf die Bestimmung des Trägheitshalbmessers eines zu den Grundflächen parallelen Querschnittes dieser Körper bezüglich derselben Achse, und zwar muss für den Körper und diesen Querschnitt derselbe Trägheitshalbmesser sich ergeben; denn zerlegt man den prismatischen Körper durch Ebenen parallel zu den Grundflächen in lauter unendlich dünne ebene Platten, deren Massen dM und deren Trägheitsmomente dJ_z sind, und ist ρ_z der durch die Formeln des § 97 bestimmte Trägheitshalbmesser einer solchen Platte für die z -Achse, der für alle die einzelnen congruenten Querschnitte derselbe ist, so ist $dJ_z = \rho_z^2 \cdot dM$, und daher $J_z = \int_0^J dJ_z = \int_0^M \rho_z^2 \cdot dM = \rho_z^2 \cdot \int_0^M dM = M \cdot \rho_z^2$, und es besteht demnach in der That für den prismatischen Körper dieselbe Beziehung zwischen J_z und M wie für die entsprechende Querschnittsfläche.

Demzufolge ist das Trägheitsmoment J_z eines senkrechten Kreiscylinders, dessen Radius r ist, bezüglich dessen geometrischer Achse zufolge der Gleichung (2), S. 600, $J_z = \frac{1}{2} M r^2$, und da, wenn h die Höhe des Cylinders bedeutet, $M = \mu \cdot V = \mu \cdot r^2 \pi \cdot h$ ist,

$$J_z = \frac{1}{2} M r^2 = \frac{1}{2} \mu \cdot \pi r^4 h \dots (1)$$

d. h. es ist die auf die Mantelfläche (auf den Abstand r) reducierte Masse: $\frac{1}{2} M$. Für einen senkrechten Hohlcyinder, dessen Querschnitt von Kreisen mit den Radien r_1 und r_2 begrenzt wird, ist zufolge der Gleichung (1), S. 599, da $M = \mu V = \mu \pi (r_2^2 - r_1^2) h$ ist

$$J_z = \frac{1}{2} M (r_1^2 + r_2^2) = \frac{1}{2} \mu \pi \cdot (r_2^4 - r_1^4) \cdot h \dots (2)$$

Ebenso ist bei einem rechtwinkligen Parallelepiped, wenn man die sich im Schwerpunkte S desselben schneidenden Geraden, welche die Mittelpunkte je zweier paralleler rechteckiger Grenzflächen verbinden, zu den Achsen eines orthogonalen Achsensystems wählt und durch abc die zu den xyz -Achsen parallelen Kanten bezeichnet, zufolge der Gleichung (10), S. 606

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) = \frac{1}{12} \mu a b c (a^2 + b^2) \\ J_y &= \frac{1}{12} M (c^2 + a^2) = \frac{1}{12} \mu a b c (c^2 + a^2) \\ J_z &= \frac{1}{12} M (b^2 + c^2) = \frac{1}{12} \mu a b c (b^2 + c^2) \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

d. h. es ist die auf eine der zur betreffenden Achse parallelen Kanten (z. B. bei der z -Achse auf den Abstand $\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$ von der Achse) reducierte Masse: $\frac{1}{3} M$, oder es ist die Masse des Parallelepipeds für eine jede der Achsen xyz äquivalent acht in den Eckpunkten des Parallelepipeds befindlich gedachten Massenpunkten, deren jede die Masse $\frac{1}{24} M$ besitzt.

Es bedarf nicht erst hervorgehoben zu werden, dass diese drei Achsen xyz als Symmetrieachsen die drei Hauptcentralachsen des Parallelepipeds sind, so dass das Trägheitsmoment J für irgend eine durch den Schwerpunkt S gelegte, gegen die xyz -Achsen unter den Winkeln $\alpha\beta\gamma$ geneigte Achse $J = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma$ und zufolge Gleichung (3) und der zweiten Formel (6) auf S. 570 die Gleichung des Centralellipsoids $(b^2 + c^2) x^2 + (c^2 + a^2) y^2 + (a^2 + b^2) z^2 = 12 \varepsilon^4$ ist.

Den Formeln (1), (2) und (3) entsprechend lässt sich z. B. das auf die Rotationsachse bezogene Trägheitsmoment J eines Schwungrades, das bestehen soll a) aus einer cylindrischen Welle vom Radius r_1 und der Masse m_1 ; b) aus einer auf dieser Welle feststehenden Nabe m_2 , die einen Hohlzylinder darstellt, dessen innerer Radius r_1 und dessen äußerer Radius r_2 sei; c) aus radialen parallelepipedischen Radarmen, deren Gesamtmasse m_3 , deren Länge $a = r_3 - r_2$ und deren zu der Länge a und zur Rotationsachse senkrechte Kante b sei; d) aus dem Radkranze m_4 in Form eines Hohlzylinders, dessen innerer Radius r_2 und dessen äußerer Radius r_4 sei, folgendermaßen bestimmen: m_1 hat das Trägheitsmoment $J_1 = m_1 \frac{r_1^2}{2}$, für m_2 ist $J_2 = m_2 \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}$, für m_3 ist, wenn s den Abstand des Schwerpunktes eines Radarmes von der Drehungsachse bedeutet, so dass $s = \frac{r_2 + r_3}{2}$ ist, $J_3 = m_3 \left[\frac{1}{12} (a^2 + b^2) + s^2 \right]$ und schließlich ist für m_4 das Trägheitsmoment $J_4 = \frac{1}{2} m_4 (r_3^2 + r_4^2)$; demnach ist

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (r_1^2 + r_2^2) + m_3 \left[\left(\frac{r_2 + r_3}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} \{ (r_3 - r_2)^2 + b^2 \} \right] + \frac{1}{2} m_4 (r_3^2 + r_4^2)$$

Für einen Würfel von der Kantenlänge a ist zufolge (3) $J_x = J_y = J_z = J = \frac{1}{6} M a^2 = \frac{1}{6} \mu \cdot a^5$; eine jede durch den Schwerpunkt S des Würfels gelegte Achse ist eine freie Achse und das Centralellipsoid geht über in eine Kugelfläche.

Dass auch bei einem schiefwinkligen Parallelepiped die Masse desselben für eine jede durch die Schwerpunkte irgend welcher zwei paralleler Grenzflächen gelegte Achse äquivalent ist den in den acht Eckpunkten des Parallelepipeds angenommenen Massenpunkten, deren jeder den $\frac{1}{24}$ Theil der Masse des Parallelepipeds besitzt, ergibt sich aus der Gleichung (9) auf S. 604 und aus dem hier Gesagten sofort.

In diesem allgemeinen Satze sind auch mit einbegriffen die für das Parallelogramm und die Gerade gültigen Sätze des § 97 und 96, denn wird die Höhe des Parallelepipeds verschwindend klein angenommen, so ist in jeder Spitze der so entstandenen viereckigen Platte, da in derselben je zwei Eckpunkte zusammenfallen, anzunehmen die Masse $\frac{1}{24} M + \frac{1}{24} M = \frac{1}{12} M$, und wenn auch diese Platte ungemein schmal angenommen wird, so ist in jedem Endpunkte der so erhaltenen materiellen Geraden die Masse $\frac{1}{12} M + \frac{1}{12} M = \frac{1}{6} M$ voranzusetzen, um ein äquivalentes Massensystem zu erhalten.

Anmerkung. Da bei irgend einem Parallelepiped eine jede zu irgend einer der drei in einem Eckpunkte zusammenstoßenden Kanten parallele Sehne der Oberfläche des Parallelepipeds halbiert wird von jener Schwerebene, die zu den beiden anderen Kanten parallel ist, so haben (siehe S. 588) die zu den Kanten parallelen Schwerpunktsachsen die Richtungen der conjugierten Diameter eines Ellipsoids, dessen Achsen die Richtungen der Centralhauptachsen haben. Dieses Ellipsoid kann entweder durch die acht Eckpunkte des Parallelepipeds oder durch die Mittelpunkte der Kanten gelegt werden, oder auch so, dass es von den sechs ebenen Grenzflächen in deren Mittelpunkten berührt wird.

Für ein dreiseitiges senkrecht Prisma, dessen Seitenkanten auf dem Basisdreiecke ABC , dessen Seiten abc sind, senkrecht stehen, ist das Trägheitsmoment bezüglich der die Schwerpunkte S der beiden Grundflächen verbindenden Achse zufolge der Gleichung (17), S. 609

$$J_z = \frac{1}{36} M (a^2 + b^2 + c^2) \dots (4)$$

und bezüglich der durch A gehenden Seitenkante (siehe S. 610)

$$J_A = \frac{1}{12} M [3 (b^2 + c^2) - a^2] \text{ u. s. w.}$$

Bezeichnet man durch e_1, e_2, e_3 die Abstände der drei Eckpunkte der Basis eines beliebigen dreiseitigen Prismas von einer zu den Seitenkanten parallelen Schwerpunktsachse (der z -Achse), so ist zufolge der Gleichung (18) auf S. 609 der Trägheitsradius des Grunddreiecks, daher

auch jener des Prismas bezüglich dieser z -Achse $\rho_z = \sqrt{\frac{1}{12} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)}$,

sonach ist das Trägheitsmoment des Prismas $J_z = \frac{1}{12} M (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)$, d. h. die Masse eines jeden senkrechten oder schiefen dreiseitigen Prismas ist, wie bei einem Parallelepipet, in Bezug auf die z -Achse äquivalent den in den sechs Ecken des Prismas angenommenen Massenpunkten, wovon jeder den $\frac{1}{24}$ Theil der Masse des Prismas besitzt, oder aber man denke sich, um ein äquivalentes Massensystem für alle Achsen zu erhalten, dem zweiten Werte von J_z in der Gleichung (18) auf S. 609 zufolge in den Mittelpunkten der sechs Grundkanten je ein Sechstel der Masse des Prismas.

Für die geometrische Achse eines senkrechten regulären Prismas, dessen reguläres Basispolygon zur Seite a und zum Radius des eingeschriebenen Kreises r hat, ist zufolge der Gleichung (19) auf S. 612

$$J_z = \frac{1}{2} M (r^2 + \frac{1}{12} a^2) \dots (5)$$

Das Trägheitsmoment J_x eines beliebigen Prismas von der Seitenlänge l bezüglich irgend einer beliebigen Schwerpunktsachse (x -Achse) lässt sich, wenn ϱ den Trägheitshalbmesser der durch den Schwerpunkt S des Prismas zu den Grundflächen F desselben parallel gelegten Querschnittsfläche F bezüglich dieser x -Achse bedeutet, folgendermaßen bestimmen: Man nehme die zu den Seitenkanten parallele Schwerachse als z -Achse und den Schwerpunkt S als den Anfangspunkt eines im allgemeinen schiefwinkligen Achsensystems an. Der Achsenwinkel (xz) sei durch ν und der Neigungswinkel der z -Achse gegen die beiden Grundebenen durch λ bezeichnet. Zerlegt man wie früher das Prisma in die zu den Grundebenen parallelen ebenen Platten, so ist für eine Platte, deren Masse dM und deren Dicke $dz \cdot \sin \lambda$ ist, und deren in der z -Achse im Abstände z von S gelegener Punkt s als Schwerpunkt derselben angesehen werden kann, in Bezug auf die durch s parallel zur x -Achse gelegte Achse (deren Abstand von der x -Achse $z \sin \nu$ ist) das Trägheitsmoment $\varrho^2 \cdot dM$, sonach das Trägheitsmoment dJ_x für die x -Achse zufolge der Gleichung (4) auf S. 562 $dJ_x = \varrho^2 \cdot dM + z^2 \sin^2 \nu \cdot dM$, und daher, da ϱ^2 constant ist, $J_x = \varrho^2 \cdot M + \sin^2 \nu \int_0^M z^2 \cdot dM$. Nun ist $dM = \mu \cdot dV = \mu \cdot F \cdot dz \cdot \sin \lambda$, somit

$$\int_0^M z^2 dM = \mu \cdot F \sin \lambda \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} z^2 dz = \mu \cdot F \sin \lambda \cdot \frac{(\frac{l}{2})^3 - (-\frac{l}{2})^3}{3} = \frac{1}{12} \mu F l^3 \cdot \sin \lambda,$$

und da $M = \mu F l \sin \lambda$ ist, auch $\int_0^M z^2 dM = \frac{1}{12} M l^2$.

Setzt man diese Werte in die Gleichung für J_x ein, so findet man

$$J_x = M \left(\varrho^2 + \frac{1}{12} l^2 \sin^2 \nu \right) = \mu F l \sin \lambda \left(\varrho^2 + \frac{1}{12} l^2 \sin^2 \nu \right) . \quad (6)$$

Diese Gleichung lehrt, dass man ein der Masse des Prismas bezüglich einer jeden Schwerpunktsachse äquivalentes Massensystem erhält, wenn man zunächst in dem mittleren Querschnitte die Masse M des Prismas gleichförmig vertheilt und überdies (dem Summanden $\frac{1}{12} l^2 \sin^2 \nu$ und der Gleichung (1) auf S. 595 entsprechend) die zu den Seitenkanten parallele Schwerachse als eine materielle homogene Gerade von der Masse M annimmt.

Zufolge der letzten Gleichung (6) hat das Trägheitsmoment J_x eines senkrechten hohlen Kreiscylinders, und zwar in Bezug auf eine jede durch den Mittelpunkt S desselben zur geometrischen Achse z senkrecht geführte Achse x oder y , die eine Centralhauptachse ist (da gemäß der zweiten Gleichung (1) auf S. 599 $\varrho^2 = \frac{1}{4} (r_1^2 + r_2^2)$ und $\nu = \frac{\pi}{2}$ ist), den Wert $J_x = J_y = \frac{M}{4} [r_1^2 + r_2^2 + \frac{1}{3} l^2]$ und für einen Volleylinder mit dem Radius r besteht, da $r_1 = 0$, $r_2 = r$ ist, die Gleichung

$$J_x = J_y = \frac{M}{4} (r^2 + \frac{1}{3} l^2) . . . (7)$$

Das Centralellipsoid des letzteren, das ein Rotationsellipsoid ist, übergeht dann in eine Kugelfläche, d. h. es ist dann eine jede durch den Mittelpunkt S nach einer beliebigen Richtung des Raumes geführte Achse eine Centralhauptachse, wenn die Werte aus (7) und (1) gleich sind, sonach $\frac{1}{2} r^2 = \frac{1}{4} r^2 + \frac{1}{12} l^2$, also wenn die Länge l des Cylinders $l = r\sqrt{3} = 1.732 r$ ist.

Der Trägheitsradius ϱ_a einer abgekürzten Pyramide oder eines abgekürzten Kegels in Bezug auf irgend eine durch die Spitze O der erweiterten Mantelfläche gelegte Achse u lässt sich, wenn der Trägheitsradius einer der Basisflächen, etwa der Trägheitshalbmesser ϱ_F der größeren Basisfläche F in Bezug auf diese Achse u , ferner zwei homologe lineare Dimensionen A und a der beiden Grundflächen F und f gegeben sind, folgendermaßen berechnen: Es sei durch H die Höhe der ganzen Pyramide und durch h jene der Ergänzungspyramide bezeichnet, ferner sei O zum Anfangspunkte eines orthogonalen Achsensystems gewählt, dessen z -Achse auf den Grundflächen senkrecht steht. Wird nun die Pyramide in lauter Platten dM parallel zu den Grundflächen getheilt, so besteht für den Trägheitsradius ϱ der im Abstände z von O befindlichen Platte, deren Grundfläche F_z bekanntlich aus der Proportion $F_z : F = z^2 : H^2$ bestimmbar ist, in Bezug auf die Achse u offenbar die Relation $\varrho : \varrho_F = z : H$, daher ist das Trägheitsmoment dJ_u dieser Platte $dJ_u = dM \cdot \varrho^2 = \frac{\varrho_F^2}{H^2} \cdot z^2 \cdot dM$, und da bekanntlich $dM = \mu \cdot dV = \mu \cdot F_z dz = \mu F \cdot \frac{z^2}{H^2} dz$ ist, so ist

$$J_u = \int dJ_u = \mu \cdot \frac{\rho_{F'} \cdot F}{H^4} \int_h^H z^4 dz = \frac{1}{5} \mu \cdot \rho_{F'} \cdot F \cdot \frac{H^5 - h^5}{H^4}$$

$$M = \int dM = \mu \cdot \frac{F}{H^3} \int_h^H z^3 dz = \frac{1}{3} \mu F \cdot \frac{H^3 - h^3}{H^2}$$

Die Division der beiden Gleichungen lehrt, dass

$$\rho_u^2 = \frac{J_u}{M} = \frac{3}{5} \rho_{F'} \cdot \frac{H^5 - h^5}{H^2 (H^3 - h^3)} = \frac{3}{5} \rho_{F'} \cdot \frac{A^5 - a^5}{A^2 (A^3 - a^3)} \dots (8)$$

ist, da die Höhen H und h den homologen Dimensionen A und a proportional sind. Für eine volle Pyramide, bzw. einen Vollkegel ist $h = 0$, bzw. $a = 0$ zu setzen, so dass dann

$$J_u = M \rho_u^2 = \frac{3}{5} M \rho_{F'}^2 \dots (9)$$

wird.

Bedeutet im letzteren Falle $\rho_{F'}$ den Trägheitshalbmesser der Grundfläche F in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt S der Pyramide parallel zu der früheren Achse u gelegte Achse s , so ist, wenn e den Abstand der Achse u vom Schwerpunkte der Basis F bedeutet, zufolge der Gleichung (5) auf S. 564 $\rho_{F'}^2 - e^2 = \rho_{F''}^2 - \left(\frac{1}{4} e\right)^2$, also $\rho_{F'}^2 = \rho_{F''}^2 + \frac{15}{16} e^2$ und das Trägheitsmoment J_s der Pyramide (des Kegels) in Bezug auf die Schwerpunktsachse s ist zufolge der Gleichung (4), S. 562

$$J_s = J_u - M \left(\frac{3}{4} e\right)^2 = \frac{3}{5} M \rho_{F'}^2 - \frac{9}{16} M e^2 = \frac{3}{5} M \left[\rho_{F''}^2 + \frac{15}{16} e^2\right] - \frac{9}{16} M e^2,$$

somit, wenn ρ_s den Trägheitshalbmesser der Pyramide bezüglich der Schwerachse s bedeutet,

$$J_s = M \rho_s^2 = \frac{3}{5} M \rho_{F''}^2 \dots (10)$$

Man hat sich demgemäß, um eine äquivalente Masse in Bezug auf irgend eine Schwerpunktsachse der Pyramide oder des Kegels zu erhalten, auf der Basisfläche F drei Fünftel der Masse der Pyramide gleichförmig vertheilt zu denken.

Für ein homogenes Tetraëder lassen sich auch verhältnismäßig leicht die Centralhauptachsen bestimmen. Da nämlich die drei Achsen, welche die Mittelpunkte je zweier Gegenkanten des Tetraëders verbinden, und die bekanntlich Schwerachsen sind, stets eine solche Lage haben, dass alle Sehnen der Tetraëderoberfläche, die durch irgend einen Punkt irgend einer dieser Achsen parallel zu der Ebene der beiden anderen Achsen geführt werden, in diesem Punkte halbiert werden, so müssen diese Achsen zufolge des Lehrsatzes auf S. 588 die Richtungen der conjugierten Diameter eines Ellipsoids haben, dessen Achsen die Centralhauptachsen sind. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass dieses Ellipsoid entweder durch die vier Eckpunkte des Tetraëders gelegt werden kann oder aber durch die sechs Mittelpunkte der Kanten des Tetraëders.

Das Trägheitsmoment eines homogenen schief abgeschnittenen Cylinders, bzw. Prismas (Fig. 169 auf S. 590) in Bezug auf die zur Seite des Cylinders senkrecht angenommene Durchschnittslinie der beiden ebenen Begrenzungsflächen, die zur x -Achse gewählt sei, lässt sich in dem Falle leicht

bestimmen, wenn die durch die x -Achse zur Erzeugenden des Cylinders senkrecht gelegte Querschnittsfläche F' eine zur x -Achse im Abstände e parallel Symmetrieachse X (demnach auch eine jede der ebenen Grundflächen eine derartige Symmetrieachse) besitzt.

Theilt man nämlich den Körper in Fig. 169 in lauter zu der Erzeugenden parallele Säulchen dM und behält die Zeichen der Fig. 169 bei, so ist offenbar das Trägheitsmoment dJ_x des als eine materielle Gerade anzusehenden Körperelements dM von der Höhe z

$$dJ_x = \frac{1}{3} dM \cdot z^2 + dM \cdot y'^2 = \left(\frac{1}{3} z^2 + y'^2 \right) dM.$$

Da nun $dM = \mu \cdot dV = \mu \cdot z \cdot dF'$ und $z = y' \operatorname{tg} \alpha$ ist, so ist

$$dJ_x = \mu \left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \operatorname{tg} \alpha \cdot y'^3 dF', \text{ daher}$$

$$J_x = \mu \left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \int y'^3 dF', \quad M = \int dM = \mu \operatorname{tg} \alpha \cdot \int y' dF'.$$

Nun ist, wenn durch Y der positive oder negative Abstand des Flächenelements dF' von der X -Achse bezeichnet wird, $y' = e + Y$, daher $\int y'^3 dF' = e^3 F' + 3e^2 \int Y dF' + 3e \int Y^2 dF' + \int Y^3 dF'$ und $\int y' dF' = eF' + \int Y dF'$ und da die X -Achse eine Symmetrieachse ist, so muss jedem Flächenelemente dF' auf einer Seite der X -Achse mit der Ordinate Y ein gleiches Flächenelement dF' auf der anderen Seite derselben mit der Ordinate $-Y$ entsprechen und es verschwinden daher die Summen $\int Y dF'$ und $\int Y^3 dF'$, während, wenn ρ_x den Trägheitsradius der Fläche F' bezüglich der X -Achse bedeutet, $\int Y^2 dF' = F' \rho_x^2$ ist, so dass die obigen Gleichungen die Form annehmen:

$$J_x = \mu \left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \operatorname{tg} \alpha \cdot e F' (e^2 + 3 \rho_x^2), \quad M = \mu \operatorname{tg} \alpha \cdot e F'$$

Die Division dieser beiden Gleichungen lehrt, dass

$$J_x = M \left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha \right) (e^2 + 3 \rho_x^2) \text{ ist.}$$

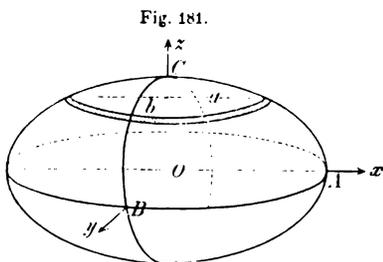


Fig. 181.

Theilt nun der durch die x -Achse gelegte Querschnitt F' der cylindrischen (prismatischen) Fläche den schief abgeschnittenen Cylinder (Prisma) in zwei Theile, so hat man schließlich die diesen Theilen entsprechenden, durch die letzte Gleichung bestimmten Trägheitsmomente zu addiren, im gegentheiligen Falle aber zu subtrahiren.

Das Trägheitsmoment J_x eines dreiachsigen Ellipsoids (Fig. 181) bezüglich einer Achse (z -Achse) desselben lässt sich derart ermitteln, dass man dasselbe durch ungemein nahe aneinander senkrecht zur z -Achse

geführte ebene Schnitte in elliptische elementare Platten zerlegt, deren Achsen zu den beiden anderen Achsen (zur x - und y -Achse) des Ellipsoids parallel sind.

Sind A, B, C die Halbachsen des Ellipsoids und a und b die Halbachsen einer solchen im Abstände z vom Mittelpunkte O des Ellipsoids befindlichen elliptischen Platte von der Dicke dz und dM die Masse, dV das Volum der letzteren, so ist zufolge der Gleichung (28) auf S. 617 das Trägheitsmoment dJ_x derselben $dJ_x = \frac{1}{4} (a^2 + b^2) dM$, und da $dM = \mu \cdot dV = \mu \cdot ab \pi \cdot dz$ ist, auch $dJ_x = \frac{1}{4} \mu \pi \cdot ab (a^2 + b^2) dz$. Da nun a die Ordinate und z die Abscisse eines Punktes des in der zx -Ebene gelegenen elliptischen Hauptschnittes des Ellipsoids ist, dessen Achsen A und C sind, so ist $\frac{a^2}{A^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$, also der Ellipsengleichung zufolge $a = A \sqrt{1 - \frac{z^2}{C^2}}$, und ebenso ist für den in der yz -Ebene gelegenen Hauptschnitt $b = B \sqrt{1 - \frac{z^2}{C^2}}$.

Setzt man diese Werte von a und b in die letzte Gleichung für dJ_x ein, so wird

$dJ_x = \frac{1}{4} \mu \pi A B (A^2 + B^2) \left(1 - \frac{z^2}{C^2}\right)^2 dz$ und, da alle elliptischen Platten zwischen $z = -C$ und $z = C$ gelegen sind, so ist

$$J_x = \frac{1}{4} \mu \pi A B (A^2 + B^2) \int_{-C}^C \left(1 - 2 \frac{z^2}{C^2} + \frac{z^4}{C^4}\right) dz = \frac{4}{15} \mu \pi A B C (A^2 + B^2)$$

Nun ist die Masse des Ellipsoids nach der obigen Formel für dM

$$M = \int dM = \mu \pi \int_{-C}^C ab dz = \mu \pi A B \int_{-C}^C \left(1 - \frac{z^2}{C^2}\right) dz = \frac{4}{3} \mu \pi A B C$$

so dass die Division der beiden letzten Gleichungen lehrt, dass für die Schwerpunkthauptachsen

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \frac{1}{5} M (A^2 + B^2), & J_x &= \frac{1}{5} M (B^2 + C^2), \\ J_y &= \frac{1}{5} M (C^2 + A^2) \end{aligned} \right\} (11)$$

ist. Je ein Zehntel der Masse des Ellipsoids in den sechs Endpunkten der Hauptachsen (die offenbar auch Centralhauptachsen sind) concentrirt bilden daher ein äquivalentes Massensystem in Bezug auf eine jede Schwerpunktsachse.

Für ein Rotationsellipsoid, dessen geometrische Achse die z -Achse ist, ist $A = B$, also $J_x = \frac{2}{5} M A^2$ und $\varrho_x = A \sqrt{\frac{2}{5}} = 0.6325 A$

und demnach auch bei einer Kugel vom Radius R für eine jede durch den Mittelpunkt geführte Achse z

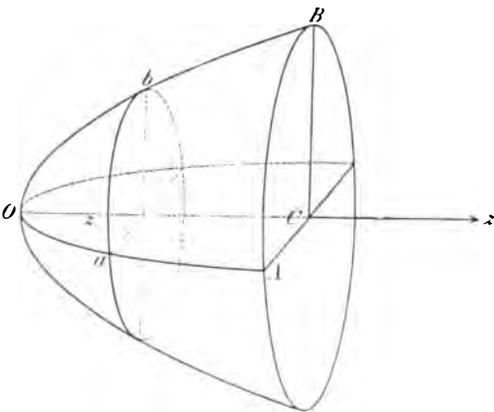
$$J_z = \frac{2}{5} MR^2, \quad \rho_z = \sqrt{\frac{2}{5}} R = 0.6325 R \dots \quad (12)$$

zu setzen, d. h. die auf eine dem Kugelradius gleiche Entfernung reducierte Masse ist für einen jeden Durchmesser gleich $\frac{2}{5}$ der Masse der Kugel.

Das Trägheitsmoment der Kugel in Bezug auf den Durchmesser lässt sich übrigens, indem man die Kugel in unzählige ungleichmäßig dünne concentrische Kugelschalen zerlegt, sehr leicht mit Hilfe des polaren Trägheitsmomentes J_0 bezüglich des Kugelcentrums O bestimmen, das für eine elementare Kugelschale dV vom Radius r und der Dicke dr offenbar durch $dJ_0 = r^2 \cdot dM = r^2 \cdot \mu dV = r^2 \mu \cdot 4r^2 \pi dr$ bestimmt ist, so dass $J_0 = \int dJ_0 = 4\mu\pi \int_0^R r^4 dr = \frac{4}{5} \mu\pi R^5$ ist. Nun ist für drei aufeinander senkrechte Durchmesser als Coordinatenachsen offenbar $J_x = J_y = J_z$ und zufolge der Gleichung (3) auf S. 562 ist $3J_z = J_x + J_y + J_z = 2J_0$, also $J_z = \frac{2}{3} J_0 = \frac{8}{15} \mu\pi R^5 = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} R^3 \pi \cdot \mu \cdot R^2 = \frac{2}{3} \cdot V\mu \cdot R^2 = \frac{2}{5} MR^2$.

Auf ganz ähnliche Art, wie dies bei dem Ellipsoid geschehen ist, lässt sich auch das Trägheitsmoment J_z des Segments eines elliptischen Paraboloids (Fig. 182) in Bezug auf dessen Hauptachse, die z -Achse, berechnen.

Fig. 182.



Man verlege den Anfangspunkt O des rechtwinkligen Coordinatensystems in den Scheitel und wähle die Ebenen OCA und OCB der parabolischen Hauptschnitte zu Coordinatenebenen. Das Segment des Paraboloids sei begrenzt von einer zur z -Achse senkrechten elliptischen Basisebene ABC , und C sei deren Abstand von dem Scheitel; die Halbachsen A und B dieser elliptischen Basis seien gegeben. Für eine zur Basis parallele elliptische Querschnittsfläche, deren Abstand vom Scheitel z ist, sind die Halbachsen a und b , da deren Endpunkte den Parabeln OaA und ObB angehören, durch die bekannten Parabelgleichungen $a^2 = \frac{A^2}{C} z$, $b^2 = \frac{B^2}{C} z$ bestimmt, und es ist, wenn das Paraboloid in lauter zur z -Achse senk-

hte elliptische Platten getheilt wird, wie dies früher beim Ellipsoid geschehen aus denselben Gründen wie dort $dM = \mu \cdot ab\pi \cdot dz$ und der Gleichung (28) S. 617 zufolge $dJ_x = \frac{1}{4} (a^2 + b^2) dM$. Setzt man in diese Gleichungen die Werte für a und b ein, so findet man

$$M = \mu \pi \int_0^C ab \, dz = \mu \pi \frac{AB}{C} \int_0^C z \, dz = \frac{1}{2} \mu \pi ABC$$

$$= \frac{1}{4} \int (a^2 + b^2) dM = \frac{1}{4} \mu \pi \frac{AB(A^2 + B^2)}{C^2} \int_0^C z^2 \, dz = \frac{1}{12} \mu \pi ABC (A^2 + B^2)$$

Die Division der beiden letzten Gleichungen lehrt, dass

$$J_x = \frac{1}{6} M (A^2 + B^2) \dots (13 a)$$

Ferner ist, wenn man die x -Achse parallel zu A und a , die y -Achse parallel zu B und b annimmt, das Trägheitsmoment dJ_a der elliptischen Platte f bezüglich der Achse a zufolge Gleichung (27) auf S. 617 $dJ_a = \frac{1}{4} b^2 dM$ und $dJ_x = dJ_a + z^2 dM = (z^2 + \frac{1}{4} b^2) \cdot dM$. Setzt man in diese Gleichung früherer Werte von b und dM ein und integriert diese Gleichung von 0 bis C , so findet man

$$J_x = \frac{1}{4} \mu \pi ABC (C^2 + \frac{1}{3} B^2) = \frac{1}{2} M (C^2 + \frac{1}{3} B^2) \left\{ \dots (13 b) \right.$$

und ebenso $J_y = \frac{1}{4} \mu \pi ABC (C^2 + \frac{1}{3} A^2) = \frac{1}{2} M (C^2 + \frac{1}{3} A^2) \left. \right\}$

In ähnlicher Weise lässt sich auch sehr leicht das Trägheitsmoment des Moments eines einflächigen oder zweiflächigen Hyperboloids berechnen.

Das Trägheitsmoment eines Umdrehungskörpers, dessen Achse die x -Achse eines orthogonalen Achsensystems ist, erhält man in folgender Art: Bei der bekannten Theilung desselben (Fig. 156 auf S. 509) ergibt sich für das Trägheitsmoment einer der so erhaltenen eisförmigen Platten bezüglich der x -Achse (zufolge der ersten Gleichung (2) auf S. 600) $dJ_x = \frac{1}{2} y^2 \cdot dM$, und für einen zur y -Achse parallelen Durchmesser ist das Trägheitsmoment (gemäß der zweiten Gleichung (2) auf S. 600) $\frac{1}{4} y^2 dM$, somit für die zu dieser Schwerpunktsachse parallele y -Achse (nach Gleichung 4, auf S. 562) $dJ_y = \frac{1}{4} y^2 dM + x^2 dM = (x^2 + \frac{1}{4} y^2) dM$, und da bekanntlich $dM = \mu \cdot y^2 \pi \cdot dx$ ist, so ist

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \int dJ_x = \frac{1}{2} \mu \pi \cdot \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx \\ J_y &= \int dJ_y = \mu \pi \int_{x_0}^{x_1} (x^2 + \frac{1}{4} y^2) y^2 dx \end{aligned} \right\} (14)$$

wofern sich x_0 und x_1 auf die beiden parallelen Grundflächen des Umdrehungskörpers beziehen. Die Kenntnis der Gleichung $y = F(x)$ der Meridiancurve ist hiebei vorausgesetzt.

Ist der Rotationskörper von zwei Rotationsflächen eingeschlossen, für deren Meridiancurven die Gleichungen $y'' = f(x)$ und $y' = \varphi(x)$ bestehen, wo $y'' > y' > 0$ sein möge, so setze man zunächst in die beiden Gleichungen (14) y'' statt y ein und berechne so J_x'' und J_y'' , hierauf berechne man auf gleiche Weise J_x' und J_y' nach Einsetzung von y' statt y ; es sind dann die gesuchten Trägheitsmomente J_x und J_y des Rotationskörpers $J_x = J_x'' - J_x'$ und $J_y = J_y'' - J_y'$.

Das gleiche Verfahren ist anzuwenden, wenn die erzeugende Curve eine geschlossene Curve ist, und zwar bedeuten dann x_0 und x_1 die Abscissen der zur x -Achse normalen Endtangente der Meridiancurve.

Dass $J_y = J_x$ ist, und dass die x -Achse und eine jede in dem (beliebig in der geometrischen Achse des Umdrehungskörpers gewählten) Anfangspunkte O auf dieser Achse senkrechte Achse Hauptachsen für O sind, und dass demnach für eine jede andere durch O geführte Achse a , die gegen die x -Achse unter dem Winkel α geneigt ist, zufolge der Gleichung (7) auf S. 571 das Trägheitsmoment J_a bestimmbar ist aus

$$J_a = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha \quad \dots \quad (15)$$

wo für J_x und J_y die Werte aus (14) einzusetzen sind, bedarf nicht weiter erläutert zu werden.

Für einen senkrechten Kreiskegel ist, wenn die x -Achse mit der Kegelachse übereinstimmt und die auf derselben senkrechte y -Achse durch die Spitze des Kegels hindurchgeht, wenn ferner H die Höhe und R den Grundradius des Kegels bedeutet, $y = \frac{R}{H} x$,

somit zufolge (14) $J_x = \frac{1}{2} \mu \pi \cdot \int_0^H \frac{R^4}{H^4} \cdot x^4 dx = \frac{1}{10} \mu \pi R^4 H$ und

$$J_y = \mu \pi \int_0^H \left(1 + \frac{1}{4} \frac{R^2}{H^2}\right) \frac{R^2}{H^2} x^4 dx = \frac{1}{5} \mu \pi H R^2 \left(H^2 + \frac{1}{4} R^2\right)$$

und da $M = \mu \cdot V = \frac{1}{3} \mu \cdot R^2 \pi \cdot H$ ist, auch (siehe Gleichung 9)

$$J_x = \frac{3}{10} M R^2, \quad J_y = \frac{3}{5} M \left(H^2 + \frac{1}{4} R^2\right) \quad \dots \quad (16)$$

und für die zur Kegelachse senkrechte Schwerpunktsachse ist zufolge der Gleichung (4) auf S. 562

$$J_s = J_y - M \cdot \left(\frac{3}{4} H\right)^2 = \frac{3}{20} M \left(R^2 + \frac{1}{4} H^2\right) \quad \dots \quad (17)$$

Ist $J_s = J_x$, also $H = 2R$, so ist eine jede durch den Schwerpunkt geführte Achse eine freie Achse.

Das Trägheitsmoment J_x eines senkrechten abgekürzten Kreiskegels von der Masse M in Bezug auf dessen Achse x ist, wenn R_1 den Radius der größeren und R_2 jenen der kleineren Basis bezeichnet zufolge Gleichung (16) $J_x = \frac{3}{10} (M_1 R_1^2 - M_2 R_2^2)$, wo M_2 die Masse des Ergänzungskegels und M_1 die Summe $M_1 = M + M_2$ bedeutet. Da nun bekanntlich $\frac{M_1}{R_1^3} = \frac{M_2}{R_2^3} = \frac{M}{R_1^3 - R_2^3}$ ist, so führt die Substitution der aus dieser Gleichung sich ergebenden Werte von M_1 und M_2 in die Gleichung für J_x zu dem Werte $J_x = \frac{3}{10} M \frac{R_1^5 - R_2^5}{R_1^3 - R_2^3}$, der in Übereinstimmung mit der Gleichung (8) steht, wenn in derselben aus bekannten Gründen $\rho r^2 = \frac{1}{2} R_1^2$, $A = R_1$, $a = R_2$ gesetzt wird.

Die Trägheitsmomente J_x und J_y eines Kugelsegmentes von der Höhe (Achsenlänge) H , das einer Kugel vom Radius R angehört und dessen Grundfläche den Radius r hat, sind, wenn man die Achse des Kugelsegmentes zur x -Achse und eine im Scheitel des Segments zur Achse Senkrechte zur y -Achse wählt, so dass $y^2 = 2Rx - x^2$ und demnach $r^2 = 2RH - H^2$ ist, zufolge der Gleichung (14) gegeben durch

$$J_x = \frac{1}{2} \mu \pi \int_0^H y^4 dx = \frac{1}{2} \mu \pi \int_0^H (4R^2 x^2 - 4R x^3 + x^4) dx$$

$$J_y = \mu \pi \int_0^H \left(x^2 + \frac{1}{4} y^2\right) y^2 dx = \frac{1}{4} \mu \pi \int_0^H (4R^2 x^2 + 4R x^3 - 3x^4) dx$$

$$M = \mu V = \mu \pi \int_0^H y^2 dx = \mu \pi \int_0^H (2Rx - x^2) dx.$$

Durch Ausführung der angedeuteten Integrationen ergibt sich in bekannter Weise, wenn auch schließlich $R = \frac{r^2 + H^2}{2H}$ gesetzt wird,

$$J_x = \frac{2}{3} \mu \pi H^3 \left(R^2 - \frac{3}{4} RH + \frac{3}{20} H^2\right) = \frac{1}{3} M \left(r^2 + \frac{1}{6} H^2 + \frac{2}{15} \frac{H^4}{3r^2 + H^2}\right)$$

$$J_y = \mu \pi H^3 \left(\frac{1}{3} R^2 + \frac{1}{4} RH - \frac{3}{20} H^2\right) = \frac{1}{6} M \left(r^2 + \frac{19}{6} H^2 - \frac{16}{15} \frac{H^4}{3r^2 + H^2}\right)$$

Ist nun H gegen R und r so klein, dass der letzte Summand in beiden Gleichungen gegenüber den anderen Summanden vernachlässigt werden kann, so gelangt man zu den Näherungswerten

$$J_x = \frac{1}{3} M (r^2 + \frac{1}{6} H^2), J_y = \frac{1}{6} M (r^2 + \frac{19}{6} H^2) \dots (13)$$

Diese Werte können zur Anwendung kommen bei der Bestimmung der Trägheitsmomente von Pendellinsen, die aus zwei Kugelsegmenten zusammengesetzt angesehen werden können. Für eine Halbkugel, für welche $H = R = r$ ist, ist $J_x = \frac{4}{15} \mu \pi R^5 = \frac{2}{5} MR^2$ u. s. w.

Bei dem Segmente eines Rotationsparaboloids, dessen Höhe H ist, und dessen auf der Achse x des Paraboloids senkrechte Grundfläche den Radius r hat, ist analog, wenn P den Parameter der erzeugenden Parabel bedeutet und die y -Achse die Lage einer Scheiteltangente hat, $y^2 = Px$ und $r^2 = PH$, also $y^2 = \frac{r^2}{H} x$ und demnach

$$J_x = \frac{1}{2} \mu \pi \int_0^H y^4 dx = \frac{1}{2} \mu \pi \frac{r^4}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{1}{6} \mu \pi r^4 H$$

$$J_y = \mu \pi \int_0^H (x^2 + \frac{1}{4} \frac{r^2}{H} x) \cdot \frac{r^2}{H} x dx = \frac{1}{4} \mu \pi r^2 H (H^2 + \frac{1}{3} r^2)$$

$$M = \mu \pi \int_0^H y^2 dx = \mu \pi \cdot \frac{r^2}{H} \int_0^H x dx = \frac{1}{2} \mu \pi r^2 H$$

daher in Übereinstimmung mit den früher für das elliptische Paraboloid abgeleiteten Werten (13 a) und (13 b) $J_x = \frac{1}{3} Mr^2$, $J_y = \frac{1}{2} M (H^2 + \frac{1}{3} r^2)$ und für die zur y -Achse parallele Schwerpunktsachse $J_s = J_y - M \cdot (\frac{2}{3} H)^2 = \frac{1}{6} M (r^2 + \frac{1}{3} H^2)$, sonach wird $J_s = J_x$, wenn $H^2 = 3r^2$ oder $H = 1.732 r$ ist, in welchem Falle dann alle Schwerpunktsachsen freie Achsen sind u. s. w.

Entsteht im allgemeinsten Falle ein homogener Rotationskörper durch Umdrehung einer ebenen Fläche, die von zwei auf derselben Seite der Rotationsachse (x -Achse) gelegenen Curven, deren laufende Ordinaten y'' und y' sind ($y'' > y'$) und von zwei zur Rotationsachse senkrechten Ordinaten eingeschlossen wird, und findet die Rotation um den Winkel 2φ statt, so ist die Masse dM einer der zur Rotationsachse senkrechten Platten von der Dicke dx , aus welchen der Rotationskörper bestehend gedacht werden kann, offenbar $dM = \mu \cdot dV = \mu \cdot (y''^2 - y'^2) \varphi \cdot dx$.

Da diese Platte als ein homogener Ringsector angesehen werden kann, so haben für die Trägheitsmomente dJ_x , dJ_y , dJ_z derselben in Bezug auf die den Gleichungen (33) auf S. 623 zugrunde liegenden orthogonalen Achsen diese drei Gleichungen des § 98 Giltigkeit, nur ist in denselben statt M der eben gefundene Wert von dM einzusetzen. Thut man dies und integriert dann diese

leichungen, so findet man für die Trägheitsmomente des in Rede stehenden zylförmigen Rotationskörpers die Werte

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2} \mu \varphi \int (y''^2 - y'^2) dx \\ J_y &= \mu \varphi \int x^2 (y''^2 - y'^2) dx + \frac{1}{4} \mu \varphi \left(1 - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \int (y''^2 - y'^2) dx \\ J_z &= \mu \varphi \int x^2 (y''^2 - y'^2) dx + \frac{1}{4} \mu \varphi \left(1 + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \int (y''^2 - y'^2) dx \end{aligned} \right\} (19)$$

Für $\varphi = \pi$, $y' = 0$ und $y'' = y$ gehen diese Gleichungen in die Gleichungen (14) über.

Hat die erzeugende ebene Meridianfläche eine zur Rotationsachse in der Entfernung b parallele Symmetrieachse, so lassen sich aus den eben gefundenen Gleichungen auf dieselbe Art, wie — von der gleichen Annahme ausgehend — die Gleichungen (32) auf S. 623 für die Rotationsfläche abgeleitet wurden, auch hier dieselben Gleichungen für den Rotationskörper deducieren, was übrigens noch einfacher auf folgende Art geschehen kann:

Wählt man die Symmetrieachse zur X -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems und bezeichnet durch Y die positive oder negative senkrechte Entfernung eines beliebigen Elements dF der erzeugenden Fläche von der X -Achse, so ist $y = b + Y$. Die Trägheitsmomente dJ_x, dJ_y, dJ_z desjenigen ringförmigen Massenelements dM , dessen Volum dV bei der Entstehung des Rotationskörpers durch die Drehung des Flächenelements dF gebildet wird (siehe Fig. 162, S. 534), und das als ein homogener Kreisbogen angesehen werden kann, sind nach den Formeln für das Trägheitsmoment eines Kreisbogens

$$\begin{aligned} dJ_x &= y^2 dM, \quad dJ_y = dM \left[x^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) y^2 \right], \\ dJ_z &= dM \left[x^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) y^2 \right] \end{aligned}$$

und $dM = \mu \cdot dV = \mu \cdot 2\varphi y \cdot dF$.

Setzt man den letzten Wert in die drei früheren Gleichungen ein und setzt $y = b + Y$, so findet man $J_x = 2\varphi\mu \left[\int Y^2 dF + 3b \int Y \cdot dF + 3b^2 \int Y \cdot dF + b^2 F \right]$,
 $J_y = 2\varphi\mu \left[\int Y dF + b F \right]$ u. s. w.

Nun ist wegen der vorausgesetzten Symmetrie der Fläche F in Bezug auf die X -Achse offenbar $\int Y^2 dF = 0, \int Y dF = 0, \int x^2 \cdot Y dF = 0$, und, wenn durch ρ_x und ρ_r die Trägheitsradien der Meridianfläche in Bezug auf die X -Achse und die y -Achse bezeichnet werden, $\int Y^2 \cdot dF = F \cdot \rho_x^2$ und $\int x^2 \cdot dF = F \cdot \rho_r^2$.

Es ist demnach

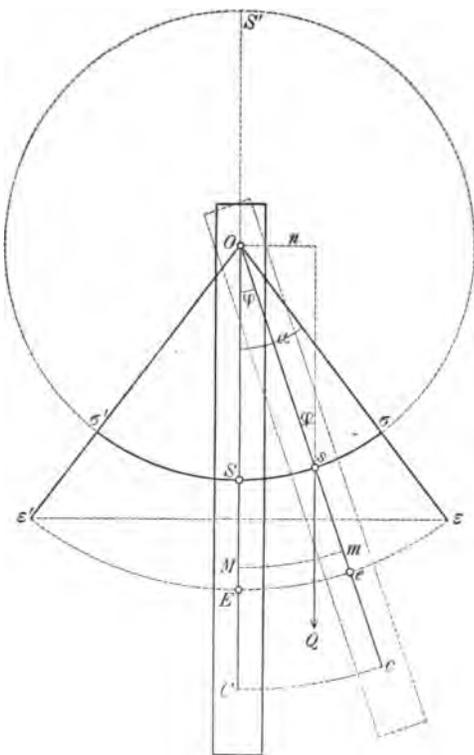
$$\left. \begin{aligned} M &= 2\varphi\mu b F, \quad J_x = M[3\rho_x^2 + b^2] \\ J_y &= M \left[\rho_x^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) (3\rho_x^2 + b^2) \right] \\ J_z &= M \left[\rho_x^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) (3\rho_x^2 + b^2) \right] \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

völliger Übereinstimmung mit den Gleichungen (32) auf S. 623.

§ 100. Anwendung der Dynamik der rotierenden Bewegung auf die Bewegung eines unter der alleinigen Einwirkung der Schwerkraft um eine fixe Achse rotierenden starren Körpers. Physisches Pendel. Reversionspendel. Bewegung durch Überwucht.

Ist ein starrer Körper um eine fixe Achse (z -Achse) drehbar und nur seiner eigenen Schwere überlassen, so kann dessen Rotationsbewegung zufolge der dynamischen Grundgleichung $M_z = \sum M_i^{(P)} = = J_z \gamma$ (Gleichung 5, S. 553) nur dann, wird aber sicher dann eine andauernd gleichförmige sein, es wird also die Winkelbeschleunigung γ gleich Null sein und Null bleiben, wenn das Drehmoment M_z der resultierenden Schwerkraft Q während der ganzen Bewegung Null bleibt, also wenn (vergl. S. 536, c) entweder die Drehachse zur Richtung der Schwerkraft Q parallel, sonach vertical ist oder — falls

Fig. 183.



die Drehachse nicht vertical ist — wenn die Richtungslinie der Kraft Q in jeder Lage des Körpers die Drehachse schneidet, was offenbar nur dann möglich ist, wenn der Schwerpunkt ein Punkt der Rotationsachse ist. In beiden Fällen, mag nämlich die Drehachse vertical sein oder mag der Schwerpunkt ein Punkt der Drehachse sein, ist zufolge § 86 jede Lage des Körpers eine der Lagen des neutralen Gleichgewichtes, und die Bewegung der einzelnen Punkte ist eine kreisende (circulierende), und zwar eine gleichförmige Bewegung.

Ist aber die Drehachse nicht vertical und der Schwerpunkt außerhalb der Drehachse gelegen, und wird der Körper aus seiner

Gleichgewichtslage, in welcher der Schwerpunkt vertical über oder unter der Drehachse gelegen ist (je nachdem die Gleichgewichtslage eine labile oder stabile ist), irgendwie (etwa durch einen Stoß) in

Rotation versetzt und dann seiner eigenen Schwere überlassen, so ist die Rotationsbewegung eine ungleichförmige, und zwar kann die Bewegung eines jeden einzelnen Punktes, je nachdem bei derselben die ganze Peripherie des Rotationskreises durchlaufen wird oder nur ein Theil derselben, entweder eine circulierende (kreisende) oder aber eine oscillierende (schwingende) sein.

Im letzteren Falle müssen offenbar die Schwingungen stets um die stabile Gleichgewichtslage erfolgen. Einen derartigen um seine Gleichgewichtslage infolge der eigenen Schwere hin- und herschwingenden starren Körper bezeichnet man als ein physisches (physikalisches) Pendel (mitunter auch als zusammengesetztes Pendel).

Der einfachste Fall, der hier allein betrachtet werden soll, findet dann statt, wenn die fixe Drehachse horizontal ist.

Es sei die Ebene der Zeichnung Fig. 183 die durch den Schwerpunkt S des Körpers gelegte, auf der Drehachse im Punkte O senkrechte Verticalebene und S sei die stabile Gleichgewichtslage des Schwerpunktes, demnach OS vertical. Der Schwerpunkt ist genöthigt, sich in der in der Zeichnungsebene gelegenen Kreisbahn $Ss\sigma \dots$ zu bewegen, deren Mittelpunkt O ist. Ist s die Lage des Schwerpunktes zur beliebigen Zeit t , zu welcher das Pendel die punktierte Lage einnimmt, und ist φ der dem Bogen Ss entsprechende Centriwinkel (der Elongationswinkel), so ist zur Zeit t die Summe M_z der Drehmomente der einzelnen Schwerkkräfte, die bekanntlich dem Drehungsmomente der resultierenden Schwerkraft Q , als deren Angriffspunkt der Schwerpunkt s angesehen werden kann, gleich ist, durch das Product $Qn = Q \cdot \overline{Os} \cdot \sin \varphi$ bestimmt, wenn n die Normale bedeutet, die von O aus auf die durch s gelegte verticale Schwerlinie gefällt werden kann, und zwar hat das letztere Product das negative Vorzeichen zu bekommen, da, je nachdem φ (also auch $\sin \varphi$) positiv oder negativ ist, Q im negativen oder positiven Sinne das Pendel zu drehen sucht; es ist demnach, wenn der constante Abstand $OS = Os$ des Schwerpunktes von der Drehachse (z -Achse) durch s_z bezeichnet wird, $M_z = -Q \cdot s_z \sin \varphi$.

Es muss folglich der dynamischen Grundgleichung $M_z = J_z \gamma$ entsprechend auch $J_z \gamma = -Q s_z \sin \varphi$, also

$$\gamma = -\frac{Q \cdot s_z}{J_z} \sin \varphi \dots (1)$$

sein. Diese Gleichung bestimmt für die Zeit t die Winkelbeschleunigung γ des Pendels, d. i. (siehe S. 348) die tangentielle Beschleunigung p_t eines Punktes E , der den Abstand l von der Drehachse hat, und der am einfachsten (siehe Fig. 183) in der Geraden OS

(bezw. in ihrer Verlängerung über S hinaus) anzunehmen ist, so dass derselbe zur Zeit t die Lage e hat.

Für die tangentielle Beschleunigung p_t eines mathematischen Kreispendels von der Länge l , das sich ebenso wie der Punkt E in einer verticalen Kreisbahn bewegt, besteht eine der Formel (1) völlig analoge Grundformel, denn es ist für dieses (siehe S. 237) $p_t = \frac{P_t}{m} = -g \sin \varphi$. Da nun gemäß Cap. III die Bewegungszustände eines in einer gegebenen Bahn sich bewegendem Punkte durch den Anfangszustand und die tangentielle Beschleunigung vollkommen bestimmt sind, so müssen alle Bewegungsgesetze des einfachen Kreispendels mit jenen des Punktes E vollkommen übereinstimmen, wofern nur die Bahnen und die Amplituden übereinstimmen, also in den Formeln des § 47b (S. 234–241) $l = 1$ gesetzt und wofern ferner statt g , um die letzte Gleichung für p_t mit der Gleichung (1) zur Übereinstimmung zu bringen, der gleichfalls constante Wert $\frac{Q s_z}{J_z}$ gesetzt wird. Es bedeuten dann in den Formeln des § 47 die Buchstaben s die Elongation des Punktes E , d. i. $\overline{Ee} = \varphi$, ferner a die Amplitude desselben $\overline{Es} = a$, v die Geschwindigkeit desselben im beliebigen Punkte e , mit anderen Worten die variable Winkelgeschwindigkeit w und $c = W$ die maximale Winkelgeschwindigkeit beim Hindurchschwingen durch die Gleichgewichtslage OSE .

Dementsprechend wird die Bewegung des Körpers eine circulierende sein, wenn (siehe S. 235) $c > 2\sqrt{gl}$, also $W > 2\sqrt{\frac{Q s_z}{J_z}}$ ist.

Ist dagegen, wie hier vorausgesetzt werden soll, $W < 2\sqrt{\frac{Q s_z}{J_z}}$, so findet eine schwingende Bewegung des Pendels statt, und zwar ist zufolge (7) und (8), S. 235 und Gleichung (19b), S. 241 in aller Strenge

$$\left. \begin{aligned} w &= \sqrt{2 \frac{Q s_z}{J_z} (\cos \varphi - \cos \alpha)}, \quad W = 2 \sqrt{\frac{Q s_z}{J_z}} \sin \frac{\alpha}{2} \\ T &= \pi \sqrt{\frac{J_z}{Q s_z} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \right.} \\ &\quad \left. + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \dots \right]} \end{aligned} \right\} (2)$$

wo T die Schwingungsdauer des Punktes E , also auch jene des physischen Pendels bedeutet. Bei nicht zu großen Werten der Winkelamplituden α kann man sich auch hier mit den zwei ersten Gliedern der letzten unendlichen Reihe, die verhältnismäßig rasch convergiert, begnügen und daher

$$T = \pi \sqrt{\frac{J_z}{Q s_z}} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right] \dots (3)$$

setzen.

Dass durch die aus (2) und (1) für jeden Wert von φ bestimmbare Winkelgeschwindigkeit w und Winkelbeschleunigung γ die gleichzeitigen Geschwindigkeiten v und die tangentiellen Beschleunigungen p_t aller anderen Punkte des Pendels, deren Entfernung von der Drehachse r ist, durch die Gleichungen $v = r w$, $p_t = r \cdot \gamma$ mitbestimmt sind, ist (siehe S. 348) bekannt.

Von allen materiellen Punkten des Pendels, von denen die der Drehachse näher gelegenen sich langsamer, die entfernteren schneller bewegen, sind jene besonders hervorzuheben, deren Abstand l von der Drehachse derart ist, dass sie sich in ihren Kreisbahnen genau so bewegen, wie sie sich in denselben Bahnen bewegen würden, wenn sie außer aller Verbindung mit den anderen materiellen Punkten ständen, also einfache Kreispendel wären. Für diese Punkte muss demnach die Geschwindigkeit $l w$ mit dem Werte von v in der Gleichung (7), S. 235, und der Wert von T mit jenem der Gleichung (19 b) der S. 241 übereinstimmen, somit, wenn man die Gleichungen (2)

beachtet, $l \sqrt{\frac{Q s_z}{J_z}} = \sqrt{g l}$ oder, da $Q = M g$ ist,

$$l = \frac{J_z g}{Q s_z} = \frac{J_z}{M s_z} \dots (4)$$

sein. Die Übereinstimmung dieser Gleichung mit der Gleichung (6) auf S. 564 lehrt, dass die reducierte Länge l_z des physischen Pendels (bezüglich der Drehachse), d. i. der Quotient aus dem Trägheitsmomente J_z und dem statischen Schwerpunktsmomente $M s_z$ den Abstand der zuletzt betrachteten Punkte von der Drehachse, also die Länge l jenes mathematischen Kreispendels bestimmt, das mit dem physischen Pendel übereinstimmend, d. h. bei gleicher Winkelamplitude mit der gleichen Schwingungsdauer schwingt. Man bezeichnet demgemäß meist diese reducierte Pendellänge (bezüglich der Drehungsachse) kurzweg als die „Pendellänge“ des physischen Pendels.

Jene Punkte des Pendels, deren Abstand von der Drehachse kleiner, beziehungsweise größer ist, als der durch (4) bestimmte Wert des l , schwingen, infolge ihrer starren Verbindung mit allen anderen Punkten des Körpers, langsamer, beziehungsweise schneller, als sie in denselben Bahnen schwingen würden, wenn sie nicht mit diesen Punkten in Verbindung stehen würden, also mathematische Kreispendel wären.

Die zur Drehungsachse parallele, in jener Ebene, welche die Drehachse und den Schwerpunkt S enthält, und zwar in der stabilen

Gleichgewichtslage des Pendels unterhalb der Drehachse gelegene Gerade, deren Abstand von der Drehachse der reducierten Pendellänge l gleich ist, nennt man die Schwingungsachse des Pendels. Jeder Punkt der Schwingungsachse schwingt somit in seiner Bahn genau so, wie wenn derselbe ein mathematisches Pendel wäre.

Die orthogonale Projection C (Fig. 183) des Schwerpunktes S auf die Schwingungsachse nennt man den Schwingungsmittelpunkt (vergl. S. 565).

Anmerkung. Hat die Drehachse des Pendels eine solche Lage im Körper, dass dieselbe eine Hauptachse für irgend einen ihrer Punkte ist, also dass überhaupt für dieselbe ein Mittelpunkt des Stoßes existiert, so liegt die letztere in dieser Schwingungsachse, wie dies aus den Untersuchungen auf S. 576 sofort hervorgeht.

Ist ϱ_z der Trägheitsradius des Pendels bezüglich seiner Drehachse, sind ferner durch J_s und ϱ_s das Trägheitsmoment und der Trägheitshalbmesser für die zur Drehachse parallele Schwerachse bezeichnet, so ist bekanntlich (siehe S. 564 und 565)

$$l = \frac{\varrho_z^2}{s_z} = \frac{J_s}{M s_z} + s_z = \frac{\varrho_s^2}{s_z} + s_z \dots (5)$$

Hat man mit Hilfe der Gleichungen (5) oder (4) die reducierte Pendellänge bestimmt, so kann man die Schwingungsdauer des Pendels mittels der für die Schwingungszeit eines einfachen Kreispendels giltigen Gleichung ermitteln.

Aus der Fig. 166, auf S. 565 ist zu ersehen, wie man mit Hilfe der letzten Gleichung (5) die Lage des Schwingungsmittelpunktes C constructiv bestimmen kann.

Es lehrt diese Construction sofort die wichtige Thatsache, dass die Schwingungsachse A und Drehachse C vertauschbar sind, d. h. wählt man die Schwingungsachse eines Pendels zur Drehungsachse, so wird die frühere Drehachse zur Schwingungsachse.

Von den drei in der Fig. 166 betrachteten Punkten S, M, C ist der Schwerpunkt S jener Punkt, in welchem man sich das gesammte Gewicht Q des Körpers angreifend, M jener Punkt, in welchem man sich die ganze Masse M des Körpers concentrirt denken kann (da dessen Entfernung AM von der Drehungsachse z dem Trägheitshalbmesser ϱ_z gleich ist), so dass infolge der Verschiedenheit dieser Punkte sich weder S , noch M so bewegen kann, als wäre der Angriffspunkt der Kraft Q zugleich der Massenpunkt von der Masse M , sich also weder S , noch M bewegen kann wie ein einfaches Pendel, sondern es besteht die für das letztere nothwendige Beziehung $q = mg$ für jenen Punkt C im Abstände l von O (d. i. für den Schwingungsmittelpunkt), für welchen die der Kraft Q äqui-

valente verticale Kraft q in jeder Lage des Pendels (dem Momentensatze, d. i. der Gleichung $ql \sin \varphi = Q s_z \sin \varphi$ zufolge) den Wert $q = Q \cdot \frac{s_z}{l}$ und die der Masse M äquivalente Masse m (siehe S. 560) den Wert $m = \frac{J_z}{l^2} = \frac{M \cdot \varrho_z^2}{l^2}$ hat, so dass $Q \cdot \frac{s_z}{l} = \frac{M \cdot \varrho_z^2}{l^2} g$, also in der That in Übereinstimmung mit (5) $l = \frac{\varrho_z^2}{s_z}$ ist.

Ist die Winkelamplitude α des physischen Pendels so klein, dass man näherungsweise den Sinus derselben, daher auch den Sinus der kleineren Winkelerlongation φ der Maßzahl dieses Winkels φ gleichsetzen kann, so nimmt die Gleichung (1) die Form $\gamma = \frac{dw}{dt} = -\frac{Q s_z}{J_z} \varphi$ an; es ist in diesem Falle sonach die tangentielle Beschleunigung γ des Punktes e der variablen Elongation $\overline{Ee} = \varphi$ dieses Punktes direct proportional, daher die Schwingung dieses Punktes, somit auch die schwingende Bewegung aller anderen Punkte des Pendels eine einfache harmonische Bewegung. Es finden dann auf die Bewegung des Punktes E die Gesetze des § 38 (also auch die entsprechenden Formeln auf S. 154—159), in welchen offenbar nur $k^2 = \frac{Q s_z}{J_z}$ anzunehmen, ferner, wie früher s durch φ , p durch γ , v durch w , c durch W , a durch α u. s. w. zu ersetzen ist, ihre Anwendung, und es ist demnach, wenn der Zeitangfangspunkt so gewählt wird wie auf S. 155

$$\left. \begin{aligned} w &= \sqrt{\frac{Q s_z}{J_z} (\alpha^2 - \varphi^2)}, \quad W = \alpha \sqrt{\frac{Q s_z}{J_z}}, \quad T = \pi \sqrt{\frac{J_z}{Q s_z}} \\ \varphi &= \alpha \sin t \sqrt{\frac{Q \cdot s_z}{J_z}}, \quad w = \alpha \cdot \sqrt{\frac{Q s_z}{J_z}} \cos t \sqrt{\frac{Q s_z}{J_z}} \end{aligned} \right\} (6)$$

Mit Hilfe der beiden letzten Formeln lässt sich für eine jede Zeit t der angenäherte Wert der Winkelerlongation φ und der Winkelgeschwindigkeit w des physischen Pendels berechnen.

Bei der directen Ableitung dieser Formeln hat man etwa von der obigen Grundgleichung $\gamma = \frac{dw}{dt} = -\frac{Q s_z}{J_z} \sin \varphi$ und der kinematischen Fundamentalgleichung $w = \frac{d\varphi}{dt}$ auszugehen, durch deren Multiplication sich $w \cdot dw = -\frac{Q s_z}{J} \sin \varphi \cdot d\varphi$ ergibt. Wenn man diese Gleichung integriert und im übrigen genau so vorgeht, wie dies auf S. 235 und 236 geschehen ist, gelangt man sofort zu den Gleichungen (6).

Um auch die hier abgeleiteten allgemeinen Formeln auf einige besondere Fälle in Anwendung zu bringen, sei zunächst ein homogener cylindrischer Stab von der Länge L und der Dicke $2r$ behandelt, der um den horizontal angenommenen Durchmesser einer seiner Grundflächen schwingt. Für diesen Fall ist zufolge der Gleichung (7) (S. 628) $\rho_s^2 = \frac{1}{4} (r^2 + \frac{1}{3} L^2)$ und $s_s = \frac{1}{2} L$, daher der Gleichung (5) gemäß $l = \frac{1}{2} \frac{r^2}{L} + \frac{1}{6} L + \frac{1}{2} L = \frac{2}{3} L + \frac{1}{2} \frac{r^2}{L}$. Ist sonach die Dicke $2r$ des Stabes so klein im Verhältnisse zur Länge, dass der letzte Summand gegen den ersten vernachlässigt werden kann, so ist die reducierte Pendellänge des Stabes $l = \frac{2}{3} L$, was übrigens sich einfacher aus (4) und aus der Gleichung (3),

S. 596, ergibt. Da ferner $\rho_s = \sqrt{\rho_s^2 + s_s^2} = \sqrt{\frac{1}{3} L^2 + \frac{1}{4} r^2}$ ist, so kann man im letzteren Falle $\rho_s = L \sqrt{\frac{1}{3}}$ setzen [vergl. (2), S. 596]. Aus diesen Werten ist sofort zu ersehen, dass entsprechend der Fig. 166 auf S. 565 in der That $s_s < \rho_s < l$ (d. i. $AS < AM < AC$) ist.

Für ein Pendel, das aus dem eben behandelten homogenen cylindrischen Drahte von der Masse m_1 und einer an dessen Ende hängenden homogenen Kugel von der Masse m_2 , deren Radius R ist, besteht, und das um die frühere Achse schwingt, ist in der Gleichung (4) das Trägheitsmoment J , der Summe aus dem Trägheitsmomente J_1 des Drahtes und dem Trägheitsmomente J_2 der Kugel gleichzusetzen, und da das Trägheitsmoment des ersteren für die zur Drehachse im Abstände $\frac{1}{2} L$ parallele Schwerpunktsachse, wie früher, durch $\frac{m_1}{4} (r^2 + \frac{1}{3} L^2)$ bestimmt ist, also $J_1 = \frac{m_1}{4} (r^2 + \frac{1}{3} L^2) + \frac{1}{4} m_1 L^2$ und analog für die Kugel laut Gleichung (12) (S. 632) $J_2 = \frac{2}{5} m_2 R^2 + m_2 d^2$ ist, wenn d den Abstand $L + R$ des Kugelmittelpunktes von der Drehungsachse bedeutet, so ist $J_s = m_1 \left[\frac{1}{4} r^2 + \frac{1}{3} L^2 \right] + m_2 \left[d^2 + \frac{2}{5} R^2 \right]$. Da ferner das Schwerpunktsmoment $M s_s$ eines aus zwei Theilen m_1 und m_2 bestehenden Körpers bekanntlich der Summe der Schwerpunktsmomente dieser Theile gleich, also $M s_s = m_1 \cdot \frac{L}{2} + m_2 d$ ist, so findet man

$$l = \frac{J_s}{M s_s} = \frac{m_1 \left[\frac{1}{4} r^2 + \frac{1}{3} L^2 \right] + m_2 \left[d^2 + \frac{2}{5} R^2 \right]}{m_1 \cdot \frac{L}{2} + m_2 d}$$

Es ist klar, dass man, wie die Multiplication des Zählers und des Nenners mit g sofort lehrt, in dem letzten Bruche die Massen m_1 und m_2 ohne weiteres durch die Gewichte g_1 und g_2 ersetzen kann. Dividirt man Zähler und Nenner durch m_2 und vernachlässigt, wenn die Masse m_2 der Kugel jene des Drahtes (Fadens) bedeutend überwiegt, die Glieder mit dem Factor $\frac{m_1}{m_2}$, so findet man $l = d + \frac{2}{5} \cdot \frac{R^2}{d}$. So ist z. B. für $R = 1 \text{ mm}$ und $d = 400 \text{ mm}$ der Unterschied von l und d nur 0.001 mm , so dass man in der That bei einem derartigen Fadenpendel, bei welchem sowohl $\frac{m_1}{m_2}$ als auch $\frac{R^2}{d}$ sehr klein ist, die Pendellänge mit dem Abstände des Kugelmittelpunktes vom Aufhängepunkte identificieren kann.

In ganz analoger Weise kann man für ein Fadenpendel, bei welchem am Ende des Fadens ein Doppelkegel oder eine Doppelpyramide mit einer im Ruhezustande verticalen Achse hängt, mit Zuhilfenahme der Gleichungen (10) oder (17), § 97, für einen parallelepipedischen Stab mit einer an demselben befindlichen Linse (die aus zwei Kugelsegmenten bestehend gedacht werden kann) mit Hilfe der Formeln (3) und (18) des § 97 u. s. w. die reducierte Pendellänge leicht bestimmen.

Ist mit der größtmöglichen Genauigkeit die reducierte Pendellänge l und zugleich die Schwingungszeit T irgend eines bestimmten Pendels (für die Amplitude α) an irgend einem Orte der Erde experimentell bestimmt worden, so lässt sich zufolge der Gleichung 19 b, S. 241, in Verbindung mit der Gleichung $l = \pi \sqrt{\frac{l_s}{g}}$ (siehe S. 238) die Länge l_s des Sekundenpendels für unendlich kleine Amplituden und die Beschleunigung der Schwere g für diesen Ort der Erde mittels der Gleichungen

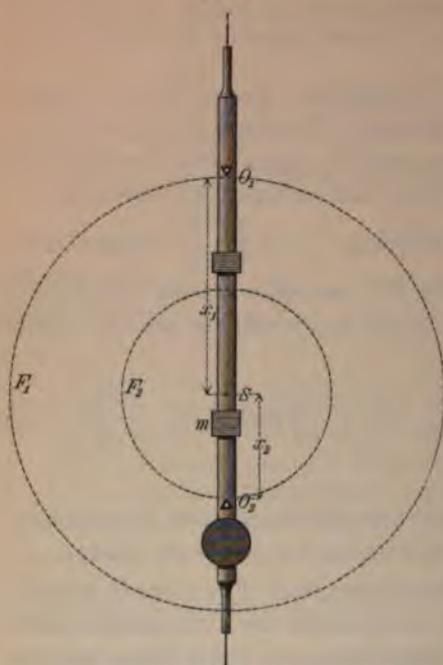
$$\left. \begin{aligned} l_s &= \frac{l}{T^2} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4} \right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right]^2 \\ g &= \pi^2 \cdot l_s \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

berechnen. Es ist dies die genaueste Methode der experimentellen Bestimmung der Beschleunigung g der Schwere.

Wenn nun aber auch die Schwingungszeit T sich durch entsprechende Beobachtungen (z. B. nach der Methode der Coincidenzen) sehr genau feststellen lässt, so hat die Berechnung der Pendellänge aus den Dimensionen des Pendels in der oben auseinandergesetzten Art und Weise wegen der nicht vollkommenen Homogenität der Körper u. s. w. nicht den für diesen Zweck erwünschten Grad der Genauigkeit. Genauer ist die zu diesem Zwecke gewöhnlich benützte Bestimmung der reducierten Pendellänge l eines sogenannten Kater'schen Reversionspendels aus dem Abstände seiner beiden zueinander parallelen Drehachsen $O_1 O_2$. Sind nämlich O_1 und O_2 (Fig. 184) zwei möglichst genau zueinander parallele, horizontale, einander zugewendete Schneiden zweier dreiseitiger, an einem Pendelstabe befestigter Stahlprismen, befindet sich ferner der Schwerpunkt S des Pendels in der Ebene dieser zueinander parallelen (zur Ebene der Zeichnung senkrechten) Schneiden, und zwar zwischen denselben, und bringt man es durch allmähliche versuchsweise Änderung der Stellung eines an dem Pendelstabe verschiebbaren und an einer beliebigen Stelle festzuklemmenden Laufgewichtes m und durch die damit zusammenhängende Änderung des Trägheitsmoments und der Lage des Schwerpunktes S schließlich dahin, dass sowohl bei der Schwingung um die Schneide O_1 , als auch bei der nach erfolgter Umkehrung (Reversion) des Pendels stattfindenden Schwingung um die Schneide O_2 dieselbe Schwingungsdauer T

beobachtet wird, dass sonach die reducierte Länge l bezüglich beider Achsen dieselbe ist, so ist, wenn nicht zufälligerweise S genau in der Mitte von O_1 und O_2 gelegen ist (was leicht vermieden werden kann), die Pendellänge l einfach dem Abstände $\overline{O_1 O_2} = x_1 + x_2$ (siehe Fig. 184) der Schneiden gleich.

Fig. 184.



Es werde, um dies zu beweisen, die allgemeinere Frage erörtert, für welches System von zueinander parallelen Achsen desselben Pendels die reducierte Pendellänge dieselbe Größe l hat. Bezeichnet man wie früher durch q_s den als bekannt vorauszusetzenden Trägheitsradius für die zu diesen Achsen parallele Schwerachse, so ist für eine jede zu dieser Schwerachse parallele Drehachse, deren Abstand vom Schwerpunkte x ist, und bezüglich welcher die reducierte

Länge den Wert l hat, zufolge der Gleichung (7) auf S. 565 $l = \frac{q_s^2}{x} + x$, also $x^2 - lx + q_s^2 = 0$. Die beiden Wurzelwerte dieser

Gleichung sind $x_1 = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - q_s^2}$ und $x_2 = \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - q_s^2}$.

Soll also für die reducierte Länge l eine Drehachse möglich, also x_1 und x_2 reell sein, so muss jedenfalls $\frac{l^2}{4} - q_s^2 \geq 0$, demnach $l \geq 2q_s$ sein, und zwar ist stets, wenn auch die beiden Wurzeln der oberen Gleichung voneinander verschieden sind, $x_1 + x_2 = l$, womit die obere Behauptung bewiesen ist. (Sollte S in der Mitte von $O_1 O_2$ gelegen sein, so könnte, trotzdem durch die Umkehrung des Pendels sich in diesem Falle keinesfalls die Schwingungsdauer ändert, sowohl $O_1 S$ als $O_2 S$ demselben Wurzelwerte, sei es x_1 oder x_2 , gleichkommen, sodass entweder $\overline{O_1 O_2} = 2x_1$ oder $\overline{O_1 O_2} = 2x_2$ nicht aber $\overline{O_1 O_2} = x_1 + x_2 = l$ wäre.)

Ist $l > 2q_s$, so sind alle im Abstände x_1 zur Schwerachse S parallele Achsen die Erzeugenden einer senkrechten Kreiscylinderfläche F_1 , und die Achsen mit der Schwerpunktsdistanz x_2 bilden eine zweite senkrechte Cylinderfläche F_2 ; die senkrechten Querschnitte von F_1 und F_2 sind die in Fig. 184

punktierten Kreise. Wählt man eine beliebige Erzeugende irgend einer dieser beiden Cylinderflächen zur Drehachse, so wird stets dieselbe reducierte Länge l und somit auch dieselbe Schwingungsdauer für alle diese Achsen, und zwar nur für diese, bestehen. Schneidet man die beiden Cylinderflächen durch eine durch die gemeinsame Achse derselben gelegte Schwerebene, so erhält man vier parallele Durchschnittslinien, von welchen die beiden auf entgegengesetzten Seiten des Schwerpunktes S gelegenen Durchschnittslinien der beiden voneinander verschiedenen Cylinderflächen die Achsen O_1 und O_2 (Fig. 184) sind. Graphisch lassen sich die einer gegebenen Pendellänge l und einem gegebenen Trägheitsradius q_s entsprechenden beiden Cylinderflächen F_1 und F_2 derart ermitteln, dass man (siehe S. 565, Fig. 166) über $AC = l$ als Durchmesser einen Halbkreis construirt und diesen durch eine zu diesem Durchmesser im Abstände q_s parallele Gerade schneidet und irgend einen der beiden Durchschnittspunkte N auf den Durchmesser l orthogonal projiciert. Verlegt man dann diese Projection N in den Schwerpunkt S des Körpers, so zwar, dass AC zur gegebenen Drehachsenrichtung a senkrecht steht, und nimmt in S und in den Endpunkten des Durchmessers solche Achsen an, die zu a parallel sind, so beschreiben die beiden letzteren Achsen bei der Drehung der Figur um die parallele Schwerachse die oberwähnten Cylinderflächen F_1 und F_2 .

Wählt man die Schwerpunktsdistanzen x zu Abscissen und die zugehörigen Pendellängen l bei gegebenem q_s zu Ordinaten eines orthogonalen Achsensystems, so ist die frühere Gleichung $x^2 - lx + q_s^2 = 0$ die Gleichung einer Hyperbel, deren eine Asymptote die y -Achse ist, während die andere Asymptote den rechten Winkel der positiven Koordinatenachsenrichtungen halbiert.

Von allen reducierten Längen l und Schwingungszeiten T , die für zueinander parallele Drehachsen eines gegebenen Körpers, also für ein gegebenes q_s möglich sind, ist, weil stets $l \geq 2q_s$ sein muss, jene ein Minimum, für welche $l = 2q_s$ wird; es ist dann den obigen Gleichungen zufolge $x_1 = x_2 = \frac{l}{2}$, also auch $x_1 = x_2 = q_s$, d. h. es liegt der Schwerpunkt in der Mitte zwischen der Drehachse und der Schwingungsachse. Der Wert des q_s selbst ist abhängig von der Achsenrichtung, und zwar hat der Trägheitsradius q_s nach Früherem den kleinstmöglichen Wert für die längste Achse des Poinso'tschen Centralellipsoids; es ist daher die Schwingungszeit T eines gegebenen Pendels am kleinsten für eine Drehungsachse, die zu der erwähnten größten Achse des dem Pendel entsprechenden Centralellipsoids parallel ist, und zwar in einem Abstände $x = q_s$, der dem Trägheitshalbmesser für diese Achse des Centralellipsoids gleich ist. Es ist dieses Minimum der Schwingungszeiten (für unendlich kleine Schwingungen) bestimmt durch $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{2q_s}{g}}$. (In diesem Falle ist [siehe folgende Seite] der Schwingungsmittelpunkt auch identisch mit dem Mittelpunkte des Stoßes.)

Anmerkung. Das für die historische Entwicklung der Mechanik äußerst wichtige Problem der Bestimmung des Schwingungsmittelpunktes eines Pendels, das von Mersenne zuerst aufgestellt wurde, löste zuerst in allgemeiner Weise der schon wiederholt genannte berühmte Erfinder der Pendeluhr Huyghens

(Huygh. Horologium oscillatorium. Paris 1673), der auch zuerst die Pendelschwingungen zur genauen Bestimmung der Beschleunigung g der Schwere benutzte. Die Idee des Reversionspendels rührt von Bohnenberger her. Der englische Capitän Kater, nach welchem das Reversionspendel benannt wird, wendete das letztere zuerst zur genauen experimentellen Bestimmung der Länge des Sekundenpendels an.

Betreffs einer anderen vom Verfasser in Vorschlag gebrachten Methode zur experimentellen Bestimmung der Sekundenpendellänge erlaubt sich der Verfasser zu verweisen auf seine Abhandlung „Über ein Analogon des Kater'schen Pendels und dessen Anwendung zu Gravitationsmessungen“ (LXXXIV. Band der Sitzungsber. der kais. Akad. d. Wissensch., II. Abth., Juniheft 1881).

Schwingt ein Pendel um eine horizontale Rotationsachse, die zu einer Hauptcentralachse parallel ist, so ist diese Achse zufolge des Lehrsatzes auf S. 574 eine Trägheitshauptachse für die orthogonale Projection O des Schwerpunktes s (Fig. 183) auf diese Rotationsachse. demnach ist, wenn man die Rotationsachse zur z -Achse und O zum Anfangspunkte eines orthogonalen Achsensystems wählt, $\sum m y z = 0$ und $\sum m z x = 0$, ferner sind aus leicht ersichtlichen Gründen die statischen Momente M_x und M_y der in s angreifenden resultierenden Schwerkraft Q , deren Richtungslinie in der xy -Ebene gelegen ist, in Bezug auf die x - und y -Achse gleich Null, und es ist demnach in den Gleichungen (4) auf S. 551 $X_o = 0$ und $Y_o = 0$, d. h. es findet außer in dem Punkte O kein Druck auf irgend einen anderen Punkt O der Drehachse während der Schwingung des Pendels statt. Es braucht demnach in diesem Falle nur der Punkt O des Pendels allein als fixer Drehpunkt des Pendels festgehalten zu werden, und die um die z -Achse eingeleitete Schwingung erfolgt genau in derselben Weise, als wenn die Drehachse eine fixe Achse wäre. Es ist dies, wie leicht zu zeigen ist, der einzige Fall, in welchem ein um einen fixen Punkt O drehbares Pendel in der bisher betrachteten Weise zu schwingen vermag. Auch ist auf Grund früherer Auseinandersetzungen sofort einzusehen, dass in dem hier behandelten Falle der Schwingungsmittelpunkt identisch ist mit dem Mittelpunkte des Stoßes (vergl. S. 576).

Anmerkung. Das durch die Gleichung (2) oder (3) ausgedrückte Pendelgesetz kann man manchmal mit Vortheil dazu anwenden, um das Trägheitsmoment J_z eines Körpers bezüglich irgend einer Achse z experimentell zu bestimmen. Man kann nämlich den Körper um diese Achse z als ein physisches Pendel schwingen lassen, die Schwingungsdauer T und die Amplitude α messen und nach weiterer experimenteller Bestimmung des Körpergewichtes Q und der Schwerpunktsdistanz s_z das Trägheitsmoment J_z aus der Formel (3), bezw. (2) berechnen. Sollte die Achse, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment J_z zu bestimmen ist, eine Schwerachse s sein, so kann man auf diese Weise zuerst das Trägheitsmoment J_s für eine im beliebigen Abstände s_z zu s parallele Achse z finden und hierauf von der bekannten Gleichung $J_z = J_s - M \cdot s_z^2$ Anwendung machen.

Als zweites Beispiel aus der Dynamik der Schwere, und zwar als Beispiel einer durch die Schwere hervorgerufenen gleichförmig beschleunigten Rotation möge die Bewegung durch Überwucht in Untersuchung gezogen werden, nämlich die Bewegung einer um ihre horizontale Achse (z -Achse) drehbaren verticalen Radwelle (Fig. 185), auf welche ein Gewicht Q_1 einer Masse M_1 , die an einem um die Welle (vom Radius r_1) geschlungenen Seile (Faden) angehängt ist, kontinuierlich einen verticalen Zug ausübt, während ein Gegengewicht Q_2 einer Masse M_2 , die an einem zweiten um das Rad (vom Radius r_2) geschlungenen Seile (Faden) befestigt ist, das Wellrad im entgegengesetzten Sinne zu drehen sucht. Die rotierende Bewegung der Radwelle findet nun im Sinne des Drehmoments der Kraft Q_1 (im Sinne des Pfeiles in Fig. 185) statt.

Die Gewichte der sich bei der Bewegung abwickelnden, beziehungsweise sich aufwickelnden, als abdehnbar vorausgesetzten Fäden (Seile) seien so gering vorausgesetzt, dass dieselben im Verhältnisse

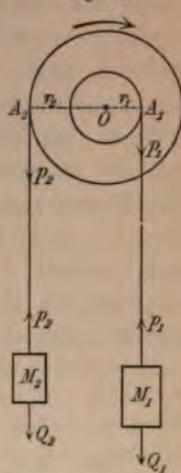
Q_1 und Q_2 vernachlässigt werden können. Auch vom Luftwiderstande und von der Reibung des Zapfens der Welle in den beiden Lagern soll abgesehen werden (bezw. die Reibung durch ein Gegengewicht zu Q_1 , dessen Drehungsmoment nämlich dem Reibungsmomente gleich ist, compensiert werden). Es sei schließlich angenommen, dass der Schwerpunkt der Radwelle in der Rotationsachse gelegen ist, so dass demgemäß bei der Untersuchung der Bewegung die Gewichte der Radwelle, dessen Drehungsmoment stetig Null ist, abstrahiert werden kann.

Die Spannung des die Masse M_1 tragenden Fadens sei durch p_1 , die des zweiten Fadens durch p_2 und das Trägheitsmoment der Radwelle bezüglich ihrer Drehungsachse durch J_z bezeichnet.

Die rotierende Radwelle steht nicht unmittelbar unter dem Einflusse der Kräfte Q_1 und Q_2 , sondern rotiert unter dem Einflusse der durch diese Kräfte und durch die rotierende Bewegung bedingten Spannungen p_1 und p_2 (die nur im Gleichgewichtszustande den Kräften Q_1 und Q_2 gleich wären), welche in den das Rad, beziehungsweise die Welle unmittelbar in A_1 und A_2 berührenden Elementen der Seile (Fäden) stattfinden, und zwar sind $p_1 r_1$ und $-p_2 r_2$ die Drehungsmomente dieser Kräfte, wenn man den Sinn der thatsächlichen Rotation zum positiven wählt. Ist dementsprechend γ die Winkelbeschleunigung der Radwelle, so ist zufolge der Gleichung (5) auf S. 553

$$p_1 r_1 - p_2 r_2 = J_z \cdot \gamma \dots (8)$$

Fig. 185.



Die in den Fäden herrschenden Spannungen p_1 und p_2 wirken in den untersten Fadenelementen (siehe S. 250), wofern die Massen M_1 und M_2 bei ihrer Bewegung, was hier vorausgesetzt werden will, nicht pendelartig schwingen, als vertical nach aufwärts gerichtete Kräfte auf die Massen M_1 und M_2 ein, welche Massen zugleich durch die vertical nach abwärts wirkenden Kräfte $Q_1 = M_1 g$, $Q_2 = M_2 g$ beeinflusst werden. Der Schwerpunkt der Masse M_1 , auf welchen nach dem bekannten Schwerpunktsesetze die entgegengesetzt gerichteten Kräfte Q_1 und p_1 wirkend angenommen werden können, bewegt sich wegen der Undehnbarkeit des Fadens $A_1 M_1$ mit der tangentiellen Beschleunigung des Punktes A_1 , d. i. mit der Beschleunigung $r_1 \gamma$ vertical nach abwärts, während der Schwerpunkt der unter dem Einflusse der Kräfte p_2 und Q_2 befindlichen Masse M_2 sich vertical nach aufwärts mit der Beschleunigung $r_2 \gamma$, die der tangentiellen Beschleunigung des Punktes A_2 gleichkommt, bewegt. Es ist demnach

$$\left. \begin{aligned} Q_1 - p_1 &= M_1 \cdot r_1 \gamma \\ p_2 - Q_2 &= M_2 \cdot r_2 \gamma \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Aus den drei Gleichungen (8) und (9), welche die drei unbekanntenen Größen γ , p_1 und p_2 enthalten, lassen sich diese Größen leicht bestimmen.

Man findet so für die Winkelbeschleunigung γ und für die Spannungen p_1 und p_2 folgende unter den gemachten Voraussetzungen constante Werte

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{Q_1 r_1 - Q_2 r_2}{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + J_z} = \frac{(M_1 r_1 - M_2 r_2) g}{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + J_z} \\ p_1 &= Q_1 \cdot \frac{M_2 r_2 (r_1 + r_2) + J_z}{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + J_z}, \quad p_2 = Q_2 \cdot \frac{M_1 r_1 (r_1 + r_2) + J_z}{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + J_z} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Mittels des Wertes von γ lassen sich auch die Beschleunigungen $r_1 \gamma$ und $r_2 \gamma$ der Massen M_1 und M_2 berechnen.

Je nachdem $Q_1 r_1$ größer oder kleiner ist als $Q_2 r_2$, ist die Winkelbeschleunigung γ positiv oder negativ, also die Rotation eine gleichförmig beschleunigte im engeren Sinne des Wortes oder eine gleichförmig verzögerte. Ist dagegen $M_1 r_1 = M_2 r_2$, so ist $\gamma = 0$, $p_1 = Q_1$ und $p_2 = Q_2$; die Bewegung ist in diesem Falle eine gleichförmige.

Der Nenner der gefundenen Werte von γ , p_1 und p_2 ist das Trägheitsmoment der aus der Masse des Wellrades, ferner aus der nach A_1 versetzt gedachten Masse M_1 und aus der nach A_2 versetzten Masse M_2 bestehenden Gesamtmasse, so dass, dem gefundenen Werte von γ in (10) entsprechend, das Product aus diesem Trägheits-

momente und γ in Übereinstimmung mit der Gleichung (5) auf S. 553 dem resultierenden Drehungsmomente $Q_1 r_1 - Q_2 r_2$ gleich ist.

Setzt man in allen gefundenen Gleichungen $r_1 = r_2 = r$, so dass die Radwelle etwa in eine Rolle vom Radius r übergeht, um welche ein einziger beiderseits herabhängender Faden geschlungen ist, an dessen Enden die Massen M_1 und M_2 herabhängen, so erhält man jene Formeln, die auf den als Atwood's Fallmaschine bekannten Apparat anwendbar sind. Bei dieser Fallmaschine bewegt die Gewichtsdifferenz (das Übergewicht) $Q_1 - Q_2$ die aus der Masse M_1 , M_2 und aus der Masse der Rolle zusammengesetzte Masse, so dass die aus den obigen Formeln bestimmbare Beschleunigung $r\gamma$ der beiden Massen M_1 und M_2 jedenfalls stets kleiner sein muss als die Beschleunigung der Schwere, die ja in dem Falle stattfinden würde, wenn, wie dies z. B. beim freien Falle der Masse $M_1 - M_2$ des Übergewichtes thatsächlich der Fall sein würde, dasselbe Übergewicht $Q_1 - Q_2$ bloß die Masse $M_1 - M_2$ desselben allein bewegen würde.

Anmerkung. Bekanntlich wird Atwood's Fallapparat, wie dies schon sein Name andeutet, zur experimentellen Demonstration der Gesetze des freien Falles und überhaupt jener der gleichförmig beschleunigten Bewegung schon bei dem ersten elementaren Unterrichte in der Physik benützt. Nach der Meinung des Verfassers ist dieser Apparat für diesen Zweck nicht vollkommen entsprechend, da er, wie dies aus der obigen Untersuchung ersichtlich ist, vieles voraussetzt, was erst dem folgenden Unterrichte vorbehalten werden muss.

C. Elemente der Dynamik der allgemeinsten Bewegung starrer Körper und der Bewegung eines Systems starrer Körper.

§ 101. Allgemeine Bewegungsgleichungen. Beziehung der Bewegung eines starren Körpers zur Bewegung des Schwerpunktes.

Finden keine discontinuierlichen Änderungen der Geschwindigkeiten und ihrer Richtungen statt, so bestehen für ein jedes freibewegliche Punktsystem, also auch für einen starren Körper, auf welchen continuierliche äußere Kräfte einwirken, wenn durch $P_x P_y P_z$ die Componenten irgend einer äußeren Kraft P bezeichnet sind, deren Angriffspunkt in Bezug auf ein an der Bewegung des Körpers nicht theilnehmendes Achsensystem die Coordinaten $\xi \eta \zeta$ hat, und wenn t die variable Zeit und $x y z$ die Coordinaten irgend eines beliebigen unendlich kleinen Körperelements, dessen Masse m ist, bedeuten — vorausgesetzt, dass das Punktsystem außer der Bedingung der Starrheit, welche (siehe S. 339) nur innere Verbindungskräfte von der im § 53 behandelten Art (Wechselwirkungen der ersten Art) zur Voraussetzung hat, an keine anderen Bedingungen geknüpft ist, kurz

dass dasselbe ein freibewegliches starres Punktsystem ist —
zufolge des § 55 die kinetischen Grundgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \Sigma P_x &= \Sigma \left(m \frac{d^2 x}{dt^2} \right), \quad \Sigma P_y = \Sigma \left(m \frac{d^2 y}{dt^2} \right), \quad \Sigma P_z = \Sigma \left(m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \\ \Sigma M_x &= \Sigma (\eta P_z - \zeta P_y) = \Sigma m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \\ \Sigma M_y &= \Sigma (\zeta P_x - \xi P_z) = \Sigma m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \\ \Sigma M_z &= \Sigma (\xi P_y - \eta P_x) = \Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \end{aligned} \right\} (1)$$

Da $\frac{d}{dt} (y v_z - z v_y) = \frac{d}{dt} \left[y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right] = y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2}$ u. s. w.
ist, so führt, wenn $\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z$ die Änderungen der Geschwindigkeitscompo-
nenten v_x, v_y, v_z in jenem Zeitintervalle Δt bedeuten, das zwischen der Zeit t
und der Zeit $t + \Delta t$ gelegen ist, die auf dieses Zeitintervall Δt sich erstreckende
Integration der Gleichungen (1) nach der Zeit zu folgenden neuen Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \Sigma P_x \cdot dt &= \Sigma (m \cdot \Delta v_x), \quad \int_t^{t+\Delta t} \Sigma P_y \cdot dt = \Sigma (m \cdot \Delta v_y), \quad \int_t^{t+\Delta t} \Sigma P_z \cdot dt = \Sigma (m \cdot \Delta v_z) \\ \int_t^{t+\Delta t} \Sigma M_x \cdot dt &= \Delta \Sigma [m (y v_z - z v_y)], \quad \int_t^{t+\Delta t} \Sigma M_y \cdot dt = \Delta \Sigma [m (z v_x - x v_z)], \\ &\int_t^{t+\Delta t} \Sigma M_z \cdot dt = \Delta \Sigma [m (x v_y - y v_x)] \end{aligned} \right\} (2)$$

(Bezüglich der letzten Gleichungen sei auch auf S. 321—323 hingewiesen.)

Ist das Zeitintervall Δt ungemein klein, so dass die Coordinaten xyz
eines beliebigen Punktes M als constante Grössen innerhalb dieser Zeit betrachtet
werden können, und ändern sich in diesem Zeitelemente Δt die Geschwindig-
keitscomponenten v_x, v_y, v_z um die endlichen Werte $\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z$, so nehmen
diese Gleichungen, wenn Π_x, Π_y, Π_z die Componenten des im Punkte $(\xi \eta \zeta)$ thätigen
Impulses Π (siehe S. 545) und, wenn bei Zugrundelegung eines rechtwinkligen
Coordinatensystems $M_x^{(\Pi)}, M_y^{(\Pi)}, M_z^{(\Pi)}$ die Momente des Impulses Π bezüglich der
Coordinatenachsen bedeuten, die Form an:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \Pi_x &= \Sigma (m \cdot \Delta v_x), \quad \Sigma \Pi_y = \Sigma (m \cdot \Delta v_y), \quad \Sigma \Pi_z = \Sigma (m \cdot \Delta v_z) \\ \Sigma M_x^{(\Pi)} &= \Sigma (\eta \cdot \Pi_z - \zeta \cdot \Pi_y) = \Delta \Sigma [m (y v_z - z v_y)] = \Sigma [m (y \cdot \Delta v_z - z \cdot \Delta v_y)] \\ \Sigma M_y^{(\Pi)} &= \Sigma (\zeta \cdot \Pi_x - \xi \cdot \Pi_z) = \Delta \Sigma [m (z v_x - x v_z)] = \Sigma [m (z \cdot \Delta v_x - x \cdot \Delta v_z)] \\ \Sigma M_z^{(\Pi)} &= \Sigma (\xi \cdot \Pi_y - \eta \cdot \Pi_x) = \Delta \Sigma [m (x v_y - y v_x)] = \Sigma [m (x \cdot \Delta v_y - y \cdot \Delta v_x)] \end{aligned} \right\} (3)$$

Ist das Achsensystem ein orthogonales, so bedeuten bekannt-
lich $\Sigma M_x, \Sigma M_y, \Sigma M_z$ in (1) und (2) die Summen der Momente der
äußeren Kräfte in Bezug auf die drei Coordinatenachsen.

Wenn der starre Körper nicht frei beweglich ist, so hat man
bekanntlich zu den einwirkenden äußeren Kräften nur noch die
Widerstände jener fixen Punkte, fixen Flächen u. s. w., welche die

freie Beweglichkeit verhindern, hinzuzufügen, und kann hierauf den Körper als einen freibeweglichen betrachten und von den früheren Gleichungen Anwendung machen.

Ist jeder der materiellen Punkte des Körpers der Angriffspunkt einer äußeren Kraft, so hat man in den früheren Gleichungen $\xi \eta \zeta$ mit $x y z$ zu identificieren, und alle Summen in diesen Gleichungen werden dann zu bestimmten Integralen, die auf den ganzen Körper auszudehnen sind.

Die drei ersten Gleichungen in (1), (2) und (3), die sich zufolge der Gleichungen (3) und (2) des § 57 (S. 333) auch in der Form

$$\left. \begin{aligned} \Sigma P_x &= M \frac{d^2 X}{dt^2}, \quad \Sigma P_y = M \frac{d^2 Y}{dt^2}, \quad \Sigma P_z = M \frac{d^2 Z}{dt^2} \\ \Sigma \Pi_x &= M \cdot \Delta V_x, \quad \Sigma \Pi_y = M \cdot \Delta V_y, \quad \Sigma \Pi_z = M \cdot \Delta V_z \end{aligned} \right\} (4)$$

ausdrücken lassen, wobei X, Y, Z die Coordinaten und V_x, V_y, V_z die Geschwindigkeitscomponenten des Schwerpunktes und M die gesammte Masse des starren Körpers bedeuten, drücken das auf S. 333 auseinandergesetzte Schwerpunktsgesetz aus, demzufolge die Untersuchung der Bewegung des Schwerpunktes zurückzuführen ist auf die einfache Untersuchung der identischen Bewegung eines fictiven materiellen Punktes von der Masse M , auf den die äußeren Kräfte P , beziehungsweise die Impulse Π einwirken, und dessen anfänglicher Bewegungszustand mit dem als bekannt vorausgesetzten anfänglichen Bewegungszustande des Schwerpunktes übereinstimmt.

Es ist also die Bewegung des Schwerpunktes durch die Gleichungen (4) und seinen gegebenen Anfangszustand vollkommen determiniert, und zwar ist dieselbe nach den im Capitel IV auseinandergesetzten Regeln zu bestimmen.

Da nun eine jede Bewegung B eines starren Körpers zufolge des Capitels VII als zusammengesetzt angesehen werden kann aus einer fortschreitenden Bewegung B_s , die mit der Bewegung eines beliebigen Punktes C des Körpers (siehe S. 364) übereinstimmt, und aus einer Rotation B_r um eine stets diesen Punkt C enthaltende augenblickliche Achse, die ihre Lage im allgemeinen stetig ändert, so kann man, da als ein solcher Punkt C der Schwerpunkt S des Körpers gewählt werden kann, eine jede Bewegung B des starren Körpers zerlegen in eine translatorische componentale Bewegung B_s , die durch die Bewegung des Schwerpunktes S , also durch die Gleichungen (4) vollständig bestimmt ist, und in eine zweite componentale Bewegung, nämlich in eine Rotation B_r um diesen Schwerpunkt (um eine Schwerpunktsachse, die im allgemeinen sowohl ihre räumliche Lage, als auch ihre Lage im Körper stetig ändert), welche anzusehen ist als eine relative Bewegung bezüglich eines Achsensystems A , das

nur an der ersterwähnten translatorischen Bewegung theilnimmt. Der Einfachheit halber sei als Anfangspunkt dieses Achsensystems A der Schwerpunkt S des Körpers gewählt. Zugleich sei der Einfachheit halber vorausgesetzt, dass die Achsen dieses beweglichen Achsensystems A zu den Achsen xyz des fixen Achsensystems stets parallel bleiben.

Die drei letzten Gleichungen in (1) gestatten, diese letzterwähnte relative Bewegung B_r , beziehungsweise diese Rotation um den Schwerpunkt zu bestimmen, wofern außer den einwirkenden äußeren Kräften auch der anfängliche Bewegungszustand (zur Zeit $t = 0$) dieser relativen Bewegung B_r gegeben ist, welcher Bewegungszustand für einen jeden Punkt zufolge § 28 aus dem anfänglichen Bewegungszustande dieses Punktes bei der resultierenden Bewegung B und aus dem anfänglichen Bewegungszustande des Schwerpunktes leicht ermittelt werden kann, indem man nämlich (siehe S. 94) die anfängliche Geschwindigkeit v_o eines jeden Punktes mit der der gleichzeitigen Geschwindigkeit v_{s_o} des Schwerpunktes entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeit ($-v_{s_o}$) zusammensetzt, so dass dann die Geschwindigkeitscomponenten des Punktes xyz die Werte $\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dX}{dt}\right)_{t=0}$, $\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dY}{dt}\right)_{t=0}$, $\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dZ}{dt}\right)_{t=0}$ haben.

Die relative Bewegung B_r in Bezug auf den Schwerpunkt oder — was dasselbe besagt — in Bezug auf das Achsensystem A geht nun, wie im Folgenden gezeigt werden soll, genau so vor sich, wie sie unter der Einwirkung derselben äußeren Kräfte von einem mit dem anfänglichen Zustande der relativen Bewegung übereinstimmenden Bewegungszustande aus vor sich gieng, wenn der Schwerpunkt des Körpers unbeweglich gemacht würde.

Bezeichnet man nämlich, wie auf S. 335, durch $x' y' z'$ die relativen Coordinaten des beliebigen Massenpunktes m in Bezug auf das fortschreitende Achsensystem A , sodass $x = x' + X$, $y = y' + Y$, $z = z' + Z$ wird, so ist auch

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x'}{dt^2} &= m \frac{d^2 x}{dt^2} - m \frac{d^2 X}{dt^2}, & m \frac{d^2 y'}{dt^2} &= m \frac{d^2 y}{dt^2} - m \frac{d^2 Y}{dt^2}, \\ & & m \frac{d^2 z'}{dt^2} &= m \frac{d^2 z}{dt^2} - m \frac{d^2 Z}{dt^2} \end{aligned} \right\} (5)$$

Nun stellen die linken Seiten dieser drei Gleichungen offenbar die Componenten der auf das bewegliche Achsensystem A sich beziehenden relativen Kraft P_A dar, während die ersten Glieder der rechten Seiten in (5) die Componenten der auf das fixe Achsensystem xyz sich beziehenden bewegenden Kraft P_o darstellen, welche sich

aus den theils äußeren Kräften P , theils inneren Kräften p , die auf den materiellen Punkt m einwirken, zusammensetzt. Den letzten Gleichungen (5) zufolge resultiert sonach die relative Kraft P_A , die zur Erzeugung einer mit der relativen Bewegung B_r irgend eines Punktes m des Körpers übereinstimmenden Bewegung nothwendig ist, aus der bewegendenden Kraft P_a und aus einer fictiven Kraft $(-P_s)$, deren zu den Achsen parallele Componenten $-m \frac{d^2 X}{dt^2}$, $-m \frac{d^2 Y}{dt^2}$, $-m \frac{d^2 Z}{dt^2}$ sind [und deren zu der Bahn des coincidierenden Punktes des Achsensystems A tangentielle und normale Componenten bekanntlich $(-m \frac{dv_s}{dt})$ und $(-\frac{mv_s^2}{\rho_s})$ sind, wofern v_s die Schwerpunkts-geschwindigkeit und ρ_s den Krümmungshalbmesser der Bahn des Schwerpunktes bezeichnen]. Die letztgenannten, den einzelnen Massenpunkten $m_1, m_2 \dots$ des Körpers zugehörigen Kräfte $(-P_s)$ sind nun (siehe S. 544) durchwegs gleichgerichtet, ihr Mittelpunkt ist der Schwerpunkt S des Körpers, und die Componenten $-R_x$, $-R_y$, $-R_z$ der in diesem Schwerpunkte S angreifenden Resultanten $(-R)$ dieser Kräfte $(-P_s)$ sind offenbar

$$-R_x = \Sigma \left(-m \frac{d^2 X}{dt^2} \right) = -\frac{d^2 X}{dt^2} \cdot \Sigma m = -M \frac{d^2 X}{dt^2},$$

$$-R_y = -M \frac{d^2 Y}{dt^2}, \quad -R_z = -M \frac{d^2 Z}{dt^2} \quad \text{oder, wenn man die Gleichungen (3), S. 333, berücksichtigt,}$$

$$-R_x = -\Sigma P_x, \quad -R_y = -\Sigma P_y, \quad -R_z = -\Sigma P_z \dots (6)$$

Es ist demgemäß das System der relativen Kräfte P_A äquivalent einem Kräftesystem, das aus dem System der äußeren auf den starren Körper einwirkenden Kräfte P , dem System der inneren Kräfte p , welches letztere, da sich die inneren Kräfte untereinander das Gleichgewicht halten, nicht weiter in Betracht zu ziehen ist, und aus der im Schwerpunkt S angreifenden Kraft $(-R)$, welche, wie die letzten Gleichungen (6) lehren (vergl. S. 431), entgegengesetzt gleich ist der Reductionsresultanten der äußeren Kräfte, und die auch aus den in Fig. 132 betrachteten Kräften $-P_1 - P_2 - P_3 \dots$ resultiert, wenn in den Untersuchungen des § 73 der Schwerpunkt S zum Reductionspunkte O gewählt wird. Kurz, fügt man zu dem System der äußeren Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$ die entgegengesetzt gleichen Kräfte $-P_1 - P_2 - P_3 \dots$ hinzu, die im Schwerpunkte S angreifen, so erhält man ein den gesuchten relativen Kräften P_A äquivalentes Kräftesystem. Würde nun der Schwerpunkt S als ein fixer unbeweglicher Punkt vorausgesetzt werden, so müsste die in S angreifende Kraft $-R$, die (siehe S. 333) nothwendig ist, um den Schwer-

punkt S des unter der Einwirkung der äußeren Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$ stehenden Körpers in Ruhe zu erhalten, als der Widerstand dieses fixen Punktes auftreten, und es würden demnach in diesem Falle, wie dies nachzuweisen war, die relativen Kräfte P_A in der That äquivalent sein dem Widerstande dieses Punktes und dem System der äußeren Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$, d. h. es würde in diesem fingierten Falle, vorausgesetzt, dass auch der anfängliche Bewegungszustand in diesem fingierten Falle mit jenem der relativen Bewegung übereinstimmen würde, durch dieselben äußeren Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$ in der That eine Bewegung hervorgerufen werden, die mit der relativen Bewegung vollkommen identisch ist. (Dass die äußeren Kräfte dieselben bleiben sollen, hat offenbar die Bedeutung, dass die äußeren Kräfte in einem beliebigen Zeitmomente t bei dieser fingierten Bewegung B_r nicht nur dieselbe Größe, sondern auch ihre Richtungen dieselbe relative Lage zu dem nunmehr als ruhend vorausgesetzten Achsensystem A haben, wie zur selben Zeit t bei der Bewegung B .)

Um die Bewegung B des Körpers in die hier besprochene, mit der relativen Bewegung B_r übereinstimmende Bewegung zu überführen, müsste auf dem Schwerpunkt S nicht nur, um diesen in Ruhe zu erhalten, die continüirliche Kraft $-R$ während der ganzen Dauer der Bewegung einwirken, sondern es müsste, um auch aus dem anfänglichen, d. i. zur Zeit $t = 0$ stattfindenden Zustande der Bewegung B den mit dem anfänglichen Zustande der relativen Bewegung B_r übereinstimmenden anfänglichen Zustand der relativen Bewegung zu erzeugen, wodurch auch die anfängliche Geschwindigkeit des Schwerpunktes, deren Componenten durch $\left(\frac{dX}{dt}\right)_0, \left(\frac{dY}{dt}\right)_0, \left(\frac{dZ}{dt}\right)_0$ bezeichnet seien, im Zeitpunkt $t = 0$ annulliert werden müsste, auf den Schwerpunkt S zur Zeit $t = 0$ auch ein Impuls Π einwirken, dessen Componenten $\pi_x = -M \cdot \left(\frac{dX}{dt}\right)_0, \pi_y = -M \cdot \left(\frac{dY}{dt}\right)_0, \pi_z = -M \cdot \left(\frac{dZ}{dt}\right)_0$ sind.

Wie aus der bisherigen Untersuchung und aus § 73 (S. 431) sofort zu ersehen ist, führen die relativen Kräfte P_A bei ihrer Zusammensetzung in jedem Falle zu jenem auf S. 431 betrachteten Kräftepaar, dessen Moment M dem Reductionsmoment (Hauptdrehungsmoment) für den Schwerpunkt S gleich ist, und dessen Achse der Größe und Lage nach durch die Gleichungen (3), S. 438, bestimmt ist, wenn der Schwerpunkt S zum Anfangspunkte O des Achsensystems gewählt wird. Bezeichnet man demgemäß die zu xyz parallelen Achsen dieses etwa orthogonalen Achsensystems A , auf welches sich die relative Bewegung bezieht, durch $x' y' z'$ und dementsprechend die relativen Coordinaten des Angriffspunktes der beliebigen Kraft P durch $\xi' \eta' \zeta'$, so sind die Momentensummen $\Sigma M_{x'}, \Sigma M_{y'}, \Sigma M_{z'}$ der relativen Kräfte bezüglich der Achsen $x' y' z'$ durch $\Sigma (\eta' P_z - \zeta' P_y), \Sigma (\zeta' P_x - \xi' P_z), \Sigma (\xi' P_y - \eta' P_x)$ bestimmt, wo offenbar $P_x = P_{x'}, P_y = P_{y'}, P_z = P_{z'}$ ist, und es

bestehen demnach für diese relative Bewegung die den drei letzten Gleichungen (1) analogen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \Sigma M_{x'} &= \Sigma (\eta' P_{z'} - \zeta' P_{y'}) = \Sigma m \left(y' \frac{d^2 z'}{dt^2} - z' \frac{d^2 y'}{dt^2} \right) \\ \Sigma M_{y'} &= \Sigma (\zeta' P_{x'} - \xi' P_{z'}) = \Sigma m \left(z' \frac{d^2 x'}{dt^2} - x' \frac{d^2 z'}{dt^2} \right) \\ \Sigma M_{z'} &= \Sigma (\xi' P_{y'} - \eta' P_{x'}) = \Sigma m \left(x' \frac{d^2 y'}{dt^2} - y' \frac{d^2 x'}{dt^2} \right) \end{aligned} \right\} (7)$$

die übrigens auch leicht unmittelbar aus den Gleichungen (1) mit Zuhilfenahme der Sätze der § 56 und 57 abgeleitet werden können.

Die weitere Umformung der Gleichungen (7) in die drei Eulerschen Gleichungen und die an diese in der analytischen Mechanik gewöhnlich geknüpften, keinesfalls leichten Untersuchungen würden die Grenzen der Elemente der Mechanik überschreiten und sollen daher in diesen Lehrgang nicht aufgenommen werden.

Nur einige wenige, aus dem Gesagten leicht sich ergebende Schlussfolgerungen mögen hier noch ihren Platz finden.

Findet bei einem freibeweglichen Körper — außer der mit der Schwerpunktsbewegung übereinstimmenden translatorischen Bewegung — eine augenblickliche Rotation um eine Hauptcentralachse — die z' -Achse — statt, und wirkt auf diesen Körper ein Kräftesystem, das, wenn der Schwerpunkt S zum Reductionspunkte gewählt wird, außer der Reductionsresultanten R ein Kräftepaar M_x , ergibt, dessen Ebene zu dieser Hauptcentralachse senkrecht steht, so muss, da nach den bisherigen Erörterungen das Kräftepaar M_x , den relativen Kräften P_A äquivalent ist, d. h. da dieses Kräftepaar M_x , einzig und allein die relative Bewegung B_r (d. i. die Rotation um den Schwerpunkt) beeinflusst, diese Rotation um die z' -Achse, auf welche in diesem Falle (siehe S. 577) weder ein statischer, noch ein kinetischer Druck ausgeübt wird, stetig, und zwar zufolge der Gleichung (5), S. 553, mit der Winkelbeschleunigung $\gamma = \frac{M_x}{J_x}$ vor sich gehen, während gleichzeitig der Schwerpunkt S sich so bewegt wie ein materieller Punkt von der Masse M , auf welchen die Kraft R einwirkt, mit welcher Schwerpunktsbewegung aber auch die Bewegung des fortschreitenden Achsensystems A übereinstimmt, bezüglich dessen die Rotationsachse z' ihre Lage (siehe S. 578) nicht ändern kann, kurz es muss dann diese Rotationsachse z' , als welche die erwähnte Hauptcentralachse stets fungiert, parallel zu sich selbst fortschreiten.

Wäre in diesem Falle $M_x = 0$ und $R > 0$, d. h. resultiert aus dem System der einwirkenden äußeren Kräfte eine Kraft R ,

deren Angriffspunkt der Schwerpunkt ist, so ist stetig $\gamma = 0$, d. h. die Rotation um die stets gleich bleibende, parallel zu sich selbst fortschreitende Hauptcentralachse findet gleichförmig statt, während der Schwerpunkt S sich in einer durch die Größe und Richtung der Kraft R bedingten, nach den Regeln des Capitels IV bestimmbaren Bahn bewegt. Dies ist z. B. nahezu (abgesehen nämlich von der Präcession der Nachtgleichen) der Fall bei unserer Erde, deren Mittelpunkt in der Ekliptik sich bewegt, während die Erde gleichzeitig um ihre parallel zu sich fortschreitende Achse gleichförmig rotiert.

Wäre dagegen $R = 0$ und $M_x \geq 0$, so würde der Schwerpunkt (siehe S. 334) sich geradlinig und mit constanter Geschwindigkeit bewegen, beziehungsweise stetig in Ruhe bleiben, während die Rotation um die parallel fortschreitende, beziehungsweise ruhende Hauptcentralachse mit der früheren Winkelbeschleunigung γ vor sich geht. War der Körper ursprünglich in Ruhe, so muss er sich in Rotation setzen um diese Hauptcentralachse s' , die, wie vorausgesetzt wurde, auf der Ebene des resultierenden Kräftepaars M_x senkrecht steht.

Halten sich schließlich die äußeren Kräfte das Gleichgewicht, ist also $R = 0$ und $M_x = 0$, so muss der Schwerpunkt in gerader Bahn gleichförmig fortschreiten, beziehungsweise in Ruhe verharren, während der Körper um die Hauptcentralachse s' mit constanter Winkelgeschwindigkeit rotiert.

Besteht ein Körpersystem aus mehreren miteinander in Berührung stehenden festen Körpern $KK' \dots$, so gelten die Gleichungen (1) und (2) für einen jeden einzelnen dieser Körper, wofür nur zu den äußeren Kräften noch jene Kräfte, mit welchen die mit ihm in Berührung stehenden Körper auf denselben einwirken, hinzuzurechnen werden. Ist nun W irgend eine dieser letzteren in irgend einem Berührungspunkte A thätigen Kräfte, mit welcher z. B. der Körper K' auf den Körper K einwirkt, so muss zufolge des Principes der Gegenwirkung der Körper K auf den Körper K' in demselben Punkte A die entgegengesetzt gleiche Kraft $-W$ äußern. Addirt man demnach alle die früheren auf die einzelnen Körper in Anwendung zu bringenden Gleichungen (1), bzw. (2), so muss die Summe der parallel zu irgend einer Achse genommenen Componenten der Kräfte W und $-W$ und ebenso die Summe der Momente dieser Kräfte bezüglich einer jeden Achse verschwinden. Demgemäß haben die Gleichungen (1) und (2) Giltigkeit auch für ein jedes System miteinander in Verbindung stehender Körper, ohne dass es nöthig ist, bei der Anwendung dieser Gleichungen auf die Wechselwirkungen W , $-W$ u. s. w. der Körper untereinander, die dann als innere Kräfte des Systems anzusehen sind, Rücksicht zu nehmen.

§ 102. Mechanische Arbeit kontinuierlicher Kräfte und kinetische Energie bei der allgemeinsten Bewegung der starren Körper und der Körperverbindungen.

Ist durch MA in Fig. 41 (S. 93) die Geschwindigkeit v irgend eines Punktes M bei irgend einer Bewegung B eines starren Körpers, die, mag sie welcher Art immer sein, in eine fortschreitende und rotierende Bewegung zerlegt werden kann, dargestellt, ferner durch MB die gleichzeitige Geschwindigkeit v_x desselben Punktes M bei der componentalen rotierenden Bewegung B_r des Körpers um die augenblickliche Rotationsachse a und durch MC die gleichzeitige, für alle Punkte gleichgerichtete und gleiche Geschwindigkeitscomponente v_y desselben Punktes M bei der componentalen fortschreitenden Bewegung B_s , so kann bekanntlich in jedem Falle $\overline{MA} = v$ als die Diagonale eines Parallelogramms $MBAC$ angesehen werden, dessen Seiten $\overline{MB} = v_x$ und $\overline{MC} = v_y$ sind. (Es ist hierbei ganz gleichgültig, welchen Punkt des Körpers man als jenen wählt, durch dessen Bewegung die fortschreitende Bewegung B_s bestimmt ist, und durch den demgemäß die augenblickliche Rotationsachse a hindurchgeht.) Bezeichnet man nun durch x und y die Richtungen von v_x und v_y , und bedeutet P irgend eine der Kräfte, die auf den Punkt M einwirken, so ergibt sich durch Projection der Diagonale $\overline{MA} = v$ einerseits und des Polygonalzuges \overline{MBA} andererseits auf die Richtung der Kraft, dass $v \cos(vP) = v_x \cos(xP) + v_y \cos(yP)$ ist. Multipliziert man diese Gleichung mit P , und beachtet, dass zufolge der durch die Gleichung (4), S. 181, ausgedrückten Definition die elementare mechanische Arbeit dA der Kraft P bei der resultierenden Bewegung B durch $dA = P \cdot ds \cdot \cos(ds, P) = P \cdot ds \cdot \cos(vP)$, also der Effect e dieser Kraft durch $e = \frac{dA}{dt} = P \cdot \frac{ds}{dt} \cos(vP) = P \cdot v \cdot \cos(vP)$ und ebenso bei den componentalen Bewegungen B_r und B_s die Effecte e_r und e_s derselben Kraft P durch $e_r = \frac{dA_r}{dt} = P \cdot v_x \cdot \cos(xP)$ und $e_s = \frac{dA_s}{dt} = P \cdot v_y \cdot \cos(yP)$ bestimmt sind, so ergibt sich, dass stets $e = e_s + e_r$ und, wie die Multiplication dieser Gleichung mit dt ergibt, stets auch $dA = dA_s + dA_r$ ist; somit ist auch, wenn sich das Summenzeichen Σ auf die in demselben Zeitelemente dt auf den Körper gleichzeitig einwirkenden Kräfte irgend eines Kräftesystems bezieht, $\Sigma e = \Sigma e_s + \Sigma e_r$, $\Sigma(dA) = \Sigma(dA_s) + \Sigma(dA_r)$, es ist also stets der Gesamteffect Σe eines beliebigen Kräftesystems bei der resultierenden Bewegung B des starren Körpers die Summe aus dem gleichzeitigen Effecte Σe_s bei der componentalen translatorischen Bewegung B_s und dem

Effecte Σe_r bei der componentalen rotierenden Bewegung B_r dieses Körpers.

Nun ist v_y , da die Bewegung B_s eine translatorische ist, für alle Punkte dasselbe, weshalb man v_y als gemeinsamen Factor bei der Bildung der Summe $\Sigma e_s = \Sigma [P v_y \cos(yP)]$ herausheben kann, und es ist demgemäß $\Sigma e_s = v_y \cdot \Sigma [P \cos(yP)] = v_y \cdot R_y$, wenn durch R_y die Y -Componente der Reductionsresultanten des Systems der Kräfte P bezeichnet wird; ferner ist bei der Bewegung B_r bekanntlich $v_x = r \cdot \omega$, wenn durch ω die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die augenblickliche Rotationsachse a und durch r der Abstand des Punktes M von dieser Achse a bezeichnet wird; es ist demnach auch $\Sigma e_r = \Sigma [P \cdot r \omega \cdot \cos(xP)] = \omega \cdot \Sigma [P \cdot \cos(xP) \cdot r] = \omega \cdot \Sigma M_x$, wenn M_x das Moment der Kraft P bezüglich der augenblicklichen Achse a [das, da bei der Zerlegung der Kraft P in eine zur Achse a parallele, ferner in eine in die Richtung von r fallende und in eine dritte zu r und a senkrechte, in der x -Richtung wirkende Componente die Momente der beiden ersten Componenten in Bezug auf a Null sind, dem Momente der letzten Componente $P \cos(xP)$, d. i. dem Producte $P \cos(xP) \cdot r$ gleich ist] bedeutet (vergl. Gleichung (2), S. 556).

Setzt man die gefundenen Werte von Σe_s und Σe_r in die frühere Gleichung $\Sigma e = \Sigma \frac{dA}{dt} = \Sigma e_s + \Sigma e_r$ ein, so findet man

$$\Sigma e = \Sigma \frac{dA}{dt} = \Sigma e_s + \Sigma e_r = R_y \cdot v_y + \Sigma M_x \cdot \omega \dots (1)$$

Halten sich nun in einem bestimmten Zeitmomente t die Kräfte P eines Kräftesystems an dem starren Körper das Gleichgewicht, so ist zufolge früherer Entwicklungen $R_y = 0$ und ferner für eine jede Achse, also auch für die Achse a die Momentensumme $\Sigma M_x = 0$. Es ist demnach, mag v_y und ω welchen Wert immer haben, der Gleichung (1) zufolge

$$\Sigma e = \Sigma \frac{dA}{dt} = \frac{d\Sigma A}{dt} = 0 \dots (2)$$

d. h. der Gesamteffect eines jeden auf den starren Körper einwirkenden Systems continuierlicher Kräfte P , die sich während irgend einer Bewegung des Körpers in einem beliebigen Zeitpunkte das Gleichgewicht halten, ist für diesen Zeitpunkt Null, sonach ist auch $\Sigma(dA) = 0$, d. h. die Summe der elementaren mechanischen Arbeiten in dem diesem Zeitpunkte benachbarten Zeitelemente dt muss sich auf Null reducieren, weshalb die geleistete Arbeit ΣA dieser Kräfte und demgemäß auch das Potential der Kräfte in diesem Zeitpunkte einen Maximal- oder einen Minimalwert erlangt.

Halten sich die Kräfte P eines Systems dauernd durch eine endliche Zeit t bei einer jeden Lage, die der Körper im Verlaufe dieser Zeit t annimmt, das Gleichgewicht, so muss der Gleichung (2) zufolge ΣA stets einen constanten Wert, nämlich den anfänglichen, beibehalten, d. h. es muss die Summe der von diesen Kräften während dieser Zeit geleisteten Arbeiten sich stetig auf Null reducieren, es wird mit anderen Worten von diesen Kräften während dieser Zeit weder mechanische Arbeit geleistet, noch consumiert.

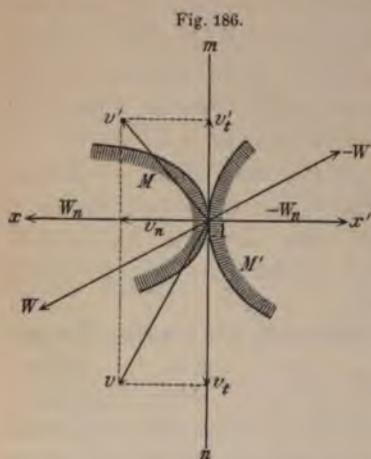
Dementsprechend muss für eine jede überhaupt mögliche Bewegung eines starren Körpers die Summe der mechanischen Arbeiten Σa der inneren Kräfte p , die zwischen den einzelnen Punkten eines starren Körpers thätig sind, sobald dieselben nur als anziehende oder abstoßende Kräfte vorausgesetzt werden, da diese sich dann stetig das Gleichgewicht halten, stets den Wert Null haben.

Ist das System der Kräfte P irgend eines auf den Körper während seiner Bewegung einwirkenden Kräftesystems äquivalent einem zweiten System der Kräfte P' , so ist zufolge § 73 $R_y = \Sigma P_y$ an Größe gleich der Summe $R'_y = \Sigma P'_y$ und $\Sigma M_a = \Sigma M'_a$; es ist demnach der Gleichung (1) zufolge für denselben durch v_y und w bestimmten Bewegungszustand des Körpers $\Sigma e = \Sigma e'$, d. h. der Gesamteffect $\Sigma e = \Sigma \frac{dA}{dt} = \frac{d\Sigma A}{dt}$ irgend eines Kräftesystems ist bei einer jeden Bewegung des starren Körpers stets gleich dem Gesamteffecte $\Sigma e' = \frac{\Sigma dA'}{dt} = \frac{d\Sigma A'}{dt}$ eines ihm äquivalenten Kräftesystems, folglich ist auch, wie die auf die Zeit t ausgedehnte Integration der Gleichung $\Sigma e \cdot dt = \Sigma e' \cdot dt$ sofort lehrt, die Summe der in der beliebigen Zeit t von den Kräften der beiden äquivalenten Kräftesysteme geleisteten mechanischen Arbeiten die gleiche.

Aus diesem Satze ergibt sich sofort, dass bei einer jeden Bewegung eines starren Körpers, wenn die Kräfte P etwa auf eine Resultante R sich reducieren lassen, die mechanische Arbeit der Resultanten R gleich ist der Summe der mechanischen Arbeiten ihrer Componenten P , ferner die mechanische Arbeit eines aus mehreren Kräftepaaren resultierenden Kräftepaars gleich der Summe der mechanischen Arbeiten der componentalen Kräftepaare u. s. w.

Dem allgemeinen Begriffe des Potentials eines Kräftesystems (siehe S. 325) zufolge muss demnach auch zwei äquivalenten Kräftesystemen für dieselbe Zeit stets die gleiche Potentialdifferenz entsprechen.

Der früher deducierte Satz, demzufolge die Summe der mechanischen Arbeiten der inneren Kräfte (Verbindungskräfte) gleich Null ist, hat auch Giltigkeit für eine jede Verbindung von in gegenseitiger Berührung stehenden starren Körpern. Bei einer solchen Verbindung treten nämlich zu den früheren inneren Kräften (Verbindungskräften), für welche $\Sigma a = 0$ ist, nur noch (siehe S. 186 und 191) die Kräfte W und $-W$ hinzu, die durch die Wechselwirkungen der sich berührenden Körper bedingt und deren Angriffspunkte die Berührungspunkte je zweier Körper sind. Ist nun A ein solcher Berührungspunkt zweier Körper M und M' und mn die gemeinsame Berührungsebene dieser beiden Körper, so lässt sich W zerlegen in eine zur Berührungsebene mn normale, in der Richtung x wirksame Componente W_n (Fig. 186), d. i. in den normalen Widerstand, den der Körper M' auf



den Körper M ausübt, und in eine zweite in der Ebene mn wirkende Componente W_t , d. i. in den tangentiellen Widerstand oder Reibungswiderstand, welcher früheren Gesetzen zufolge stets entgegengesetzt gerichtet ist der Richtung der relativen Bewegung des Punktes A des Körpers M in Bezug auf den Punkt A des Körpers M' , und welcher den Wert $W_t = f W_n$ hat, wenn durch f der kinetische Reibkoeffizient für die beiden Körper bezeichnet ist. (Ist nämlich v die Geschwindigkeit des Punktes A des Körpers M und v' jene

des Punktes A des Körpers M' , so hat man (siehe S. 93) v zusammensetzen mit $(-v')$, um die relative Geschwindigkeit des ersteren Punktes zu erhalten, welcher die Richtung von W_t entgegengesetzt ist.) Die normalen und tangentiellen Componenten der auf den Körper M' wirkenden Reaction $(-W)$ sind dementsprechend die Kraft $(-W_n)$, deren Richtung x' der Richtung x entgegengesetzt ist, und die Kraft $(-W_t)$. Zerlegt man nun auch eine jede der Geschwindigkeiten v und v' der beiden sich berührenden Punkte A in eine zur Ebene mn senkrechte x -Componente $v_n = v \cos(xv)$, bezw. $v'_n = v' \cos(xv')$ und in eine tangentielle Componente $v_t = v \sin(xv)$, bezw. $v'_t = v' \sin(xv')$, so ist leicht einzusehen, dass, da der eine starre Körper nicht in den anderen eindringen kann, während der Dauer der Berührung $v_n = v'_n$, also auch $v \cos(xv) = v' \cos(xv')$ sein muss, dass demnach die Effecte der beiden

Kräfte W_n und $(-W_n)$, nämlich $e_{W_n} = \frac{dA_{W_n}}{dt} = W_n v \cos(xv)$ und $e_{-W_n} = \frac{dA_{-W_n}}{dt} = W_n v' \cos(x'v') = -W_n v' \cos(xv')$ entgegengesetzt gleich sind, dass sonach $e_{W_n} + e_{-W_n} = 0$ ist.

Es ist also, wie sich durch Integration der letzten Gleichung nach t sofort ergibt, während der ganzen Dauer der Berührung die Summe der gleichzeitigen mechanischen Arbeiten der Kräfte W_n und $-W_n$, nämlich $\Sigma A_{W_n} + \Sigma A_{-W_n}$ gleich Null; aber auch dann, wenn die Körper M und M' sich trennen sollten (in welchem Falle die Geschwindigkeitscomponenten $v \cos(xv)$ und $v' \cos(x'v')$ von einander verschieden sind), verschwindet die letztere Summe, weil dann Druck und Gegendruck W_n und $(-W_n)$ nicht mehr vorhanden sind. Da sonach trotz des Hinzutretens der Kräfte W_n und $(-W_n)$ zu den inneren Kräften von diesen beiden Kräften keine Arbeit geleistet wird, so folgt hieraus, dass, wofern die mechanische Arbeit des Reibungswiderstandes W_t und $(-W_t)$ zu den Arbeiten der **äußeren** Kräfte hinzugerechnet wird, oder wenn keine Reibung an den Berührungsstellen stattfindet (was dann der Fall ist, wenn v und v' die gleiche Größe und Richtung haben), stets auch bei einem beweglichen System von sich gegenseitig wo immer berührenden starren Körpern die Summe der mechanischen Arbeiten der inneren Kräfte (der Verbindungskräfte) sich auf Null reducieren muss. Dies ist auch dann der Fall, wenn die einzelnen Körper durch als undeformbar angenommene Seile, Ketten, Riemen u. s. w., kurz durch undeformbare materielle Punktsysteme, die nur Zugspannungen zulassen, verbunden sind, denn entweder sind die letzteren gespannt, in welchem Falle sie zufolge früherer Auseinandersetzungen unbeschadet aller mechanischen Wirkungen durch entsprechende starre Punktsysteme vollständig ersetzbar sind, oder es findet in denselben (etwa im Falle der Schloffheit derselben) keine Zugspannung statt, in welchem Falle die Spannungen (die inneren Kräfte) und daher auch deren mechanische Arbeiten Null werden.

Da sonach die in den Entwicklungen auf S. 316—324 vorausgesetzte einzige Grundbedingung $\Sigma \delta a_p = 0$, $\Sigma a_p = 0$, $\Sigma \frac{da_p}{dt} = \Sigma e_p = 0$, wie dies schon auf S. 324 angedeutet wurde, für ein starres Punktsystem und für Verbindungen von starren Körpern stets erfüllt ist, so müssen auch alle die in den §§ 54 und 55 aus dieser Grundbedingung gefolgerten Theoreme auf starre Körper und Körperverbindungen Anwendung finden, wobei man bei den nicht freibeweglichen starren Körpern, den sogenannten einfachen Maschinen (Hebel, Rolle, Wellrad, schiefe

Ebene, Schraube u. s. w.) und bei den Verbindungen derartiger nicht freier Körper, d. i. den sogenannten zusammengesetzten Maschinen sowohl (z. B. bei den auf dem Hebelprincipe beruhenden einfachen Maschinen: Hebel im engeren Sinne des Wortes, Rolle, Wellrad) von den Widerständen W der fixen Punkte absehen kann, da wegen der Unbeweglichkeit dieser Punkte in dem Producte $dA_W = W \cdot ds \cdot \cos(ds, W)$ der zweite Factor verschwindet, als auch (z. B. bei den anderen auf dem Principe der schiefen Ebene beruhenden einfachen Maschinen) absehen kann von dem **normalen** Widerstände W jener Flächen, beziehungsweise Linien, längs welcher gewisse Punkte der Körper sich zu bewegen genöthigt sind, da in dem letzteren Falle die entsprechenden Bahnelemente ds auf den Richtungen dieser Kräfte W senkrecht stehen, also in dem Ausdrucke $dA_W = W \cdot ds \cdot \cos(ds, W)$ der letzte Factor Null ist.

Es hat demgemäß (zufolge des § 54), wenn zu den äußeren Kräften jene passiven Widerstände, deren mechanische Arbeit von Null verschieden ist, also der Reibungswiderstand, Luftwiderstand u. s. w. hinzugezählt werden, für einen jeden starren Körper und eine jede Verbindung starrer Körper das Princip der virtuellen Verschiebungen volle Giltigkeit, welchem zufolge die algebraische Summe der virtuellen Momente $\Sigma \delta A_P = \Sigma (P \cdot \delta n) = \Sigma [P_x \cdot \delta x + P_y \cdot \delta y + P_z \cdot \delta z]$ sämmtlicher äußerer Kräfte P für alle überhaupt möglichen elementaren virtuellen Verschiebungen im Zustande des Gleichgewichtes Null ist, und es müssen auch (siehe S. 325) umgekehrt, wenn die Summe der virtuellen Momente aller äußeren Kräfte für eine jede aus irgend einer Lage (Configuration) des Systems überhaupt mögliche virtuelle Verschiebung den Wert Null hat, die Kräfte in dieser Lage (Configuration) des Systems sich das Gleichgewicht halten.

Anmerkung 1. Es kann wohl auch (siehe Anm. 1, S. 317),¹ wofern nämlich nicht alle virtuellen Verschiebungen umkehrbar sind (wie es z. B. der Fall ist, wenn die einzelnen Körper durch Seile, die wohl eine Annäherung, aber nicht die Entfernung ihrer Endpunkte gestatten, mit einander verbunden sind u. s. w.), die Summe der virtuellen Momente für bestimmte virtuelle Verschiebungen im Zustande des Gleichgewichtes negativ sein, so dass das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in seiner allgemeinsten Form strenggenommen lauten soll: Die Summe der virtuellen Momente ist für keine der virtuellen Verschiebungen aus der Gleichgewichtslage größer als Null und umgekehrt: Wenn diese Summe für keine der virtuellen Verschiebungen von einer bestimmten Lage aus positiv ist, so ist diese Lage eine Gleichgewichtslage des Systems.

Ferner ist aus dem gleichen Grunde im Zustande des Gleichgewichtes auch bei einer jeden wirklichen (actuellen) Bewegung der Maschinen, mögen die einfachen Maschinen, aus denen dieselben etwa zusammengesetzt sind, auf dem Principe des Hebels oder auf jenem

der schiefen Ebene beruhen, die algebraische Summe der Effecte $\Sigma E = \Sigma \frac{dA}{dt} = \frac{d\Sigma A}{dt}$ der durch die Verbindung nicht bedingten Kräfte P Null, d. h. es ist die Summe ΣA der mechanischen Arbeiten aller Kräfte P in der Gleichgewichtslage des Systems ein Maximum oder ein Minimum, welches Gesetz schon Maupertuis (geb. 1698, gest. 1759) gefunden und unter dem Namen „loi de repos“ im Jahre 1740 in den Mém. de l'acad. de Paris veröffentlicht hat. Wenn demgemäß E_Q den sogenannten Nutzeffect bedeutet, d. i. den absoluten Zahlwerth des Effects $(-E_Q) = \Sigma \frac{dA_Q}{dt} = \frac{d\Sigma A_Q}{dt}$ jener eine negative mechanische Arbeit ΣA_Q leistenden Kräfte Q , deren Überwindung durch die Maschine beabsichtigt wird, und denen man kurzweg bei Maschinen den Namen „Last“ beilegt, wenn man ferner durch E_P den sogenannten absoluten Effect, d. i. den Effect $E_P = \Sigma \frac{dA_P}{dt} = \frac{d\Sigma A_P}{dt}$ jener Kräfte, die eine positive Arbeit leisten, und die bei Maschinen „Kräfte“ im engeren Sinne des Wortes genannt werden, und durch E_W den sogenannten Nebeneffect bezeichnet, das ist den Zahlwert des Effects $(-E_W) = \Sigma \frac{dA_W}{dt} = \frac{d\Sigma A_W}{dt}$ der unvermeidlichen passiven, der Bewegung stets entgegenwirkenden, also eine negative Arbeit ΣA_W leistenden Widerstände W der Reibung, des Luftwiderstandes u. s. w., so ist bei den Maschinen in jedem Zeitmoment, in welchem sich alle die genannten Kräfte das Gleichgewicht halten, $0 = \Sigma E = E_P + (-E_Q) + (-E_W)$, also $E_P = -E_Q + E_W$, d. h. es ist der absolute Effect E_P die Summe aus dem Nutzeffecte E_Q und dem Nebeneffecte E_W , also jedenfalls stets $E_P > E_Q$ (durch welche Thatsache ein „Perpetuum mobile“ ausgeschlossen ist, für welches $E_P < E_Q$ oder zum mindesten $E_P = E_Q$ sein müsste). Das stets zwischen 0 und 1 gelegene Verhältniß $(E_Q : E_P)$ bezeichnet man als den Wirkungsgrad (relativen Nutzeffect) der Maschine. Findet bei der Bewegung einer Maschine continuierliches Gleichgewicht der Kräfte statt, so behält die letzte Gleichung während des ganzen Verlaufes der Bewegung ihre Giltigkeit, und es führt demnach deren Integration nach der Zeit t zu der schon aus Früherem bekannten Relation $\Sigma A = 0$, d. i. $\Sigma A_P = -[\Sigma A_Q + \Sigma A_W]$.

Es besteht ferner aus den obangeführten Gründen für eine jede Bewegung eines starren Körpers oder einer Verbindung von starren Körpern der Lagrange'schen Form des d'Alembert'schen Principis zufolge (siehe S. 320) das bekannte fundamentale Grundgesetz:

$$\Sigma \left[\left(P_x - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(P_y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(P_z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0 \quad (3)$$

und es hat für diese Körper und Körpersysteme (siehe S. 324) auch das Princip der lebendigen Kraft allgemeine Gültigkeit, demzufolge bekanntlich die Änderung der gesamten kinetischen Energie stets gleich ist der gleichzeitigen mechanischen Arbeit der äußeren Kräfte, also auch (siehe S. 325) der gleichzeitigen Änderung $U_0 - U$ des Potentials U des gesamten Systems der äußeren Kräfte. Kurz es ist

$$\Sigma A_P = U_0 - U = \Sigma \frac{m v^2}{2} - \Sigma \frac{m v_0^2}{2} \dots (4)$$

In gleicher Weise folgt aus den bisherigen Erörterungen und aus § 55 das Princip der Erhaltung der Energie (S. 326) und das durch die Gleichung (10) auf S. 329 ausgedrückte allgemeine Princip der Energie in seiner Anwendung auf die hier betrachteten Körpersysteme.

Wendet man die Gleichung (4) auf irgend eine Bewegung von einfachen oder zusammengesetzten Maschinen an, bei welcher die Kräfte sich nicht das Gleichgewicht halten, so findet man durch Differentiation dieser Gleichung nach der Zeit t sofort, wenn man die früheren Bezeichnungen beibehält, dass $E_P - (E_Q + E_W) = \Sigma \left(m v \frac{dv}{dt} \right)$ ist.

Die gesammte kinetische Energie $\Sigma \frac{m v^2}{2}$ eines starren Körpers von der Masse M lässt sich leicht in einfacherer Form ausdrücken, wenn man für jenen bisher in diesem Paragraphen unbestimmt gelassenen Punkt, durch dessen Bewegung die componentale fortschreitende Bewegung B_s des starren Körpers bestimmt ist, wie dies auch im früheren Paragraphen geschehen ist, den Schwerpunkt S des Körpers wählt, so dass auch die augenblickliche Rotationsachse a für die zweite componentale (rotierende) Bewegung B_r stets irgend eine Schwerpunktsachse ist. In diesem Falle ist nämlich zufolge der Gleichung (5) auf S. 335 $\Sigma \frac{m v^2}{2} = M \cdot \frac{V^2}{2} + \Sigma \frac{m v'^2}{2}$, wo durch V die Geschwindigkeit des Schwerpunktes S und durch v' die relative Geschwindigkeit irgend eines Punktes m des Körpers in Bezug auf ein fortschreitendes Achsensystem A bezeichnet ist, dessen Bewegung B_s mit jener des Schwerpunktes S übereinstimmt, wo mit anderen Worten v' jene Geschwindigkeit bedeutet, die der in der Entfernung r von der augenblicklichen Rotationsachse a befindliche Punkt m infolge der gleichzeitigen, mit der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit ω vor sich gehenden Rotation B_r um diese Schwerachse a besitzt.

Da nun $v' = r \cdot w$ ist, so muss $\Sigma \frac{m v'^2}{2} = \Sigma \frac{m r^2 w^2}{2} = \frac{w^2}{2} \cdot \Sigma m r^2 = \frac{w^2}{2} \cdot J$ sein, wenn J das Trägheitsmoment der Masse M in Bezug auf die augenblickliche Schwerpunktsachse a bedeutet. Es ist demnach

$$\Sigma \frac{m v^2}{2} = M \cdot \frac{V^2}{2} + J \cdot \frac{w^2}{2} \dots (5)$$

Ist nun V_0 die anfängliche Geschwindigkeit des Schwerpunktes (zur Zeit $t=0$), und ist w_0 die anfängliche Winkelgeschwindigkeit der Rotation B_r , um die anfängliche Lage a_0 der augenblicklichen Rotationsachse, bedeutet ferner J_0 das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich dieser Achse a_0 , so ist $\Sigma \frac{m v_0^2}{2} = M \cdot \frac{V_0^2}{2} + J_0 \cdot \frac{w_0^2}{2}$. Setzt man diesen Wert und den Wert aus (5) in die Gleichung (4) ein, so findet man, dass für eine jede Bewegung eines starren Körpers

$$\Sigma A_P = U_0 - U = M \cdot \frac{V^2 - V_0^2}{2} + \left(J \frac{w^2}{2} - J_0 \frac{w_0^2}{2} \right) \dots (6)$$

ist, welche Gleichung sich übrigens auch derart deducieren lässt, dass man zur Summe der mechanischen Arbeiten bei der Bewegung B_s , welche zufolge der Gleichung (4) auf S. 334 oder der Gleichung (2) auf S. 547 der Differenz $\frac{M V^2}{2} - \frac{M V_0^2}{2}$ gleich ist, die Summe der Arbeiten der Kräfte P bei der Bewegung B_r , die durch $J \frac{w^2}{2} - J_0 \frac{w_0^2}{2}$ sich ausdrücken lässt, hinzufügt.

Halten sich sämtliche äußeren Kräfte P bei der Bewegung eines starren Körpers dauernd das Gleichgewicht, oder wirken überhaupt gar keine äußeren Kräfte auf den Körper ein, so ist, wie oben bewiesen wurde, $\Sigma A_P = 0$, es behält daher in diesem Falle der Gleichung (4) zufolge die gesammte kinetische Energie $\Sigma \frac{m v^2}{2} = M \frac{V^2}{2} + J \cdot \frac{w^2}{2}$ während der Bewegung des Körpers einen constanten Wert (was jedoch keinesfalls so zu deuten ist, als ob die Geschwindigkeit eines jeden Punktes constant bleiben müsste, was nur dann der Fall wäre, wenn z. B. die anfängliche Bewegung des Körpers eine fortschreitende, also $w_0 = 0$ sein würde, in welchem Falle sich alle Punkte stets geradlinig und gleichförmig bewegen müssten).

Lassen sich alle äußeren Kräfte P auf eine Resultante R reducieren, in deren Richtungslinie der Schwerpunkt S des Körpers gelegen ist, so muss ΣA_P nach Früherem der mechanischen Arbeit dieser Resultanten R gleich sein, und es muss

demnach zufolge der Gleichung (4), S. 334, $\Sigma A_P = \frac{MV^2}{2} - M \frac{V_i}{2}$,
 also der früheren Gleichung (6) zufolge $J \frac{w^2}{2} = J_0 \frac{w_0^2}{2}$ sein, d. h.
 es muss die lebendige Kraft der rotierenden Bewegung B ,
 nämlich $J \frac{w^2}{2}$ stets einen constanten Wert beibehalten.

Findet in diesem Falle zudem die anfängliche Drehung um
 irgend eine der drei Hauptcentralachsen statt, so muss dem früheren
 Paragraphen zufolge diese Bewegung um die letztere Achse andauern,
 also $J = J_0$ sein, sodass auch $w = w_0$ sein muss, d. h. die rotierende
 Bewegung B , ist andauernd eine gleichförmige, wie dies schon im
 früheren Paragraphen bewiesen wurde.

Ist die Bewegung irgend einer entweder auf dem Principe
 des Hebels oder auf jenem der schiefen Ebene beruhenden einfachen
 oder zusammengesetzten Maschine, wie dies bei den meisten Ma-
 schinen der Fall ist, eine periodische, d. h. kehren immer nach
 Verlauf einer gewissen Zeit t , die man die Periode nennt, die
 gleichen Geschwindigkeiten wieder, so ist in der Gleichung (4) für
 einen jeden Massenpunkt $v = v_0$ zu setzen, somit ist dieser Gleichung
 zufolge $\Sigma A_P = 0$, d. h. es ist die algebraische Summe der
 innerhalb einer jeden Periode von den Kräften verrichteten
 positiven und der von den Lasten und den passiven Widerständen
 geleisteten negativen mechanischen Arbeiten Null.

Es wurde schon früher hervorgehoben, dass in jeder Gleich-
 gewichtslage, in welche die starren Körper und die betrachteten
 Körpersysteme während ihrer Bewegung gelangen, der Gleichung
 $\frac{d\Sigma A_P}{dt} = \frac{dU}{dt} = 0$ zufolge das Gesamtpotential des einwirkenden
 Systems der äußeren Kräfte im allgemeinen einen Maximal- oder einen
 Minimalwert erlangen muss. Im ersten Falle, wenn nämlich das
 Potential ein Minimum, also ΣA_P ein Maximum wird, muss, wie aus
 einer Deduction, die jener auf S. 540 ganz analog ist, erhellt, das
 Gleichgewicht ein stabiles sein, hingegen entspricht dem Maximal-
 werte des Potentials und dem Minimalwerte der Summe ΣA_P ein
 labiles Gleichgewicht. Hat aber das Potential U in der Gleich-
 gewichtslage denselben Wert wie in allen Nachbarlagen, so ist das
 Gleichgewicht ein neutrales (indifferentes). Ist der Wert des U
 in irgend einer Gleichgewichtslage in Bezug auf gewisse Nachbar-
 lagen ein Maximum, in Bezug auf andere Lagen aber ein Minimum,
 so ist das Gleichgewicht ein sogenanntes gemischtes, d. h. es ist in
 Bezug auf die ersteren Nachbarlagen ein labiles, in Bezug auf die
 letzteren ein stabiles u. s. w.

Der Gleichung (4) zufolge muss beim Durchgange durch die Gleichgewichtslage zugleich mit der geleisteten Arbeit ΣA_p die kinetische Energie $\Sigma \frac{mv^2}{2}$ des Systems ein Maximum oder Minimum sein, je nachdem das Gleichgewicht ein stabiles oder ein labiles ist (ein Gesetz, das Courtivron gefunden und 1749 in den Schriften der Pariser Akademie veröffentlicht hat).

Anmerkung 2. Für irgend eine materielle Kettenlinie, die nur ihrem eigenen Gewichte überlassen ist, hat das Potential U , wenn die Richtung vertical nach aufwärts zur positiven Richtung der z -Achse eines rechtwinkligen Achsen-systems angenommen wird (siehe S. 202 und 539), den Wert $U = \Sigma (mgz) + C = g \cdot MZ + C$, wenn M die Masse, Z die z -Coordinate des Massenmittelpunktes S der Kettenlinie, g die Beschleunigung der Schwere und C irgend eine Constante bedeuten. Da nun jedes unendlich kleine Element einer Kettenlinie als eine starre Linie angesehen werden muss, so kann jede Kettenlinie als eine Körper-verbinding von der in diesem Paragraphen behandelten Art betrachtet werden, und es ist demgemäß in der stabilen Gleichgewichtslage U ein Minimum, was zufolge der letzten Gleichung, da M und g constant sind, nur dann möglich ist, wenn Z ein Minimum ist, d. h. der Massenmittelpunkt einer jeden Kettenlinie hat in der stabilen Gleichgewichtslage derselben die möglichst tiefste Lage.

Dies ist auch dem Gesagten zufolge bei einer Maschine der Fall, wenn die einwirkenden Kräfte durchwegs Gewichte sind, was schon Toricelli (geb. 1608, gest. 1647) erkannte, indem er aus dem von Galilei für einfache Maschinen gefundenen Principe der virtuellen Verschiebungen (siehe Anm. 2, S. 318) schloss, dass an einer Maschine nur dann (stabiles) Gleichgewicht stattfinden kann, wenn bei keiner Verschiebung derselben der Schwerpunkt der angehängten Lasten tiefer sinken kann.

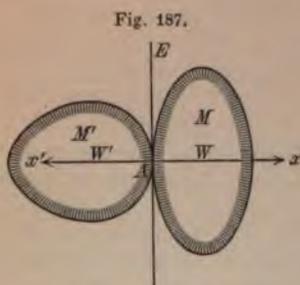
Ist die ihrem eigenen Gewichte überlassene Kettenlinie eine homogene materielle Linie, so ist ihre Gleichgewichtslage zufolge der Erklärung des § 51 eine gemeine Kettenlinie, und es kann daher eine gemeine Kettenlinie auch definiert werden als jene Curve, deren Form ein unausdehnbarer homogener Faden von unveränderlicher Länge, der in zwei Punkten befestigt ist, annimmt, wenn der Massenmittelpunkt derselben die möglichst tiefste Lage hat. Die eben erwähnte Eigenschaft der gemeinen Kettenlinie wurde (freilich auf einem anderen, minder einfachen Wege) schon von Jakob Bernoulli (1690) und Johann Bernoulli gefunden (vergl. Anm. S. 304).

§ 103. Stoß der Körper.

Kommen bei der Bewegung zweier Körper M und M' dieselben in einem bestimmten Zeitpunkte t_0 in einem oder mehreren Punkten A zur Berührung, und stimmen die Geschwindigkeiten dieser Punkte A des Körpers M mit den gleichzeitigen Geschwindigkeiten der mit denselben zur Berührung kommenden Punkte A des Körpers M' in Richtung und Größe nicht überein, so müssen infolge der gegenseitigen Einwirkung der Widerstände W und $-W$ dieser Körper M und M' die Geschwindigkeiten dieser Berührungspunkte und demnach auch die Bewegungszustände der anderen Punkte der

Körper M und M' eine Änderung erfahren. Diese meist in einer ungemein kurzen Zeit vor sich gehende gegenseitige Einwirkung der beiden Körper aufeinander bezeichnet man als den Stoß der Körper M und M' .

Es soll zunächst der einfachste Fall (Fig. 187) behandelt werden, in welchem nämlich zwei als starr vorausgesetzte Körper M und M' in einem einzigen Punkte A zur Berührung kommen.



Sieht man von dem Reibungswiderstande in diesem Berührungspunkte A ab, und setzt weiterhin voraus, dass die Körper im übrigen frei beweglich sind, und dass auch keine äußeren Kräfte auf dieselben wirken (sodass also der Bewegungszustand der beiden Körper weder von der Reibung infolge der etwaigen Bewegung dieser Körper

längs einer rauhen Unterstütsungsfläche, noch von dem Luftwiderstande u. s. w. irgendwie beeinflusst wird), so stehen diese Körper M und M' bloß unter dem Einflusse ihrer Gegenwirkung, und diese gegenseitige Einwirkung derselben ist auf zwei entgegengesetzt gleiche normale Widerstandskräfte W und $W' = -W$ zurückzuführen, die im Berührungspunkte A senkrecht zu den beiden Berührungsflächen, also auch senkrecht zur gemeinsamen Berührungsebene E dieser Körper wirken, und zwar ist der Widerstand W' des Körpers M nach der äußeren Seite Ax desselben, somit nach der inneren des Körpers M' gerichtet und wirkt auf M' ein, während die Kraft W (d. i. der Widerstand des Körpers M') auf M in der früheren Richtung entgegengesetzten Richtung Ax einwirkt.

Ist nun die Bewegung eines der beiden Körper, etwa des Körpers M , vor dem Stoße eine fortschreitende, so wird dieselbe den Entwicklungen des § 88 zufolge nur in dem Falle auch nach erfolgtem Stoße eine fortschreitende Bewegung (wenn auch mit einer veränderten Geschwindigkeit) bleiben — und, falls die Bewegung aus einer fortschreitenden Bewegung und einer gleichzeitigen Rotation um den Schwerpunkt (siehe S. 364) zusammengesetzt ist, so wird diese rotierende Bewegung durch den Stoß dem vorletzten Paragraphen zufolge nur dann keine Änderung erfahren, wenn der Schwerpunkt S des Körpers M in der Richtungslinie Ax der infolge des Stoßes zur Wirkung gelangenden Kraft W gelegen ist; in diesem Falle bezeichnet man den Stoß für diesen Körper M als einen centralen Stoß, im gegentheiligen Falle als einen excentrischen Stoß.

Soll also der Stoß für beide Körper ein centraler sein, so muss in der Geraden SS' , welche die beiden Schwerpunkte S und S'

der Körper M und M' im Augenblicke des Stoßes verbindet, der gemeinsame Berührungspunkt A gelegen sein und überdies die Schwerlinie SS' auf der gemeinsamen Berührungsebene E senkrecht stehen.

Dies ist z. B. stets der Fall bei dem Stoße zweier homogener kugelförmiger Körper, da deren Schwerpunkte S und S' mit ihren Mittelpunkten übereinstimmen und die gemeinsame Centrale zweier sich berührender Kugeln bekanntlich stets den Berührungspunkt enthält und auf der gemeinsamen Berührungsebene senkrecht steht. (Deshalb werden auch in der Zeichnung meist Kugeln zur Kennzeichnung eines centralen Stoßes gewählt.)

Je nach der Bewegungsrichtung des Punktes A vor dem Stoße unterscheidet man den Stoß als einen geraden und schiefen Stoß. Ist nämlich die Bewegungsrichtung des Punktes A des Körpers M in dem Augenblicke, in welchem die beiden Körper in A zur Berührung kommen, normal zur gemeinsamen Berührungsebene E der beiden Körper, so bezeichnet man den Stoß als einen geraden Stoß für den Körper M ; ist jedoch die Bewegungsrichtung gegen die gemeinsame Berührungsebene geneigt, so heißt der Stoß ein schiefer.

Ebenso wie der Stoß für den einen der Körper M und M' ein centraler, für den anderen aber ein excentrischer sein kann, so kann auch der Fall eintreten, dass der Stoß für den einen Körper ein gerader, für den anderen ein schiefer ist.

a) Gerader centraler Stoß freibeweglicher Körper.

Am einfachsten gestalten sich die Verhältnisse, wenn der Stoß für beide freibewegliche Körper ein centraler und gerader ist, und dieser Fall soll zunächst erörtert werden.

Es sei demgemäß vorausgesetzt, dass die Massenmittelpunkte S und S' der beiden Körper M und M' (Fig. 188) sich vor dem Stoße längs der Geraden SS' mit den zufolge des Schwerpunktsatzes (da alle äußeren Kräfte fehlen) constant bleibenden Geschwindigkeiten v_o und v_o' bewegen. Die Bewegungsrichtung des Punktes S , also auch dessen Geschwindigkeit v_o sei als die positive Richtung der x -Achse eines orthogonalen Achsensystems angenommen. Jedenfalls muss, wenn es zum Stoße der Körper kommen soll, $v_o > v_o'$ sein, also v_o' entweder negativ oder Null, oder wenn positiv, so doch kleiner als v_o sein. (In den beiden letzteren Fällen bezeichnet man den Körper M' als den gestoßenen, M als den stoßenden Körper.)

Der Massenmittelpunkt σ des aus den Massen M und M' der beiden Körper bestehenden veränderlichen Punktsystems bewegt sich vor dem Stoße ebenfalls längs der x -Achse mit einer unveränderlichen Geschwindigkeit u , wie aus den Entwicklungen der §§ 56 und 57

sofort ersichtlich ist. Seine Geschwindigkeit u lässt sich aus der Gleichung (2) auf S. 332 leicht bestimmen; es ist nämlich, wenn sich x auf die einzelnen Massenpunkte m der Masse M , x' auf die Massenpunkte m' der Masse M' und ξ auf den Punkt σ bezieht, $\Sigma \left(m \frac{dx}{dt} \right) + \Sigma \left(m' \frac{dx'}{dt} \right) = (M + M') \frac{d\xi}{dt} = (M + M') \cdot u$ oder, weil zufolge desselben Satzes $\Sigma \left(m \frac{dx}{dt} \right) = M v_o$ und $\Sigma \left(m' \frac{dx'}{dt} \right) = M' v_o'$ ist, $(M + M') u = M v_o + M' v_o'$. Da die y - und z -Componenten der Geschwindigkeiten v_o und v_o' der Massenmittelpunkte S und S' Null sind, so muss auch die y - und die z -Componente der Geschwindigkeit u des Massenmittelpunktes σ Null bleiben.

In jenem Zeitmomente t_o , in welchem die ursprünglich von einander getrennten Körper im Punkte A eben zur Berührung kommen, gelangen die Kräfte W und $-W$ zur Wirksamkeit. Da diese Kräfte den Bewegungsrichtungen der entsprechenden Massenmittelpunkte S und S' entweder entgegengesetzt, oder mit ihnen gleichgerichtet sind, so muss die Bewegung dieser Punkte eine geradlinige bleiben, also sowohl während des Stoßes als auch nach dem Stoße dem Schwerpunktsgesetze (siehe S. 333) zufolge in der Geraden SS' vor sich gehen. Wenn nun auch durch den Einfluss dieser Kräfte die Geschwindigkeiten v_o und v_o' der Punkte S und S' eine Änderung erleiden, so kann doch die durch die letzte Gleichung bestimmte Geschwindigkeit u des Punktes σ durch den erfolgten Stoß keinesfalls abgeändert werden, da die während der Dauer des Stoßes wirkenden entgegengesetzt gleichen Kräfte W und $-W$ als innere Kräfte des aus den Massen M und M' bestehenden Systems anzusehen sind, somit (siehe S. 334) zufolge des Gesetzes der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung die Bewegung des Punktes σ in keiner Weise beeinflussen können. Bezeichnet man daher durch v_t und v_t' die Geschwindigkeiten der Punkte S und S' in einem beliebigen Zeitpunkte t während der Dauer des Stoßes, so muss (in Übereinstimmung mit der letzten Gleichung) $(M + M') u = M v_t + M' v_t'$, also stets

$$M v_t + M' v_t' = (M + M') u = M v_o + M' v_o' \dots (1)$$

sein. Zu derselben Relation würde auch die Erwägung führen, dass die auf den Körper M in der der Bewegung seines Massenmittelpunktes entgegengesetzten Richtung wirkende Kraft $-W$ die Geschwindigkeit v_o des letzteren in der Zeit $t - t_o$ derart verringern muss, dass zufolge der letzten Gleichung (4), S. 334 $\int_{t_o}^t -W dt = M(v_t - v_o)$ ist, während die auf den Massenmittelpunkt S' wirkend angenommene Kraft W die Geschwindigkeit v_o' desselben gleichzeitig derart ver-

größert, dass $\int_{t_0}^t W dt = M(v_i' - v_o')$ wird, so dass aus diesen beiden letzten Gleichungen in Übereinstimmung mit der Gleichung (1) gefolgert werden kann:

$$M(v_o - v_i) = M'(v_i' - v_o') \dots (2)$$

d. h. es sind die gleichzeitigen Geschwindigkeitsänderungen stets den Massen invers proportional.

Mit Hilfe dieser Gleichung (2) ist für einen beliebigen Zeitpunkt t irgend eine der beiden gleichzeitigen Geschwindigkeiten v_i und v_i' durch die andere bestimmbar.

So lange nun $v_i > v_i'$ ist, muss, da jeder der beiden Körper den Schwerpunkt des anderen hindert, mit der entsprechenden Geschwindigkeit v_i , bezw. v_i' sich zu bewegen, der gegenseitige Druck W und $-W$ der Körper gegeneinander andauern, und durch die Wirkung dieser Kräfte W und $-W$ muss die Geschwindigkeit v_i des Schwerpunktes S so lange vermindert und die Geschwindigkeit v_i' des Schwerpunktes S' so lange vergrößert werden, bis endlich in einem bestimmten Zeitmomente t_1 beide Geschwindigkeiten denselben Wert erlangen, der, wie aus (2) oder (1) ersehen werden kann, (wenn da selbst $v_i = v_i'$ gesetzt wird), und wie dies übrigens auch schon an und für sich klar ist, kein anderer sein kann als der Wert u der Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes σ des ganzen Systems, nämlich der aus (1), bezw. (2) sich ergebende Wert

$$u = \frac{Mv_o + M'v_o'}{M + M'} \dots (3)$$

Diese Gleichung drückt die zuerst von Wallis (siehe folgende Anm.) aufgestellte Regel aus.

Sind nun die beiden Körper M und M' absolut starr, so hört sofort, sobald beide Schwerpunkte S und S' dieselbe Geschwindigkeit u erlangt haben, die gegenseitige Einwirkung der Körper auf, da ja beide Schwerpunkte mit dieser Geschwindigkeit sich frei bewegen können, ohne dass der eine Körper den anderen an seiner Bewegung hindert, es bewegen sich demgemäß dann beide Schwerpunkte nach dem Stoße mit der aus (3) bestimmten Geschwindigkeit u in derselben Richtung, und zwar in der positiven oder in der negativen Richtung der x -Achse, je nachdem aus (3) sich ein positiver oder negativer Wert von u ergibt, weiter fort.

War die Bewegung der beiden Körper vor dem Stoße eine fortschreitende, so bleibt diese, da der Stoß ein centraler ist, auch während des Stoßes und nach dem Stoße eine fortschreitende.

War jedoch die fortschreitende Bewegung des einen Körpers oder beider Körper mit einer Rotation um den Schwerpunkt verbunden, so bewegt sich dieser Schwerpunkt, wenn keine Reibung an der Berührungsstelle A erfolgte, nach dem Stoße mit der Geschwindigkeit u , ohne dass (siehe S. 668) die lebendige Kraft der rotierenden Bewegung eine Änderung erlitten hat.

Stimmen die durch diese Rotation bedingten Geschwindigkeiten der sich berührenden Punkte A der beiden Körper nicht miteinander überein, so findet in A eine Reibung statt. Der Reibungswiderstand hat bei beiden Punkten A die der relativen Bewegungsrichtung entgegengesetzte Richtung. Die Größe des Reibungswiderstandes ist fW , wenn f den kinetischen Reibungskoeffizienten bedeutet. Durch diese Kraft erlangen die Schwerpunkte S und S' eine seitliche Geschwindigkeit u , und

u' in der Richtung des Reibungswiderstandes, und zwar ist offenbar $\int_{t_0}^t fW \cdot dt = Mu$, $\int_{t_0}^t fW \cdot dt = M'u'$, so dass, wenn man f als constant voraussetzt und die

früheren Gleichungen berücksichtigt, $Mu = f \cdot M(v_0 - v_1)$, $M'u' = fM'(v_1' - v_0')$, also nach dem Stoße $u = f(v_0 - v_1)$, $u' = f(v_1' - v_0')$ wird. Setzt man voraus, dass die Rotation um zueinander parallele, zu SS' senkrechte Centralhauptachsen der beiden Körper erfolgt, so ist zufolge des § 101 und der Gleichung (7) auf S. 559, wenn durch J und J' die Trägheitsmomente der Massen M und M' in Bezug auf diese Rotationsachsen (z -Achsen) und durch w und w' die Winkelgeschwindigkeiten bezeichnet werden, da für den Körper M offenbar $Mz = fW \cdot \overline{AS}$ und für den anderen

Körper $M'z' = fW' \cdot \overline{A'S'}$ ist, $\int_{t_0}^{t_1} fW \cdot \overline{AS} \cdot dt = J \cdot \Delta w$, also auch $f \cdot \overline{AS} \cdot M(v_1 - v_0) = J \cdot \Delta w$ und $\int_{t_0}^{t_1} fW' \cdot \overline{A'S'} \cdot dt = J' \cdot \Delta w'$, daher $f \cdot \overline{AS} \cdot M(u - v_0) = J \cdot \Delta w$, woraus sich die Änderungen Δw und $\Delta w'$ der Winkelgeschwindigkeiten bestimmen lassen.

Wirken auf die Körper M und M' während des Stoßes gewisse äußere Kräfte ein, so vereinigt sich streng genommen der Einfluss dieser Kräfte mit der betrachteten Wirkung des Stoßes, der jedoch erfahrungsmäßig meist eine so kurze Zeit währt, dass man von der Änderung des Bewegungszustandes durch diese äußeren Kräfte während dieser Zeit ganz absehen kann und daher auch in diesem Falle u als die Geschwindigkeit der Massencentra nach dem Stoße ansehen kann; nur bedeuten dann v_0 und v_0' die augenblicklichen Geschwindigkeiten, welche die Schwerpunkte S und S' unter dem Einflusse dieser äußeren Kräfte in jenem Momente t_0 erlangt haben, in welchem die Körper in A eben zur Berührung kommen.

Dass die durch (3) bestimmte Geschwindigkeit u zwischen den Werten v_0 und v_0' gelegen ist, so dass $v_0 > u > v_0'$ ist, ersieht man schon aus der Gleichung (3).

Sind die beiden Massen M und M' der auf einander stoßenden Körper gleich, so ist der Gleichung (3) zufolge $u = \frac{v_0 + v_0'}{2}$, d. h. die gemeinsame Geschwindigkeit u nach dem Stoße ist das arith-

netische Mittel aus den beiden Anfangsgeschwindigkeiten v_o und v_o' ; sind diese Anfangsgeschwindigkeiten außerdem entgegengesetzt gleich, also $v_o' = -v_o$, so ist $u = 0$, d. h. beide Körper kommen nach dem Stoße zur Ruhe.

Ist irgend eine der beiden Massen, z. B. M' , sehr groß im Verhältnisse zu der anderen Masse M , so dass $\frac{M}{M'}$ gegen 1 vernachlässigt und $\frac{M}{M'} v_o$ nahezu gleich Null gesetzt werden kann, so ist zufolge der Gleichung (3), die auch in der Form $u = \left(\frac{M}{M'} v_o + v_o'\right) : \left(\frac{M}{M'} + 1\right)$ geschrieben werden kann, $u = v_o'$, d. h. es bewegen sich beide Körper nach dem Stoße mit der Geschwindigkeit v_o' der großen Masse M' weiter fort, und der stoßende Körper M kommt demzufolge, wenn die große Masse M' , auf welche derselbe stößt, in Ruhe, also $v_o' = 0$ war, nach dem Stoße zur Ruhe.

Bei einem jeden Stoße starrer Körper findet ein Verlust an kinetischer Energie statt, denn subtrahiert man (absehend von der rotierenden Bewegung um S und S' , da deren lebendige Kraft keine Änderung erleidet) von der nach dem Stoße bestehenden kinetischen Energie $(M + M') \frac{u^2}{2}$, der translatorischen componentalen Bewegung, nach Einsetzung des Wertes von (3) die unmittelbar vor dem Stoße stattfindende Energie $\frac{M v_o^2}{2} + \frac{M' v_o'^2}{2}$ dieser translatorischen Bewegung, so findet man

$$\begin{aligned} (M + M') \frac{u^2}{2} - \left(\frac{M v_o^2}{2} + \frac{M' v_o'^2}{2} \right) &= - \frac{M M' (v_o - v_o')^2}{2 (M + M')} = \left. \begin{aligned} &= - \frac{1}{2} \cdot \frac{(v_o - v_o')^2}{M + M'} \end{aligned} \right\} (4) \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ergibt sich, wenn man Zähler und Nenner des vorletzten Ausdrucks durch $M M'$ dividiert und $M = \frac{1}{M}$, $M' = \frac{1}{M'}$ setzt, d. h. durch M und M' die reciproken Werte der Massen M und M' bezeichnet. Da nun dieser letzte Ausdruck in (4), weil sowohl M und M' , als auch das Quadrat von $v_o - v_o'$ notwendigerweise positiv sind, stets einen negativen Wert hat, so ist dadurch nachgewiesen, dass in der That durch den Stoß ein Verlust an lebendiger Kraft im Betrage von $\frac{M M' (v_o - v_o')^2}{2 (M + M')} = \frac{1}{2} \frac{(v_o - v_o')^2}{M + M'}$ stattgefunden hat. Man kann diesen Verlust auch nach Carnot in der Form $\frac{1}{2} M (v_o - u)^2 + \frac{1}{2} M' (u - v_o')^2$ darstellen.

Ist z. B. wie früher M' so groß, dass $\frac{M}{M'}$ gegen 1 vernachlässigt werden kann, so beträgt dieser Verlust an kinetischer Energie, wie

die Division des Zählers und Nenners durch M' , bzw. die Vernachlässigung von M sofort lehrt, $\frac{M}{2} (v_0 - v_0')^2$.

Sind die Körper M und M' , die aufeinander stoßen, nicht absolut starr, sondern deformierbar, werden dieselben jedoch als solche Körper vorausgesetzt, bei welchen jede durch die Kräfte W und $-W$ erzeugte Deformation eine bleibende (permanente) ist, so dass absolut kein Bestreben der Körpertheile vorhanden ist, in ihre ursprüngliche gegenseitige Lagerung zurückzukehren, kurz werden M und M' als vollkommen unelastisch vorausgesetzt, so muss in demselben Momente, in welchem alle Punkte der beiden Körper dieselbe Geschwindigkeit erlangt haben, (die auch hier keine andere sein kann als die unveränderliche, durch (3) bestimmte Geschwindigkeit u des Massenmittelpunktes des von M und M' gebildeten Massensystems), die gegenseitige Einwirkung der beiden Körper auf einander trotz der erlittenen Deformation aufhören, da kein materieller Punkt des Systems die Bewegung eines zweiten irgendwie hindert; es ist demnach auch in diesem Falle durch die Gleichung (2) die Geschwindigkeit nach dem Stoße bestimmt, und es sind demzufolge die zu dieser Gleichung früher geknüpften Erörterungen auch auf vollkommen unelastische Körper anwendbar.

Andere Werte v und v' erlangen aber die schließlichen Geschwindigkeiten der Körper M und M' nach dem Stoße, wenn diese als elastische Körper angenommen werden, so dass auch nach der zur Zeit t_2 (in welcher die Geschwindigkeiten der Massenmittelpunkte denselben Wert u erlangt haben) eingetretenen Deformation (Abplattung, Compression) der beiden Körper noch immer Kräfte W und $-W$, die mit den früheren Kräften offenbar gleichgerichtet sind, thätig sind, welche die abgeplatteten Körper M und M' entweder genau oder wenigstens annähernd in ihre ursprüngliche Gestalt zu überführen suchen, je nachdem die Körper als vollkommen elastische oder als unvollkommen elastische Körper angenommen werden. Es sei jener Zeitmoment, in welchem die Kräfte W und $-W$, nachdem M und M' ihre ursprüngliche Form genau oder annähernd erlangt haben, zu wirken aufhören, also der Stoß beendet ist, durch t_2 bezeichnet.

Es muss infolge der Einwirkung dieser Kräfte W und $-W$ offenbar die Geschwindigkeit v_2 des Schwerpunktes der Masse M , die in dem früher betrachteten Zeitintervall $t_2 - t_0$ von v_0 bis auf u , d. i. um $v_0 - u$ abgenommen hat, auch in dem darauf folgenden Zeitintervall $t_2 - t_2$ noch weiter von u bis zu einem gewissen Werte v , d. i. um $u - v$ abnehmen, während gleichzeitig die Geschwindigkeit v_2' des Schwerpunktes der zweiten Masse M' , die in der Zeit $t_2 - t_0$ um $u - v_0'$ zugenommen hat, in der folgenden Zeit $t_2 - t_2$ weiterhin um $v' - u$ zunimmt, wenn v' die schliessliche Geschwindigkeit des Massencentrum S' bedeutet.

Bezieht man, um die Untersuchung einfacher zu gestalten, die Bewegung der beiden Körper auf ein in fortschreitender Bewegung befindliches Achsensystem a , dessen Bewegung mit der gleichförmigen (mit der constanten Geschwindigkeit u vor sich gehenden) Bewegung des Massenmittelpunktes σ des aus M und M' gebildeten Massensystems übereinstimmt, so ist der Punkt σ in relativer Ruhe zu dem Achsensystem, während die relativen Geschwindigkeiten der Massenmittelpunkte S und S' der Massen M und M' zur beliebigen Zeit t offenbar die Werte $v_2 - u$ und $v_2' - u$, demgemäß in den oben betrachteten drei Zeitmomenten t_0 , t_2 und t_2 die in folgender Tabelle angeführten Werte haben:

Zeitmoment	M	M'
t_0	$v_0 - u > 0$	$v_0' - u < 0$
t_1	$u - u = 0$	$u - u = 0$
t_2	$v - u < 0$	$v' - u > 0$

Aus obiger Betrachtung ist zu ersehen, dass, wie dies auch in dieser Tabelle angemerkt ist, die relativen Geschwindigkeiten $v_0 - u$ und $v' - u$ positiv, dagegen $v_0' - u$ und $v - u$ negativ sind, d. h. dass sich bei dieser relativen Bewegung die Massenmittelpunkte S und S' der Massen M und M' in dem ersten Zeitintervalle $t_1 - t_0$, indem sich S in positiver, S' dagegen in negativer Richtung bewegt, gegeneinander nähern, wodurch eine Abplattung der beiden Körper bewirkt wird, bis sie am Ende dieses Zeitintervalls nach erlangter maximaler Deformation die relative Geschwindigkeit Null erlangen und sich hierauf im zweiten Zeitintervall $t_2 - t_1$ voneinander entfernen, indem sich während dieser Zeit S in negativer und S' in positiver Richtung bewegt.

Jedenfalls muss zufolge der Gleichung (2), welche für jeden Zeitmoment t , daher sowohl für $t = t_1$, d. i. für $v_t = v_t' = u$, als auch für $t = t_2$, d. i. für $v_t = v$ und $v_t' = v'$ Giltigkeit hat, $M(v_0 - u) = M'(u - v_0')$ und $M(v_0 - v) = M'(v' - v_0')$ sein. Dividiert man durch die erste dieser beiden Gleichungen die Differenz $M(u - v) = M'(v' - u)$ derselben Gleichungen, so findet man

$$\frac{u - v}{v_0 - u} = \frac{v' - u}{u - v_0'} = \varepsilon \dots (5)$$

d. h. das Verhältnis der Geschwindigkeitsänderung $u - v$, bezw. $v' - u$ im zweiten Zeitintervall $t_2 - t_1$ zur Geschwindigkeitsänderung $v_0 - u$, bezw. $u - v_0'$ im ersten Zeitintervall $t_1 - t_0$ hat für beide Körper denselben, und zwar, da $v_0 > u > v$ und $v_0' < u < v'$ ist, einen positiven Wert ε , mögen die aneinander stoßenden Körper welcher Art immer sein.

Setzt man die Summe $v' - v$ der Vorderglieder der beiden Verhältnisse (5) zur Summe $v_0 - v_0'$ der Nachglieder ins Verhältnis, welches letztere bekanntlich den Verhältnissen (5) gleich sein muss, so ersieht man, dass auch

$$v' - v = \varepsilon(v_0 - v_0') \dots (6)$$

ist, d. h. dass ε stets auch dem Verhältnisse der Geschwindigkeitsunterschiede $v' - v$ und $v_0 - v_0'$ der beiden Massenmittelpunkte S und S' vor und nach dem Stoße gleichkommt.

Da die fortschreitende Bewegung des Achsensystems a , deren constante Geschwindigkeit u ist, in einer geraden Linie vor sich geht, somit zu ihrer Erhaltung keine Kraft nothwendig ist, so müssen die relativen Kräfte in Bezug auf dieses Achsensystem a bei beiden Massen M und M' vollkommen identisch sein mit den Kräften W und $-W$, welche bei der früher untersuchten resultierenden Bewegung wirksam sind, sodass jedenfalls die bei dieser relativen Bewegung in dem Zeitintervall $t_1 - t_0$, bezw. $t_2 - t_1$ geleistete (negative) mechanische Arbeit A_1 , bezw. (positive Arbeit) A_2 der auf den Körper M wirkenden äußeren Kraft $-W$ einerseits und die (negative) Arbeit A_1' , bezw. (positive Arbeit) A_2' der in denselben Zeitintervallen auf den Körper M' gleichzeitig wirkenden äußeren Kraft $+W$ andererseits, da diese Kräfte (entsprechend der Voraussetzung eines geraden centralen Stoßes) stetig in der Geraden SS' wirken, durch

$$A_1 = \int_{t_0}^{t_1} -W \cdot ds_1, A_2 = \int_{t_1}^{t_2} -W \cdot ds_2, A_1' = \int_{t_0}^{t_1} W \cdot ds_1', A_2' = \int_{t_1}^{t_2} W \cdot ds_2'$$

ausgedrückt ist, wenn die positiven Differentiale ds_1 , bzw. die negativen Differentiale ds_1' die einzelnen in dem ersten Zeitintervalle $t - t_0$ und (die negativen) ds_2 , bzw. (die positiven) ds_2' die in dem zweiten Zeitintervalle $t_2 - t_1$ durchlaufenen relativen Wegelemente bedeuten. Dem Principe der lebendigen Kraft gemäß, (das zufolge der ersten Gleichung (4) auf S. 334 auf die Bewegung des Massenmittelpunktes in Anwendung gebracht werden kann, ohne dass man auf die durch die Deformationen der beiden Körper M und M' hervorgerufenen inneren Kräfte Rücksicht nehmen muss,) ist bei der in Betracht gezogenen relativen Bewegung, wenn die in der früheren Tabelle angeführten relativen Geschwindigkeiten und die Gleichung (5) berücksichtigt werden,

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_{t_0}^{t_1} -W \cdot ds_1 = \frac{M(u-u)^2}{2} - \frac{M(v_0-u)^2}{2} = -\frac{M(v_0-u)^2}{2} \\
 A_2 &= \int_{t_1}^{t_2} -W \cdot ds_2 = \frac{M(v-u)^2}{2} - \frac{M(u-u)^2}{2} = \frac{M(u-v)^2}{2} = \frac{M\epsilon^2(v_0-u)^2}{2} \\
 A_1' &= \int_{t_0}^{t_1} W \cdot ds_1' = \frac{M'(u-u)^2}{2} - \frac{M'(v_0'-u)^2}{2} = -\frac{M'(u-v_0')^2}{2} \\
 A_2' &= \int_{t_1}^{t_2} W \cdot ds_2' = \frac{M'(v'-u)^2}{2} - \frac{M'(u-u)^2}{2} = \frac{M'(v'-u)^2}{2} = \frac{M'\epsilon^2(u-v_0')^2}{2}
 \end{aligned}$$

Es ist daher, wenn man den Wert von u aus (3) einführt,

$$\left. \begin{aligned}
 A_1 + A_1' &= \int_{t_0}^{t_1} W d(s_1' - s_1) = -\frac{MM'(v_0 - v_0')^2}{2(M+M')} = -\frac{1}{2} \frac{(v_0 - v_0')^2}{M+M'} \\
 A_2 + A_2' &= \int_{t_1}^{t_2} W d(s_2' - s_2) = \epsilon^2 \frac{MM'(v_0 - v_0')^2}{2(M+M')} = \frac{1}{2} \epsilon^2 \frac{(v_0 - v_0')^2}{M+M'}
 \end{aligned} \right\} (7)$$

Dieselben Werte von $A_1 + A_1'$ und von $A_2 + A_2'$ ergeben sich auch — nebenbei bemerkt — für die Summen der mechanischen Arbeiten der Kräfte W und $-W$ bei der ursprünglich betrachteten Bewegung, die aus der eben betrachteten relativen Bewegung und aus einer mit der constanten Geschwindigkeit u vor sich gehenden fortschreitenden Bewegung resultiert, da ja bei der letzteren componentalen Bewegung, deren Geschwindigkeit u ist, die mechanischen Arbeiten von W und $-W$ offenbar entgegengesetzt gleich sind und sich daher bei der Summierung aufheben müssen. Es ist dies übrigens auch sofort aus der Anwendung des Princips der lebendigen Kraft auf diese resultierende Bewegung zu ersehen, das für das erste Zeitintervall offenbar zu dem Werte (4), der mit der vorletzten Gleichung übereinstimmt, und für das zweite Zeitintervall in ähnlicher Weise zu der letzten Gleichung führt.

Bezeichnet man den absoluten Zahlwert der variablen Entfernung der beiden Massenmittelpunkte S und S' im allgemeinen durch X , und zwar im ersten Zeitintervalle durch X_1 , im zweiten durch X_2 , so ist, mögen sich die Gleichungen (7) auf die relative Bewegung oder auf die resultierende Bewegung beziehen,

$$X_1 = s_1' - s_1, \quad X_2 = s_2' - s_2, \quad \text{also } A_1 + A_1' = \int_{t_0}^{t_1} W \cdot dX_1 \quad \text{und} \quad A_2 + A_2' = \int_{t_1}^{t_2} W \cdot dX_2$$

In diesen Gleichungen ist die Kraft W bloß von der jeweiligen Deformation der beiden Körper abhängig, also ist jedenfalls W als eine Function von X anzun-

sehen, deren Bestimmung Kenntnisse aus der Elasticitätstheorie voraussetzt, also hier nicht durchgeführt werden kann.

Da in der Zeit $t_1 - t_0$ eine Compression der Körper stattfindet, so müssen sich ihre Massenmittelpunkte stetig nähern, sodass X_1 stetig abnimmt, also dX_1 negativ ist, während in der Zeit $t_2 - t_1$ eine Ausdehnung der Körper vor sich geht, also X_2 stetig zunimmt, somit dX_2 einen positiven Wert hat.

Sind nun die beiden Körper vollkommen elastisch, so müssen die Körper nach dem Stoße in ihre ursprüngliche Gestalt vollständig zurückkehren, und es müssen demnach im ersten Zeitintervalle, d. i. während der Compression, die Massenmittelpunkte S und S' um genau dieselbe Strecke sich nähern, um welche sie sich im zweiten Zeitintervall voneinander entfernen, es müssen mit anderen Worten in der Zeit $t_2 - t_1$ dieselben Deformationen, dieselben Werte von X und daher auch dieselben Werte von W — nur in umgekehrter Reihenfolge — wiederkehren, die in dem Zeitintervalle $t_1 - t_0$ vorhanden waren. Es nimmt sonach W in der vorletzten Gleichung dieselben Werte — in umgekehrter Reihenfolge — an, wie in der letzten Gleichung, und es ist $dX_2 = -dX_1$, also auch $(A_2 + A_2') = -(A_1 + A_1')$, somit $A_1 + A_2 + A_1' + A_2' = 0$, d. h. die Gesamtsumme der mechanischen Arbeiten der Kräfte W und $-W$ während des Stoßes ist gleich Null zu setzen.

Es hat demnach den Gleichungen (7) zufolge bei vollkommen elastischen Körpern ϵ den Wert 1, und gemäß der Gleichung (5) ist dann $u - v = v_0 - u$ und $v' - u = u - v_0'$, d. h. es sind bei einem jeden der beiden Körper die Geschwindigkeitsänderungen des Massenmittelpunktes in den beiden Zeitintervallen $t_1 - t_0$ und $t_2 - t_1$, wenn die Körper vollkommen elastisch sind, an Größe gleich. (Aus den früheren Werten von $A_1 A_2 A_1' A_2'$ ersieht man, dass dann bei der relativen Bewegung auch $A_1 = -A_2$ und $A_1' = -A_2'$ ist.)

Sind jedoch die Körper M und M' unvollkommen elastisch, so treten nicht alle in der Zeit $t_1 - t_0$ auftretenden Deformationen, Schwerpunktsabstände X und Kräfte W in dem Zeitintervall $t_2 - t_1$ wieder auf, da die Körper nach ihrer Ausdehnung nicht wieder ihre frühere, vor der Abplattung bestandene Gestalt zurückerlangen, sodass jedenfalls $\int W dX_2$ kleiner ist als der absolute Wert des Integrals $\int W dX_1$, sonach auch $A_2 + A_2'$ kleiner, als der absolute Zahlwert von $A_1 + A_1'$.

Der von den Elasticitätsverhältnissen abhängige Zahlwert des Verhältnisses des vorletzten Integrals zum letzteren, welcher dementsprechend bei unvollkommen elastischen Körpern zwischen 0 und 1 gelegen ist, ist, wie die Division der beiden Gleichungen (7) lehrt, ϵ^2 . Es ist demnach auch die mitunter als Coëfficient der Stoßelasticität bezeichnete positive Quadratwurzel ϵ dieses Verhältnisses, welche zufolge (5) für beide Körper das Verhältnis der Geschwindigkeitsänderung in dem zweiten Zeitintervall $t_2 - t_1$ zu jener im ersten Zeitintervalle $t_1 - t_0$ ausdrückt, bei unvollkommen elastischen Körpern stets zwischen 0 und 1 gelegen.

Bei vollkommen unelastischen Körpern ist, da bei denselben vorauszusetzen ist, dass die Elasticitätsgrenze bei der Compression so weit überschritten wird, dass eine bleibende Deformation (Abplattung) eintritt, also nach der Zeit t_1 keine weitere Änderung der Entfernung X der Massenmittelpunkte vor sich geht, $dX_2 = d(s_2' - s_2) = 0$, also der zweiten Gleichung (7) zufolge $\epsilon = 0$, was schon übrigens daraus hervorgeht, dass, wie dies früher gezeigt wurde, die schließlichen Geschwindigkeiten v und v' den Wert u erlangen, also zufolge (5) $\epsilon = 0$ ist.

Kurz die Gleichung (5) umfasst alle hier in Betracht kommenden Fälle, nur hat, je nachdem der Körper vollkommen elastisch oder vollkommen unelastisch oder unvollkommen elastisch ist, die Verhältniszahl ϵ (der Coefficient der Stoßelastizität) den Wert 1 oder Null oder einen zwischen Null und 1 gelegenen, von den Elastizitätsverhältnissen abhängigen (daher hier nicht näher berechenbaren) Wert. Je weniger elastisch der Körper ist, desto weniger unterscheidet sich ϵ von Null, je elastischer derselbe ist, desto weniger von 1.

Für vollkommen elastische Körper führt die früher erwähnte Gleichsetzung der Geschwindigkeitsänderungen in den beiden Zeitintervallen oder die Einsetzung des Wertes $\epsilon = 1$ in (5) zu folgenden Werten für die Endgeschwindigkeiten v und v'

$$\left. \begin{aligned} v &= 2u - v_0 \\ v' &= 2u - v_0' \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

Die Einführung des Wertes (3) ergibt demnach $v = \frac{2M'v_0' + (M - M')v_0}{M + M'}$ und $v' = \frac{2Mv_0 + (M' - M)v_0'}{M + M'}$.

Allgemein ist für alle Körper zufolge (5) $u - v = \epsilon(v_0 - u)$ oder, wenn man beiderseits $v_0 - u$ addiert, $v_0 - v = (1 + \epsilon)(v_0 - u)$, und in gleicher Weise auch $v' - v_0' = (1 + \epsilon)(u - v_0')$, daher ist, wenn man für u den Wert aus (3) substituiert und Zähler und Nenner durch MM' dividiert und abermals durch M und M' die reciproken Werte der Massen M und M' der Körper bezeichnet,

$$\left. \begin{aligned} v_0 - v &= (1 + \epsilon)(v_0 - v_0') \cdot \frac{M}{M + M'} \\ v' - v_0' &= (1 + \epsilon)(v_0 - v_0') \cdot \frac{M'}{M + M'} \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

Die Gleichungen (9) gestatten die durch den geraden centralen Stoß zweier beliebiger Massen M und M' erzeugte Geschwindigkeitsänderung $v_0 - v$ bzw. $v' - v_0'$ daher auch die Endgeschwindigkeiten v und v' auf einfachste Weise zu berechnen.

Ist bei vollkommen elastischen Körpern $M = M'$, so ist zufolge (3) $u = \frac{v_0 + v_0'}{2}$, also gemäß (8) $v = (v_0 + v_0') - v_0 = v_0'$ und $v' = (v_0 + v_0') - v_0' = v_0$, d. h. die Massenmittelpunkte tauschen infolge des Stoßes ihre ursprünglichen Geschwindigkeiten v_0 und v_0' gegeneinander aus, sodass sich, falls die Bewegung eine fortschreitende ist, nach dem Stoße die Masse M mit der ursprünglichen Geschwindigkeit v_0' der Masse M' und die Masse M' mit der anfänglichen Geschwindigkeit v_0 der Masse M bewegt. Ist z. B. die eine Masse in Ruhe gewesen, so übernimmt dieselbe die Geschwindigkeit der stoßenden Masse, während die letztere zur Ruhe kommt.

Ist die eine der vollkommen elastischen Massen, z. B. M' , so groß gegen M , dass $\frac{M}{M'}$ vernachlässigt werden kann, so ist zufolge der Gleichung (3), wie dies schon früher gezeigt wurde, $u = v_0'$, daher gemäß (8) $v = 2v_0' - v_0$ und $v' = 2v_0' - v_0' = v_0'$. War die große Masse M' überdies vor dem Stoße in Ruhe, ist also $v_0' = 0$, so ist $v = -v_0$ und $v' = 0$, d. h. der Schwerpunkt der stoßenden Masse bewegt sich im Falle eines geraden centralen Stoßes nach dem Stoße in gerade entgegengesetzter Richtung mit seiner ursprünglichen Geschwindigkeit, sodass durch den Stoß nur die Richtung der Geschwindigkeit in die entgegengesetzte verwandelt worden ist.

Bei dem Stoße vollkommen elastischer Körper findet keine Änderung der kinetischen Energie statt, wie dies schon daraus hervorgeht, dass, wie früher gezeigt wurde, die Gesamtsumme der mechanischen Arbeiten der Kräfte W und $-W$ während des Stoßes, d. i. $A_1 + A_2 + A_1' + A_2'$ Null ist; übrigens ersieht man dies auch daraus, dass die Differenz der kinetischen Energie $\left(\frac{Mv^2}{2} + \frac{M'v'^2}{2}\right)$ nach dem Stoße und jener vor dem Stoße $\left(\frac{Mv_0^2}{2} + \frac{M'v_0'^2}{2}\right)$ wie die Substitution der Werte aus (8) und (3) sofort lehrt, den Wert Null hat.

Bei unvollkommen elastischen Körpern findet aber, wie die Einführung der Werte von v und v' aus (9) in die letzterwähnte Differenz sofort lehrt, ein Verlust an kinetischer Energie durch den Stoß statt, was auch schon daraus folgt, dass, da $\varepsilon < 1$ ist, zufolge (7) $A_1 + A_1' + A_2 + A_2'$ notwendigerweise einen negativen Wert haben muss. Führt man die oben angedeutete Rechnung aus, oder aber bildet man die letzterwähnte Summe mit Hilfe von (7), so findet man für den Verlust dieser kinetischen Energie den Wert:

$$\frac{1 - \varepsilon^2}{2} \cdot \frac{MM' (v_0 - v_0')^2}{M + M'} = \frac{1 - \varepsilon^2}{2} \cdot \frac{(v_0 - v_0')^2}{M + M'}.$$

Anmerkung. Die ersten Untersuchungen über die Gesetze des Stoßes finden sich in dem die „Kraft des Stoßes“ (forza della percossa) behandelnden sechsten Gespräche der „discorsi e dimostrazioni etc.“ (Leyden 1638) von Galilei, ferner in einer Schrift eines Zeitgenossen Galilei's, des Prager Professors Marcus Marci (geb. 1595, gest. 1667) „de proportione motus“ (Prag 1639)* und in den „Principia philosophiae“ (Amsterdam 1644)** von Descartes. Doch enthalten diese Untersuchungen neben Wahrem auch viele Irrthümer. Zu den richtigen und vollständigeren Gesetzen des Stoßes gelangten unabhängig voneinander zu gleicher Zeit drei bedeutende Gelehrte, nämlich der Mathematiker John Wallis (geb. 1616, gest. 1703), der berühmte Baumeister Christoph Wren (geb. 1632, gest. 1723) und der schon oft genannte Christian Huyghens infolge einer im Jahre 1668 gegebenen Anregung der königl. Gesellschaft (Royal Society) zu London, und zwar legte Wallis seine blos den Stoß vollkommen unelastischer Körper behandelnde Arbeit am 26. November 1668, Wren am 17. December 1668, Huyghens am 4. Januar 1669 vor. Die beiden letzteren behandelten nur den Stoß elastischer Körper. Ausführlicher sind die Gesetze des Stoßes auseinandergesetzt in ihren später herausgegebenen Schriften „Wallis Mechanica sive de motu, London 1671“ und Huyghens „de motu corporum ex percussione“ (nach Huyghens' Tode im Jahre 1703 erschienen). Wallis zog auch zuerst den von ihm als Mittelpunkt des Stoßes (centrum percussiois maximae) bezeichneten Punkt (siehe S. 576) in Betracht.

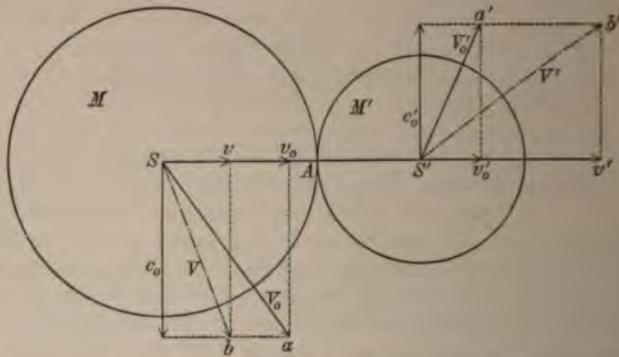
b) Schiefer centraler Stoß freibeweglicher Körper.

Bisher wurde vorausgesetzt, dass der Stoß der beiden Massen M und M' ein gerader und centraler sei. Ist nun der Stoß ein centraler schiefer Stoß, so kann man denselben leicht auf Grund der für den geraden Stoß abgeleiteten Gesetze der Behandlung unterziehen.

Sind nämlich V_0 und V_0' (Fig. 188) die ursprünglichen Geschwindigkeiten der Massenmittelpunkte S und S' der beiden Massen M und M' vor dem Stoße (d. i. zur Zeit t_0) und Sa , bezw. $S'a'$ die Geschwindigkeitsrichtungen derselben, so hat man nur jede dieser

beiden Geschwindigkeiten V_o , bzw. V_o' in bekannter Weise (etwa mittelst des Geschwindigkeitsrechtecks) zu zerlegen in eine zur Berührungsebene des Punktes A normale Componente v_o , bzw. v_o' , deren Richtung in die Gerade SAS' fällt, und eine zweite zur Berührungsebene parallele Componente c_o , bzw. c_o' . Nimmt man etwa die Richtung jener normalen Componente v_o , für welche $v_o > v_o'$ ist, zur positiven Richtung der x -Achse an, so ist $v_o = V_o \cos(xV_o)$, $c_o = V_o \sin(xV_o)$, $v_o' = V_o' \cos(xV_o')$, $c_o' = V_o' \sin(xV_o')$. Die Geschwindigkeitscomponenten v_o und v_o' veranlassen, da $v_o > v_o'$ ist, einen geraden Stoß, für welchen die Gleichungen (1) bis (9) Gültigkeit haben, während die zur gemeinsamen Berührungsebene der beiden Körper parallelen Componenten c_o und c_o' wofern von jeder Reibung abgesehen wird, keine Änderung erfahren können, da sich beide Körper nach diesen Richtungen frei bewegen können. Es

Fig. 188.



haben mit anderen Worten, die in der x -Achse wie früher wirkenden Kräfte W und $-W$ bloß Einfluss auf die componentalen Bewegungen längs der x -Achse, während die Bewegungen längs der zur x -Achse orthogonalen Richtungen dadurch in keiner Weise beeinflusst werden. Sind dementsprechend v und v' die mit Hilfe der bisherigen Gleichungen (1) bis (9) bestimmbaren Endwerte, in welche die ursprünglichen Geschwindigkeiten v_o und v_o' durch den in der Richtung SAS' erfolgenden Stoß abgeändert werden, so hat man nur diese Geschwindigkeiten v und v' mit den ungeändert gebliebenen Geschwindigkeiten c_o und c_o' zusammensetzen (siehe Fig. 188), und zwar v mit c_o zusammensetzen zu der Geschwindigkeit $V = \sqrt{v^2 + c_o^2}$ des Körpers M , deren Richtung Sb ist und v' zusammensetzen mit der Geschwindigkeit c_o' zur resultierenden Geschwindigkeit $V' = \sqrt{v'^2 + c_o'^2}$ des Körpers M' , deren Richtung $S'b'$ ist. V und V' sind die Endgeschwindigkeiten der beiden Massenmittelpunkte S und S' nach dem Stoße.

Sind z. B. beide Körper absolut starr oder vollkommen unelastisch, so ist bekanntlich $v = v' = u$, also zufolge (3) $v = v' = u = \frac{Mv_o + M'v_o'}{M + M'} = \frac{MV_o \cos(xV_o) + M'V_o' \cos(xV_o')}{M + M'}$ zu setzen.

Ist der eine der beiden vollkommen unelastischen Körper in Ruhe, also $V_o' = 0 = v_o'$ und ist dessen Masse M' so groß, dass $\frac{M}{M'}$ vernachlässigt werden kann, so ist bekanntlich $v = u = 0$, also $V = c_o$, d. h. es bewegt sich der Schwerpunkt der stoßenden Masse nach dem Stoße parallel zur Berührungsebene der beiden Körper mit der Geschwindigkeit $c_o = V_o \sin(xV_o)$ weiter fort. Dies ist z. B. der Fall bei dem schiefen Stoße eines unelastischen Körpers gegen eine unelastische ebene Wand.

Wird jedoch beim schiefen Stoße die Reibung berücksichtigt, die bekanntlich stets dann eintritt, wenn die zur Berührungsebene parallelen Componenten (c_o und c_o') der Geschwindigkeiten jener Punkte der beiden Körper, die in A zur Berührung kommen, nicht in Größe und Richtung mit einander übereinstimmen, so werden selbst in dem Falle, wenn die Bewegungen der beiden Körper vor dem Stoße fortschreitende waren, durch den Einfluss des Reibungswiderstandes fW (wo f den kinetischen Reibungscoefficienten bedeutet) die zur Berührungsebene parallelen Componenten c_o und c_o' der Schwerpunkte S und S' abgeändert, und zwar bekanntlich derart, als würde diese Kraft fW direct auf die betreffenden Schwerpunkte einwirken. Wählt man dementsprechend die Richtung der zur Berührungsebene parallelen Componente der relativen Bewegung des Berührungspunktes A des Körpers M , deren anfängliche Geschwindigkeit aus c_o und ($-c_o'$) resultiert, zur positiven y -Richtung eines orthogonalen Achsensystems, dessen x -Achse wie früher die Richtung der normalen anfänglichen Geschwindigkeitscomponente $v_o - v_o'$ dieser relativen Bewegung hat, und bezeichnet man die y - und die z -Componenten von c_o , bezw. c_o' durch Y_o und Z_o , bezw. Y_o' und Z_o' , so wird Z_o und $Z_o' = Z_o$ durch den zur y -Achse parallelen Reibungswiderstand nicht abgeändert, während Y_o und Y_o' solche Schlusswerte Y und Y' erlangen, für welche zufolge des Gesetzes vom Kraftantriebe und zufolge früherer Gleichungen

$$M(Y - Y_o) = - \int fW dt = - f \int W dt = fM(v - v_o)$$

$$M'(Y' - Y_o') = \int fW dt = f \int W dt = fM'(v' - v_o')$$

also $Y = Y_o - f(v_o - v)$, $Y' = Y_o' + f(v' - v_o')$ ist, wo für v und v' die Werte aus den früheren Gleichungen einzusetzen sind. Die Schluss-

geschwindigkeit V des Schwerpunktes S resultiert dann aus den in den xyz -Achsen parallelen Componenten v , Y und Z_o , während V die Resultante von v' , Y' und $Z_o' = Z_o$ ist.

Die Abänderung der Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Bewegung um eine Schwerpunktsachse lässt sich, wenn diese Achse eine Centralhauptachse ist, in ähnlicher Art bestimmen, wie dies auf S. 674 geschehen ist.

Bei dem schiefen (centralen) Stoß eines vollkommen elastischen mit der Geschwindigkeit V_o gegen eine ruhende Wand stoßenden Körpers M ist (siehe S. 680) $v = -v_o$ zu setzen. Diese Geschwindigkeit $v = -v_o = -V_o \cos(xV_o)$ (wo die x -Richtung die Richtung der zur ebenen Wand senkrechten Componente von V_o , mit anderen Worten die Richtung von v_o ist) setzt sich nun, wenn keine Reibung stattfindet, mit der durch den Stoß nicht abgeänderten, zur Wand parallelen Componente $c_o = V_o \sin(xV_o)$ zu einer resultierenden Geschwindigkeit $V = \sqrt{v^2 + c_o^2} = \sqrt{v_o^2 + c_o^2} = V_o$ zusammen, die der ursprünglichen Geschwindigkeit an Größe gleich ist, deren Richtung ferner, da V und V_o dieselbe Componente c_o haben, während die anderen Componenten v und v_o entgegengesetzt gleich sind, in der Ebene von V_o und v_o , d. h. in der die Geschwindigkeitsrichtung V enthaltenden, zur ebenen Wand normalen Ebene (der Einfallsebene) gelegen ist; die Bahnelemente des Schwerpunktes unmittelbar vor und nach dem Stoße liegen ferner, wie aus einer äußerst einfachen Construction der entsprechenden Geschwindigkeitsrechtecke zu ersehen sind, zu beiden Seiten des Einfallslotthes und schließen mit demselben gleiche Winkel (den Einfallswinkel und den Reflexionswinkel) ein. Infolge des Einflusses der Reibung, die stets stattfindet, wenn nicht etwa die zur ebenen Wand parallele Geschwindigkeitscomponente infolge einer allfälligen gleichzeitigen Rotation um eine Schwerachse Null ist, muss jedoch eine Änderung der Geschwindigkeitscomponente c_o (daher auch eine Änderung des Reflexionswinkels) erfolgen.

c) Excentrischer Stoß freibeweglicher Körper.

Ist der Stoß für einen Körper M ein excentrischer, so bringt in einem jeden Falle, selbst wenn man von der Reibung absieht, die an der Berührungsstelle A (Fig. 189) thätige Kraft ($-W$), da in ihrer Wirkungslinie, die zur gemeinsamen Berührungsebene mn der beiden Körper im Punkte A normal ist, der Schwerpunkt S des Körpers M nicht gelegen ist, nicht nur eine Änderung des Bewegungszustandes dieses Schwerpunktes S , sondern zufolge der Entwicklungen des § 101 stets auch eine Änderung der zweiten componentalen Bewegung, nämlich der Rotation des Körpers um den Schwerpunkt hervor, oder die Kraft ($-W$) veranlasst, wenn die

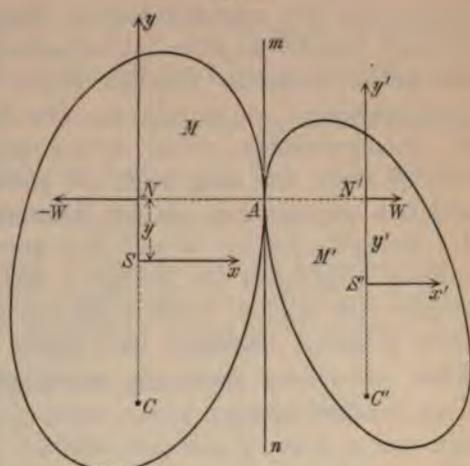
letztere componentale Bewegung vor dem Stoße nicht vorhanden war, wenn mit anderen Worten der Körper M vor dem Stoße in fortschreitender Bewegung begriffen war, eine Drehung des Körpers M um den Schwerpunkt S . Und zwar lässt sich die Änderung des Bewegungszustandes des Schwerpunktes S dieses Körpers einfach mittels des bekannten Schwerpunktsgesetzes genau so bestimmen, als würde auf die im Punkte S vereinigt gedachte Masse M des Körpers unmittelbar die Kraft $(-W)$ einwirken, also mit Hilfe der aus der Dynamik des materiellen Punktes bekannten Gleichungen, während dagegen die Änderung der Rotationsbewegung um den Schwerpunkt, d. i. der relativen Bewegung in Bezug auf ein fortschreitendes Achsensystem α ,

dessen Bewegung durch jene des Schwerpunktes S bestimmt ist (s. S. 655 und 656) ebenso zu bestimmen ist, wie wenn der Schwerpunkt in Ruhe sich befinden und der anfängliche Bewegungszustand mit dem Anfangszustand der besagten relativen Bewegung übereinstimmen, aber außer der in A thätigen Kraft $(-W)$ noch eine im Schwerpunkte S angreifende entgegengesetzt gleiche Kraft W wirken würde. Dieses letztere Kräftepaar $(W, -W)$

wird im allgemeinen nicht nur eine Änderung der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit der Rotationsbewegung, sondern auch eine Änderung der Lage der augenblicklichen Rotationsachse, die eine Schwerpunktsachse ist, sowohl in Bezug auf das Achsensystem α , als auch in Bezug auf den Körper M bewirken. Ist der Stoß auch für den Körper M' ein excentrischer, so wird durch die im Punkte A thätige, auf M' einwirkende, der früheren Kraft $(-W)$ entgegengesetzt gleiche Kraft W in gleicher Weise eine Änderung der Bewegung des Schwerpunktes S' und der Rotation des Körpers M' um diesen Schwerpunkt S' erzeugt werden.

Während nun die allgemeine Untersuchung der Änderung dieser rotierenden Bewegung einige Schwierigkeiten bietet, gestaltet sich dieselbe in dem Falle verhältnismäßig einfach, wenn die augenblickliche Drehungsachse des Körpers M (bezw. M') durch den Stoß keine Änderung ihrer relativen Lage in Bezug auf das Achsensystem α und auf

Fig. 189.



den Körper M (bezw. M') erfährt, wenn also durch das oberwähnte Kräftepaar $(W, -W)$ keine Einwirkung auf die den Schwerpunkt enthaltende Rotationsachse erfolgt. Dies ist zufolge § 101 besonders dann der Fall, wenn die augenblicklichen Rotationsachsen (z und z') bei beiden Körpern Hauptcentralachsen sind und jedes der beiden Kräftepaare $(W, -W)$, deren Kräfte die Punkte A und S (bezw. A und S') zu Angriffspunkten haben, in einer zu der entsprechenden Rotationsachse senkrechten Ebene wirkt, und dieser einfache Fall soll hier (ohne Berücksichtigung der Reibung) behandelt werden.

Es sei zu diesem Zwecke angenommen, dass die gemeinsame Berührungsebene mn (Fig. 189) der beiden Körper M und M' sowohl parallel ist zu jener Hauptcentralachse z des Körpers M um welche dieser im Augenblicke des Zusammenstoßes (d. i. zur Zeit t_0) mit der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit ω_0 rotiert, als auch parallel zu jener Schwerpunkthauptachse z' des Körpers M' , um welche eben die Rotation dieses Körpers M' mit der Winkelgeschwindigkeit ω'_0 stattfindet. Die Schwerpunkte S und S' seien zu Anfangspunkten zweier orthogonalen Achsensysteme xyz und $x'y'z'$ gewählt, und zwar seien die positiven Richtungen x und x' als identisch angenommen mit der Richtung jener Kraft W , mit welcher der stoßende Körper M auf den gestoßenen Körper M' wirkt; als positive Richtungen der Achsen z und z' seien die positiven Richtungen der beiden Rotationsachsen gewählt und die Achsen y , bezw. y' derart bestimmt, dass durch eine im Sinne der tatsächlichen rotierenden Bewegung erfolgende Drehung um 90° die positiven Achsenrichtungen von x , bezw. x' in die positiven Achsenrichtungen von y , bezw. y' gelangen würden. Die Ebenen (xy) und $(x'y')$ schneiden sich in der gemeinsamen Normalen $NA N'$ (der Richtungslinie von W).

Im Augenblicke des Zusammenstoßes, d. i. zur Zeit t_0 , sei in Übereinstimmung mit $a)$ und $b)$ die x -Komponente der Geschwindigkeit des Berührungspunktes A des Körpers M durch v_0 und jene des Berührungspunktes A des Körpers M' durch v'_0 bezeichnet. Den obigen Voraussetzungen zufolge ist v_0 positiv und zudem $v_0 > v'_0$. (Sind diese Geschwindigkeitskomponenten entgegengesetzt gerichtet, so ist es gleichgültig, welchen der beiden Körper man als den stoßenden Körper M bezeichnet.) Durch die Einwirkung der Kräfte W und $(-W)$ verringert sich v_0 und vergrößert sich v'_0 , bis beide Geschwindigkeitskomponenten der Punkte A in einem gewissen Zeitmomente t_1 denselben Wert u erlangt haben. In diesem Zeitmomente t_1 hört, wenn die beiden Körper als vollkommen unelastisch (bezw. als absolut starr) angenommen werden, die gegenseitige Einwirkung derselben auf einander auf.

Die Winkelgeschwindigkeiten der Rotation des Körpers M zur Zeit t_0 und t_1 seien durch w_0 und w_1 , jene des Körpers M' durch w_0' und w_1' , und die für die als ungemein kurz angenommene Dauer des Stoßes als constant anzusehenden Coordinaten des Punktes A durch xyz , bezw. $x'y'z'$, ferner die Geschwindigkeitscomponenten des Schwerpunktes S zur Zeit t_0 parallel zu x und zu y durch V_0 und C_0 , zur Zeit t_1 durch V_1 und C_1 , jene des Schwerpunktes S' parallel zu x' und zu y' durch V_0' und C_0' , bezw. V_1' und C_1' bezeichnet; entsprechend seien auch die zu y parallelen Geschwindigkeitscomponenten des Punktes A des Körpers M durch c_0 und c_1 , jene des Punktes A des Körpers M' parallel zu y' durch c_0' und c_1' bezeichnet.

Bedeutet φ den Richtungswinkel des zur z -Achse normalen Radius $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ des Punktes A des Körpers M bezüglich der x -Achse, so ist (siehe S. 549) $\cos \varphi = \frac{x}{r}$, $\sin \varphi = \frac{y}{r}$ und, da $\varphi + \frac{\pi}{2}$ der Richtungswinkel der Bewegungsrichtung dieses Punktes ist, so muss die x -Componente der Geschwindigkeit rw dieses Punktes infolge der Rotation allein durch $rw \cdot \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) = -rw \cdot \sin \varphi = -yw$ und die y -Componente derselben durch $rw \cdot \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) = rw \cdot \cos \varphi = xw$ bestimmt sein, so dass die aus der fortschreitenden und aus der rotierenden Bewegung resultierende Geschwindigkeit dieses Punktes zur Zeit t_0 , bezw. t_1 , parallel zu x und y die Componenten

$$\left. \begin{array}{l} v_0 = V_0 - yw_0 \\ c_0 = C_0 + xw_0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} u = V_1 - yw_1 \\ c_1 = C_1 + xw_1 \end{array} \right\} \quad (10)$$

und ebenso die Geschwindigkeit des Punktes A des Körpers M' folgende zu x' und zu y' parallele Componenten besitzt

$$\left. \begin{array}{l} v_0' = V_0' - y'w_0' \\ c_0' = C_0' + x'w_0' \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} u = V_1' - y'w_1' \\ c_1' = C_1' + x'w_1' \end{array} \right\} \quad (11)$$

Zufolge des Schwerpunktsatzes muss die zur x -Achse parallele Kraft ($-W$) die Schwerpunktschwindigkeit des Körpers M derart abändern, dass $\int_{t_0}^{t_1} -W \cdot dt = M(V_1 - V_0)$ wird, während die y - und die z -Componente der Schwerpunktschwindigkeit keine Änderung durch die Kraft $-W$ erfahren kann, also auch $C_0 = C_1$ und ebenso aus gleichen Gründen $C_0' = C_1'$ ist. Bezeichnet man daher durch Π das Integral $\Pi = \int_{t_0}^{t_1} W dt$, d. h. den Antrieb der Kraft W in dem Zeitintervall $t_1 - t_0$ und durch M den reciproken Wert der Masse M ,

so ist $\Pi = \frac{V_0 - V_1}{M}$. Das oberwähnte auf den Körper M einwirkende Kräftepaar $(W, -W)$ hat bezüglich der z -Achse (der bekannten Formel $M_z = xY - yX$ zufolge) das Moment $M_z = -y \cdot -W = yW$. Es ist demnach zufolge der Gleichung (7) auf S. 559, wenn J_z das Trägheitsmoment des Körpers M bezüglich der z -Achse bedeutet,

$\int_{t_0}^{t_1} M_z dt = y \int_{t_0}^{t_1} W dt = y\Pi = J_z(w_1 - w_0)$. Bezeichnet man demgemäß den reciproken Wert von $(J_z : y^2)$, d. i. den reciproken Wert der auf einen im Abstände y von der z -Achse befindlichen Punkt N reducierten Masse durch μ , so dass $\mu = y^2 : J_z$ also $J_z = \frac{y^2}{\mu}$ ist, so hat

Π zufolge der letzten Gleichung den Wert $\Pi = \frac{y(w_1 - w_0)}{\mu}$. Fasst man das Gesagte zusammen, so gelangt man zu der Gleichung

$$\Pi = \int_{t_0}^{t_1} W dt = \frac{V_0 - V_1}{M} = \frac{y(w_1 - w_0)}{\mu} = \frac{v_0 - u}{M + \mu} \quad (12)$$

Das letzte Glied dieser Gleichung erhält man, wenn man bei Beachtung der Gleichung (10) die Summe der Vorderglieder der beiden vorhergehenden Verhältnisse in (12) zur Summe der Nachglieder ins Verhältnis setzt, wodurch man bekanntlich zu einem gleichen Verhältnisse gelangt.

Auf analoge Weise ergibt sich, wenn man die gleichzeitige Einwirkung der Kraft W auf den Körper M' in Rechnung zieht,

$$\Pi = \int_{t_0}^{t_1} W dt = \frac{V_1' - V_0'}{M'} = \frac{(w_0' - w_1') y'}{\mu'} = \frac{u - v_0'}{M' + \mu'} \quad (13)$$

wobei abermals M' die reciproke Masse des Körpers M' und μ' den reciproken Wert der auf denjenigen Punkt N' der y' -Achse, der sich im Abstände y' von der z' -Achse befindet, reducierten Masse bedeutet, kurz wofern $M' = \frac{1}{M'}$ und $\mu' = \frac{y'^2}{J_z'}$ ist, wenn durch J_z' das Trägheitsmoment des Körpers M' bezüglich der z' -Achse bezeichnet wird.

Addiert man die aus (12) und (13) sich ergebenden Gleichungen $v_0 - u = (M + \mu) \Pi$ und $u - v_0' = (M' + \mu') \Pi$, so findet man $v_0 - v_0' = (M + M' + \mu + \mu') \Pi$, also

$$\Pi = \frac{v_0 - v_0'}{M + M' + \mu + \mu'} \quad (14)$$

Setzt man diesen durch gegebene Größen ausgedrückten Wert in die Gleichungen (12) und (13) für Π ein, so kann man aus diesen Gleichungen leicht die unbekanntenen Geschwindigkeiten der voll-

zwei unelastischen Körper nach dem Stoße, nämlich $u w_1 V_1 w_1' V_1'$ hierauf aus (10) und (11) c_1 und c_1' leicht bestimmen.

Die miteinander übereinstimmenden z -Componenten der Geschwindigkeiten der Punkte S und A des Körpers M und die gleichfalls übereinstimmenden z' -Componenten der Geschwindigkeiten der Punkte S' und A' des Körpers M' werden durch den Stoß nicht geändert.

Ist die Bewegung des einen Körpers, z. B. M , vor dem Stoße eine einfache fortschreitende, so verschwindet in den Formeln (10) bis (14) die entsprechende Winkelgeschwindigkeit; es ist also $w_0 = 0$ zu setzen, so dass auch in (10) $v_0 = V_0$, $c_0 = C_0$ wird.

Ist zudem der Stoß für diesen in fortschreitender Bewegung befindlichen Körper ein centraler, so ist $y = 0$ zu setzen, wodurch auch $\mu = y^2 J_s = 0$ und zufolge der Gleichung $(w_1 - w_0) = yH$ auch $w_1 - w_0 = 0$, also $w_1 = 0$ wird, d. h. es wird in diesem Falle der Körper M nicht durch den Stoß in Rotation versetzt. In diesem Falle ist auch zufolge (10) $V_1 = u$.

Setzt man $y = y' = 0$, so erhält man die in (a) und (b) behandelten Fälle.

Sind die Körper M und M' elastisch, so ist die in A durch die Kräfte W und $(-W)$ hervorgerufene Deformation keine bleibende, sondern die Körper kehren mehr oder weniger in ihre ursprüngliche Form zurück, so dass wie in den Fällen (a) und (b) die Kräfte W und $(-W)$ in derselben Richtung wie früher noch nach der Zeit t_2 wirksam bleiben bis zu einem gewissen Zeitmoment t_3 . Bezeichnet man, wie unter (a), die Geschwindigkeiten zur Zeit t_3 , also die Geschwindigkeiten nach dem Stoße durch dieselben Zeichen wie jene zur Zeit t_0 , jedoch ohne den Index 0, also durch V, v, C, c, w, V', v' u. s. w., so ist in Übereinstimmung mit den Gleichungen (10) und (11), wenn vorausgesetzt wird, dass der Stoß eine kurze Zeit andauert, dass während derselben sich die Lage des Punktes A nicht ändert, also xyz und $x'y'z'$ dieselben Werte beibehalten,

$$\left. \begin{aligned} v &= V - yw & v' &= V' - y'w' \\ c &= C_0 + xw & c' &= C_0' + x'w' \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Wendet man ferner die früher für den Kraftantrieb H in dem Zeitintervalle $t_0 - t_1$ durchgeführten Betrachtungen auf den Kraftantrieb H' für das Zeitintervall $t_2 - t_3$ an, so findet man auf dieselbe Weise die den Gleichungen (12), (13), und (14) analogen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} H' &= \int_{t_2}^{t_3} W dt = \frac{V_3 - V_2}{M} = \frac{y(w - w_2)}{\mu} = \frac{u - v}{M + \mu} = \frac{V' - V_3'}{M'} = \\ &= \frac{(w_3' - w_2') y'}{\mu'} = \frac{v' - u}{M' + \mu'} = \frac{v' - v}{M + \mu + M' + \mu'} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Bedeutet nun ε das (offenbar positive) Verhältniß der beiden Kraftantriebe H' und H in den beiden in Betracht gezogenen Zeitintervallen, so ist $H' = H \cdot \varepsilon$ und demnach auch, wie sich aus der Vergleichung von (16) mit (14) ergibt, in Übereinstimmung mit der Gleichung (6)

$$v' - v = \varepsilon (v_0 - v_0') \dots \dots (17)$$

Addiert man die einander gleichen Brüche in (12), (13), (14) mit den Nennern M, μ, M', μ' u. s. w. zu den ebenfalls unter sich gleichen Brüchen in (16) mit denselben Nennern, so gelangt man nach Einsetzung von (17) zu der Gleichung

$$\Pi + \Pi' = \frac{V_0 - V}{M} = \frac{y(w - w_0)}{\mu} = \frac{V' - V_0'}{M'} = \frac{y'(w_0' - w')}{\mu'} = \left. \begin{aligned} &= \frac{(1 + \epsilon)(v_0 - v_0')}{M + \mu + M' + \mu'} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Ist demgemäß der Coefficient ϵ bekannt, also auch das letzte Glied dieser Gleichung, so lassen sich aus dieser Relation durch Gleichsetzung der einzelnen hier angeführten Brüche mit diesem bekannten letzten Gliede die gesuchten Geschwindigkeiten nach dem Stoße, nämlich V, v, V', v' unmittelbar bestimmen, daher auch aus (15) die Geschwindigkeiten v, c, v', c' des Berührungspunktes.

Bezeichnet man die gegebenen anfänglichen zur z -Achse, bezw. z' -Achse parallelen Geschwindigkeitscomponenten der Schwerpunkte S , bezw. S' (daher auch jene aller anderen Punkte des Körpers M , bezw. M') durch U_0 , bezw. U_0' , so hat, da diese Geschwindigkeitscomponenten U_0 und U_0' durch die zu x und x' parallelen Kräfte W und $-W$ nicht abgeändert werden können, also constant bleiben, S , bezw. S' nach dem Stoße die Geschwindigkeitscomponenten V, C_0, U_0 , bezw. V', C_0', U_0' , so dass auch die Richtung und Größe der resultierenden Geschwindigkeit $\sqrt{V^2 + C_0^2 + U_0^2}$, bezw. $\sqrt{V'^2 + C_0'^2 + U_0'^2}$ dieser Schwerpunkte mit Hilfe der Gleichung (18) bestimmbar sind.

Es soll nun durch die folgende Untersuchung gezeigt werden, dass der fragliche Coefficient ϵ , wie in (a), durch die Quadratwurzel aus dem Verhältnisse der absoluten Zahlwerte der während des zweiten und des ersten Zeitintervalls von den Kräften W und $-W$ geleisteten relativen mechanischen Arbeiten $A_2 + A_2' = \int_{t_1}^{t_2} W \cdot d(s_2' - s_2)$ und $A_1 + A_1' = - \int_{t_0}^{t_1} W \cdot d(s_1 - s_1')$ bestimmt ist, dass mit anderen Worten ϵ der Coefficient der Stoßelasticität ist, der dementsprechend, je nachdem die Körper unelastisch, vollkommen oder unvollkommen elastisch sind, den Wert 0, 1 oder einen zwischen 0 und 1 gelegenen Wert besitzt.

Betrachtet man nämlich die relative Bewegung der beiden Körper in Bezug auf ein Achsensystem a , das parallel zur x -Achse (also auch zur x' -Achse) mit der Geschwindigkeit u gleichförmig fortschreitet (oder fügt man, was auf das Gleiche hinauskommt, zu den Geschwindigkeiten aller Punkte die constante Geschwindigkeit $-u$ hinzu), so ist bei dieser relativen Bewegung während der Dauer des Stoßes die Kraft ($-W$), bezw. W die relative äußere Kraft für den Körper M , bezw. M' . Die relative Geschwindigkeit des Schwerpunktes S des Körpers M hat zur Zeit t_0 , bezw. t_1 , bezw. t_2 die orthogonalen Geschwindigkeitscomponenten $(V_0 - u), C_0, U_0$, bezw. $(V_1 - u), C_1 = C_0, U_0$, bezw. $(V - u), C = C_0, U_0$. Es ist demnach zufolge der Gleichung (6), § 102

$$A_1 = \int_{t_0}^{t_1} -W \cdot ds_1 = \frac{M}{2} [(V_1 - u)^2 + C_1^2 + U_0^2 - (V_0 - u)^2 + C_0^2 + U_0^2] + \frac{J_2}{2} (w_1^2 - w_0^2)$$

$$A_2 = \int_{t_1}^{t_2} -W \cdot ds_2 = \frac{M}{2} [(V - u)^2 + C^2 + U_0^2 - (V_1 - u)^2 + C_1^2 + U_0^2] + \frac{J_2}{2} (w^2 - w_1^2)$$

Substituiert man in die erste dieser beiden Gleichungen die aus (12) sich ergebenden Werte $V_1 = V_0 - M\Pi$, $u = v_0 - (M + \mu)\Pi$ u. s. w. und ebenso in

zweite Gleichung die entsprechenden Werte von $V_1 u w_1$ aus der Gleichung 6) und beachtet, dass $MM = 1$ und $J_x \mu = y^2$, ferner $V_0 - v_0 = y w_0$, $V - v = y w$ s. w. ist, so findet man, dass

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= - \int_{t_0}^{t_1} W \cdot ds_1 = - \frac{1}{2} \Pi^2 (\mu + M) \\ A_2 &= \int_{t_1}^{t_2} -W \cdot ds_2 = \frac{1}{2} \Pi'^2 (\mu + M) = \frac{1}{2} \Pi^2 (\mu + M) \cdot \epsilon^2 \end{aligned} \right\} (19)$$

In gleicher Weise können auf Grund der Gleichungen (13) und (16) für die relativen mechanischen Arbeiten bei dem Körper M' die Werte gefunden werden:

$$\left. \begin{aligned} A_1' &= \int_{t_0}^{t_1} W \cdot ds_1' = - \frac{1}{2} \Pi^2 (\mu' + M') \\ A_2' &= \int_{t_1}^{t_2} W \cdot ds_2' = \frac{1}{2} \Pi'^2 (\mu' + M') = \frac{1}{2} \Pi^2 (\mu' + M') \cdot \epsilon^2 \end{aligned} \right\} (20)$$

Es ist demnach

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_1' &= - \frac{1}{2} \Pi^2 (\mu + M + \mu' + M') \\ A_2 + A_2' &= \frac{1}{2} \epsilon^2 \Pi^2 (\mu + M + \mu' + M') \end{aligned} \right\} (21)$$

so dass in der That ϵ die Quadratwurzel aus dem Verhältnisse von $A_2 + A_2'$ zu $-(A_1 + A_1')$ ist, wie dies oben behauptet wurde.

Die Summe dieser relativen mechanischen Arbeiten $A_1 + A_2 + A_1' + A_2' = -\frac{1}{2} (1 - \epsilon^2) \Pi^2 (\mu + M + \mu' + M')$ ist, da die Summe der mechanischen Arbeiten der Kräfte W und $-W$ für die fortschreitende Bewegung des Achsensystems a offenbar den Wert Null hat, zugleich auch die Summe der am ganzen System bei seiner thatsächlichen Bewegung während des Stoßes geleisteten Arbeiten, und da diese negative Summe dem Principe der lebendigen Kraft gemäß der Änderung der gesammten kinetischen Energie gleichkommt, so findet bei dem Stoße ein Verlust an kinetischer Energie in dem Betrage

$$\frac{1}{2} (1 - \epsilon^2) \Pi^2 (\mu + M + \mu' + M') = \frac{1}{2} \frac{(1 - \epsilon^2) (v_0 - v_0')^2}{M + M' + \mu + \mu'} \dots (22)$$

statt, wie sich dies bei Berücksichtigung des Wertes (14) ergibt. Für v_0 und v_0' sind die Werte aus (10) und (11) einzusetzen. Sind die Körper vollkommen elastisch, so ist $\epsilon = 1$, so dass sich der Ausdruck (22) auf Null reducirt.

Anmerkung. Der hier behandelte Fall, in welchem die augenblicklichen Rotationsachsen z und z' zur Berührungsebene parallele Centralhauptachsen der Körper M und M' sind, die zugleich auf den zum Berührungspunkte A gezogenen Schwerlinien SA und $S'A$ senkrecht stehen, ist nicht der einzige Fall, in welchem die Achsen z und z' durch den Stoß keine Änderung ihrer relativen Lagen in Bezug zum Körper und zum Achsensystem a erfahren, sondern es lässt sich leicht aus den Gleichungen (6) auf S. 555 nachweisen, dass dies z. B. für den Körper M auch dann der Fall ist (d. h. dass die Componenten der Impulse Π_0 und Π_0' nämlich $\Pi_x^{(0)}$, $\Pi_y^{(0)}$, $\Pi_z^{(0)}$, $\Pi_y^{(0)}$ auch dann Null sind), wenn die Ebene des in den Punkten A und S wirkenden Kräftepaares (W , $-W$) im Centralellipsoide des Körpers M conjugirt ist zu der augenblicklichen Rotationsachse z dieses

Körpers. Es lassen sich also auch die letzteren Deductionen leicht in ähnlicher Weise durchführen, wenn die augenblicklichen Rotationsachsen z und z' bei gegebener Lage des Berührungspunktes A und der gemeinsamen Normale NAN' solche Lagen haben, dass die z -Achse conjugiert ist zu derjenigen Ebene des Centralellipsoids des Körpers M , die den Schwerpunkt S und die Gerade NAN' enthält, während die z' -Achse conjugiert ist zu derjenigen Ebene des Centralellipsoids des Körpers M' , die den Schwerpunkt S' dieses Körpers und die Gerade NAN' enthält.

Wenn auch durch den Stoß die augenblicklichen Rotationsachsen, d. i. die zur Berührungsebene parallelen Schwerpunktsachsen z und z' als Centralhauptachsen keine Änderungen ihrer Lage im Körper erfahren und nach dem Stoße parallel zu ihrer früheren Lage fortschreiten, so sind doch die Geschwindigkeiten der in diesen Achsen gelegenen Punkte durch den Stoß verändert worden, indem nämlich deren x -Componenten, die vor dem Stoße den Wert V_0 und V_0' hatten, nach dem Stoße den aus (12), (13) und (14), bezw. aus (18) bestimmbaren Wert V_1 und V_1' , bezw. V und V' angenommen haben. Die Lage jener Punkte (XYZ) des Körpers M , deren Geschwindigkeiten durch den Stoß in keiner Weise abgeändert wurden, findet man, wenn man in den für jeden Punkt giltigen Gleichungen (10), bezw. (15) X statt x , Y statt y , ferner $v_0 = u$ und $c_0 = c_0$, bezw. $v_0 = v$ und $c_0 = c$ setzt. Man findet so, dass, wenn der Stoß ein excentrischer ist, $X = 0$ und $V_0 = V_1 + Y(w_0 - w_1)$, bezw. $X = 0$ und $V_0 - V = Y(w_0 - w)$ sein muss. Setzt man diese Werte in die Gleichung (12), bezw. (18) ein, so ersieht man, dass $Y = -\frac{M}{\mu} y$ ist, dass also, wenn die Werte von M und μ , nämlich $M = \frac{1}{M}$, $\mu = \frac{y^2}{J_z}$ eingeführt werden, $Y = -\frac{J_z}{My}$, $X = 0$ ist, während Z jeden beliebigen Wert haben kann. Es liegen sonach jene Punkte des Körpers M , deren Geschwindigkeiten durch den Stoß in keiner Weise abgeändert werden, in einer in der yz -Ebene gelegenen, zur z -Achse parallelen, auf der Ebene der Fig. 189 im Punkte C senkrechten Achse a , deren Abstand $\overline{CS} = s_a$ vom Schwerpunkte durch $s_a = \overline{CS} = \frac{J_z}{My}$ bestimmt ist, und zwar liegen der Punkt (x, y) , d. i. der Berührungspunkt A und diese Achse, da $Y \cdot y$ negativ ist, auf entgegengesetzten Seiten der xz -Ebene. Ist demgemäß N jener Punkt, in welchem die y -Achse von der zur Berührungsebene normalen Richtungslinie der Kraft $-W$ geschnitten wird, so ist $\overline{CN} = \overline{CS} + \overline{SN} = s_a + y = s_a + \frac{J_z}{Ms_a}$, d. h. es ist der Abstand des Punktes N von der Achse a , der Gleichung (7) auf S. 565 zufolge, der reducierten Länge des Körpers in Bezug auf diese Achse a gleich. Da nun überdies N in der die Achse a enthaltenden Schwereebene,

und zwar mit dem Schwerpunkte S auf derselben Seite der Achse a liegt, und da ferner diese Achse a zufolge des Lehrsatzes auf S. 574 eine Trägheitshauptachse für den Punkt C ist, so ist dieser Punkt N zufolge der Erklärung auf S. 576 der Mittelpunkt des Stoßes für die Achse a . (N ist zugleich auch, da C , S und N in derselben zur Achse a senkrechten Geraden liegen, (siehe S. 565) der Schwingungsmittelpunkt für diese Achse a .) Es stehen also die aus den Gleichungen dieses Paragraphen deducierten Folgerungen in vollständiger Übereinstimmung mit den Erörterungen auf S. 576. In ganz gleicher Weise lässt sich für den zweiten Körper M' nachweisen, dass die Bewegungen jener Punkte des Körpers M' durch den Stoß keine Änderung erfahren, die in einer zur z' -Achse parallelen Achse a' gelegen sind, deren Lage man so bestimmt, dass man den Berührungspunkt A auf die y' -Achse projiciert, diese Projection N' mit S' verbindet und die Gerade $N'S'$ über S' hinaus um eine Strecke $s_a' = \overline{C'S'} = \frac{J_{z'}}{My}$ verlängert; es ist dann die durch den Endpunkt C' dieser Verlängerung zur z' -Achse geführte Parallele jene Achse a' , für welche der Punkt N' der Stoßmittelpunkt (Schwingungsmittelpunkt) ist. Wären die Punkte der Achsen a und a' vor dem Stoße in Ruhe gewesen, so würden sie auch trotz des Stoßes in Ruhe bleiben, d. h. vor und nach dem Stoße würde nur eine einfache Rotation um diese ruhenden Achsen stattfinden.

Schließlich sei nur noch bemerkt, dass es in dem besonderen Falle, in welchem die zu den nunmehr als parallel angenommenen augenblicklichen Rotationsachsen parallelen Componenten der Geschwindigkeiten der Schwerpunkte S und S' miteinander übereinstimmen, keinen Schwierigkeiten unterliegt, auch den Einfluss des zur y - und zur y' -Achse parallelen Reibungswiderstandes mit in Rechnung zu ziehen, doch soll in die Behandlung dieses Falles nicht weiter eingegangen werden.

Anmerkung. Die Gesetze des excentrischen Stoßes wurden von Leonhard Euler und den Brüdern Bernoulli behandelt.

d) Stoß unfreier Körper.

Es soll hier nur der wichtigste Fall der beschränkten Beweglichkeit eines starren Körpers, nämlich jener Fall in Untersuchung gezogen werden, in welchem von den aneinander stoßenden Körpern einer oder beide genöthigt sind, um eine fixe Achse zu rotieren, sodass eine Änderung der Rotationsachse durch den Stoß bei dem um die fixe Achse rotierenden Körper nicht eintreten kann, daher stets von der letzten Gleichung (6) auf S. 555, beziehungsweise von der Gleichung (7) auf S. 559 Anwendung gemacht werden kann.

1. Stößt ein freibeweglicher Körper von der Masse M , der dieselbe Bewegung wie in c) hat, der also — abgesehen von seiner Schwerpunktsbewegung — um eine seiner Hauptcentralachsen, nämlich um die z -Achse, rotiert, in einem Punkte A , dessen Berührungsebene zu dieser Achse parallel ist, und dessen orthogonale Projection auf die z -Achse der Schwerpunkt S des Körpers ist, mit einem um eine zweite beliebige fixe Achse rotierenden Körper M' zusammen, so sieht man leicht ein, dass durch die im Punkte A in Wirkung gelangende Kraft — W die Bewegung des Körpers M in derselben Weise modificiert werden muss wie die Bewegung desselben Körpers M im Falle c); es ist demnach, wenn man dieselben Bezeichnungen und dieselben Achsen xyz wählt wie in c), zufolge der Gleichung (12)

$$\Pi = \int_{t_0}^{t_1} W \cdot dt = \frac{V_0 - V_1}{M} = \frac{y(w_1 - w_0)}{\mu} = \frac{v_0 - u}{M + \mu} \quad \dots (23)$$

wobei $M = \frac{1}{M}$, $\mu = \frac{y^2}{J_z}$, $v_0 = V_0 - y w_0$, $u = V_1 - y w_1$ u. s. w. ist.

Als z' -Achse eines zweiten orthogonalen Achsensystems sei die fixe Rotationsachse des zweiten Körpers M' angenommen und die x' - und die y' -Achse werde so gewählt, dass die kürzeste Drehung von der positiven x' -Achse nach der positiven y' -Achse mit dem Sinne der thatsächlichen Rotation des Körpers M' übereinstimmt. Die Richtungswinkel der auf M' einwirkenden Kraft W , deren Richtung jene der Achse x ist, in Bezug auf das letztere Achsensystem seien durch $\alpha' \beta' \gamma'$ und die Coordinaten des Berührungspunktes A durch $x' y' z'$ bezeichnet. Das Drehungsmoment M_x' der Kraft W , deren Componenten $W_x' W_y' W_z'$ seien, ist dann bekanntlich $M_x' = x' \cdot W_y' - y' \cdot W_x' = x' \cdot W \cos \beta' - y' \cdot W \cos \alpha'$, somit, wenn R' den Ausdruck

$$R' = x' \cos \beta' - y' \cos \alpha' \quad \dots (24)$$

bedeutet, $M_x' = W \cdot R'$; es ist demnach zufolge der letzten Gleichung in (6) auf S. 555, bzw. der Gleichung (7) auf S. 559 $\int_{t_0}^{t_1} M_x' dt = R' \cdot \int_{t_0}^{t_1} W dt = R' \Pi = J_x' (w_1' - w_0')$ oder, wenn man kürzlicher durch μ' den Ausdruck

$$\mu' = \frac{R'^2}{J_x'} \quad \dots (25)$$

bezeichnet

$$\Pi = \int_{t_0}^{t_1} W \cdot dt = \frac{R' (w_1' - w_0')}{\mu'} \quad \dots (26)$$

Zur Zeit t_1 ist die der Geschwindigkeit u gleiche normale Geschwindigkeitscomponente des Punktes A des Körpers M' , deren Richtung

die x -Richtung ist, durch $r'w_1' \cos(xu')$ ausgedrückt, wenn r' die Entfernung des Punktes A von der z' -Achse und (xu') den Neigungswinkel der Richtung x gegen die Richtung der Geschwindigkeit u' des Punktes A des Körpers M' bedeuten. Diese Geschwindigkeit besitzt, da ihre zu den Achsen $x'y'z'$ parallelen Componenten nach Früherem — $y'w_1', x'w_1', 0$ sind, die Richtungscosinus — $\frac{y'}{r'}, \frac{x'}{r'}, 0$ in Bezug auf diese Achsen $x'y'z'$. Es ist sonach $u = r'w_1' \cos(xu') = r'w_1' \left[-\frac{y'}{r'} \cos \alpha' + \frac{x'}{r'} \cos \beta' + 0 \cdot \cos \gamma' \right] = w_1'(x' \cos \beta' - y' \cos \alpha') = R'w_1'$, während aus gleichen Gründen die anfängliche x -Componente der Geschwindigkeit des Punktes A des Körpers M durch $v_0' = R'w_0'$ ausgedrückt ist. Setzt man diese Werte

$$v_0' = R'w_0', u = R'w_1' \dots (27)$$

in die Gleichung (26) ein, so findet man in Gemäßheit der Gleichungen (26) und (23)

$$\Pi = \frac{V_0 - V_1}{M} = \frac{y(w_1 - w_0)}{\mu} = \frac{v_0 - u}{M + \mu} = \frac{u - v_0'}{\mu'} = \frac{v_0 - v_0'}{M + \mu + \mu'} (28)$$

Der letzte Wert ergibt sich durch Addition der Vorderglieder und der Nachglieder der beiden vorhergehenden Verhältnisse.

Da dieses letzte Glied der Gleichung (28) bekannt ist, so lässt sich aus dieser Gleichung V_1, w_1, u und daher mit Hilfe von (27) auch $w_1' = \frac{u}{R'} = \frac{u}{x' \cos \beta' - y' \cos \alpha'}$ berechnen.

Ist die Bewegung des Körpers M eine fortschreitende, so wird $w_0 = 0$, also $v_0 = V_0$, und ist zudem der Stoß für den Körper M ein centraler, so ist $y = 0, \mu = 0, w_1 = w_0 = 0$ zu setzen.

Sind die Körper M und M' elastisch, so ist aus früher erörterten Gründen, analog den Gleichungen (16), (28) und (27)

$$\Pi' = \left. \int_{t_1}^{t_2} \dot{W}' dt = \frac{V_1 - V}{M} = \frac{y(w - w_1)}{\mu} = \frac{u - v}{M + \mu} = \frac{v' - u}{\mu'} = \frac{v' - v}{M + \mu + \mu'} \right\} (29)$$

$v' = R'w' = (x' \cos \beta' - y' \cos \alpha') \cdot w'$

Da nun, wie früher, wenn ϵ den Coëfficienten der Stoßelasticität bezeichnet, $\Pi' = \Pi\epsilon$, daher zufolge der Gleichungen (28) und (29) $v' - v = \epsilon(v_0 - v_0')$ ist, so ergibt sich durch Addition von (28) und (29)

$$\Pi + \Pi' = \frac{V_0 - V}{M} = \frac{y(w - w_0)}{\mu} = \frac{v_0 - v}{M + \mu} = \frac{v' - v_0'}{\mu'} = \frac{(1 + \epsilon)(v_0 - v_0')}{M + \mu + \mu'} \dots (30)$$

aus welcher Gleichung sich sofort V, w, v, v' und mit Hilfe der letzten Gleichung in (29) auch w' berechnen lassen. So ist z. B., wenn man $v' = R'w'$ und $v_0' = R'w_0'$ und den Wert von μ' aus (25) einsetzt, $\frac{J_{z'}(w' - w_0')}{R'} = \frac{(1 + \epsilon)(v_0 - R'w_0')}{M + \mu + \mu'}$ u. s. w.

Je nachdem die Körper vollkommen elastisch, vollkommen unelastisch

oder unvollkommen elastisch sind, ist $\epsilon = 1$, $\epsilon = 0$ oder ϵ ein zwischen 0 und 1 gelegener Zahlwert.

Der Verlust an kinetischer Energie beträgt $\frac{1}{2} \frac{(1 - \epsilon^2) (v_0 - v_0')^2}{M + \mu + \mu'}$.

2. Stoßen zwei um die beliebigen fixen Achsen s und s' rotierende Körper M und M' in einem Punkte A , dessen Coordinaten $xy s$, bzw. $x'y's'$ sind, aneinander, so sind die soeben für den gestoßenen Körper M' durchgeführten Untersuchungen auch auf den stoßenden Körper M in Anwendung zu bringen, wobei nur zu beachten ist, dass nicht die Kraft W , sondern die Kraft ($-W$) auf den Körper M wirkt, daher nicht nur die Strichzeichen der auf M bezüglichen Bezeichnungen zu eliminieren, sondern gleichzeitig auch die Zeichen der Geschwindigkeitsänderungen zu ändern sind.

Wenn man also die Achsen $x'y'$ und xy derart wählt, dass nicht nur die kürzeste Drehung von der positiven x' -Achse nach der positiven y' -Achse mit der tatsächlichen Drehung des Körpers M' , sondern auch die kürzeste Drehung von der positiven x -Achse nach der positiven y -Achse mit der tatsächlichen Drehung des Körpers M übereinstimmt, und wenn man ferner die Richtungswinkel der Kraft W , mit welcher der stoßende Körper M auf M' wirkt, in Bezug auf die Achsen $xy s$ durch $\alpha\beta\gamma$, in Bezug auf $x'y's'$ durch $\alpha'\beta'\gamma'$ bezeichnet, so ist analog mit (24), (25), (26), (27) und (28) zu setzen

$$\left. \begin{aligned} R &= x \cos \beta - y \cos \alpha, & R' &= x' \cos \beta' - y' \cos \alpha' \\ \mu &= \frac{R^2}{J_s}, & \mu' &= \frac{R'^2}{J_{s'}} \\ \Pi &= \int_{t_0}^{t_1} W dt = \frac{R(w_0 - w_1)}{\mu} = \frac{R'(w_1' - w_0')}{\mu'} \\ v_0 &= R w_0, & v_0' &= R' w_0', & u &= R w_1, & u &= R' w_1' \\ \Pi &= \int_{t_0}^{t_1} W dt = \frac{v_0 - u}{\mu} = \frac{u - v_0'}{\mu'} = \frac{v_0 - v_0'}{\mu + \mu'} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Aus der letzten Gleichung lässt sich u durch das bekannte letzte Glied ausdrücken, daher kann man mit Hilfe der Gleichungen $u = (x \cos \beta - y \cos \alpha) w_1$, $u = (x' \cos \beta' - y' \cos \alpha') w_1'$ die schließliche Winkelgeschwindigkeit w_1 und w_1' berechnen.

Sind die Körper elastisch, so ist aus bekannten Gründen zu setzen

$$\left. \begin{aligned} \Pi' &= \int_{t_1}^{t_2} W dt = \frac{u - v}{\mu} = \frac{v' - u}{\mu'} = \frac{v' - v}{\mu + \mu'} \\ v &= R w, & v' &= R' w' \end{aligned} \right\} \dots (32)$$

und da $\Pi' = \Pi \epsilon$, also $v' - v = \epsilon (v_0 - v_0')$ ist, so findet man aus (31) und (32) durch Summierung

$$\Pi + \Pi' = \frac{v_0 - v}{\mu} = \frac{v' - v_0'}{\mu'} = \frac{(1 + \epsilon) (v_0 - v_0')}{\mu + \mu'} \dots (33)$$

aus welcher Gleichung sich v und v' , somit auch die schließlichen Winkelgeschwindigkeiten w und w' bestimmen lassen. Setzt man nämlich die früheren Werte von v_0 , v , v' , v_0' , μ und μ' ein, so erhält man

$$\frac{w_0 - w}{R J_z'} = \frac{w' - w_0'}{R' J_z} = \frac{(1 + \varepsilon) (R w_0 - R' w_0')}{R^2 J_z' + R'^2 J_z} \dots (34)$$

woraus w und w' sofort gefunden werden können, da die Werte von R und R' durch die erste Gleichung in (31) bestimmt sind.

Der Energieverlust beträgt in diesem Falle $\frac{1}{2} \frac{(1 - \varepsilon^2) (v_0 - v_0')^2}{\mu + \mu'} =$
 $= \frac{1}{2} (1 - \varepsilon^2) \frac{J_z J_z' (R w_0 - R' w_0')^2}{R^2 J_z' + R'^2 J_z}.$

Sind die Körper M und M' vollkommen elastisch, so ist $\varepsilon = 1$; sind sie vollkommen unelastisch, so ist $\varepsilon = 0$ zu setzen.

Capitel X.

Principien der Hydromechanik.

§ 104. Allgemeine Gesetze des Gleichgewichts der Flüssigkeiten.

Bei flüssigen Körpern sind die im § 54 abgeleiteten allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1) auf S. 313, denen die äußeren Kräfte im Zustande des Gleichgewichts bei allen Punktsystemen, also auch bei Flüssigkeiten, entsprechen müssen, nicht mehr, wie dies bei den nicht deformierbaren, den starren Körpern, der Fall war, für das Bestehen des Gleichgewichts hinreichend, sondern es tritt hier noch eine weitere, für alle vollkommenen Flüssigkeiten wesentliche und charakteristische Bedingung hinzu.

Den im § 6 (S. 27) gegebenen Erklärungen zufolge ist nämlich das Gleichgewicht bei einer (im Sinne der reinen Mechanik vollkommenen) Flüssigkeit, welche bekanntlich die charakteristische Grundeigenschaft der absolut leichten Verschiebbarkeit besitzt, nur dann möglich, wenn bei einem jeden Flüssigkeitselemente die äußeren Kräfte, die auf die materiellen Punkte der Begrenzungsfläche F dieses Elements einwirken, durchwegs normal zu den unendlich kleinen Elementen dF dieser Fläche F , und zwar nach der inneren Seite des Flüssigkeitselements gerichtet sind, da nur in diesem Falle diesen äußeren Kräften — den Druckkräften — durch die stets normal zur Begrenzungsfläche nach außen wirkenden Resultanten der inneren Kräfte das Gleichgewicht gehalten werden kann. In jedem anderen Falle erfolgt eine Deformation der Flüssigkeit, die so lange andauert, bis, wenn dies überhaupt möglich ist, eine derartige Gleichgewichtsconfiguration eingetreten ist, in welcher neben den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1) auf S. 313 auch der ob erwähnten besonderen Gleichgewichtsbedingung entsprochen wird.

Den Auseinandersetzungen des § 58 gemäß muss demnach im Zustande des Gleichgewichts einer Flüssigkeit für irgend ein Flächenelement dF der Begrenzungsfläche, dessen nach der inneren Seite des Flüssigkeitselements gerichtete Normale zur z -Axe eines beliebigen Coordinatensystems gewählt sei, wenn die Bezeichnungsweise des § 58 auf S. 337 beibehalten wird, $r_x = 0$, $r_y = 0$ und $r_z > 0$, daher auch $\Delta p_x = \Sigma r_x = 0$, $\Delta p_y = \Sigma r_y = 0$, $\Delta p_t = \sqrt{(\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2} = 0$ und $\Delta p = \Delta p_z = \Sigma r_z > 0$ sein, d. h. es kann (siehe S. 337) bei Flüssigkeiten eine tangential Reaction Δp_t (Schubreaction, ein Widerstand gegen Abscherung) nie stattfinden (welche Eigenschaft identisch ist mit jener der absolut leichten Verschiebbarkeit), es sind im Gegentheile die vollkommenen Flüssigkeiten nur einer longitudinalen Reaction, und zwar nur einer Druckreaction fähig.

Von den im § 58 betrachteten specifischen Spannungen (den auf die Flächeneinheit entfallenden inneren Kräften) verschwinden sonach bei Flüssigkeiten stets im Gegensatze zu den festen Körpern die Schubspannungen (tangentialen Spannungen) $X_y X_z Y_x Y_z Z_x Z_y$, und es können nur normale Druckspannungen $X_x Y_y Z_z$ stattfinden. Die Druckspannung wird bei Flüssigkeiten „Druck pro Flächeneinheit“, specifischer Druck oder kurzweg, wie es auch in der Folge meist geschehen soll, als „Druck“ schlechthin bezeichnet, bei Gasen gebraucht man zur Bezeichnung dieser Druckspannung auch die Namen „Spannkraft“ oder „Expansivkraft“. Wird nun die Summe der Resultanten r der inneren Kräfte (oder im Zustande des Gleichgewichts die gleiche Summe der äußeren Kräfte), welche die auf die materiellen Punkte des einem beliebigen Punkte xyz benachbarten, zu den Achsen x, y, z, a normalen unendlich kleinen Elementes dF_x, dF_y, dF_z, dF der Begrenzungsfläche eines Flüssigkeitselements senkrecht zu demselben einwirken, durch dN_x, dN_y, dN_z, dN und der specifische Druck auf dieses Flächenelement in diesem Punkte xyz durch X_x, Y_y, Z_z, p bezeichnet, so ist zufolge der Erklärungen auf S. 337

$$X_x = \frac{dN_x}{dF_x}, Y_y = \frac{dN_y}{dF_y}, Z_z = \frac{dN_z}{dF_z}, p = \frac{dN}{dF} \dots (1)$$

Bedeutet aber X_x, Y_y, Z_z, p den mittleren Druck auf ein endliches Flächenelement $\Delta F_x, \Delta F_y, \Delta F_z, \Delta F$ und $\Delta N_x, \Delta N_y, \Delta N_z, \Delta N$ die Summe der Resultanten der auf diese Fläche im Gleichgewichtszustande einwirkenden äußeren (oder inneren) Kräfte, so ist

$$X_x = \frac{\Delta N_x}{\Delta F_x}, Y_y = \frac{\Delta N_y}{\Delta F_y}, Z_z = \frac{\Delta N_z}{\Delta F_z}, p = \frac{\Delta N}{\Delta F} \dots (2)$$

Die Werte (1) sind offenbar die Grenzwerte von (2), wenn die Größe des Flächenelements sich der Null nähert.

Anmerkung. Da eine Kraft die Dimension mlt^{-2} , eine Fläche die Dimension l^2 hat, und da den hier gegebenen Erklärungen zufolge die Maßzahl p des spezifischen Druckes sich durch Division der Maßzahl einer Kraft durch jene der Fläche ergibt, so findet man als Dimension des (spezifischen) Druckes: $[p] = mlt^{-2}:l^2 = ml^{-1}t^{-2}$. Die absolute Einheit des Druckes p im Centimeter-Gramm-Secunden-Maßsystem ist somit symbolisch durch

$$\frac{\text{Grammasse}}{\text{Centimeter} \times \text{Secunde} \times \text{Secunde}} \text{ dargestellt.}$$

Aus der Eigenschaft der absolut leichten Verschiebbarkeit lässt sich zunächst das für Flüssigkeiten charakteristische Gesetz deducieren, dass im Gegensatze zu dem Verhalten fester Körper bei (vollkommenen) Flüssigkeiten der (spezifische) Druck in irgend einem im Innern der Flüssigkeit beliebig gewählten Punkte xyz von der räumlichen Lage des diesem Punkte unmittelbar benachbarten gedrückten Flächenelements stets vollkommen unabhängig, dass also $X_x = Y_y = Z_z = p$ ist, wie aus folgender Untersuchung (vergl. S. 338) hervorgeht.

Es sei M ein beliebiger Punkt innerhalb der Flüssigkeit, dessen Coordinaten in Bezug auf ein beliebiges orthogonales Achsensystem xyz sind, und Mx', My', Mz' seien die durch M hindurchgelegten, zu den Coordinatenachsen parallelen Achsen. Eine Ebene von beliebiger Lage, deren Abstand von M entsprechend klein ist, und die gegen die Coordinatenebenen (yz) , (zx) , (xy) unter den beliebigen Richtungswinkeln $\alpha\beta\gamma$ geneigt ist, schneide die Achsen $x'y'z'$ in den noch innerhalb der Flüssigkeit gelegenen Punkten ABC (Fig. 190), deren Coordinaten $(x + \Delta x, y, z)$, bzw. $(x, y + \Delta y, z)$, bzw. $(x, y, z + \Delta z)$ sind. Durch

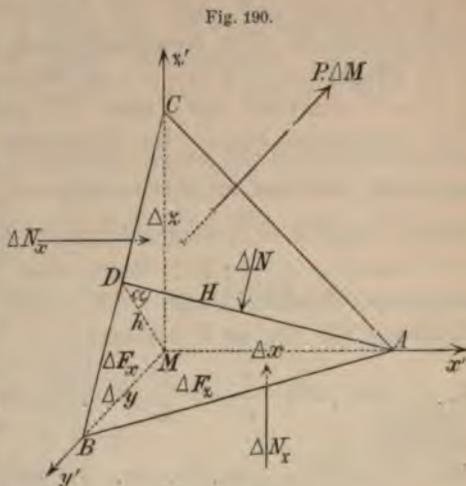


Fig. 190.

die Ebene ABC und die Ebenen $(y'z')$, $(z'x')$, $(x'y')$ wird ein Flüssigkeitselement $ABCM$ von der Masse ΔM , das die Form eines Tetraeders hat, begrenzt, dessen Seitenflächen die Dreiecke $\overline{MBC} = \Delta F_x$, $\overline{MCA} = \Delta F_y$, $\overline{MAB} = \Delta F_z$, $\overline{ABC} = \Delta F$ sind. Auf diese vier Flächen werde der mittlere Druck X_x, Y_y, Z_z, p von der das Tetraeder umgebenden Flüssigkeit ausgeübt und P sei die Beschleunigung der Reductionsresultanten $(P \cdot \Delta M)$ der etwa außerdem auf das Flüssigkeitselement einwirkenden äußeren Kräfte

(z. B. bei einer nur der Schwere allein unterworfenen Flüssigkeit ist P die Beschleunigung der Schwere, d. i. 9·8). Es steht dann das Flüssigkeitselement unter der Einwirkung folgender äußerer Kräfte: Senkrecht zu den Flächen $\Delta F_x, \Delta F_y, \Delta F_z, \Delta F$ in der Richtung der Pfeile wirken den Gleichungen (2) zufolge Kräfte, deren Summen $\Delta N_x = X_x \cdot \Delta F_x, \Delta N_y = Y_y \cdot \Delta F_y, \Delta N_z = Z_z \cdot \Delta F_z, \Delta N = p \cdot \Delta F$ sind, und außerdem wirken auf die Masse ΔM parallel zu den Achsen x, y, z Kräfte, deren Summen $\Delta M \cdot X, \Delta M \cdot Y, \Delta M \cdot Z$ sind, wenn XYZ die Componenten der beschleunigenden äußeren Kraft P bedeuten. Ist ferner durch ΔV das Volumen und durch μ die mittlere Dichtigkeit des Flüssigkeitselements $ABCM$ bezeichnet, so ist $\Delta M = \mu \cdot \Delta V = \mu \cdot \frac{1}{3} \Delta F_x \cdot \Delta x$. Zuzufolge der ersten Gleichung (1) auf S. 313 müssen im Gleichgewichtszustande der Flüssigkeit die X -Componenten der äußeren Kräfte zur Summe Null haben, es ist demnach

$$\Delta N_x + \Delta M \cdot X + \Delta N \cdot \cos(x, \Delta N) = 0 \dots (3)$$

Da ΔN normal zur Fläche ΔF , und zwar nach dem Inneren des Tetraeders gerichtet ist, und da ferner der Neigungswinkel α zweier Ebenen ΔF_x und ΔF bekanntlich gleich, beziehungsweise supplementär ist dem Neigungswinkel der Normalen dieser Ebenen, so ist offenbar $(x, \Delta N) = \pi - \alpha$, also $\cos(x, \Delta N) = -\cos \alpha$. Wenn $\overline{MD} = h$ senkrecht zur Kante BC geführt wird, so steht zufolge eines bekannten Satzes der Stereometrie auch $\overline{AD} = H$ auf BC senkrecht, und es ist dann $\Delta F_x = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot h, \Delta F = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot H$, ferner $\sphericalangle MDA = \alpha$, demnach $\cos \alpha = h:H$ und daher $\cos(x, \Delta N) = -\cos \alpha = -(h:H)$. Setzt man diesen Wert und die früher erhaltenen Ausdrücke für $\Delta N, \Delta M$ und ΔN_x u. s. w. in die Gleichung (3) ein, so findet man:

$$X_x \cdot \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot h + \frac{1}{3} \mu \cdot \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot h \cdot \Delta x \cdot X - p \cdot \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot H \cdot \frac{h}{H} = 0,$$

also $X_x = p - \frac{1}{3} \mu \cdot X \cdot \Delta x$. In gleicher Weise würde man auf Grund der zweiten und dritten Gleichung (1) auf S. 313 finden: $Y_y = p - \frac{1}{3} \mu \cdot Y \cdot \Delta y, Z_z = p - \frac{1}{3} \mu \cdot Z \cdot \Delta z$.

Wird nun die unter den beliebigen Winkeln $\alpha\beta\gamma$ gegen die Coordinatenebenen geneigte Ebene ABC dem Punkte M immer mehr genähert, so müssen die Grenzwerte von X_x, Y_y, Z_z, p den Gleichungen (1) zufolge den wahren Druck, der im Punkte M in den entsprechenden Richtungen herrscht, darstellen, während die

Grenzwerte von XYZ die Componenten der beschleunigenden äußeren Kraft im Punkte M , jener von μ die Dichtigkeit in M und jene von Δx , Δy und Δz Null sind. Beim Übergänge auf diese Grenzwerte nehmen die letzten drei Gleichungen demnach die Form an: $X_x = p$, $Y_y = p$, $Z_z = p$, wodurch der obige Satz nachgewiesen ist, d. h. bei (vollkommenen) Flüssigkeiten ergibt sich als eine natürliche Folge der normalen Richtung des Druckes, dass dieser Druck p in einem beliebig gewählten Punkte von der Lage des gedrückten Flächenelements vollkommen unabhängig ist. Ist also dM (Fig. 191) ein beliebiges Flüssigkeitselement, dessen sämtliche Dimensionen unendlich klein sind, so ist in der ganzen Ausdehnung seiner Oberfläche der Druck p , d. i. $\frac{dN}{dF}$ durchwegs derselbe.

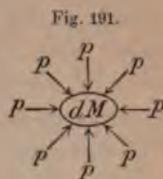


Fig. 191.

Dementsprechend hat man bei vollkommenen Flüssigkeiten (was bei festen Körpern, bei welchen sowohl die Richtung, als auch die Größe der Spannung von der Lage des Flächenelements abhängt, nicht gestattet ist), allgemein nur von dem spezifischen Drucke p in irgend einem Punkte (xyz) zu reden, der freilich im allgemeinen von einem Punkte zum anderen variiert, d. h. es ist der Flüssigkeitsdruck p in einem beliebigen Punkte M einer vollkommenen Flüssigkeit im Zustande des Gleichgewichts lediglich eine Function der Coordinaten dieses Punktes M .

Um nun zu bestimmen, in welcher Weise der Druck p innerhalb der Flüssigkeit von einem Punkte zum anderen sich ändert, sei irgend ein beliebiger Flüssigkeitsfaden $OMM'O'$ (Fig. 192), d. i. eine continuierliche materielle, in ihrer ganzen Ausdehnung innerhalb der Flüssigkeit gelegene Linie in Betracht gezogen, auf deren dem beliebigen Punkte M benachbartes Flüssigkeitselement, wie früher, die beschleunigende äußere Kraft P wirkt, deren Componenten XYZ seien. O sei der beliebig in dieser Linie gewählte Anfangspunkt und $arc \overline{OM} = s$ der zwischen O und M gelegene Theil dieser Curve. Die Länge $arc \overline{MM'}$ jenes Elements des Flüssigkeitsfadens, das sich zwischen diesem Punkte M und einem entsprechend nahe gelegenen Punkte M' befindet, sei analog durch Δs und die Sehne MM' (wie in Fig. 40) durch Δl bezeichnet. Es sei nun ein senkrechtes,

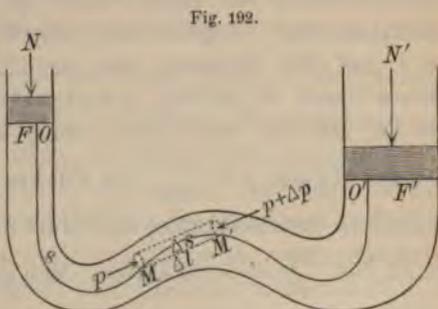


Fig. 192.

innerhalb der Flüssigkeit gelegenes cylindrisches Flüssigkeitssäulchen in Betracht gezogen, dessen Seitenkante Δl und dessen entsprechend klein gewählte, zu Δl senkrechte Basis ΔF sei. Der mittlere spezifische Druck, welcher in der den Punkt M enthaltenden Basis ΔF dieses Flüssigkeitscylinde herrscht, sei durch p , der mittlere Druck in der zweiten den Punkt M' enthaltenden gleichen Basis ΔF durch $p + \Delta p$ bezeichnet. Wählt man nun die Richtung von M nach M' zur positiven Richtung der x -Achse eines orthogonalen Achsensystems, so sind die X -Componenten der auf das betrachtete cylindrische Flüssigkeitselement, dessen Masse ΔM , dessen Volumen ΔV und dessen mittlere Dichtigkeit μ sei, einwirkenden äußeren Kräfte offenbar $\Delta N_x = p \cdot \Delta F$, $\Delta N'_x = -(p + \Delta p) \Delta F$ und $\Delta M \cdot P \cos(P, \Delta l) = \mu \Delta V \cdot P \cos(P, \Delta l)$. Die auf die Mantelfläche des Cylinders wirkenden Druckkräfte kommen bei der Bildung der X -Componenten nicht in Betracht, da dieselben zu dieser Fläche, also zur x -Achse normal gerichtet sind.

Es ergibt sich demnach auf dieselbe Art wie früher aus der ersten Gleichung (1) auf S. 313, folgende der früheren Gleichung (3) analoge Gleichgewichtsbedingung:

$$p \Delta F - (p + \Delta p) \Delta F + \mu \Delta V \cdot P \cos(P, \Delta l) = 0.$$

Dividiert man diese Gleichung durch ΔV und beachtet, dass $\Delta V = \Delta F \cdot \Delta l$ ist, so findet man, dass $\frac{\Delta p}{\Delta l} = \mu P \cos(P, \Delta l)$, somit auch $\frac{\Delta p}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta l} = \mu P \cos(P, \Delta l)$ wird. Ist nun M der dem Punkte M unmittelbar benachbarte Punkt des Flüssigkeitsfadens OMO' , und nimmt man ferner ΔF unendlich klein an, so hat man in der letzten Gleichung zu den Grenzwerten für $\Delta s = 0$ und $\Delta F = 0$ zu übergehen. Es stimmt dann die Richtung der Sehne Δl mit der Richtung der Tangente an den Flüssigkeitsfaden im Punkte M , d. i. mit der Richtung des unendlich kleinen Curvelements ds dieses durch M beliebig gelegten Flüssigkeitsfadens überein, sodass $\cos(P, \Delta l)$ in $\cos(P, ds)$ übergeht. Es bedeutet dann p den wahren Druck $p = \frac{dN}{dF}$ im Punkte M , μ die Dichtigkeit der Flüssigkeit in diesem Punkte, und es ist ferner $\lim \frac{\Delta p}{\Delta s} = \frac{dp}{ds}$ und, wie auf S. 92, $\lim \frac{\Delta s}{\Delta l} = 1$ zu setzen. Man gelangt demnach zu der folgenden allgemeinen Grundbedingung des Gleichgewichtes

$$\frac{dp}{ds} = \mu P \cos(ds, P) \dots (4)$$

d. h. es ist im Gleichgewichtszustande in einem jeden Punkte eines beliebigen Flüssigkeitsfadens der Differen-

tialquotient $\frac{dp}{ds}$ des specifischen (als eine Function von s anzusehenden) Druckes p genommen nach der Länge s dieses Flüssigkeitsfadens gleich dem Producte aus der Dichtigkeit μ der Flüssigkeit in diesem Punkte und der in der Richtung der Tangente wirksamen (tangentialen) Componente $P \cdot \cos(P, ds)$ der beschleunigenden äußeren Kraft P . [Da in (4) μ die Masse der Volumseinheit bedeutet, so ist μP die auf die Volumseinheit einwirkende äußere Kraft.]

Mit Hilfe dieses wichtigen fundamentalen Gesetzes der Hydromechanik kann man, wenn die äußeren auf die Flüssigkeit einwirkenden Kräfte gegeben sind, die Druckverhältnisse in einem jeden Flüssigkeitsfaden bestimmen. Wählt man diesen Flüssigkeitsfaden parallel zu irgend einer der Achsen xyz eines beliebigen orthogonalen Achsensystems, so führt, da $P \cos(xP) = X$, $P \cos(yP) = Y$, $P \cos(zP) = Z$ die Componenten der Beschleunigung P der äußeren Kraft sind, die allgemeine Gleichung (4) offenbar zu folgenden zuerst von Euler im Jahre 1755 aufgestellten*) Relationen:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu X, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu Y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu Z \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Aus dem allgemeinen hydrostatischen Grundgesetze (4), bzw. (5), lassen sich alle anderen Gesetze der Hydrostatik deducieren, was für die wichtigsten derselben im Folgenden geschehen soll.

Ist zunächst $P = 0$, d. h. wird die Flüssigkeit außer durch die auf ihre Oberfläche wirkenden Kräfte, die nach Obigem zu den Druckkräften p zugerechnet werden müssen, von keinen weiteren äußeren Kräften beeinflusst (wird also die Flüssigkeit auch als gewichtslos angenommen), so ist der Gleichung (4) zufolge in der ganzen Ausdehnung einer jeden innerhalb der Flüssigkeit beliebig angenommenen Curve $\frac{dp}{ds} = 0$, woraus bekanntlich unmittelbar folgt, dass p in der ganzen Ausdehnung des vollkommen beliebig gewählten Flüssigkeitsfadens einen constanten Wert besitzen muss, d. h. in der ganzen Ausdehnung einer jeden Flüssigkeit, die außer den auf deren Oberfläche einwirkenden Druckkräften von keiner äußeren Kraft beeinflusst wird, ist im Gleichgewichtszustande der Druck in einem jeden Punkte der gleiche. Es ist dieses Gesetz bekannt unter dem Namen des (Pascal'schen) Gesetzes der gleichförmigen Fortpflanzung des Druckes.

*) Es sei hier im besonderen hingewiesen auf die bekannte Schrift „Gesetze des Gleichgewichtes und der Bewegung flüssiger Körper“ — nach Leonhard Euler's Abhandlungen in den Neuen Commentarien der Petersburger Akademie, übersetzt von Brandes, Leipzig 1806.

Anmerkung. Dieses Gesetz leitete zuerst der französische Gelehrte Pascal (geb. 1623, gest. 1662) aus dem Principe der virtuellen Verschiebungen ab (P. Traité de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air. Paris 1663).

Wirkt dementsprechend auf einen ebenen Theil F (Fig. 191) der Oberfläche (etwa mittels eines Kolbens) eine äußere normale Druckkraft N , so muss die Flüssigkeit im Zustande des Gleichgewichts infolge der gleichmäßigen Fortpflanzung des Druckes, wenn auf die innere Flüssigkeitsmasse keine äußeren Kräfte einwirken, auf einen beliebigen zweiten ebenen Theil F' der Oberfläche von beliebiger Lage (auf einen zweiten Kolben) eine normale Druckkraft N' ausüben, die, wie sich durch Integration der Gleichungen $p = \frac{dN}{dF}$ und $p = \frac{dN'}{dF'}$ ergibt, wegen des constanten Wertes von p der Proportion $N:N' = F:F'$ genügt, es sind mit anderen Worten die Kräfte N und N' den gedrückten Flächen F und F' direct proportional.

So wie bei festen Körpern einfache Maschinen einer bestimmten Gruppe auf dem Hebelprincipe, jene einer zweiten Gruppe auf den Grundgesetzen der schiefen Ebene fußen, so beruhen bei der Anwendung incompressibler oder compressibler Flüssigkeiten Maschinen einer dritten Gruppe auf dem Principe der gleichmäßigen Fortpflanzung des Druckes und allgemeiner auf dem durch die Gleichung (4) ausgedrückten Grundgesetze, so die hydraulische oder Bramah'sche (von Josef Bramah im Jahre 1795 zuerst construierte) Presse u. s. w.

Der Gleichung (4) zufolge kann der Druck p noch in einem zweiten Falle, wenn auch P von Null verschieden ist, also wenn auch die innere Flüssigkeitsmasse unter der Einwirkung äußerer Kräfte steht, in allen Punkten einer in der Flüssigkeit gelegenen Linie $OMM'O'$ (Fig. 192) einen constanten Wert haben, demnach $\frac{dp}{ds} = 0$ sein, nämlich wenn in der ganzen Ausdehnung des Flüssigkeitsfadens $\cos(P, ds) = 0$ ist, d. h. wenn die resultierende äußere Kraft zu dem Flüssigkeitsfaden senkrecht gerichtet ist, also der letztere in einer Fläche gelegen ist, deren Elemente auf der Richtung der resultierenden äußeren Kraft normal sind. Eine solche Fläche nennt man eine Niveaufläche (vergl. S. 206) (wohl auch Gleichgewichtsfläche) des einwirkenden Systems der äußeren Kräfte.

Aus der Gleichung (4) lässt sich demgemäß die wichtige Folgerung ziehen, dass in einer jeden Flüssigkeit der Druck in der ganzen Ausdehnung irgend einer Niveaufläche, wofern dieselbe in der Flüssigkeit eine stetige Fläche bildet, ein constanter sein muss, mit anderen Worten, dass die Niveaufläche stets auch eine

Fläche gleichen Flüssigkeitsdruckes ist und auch als solche definiert werden kann.

So ist z. B. bei Flüssigkeiten, auf deren einzelne Theilchen Centralkräfte wirken, deren Centralpunkt irgend ein Punkt O ist, die Niveaufläche eine Kugelfläche mit dem Mittelpunkte in O , und es muss dann in einer jeden solchen Kugelfläche, wofern diese in ihrer ganzen Ausdehnung innerhalb der Flüssigkeit gelegen ist, durchwegs derselbe Druck herrschen. Die orthogonalen Trajectorien der Niveauflächen, d. i. jene Curven, deren Tangenten in jedem Punkte (also auch deren unendlich kleine Bogenelemente ds) übereinstimmen mit der Richtung der resultierenden beschleunigenden Kraft P , bezeichnet man bekanntlich als Kraftlinien (siehe S. 207). Betrachtet man nun die Druckverhältnisse in einem mit irgend einer Kraftlinie zusammenfallenden Flüssigkeitsfaden, so ersieht man, dass in demselben, da dann in Gleichung (4) $(P, ds) = 0$, also $\cos(P, ds) = 1$ ist, $\frac{dp}{ds} = \mu P$ wird. Nun haben μ und P stets einen endlichen, und zwar positiven Wert, es muss demnach auch der Differentialquotient $\frac{dp}{ds}$ stets endlich und positiv sein, woraus sofort zu folgern ist, dass in jeder Kraftlinie der Druck p mit wachsendem s , d. i. in jener Richtung, nach welcher die äußere Kraft P wirkt, stetig zunimmt.

Besteht für das System der die Flüssigkeit beeinflussenden äußeren Kräfte P ein Potential U , gehört — mit anderen Worten — die Kraft P einem sogenannten conservativen Kräftesystem an, so ist zufolge der Gleichung (1) auf S. 201, für eine jede Curve $\frac{dU}{ds} = -P \cos(P, ds)$, und es ist daher eine jede Niveaufläche (für welche $\cos(P, ds) = 0$ ist) auch eine Fläche constanten Potentials, wie dies schon im § 45 auseinandergesetzt wurde.

Sind nun in diesem Falle F und F' zwei beliebige Niveauflächen innerhalb der Flüssigkeit, und entspricht ferner der Niveaufläche F der Potentialwert U und der Druck p , dagegen der Niveaufläche F' das Potential $U + \Delta U$ und der Flüssigkeitsdruck $p + \Delta p$, so wird in allen Kraftlinien (S. 207), welche die beiden Niveauflächen durchschneiden, sich beim Übergange von der Fläche F zur Fläche F' der Potentialwert durchwegs um ΔU und der Flüssigkeitsdruck um Δp ändern; es ist demnach für alle durch die einzelnen Punkte der Niveaufläche F geführten Kraftlinien der Differenzenquotient $\frac{\Delta p}{\Delta U}$ derselbe, folglich muss auch, da als Fläche F' die der Niveaufläche F unmittelbar benachbarte Niveaufläche gewählt werden kann, wodurch

der Differenzenquotient in den Differentialquotienten übergeht, in der ganzen Ausdehnung der Niveaufläche F der Differentialquotient $\frac{dp}{dU}$ einen constanten Wert haben. Dividirt man nun die Gleichung (4) durch die Gleichung (1) auf S. 201, so ersieht man, dass

$$\frac{dp}{dU} = -\mu \dots (6)$$

ist; es hat sonach, wofern für das auf die Flüssigkeit einwirkende System der äußeren Kräfte ein Potential existiert, die Dichtigkeit μ in der ganzen Ausdehnung der Niveaufläche, wenn dieselbe in der Flüssigkeit nirgends unterbrochen ist, einen constanten Wert, d. h. es ist die Niveaufläche auch eine Fläche gleicher Dichte.

Es müssen sich daher unter der erwähnten Voraussetzung verschiedene trennbare (nicht mischbare) Flüssigkeiten von ungleicher Dichte im Gleichgewichtszustande stets derart übereinander lagern, dass die Trennungsfläche (Übergangsfläche) der Flüssigkeiten eine Niveaufläche der einwirkenden äußeren Kräfte ist.

Da ferner bei gleichartigen incompressiblen Flüssigkeiten erfahrungsgemäß die Dichte eine eindeutige Function der Temperatur und bei compressiblen Flüssigkeiten derselben Art der Druck p eine Function der Dichtigkeit μ und der Temperatur t ist — und umgekehrt —, so muss wegen des constanten Wertes von p und μ innerhalb irgend einer Niveaufläche auch die Temperatur einen constanten Wert haben; es ist also, wenn die einwirkenden äußeren Kräfte ein Potential besitzen, jede (nicht unterbrochene) Niveaufläche innerhalb der Flüssigkeit auch eine Fläche gleicher Temperatur.

Bevor zu weiteren Deductionen geschritten wird, sei im Vorhinein bemerkt, dass alle folgenden Untersuchungen dieses und aller folgenden Paragraphen auf zwei Voraussetzungen basieren, nämlich:

a) dass für die Kräfte P , welche auf die einzelnen Massentheilchen innerhalb der Flüssigkeit einwirken, ein Potential besteht, so dass von der letzten Gleichung $dp = -\mu \cdot dU$ Anwendung gemacht werden kann, und

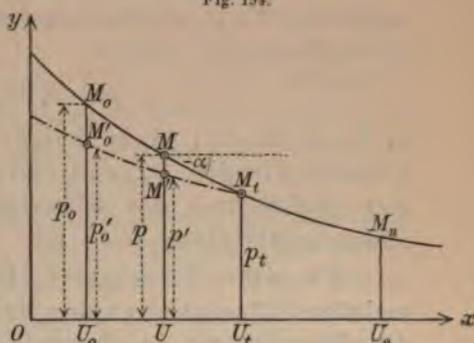
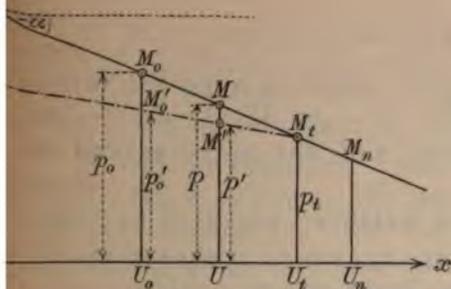
b) dass (wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich hervorgehoben ist) die Flüssigkeit in ihrer ganzen Ausdehnung die gleiche Temperatur besitzt, so dass dementsprechend, je nachdem die Flüssigkeit incompressibel oder compressibel ist, die Dichtigkeit μ , so lange die Art der Flüssigkeit sich nicht ändert, als eine constante Größe oder aber als irgend eine Function $f(p)$ des Druckes p allein anzusehen ist, welche erfahrungsmäßig stets mit dem Drucke p nach einem bestimmten Gesetze zunimmt.

Diesen Voraussetzungen entsprechend ist, wie die Integration der allgemein gültigen Gleichungen $dU = -\frac{dp}{\mu} = -\frac{dp}{f(p)}$ lehrt, U in derselben Flüssigkeit als eine Function des Druckes p und umgekehrt p als Function von U anzusehen.

Zur graphischen Darstellung dieser Function kann jene Curve dienen, deren auf ein orthogonales Achsensystem bezogene Abscisse x den Potentialwert U der beschleunigenden äußeren Kraft P und deren Ordinate y den diesem Potentialwerte entsprechenden Druck p innerhalb der Flüssigkeit darstellt, und diese Curve sei in Übereinstimmung mit den Bezeichnungen früherer in der Dynamik des materiellen Punktes betrachteter Curven als „Potentialdruckcurve“ bezeichnet.

Fig. 193.

Fig. 194.



Da der Differentialquotient $\frac{dp}{dU}$ stets einen negativen Wert, nämlich den Wert $(-\mu)$ hat, so muss mit wachsendem Potentialwerte U der Druck p abnehmen, und zwar ist bekanntlich $(-\mu) = -\frac{dp}{dU} = \frac{dy}{dx}$ durch die trigonometrische Tangente des Winkels α , den die entsprechende Berührungstangente der Potentialdruckcurve mit der positiven Richtung der x -Achse einschließt, dargestellt.

Bei einer homogenen incompressiblen Flüssigkeit ist μ constant, also die Potentialdruckcurve eine gerade Linie $M_o M M_n$ (Fig. 193), bei einer heterogenen, etwa aus zwei nicht mischbaren incompressiblen Flüssigkeiten (z. B. Quecksilber und Wasser), die durch die Trennungsfläche t , welcher der Potentialwert U_t und der Druck p_t entspricht, voneinander geschieden sind, zusammengesetzten unzusammendrückbaren Flüssigkeit eine gebrochene Linie $M_o' M_t M_n$ (Fig. 193), bei einer compressiblen Flüssigkeit eine Curve, $M_o M M_n$ (bzw. $M_o' M_t M_n$) (Fig. 194), die, weil mit wachsendem U zufolge der Gleichung (6) der spezifische Druck p , somit zufolge b) auch die Dichtigkeit $\mu = -tg \alpha$, also der absolute Zahlwert der Tangente des Richtungs-

winkels α abnimmt, der Abscissenachse ihre convexe Seite zuwendet, und die bei einer Flüssigkeit, welche aus zwei verschiedenen nicht mischbaren, durch die Niveaufläche t getrennten compressiblen Flüssigkeiten, denen bei gleichem Druck ungleiche Dichten zukommen, zusammengesetzt ist, in M_t eine Spitze besitzt. Die Form der Curve $M_o M M_n$ in Fig. 194 hängt, da $U = - \int \frac{dp}{\mu} = - \int \frac{dp}{f(p)}$ ist, wesentlich von dem Gesetze ab, nach welchem sich die Dichtigkeit μ mit dem Drucke ändert; mit anderen Worten, sie ist von der Form der Function $f(p)$ abhängig.

Für eine homogene incompressible Flüssigkeit von der constanten Dichtigkeit μ führt die auf einen beliebigen Flüssigkeitsfaden sich beziehende Integration der Gleichung (6), wenn p_o und U_o zwei zugehörige Werte bedeuten, zu der übrigens auch sofort aus Fig. 193 zu erschließenden Relation

$$p - p_o = \mu (U_o - U) \dots (7)$$

d. h. es ist bei einer homogenen unzusammendrückbaren Flüssigkeit die Druckdifferenz ($p - p_o$) das Product aus der Dichtigkeit der Flüssigkeit und der entsprechenden Potentialdifferenz ($U_o - U$).

Für eine Flüssigkeit, bei welcher, wie dies bei den meisten Flüssigkeiten der Natur angenommen werden kann, die Dichtigkeit in demselben Verhältnisse zunimmt wie der Druck, ist $\mu - \mu_o = A(p - p_o)$, wo A das constante Verhältniß der Dichtigkeitszunahme zur Druckzunahme bedeutet, also $\mu = f(p) = \mu_o + A(p - p_o)$ und $d\mu = A dp$. Es ist demnach $U = - \int \frac{dp}{\mu} = - \frac{1}{A} \int \frac{d\mu}{\mu} = - \frac{1}{A} \log \text{nat } \mu + C$, also $U_o - U = \frac{1}{A} \log \text{nat } \frac{\mu}{\mu_o} = \frac{1}{A} \log \text{nat } \frac{\mu_o + A(p - p_o)}{\mu_o}$, somit

$$\mu = \mu_o e^{A(U_o - U)}, \quad p = p_o + \frac{\mu_o}{A} \left[e^{A(U_o - U)} - 1 \right] \dots (8)$$

Ist A so klein, dass man die zweite Potenz und alle höheren Potenzen von $A(U - U_o)$ im Vergleiche zu dieser Größe vernachlässigen kann, so führt die Entwicklung der Exponentialgröße in (8) in die bekannte Exponentialreihe zu den einfachen Relationen $\mu = \mu_o [1 + A(U_o - U)]$ und $p = p_o + \mu_o (U_o - U)$.

Anmerkung. Ist p in Atmosphären ausgedrückt (vergl. Anm. 6 des folgenden Paragraphen), so hat zufolge Regnault und Grassi's Messungen $\frac{A}{\mu_o}$ bei einer Temperatur von 0° für Quecksilber den Wert $0.000\ 0030$ und für Wasser $0.000\ 0500$, bei 53° C. für Wasser $0.000\ 0440$. (Bei früheren Messungen wurden

für Quecksilber, bezw. Wasser folgende Zahlwerte für $\frac{A}{\mu_0}$ gefunden: Von Oerstedt bei 3·75° C. $2\cdot65 \times 10^{-6}$, bezw. $46\cdot77 \times 10^{-6}$, von Colladon und Sturm bei 10° C. $5\cdot03 \times 10^{-6}$, bezw. $50\cdot50 \times 10^{-6}$, von Aimé bei 12·6° C. $4\cdot0 \times 10^{-6}$, bezw. $50\cdot2 \times 10^{-6}$.)

Für ein vollkommenes Gas, für welches zufolge des Mariotte'schen (Boyle'schen*) Gesetzes (siehe S. 28) $\mu = Ap$, also $f(p) = Ap$ ist, wo A das constante Verhältnis der Dichtigkeit zum Druck für die ins Auge gefasste Gasart bedeutet, ergibt sich aus (6)

$$U = \int \frac{dp}{Ap} = -\frac{1}{A} \cdot \log \text{nat } p + C, \text{ also, da für } p = p_0 \text{ auch}$$

$U = U_0$ ist, $U_0 - U = \frac{1}{A} \log \text{nat } \frac{p}{p_0}$, somit, was man auch sofort aus (8) findet, wenn man $\mu = Ap$, somit $\mu_0 = Ap_0$ setzt,

$$p = p_0 \cdot e^{A(U_0 - U)} \quad \dots \quad (9)$$

Wenn demnach das Potential U der beschleunigenden Kraft bei einem vollkommenen Gase in arithmetischer Progression zunimmt, bezw. abnimmt, so nimmt der Druck in geometrischer Progression ab, bezw. zu.

Wird die Flüssigkeit in ihrer ganzen Ausdehnung oder zum Theile nach außen hin durch die wie immer geformte Oberfläche eines zweiten Körpers begrenzt, so wirkt auf jedes Element dF dieser gemeinsamen Oberfläche eine zu diesem Elemente dF , dessen Coordinaten durch xyz bezeichnet seien, normale Druckkraft dN , die zufolge der Gleichung (1) gegeben ist durch $dN = p \cdot dF$, wo p durch Integration der Gleichung (6) aus dem Potential U der äußeren Kräfte bestimmt werden kann. Gehören nun diese gedrückten Elemente dF der Oberfläche eines starren Körpers K an, so lassen sich die auf diesen Körper K einwirkenden Kräfte dN den Entwicklungen des § 73 (S. 431) zufolge im allgemeinen reduciren auf eine Reducionsresultante R und ein Kräftepaar M , und aus R und M lässt sich auch in bekannter Weise die Centralachse dieser Kräfte bestimmen.

In jenen Fällen nun (siehe S. 441), in welchen die Invariante des Systems der Kräfte Null und R von Null verschieden ist, haben diese Kräfte dN eine Resultante. Dies findet unter anderem stets dann statt, wenn die gedrückte Wand eben ist, da in diesem Falle alle zur Wand normalen Kräfte $dN = p \cdot dF$ durchwegs gleichgerichtet sind, und zwar ist dann die Resultante R die Summe der Componenten, also $R = \int dN = N$. Es haben ferner in diesem

*) Es fanden dies Gesetz unabhängig voneinander fast zu gleicher Zeit der Engländer Boyle (1660) und der Franzose Mariotte (1670). Es wird daher dies Gesetz correcter Mariotte-Boyles Gesetz genannt.

Falle die Druckkräfte dN einen Mittelpunkt A , dessen Coordinaten XYZ sich mit Hilfe der Gleichung (4) auf S. 447 (in welcher das Summenzeichen in ein Integralzeichen übergeht) bestimmen lassen. Es ist:

$$X = \frac{\int x \cdot dN}{\int dN} = \frac{\int xp \cdot dF}{\int p \cdot dF}, \quad Y = \frac{\int yp \cdot dF}{\int p \cdot dF}, \quad Z = \frac{\int zp \cdot dF}{\int p \cdot dF} \quad (10)$$

Man bezeichnet diesen Mittelpunkt A als den Mittelpunkt des Druckes im weiteren Sinne des Wortes; ist die Flüssigkeit eine incompressible schwere Flüssigkeit, auf welche außer der Schwere keine anderen Kräfte wirken (siehe § 105), so ist A der Druckmittelpunkt im engeren Sinne des Wortes. (Mitunter wird in technischen Schriften auch bei einer nicht ebenen Wand, wofern die Kräfte dN sich auf eine Resultante zurückführen lassen, jener Punkt, in welchem die Richtungslinie der letzteren die Wand schneidet, als Mittelpunkt des Druckes bezeichnet.)

Die Integration in den Gleichungen (10) ist auszudehnen auf die ganze ebene Wand F , die dem Drucke der Flüssigkeit ausgesetzt ist.

Ist der spezifische Druck in der ganzen Ausdehnung der ebenen Wand F constant, was z. B. dann der Fall ist, wenn auf die Masse der inneren Flüssigkeitstheilchen keine äußeren Kräfte wirken, oder wenn die auf die Flüssigkeit einwirkenden beschleunigenden Kräfte P durchwegs parallele Kräfte sind und die ebene Wand die Lage einer zu diesen Kräften senkrechten Niveauläche hat, so sind die Druckkräfte dN den Flächen dF proportional, und es lassen sich Zähler und Nenner in (10) durch den constanten Factor p abkürzen; demnach nehmen

diese Gleichungen (10) die Form $FX = \int x dF$, $FY = \int y dF$, $FZ = \int z dF$ an. Die Übereinstimmung dieser Gleichungen mit den Gleichungen (3) auf S. 486 lehrt, dass in diesem Falle der Mittelpunkt des Druckes identisch ist mit dem Schwerpunkte der von der Flüssigkeit gedrückten Wandfläche F .

Bei der früheren Deduction des Satzes, dass in allen jenen Punkten der Flüssigkeit, die derselben Niveauläche angehören, der spezifische Druck stets der gleiche ist, wurde vorausgesetzt, dass man von jedem dieser Punkte nach jedem anderen in der Niveauläche einen ununterbrochenen Flüssigkeitsfaden führen kann. Es fragt sich nun, wie sich die Druckverhältnisse gestalten, wenn Flüssigkeitsschichten, die derselben Niveauläche angehören, aus voneinander vollständig getrennten Flächentheilen ff'' . . . bestehen, von welchen jeder durch Wände derartiger Gefäße begrenzt wird, welche gestatten, dass es — wenn auch nicht durchwegs in derselben Niveauläche gelegene — continuierliche, d. h. durch die Gefäßwände nicht unter-

brochene Flüssigkeitsfäden von irgend welcher Form gibt, welche die Punkte von f mit jenen von $f', f'' \dots$ verbinden.

In einem solchen Falle bezeichnet man die einzelnen Gefäße, in welchen die Flächentheile $fff' \dots$ gelegen sind, als communicierende Gefäße; man spricht dann von einer Communication der Flüssigkeiten in diesen Gefäßen.

Es seien etwa in communicierenden Gefäßen der Fig. 195 die Flächen $BC, B'C' \dots$ die voneinander getrennten Theile $f, f' \dots$ der Niveauläche vom Potential U und $B_o C_o, B_o' C_o' \dots$ Theile der Niveauläche vom Potential U_o u. s. w. $A_o A_n A_n' A_o'$ sei ein continuierlicher Flüssigkeitsfaden von der obbetrachteten Art, der die Punkte AA' , bezw. $A_o A_o'$ dieser getrennten Niveaulächentheile verbindet. Jene äußerste Niveauläche, die den Flüssigkeitsfaden tangiert, habe das Potential U_n , und sie berühre denselben im Punkte A_n . (Da dementsprechend in A_n die Kraft P normal zu dem benachbarten Längenelemente ds des Flüssigkeitsfadens, also $\cos(ds, P) = 0$ ist,

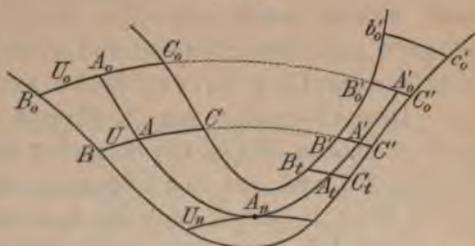
so muss zufolge (4) und (6) der Druck p und auch das Potential U im Punkte A_n für die Curve $A_o A_n A_o'$ ein Maximum oder Minimum sein.) Für den ganzen Bereich der continuierlichen Curve $A_o A_n A_o'$ ist die Gleichung (6) gültig, und ihre Integration führt, wenn durch p_o der Druck in der anfänglichen Niveauläche $B_o C_o$ bezeichnet wird, für eine homogene unzusammendrückbare Flüssigkeit zu der Gleichung (7), welche lehrt, dass gleichen Werten des U in der ganzen Ausdehnung der Curve $A_o A_n A_o'$ auch gleiche Werte von p entsprechen. Ist anderseits die in allen communicierenden Gefäßen enthaltene Flüssigkeit eine compressible Flüssigkeit von durchwegs derselben Art und Temperatur, so ist $\mu = f(p)$ eine eindeutige, stetige, und zwar stets positive Function von p , und es muss demnach die Integration der Gleichung (6) zwischen den Grenzen p_o und p dem Begriffe eines bestimmten Integrals zufolge zu dem eindeutigen Integral

$$U_o - U = \int_{p_o}^p \frac{dp}{\mu} = \int_{p_o}^p \frac{dp}{f(p)}$$

führen, somit auch, da U_o ein gegebener

Anfangswert ist, zu einem vollkommen bestimmten Werte von U , d. h. es ist U eine eindeutige Function von p ; da nun ferner der Differentialquotient $\frac{dU}{dp}$ stets einen bestimmten negativen, endlichen

Fig. 195.



Wert, nämlich zufolge (6) den Wert $-(1:\mu)$ hat, so nimmt U stetig zu, wenn p abnimmt, und umgekehrt; es können demnach denselben Werte von U im Bereiche eines Flüssigkeitsfadens nicht zwei verschiedene Werte von p entsprechen, oder mit anderen Worten, es ist auch p eine eindeutige Function von U , die in Fig. 194 durch die Curve $M_o M M_n$ dargestellt ist. Mag demnach die in den mit einander communicierenden Gefäßen enthaltene Flüssigkeit eine homogene unzusammendrückbare oder aber eine compressible Flüssigkeit derselben Art (und von derselben Temperatur) sein, stets muss bei Wiederkehr desselben Wertes von U in dem Flüssigkeitsfaden $A_o A_n A_o'$ auch derselbe Wert des p wiederkehren und umgekehrt; mit anderen Worten: es muss in den einzelnen Flächentheilen ff' . . . derselben Niveaufläche in den verschiedenen mit einander communicierenden Gefäßen der gleiche Druck und daher auch dieselbe Dichte herrschen und ebenso müssen gleichem Drucke und gleicher Dichte auch Flächentheile derselben Niveaufläche entsprechen.

Dem Übergange von A_o über A nach A_n und weiter über A nach A_o' u. s. w. in Fig. 195 entspricht dann in der Potentialdruckcurve in Fig. 193 und 194 der Übergang von M_o über M nach M_n und weiter über M zurück nach M_o u. s. w.

Sind jedoch in den communicierenden Gefäßen Flüssigkeiten verschiedener Art übereinander gelagert, so dass z. B. $B_t C_t$ in Fig. 195 die Trennungsfäche zweier Flüssigkeiten, von denen die eine den Raum zwischen $B_o C_o$ und $B_t C_t$, die andere den Raum $B_t C_t B_o' C_o'$ (und vielleicht auch darüber hinaus) ausfüllt, und ist A_t der Durchschnittspunkt des obbetrachteten Flüssigkeitsfadens mit der Trennungsfäche $B_t C_t$ der Flüssigkeiten, die Früherem zufolge eine Niveaufläche, etwa vom Potentialwerte U_t ist, so müssen dem dem Punkte A_t entsprechenden Punkte M_t der Potentialdruckcurve — früheren Auseinandersetzungen zufolge — im allgemeinen zwei Tangenten entsprechen, die mit der x -Achse jene Winkel α und α' bilden, für welche $\tan \alpha = -\mu$ und $\tan \alpha' = -\mu'$ ist, wo μ und μ' die Dichtigkeiten der beiden Flüssigkeiten an der Trennungsfäche $B_t C_t$ bedeuten. Es entspricht dann dem Flüssigkeitsfaden $A_t A' A_o'$ die punktierte Potentialdruckcurve $M_t M' M_o'$ in Fig. 193 oder in Fig. 194, je nachdem die entsprechende Flüssigkeit incompressibel oder compressibel ist. (Sollte an der Trennungsfäche $\mu = \mu'$ sein, so würde die der zweiten Flüssigkeit entsprechende punktierte Curve $M_t M' M_o'$ die frühere Curve $M_o M_t M_n$ im Punkte M_t berühren. Wäre im Raume $B_o C_o B_t C_t$ (Fig. 195) eine incompressible Flüssigkeit (z. B. Quecksilber), über $B_t C_t$ dagegen eine compressible Flüssigkeit (z. B. Luft), so wäre in Fig. 194 $M_o M M_n$ eine gerade Linie.) Den aufeinander

folgenden Punkten $A_o A A_n A_t A' A_o'$ in dem betrachteten Flüssigkeitsfaden entsprechen in der Curve Fig. 193 und 194 die aufeinanderfolgenden Punkte $M_o M M_n M_t M' M_o'$.

Sind die Flüssigkeiten in den communicierenden Gefäßen homogene (unzusammendrückbare) Flüssigkeiten, deren Dichtigkeiten μ und μ' sind, und sind die Drücke in $A_o A A_t A' A_o'$ durch $p_o p p_t p' p_o'$ bezeichnet, so ist, wie aus Fig. 193 sofort ersehen werden kann,

$$\left. \begin{aligned} p_t - p &= (U_t - U) \cdot \operatorname{tg} \alpha = (U - U_t) \cdot \mu \\ p_t - p' &= (U_t - U) \operatorname{tg} \alpha' = (U - U_t) \cdot \mu' \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Dementsprechend bestehen, wie die Division und Subtraction dieser Gleichungen lehrt, für die Werte p und p' des Druckes in den verschiedenen Theilen BC und $B'C'$ derselben Niveaufläche die leicht in Worte zu kleidenden Relationen

$$\frac{p_t - p}{p_t - p'} = \frac{\mu}{\mu'}, \quad \overline{MM} = p - p' = (U - U_t) (\mu' - \mu) \dots (12)$$

Um zu erfahren, in welcher Niveaufläche $b_o'c_o'$ (Fig. 195) der Flüssigkeit von der Dichte μ' , d. i. für welchen Wert U_o' des Potentials derselbe Wert p_o wiederkehrt, der in der Ausgangsniveaufläche $B_o C_o$ der Flüssigkeit von der Dichte μ herrscht, hat man offenbar in Fig. 193 von M_o eine Parallele zur Abscissenachse zu ziehen bis zum Durchschnitte m_o' mit der punktierten Linie $M_t M' M_o'$; es sind dann die Coordinaten des Punktes m_o' offenbar U_o' und p_o , jene von M_o aber U_o und p_o , also der Gleichung (7) zufolge

$$p_t - p_o = (U_o - U_t) \mu = (U_o' - U_t) \mu' \dots (13)$$

d. h. es sind in communicierenden Gefäßen bei zwei homogenen unzusammendrückbaren Flüssigkeiten von gleicher Temperatur die den Flächen gleichen Druckes p_o im Vergleiche zu der Trennungsfäche entsprechenden Potentialdifferenzen $U_o - U_t$ und $U_o' - U_t$ den Dichtigkeiten μ und μ' der Flüssigkeiten invers proportional.

Bei der Ableitung der hydrostatischen Grundgleichung (4) wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass die beschleunigende Kraft P sich auf jenes Achsensystem beziehe, bezüglich dessen die Flüssigkeit sich im Ruhezustande befindet. Ist demgemäß die Flüssigkeit in relativer Ruhe zu irgend einem Achsensystem A , bzw. zu einem unveränderlichen Punktsystem S , das sich in gewisser, sei es translatorischer oder rotierender oder im allgemeinen aus Translation und Rotation zusammengesetzter Bewegung in Bezug zu einem zweiten Achsensystem a , bzw. einem zweiten Punktsystem s befindet, und ist P_s die resultierende, auf das letztere Achsensystem a

(Punktsystem s) sich beziehende beschleunigende Kraft, so hat P in Gleichung (4) und auch in allen folgenden aus (4) deducierten Gleichungen dem d'Alembert'schen Princip (siehe S. 319 und 320) zufolge die Bedeutung jener relativen auf das System A (S) sich beziehenden beschleunigenden Kraft P_A , die stets angesehen werden kann als die Resultante aus der Kraft P_a und dem Trägheitswiderstande ($-R$), welcher letzterer wiederum aus den zu den Achsen xyz des Achsensystems a parallelen fictiven beschleunigenden Kräften $\left(-\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, $\left(-\frac{d^2y}{dt^2}\right)$, $\left(-\frac{d^2z}{dt^2}\right)$ resultiert — oder, was auf das Gleiche hinauskommt: Es setzt sich die zur Kraft P_a hinzuzufügende fictive Kraft ($-R$), d. i. der Trägheitswiderstand zusammen (siehe S. 320) aus der beschleunigenden Centrifugalkraft $-P_c = -\frac{v^2}{\rho}$ und der beschleunigenden entgegengesetzten Tangentialkraft $-P_t = -\frac{dv}{dt} = -\frac{d^2s}{dt^2}$ (wo v die Geschwindigkeit des Flüssigkeitstheilchens in Bezug zum System a und ρ den Krümmungshalbmesser seiner Bahn bedeutet).

Befindet sich z. B. eine schwere Flüssigkeit in relativer Ruhe in einem Gefäße S , das sich in irgend einer Bewegung (in Bezug zur Erde s) befindet, so bedeutet P_a die beschleunigende Kraft g der Schwere und ($-R$) resultiert aus der durch die besondere Art der Bewegung des Gefäßes bedingten Fliehkraft $-\frac{v^2}{\rho}$ und aus der zur Bahn des betreffenden Flüssigkeitstheilchens tangentialen Kraft $\left(-\frac{dv}{dt}\right)$; es bedeutet demgemäß in diesem Falle P die Resultante aus den beschleunigenden Kräften g , $-\frac{v^2}{\rho}$ und $-\frac{dv}{dt}$.

Ist die Bewegung des Gefäßes eine fortschreitende, so sind die zur selben Zeit wirksamen Kräfte ($-R$), da R in diesem Falle die Beschleunigung dieser progressiven Bewegung bedeutet, für alle Punkte nicht nur gleich, sondern auch gleichgerichtet. Ist demnach P_a Null, so ist die beschleunigende Kraft P in der Gleichung (4) identisch mit ($-R$), und es müssen daher die zur letzteren Kraft senkrechten Niveaulächen Ebenen sein, welche, wenn die beschleunigende Kraft R der progressiven Bewegung ihre Richtung nicht ändert, ihre relative Lage zum Gefäße beibehalten. Ebenso werden auch dann die Niveaulächen Ebenen von unveränderlicher Lage in Bezug auf das Gefäß sein, wenn aus P_a und ($-R$) für alle Punkte gleichgerichtete beschleunigende Kräfte P resultieren, die in Bezug auf das Gefäß stets die gleiche Richtung beibehalten.

Befindet sich das Gefäß in gleichförmiger Rotation um eine Achse, die ihre Lage zum System a und s nicht ändert, so ist

$\frac{dv}{dt} = 0$, demnach $(-R)$ identisch mit der beschleunigenden Centrifugalkraft $F = -R = -rw^2$, wo r den Abstand irgend eines Flüssigkeitstheilchens von der unveränderlichen Rotationsachse und w die constante Winkelgeschwindigkeit der Rotation bedeuten. Dementsprechend resultiert die beschleunigende Kraft P aus P_a und der Centrifugalkraft $F = -rw^2$. Ist also U_a das Potential der Kraft P_a und U_f das Potential der Centrifugalkraft F , so ist das Potential U der Kraft P bestimmt durch $U = U_a + U_f$. Nun ist zufolge der Gleichung (1) auf S. 201 $\frac{dU_f}{ds} = -rw^2 \cdot \cos(F, ds) = -rw^2 \cdot \cos(r, ds)$,

daher (siehe S. 204) $\frac{dU_f}{ds} = -rw^2 \cdot \frac{dr}{ds}$ oder $dU_f = -w^2 \cdot r dr$.

Integriert man diese Gleichung, so findet man (abgesehen von der Integrationsconstanten, die zur Constanten des Potentials U_a hinzuzurechnet werden kann) als Potential der Fliehkraft

$$U_f = -\frac{1}{2} r^2 w^2 \dots (14)$$

Dementsprechend ist das gesuchte Potential U der relativen Kraft P

$$U = U_a + U_f = U_a - \frac{1}{2} r^2 w^2 \dots (15)$$

Da nun die Niveauflächen Flächen constanten Potentials U sind, so ist die Gleichung der Niveauflächen für eine Flüssigkeit, die gleichförmig um eine Achse mit der constanten Winkelgeschwindigkeit w rotiert und sich dabei in relativer Ruhe befindet,

$$U_a - \frac{1}{2} r^2 w^2 = A \dots (16)$$

wobei der für jede Niveaufläche constante Potentialwert A von einer Niveaufläche zur anderen variiert. Den Druck p in jeder Niveaufläche kann man nach Einführung des Wertes von U aus (15) in die Gleichung (6) durch Integration dieser Gleichung bestimmen. So ist z. B. für eine homogene incompressible Flüssigkeit von der Dichtigkeit μ zufolge (7) $p - p_o = \mu(U_o - U)$ u. s. w.

Anmerkung. Ist die auf die Flüssigkeit einwirkende beschleunigende Kraft P_a eine anziehende Centralkraft, die dem Abstände R von dem Centralpunkte O direct proportional ist, also

$$P_a = k^2 \cdot R \dots (17)$$

wo k^2 [in Übereinstimmung mit der Gleichung (1) auf S. 153] den Wert dieser beschleunigenden Kraft P_a im Abstände $R = 1$ bedeutet, und rotiert die Flüssigkeit um eine den Centralpunkt O enthaltende Achse z mit der constanten Winkel-

geschwindigkeit w , so ist in der Gleichung (15) zufolge der Gleichung (4) auf S. 203 zu setzen $U_s = \int + k^2 R \cdot dR = + \frac{k^2 R^2}{2} + C$ (wo C eine Integrationsconstante bedeutet, die durch die Wahl jener Entfernung, in welcher Null als Wert des Potentials U_s angenommen wird, bestimmt ist). Somit ist das Potential U der relativen Kraft P

$$U = U_s - \frac{1}{2} r^2 w^2 = \frac{1}{2} (k^2 R^2 - r^2 w^2) + C \dots (18)$$

Legt man durch den fixen Centralpunkt O als Anfangspunkt ein orthogonales Achsensystem, so ist offenbar $r^2 = x^2 + y^2$ und $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$, so dass die Gleichung (18) die Form annimmt

$$(k^2 - w^2) \cdot (x^2 + y^2) + k^2 \cdot z^2 = 2(U - C) \dots (19)$$

Da für eine jede Niveaufläche das Potential U einen constanten Wert hat, so lehrt die Gleichung (19), dass die Niveauflächen Rotationsflächen zweiten Grades sind, deren gemeinsame Achse die z -Achse und deren Mittelpunkt der Centralpunkt O ist.

Die Art dieser Rotationsflächen hängt zufolge der Gleichung (19) davon ab, ob $k > w$, $k = w$ oder $k < w$ ist.

a) Ist $k > w$, so sind zufolge der Gleichung (19), die auch in der Form

$$\frac{x^2 + y^2}{2 \frac{U - C}{k^2 - w^2}} + \frac{z^2}{2 \frac{U - C}{k^2}} = 1 \dots (20)$$

geschrieben werden kann, die Niveauflächen Rotationsellipsoide, deren äquatorialer Radius $a = \sqrt{2 \frac{U - C}{k^2 - w^2}}$ und deren polarer Radius $c = \sqrt{2 \frac{U - C}{k^2}}$ ist. Die Ellipsoide sind, da $k^2 - w^2 < k^2$, also $a > c$ ist, an den Polen abgeplattet. (Wäre $w = 0$, würde also die Flüssigkeit nicht rotieren, so wäre $a = c$, d. h. die Niveauflächen wären Kugelflächen.) Die numerische Excentricität ϵ , d. i. $\epsilon = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2}}$ hat den obigen Werten von a und c zufolge den von U unabhängigen, also für alle Niveauflächen constanten Wert $\epsilon = \frac{w}{k}$. Da ferner, wie (19) lehrt, $2(U - C) = k^2 c^2$, also $U = \frac{1}{2} k^2 c^2 + C$ ist, so nimmt, wenn c (und in demselben Verhältnisse auch a) abnimmt, also beim Übergang von einem dieser Ellipsoide zu einem von diesem eingeschlossenen zweiten kleineren Ellipsoid das Potential U ab, also der Druck p zu. Ist für $c = c_0$ der Druck durch p_0 bezeichnet und $U_0 = \frac{1}{2} k^2 c_0^2 + C$, so ist bei einer incompressiblen Flüssigkeit, deren Dichtigkeit μ ist, $p - p_0 = \mu(U_0 - U) = -\frac{1}{2} \mu k^2 (c_0^2 - c^2)$. Im Centralpunkte O ist $c = 0$ und der Druck ein Maximum, und zwar $p = p_0 + \frac{1}{2} \mu k^2 c_0^2$.

Für ein vollkommenes Gas ist zufolge (9) $p = p_0 e^{\frac{1}{2} \Delta k^2 (c_0^2 - c^2)}$ u. s. w.

- b) Ist $k = w$, so nimmt die Gleichung (19) die Form $z = \pm \frac{\sqrt{2(U - C)}}{k}$ an.
 d. h. die Niveauflächen werden Ebenen, die zur Rotationsachse senkrecht sind.
 c) Ist $k < w$, so sind die Niveauflächen, deren Gleichung zufolge (19)

$$\frac{x^2 + y^2}{2 \frac{U - C}{w^2 - k^2}} - \frac{z^2}{2 \frac{U - C}{k^2}} = 1 \text{ oder } \frac{z^2}{2 \frac{U - C}{k^2}} - \frac{x^2 + y^2}{2 \frac{U - C}{w^2 - k^2}} = 1 \dots (21)$$

ist, Rotationshyperboloide, und zwar ist die reelle Achse der hyperbolischen Meridiancurven jener Niveauflächen, für welche $C > U$ ist, senkrecht zur Rotationsachse z , während sie bei jenen Niveauflächen, für welche $U > C$ ist, mit der Rotationsachse z übereinstimmt. Für jene besondere Niveaufläche, für welche $U = C$ ist, hat die Durchschnittsline mit der zx -Ebene zufolge (19)

die Gleichung $z = \pm \frac{\sqrt{w^2 - k^2}}{k} x$, d. h. die Meridiancurve übergeht in zwei

durch den Centralpunkt O gehende Gerade, die mit der z -Achse einen Winkel γ einschließen, für welchen $\tan \gamma = \pm \frac{k}{\sqrt{w^2 - k^2}}$ ist; es wird demnach diese

Niveaufläche eine senkrechte Kegelfläche, welche die z -Achse zur Achse hat. Diese Kegelfläche berührt auch, wie die Gleichungen (21) lehren, asymptotisch alle oberwähnten Rotationshyperboloide. Bei den ersterwähnten Flächen, für welche $C > U$ ist, nimmt, wie dies auf dieselbe Art wie unter (a) gezeigt werden kann, der Druck ab, wenn die Längen der Achsen abnehmen, bei den letzterwähnten Hyperboloiden, bei welchen $C < U$ ist, nimmt jedoch der Druck ab, wenn die Achsenlängen zunehmen. In der diese beiden Arten der Flächen trennenden Kegelfläche besteht derselbe Druck wie im Centralpunkte.

Eine interessante Anwendung des unter (a) behandelten Falles auf die Gestaltung der Meeresoberfläche möge hier noch ihren Platz finden.

Aus dem auf S. 166 Gesagten ist zu ersehen, dass, wenn die Erde als eine homogene Kugel angesehen werden könnte, die absolute Beschleunigung P_a der Erdschwere, deren Wert an der Erdoberfläche durch G bezeichnet sei, an einem beliebigen Punkte innerhalb der Erdoberfläche der Entfernung vom Erdmittelpunkte direct proportional sein, also die Gleichung (17) Giltigkeit haben müsste, und zwar hätte dieser Gleichung zufolge k^2 den constanten Wert $k^2 = -\frac{G}{R}$, wenn durch R der Erdradius bezeichnet ist. Da nun die infolge der

Erdrotation hervorgerufene Centrifugalbeschleunigung am Äquator, d. i. Rw^2 jedenfalls kleiner als die Erdanziehung G , also $\frac{G}{R} > w^2$, somit $k^2 > w^2$ ist, so

hätte man bei der Betrachtung der Gestalt der Meeresoberfläche den hier unter (a) behandelten Fall vor sich, und es müssten demgemäß die Meeresoberfläche

und alle Niveauflächen unterhalb der Meeresoberfläche Rotationsellipsoide sein, deren Achse die Erdachse wäre, und deren numerische Excentricität $\epsilon = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2}}$

den Wert $\frac{w}{k}$ hätte, somit, da $k = \sqrt{\frac{G}{R}}$ ist, $\epsilon = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{Rw^2}{G}}$ wäre,

d. h. das Quadrat ϵ^2 der Excentricität der Meeresoberfläche müsste an Größe gleich sein dem Verhältnisse der Centrifugalkraft am Äquator zur absoluten Schwerkraft,

das (siehe S. 194) den Wert $\frac{1}{290.4}$ hat. Da somit $\frac{1}{290.4} = \epsilon^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2$

wäre, wenn c den Polarradius und a den Äquatorialradius der zum vollständigen Rotationsellipsoide erweitert gedachten Meeresoberfläche bedeutet, und da die Ab-

plattung (Ellipticität) e derselben durch die Verhältniszahl $e = \frac{a - c}{a} = 1 - \frac{c}{a}$ be-

stimmt ist, so ergibt die Substitution von $\frac{c}{a}$ aus der letzten Gleichung in die vorletzte

$\frac{1}{290.4} = \epsilon^2 = 1 - (1 - e)^2 = 2e - e^2 = 2e \left(1 - \frac{e}{2}\right)$, oder da die Abplattung e so

gering ist, dass $\frac{e}{2}$ gegen 1 vernachlässigt werden kann, $\frac{1}{290.4} = \epsilon^2 = 2e$, d. h.

die Ellipticität e wäre gleich der Hälfte des oberwähnten Verhältnisses der Centrifugalkraft am Äquator $m R w^2$ zur absoluten Schwerk-

kraft mG , also $e = \frac{1}{581}$. Zu erwähnen ist, dass auch für die Ablenkung δ der Verticalen von der Richtung des Erdhalbmessers sich derselbe Coefficient ergibt, denn zufolge S. 193 ist $\delta = \frac{1}{581} \cdot \sin 2\varphi$, wo φ die geographische Breite bedeutet. (In der That führt auch, wenn ε^2 gegen 1 vernachlässigt wird, die Berechnung der Ablenkung δ der Normalen eines Rotationsellipsoids vom Radius vector zu dem Werte $\delta = \frac{\varepsilon^2}{2} \sin 2\varphi$.) Ferner wäre unter den obigen Annahmen, wie dies auf S. 194 gezeigt wurde, der Wert der relativen (scheinbaren) Beschleunigung der Schwere $g = G \left(1 - \frac{1}{290.4} \cos^2 \varphi\right)$. Der durch wirkliche Pendelbeobachtungen gefundene Coefficient des $\cos^2 \varphi$ in der letzten Gleichung ist $\frac{1}{189.3}$ und zwar rührt, wie dies schon auf S. 194 bemerkt wurde, diese Abweichung der beiden Coefficienten daher, dass der feste Erdkörper weder sphärisch noch homogen ist. Ebenso wurde durch Messungen als wahrer Wert der Abplattung jenes Rotationssphäroids, das sich der Meeresoberfläche am meisten annähert, nicht der oben gefundene Wert $e = \frac{1}{581}$, sondern der Näherungswert $\frac{1}{299}$ gefunden. Der Unterschied dieser beiden letzten Werte, d. i. etwa $\frac{1}{616}$ findet auch in demselben Umstande seine Erklärung. Es kann also die tatsächliche Ellipticität $\frac{1}{299}$ der Meeresoberfläche, wie W. Thomson und Tait in ihrer wiederholt schon citierten „Natural Philosophy“ bemerken, aus zwei nahezu gleichen Theilen bestehend angesehen werden, von denen der größere $\frac{1}{581} \left(\frac{1}{580}\right)$ direct von der Centrifugalkraft, der kleinere $\frac{1}{616} \left(\frac{1}{600}\right)$ von der Abweichung der anziehenden festen und flüssigen Masse von sphärischer Symmetrie herrührt.

In ähnlicher Weise hat man in allen anderen Fällen bei der Untersuchung der Niveauflächen und der Druckverhältnisse in Flüssigkeiten, die sich in relativer Ruhe zu irgend einem beweglichen Achsen-system befinden, vorzugehen.

§ 105. Gleichgewicht schwerer Flüssigkeiten. (Hydrostatischer Druck schwerer compressibler und incompressibler Flüssigkeiten. Archimedisches Gesetz. Stabilität des Schwimmens. Mittelpunkt des Druckes. Barometrische Höhenformel. Relatives Gleichgewicht schwerer Flüssigkeiten.)

Für eine schwere Flüssigkeit, auf welche außer dem Drucke, dem ihre äußersten Grenzflächen ausgesetzt sind, und außer der Schwerkraft keine weiteren äußeren Kräfte einwirken, und welche in Bezug zur Erde sich in relativer Ruhe befindet, hat P die Bedeutung der beschleunigenden Kraft g der Schwere.

Ist die Flüssigkeit nicht allzu ausgedehnt, was in diesem Paragraph stets vorausgesetzt sein soll, so kann man $P = g$ als eine constante Kraft von constanter Richtung voraussetzen, und zwar ist das Potential U der beschleunigenden Kraft g der Schwere, wenn man die Richtung vertical nach abwärts zur positiven Richtung

der z -Achse eines orthogonalen Achsensystems wählt, zufolge der Gleichung (2) auf S. 202

$$U = -gz + C \dots (1)$$

wo C irgend eine Constante bedeutet.

Die Niveauflächen sind dann aus bekannten Gründen horizontale Ebenen, und die Kraftlinien sind verticale Gerade. Es herrscht demnach zufolge des letzten Paragraphen in derselben horizontalen Flüssigkeitsquerschnittsfläche, wenn dieselbe eine continuierliche Fläche ist (d. h. wenn man von jedem Flüssigkeitstheilchen dieser Querschnittsfläche nach jedem anderen Flüssigkeitselemente derselben irgend einen horizontalen wie immer gekrümmten continuierlichen Flüssigkeitsfaden führen kann), derselbe Druck und dieselbe Temperatur, und die Trennungsfäche zweier nicht mischbaren schweren Flüssigkeiten von verschiedener Dichte muss horizontal sein. Der Druck und die Dichte sind somit bei einer Flüssigkeit derselben Art bloß als Functionen von z anzusehen.

Jener Theil der gesammten Grenzfläche einer Flüssigkeit, welcher nicht auch der Gefäßwand angehört, sondern die Flüssigkeit meist von einer zweiten Flüssigkeit (der umgebenden Luft, beziehungsweise irgend einem über der Flüssigkeit gelagerten Gase, Dampfe u. s. w.) trennt, wird statt, wie dies bisher geschehen ist, als Trennungsfäche meist kurzweg als Flüssigkeitsoberfläche (im engeren Sinne des Wortes), oder als Flüssigkeitsspiegel, Spiegelfläche u. s. w. bezeichnet. Hat in einer Niveaufläche der Druck den Wert Null, was z. B. dann der Fall ist, wenn diese Fläche die Flüssigkeit von dem freien luftleeren Raume trennt, so wird dieselbe die freie Oberfläche der Flüssigkeit genannt.

Die Oberfläche einer ruhenden schweren Flüssigkeit von nicht zu großer Ausdehnung, die sich in irgend einem Gefäße befindet, und die außer der Schwere von keiner anderen äußeren Kraft beeinflusst wird (also auch von der Wand keine Anziehung erfährt), ist dem Gesagten zufolge horizontal.

In jeder ruhenden schweren Flüssigkeit muss den Erörterungen des früheren Paragraphen zufolge der Druck in der Richtung der Kraft, also vertical nach abwärts stetig zunehmen, und zwar in der Art, dass der Gleichung (6) des letzten Paragraphen und der Gleichung (1) zufolge $dp = -\mu \cdot dU = \mu g \cdot dz$ ist, was sich übrigens auch sofort aus der Gleichung (4) des letzten Paragraphen ergibt, wenn man $P = g$ und aus bekannten Gründen $\cos(P, ds) = \cos(z, ds) = \frac{dz}{ds}$ setzt.

Nicht nur bei festen Körpern, sondern auch bei schweren Flüssigkeiten wird die Summe der auf die einzelnen Massenpunkte

der Flüssigkeit einwirkenden Schwerkräfte, d. i. das Product aus der Gesamtmasse und der Beschleunigung der Schwere als das Gewicht dieser Flüssigkeitsmasse bezeichnet, und es lassen sich demgemäß die Begriffe des § 79 (S. 472—480) ohne weiteres auf Flüssigkeiten in Anwendung bringen.

Bedeutet also S das specifische Gewicht und D die Dichte (bezogen auf eine Normalsubstanz vom specifischen Gewichte s) der Flüssigkeit in jener horizontalen Niveaufäche, deren verticale Ordinate z ist, so ist zufolge der Gleichung (2) auf S. 473 $\mu g = S$ und zufolge der Gleichung (4) auf S. 480 $\mu g = D \cdot s$, daher

$$dp = \mu g \cdot dz = D \cdot s \cdot dz = S \cdot dz \dots (2)$$

Aus dieser Gleichung ist zu ersehen, dass für einen jeden beliebigen continuierlichen Flüssigkeitsfaden (mag die Temperatur constant sein oder nicht) der Differentialquotient des Druckes p genommen nach der verticalen Ordinate z in einem jeden Punkte einer ruhenden schweren Flüssigkeit stets dem specifischen Gewichte S in diesem Punkte gleich ist. Dieses Gesetz ist das hydrostatische Grundgesetz für schwere Flüssigkeiten.

Die graphische Darstellung der Druckverhältnisse ist durch die Fig. 193 und 194 gegeben, in welchen Zeichnungen auch, da der Gleichung (1) gemäß die Potentialdifferenz $U - U_0$ der Höhendifferenz $z_0 - z$ stets proportional ist, die Abscisse U ohne weiteres durch die Höhe des betrachteten Flüssigkeitselements über einer beliebig gewählten horizontalen Grundebene (Coordinatenebene) ersetzt werden kann, für welche $z = 0$ angenommen ist.

In communicierenden Gefäßen, welche eine Flüssigkeit von gleicher Art und gleicher Temperatur enthalten (mögen diese Gefäße die Form der Fig. 195 oder jene eines nach abwärts gebogenen Rohres [Hebers] haben), muss zufolge des § 104 in derselben Niveaufäche, also bei schweren Flüssigkeiten in derselben Horizontalebene durchwegs der gleiche Druck und die gleiche Dichte stattfinden, und umgekehrt müssen, wenn in derartigen communicierenden Gefäßen der gleiche Druck an zwei beliebigen Stellen herrscht, die betreffenden Flüssigkeitstheilchen in derselben Horizontalebene gelegen sein.

Dies ist das bekannte Gesetz der communicierenden Gefäße.

Durch Integration der Gleichung (2) lässt sich auch die Größe jener Kraft dN bestimmen, mit welcher irgend eine schwere Flüssigkeit von constanter oder auch variabler Temperatur auf irgend ein Element dF der Wand des Gefäßes, in welchem sie sich befindet, drückt, welcher Kraft durch die entgegengesetzt gleiche Gegenkraft ($-dN$), mit der die Gefäßwand auf die Flüssigkeit

drückt, das Gleichgewicht gehalten wird, und zwar ist zufolge der Gleichung (1) auf S. 698 $dN = p \cdot dF$. Im Zustande des Gleichgewichts haben nun (mag die Temperatur in der Flüssigkeit constant sein oder nicht) alle diese Kräfte dN , die auf die gesammte — als starr vorausgesetzte — Wandfläche, mit welcher die Flüssigkeitsmasse in ihrer ganzen Ausdehnung überhaupt in Berührung steht, einwirken, eine vertical nach abwärts gerichtete Resultante R_r , die dem Gesamtgewichte der Flüssigkeit, d. i. dem Producte aus der Flüssigkeitsmasse M und der Beschleunigung der Schwere g gleich ist, wie aus folgender Untersuchung erhellt.

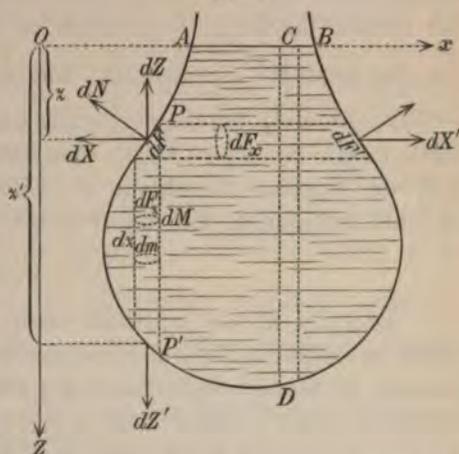
Legt man ein orthogonales Achsensystem mit einer vertical nach abwärts gerichteten z -Achse zugrunde und zerlegt eine jede der Kräfte dN (Fig. 196) in ihre drei zu den Coordinatenachsen parallelen Componenten dX , dY , dZ , so ist

$$\left. \begin{aligned} dX &= dN \cdot \cos(x, dN) = p \cdot dF \cos(x, dN) \\ dY &= dN \cdot \cos(y, dN) = p \cdot dF \cos(y, dN) \\ dZ &= dN \cdot \cos(z, dN) = p \cdot dF \cos(z, dN) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Alle Kräfte dX halten sich nun an der starren Gefäßwand das Gleichgewicht, denn denkt man sich die ganze Flüssigkeit in cylindrische horizontale Flüssigkeitssäulchen zerlegt, deren Erzeugenden parallel zur x -Achse sind, und deren cylindrischen Flächen aus der Gefäßwand beiderseits die unendlich kleinen Flächenelemente dF und dF' herauschneiden, so sind die X -Componenten dX und dX' jener Kräfte dN und dN' , die auf die beiden demselben horizontalen Flüssigkeitssäulchen zugehörigen Wandelemente dF und dF' einwirken, entgegengesetzt gleich und halten sich daher das Gleichgewicht. Es ist nämlich, wenn durch dF_x die senkrechte Querschnittsfläche dieses Säulchens bezeichnet wird, aus bekannten Gründen

$(x, dN) = \pi - (dF_x, dF)$ und $(x, dN') = (dF_x, dF')$, daher zufolge (3) $dX = -p \cdot dF \cos(dF_x, dF) = -p \cdot dF_x$ und $dX' = p \cdot dF' \cos(dF_x, dF') = p \cdot dF_x$, und zwar hat p in den beiden letzten Gleichungen darum denselben Wert, weil dF und dF' in derselben Niveaufäche gelegen sind.

Fig. 196.



Aus gleichen Gründen halten sich auch alle Y -Componenten dY , wie sich durch Zerlegung der Flüssigkeit in horizontale Säulchen parallel zur y -Achse auf gleiche Art ergibt, das Gleichgewicht. Dies ist aber nicht der Fall bei den z -Componenten dZ .

Durch Zerlegung in elementare Flüssigkeitssäulchen PP' parallel zur verticalen z -Achse ergeben sich nämlich, wenn z die verticale Ordinate und p den specifischen Druck für das obere, dagegen z' die verticale Ordinate und p' den specifischen Druck für das untere innerhalb desselben verticalen Säulchens von der Querschnittsfläche dF_z gelegene Element der Wandfläche bedeuten, für dieses Säulchen die z -Componenten $dZ = -p \cdot dF_z$ (für das Flächenelement bei P) und $dZ' = p' \cdot dF_z$ (für das Flächenelement bei P'), deren Resultante dR_z sonach folgenden, und zwar da $p' > p$ ist, positiven Wert besitzt:

$$dR_z = dZ + dZ' = (p' - p) \cdot dF_z \dots (4)$$

Zufolge der Gleichung (2) ist nun $dp = \mu \cdot g dz$, und wenn man die Masse eines in dem verticalen cylindrischen Säulchen PP' enthaltenen Massenelements der Flüssigkeit von der Höhe dz durch dm bezeichnet, $dm = \mu \cdot dF_z \cdot dz$, demnach, wie die Division der beiden letzten Gleichungen lehrt, $dp = g \cdot \frac{dm}{dF_z}$. Durch Summation aller dieser auf die einzelnen Elemente des Flüssigkeitssäulchens PP' , dessen Masse dM sei, bezüglich Gleichungen (d. i. durch Integration der letzten Gleichung) findet man, da dF_z in der ganzen Ausdehnung des Säulchens PP' constant ist, dass $p' - p = g \cdot \frac{dM}{dF_z}$, somit $g \cdot dM = (p' - p) \cdot dF_z$ ist. Die Vergleichung dieser Gleichung mit (4) lehrt, dass $dR_z = g \cdot dM$ ist, und dass sonach die Summe aller dR_z , d. i. die verticale Resultante R_z aller gleichgerichteten Kräfte dR_z in Übereinstimmung mit der früheren Behauptung den Wert hat

$$R_z = g \cdot M \dots (5)$$

Bedeutet M die innerhalb einer beliebigen verticalen Cylinderfläche im Gefäße enthaltene Flüssigkeitsmasse und R_z die verticale Componente der Reductionsresultanten jener Druckkräfte dN , die auf den innerhalb dieser Cylinderfläche gelegenen Theil F der Gefäßwand einwirken, so hat die letzte Gleichung $R_z = Mg$ auch Anwendung auf diesen Theil der Gefäßwand, wie aus der obigen Deduction sofort erhellt, wenn auch im allgemeinen in diesem Falle die X - und Y -Componenten sich nicht das Gleichgewicht halten. Die Resultante R_z der verticalen Componenten der Druckkräfte für irgend eine Fläche F ist also stets gleich dem Gewichte jener Flüssigkeitsmasse, die innerhalb jener verticalen Cylinderfläche, deren Leit-

linie der Umfang der gedrückten Fläche F ist, entweder wirklich enthalten ist oder bei unbegrenzter Erweiterung der Niveauflächen und Entfernung der Gefäßwände, die bekanntlich unbeschadet des Gleichgewichtszustandes angenommen werden kann, enthalten gedacht werden kann, und die nach oben von der freien Flüssigkeitsoberfläche, nach unten von der gedrückten Fläche F begrenzt zu denken ist. Die verticale Resultante R_z , die auf die horizontale Bodenwand eines Gefäßes wirkt, — der sogenannte Bodendruck — ist also vollkommen unabhängig von der Form des Gefäßes und von dem von der Gefäßform abhängigen Gewichte der in dem Gefäße enthaltenen Flüssigkeit und kann bald größer, bald kleiner sein als das gesammte Flüssigkeitsgewicht.

Anmerkung 1. Diese unter dem Namen des hydrostatischen Paradoxons bekannte Thatsache, wie auch andere wichtige Sätze der Hydrostatik über die Größe des Druckes der Flüssigkeiten auf schiefe und verticale Gefäßwände, des Druckes in communicirenden Gefäßen u. s. w. leitete zuerst Stevin (siehe Anm. S. 47) in seinen „Principien der Statik und Hydrostatik (Leyden 1586)“ auf Grund der hydrostatischen Sätze des Archimedes ab, die fast 2000 Jahre, nämlich bis zum Ende des 16. Jahrhunderts das gesammte Wissen in der Hydromechanik ausmachten.

Wäre der Druck einer (schwerlos gedachten) Flüssigkeit in der ganzen Ausdehnung der gesammten äußeren Oberfläche eines in die Flüssigkeit getauchten und von derselben allseits umgebenen Körpers oder umgekehrt der Druck auf die innere Fläche eines geschlossenen Gefäßes überall der gleiche, also auch $p' = p$, so wäre zufolge der Gleichung (4) auch $dR_z = 0$, d. h. es würden sich nicht nur die X - und Y -Componenten, sondern auch die Z -Componenten der Druckkräfte dN , somit auch diese Kräfte dN sich das Gleichgewicht halten. Zugleich ersieht man aus den Gleichungen (3) sofort, dass in diesem Falle infolge des constanten Wertes von p irgend eine der drei orthogonalen Componenten der Reductionsresultanten jener Kräfte dN , die auf irgend einen Theil F der gedrückten Fläche wirken, z. B. die Z -Componente $R_z = \int dZ$ durch das Product aus dem constanten Drucke p in die Projection F_z der Fläche F auf die zu dieser Componente senkrechte xy -Ebene ausgedrückt ist.

Anmerkung 2. Es wurde bei der Deduction auf S. 722 stillschweigend vorausgesetzt, dass in der die Gefäßwand nicht berührenden Oberfläche (in der Spiegelfläche) der schweren Flüssigkeit gar kein Druck stattfindet. Sollte dies nicht der Fall sein, sondern sollte im Gegentheile in der Flüssigkeitsoberfläche AB (Fig. 196) der Druck p_0 herrschen, so darf bei der früheren Berechnung von R_z bei jenen verticalen Flüssigkeitssäulchen CD , welche einen Theil der Oberfläche AB enthalten, die negative Kraft in C , nämlich $dZ_0 = -p_0 dF_z$ nicht, wie dies bei der Ableitung der Gleichung (4) und (5) geschehen ist, mit eingerechnet werden, da ja diese Kraft dZ_0 thatsächlich nicht auf die Gefäßwand wirkt. Da nun die Summe dieser Kräfte dZ_0 den

Wert $-p_0 F_0$ hat, wenn F_0 die Größe der Flüssigkeitsoberfläche bedeutet, so ist thatsächlich der Druck auf die Gefäßwand in diesem Falle um $p_0 F_0$ größer als der Wert (5), demnach $R_z = gM + p_0 F_0$. Ist jedoch, wie dies meist der Fall ist, nicht nur die Flüssigkeitsoberfläche, sondern die gesammte von der Flüssigkeit nicht berührte innere und äußere Oberfläche des Gefäßes diesem Drucke p_0 ausgesetzt, was im Folgenden im allgemeinen vorausgesetzt sein soll, so halten sich, wie kurz zuvor gezeigt wurde, die diesem Drucke p_0 entsprechenden Kräfte an dem Gefäße unter sich das Gleichgewicht, so dass auch dann die durch (5) bestimmte Kraft $R_z = gM$ resultiert.

Um schließlich auch die Lage der verticalen Richtungslinie der Resultanten R_z aller auf die ganze Gefäßwand einwirkenden Kräfte dN in Fig. 196 zu ermitteln, hat man nur die Coordinaten ξ und η des Mittelpunktes der früheren parallelen Kräfte $dR_z = g \cdot dM$ zu bestimmen, da R_z aus diesen Kräften resultiert. Die Coordinaten x und y der Angriffspunkte dieser Kräfte dR_z stimmen mit den entsprechenden Coordinaten irgend eines Punktes des ungemein dünnen Sälchens PP' , also auch mit den Coordinaten x und y des Massenmittelpunktes des Flüssigkeitssäulchens PP' überein. Zuzufolge der Gleichung (4) auf S. 447 ist $\xi = \frac{\int x \cdot dR_z}{R_z} = \frac{\int x \cdot g dM}{gM} = \frac{\int x dM}{M}$ und ebenso $\eta = \frac{\int y dM}{M}$; es sind demnach (siehe § 56 und § 78) ξ und η mit den entsprechenden durch dieselben Formeln ausgedrückten Coordinaten des Massenmittelpunktes S der ganzen Flüssigkeitsmasse ABD identisch (nur die x -Coordinate ist verschieden). Es ist demnach die Richtungslinie der resultierenden Kraft R_z die durch den Massenmittelpunkt S der Flüssigkeitsmasse M geführte Verticale.

Zu denselben Schlussfolgerungen führt bekanntlich die einfache (schon von Stevin angewendete) Überlegung, dass man im Zustande des Gleichgewichts (siehe S. 371) sich die Flüssigkeit ohne Störung des Gleichgewichts, wofern die einwirkenden äußeren Kräfte, ferner der Gegendruck der Gefäßwand, die Dichtigkeit u. s. w. dieselben bleiben, starr geworden denken kann, in welchem Falle bekanntlich die auf den Schwerpunkt S einwirkende Kraft $R_z = Mg$ die Resultante ist.

Ist umgekehrt $ACBD$ (Fig. 196) ein längs der Fläche ADB von einer Flüssigkeit, deren Oberfläche durch die punktierte Linie $OABx$ angedeutet ist, umgebener (ein in eine Flüssigkeit eingetauchter) fester Körper, so übt die Flüssigkeit auf jedes Element der Oberfläche ADB des Körpers einen normalen Druck aus, der die entgegengesetzte Richtung hat von jenem in Fig. 196 — und zwar hat die auf das Flächenelement dF einwirkende Kraft dN denselben Zahlwert wie früher, wenn die nunmehr den Körper umgebende Flüssigkeit in jeder Niveaufläche von derselben Art und

Temperatur ist wie jene, die bei der früheren Untersuchung den inneren Raum $ACBD$ erfüllt hat. Man hat dementsprechend, um die Kräfte dN zusammzusetzen, in Fig. 196 durchwegs nur die Pfeilrichtungen in die entgegengesetzten zu verwandeln und, weil dieselben Kräfte wie früher, nur in entgegengesetzter Richtung wirken, die frühere Deduction unverändert in Anwendung zu bringen. Man gelangt so zu einer Resultanten aller Kräfte dN , welche dieselbe Größe gM , wie früher, dieselbe Richtungslinie, jedoch die entgegengesetzte Richtung hat. Man nennt diese vertical nach aufwärts gerichtete Resultante $-R_z = -Mg$ aller Druckkräfte, die auf die Oberfläche eines in eine schwere Flüssigkeit eingetauchten festen Körpers einwirken, den Auftrieb, den der Körper in der Flüssigkeit erleidet. Es besteht demnach folgender, schon von Archimedes von Syracus, dem Begründer der Hydrostatik (287—212 vor Chr.), gefundener, unter dem Namen des „Archimedischen Gesetzes“ bekannter Satz: Ein jeder in irgend eine (compressible oder incompressible) Flüssigkeit eingetauchte Körper erfährt infolge des Druckes der Flüssigkeit auf den eingetauchten Theil der Oberfläche einen vertical nach aufwärts gerichteten Auftrieb ($-R_z$), dessen Größe gleichkommt dem Gewichte Mg der „von dem Körper verdrängten Flüssigkeit $ACBD$ “, und dessen Richtungslinie durch den Massenmittelpunkt S dieser verdrängten Flüssigkeitsmasse hindurchgeht.

Die Bedeutung dieser Worte ist der früheren Untersuchung zufolge die folgende: Man denke sich nöthigenfalls (nämlich dann, wenn etwa ein Theil des Körpers aus der Flüssigkeit herausragt) die horizontale (in Fig. 196 punktierte) Flüssigkeitsoberfläche erweitert, so dass sie den Körper in der Querschnittsfläche ACB durchschneidet, und denke sich den unterhalb dieser Fläche ACB gelegenen Theil des Körpervolums $ACBD$ mit einer Flüssigkeit erfüllt von derselben Art und Temperatur wie jene, die den Körper umgibt, so zwar, dass in jedem horizontalen Querschnitte dieses Volums diese Flüssigkeit dieselbe Dichte hat wie in derselben Horizontalebene außerhalb des Körpers; man bestimme ferner die Masse M und den Massenmittelpunkt S dieser Flüssigkeit $ACBD$; die durch den letzteren Punkt S geführte Verticale ist die Richtungslinie des vertical nach aufwärts gerichteten Auftriebes, dessen Größe Mg ist.

Zu derselben Schlussfolgerung gelangt man auch bekanntlich durch die einfache Überlegung, dass man sich ohne Störung des Gleichgewichts den in dem Raume $ACBD$ enthaltenen Theil der ruhenden Flüssigkeit, deren Oberfläche $OACB$ ist, erstarrt denken kann, wofern die Dichte sich nicht ändert, so dass nunmehr dem Gewichte Mg dieser starr gewordenen Masse, als dessen Angriffspunkt S angenommen werden

kann, durch den entgegengesetzt gleichen, aus dem allseitigen Drucke der umgebenden Flüssigkeit resultierenden Auftrieb das Gleichgewicht gehalten werden muss. Dieser Druck auf die Oberfläche, somit auch der resultierende Auftrieb muss nun offenbar derselbe bleiben, wenn denselben Raum $ACBD$ ein beliebiger anderer starrer Körper erfüllt.

Anmerkung 3. Würde der Druck p der den Körper allseitig umgebendes Flüssigkeit überall der gleiche sein, was nothwendigerweise zur Voraussetzung hätte, dass diese Flüssigkeit schwerlos ist, so müssten sich die Druckkräfte dN , wie schon früher gezeigt wurde, das Gleichgewicht halten; es würde also in diesem Falle kein Auftrieb resultieren.

Befindet sich ein Theil des in eine schwere Flüssigkeit eingetauchten Körpers (z. B. bei einem in der Flüssigkeit schwimmenden Körper) oberhalb der Flüssigkeit und herrscht in der Flüssigkeitsoberfläche ein Druck p_0 , so ist streng genommen die Größe des vertical nach aufwärts gerichteten Auftriebes (siehe Anm. 2), dessen Richtungslinie dann im allgemeinen nicht durch den Punkt S hindurchgeht, durch die Summe $Mg + p_0 F_0$ bestimmt, wo F_0 die Größe der in der Ebene der Oberfläche gelegenen Querschnittsfläche ACB des eingetauchten

Fig. 197.

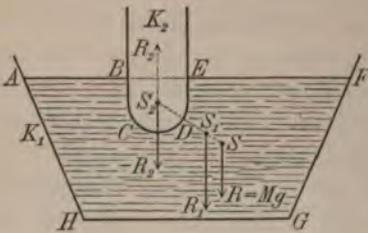
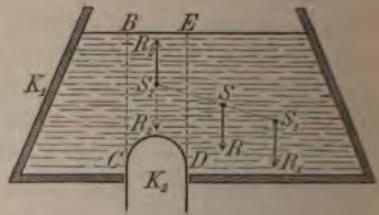


Fig. 198.



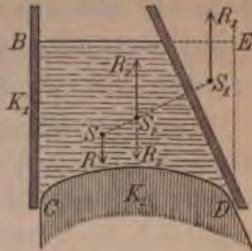
Körpers bedeutet. Setzt man jedoch voraus, dass auch in jedem Punkte des nicht eingetauchten Theiles der Körperoberfläche der Druck p_0 stattfindet, so resultiert aus den auf diesen Oberflächentheil einwirkenden Druckkräften die vertical nach abwärts gerichtete Kraft $p_0 F_0$, und es ist sonach, wie früher, $Mg = (Mg + p_0 F_0) - p_0 F_0$ die Größe des Auftriebes, und seine Richtungslinie enthält auch in diesem Falle den Punkt S .

Anmerkung 4. Gehört jene Fläche, längs welcher eine Flüssigkeitsmasse M mit der Oberfläche von starren Körpern in Berührung ist, nicht, wie bisher vorausgesetzt wurde, durchwegs demselben starren Körper (Gefäße) an, sondern besteht dieselbe aus von einander getrennten Theilen, die verschiedenen, nicht in starrer Verbindung mit einander stehenden Körpern $K_1 K_2$ angehören, so ist die Resultierende R_1 der auf den einen dieser Körper K_1 (das Gefäß) einwirkenden Druckkräfte dN_1 , da sich der Druck auf mehrere von einander getrennte Körper $K_1 K_2$ vertheilt, bald größer, bald kleiner als das Gewicht $R = Mg$ der Flüssigkeit, und zwar hat man, da früher bei der Deduction des Wertes Mg der Resultanten die auf den Körper K_2 einwirkenden Kräfte dN_2 subsumiert waren, die der Resultanten R_2 der letzteren Kräfte entgegengesetzt gleiche Kraft $(-R_2)$ mit der Kraft $R = Mg$ zusammensetzen, um die Resultante R_0 zu erhalten. So ist z. B. in dem durch Fig. 197 dargestellten Falle die auf das Gefäß K_1 abwärts wirkende Resultante R_1 der Druckkräfte dN_1 um den Auftrieb R_2 , den der Körper K_2 erfährt, größer als das Gewicht $R = Mg$ der Flüssigkeit ($S S_2 S_1$ sind in der Zeichnung die Schwerpunkte der Volumina

$ABCDEF GH, BCDE, AB EFGH$), dagegen ist in Fig. 198 die Kraft R_1 um das Gewicht R_2 der Flüssigkeit $BCDE$ kleiner als das Gewicht R der Flüssigkeit, und in dem durch die Fig. 199 versinnlichten Falle ist die Resultante R_1 sogar vertical nach aufwärts gerichtet.

Auf einen beliebigen ebenen Theil F der Gefäßwand wirken, mag F in einer Seitenwand oder in der (etwa horizontalen) Bodenwand des Gefäßes gelegen sein, solche Druckkräfte dN , die durchwegs gleichgerichtet sind, deren Mittelpunkt A die mit Hilfe der Gleichung (10) auf S. 710 bestimmbaren Co-

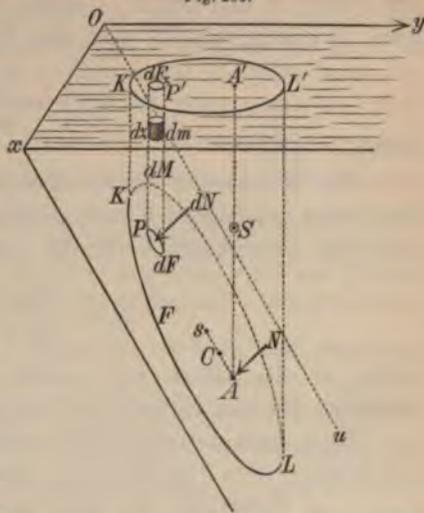
Fig. 199.



ordinaten hat, und deren Resultante $N = \int dN = \int p \cdot dF$ ist. Man bezeichnet den Mittelpunkt A dieser auf eine ebene Gefäßwand F wirkenden Druckkräfte dN , welche die schwere Flüssigkeit auf die Wand F ausübt (siehe S. 710), als den Druckmittelpunkt (im engeren Sinne des Wortes).

Um nun die Größe der Kraft N und die Lage dieses Druckmittelpunktes zu bestimmen, möge derselbe Gang eingeschlagen werden, wie früher. Der in der horizontalen Flüssigkeitsoberfläche — der xy -Ebene — herrschende Druck sei durch p_0 bezeichnet. Über der Fläche F (Fig. 200), die in der Ebene xOu gelegen sei, denke man sich eine verticale Cylinderfläche, die bis zur Ebene der Flüssigkeitsoberfläche reicht, wodurch ein schief abgeschnittener Cylinder $KLL'K'$ entsteht, der von dieser Cylinderfläche, der Fläche F und ihrer Projection F_s auf die Ebene der Flüssigkeitsoberfläche begrenzt ist. Wir können und wollen stets annehmen, dass dieser Raum $KLL'K'$ in seiner ganzen Ausdehnung Flüssigkeit enthält, denn sollte dies nicht der Fall

Fig. 200.



sein, so kann man sich, ohne Änderung der Gefäßwand F und der Ebene xy der Flüssigkeitsoberfläche, das Gefäß derart umgeformt denken, dass dadurch dieses Volum $KLL'K'$ mit einer Flüssigkeit derselben Art erfüllt wird, und dass in jeder horizontalen Niveaufäche in ihrer ganzen nunmehrigen Ausdehnung dieselbe Dichte, somit auch derselbe Druck stattfindet wie früher, wo-

durch, wie aus den bisherigen Untersuchungen sofort erhellt, das Gleichgewicht in keiner Weise gestört wird. Es ist nun, wenn dF_z die horizontale Projection des Elements dF der ebenen Fläche F bedeutet, und wenn dieselbe Bezeichnung (siehe Fig. 196) und Schlussfolgerung angewendet wird wie auf S. 722, $dp = \mu g \cdot dz$, $dm = \mu \cdot dF_z \cdot dz$, daher $dp = g \cdot \frac{dm}{dF_z}$.

Wird die letzte Gleichung auf jedes Element dm der bis zur Flüssigkeitsoberfläche reichenden Flüssigkeitssäule PP' , deren Querschnitt dF_z und deren Masse dM ist, in Anwendung gebracht, so ergibt sich durch Summation, beziehungsweise Integration, wenn p den auf das Flächenelement dF ausgeübten spezifischen Druck bedeutet, $p - p_0 = g \cdot \frac{dM}{dF_z}$, daher $dN = p \cdot dF = \left(p_0 + g \cdot \frac{dM}{dF_z} \right) \cdot dF$.

Nun ist, wenn α den Neigungswinkel der Fläche F gegen die horizontale Ebene bedeutet, bekanntlich $F_z = F \cos \alpha$, $dF_z = dF \cdot \cos \alpha$, also

$$dN = p_0 dF + \frac{g}{\cos \alpha} \cdot dM \dots (6)$$

Setzt man voraus, dass die ganze Oberfläche des Gefäßes, die nicht mit der Flüssigkeit in Berührung steht, also auch die Rückseite der Fläche F den Druck p_0 erleidet, so kann man, wie früher (siehe Anm. 2) gezeigt wurde, von dem Drucke p_0 absehen, somit

$$dN = \frac{g}{\cos \alpha} \cdot dM \dots (7)$$

setzen.

Die Integration dieser Gleichung liefert den der Summe der durchwegs gleichgerichteten Kräfte dN gleichen Wert der resultierenden Druckkraft N für die ganze Fläche F , nämlich

$$N = \frac{Mg}{\cos \alpha} = \frac{Q}{\cos \alpha} \dots (8)$$

wobei M die Masse und $gM = Q$ das Gewicht der Flüssigkeit bedeutet, die den Raum $KL L' K'$ ausfüllt.

Man findet daher die resultierende Druckkraft N , der die Fläche F — wofern sie eben ist — ausgesetzt ist, wenn man das Gewicht Mg der vertical über dieser Fläche befindlichen, bis zur Flüssigkeitsoberfläche reichenden Flüssigkeitsmasse $KL L' K'$ durch den Cosinus des Neigungswinkels dieser Fläche gegen den Horizont dividiert.

Setzt man ferner die beiden letzten Werte aus (7) und (8) in die Gleichung (10) auf S. 710 ein, so findet man, dass für die Coordinaten XYZ des Druckmittelpunktes, wofern ein ortho-

onales Coordinatensystem mit einer verticalen z -Achse zugrunde gelegt wird, die Gleichungen bestehen: $X = \frac{\int x dN}{N} = \frac{\int x dM}{M}$, $Y = \frac{\int y dN}{N} = \frac{\int y dM}{M}$. Es stimmen daher X und Y mit den durch dieselben Werte ausgedrückten entsprechenden Coordinaten des Massenmittelpunktes der Flüssigkeitsmasse $KL L' K'$ [siehe Gleichung (1) auf S. 330 und 332] überein, und es befindet sich demnach der Druckmittelpunkt A genau vertical unter dem Massenmittelpunkte S der Flüssigkeitsmasse $KL L' K'$ (vergl. die Umkehrung der Fig. 169, S. 590).

Zu demselben Resultate würde, wie früher, so auch hier die Annahme der Starrheit der letzteren Flüssigkeitsmasse bei Beachtung des Lehrsatzes auf S. 371 führen.

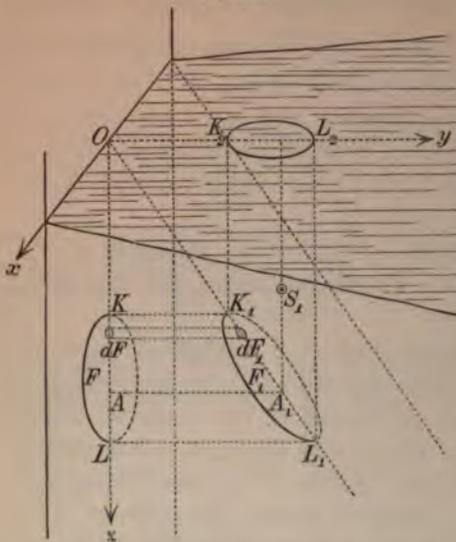
Ist $\alpha = 0$, also die gedrückte Fläche F horizontal (etwa die horizontal angenommene Bodenfläche des Gefäßes), so ist zufolge (8) $N = Mg$, d. h. es ist (wie dies schon auf S. 723 erwähnt wurde) die Resultante N der Druckkräfte gleich dem Gewichte jener Flüssigkeit, welche den Raum des von dieser Fläche F und der Flüssigkeitsoberfläche begrenzten verticalen Cylinders, dessen Grundfläche F ist, entweder thatsächlich ausfüllt oder wenigstens auszufüllen im Stande wäre (Pascal'sches Paradoxon).

Anmerkung 5. Ist die Fläche F auf ihrer Rückseite nicht demselben Drucke p_0 ausgesetzt wie die Flüssigkeitsoberfläche, sondern ist der Druck p_0 nur an dieser Flüssigkeitsoberfläche allein wirksam, so ist die Größe der Resultanten N , wie die Integration der Gleichung (6), zu welcher man in diesem Falle zurückgreifen muss, lehrt, durch die Formel $N = p_0 F + \frac{Mg}{\cos \alpha}$ gegeben. Bezeichnet man durch $X' Y' Z'$ die Coordinaten des Mittelpunktes C (Fig. 200) der Druckkräfte dN in diesem Falle, so ist $N X' = \int x dN$, $N Y' = \int y dN$. Substituiert man in diese Gleichungen den Wert von N und dN aus (6) und beachtet, dass, wenn $\xi \eta \zeta$ die Coordinaten des Schwerpunktes s der gedrückten Fläche F bedeuten, $F \xi = \int x dF$, $F \eta = \int y dF$ ist, so findet man, dass dann $\left(p_0 F + \frac{Mg}{\cos \alpha}\right) \cdot X' = p_0 F \xi + \frac{Mg}{\cos \alpha} \cdot X$, $\left(p_0 F + \frac{Mg}{\cos \alpha}\right) \cdot Y' = p_0 F \eta + \frac{Mg}{\cos \alpha} \cdot Y$. Es ist mit anderen Worten der neue Kräftemittelpunkt C der Mittelpunkts der im früheren Druckmittelpunkte $A = (X, Y)$ wirksamen Kraft $\frac{Mg}{\cos \alpha}$ und der gleichgerichteten, im Schwerpunkte $s = (\xi, \eta)$ der Fläche F wirksamen Kraft $p_0 F$, die sich nämlich als Resultante infolge der gleichmäßigen Fortpflanzung des Oberflächendrucks p_0 ergeben würde.

Anmerkung 6. Die Anwendung der Formel (8) setzt voraus, dass der Neigungswinkel α der gedrückten Fläche gegen den Horizont von $\frac{\pi}{2}$ verschieden ist. Ist nun die gedrückte Fläche F (Fig. 201) vertical, so dass der Zähler und der Nenner des Bruches (8) verschwinden, so kann man den Druckmittelpunkt

für die verticale Fläche KL etwa derart bestimmen, dass man in der Ebene dieser Fläche eine beliebige horizontale Achse Ox zur x -Achse eines orthogonalen

Fig. 201.



Achsensystems xyz wählt, dessen z -Achse vertical ist, ferner den Durchschnitt einer zu F senkrechten cylindrischen Fläche $K_1L_1L_1A_1$, deren Basis F und deren Erzeugende parallel zur y -Achse ist, mit irgend einer durch die Achse Ox gelegenen Ebene L_1Ox bestimmt. Ist A_1 der Druckmittelpunkt dieser Schnittfläche F_1 und α_1 der Neigungswinkel dieser Fläche F_1 gegen den Horizont, ferner M_1 die Masse der über dieser Fläche F_1 befindlichen Flüssigkeitssäule $K_1L_1L_1A_1$, deren Massenmittelpunkt S_1 ist, und A die orthogonale Projection von A_1 auf die Ebene von F , also $AA_1 \parallel y$, so ist A der gesuchte Druckmittelpunkt der Fläche F , und die in A angreifende resultierende Druckkraft ist $N = M_1 g \cdot \tan \alpha_1$, wie aus folgender

Betrachtung zu ersehen ist: Sind dF und dF_1 unendlich kleine Elemente der Flächen F und F_1 und dF die orthogonale Projection von dF_1 , also $dF = dF_1 \sin \alpha_1$, so ist der spezifische Druck p in dF und dF_1 derselbe, und die entsprechenden Druckkräfte sind $dN = p \cdot dF = p dF_1 \sin \alpha_1$ und $dN_1 = p \cdot dF_1 = \frac{p \cdot dF}{\sin \alpha_1}$.

Da nun die Angriffspunkte der Kräfte dN und dN_1 dieselben Coordinaten x und z haben und das Verhältniß dieser Kräfte $\frac{dN}{dN_1} = \sin \alpha_1$ für alle Flächenelemente dF dasselbe ist, so müssen die bloß von x und z und von dem Verhältniß der parallelen Kräfte (siehe S. 447) abhängigen Coordinaten X und Z der Kräftemittelpunkte A und A_1 dieselben sein; es muss also $AA_1 \parallel y$ sein; ferner ist zufolge der Gleichung (8) $N_1 = \frac{M_1 g}{\cos \alpha_1}$ und nach Früherem $\frac{N}{N_1} = \frac{fp dF_1 \sin \alpha_1}{fp dF_1} = \sin \alpha_1$, also in der That $N = N_1 \sin \alpha_1 = M_1 g \cdot \tan \alpha_1$.

Für alle den verschiedenen Werten $\alpha_1 \alpha_2 \dots$ entsprechenden Schnittflächen $F_1 F_2 \dots$ müssen also die Druckmittelpunkte $A_1 A_2 \dots$ in einer zur y -Achse parallelen Geraden AA_1 gelegen sein, und der letzten Gleichung entsprechend muss $M_1 \tan \alpha_1 = M_2 \tan \alpha_2 \dots$ sein, d. h. die vertical über diesen Flächen $F_1 F_2$ gelegenen Flüssigkeitsmassen $M_1 M_2 \dots$ verhalten sich wie die Cotangenten von $\alpha_1 \alpha_2 \dots$.

Für $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ ist $\tan \alpha_1 = 1$, also $N = M_1 g$, d. h. es ist die Resultante N dem Gewichte $M_1 g$ der vertical über der entsprechenden Fläche F_1 , deren Neigungswinkel gegen den Horizont 45° ist, befindlichen Flüssigkeitssäule gleich.

In den bisherigen Untersuchungen dieses Paragraphen wurde die Art der als schwer angenommenen Flüssigkeit völlig unbestimmt gelassen, so dass diese Untersuchungen auf alle Flüssigkeiten von

sowohl constanter als auch variabler Temperatur anwendbar sind. Einfache Folgerungen aus den bisher deducierten Gesetzen ergeben sich in dem Falle, wenn die Flüssigkeit von nun an als eine homogene, d. i. incompressible Flüssigkeit von unveränderlicher Temperatur oder aber als ein vollkommenes Gas von constanter Temperatur, welches das Mariotte'sche Gesetz befolgt, vorausgesetzt wird.

Für eine homogene Flüssigkeit führt die Integration der Grundgleichung (2), in welcher das von nun an durch γ zu bezeichnende spezifische Gewicht S nunmehr eine constante Größe ist, zu der einfachen Beziehung

$$p - p_0 = \gamma (z - z_0) \dots (9)$$

wobei p_0 und z_0 sich auf eine bestimmte Niveaulfläche, am einfachsten auf die Flüssigkeitsoberfläche, beziehen.

Den Höhenunterschied $z - z_0 = \frac{p - p_0}{\gamma}$ nennt man die der Druckdifferenz $p - p_0$ entsprechende „Druckhöhe“ der Flüssigkeit vom spezifischen Gewichte γ . Setzt man den Oberflächendruck $p_0 = 0$,

Fig. 202.

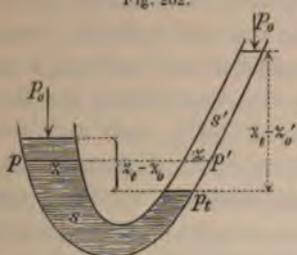
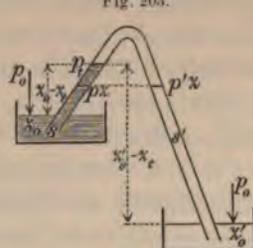


Fig. 203.



so findet man als Ausdruck der „dem spezifischen Drucke p entsprechenden Druckhöhe“ $h = \frac{p}{\gamma}$. Man kann jeden, woher immer rührenden spezifischen Druck p hervorgerufen denken durch eine schwere, homogene Flüssigkeitssäule von dieser Druckhöhe.

Die Gleichung (9) lehrt, dass bei homogenen Flüssigkeiten die Druckdifferenz der Höhendifferenz (dem verticalen Abstände der entsprechenden Niveaulflächen) direct proportional ist, da die erstere das Product aus der letzteren und dem spezifischen Gewichte γ der Flüssigkeit ist, welches Gesetz auch für communicierende Gefäße Giltigkeit hat, wenn dieselben eine homogene Flüssigkeit enthalten.

Enthalten aber die communicierenden Gefäße (Fig. 202 und 203) verschiedene homogene Flüssigkeiten s und s' von den Dichtigkeiten μ und μ' ($\mu > \mu'$), deren spezifische Gewichte γ und γ' sind, und bedeuten p und p' den spezifischen Druck in jener Horizontalebene,

deren verticale Ordinate z ist, ferner p_t den Druck in der Trennungsfäche, für die Ordinate z_t , so bestehen, wie sich zufolge (1) durch die Substitution von $U = -gz + C$, $U_t = -gz_t + C$ u. s. w. in die Gleichungen (11), (12), (13) auf S. 713 ergibt, folgende, übrigens auch sofort aus der Gleichung (9) zu folgernde Beziehungen (vergl. Fig. 193 auf S. 707, in welcher U durch $-gz$ zu ersetzen ist) $p_t - p = g(z_t - z) \cdot \mu = \gamma \cdot (z_t - z)$, $p_t - p' = \gamma' \cdot (z_t - z)$, $\frac{p_t - p}{p_t - p'} = \frac{\mu}{\mu'}$ $= \frac{\gamma}{\gamma'}$, $p' - p = (\gamma - \gamma')(z_t - z)$, $p_t - p_0 = (z_t - z_0)\gamma = (z_t - z_0) \cdot \gamma'$.

Die letzte Gleichung lehrt, dass die Höhen der Horizontalflächen gleichen Druckes p_0 über oder unter der Trennungsfäche der beiden homogenen Flüssigkeiten den Dichten der Flüssigkeiten invers proportional sind.

Die unsere Erde umgebende atmosphärische Luft übt an der Erdoberfläche einen Druck aus, der bekanntlich imstande ist, im Quecksilberbarometer (der Toricelli'schen Röhre), das auf dem Gesetze communicierender Gefäße basiert, einer Quecksilbersäule (von 0° Temperatur) das Gleichgewicht zu halten, deren mittlere Höhe $h = 76$ Centimeter beträgt, wofern über dieser Quecksilbersäule sich in der Röhre ein luftfreier Raum (das Toricelli'sche Vacuum) befindet. Diesen mittleren spezifischen Druck p der atmosphärischen Luft nennt man den Druck einer Atmosphäre, und derselbe dient meist als die Einheit des Flüssigkeitsdruckes. Da in diesem Falle $p_0 = 0$ und $z - z_0 = h$ ist, so ist $p = \gamma \cdot h$. Nun ist, wenn ein Centimeter als Längeneinheit, also 1 Quadratcentimeter als Flächeneinheit und ein Cubikcentimeter als Volumeinheit gewählt wird, das spezifische Gewicht des Wassers 1 Gramm, ferner die Dichte D des Quecksilbers bei 0° bezogen auf Wasser (von 4° C.) $D = \gamma = 13.596$ und $h = 76$. Es ist daher $p = 13.596 \times 76 = 1033.296$ Gramm, d. h. der Druck einer Atmosphäre ist ein Druck von 1.0333 Kilogramm, oder wie es in der Praxis der Einfachheit halber meist angenommen wird, ein Druck von einem Kilogramm auf je einen Quadratcentimeter, d. i. ein Druck, der symbolisch auszudrücken ist durch $1.0333 \frac{\text{Kilogrammgewicht}}{\text{Centimeter} \times \text{Centimeter}}$.

Anmerkung 7. Da die terrestrische Kräfteinheit D_t (ein Kilogramm-gewicht) (siehe S. 133) gleich ist 9.81 Megadyn = 980989 Dyn, so ist die Beziehung zwischen der Einheit eines Atmosphärendruckes und der absoluten Einheit im CGS-System ausgedrückt durch

$$\begin{aligned} \text{Atmosphärendruck} &= 1.0333 \times 980989 \frac{\text{Dyn.}}{(\text{Centimeter})^2} = \\ &= 1013652 \frac{\text{Grammasse}}{\text{Centimeter} \times (\text{Secunde})^2} = 101365 \frac{\text{Kilogrammasse}}{\text{Meter} \times (\text{Secunde})^2}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man durch p_0 den spezifischen Druck auf die horizontale Oberfläche einer schweren homogenen Flüssigkeit, und verlegt

man die x - und die y -Achse eines orthogonalen Achsensystems in diese Oberfläche, so ist $z_0 = 0$, also zufolge (9)

$$p = p_0 + \gamma z \dots (10)$$

Es wirkt sonach auf ein Element dF der Gefäßwand eine normale Druckkraft

$$dN = p \cdot dF = p_0 \cdot dF + \gamma z \cdot dF \dots (11)$$

Findet der Druck p_0 nicht nur an der Flüssigkeitsoberfläche, sondern auch in allen Theilen der mit der Flüssigkeit nicht in Berührung stehenden Oberfläche des Gefäßes statt, so kann man, wie früher gezeigt wurde, bei der Bestimmung der resultierenden Einwirkung auf die Gefäßwand von diesem Drucke ganz absehen, und es ist dann

$$dN = \gamma z \cdot dF \dots (12)$$

d. h. es besteht dann der bekannte elementare Satz, demzufolge die auf irgend ein unendlich kleines Flächenelement dF der Gefäßwand von beliebiger Lage wirkende Druckkraft bei einer jeden homogenen schweren Flüssigkeit das Product aus dem constanten specifischen Gewichte γ der Flüssigkeit, der Größe des Flächenelements und dem Verticalabstande z des letzteren von der Flüssigkeitsoberfläche ist; es ist dN mit anderen Worten gleich dem Gewichte jenes verticalen bis zur Flüssigkeitsoberfläche reichenden Flüssigkeitssäulchens, das sich über der in der Niveaufläche des Flächenelements wo immer angenommenen horizontalen Grundfläche von der Größe dF befindet.

Den früheren Erörterungen zufolge haben, wenn alle Wandelemente des Gefäßes, mit welchen die Flüssigkeit in ihrer ganzen Ausdehnung in Berührung steht, starr mit einander verbunden sind, alle diese Kräfte dN , die auf die Gefäßwände wirken, eine vertical nach abwärts gerichtete Resultante R_z , deren Größe gleich dem Gewichte Mg der ganzen Flüssigkeitsmasse M ist. Bezeichnet demgemäß v das gesammte Volum und μ die constante Dichtigkeit der homogenen Flüssigkeit, so ist

$$R_z = Mg = v\mu g = v\gamma \dots (13)$$

Umgekehrt erleidet ein in einer homogenen schweren Flüssigkeit eingetauchter starrer Körper K infolge der Einwirkung der auf die eingetauchte Oberfläche wirkenden Kräfte dN Früherem zufolge einen vertical nach aufwärts gerichteten Auftrieb (Gewichtsverlust) ($-R_z$), als dessen Angriffspunkt der Schwerpunkt des eingetauchten Volums v angesehen werden kann, und dessen absoluter Wert durch dieselbe Gleichung (13) bestimmt ist.

Es befindet sich also dieser in der homogenen Flüssigkeit eingetauchte Körper K , dessen Gewicht durch Q und dessen gesamtes Volum durch V bezeichnet sei, unter der Einwirkung der entgegengesetzt gerichteten Kräfte Q und $(-R_x)$, und zwar ist der maximale absolute Zahlwert des Auftriebes (Gewichtsverlustes), der dann stattfindet, wenn der Körper ganz eingetaucht ist, zufolge der Gleichung (13) $V\gamma$; es wird dementsprechend der Körper, wenn derselbe frei beweglich ist, untersinken, wenn $Q > V\gamma$, also $\gamma < \frac{Q}{V}$ ist, (somit, wofern der Körper als ein homogener Körper vom specifischen Gewichte $S = \frac{Q}{V}$ vorausgesetzt wird, wenn $S > \gamma$ ist); es wird derselbe unterhalb der Flüssigkeitsoberfläche ruhig schweben, wenn $Q = V\gamma$ ist, da gegen wird derselbe in der Flüssigkeit schwimmen, d. h. in der Gleichgewichtslage nur mit einem Theile v seines Volums V in der Flüssigkeit eingesenkt bleiben, wenn $\gamma > \frac{Q}{V}$ ist, (also, wofern er ein homogener Körper vom specifischen Gewichte S wäre, wenn $S < \gamma$ wäre), und zwar ist im letzteren Falle, da im Zustande des Gleichgewichts $R_x = Q$ sein muss, der Gleichung (13) zufolge stets die Größe des eingetauchten (d. h. unter der Ebene der horizontalen Flüssigkeitsoberfläche gelegenen) Volums v bestimmt durch $v = \frac{Q}{\gamma}$. Dass in der Gleichgewichtslage zudem, wofern der Körper freibeweglich ist, der Schwerpunkt S des Körpers (Angriffspunkt von Q) und der Schwerpunkt σ der verdrängten Flüssigkeit (Angriffspunkt des Auftriebes) in derselben Verticalen gelegen sein müssen, ist (siehe S. 372) als bekannt voranzusetzen.

Stabilität des Gleichgewichtes eines in einer homogenen Flüssigkeit schwimmenden Körpers. Metacentrum.

Es sei F jene ebene Querschnittsfläche eines im Gleichgewichtszustande in einer Flüssigkeit vom specifischen Gewichte γ schwimmenden starren Körpers K vom Gewichte Q , die sich in der entsprechend erweiterten gedachten horizontalen Flüssigkeitsoberfläche — in der sogenannten Schwimmebene — befindet. Die Gerade, welche im Zustande des Gleichgewichts den Schwerpunkt S des Körpers mit dem Schwerpunkte σ des unterhalb der Schwimmebene gelegenen Volumtheiles v des Körpers (dem Angriffspunkte des Auftriebes — Q) verbindet, d. i. die sogenannte Schwimmachse, schneide die Gleichgewichtslage der Schwimmebene im Punkte A . In der Gleichgewichtslage ist diese Schwimmachse AS vertical, O sei der Schwerpunkt der Querschnittsfläche F .

Eine jede hier als ungemein klein gedachte Verschiebung des Körpers K aus dieser Lage, durch welche das Gleichgewicht gestört wird, lässt sich zufolge des § 63 zerlegen in eine fortschreitende Bewegung, die mit der thatsächlichen Bewegung des Schwerpunktes O der Fläche F übereinstimmt, und in eine Rotation des Körpers um irgend eine den Punkt O enthaltende Momentanachse. Die erstere

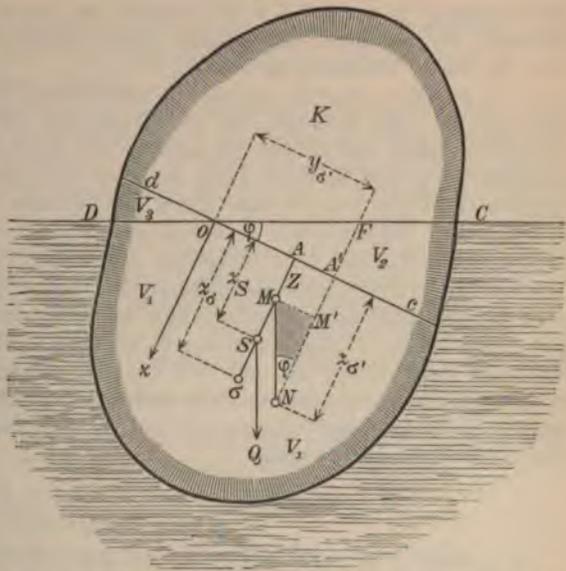
kann man wieder in eine verticale translatorische Bewegung (a) senkrecht zur Schwimmebene und in eine horizontale Translation (b) parallel zu dieser Ebene zerlegen, während die Rotation um den Punkt O stets als aus einer componentalen Rotation (c) um eine durch O gelegte verticale Achse und einer augenblicklichen Rotation (d) um eine horizontale Achse, welche in der durch die Momentanachse hindurchgelegten Verticalebene gelegen ist, resultierend angesehen werden kann.

Bezüglich der componentalen translatorischen Verschiebung (a) in verticaler Richtung, deren absoluter Zahlwert ϵ sei, ist offenbar das ursprüngliche Gleichgewicht stets ein stabiles, mag diese Verschiebung ϵ nach abwärts oder nach aufwärts erfolgen, da im ersten Falle das eingetauchte Volum v (bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung) um $F\epsilon$, daher der Auftrieb $R_z = v\gamma$ um $F\epsilon \cdot \gamma$ vergrößert wird, was einem Hinzutreten einer vertical nach aufwärts wirkenden Kraft $F\epsilon\gamma$ zu den früheren sich das Gleichgewicht haltenden Kräften entspricht, so dass der Körper infolge dieser Kraft $F\epsilon\gamma$ in die ursprüngliche Lage zurückgeführt würde, während im zweiten Falle der Auftrieb um $F\epsilon \cdot \gamma$ verringert, also eine vertical nach abwärts wirkende, in O angreifende, den Körper in die Gleichgewichtslage zurückziehende Kraft $F\epsilon\gamma$ resultieren würde. Die componentalen Bewegungen (b) und (c) würden das Gleichgewicht nicht stören, da sich die in S und σ einwirkenden entgegengesetzt gleichen verticalen Kräfte Q und $(-Q)$, die längs derselben Geraden wirken, nicht ändern würden und sich nur eventuell die Lage der verticalen Schwimmachse $AS\sigma$ parallel zu sich selbst in horizontaler Richtung verschieben würde.

Es ist sonach für die Untersuchung der Stabilitätsbedingungen nur die letzte componentale Bewegung (d) einzig und allein massgebend, nämlich eine augenblickliche Rotation um eine den Schwerpunkt O der Fläche F enthaltende horizontale Achse, die

zur x -Achse eines orthogonalen Achsensystems gewählt sei, dessen Anfangspunkt O ist. Der Rotationswinkel φ sei als sehr klein vorausgesetzt, so dass die höheren Potenzen von φ in der folgenden Untersuchung den ersten Potenzen gegenüber vernachlässigt werden können. Durch diese Drehung um die horizontale x -Achse gelange die Fläche F in die Lage cd und die Schwimmachse in die Lage $AS\sigma$ in Fig. 204. Die normale Projection der Schwimmachse auf die x -Achse sei o . Die positive z -Achse sei nach abwärts parallel zu $AS\sigma$ angenommen, so dass die Ebene der Fig. 204 die zur Rotationsachse x im Punkte o senkrechte, zur yz -Ebene parallele Ebene (die Rotationsebene der Schwimmachse $AS\sigma$) darstellt, in welcher oc parallel zur y -Achse und oz parallel zur z -Achse angenommen ist.

Fig. 204.



Die durch die x -Achse gelegte Horizontalebene in der nunmehrigen Lage des um den sehr kleinen Winkel φ in der Richtung von $+y$ nach $+z$ gedrehten Körpers K (die erweiterte unveränderte horizontale Flüssigkeitsoberfläche) durchschneidet den Körper in einer Querschnittsfläche CD , die sich so wenig von der ursprünglichen Querschnittsfläche cd unterscheiden möge, dass bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung die beiden auf entgegengesetzten Seiten der x -Achse gelegenen Volumtheile V_2 und V_3 des Körpers K , die sich zwischen den Querschnitten CD und cd befinden, und die den durch die x -Achse getrennten Theilen F_2 und F_3 der Fläche F entsprechen, als keilförmige Theile von Rotationskörpern von der Form der Fig. 162 auf S. 534 angesehen werden können, deren Schwerpunkte in der den Winkel φ halbirenden Symmetrieebene gelegen sind (vergl. S. 588, Anm. 3a) und zwar sei V_2 jener Volumtheil $Coce$, der infolge der Rotation φ in die Flüssigkeit eingesenkt wurde, während V_3 das durch diese Rotation um die Drehungsachse x aus der Flüssigkeit herausgehobene Volumelement $Doed$ bedeuten soll.

Demgemäß ist (entsprechend den Gleichungen $dV = \eta \varphi \cdot dF$ und $V = \varphi \int_0^F \eta dF$ auf S. 534), wenn f_2 die ungemein kleinen Flächenelemente des innerhalb des Volumens V_2 gelegenen Theiles der Fläche F_2 , denen die Abscissen x_2 und die positiven Ordinaten y_2 entsprechen, und v_2 die diesen Flächenelementen f_2 entsprechenden Volumtheile bedeuten, und ebenso wenn die Bezeichnung f_3 sich auf die Flächenelemente des die Volumelemente v_3 des Volumens V_3 erzeugenden Flächentheiles F_3 , welchen die Abscissen x_3 und die negativen Ordinaten y_3 angehören, bezieht, $v_2 = y_2 \varphi \cdot f_2$, $v_3 = -y_3 \varphi \cdot f_3$, $V_2 = \varphi \cdot \Sigma (f_2 y_2)$ und $V_3 = \varphi \cdot \Sigma [f_3 \cdot -y_3] = -\varphi \Sigma (f_3 y_3)$, daher $V_2 - V_3 = \varphi \cdot \Sigma [f_2 y_2 + f_3 y_3] = \varphi \cdot \Sigma (f y) = \varphi \cdot FY$, wofern die Zeichen f , x und y sich auf die Flächenelemente der ganzen Fläche F erstrecken und wobei zufolge der Gleichung (2) auf S. 485 Y die Ordinate des Schwerpunktes dieser Fläche F bedeutet. Da nun dieser Schwerpunkt in der x -Achse gelegen ist, so ist $Y = 0$, also der letzten Gleichung zufolge $V_2 = V_3$.

Es ist daher, wenn V_1 den sowohl unterhalb der Fläche CD , als auch unterhalb von cd , also unterhalb von coD gelegenen Volumtheil, dessen Volumelemente v_1 seien, und der bei der Drehung aus der Flüssigkeit nicht austritt, bedeutet, $v = V_1 + V_2 = V_1 + V_3$, so dass auch die Größe des Auftriebes, nämlich $(V_1 + V_2) \cdot \gamma = v \gamma$ sich durch die Drehung um den Winkel φ nicht geändert hat. Während nun $x_\sigma = \overline{Oo}$, $y_\sigma = \overline{oA}$, $z_\sigma = \overline{A\sigma}$ die Coordinaten des in der Schwimmaxe $AS\sigma$ gelegenen Schwerpunktes σ des aus V_1 und V_2 bestehenden, ursprünglich in der Gleichgewichtslage eingetauchten Volumtheiles v (d. i. des ursprünglichen Angriffspunktes des Auftriebes $-Q = -v \gamma$) sind, hat der Angriffspunkt σ' des Auftriebes $(-Q)$ nach erfolgter Drehung φ , da derselbe der Schwerpunkt des aus den nunmehr eingetauchten Volumtheilen V_1 und V_3 bestehenden Volumens v ist, andere Coordinaten $x_{\sigma'}$, $y_{\sigma'}$, $z_{\sigma'}$, und zwar ist den Schwerpunktsgleichungen (3) auf S. 514 zufolge bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$\left. \begin{aligned} v \cdot x_{\sigma'} &= \Sigma (v_1 x_1) + \Sigma (v_2 x_2) = \Sigma (v_1 x_1) + \Sigma [y_2 \varphi \cdot f_2 \cdot x_2] = \\ &= \Sigma (v_1 x_1) + \varphi \Sigma (f_2 x_2 y_2) \\ v \cdot y_{\sigma'} &= \Sigma (v_1 y_1) + \Sigma (v_2 y_2) = \Sigma (v_1 y_1) + \Sigma [y_2 \varphi \cdot f_2 \cdot y_2] = \\ &= \Sigma (v_1 y_1) + \varphi \Sigma (f_2 y_2^2) \\ v \cdot z_{\sigma'} &= \Sigma (v_1 z_1) + \Sigma (v_2 z_2) = \Sigma (v_1 z_1) + \Sigma [y_2 \varphi \cdot f_2 \cdot -\frac{1}{2} y_2 \varphi] = \\ &= \Sigma (v_1 z_1) - \frac{1}{2} \varphi^2 \cdot \Sigma (f_2 y_2^2) = \Sigma (v_1 z_1) \end{aligned} \right\} \text{(a)}$$

für den Schwerpunkt σ des ursprünglich
 des Volums v die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \sum (y_s \varphi \cdot f_s \cdot x_s) &= \\ - \sum (x_s \varphi \cdot f_s \cdot y_s) &= \\ \sum (f_s \cdot y_s^2) &= \end{aligned} \right\} \text{(b)}$$

(b) lehrt

$$\frac{\sum (f_s x y)}{\sum (f_s y^2)}$$

$$\left. \begin{aligned} y_\sigma + \varphi \cdot \frac{i_x}{v} \end{aligned} \right\} \text{(c)}$$

auf die ganze Fläche F beziehen und
 der Fläche F bezüglich der Rotations-
 des Schwerpunktes S des Körpers K sind

$$x_\sigma, y_\sigma = \overline{OA} = y_\sigma, z_\sigma = \overline{AS} \dots \text{(d)}$$

des Angriffspunktes σ' des Auftriebes ($-Q$)
 Ebene der Zeichnung, so dass $(x_{\sigma'} - x_\sigma, y_{\sigma'}, z_{\sigma'})$
 N sind.

das Gewicht Q des Körpers K und der Auftrieb ($-Q$),
 der Schwerpunkt σ' des Volums $v = V_1 + V_2$ angesehen
 ein Kräftepaar, dessen Moment M_x bezüglich der Rotations-
 der Momentensumme $M_x^{(Q)}$ und $M_x^{(-Q)}$ dieser beiden Kräfte Q
 nach der x -Achse gleich ist. Soll das ursprüngliche Gleich-
 sein, so muss dieses Kräftepaar den Körper wieder in seine ur-
 Gleichgewichtslage zurückzuführen, also im negativen Sinne (von $+z$
 drehen suchen, also M_x negativ sein, und zwar ist der absolute Zahl-
 d. i. $(-M_x) = -[M_x^{(Q)} + M_x^{(-Q)}]$ bei gegebenem Winkel φ für das
 Stabilität einzig maßgebend. Nun ist die z -Komponente von Q offenbar

cos $\varphi = Q \left[1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right]$, während die y -Komponente den Wert $Q_y =$
 sin φ hat, so dass bei Vernachlässigung von kleinen Gliedern höherer
 Ordnung $Q_x = Q$ und $Q_y = Q \cdot \varphi$ gesetzt werden kann. Es ist sonach

$$\begin{aligned} M_x^{(Q)} &= y_s \cdot Q_x - z_s \cdot Q_y = y_s \cdot Q - z_s \cdot Q \cdot \varphi = Q [y_s - z_s \cdot \varphi] \\ M_x^{(-Q)} &= (y_{\sigma'} \cdot -Q_x) - (z_{\sigma'} \cdot -Q_y) = -Q \left[y_\sigma + \frac{\varphi}{v} \cdot \sum (f_s y_s^2) \right] + Q \cdot z_\sigma \cdot \varphi \end{aligned}$$

da $y_\sigma = y_s$ ist, so ist der absolute Wert des Stabilitätsmoments

$$-M_x = -[M_x^{(Q)} + M_x^{(-Q)}] = \varphi Q \cdot \left[z_s - z_\sigma + \frac{i_x}{v} \right] \text{(e)}$$

Ist sonach $z_S > z_\sigma$, also der Schwerpunkt S des Körpers K tiefer gelegen als der Schwerpunkt σ des eingetauchten Volumtheiles, so ist sicher $(-M_x)$ positiv, also das Gleichgewicht stabil. Aber auch in dem Falle, wenn $z_S < z_\sigma$ ist, ist das Gleichgewicht ein stabiles, wenn nur $z_S + \frac{i_x}{v} - z_\sigma > 0$ ist, und zwar ist der letztere Ausdruck $h = z_S + \frac{i_x}{v} - z_\sigma$ bestimmend für das Maß der Stabilität.

Legt man durch den Schwerpunkt σ' des eingetauchten Volums $v = V_1 + V_2$ eine Verticalebene, die zur Drehachse x parallel ist, so durchschneidet diese Ebene die Schwimmachse $AS\sigma$ in einem Punkte M (Fig. 204), in welchem auch die durch den Punkt N gelegte Verticale diese Schwimmachse schneidet. Man nennt diesen Punkt M das Metacentrum. Führt man in Fig. 204 $NA' \parallel z$ und $MM' \parallel y$, so ist $\overline{M'N} = \overline{A'N} - \overline{A'M'} = z_{\sigma'} - \overline{AM} = z_\sigma - \overline{AM} = \overline{MS}$, $\overline{MM'} = \overline{AA'} = \overline{OA'} - \overline{OA} = y_{\sigma'} - y_\sigma = \frac{\varphi}{v} i_x$, und im Dreiecke MNM' ist auch

$$\overline{MM'} = \overline{M'N} \cdot \operatorname{tg} \varphi = (z_\sigma - \overline{AM}) \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

also, da bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung $\operatorname{tg} \varphi = \varphi$ gesetzt werden kann, so ergibt sich aus den beiden letzten Gleichungen

$$\frac{i_x}{v} = z_\sigma - \overline{AM}, \text{ sonach } \overline{AM} = z_\sigma - \frac{i_x}{v}$$

und $\overline{MS} = \overline{AS} - \overline{AM} = z_S - z_\sigma + \frac{i_x}{v} = h$. Soll nun das Schwimmen ein stabiles sein, so muss $h > 0$, also der Schwerpunkt S des Körpers K tiefer gelegen sein als das Metacentrum M .

Ferner ist zufolge (c) $(-M_x) = \varphi \cdot Q \cdot h$, daher bestimmt bei gegebenem Gewichte Q und für einen kleinen Rotationswinkel φ der mittelst der Gleichung

$$h = z_S - z_\sigma + \frac{i_x}{v}$$

berechenbare Abstand $\overline{MS} = h$ des Metacentrums M vom Schwerpunkte S des Körpers, d. i. die sogenannte metacentrische Höhe, das Maß der Stabilität des Schwimmens. Das Stabilitätsmoment $Q h \varphi$ lässt sich, da $Q = v \gamma$ ist, auch in der Form

$$Q \cdot h \varphi = Q \cdot \overline{MS} \cdot \varphi = [Q(z_S - z_\sigma) + i_x \gamma] \cdot \varphi$$

ausdrücken. (Ist z. B. die in der Schwimmebene gelegene Querschnittsfläche F ein Rechteck, dessen Seiten a und b sind, und findet die Rotation um die zur Seite a parallele Schwerpunktsachse x desselben statt, so ist bekanntlich $i_x = \frac{1}{12} a b^3$.)

Für den Fall, dass $\Sigma(fxy) = 0$, also die x -Achse (Rotationsachse) eine Hauptcentralachse des Querschnitts F ist, — etwa eine Symmetrieachse desselben — ist zufolge (c) $x_{\sigma'} = x_\sigma$, daher der Punkt σ' mit seiner Projection N in die Zeichenebene identisch, so dass man in diesem besonderen Falle das Metacentrum als den Durchschnittspunkt der Richtungslinie NM des Auftriebes mit der Schwimmachse $AS\sigma$ definieren kann.

Soll das Gleichgewicht für alle Drehungen um die verschiedenen durch O gelegten horizontalen Achsen ein stabiles sein (absolute Stabilität), so muss $z_S - z_\sigma + \frac{i_x}{v}$ für alle Trägheitsmomente i_x , die den verschiedenen Schwerpunktsachsen des Querschnitts entsprechen, positiv bleiben, also selbst für den

kleinsten Wert, den i_x erreichen kann, d. i. wenn die Drehachse mit der großen Achse der Centralellipse, die der Querschnittsfläche F zugehört, übereinstimmt. Ist also i dieses kleinste Trägheitsmoment, so muss $z_s - z_o + \frac{i}{v} > 0$, also $z_s + \frac{i}{v} > z_o$ sein, was beim Schiffbau vor allem berücksichtigt werden muss.

Die auf einen beliebigen Theil F (Fig. 205) einer ebenen Gefäßwand, dessen Ebene gegen den Horizont unter dem Winkel α geneigt ist, wirkenden gleichgerichteten Kräfte dN der Gleichung (12) haben eine Resultante N , deren Größe und Angriffspunkt (Druckmittelpunkt) leicht folgendermaßen bestimmt werden können:

Nimmt man die horizontale Oberfläche der homogenen Flüssigkeit als $x'y'$ -Ebene und die Durchschnittslinie derselben mit der Ebene der Wand F (die „Benetzungslinie“) als die x -Achse eines orthogonalen räumlichen Achsensystems und die letztere Achse auch als

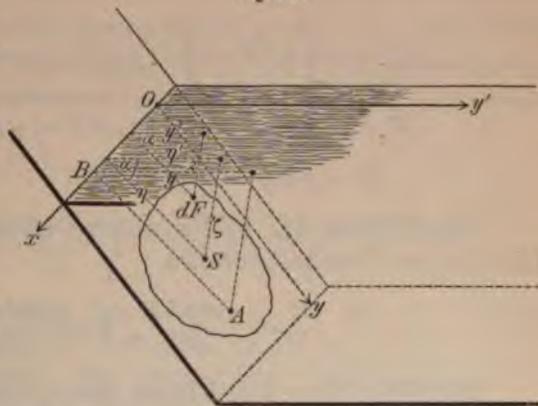
x -Achse eines zweiten ebenen in der Ebene von F gelegenen rechtwinkligen Achsensystems xy mit demselben Anfangspunkte O an (siehe Fig. 169 auf S. 590, welche Figur nur um die y' -Achse um 180° gedreht zu denken ist), so besteht für die Coordinaten des Flächenelements dF (siehe Fig. 169 oder 205) die Relation $z = y' \cdot \tan \alpha = y \sin \alpha$, und wenn $\xi \eta' \zeta$, bezw. $\xi \eta$ die Coordinaten des Schwerpunktes S der Fläche F sind, $\zeta = \eta' \tan \alpha = \eta \sin \alpha$. Es ist ferner zufolge (12)

$$N = \int dN = \int \gamma z dF = \gamma \cdot \int z dF = \gamma F \zeta \dots (14)$$

d. h. die Resultante N ist das Product aus dem specifischen Gewichte γ der homogenen Flüssigkeit, aus der gedrückten Fläche F und aus dem Verticalabstande ζ des Schwerpunktes S dieser Fläche F von der Flüssigkeitsoberfläche.

Ist sonach die Lage der Oberfläche, ferner die des Schwerpunktes S und die Größe der Fläche F gegeben, so ist die resultierende Druckkraft N von α unabhängig, d. h. wie immer man

Fig. 205.



die Fläche F um S drehen mag, so ändert sich die Größe der Kraft N nicht.

Der letzten Gleichung zufolge ist der Schwerpunktsabstand ζ als die der Fläche F entsprechende Druckhöhe anzusehen.

Anmerkung 8. Zu derselben Relation (14) führt auch die Gleichung (8) derzufolge $N = \frac{Mg}{\cos \alpha}$ ist, wo M die Masse der über der Fläche F befindlichen verticalen Flüssigkeitssäule bedeutet, deren Volumen V (siehe Gleichung (5), S. 590) $V = F'\zeta$ und deren Masse daher $M = V\mu = F'\zeta\mu$ ist, wo F' die orthogonale Projection der Fläche F auf die Flüssigkeitsoberfläche, somit $F' = F \cos \alpha$ und μ die cubische Dichtigkeit der Flüssigkeit bedeuten, so dass $\gamma = \mu g$ ist.

Die Coordinaten a, b des Druckmittelpunktes A lassen sich zufolge der Gleichung (10) auf S. 710 durch die Gleichungen ermitteln:

$$\begin{aligned} N \cdot a &= \int x dN = \int x \cdot \gamma z dF = \gamma \sin \alpha \cdot \int xy dF \\ N \cdot b &= \int y dN = \int y \cdot \gamma z dF = \gamma \sin \alpha \int y^2 dF \\ N &= \gamma F' \zeta = \gamma \sin \alpha \cdot F \eta \end{aligned}$$

Die Division der beiden ersten Gleichungen durch die dritte führt zu den Coordinatenwerten

$$a = \frac{\int xy dF}{F \eta}, \quad b = \frac{\int y^2 dF}{F \eta} \dots (15)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich, wenn die Gestalt der Fläche F und die Lage der x -Achse (der Benetzungslinie) gegeben ist, die Coordinaten a, b des Druckmittelpunktes berechnen.

Die Gleichungen (15) lehren zunächst, dass a und b von α ganz unabhängig sind. Dreht man daher die ebene Seitenwand, in welcher die gedrückte Fläche F gelegen ist, wie immer um die x -Achse (die Benetzungslinie), so wird dadurch die relative Lage des Druckmittelpunktes nicht geändert.

Da $\int y^2 dF$ das geometrische Trägheitsmoment $i_x = F \cdot \varrho_x^2$ der Fläche F in Bezug auf die x -Achse bedeutet, so lehrt die letzte Gleichung (15), dass die senkrechte Entfernung b des Druckmittelpunktes A (des Mittelpunktes der Kräfte dN) von der x -Achse gleich ist der reducierten Länge l_x dieser Fläche in Bezug auf die x -Achse (siehe S. 564), also auch gleich der reducierten Länge l_x jenes Pendels, das von der in diesem Falle als eine homogene schwere materielle Fläche vorausgesetzten Fläche F gebildet würde, wenn dieselbe um die x -Achse schwingen würde.

Die erste Gleichung (15) lehrt ferner (siehe Anm. 1, S. 584), dass die orthogonale Projection B des Druckmittelpunktes A auf

die x -Achse jener Punkt O' ist, für welchen sowohl die x -Achse, als auch die Achse BA eine Trägheitshauptachse der Fläche F ist. (Der Druckmittelpunkt ist demnach [siehe S. 584] identisch mit dem Stoßmittelpunkt der Fläche F für dieselbe Achse Ox .) Ist somit die horizontale Schwerachse der gedrückten Fläche eine Hauptcentralachse derselben, also auch die zur Benetzungslinie x senkrechte Schwerachse eine Schwerpunkthauptachse, was z. B. der Fall ist, wenn die letztere Achse eine Symmetrieachse der Fläche F ist, so muss der Druckmittelpunkt A in dieser letzteren Achse gelegen sein, und in diesem besonderen Falle sind der Druckmittelpunkt und jener Schwingungsmittelpunkt C , welcher der x -Achse entspricht, identisch (siehe Fig. 166 auf S. 565).

Die Coordinaten des Druckmittelpunktes lassen sich (siehe Anm. 1, S. 584) auch folgenderart durch die Trägheitshalbmesser $q_x q_y$ für die Hauptcentralachsen X und Y der Fläche F ausdrücken

$$\left. \begin{aligned} a &= \xi + \sin A \cos A \frac{q_y^2 - q_x^2}{\eta} \\ b = l_x &= \eta + \frac{i_s}{F\eta} = \eta + \frac{q_x^2 \cos^2 A + q_y^2 \sin^2 A}{\eta} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

wo i_s das Trägheitsmoment der Fläche F für die zur x -Achse parallele Schwerachse bedeutet und A , q_x , q_y die auf S. 583 und 584 erwähnte Bedeutung haben. Der Abstand des Druckmittelpunktes A vom Schwingungsmittelpunkte C ist $a - \xi$.

Der Druckmittelpunkt liegt nach Früherem, wie dies übrigens schon aus S. 591 hervorgeht, genau vertical unter dem Schwerpunkte des vertical über der Fläche F befindlichen (bezw. gedachten) bis zur Flüssigkeitsoberfläche reichenden Flüssigkeitsvolumens, und die Kraft N ist zufolge der Gleichung (8), wenn Q das Gewicht dieser Flüssigkeitsmasse und V deren Volumen bedeutet, dem Quotienten $N = \frac{Q}{\cos \alpha} = \frac{V\gamma}{\cos \alpha}$ gleich, welcher zufolge der Gleichung (f) auf S. 590 auch durch $N = \frac{F' \zeta \gamma}{\cos \alpha} = \frac{F \cos \alpha \cdot \zeta \gamma}{\cos \alpha} = \gamma F \zeta$ ausgedrückt ist [in Übereinstimmung mit (14)].

Ist die gedrückte Fläche horizontal, so ist der Druckmittelpunkt der Schwerpunkt derselben, während in allen anderen Fällen der Gleichung (16) zufolge $b > \eta$ ist, d. h. der Druckmittelpunkt A immer tiefer als der Schwerpunkt S der Fläche liegt, und zwar ist die senkrechte Entfernung e der durch den Schwerpunkt S und den Druckmittelpunkt A geführten horizontalen Achsen zufolge der Gleichung (16)

$$e = b - \eta = \frac{i_s}{F\eta} = \frac{\rho x^2 \cos^2 A + \rho y^2 \sin^2 A}{\eta} \dots (17)$$

während, wenn d die Entfernung des Druckmittelpunktes A vom Schwerpunkte S bedeutet, zufolge (16)

$$d^2 = (a - \xi)^2 + (b - \eta)^2 = \frac{\rho x^4 \cos^2 A + \rho y^4 \sin^2 A}{\eta^2} \text{ ist.}$$

Man ersieht daraus, dass, je höher die Flüssigkeitsoberfläche über der als gegeben vorausgesetzten gedrückten Fläche gelegen ist, also je größer η ist, d um so kleiner wird, dass also der Druckmittelpunkt A , und zwar längs einer Geraden dem Schwerpunkte S immer näher rückt. Wird $\eta = \infty$, so wird $d = 0$, so dass für in hinreichender Tiefe unter der Flüssigkeitsoberfläche befindliche Flächen F der Druckmittelpunkt A mit dem Schwerpunkte S identifiziert werden kann (siehe S. 584).

Wenn man die Lehrsätze, Bezeichnungen und Figuren des § 97 zugrunde legt, so ist für eine rechteckige oder rhomboidische Fläche F , deren Höhe h zu der in der Ebene der Fläche gelegenen Benetzungslinie (x -Achse) senkrecht steht (siehe Gleichung 6, S. 603), $i_s = \frac{1}{12} F h^2$, also $e = \frac{1}{12} \frac{h^2}{\eta}$, somit, wenn diese Fläche bis zur Flüssigkeitsoberfläche reicht, also wenn $\eta = \frac{h}{2}$ ist, $e = \frac{1}{6} h$ und $b = l_x = \eta + e = \frac{2}{3} h$; ferner ist für eine kreisförmige oder elliptische Fläche, deren Halbachsen a und b sind, wofern die Achse $2a$ horizontal ist (siehe Gleichung 27, S. 617), $i_s = \frac{1}{4} F b^2$, also $e = \frac{1}{4} \cdot \frac{F b^2}{\eta}$; für eine halbkreisförmige Fläche, deren horizontal angenommener Durchmesser $2R$ die Fläche F nach oben begrenzt und von der Benetzungslinie die Entfernung H hat, ist $i_s = \frac{1}{4} F R^2$ und (siehe Gleichung 1, S. 495) $\eta = H + \frac{4}{3\pi} R$, also $e = \frac{3}{4} \cdot \frac{R^2 \pi}{4R + 3H\pi}$; dagegen ist, wenn der Grenzdurchmesser $2R$ in seiner Verlängerung auf der Benetzungslinie im Koordinatenanfangspunkte senkrecht steht, $A = 0$, $\rho x^2 = \frac{1}{4} R^2$ und $\xi = -\frac{4}{3\pi} R$, daher zufolge (16) $a = \xi = \frac{4}{3\pi} R$, $b = l_x = \eta + \frac{1}{4} \frac{R^2}{\eta}$; für eine trapezförmige Fläche, deren Höhe h und deren parallele Seiten b und b' horizontal sind (siehe S. 615 und Fig. 179 auf S. 614) ist $i_s = i_x = \frac{1}{18} F h^2 \frac{b^2 + 4bb' + b'^2}{(b + b')^2}$, und, wenn H den Abstand der oberen Seite b von der Benetzungslinie bedeutet, $\eta = H + \frac{1}{3} h \frac{2b' + b}{b + b'}$ [siehe Gleichung (5) auf S. 489], daher zu-

folge (16) der Abstand l_x des Druckmittelpunktes von der Benetzungslinie $l_x = \eta + \frac{i_s}{F\eta} = H + \frac{h}{2} \cdot \frac{2(b+2b') \cdot H + (b+3b')h}{3(b+b')H + (b+2b')h}$, welche letztere Formel auch sofort auf eine dreieckige Fläche, für welche $b=0$ oder aber $b'=0$ ist, in Anwendung gebracht werden kann; für ein Parabelsegment, dessen Grenzsehne $2b$ horizontal und zur Parabelachse senkrecht ist, und dessen Höhe a ist, ist (siehe S. 614)

$$i_s = \frac{12}{175} F a^2, \text{ und, wenn } H \text{ den Abstand der das Segment } F \text{ nach oben begrenzenden Sehne } 2b \text{ von der Benetzungslinie bedeutet, } \eta = H + \frac{2}{5} a \text{ (siehe S. 502), daher } b = l_x = \eta + \frac{i_s}{F\eta} = H + \frac{2}{7} a \cdot \frac{4a+7H}{2a+5H} \text{ u. s. w.}$$

Anmerkung 9. Ist die Centralellipse (siehe S. 586) der von der Flüssigkeit gedrückten Fläche F bekannt, so lässt sich leicht auf constructivem Wege die Lage des Druckmittelpunktes A bestimmen. Sind nämlich, wie bisher, durch X und Y die in der Ebene der Fläche F gelegenen Centralhauptachsen und durch q_x und q_r die Trägheitshalbmesser bezüglich derselben bezeichnet, so ist die Gleichung der Centralellipse

$$q_x^2 X^2 + q_r^2 Y^2 = \epsilon^2$$

und ihre Halbachsen sind $a' = \frac{\epsilon^2}{q_x}$, $b' = \frac{\epsilon^2}{q_r}$. In den Gleichungen (16) ist $A = (xX)$, daher $(Xx) = -A$ und $tg(Xx) = -tgA$. Ist nun durch U die Gerade bezeichnet, die den Schwerpunkt $(\xi\eta)$ der Fläche F mit dem Druckmittelpunkte (a, b) verbindet, so ist offenbar $tg(xU) = \frac{b-\eta}{a-\xi}$, daher den Gleichungen (16) zufolge $tg(xU) = \frac{q_x^2 + q_r^2 tg^2 A}{tg A (q_r^2 - q_x^2)}$, ferner ist $tg(XU) = tg[(xU) - (xX)] = \frac{tg(xU) - tg A}{1 + tg A tg(xU)} = \frac{q_x^2}{q_r^2 tg A}$.

Es ist dementsprechend $tg(Xx) tg(XU) = -\frac{q_x^2}{q_r^2} = -\frac{b'^2}{a'^2}$. Diese Gleichung lehrt, dass der zur x -Achse (zur Benetzungslinie), für welche der Druckmittelpunkt A zu bestimmen ist, parallele Durchmesser der Centralellipse conjugiert ist zu dem Diameter U dieser Ellipse. Da ferner der der Achse x entsprechende Schwingungsmittelpunkt C , dessen Lage durch die Construction in Fig. 166 auf S. 565 leicht bestimmt werden kann, und der Druckmittelpunkt A dieselbe Entfernung $l_x = b$ von der x -Achse haben, so liegen C und A in einer zur x -Achse parallelen Geraden. Man hat demgemäß folgenderart bei der graphischen Bestimmung des Druckmittelpunktes A einer ebenen Fläche F vorzugehen:

Nachdem in bekannter Weise (siehe Fig. 166 auf S. 565) der Schwingungsmittelpunkt C der Fläche F ermittelt worden ist, führt man zur horizontalen x -Achse (der Benetzungslinie) eine parallele Schwerachse, bestimmt den zu dieser (horizontalen) Schwerachse conjugierten Diameter U der Centralellipse und führt von C eine Parallele zur x -Achse, welche den Diameter U im gesuchten Druckmittelpunkte A schneidet.

So ist z. B. zufolge der Anmerkung 7 auf S. 615 der Druckmittelpunkt jener früher betrachteten trapezförmigen Flächen, deren Grundlinien b und b' horizontal sind, in dem Durchmesser gelegen, welcher die Mittelpunkte B und B' der Seiten b und b' verbindet (was übrigens auch leicht sofort ersichtlich ist). Ist also h die Trapezhöhe, H der Abstand der der Oberfläche näheren Trapezseite b von der x -Achse, und legt man die zur x -Achse normale y -Achse durch den Mittelpunkt B dieser Seite b , so ist die Abscisse a des Druckmittelpunktes, deren Ordinate den früher gefundenen Wert l_x hat, durch $a = (l_x - H) \cdot \cotg \Phi$ bestimmt, wenn Φ den Neigungswinkel des Durchmessers BB' gegen die x -Achse bedeutet, also $a = \frac{h}{2} \frac{2(b+2b')H + (b+3b')h}{3(b+b')H + (b+2b')h} \cotg \Phi$. Für $b = 0$ oder $b' = 0$ ergibt sich die Abscisse des Druckmittelpunktes einer dreieckförmigen Fläche u. s. w.

Wird bei gleichbleibender Flüssigkeitsoberfläche die gedrückte Fläche F um ihre horizontale Schwerachse gedreht, wodurch zufolge (14) die Größe der Resultanten N nicht geändert wird, so beschreibt der Diameter U , dessen relative Lage zur Fläche F stets dieselbe bleibt, eine senkrechte Kreiskegelfläche. Ist nun C die Lage des Schwingungsmittelpunktes bei verticaler Lage der Fläche F und C' eine beliebige andere Lage desselben bei dieser Drehung, und ist durch P , bezw. P' der Durchschnitt der Schwerlinie CS , bezw. $C'S$ mit der Oberfläche bezeichnet, so ist, da zufolge der Gleichung (16) $(l_x - \eta) \cdot \eta$ constant ist, $SC \cdot PS = S'C' \cdot P'S$, somit sind die Scheiteldreiecke SPC und $S'C'P'$ ähnlich, daher der rechte Winkel $P'PS$ gleich dem Winkel $CC'S$; es kann demnach der letzte Winkel bei C' als Winkel in jenem Halbkreise angesehen werden, dessen Durchmesser CS ist. Es beschreibt demgemäß der Schwingungsmittelpunkt bei dieser Drehung um die horizontale Schwerachse eine Kreislinie, deren verticaler Durchmesser CS ist. Man kann also, wenn C bekannt ist, leicht die Lage C' des Schwingungsmittelpunktes bei jeder Lage der Fläche F bestimmen. Wenn man hierauf durch C' eine Parallele zur horizontalen Benetzungslinie legt bis zum Durchschnitte A' mit der oberwähnten Kegelfläche, welche U beschreibt, so findet man auch die Lage des neuen Druckmittelpunktes A' . (Ist die Benetzungslinie parallel zu einer Hauptcentralachse, ist mit anderen Worten der Winkel $A = 0$ oder $A = \frac{\pi}{2}$, oder ist $\varrho_x = \varrho_x$, so ist offenbar $U \perp x$ und $a = \xi$, also der Schwingungsmittelpunkt identisch mit dem Druckmittelpunkte.)

Ohne Zuhilfenahme der Centralellipse kann man auf constructivem Wege die Lage des Druckmittelpunktes A derart ermitteln, dass man zunächst seine orthogonale Projection O' auf die x -Achse (die Benetzungslinie), d. i. jenen schon auf der S. 584 betrachteten Punkt O' bestimmt, für welchen die x -Achse und die Achse $O'A$ Trägheitshauptachsen sind. Dieser Punkt, sowie alle anderen Punkte O' , für welche die Hauptachsen zu den Achsen xy parallel sind, sind nämlich (vergl. S. 579) in einer gleichseitigen Hyperbel gelegen, deren Asymptoten die zu den Achsen xy parallelen Schwerpunktsachsen $x_s y_s$ sind, und welche (Hyperbel), wenn $\varrho_x > \varrho_x'$ ist, die Hauptcentralachse Y in einem allen (den verschiedenen Achsen xy bei gegebener Fläche F entsprechenden) Hyperbeln gemeinsamen Punkte B schneidet, dessen Entfernung e vom Schwerpunkte S den Wert $\sqrt{\varrho_x^2 - \varrho_x'^2}$ hat. Denn wählt man die Achsen $x_s y_s$ zu Coordinatenachsen und bezeichnet durch $x'y'$ die Coordinaten des Punktes O' in Bezug auf dieselben, so ist offenbar $x' = a - \xi$ und $y' = -\eta$, somit, wie sich aus der Gleichung (16) ergibt, $x'y' = -\sin A \cos A (\varrho_x^2 - \varrho_x'^2)$, wodurch nachgewiesen ist, dass der geo-

metrische Ort der Punkte O' bei gegebenem A , d. i. für alle zu xy parallelen Achsen eine gleichseitige Hyperbel ist, deren Asymptoten x_s und y_s sind, und deren reelle Halbachse $\sqrt{2 \sin A \cos A (\varrho_Y^2 - \varrho_X^2)}$ ist. Für den Durchschnittspunkt B der Hyperbel mit der Y -Achse ist ferner $x' = e \sin A$, $y' = -e \cos A$, also der obigen Hyperbelgleichung zufolge in der That $e^2 = \varrho_Y^2 - \varrho_X^2$. Für $A = 0, \frac{\pi}{2}$ oder $\varrho_X = \varrho_Y$ wird die Hyperbel identisch mit den Achsen x_s und y_s .

Hat man mit Hilfe der Achsen x_s und y_s und des ein- für allemal bestimmten Punktes B die gleichseitige Hyperbel auf eine bekannte Art construiert und den Durchschnittspunkt O' derselben mit der x -Achse bestimmt, so hat man in der Ebene der Fläche F in O' eine Senkrechte $O'A$ zur x -Achse und durch den nach früherer Art ermittelten Schwingungsmittelpunkt C eine Horizontale CA zu führen, die sich im Druckmittelpunkte A schneiden. (Betreffs der Berücksichtigung des Druckes p_0 auf die Flüssigkeitsoberfläche bei der Bestimmung des Druckmittelpunktes sei auf Anm. 5 verwiesen.)

Anmerkung 10. Die im § 100, besonders auf S. 646 und 647 für das Pendel durchgeführten allgemeinen Untersuchungen betreffs der reducierten Pendellänge l kann man unmittelbar auf den Abstand l_0 des Druckmittelpunktes von der x -Achse in Anwendung bringen, wofern man mit der letzteren Achse die Drehungsachse identificiert. So liegt z. B., wenn die Benetzungslinie zu einer gegebenen Schwerachse, in Bezug auf welche der Trägheitshalbmesser der Fläche ϱ_s ist, parallel sein soll, der Druckmittelpunkt der Benetzungslinie am nächsten, wenn $\eta = \varrho_s$ ist, und zwar ist dann $l = 2\varrho_s$; wenn außerdem die Benetzungslinie zu der größten Achse der der Fläche F zugehörigen Central-ellipse parallel ist, so hat ϱ_s , daher auch $l = 2\varrho_s$ den kleinstmöglichen Wert u. s. w. Das hier Gesagte kann bei hydrostatischen Problemen nur offenbar für solche Formen der gedrückten Flächen F Anwendung finden, bei welchen η auch kleiner als ϱ_s werden kann, ohne dass die x -Achse die Fläche F schneidet.

Anmerkung 11. Es verdient besonders bemerkt zu werden, dass die Gleichungen (16) selbst dann, wenn die Flüssigkeit nicht homogen ist, sondern wenn ihre Dichtigkeit μ von Punkt zu Punkt variiert, den Mittelpunkt des Druckes A zu bestimmen gestatten, wofern man nur die gedrückte Fläche F nicht als eine homogene Fläche in Rechnung bringt, sondern als eine materielle Fläche, deren Dichtigkeit μ_r in irgend einem ihrer Elemente dF proportional ist der mittleren (cubischen) Dichtigkeit des verticalen über dF gelagerten Flüssigkeitssäulchens von der Höhe z , so dass, wenn dm die Masse und $dV = z \cdot dF \cdot \cos \alpha$ das Volum dieses Säulchens und k eine Proportionalitätsconstante bedeuten, $\mu_r = k \cdot \frac{dm}{dV} = \frac{k}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{dm}{dF}$, also wenn dM die im Flächenelemente dF vertheilt gedachte Masse bedeutet, $\mu_r = \frac{dM}{dF}$ und demgemäß $dm = \frac{\cos \alpha}{k} \cdot z \cdot dM$ ist. Da nämlich der Druckmittelpunkt A vertical unter dem Schwerpunkte des über der Fläche F befindlichen schief abgeschnittenen Flüssigkeitscylin- ders von der Masse m gelegen ist, so sind bei Zugrundelegung der um die y' -Achse um 180° gedreht gedachten Figur 169 auf S. 590 die horizontalen Coordinaten X und Y' des Schwerpunktes S der Masse m dieselben wie jene des Druckmittelpunktes A . Nun ist $X = \frac{\int x \, dm}{\int dm}$, $Y' = \frac{\int y' \, dm}{\int dm}$. Setzt man in diese Gleichungen den früheren Wert von dm ein und setzt (siehe Fig. 169 oder 205) $y' = y \cos \alpha$ und $Y' = Y \cos \alpha$, so findet man $X = \frac{\int x z \, dM}{\int z \, dM}$, $Y = \frac{\int y z \, dM}{\int z \, dM}$. Da nun fernerhin $z = y \sin \alpha$ ist, so findet man $X = \frac{\int x y \, dM}{\int y \, dM} = \frac{\int x y \, dM}{M \eta}$, $Y = \frac{\int y^2 \, dM}{\int y \, dM} =$

$= \frac{J_x}{M \eta} = l_x$, welche Gleichungen zufolge der Anm. (1), S. 583 zu den Gleichungen (16) führen, wenn ρ_x und ρ_y die Trägheitshalbmesser der in der Fläche F vertheilt gedachten Masse M in Bezug auf die in der Ebene der Fläche F gelegenen Hauptcentralachsen dieser Masse bedeuten. Nebenbei sei bemerkt, dass X und Y' auch die Coordinaten des vertical über A befindlichen Druckmittelpunktes A' der in der Flüssigkeitsoberfläche gelegenen Querschnittsfläche F' des früheren Cylinders wären, wenn auch in dieser Fläche F' eine Masse so vertheilt gedacht würde, dass die Dichtigkeit in irgend einem Punkte derselben ebenfalls der mittleren Dichtigkeit $\frac{dm}{dV} = \frac{f\mu dz}{z}$ des entsprechenden verticalen Flüssigkeitsfadens von der Höhe z proportional wäre.

Ist die schwere Flüssigkeit nicht eine homogene, sondern eine compressible Flüssigkeit, so ist die Größe des Druckes nicht mehr durch das Gesetz (9), das den bisherigen Untersuchungen zugrunde gelegt wurde, bestimmt, sondern man muss behufs Bestimmung dieses Druckes p auf das durch die Gleichung (2) auf S. 720 ausgedrückte, allgemeinere, für alle schweren Flüssigkeiten gültige Gesetz zurückgehen, demzufolge stets, wenn, wie bisher, die positive z -Achse eines orthogonalen Achsensystems vertical nach abwärts gerichtet angenommen wird, $dp = \mu g dz = S dz$ ist, in welcher Gleichung je nach der bestimmten (als bekannt vorauszusetzenden) zwischen dem Drucke p und der Dichtigkeit μ bestehenden Beziehung, welche für die besondere in Betracht kommende Art der Flüssigkeit gültig ist, p als eine gegebene Function von μ , bezw. μ als eine bekannte Function von p anzusehen ist, oder aber man hat unmittelbar den Wert (1) des Potentials $U = -gz + C$ der Schwere in die entsprechenden Gleichungen des unmittelbar vorhergehenden § 104 einzusetzen.

So ist z. B. für eine Flüssigkeit, bei welcher die Dichtigkeit in demselben Verhältnisse zunimmt wie der Druck, für welche also $\mu - \mu_0 = A(p - p_0)$ ist, den Gleichungen (8) auf S. 708 zufolge

$$\mu = \mu_0 \cdot e^{Ag(z-z_0)}, \quad p = p_0 + \frac{\mu_0}{A} \left[e^{Ag(z-z_0)} - 1 \right] \dots (18)$$

wo A das durch Messungsversuche zu bestimmende constante Verhältniß der Dichtigkeitszunahme zur Druckzunahme bedeutet.

Der ersten Gleichung (18) zufolge nimmt, wenn die Tiefe in arithmetischer Progression zunimmt, die Dichte in geometrischer Progression zu.

Ist der Erfahrungscoefficient A so gering, dass man die Potenzen von $Ag(z - z_0)$, die höher als die zweite sind, vernachlässigen kann, so nehmen die Gleichungen (18) der bekannten Exponentialreihe zufolge die Form an

$$\mu = \mu_0 + \mu_0 A g (z - z_0) + \frac{1}{2} \mu_0 A^2 g^2 (z - z_0)^2,$$

$$p = p_0 + \mu_0 g (z - z_0) \left[1 + \frac{1}{2} A g (z - z_0) \right]$$

wo $\mu_0 g$ das spezifische Gewicht S_0 in jener Horizontalfläche bedeutet, welcher der Druck p_0 und die verticale Ordinate z_0 entsprechen.

Für ein vollkommenes Gas, welches das Boyle-Mariotte'sche Gesetz $\mu = A p$ befolgt, ist auch $\mu_0 = A p_0$ zu setzen, so dass die oberen Gleichungen (18) (bezw. die Gleichung (9) auf S. 709) zu folgenden Formeln führen:

$$p = p_0 \cdot e^{A g (z - z_0)}, \quad \mu = A p_0 \cdot e^{A g (z - z_0)} \dots (19)$$

A ist hier das ein- für allemal experimentell bei irgend einem Drucke $p = h s$ (wo h die messbare dem Gasdrucke p entsprechende Druckhöhe etwa einer Quecksilbersäule vom specifischen Gewichte s bedeutet) ermittelte Verhältnis der Dichtigkeit $\mu = \frac{S}{g}$ (wobei S das zu der zuletzt erwähnten Manometerhöhe h und zu dem Drucke p gehörige spezifische Gewicht des Gases bezeichnet) zum zugehörigen Drucke p des Gases, so dass $A = \frac{\mu}{p} = \frac{1}{g h} \cdot \frac{S}{s}$ ist.

Die Gleichung (19) drückt das bekannte oben schon erwähnte Gesetz aus, demzufolge, wenn die Tiefe z nach einer **arithmetischen** Progression zunimmt, der Druck p des Gases in **geometrischer** Progression zunimmt.

Sind b und b_0 die Barometerstände (eines Quecksilberbarometers) in zwei Horizontalschichten unserer Atmosphäre, denen die verticalen Ordinaten z und z_0 und die Luftdrücke p und p_0 entsprechen, also $z - z_0 = H$ der verticale Abstand dieser Luftschichten, und $p = b s$, $p_0 = b_0 s$, so ist unter den Voraussetzungen, welche der Ableitung der Gleichung (19) zugrunde gelegt wurden (also vorausgesetzt, dass die Atmosphäre im Gleichgewichte sich befindet, dass sie ferner eine constante Temperatur besitzt und das Mariotte'sche Gesetz in aller Strenge befolgt, ferner dass die beiden Stationen, in welchen die Barometerstände b und b_0 gleichzeitig gemessen werden, eine solche Lage haben, dass die Schwerkkräfte in beiden als gleichgerichtete Kräfte und die Schwerebeschleunigung g als gleich angenommen werden kann u. s. w.), der ersten Gleichung (19) zufolge $b = b_0 \cdot e^{A g (z - z_0)} = b_0 \cdot e^{A g H}$ daher

$$H = \frac{1}{A g} \log \text{nat} \frac{b}{b_0} \dots (20)$$

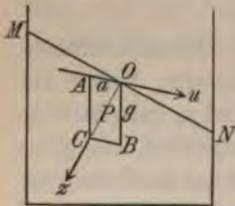
Diese Formel gestattet also, aus dem Barometerstande b an einer tieferen und dem gleichzeitig abgelesenen Barometerstande b_0

an irgend einer höheren Station den Höhenunterschied H dieser beiden Stationen zu bestimmen, nachdem der Coefficient $\frac{1}{Ag} = h \cdot \frac{S}{s}$ ein für allemal bestimmt worden ist. Es ist diese Formel bekannt unter dem Namen der einfachen barometrischen Höhenformel.

Befindet sich die schwere Flüssigkeit in relativem Gleichgewichte zu einem Gefäße, das nicht, wie bisher stillschweigend vorausgesetzt wurde, sich zur Erde in relativer Ruhe befindet, sondern das seine Lage zur Erdoberfläche stetig ändert, so ist das Potential U der (relativen) beschleunigenden Kraft P , wie dies im § 104 auseinandergesetzt wurde, nicht identisch mit dem Potential $U_a = -gz + C$ der resultierenden Beschleunigung g der Erdanziehung, sondern es ist von dem letzteren in Gemäßheit des d'Alembert'schen Principes noch zu subtrahieren das Potential der der Bewegung des Gefäßes entsprechenden beschleunigenden Kraft P_s (oder zu addieren das Potential des entsprechenden, entgegengesetzt gleichen Trägheitswiderstandes $-P_s$).

Ist z. B. die Bewegung des Gefäßes eine fortschreitende geradlinige Bewegung, die in der Richtung Ou (Fig. 206) mit der constanten Acceleration a vor sich geht, so hat man, um P zu finden, die Beschleunigung $OB = g$ der Schwere mit jener Beschleunigung OA zusammensetzen, die der Acceleration a entgegengesetzt und ihr an Größe gleich ist, und man findet durch diese Zusammensetzung die constante Richtung OC und die constante Größe der gesuchten relativen Beschleunigung $OC = P$. Die Niveaulinien sind dann Ebenen, die zu dieser Richtung OC senkrecht stehen.

Fig. 206.



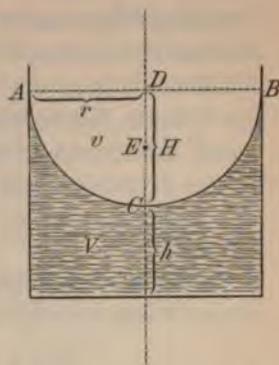
Wählt man diese Richtung OC zur positiven Richtung der z -Achse eines orthogonalen Achsensystems, als dessen xy -Ebene etwa die in relativer Ruhe befindliche Oberfläche MN der Flüssigkeit angenommen ist, so haben alle die in diesem Paragraphen früher abgeleiteten Gleichungen Giltigkeit, wofern überall g durch P ersetzt wird.

Rotiert in einem anderen Falle das Gefäß, in welchem die schwere Flüssigkeit sich in relativer Ruhe befindet, mit einer constanten Geschwindigkeit w um irgend eine Achse von constanter Lage und ist durch r der normale Abstand irgend eines Flüssigkeitsteilchens von dieser Achse bezeichnet, so ist zufolge der Gleichung (15) auf S. 715, wofern die Richtung vertical nach aufwärts zur positiven Richtung der z -Achse, also $gz + C$ als das Potential

der Schwere angenommen wird, $U = gz - \frac{1}{2} r^2 w^2 + C$ das Potential der beschleunigenden relativen Kraft P . Wählt man in dieser Gleichung für U irgend einen constanten Wert, so ist diese Gleichung die Gleichung der diesem Werte entsprechenden Niveaufläche. Es sind also in diesem Falle die Niveauflächen jedenfalls Flächen zweiten Grades. Ist z. B. die Rotationsachse vertical und wird dieselbe zur z -Achse gewählt, so ist offenbar, wenn ein orthogonales Achsensystem zugrunde gelegt wird, $r^2 = x^2 + y^2$, also $U = gz - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \cdot w^2 + C$. Die Niveauflächen sind dann, wie diese Gleichung lehrt, Rotationsparaboloide, deren geometrische Achse die Rotationsachse des Gefäßes ist, und deren Parameter den Wert $2 \frac{g}{w^2}$, also für alle Niveauflächen denselben Wert hat. (Zu demselben Resultate führt auch der in der letzten Anmerkung auf S. 716 unter (c) behandelte Fall, wenn der Centralpunkt in unendlich großer Entfernung angenommen wird.) Für jene Flüssigkeitstheilchen, die in der Rotationsachse gelegen sind, ist $x = 0$ und $y = 0$, also der letzten Gleichung zufolge $U = gz + C$. Es besteht somit für diese Flüssigkeitstheilchen dieselbe Grundgleichung (1), die allen den früheren Erörterungen dieses Paragraphen zugrunde lag.

Es müssen demnach auch die aus dieser Gleichung früher deducierten Folgerungen für die Punkte der Rotationsachse Giltigkeit haben. Der Druck und die Flüssigkeitsdichte in den Scheitelpunkten der einzelnen Paraboloide ist demnach je nach der Art der Flüssigkeit durch die Gleichungen (9), (18), (19) bestimmt und hiermit auch der Druck in den einzelnen Niveauflächen. Jene paraboloidische Niveaufläche, die zugleich die freie Flüssigkeitsoberfläche ist, kann man ihrer Lage nach ermitteln, wenn man die Gestalt des Gefäßes, die Art und die Masse der Flüssigkeit kennt. Ist z. B. die Flüssigkeit homogen (incompressibel), V ihr bekanntes Volum, ferner das Gefäß cylindrisch von der inneren Weite $2r$ und findet die Rotation um die geometrische Achse dieses Cylinders statt, so ist bei der aus Fig. 207 ersichtlichen Bezeichnungsweise, da $2 \frac{g}{w^2}$ der Parameter ist, der bekannten Parabelgleichung zufolge $r^2 = 2 \frac{g}{w^2} \cdot H$, also $H = \frac{1}{2} \frac{r^2 w^2}{g}$, ferner das Volumen v des von der Flüssigkeit nicht erfüllten Segments ACB des Rotationsparaboloids (siehe S. 636 und 533) $v = \frac{1}{2} \pi r^2 H =$

Fig. 207.



$= \frac{1}{4} \pi \frac{r^4}{g} \omega^2$ und $V + v = r^2 \pi (H + h) = r^2 \pi \left(\frac{1}{2} \frac{r^2 \omega^2}{g} + h \right)$,
 somit, wie die Subtraction dieser beiden Gleichungen lehrt, $h =$
 $= \frac{V}{r^2 \pi} - \frac{1}{4} \frac{r^2 \omega^2}{g}$ und $H + h = \frac{V}{r^2 \pi} + \frac{1}{4} \frac{r^2 \omega^2}{g}$. (Würde die
 Flüssigkeit nicht rotieren, so wäre die Höhe derselben $\frac{V}{r^2 \pi}$, d. i. das
 arithmetische Mittel aus h und $H + h$; es würde also die Flüssigkeit,
 wenn E die Mitte von $\overline{DC} = H$ ist, bis E reichen. Es muss sich dem-
 nach infolge der Rotation die Mitte der ursprünglich ruhenden Flüssig-
 keitsoberfläche um $\frac{H}{2} = \frac{1}{4} \frac{r^2 \omega^2}{g}$ senken, dagegen die Flüssigkeit
 am äußersten Rande um dieselbe Höhe heben.)

§ 106. Hydrodynamische Grundgleichungen.

Mit Zuhilfenahme des d'Alembert'schen Princips kann man
 bekanntlich jedes hydrodynamische Problem auf ein hydrostatisches
 zurückführen. Da diesem Principe zufolge die fictiven beschleunigen-
 den Kräfte $-\frac{d^2 x}{dt^2}$, $-\frac{d^2 y}{dt^2}$, $-\frac{d^2 z}{dt^2}$ (d. i. die Componenten des
 Trägheitswiderstandes pro Masseneinheit) den einwirkenden äußeren
 Kräften P , deren auf die Masseneinheit bezogenen Componenten durch
 XYZ bezeichnet sein mögen, und den inneren Kräften (d. i. den durch
 die früheren Kräfte hervorgerufenen Druckkräften p) das Gleichgewicht
 halten müssen, so dass, um die bisherigen Gleichungen der Hydrostatik
 in der Hydrodynamik in Anwendung bringen zu dürfen, die Kräfte
 $X - \frac{d^2 x}{dt^2}$, $Y - \frac{d^2 y}{dt^2}$, $Z - \frac{d^2 z}{dt^2}$ als die auf die Masseneinheit einwirken-
 den (beschleunigenden) äußeren Kräfte anzusehen sind, so nehmen die
 Euler'schen Gleichungen (5) auf S. 703 nunmehr folgende Form an:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \quad (1)$$

Dies sind die hydrodynamischen Grundgleichungen
 Euler's. Den diesen Gleichungen entsprechenden specifischen Druck p ,
 der in irgend einem Punkte einer nicht im Gleichgewichte befindlichen
 Flüssigkeit stattfindet, nennt man zum Unterschiede von dem bisher
 betrachteten hydrostatischen Drucke den hydrodynamischen (mit-
 unter auch den hydraulischen) Druck.

Zu den drei Gleichungen (1) tritt noch in allen Fällen hinzu
 jene Gleichung, welche die durch die Art der Flüssigkeit bedingte
 Beziehung zwischen Druck und Dichtigkeit ausdrückt, also bei incom-
 pressiblen Flüssigkeiten die Gleichung, welche ausdrückt, dass die
 Dichtigkeit μ eine constante Größe ist, bei compressiblen Flüssigkeiten

etwa eine der im § 104 betrachteten Gleichungen $\mu - \mu_0 = A(p - p_0)$ oder $\mu = Ap$ u. s. w. Eine fünfte Gleichung ist die sogenannte Continuitätsgleichung, welche die Continuität der Flüssigkeit ausdrückt, welche nämlich besagt, dass, wenn man die zu irgend einer Zeit t in irgend einem Volumelemente enthaltene, diesen Raum stetig erfüllende Masse vermehrt um die in dem Zeitelement dt in das Volumelement eintretende Masse und vermindert um die in dem selben Zeitelement dt austretende Masse, man die in diesem Volumelement zur Zeit $t + dt$ enthaltene Masse erhält.

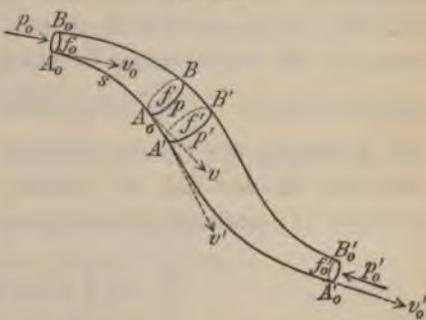
Sind nun, was meist der Fall ist, die Größe und Richtung der äußeren beschleunigenden Kraft P , somit auch deren Componenten XYZ in einem jeden Punkte, also für jeden Wert des xyz und zu jeder Zeit t gegeben, kurz sind XYZ bekannte Functionen der Größen $xyzt$ (oder im allgemeinen von $xyzt\mu p$), so kommen in den früher erwähnten fünf Gleichungen nach Einsetzung dieser Werte von XYZ nur die sechs im allgemeinen variablen Größen $\mu pxyz t$ vor, und es lassen sich dementsprechend im allgemeinen, da die Integrationsconstanten mit Hilfe des als bekannt vorausgesetzten Anfangszustandes ermittelt werden können, fünf dieser Variablen durch die sechste ausdrücken, also, wenn ein bestimmtes Flüssigkeitstheilchen, auf welches sich die Integrationsconstanten beziehen, ins Auge gefasst worden ist, sowohl die Coordinaten xyz , d. i. die Lage des Theilchens, als Function der Zeit t , und ebenso auch die Dichtigkeit μ und der Druck p in der unmittelbaren Nachbarschaft dieses Flüssigkeitstheilchens als Function der Zeit t bestimmen.

Nur die Integration obbesagter Gleichungen unterliegt in den meisten Fällen beträchtlichen Schwierigkeiten, und es sollen demgemäß in diesem Lehrgange nur einzelne elementare Fälle, die jedoch von Wichtigkeit sind, zur Behandlung kommen.

Bevor jedoch zu weiteren Auseinandersetzungen geschritten wird, ist es nothwendig, gewisse hydrodynamische Grundbegriffe zu erklären.

Jene Curve $A_0 A_0'$ (Fig. 208), deren gleichzeitige Tangenten $A_0 v_0, A v, A' v' \dots$ in den einzelnen Curvenpunkten $A_0 A A' \dots$ die gleichzeitigen Bewegungsrichtungen der in diesen Punkten $A_0 A A' \dots$ eben befindlichen Flüssigkeitstheilchen zu irgend einer Zeit t bestimmen, nennt man eine dieser Zeit t entsprechende Stromlinie.

Fig. 208.



Jene Flüssigkeitsmasse, die sich in einem röhrenförmigen Raume $A_o A_o' B_o' B_o$ befindet, dessen seitliche Begrenzungslinien von gleichzeitigen Stromlinien $A_o A_o', B_o B_o' \dots$ gebildet werden, und dessen senkrechte Querschnittsflächen $f_o f f' \dots$ ungemein klein sind, wird ein Stromfaden genannt. Eine jede krumme Fläche, deren einzelne unendlich kleinen Flächenelemente zu den gleichzeitigen, durch diese Flächenelemente hindurchgehenden Stromlinien, also auch zu den Geschwindigkeitsrichtungen der hindurchströmenden Flüssigkeitstheilchen normal sind, sei als Geschwindigkeitsniveaufläche (Fläche von constantem Geschwindigkeitspotential) oder kurzweg als Geschwindigkeitsniveau bezeichnet. Demgemäß sind die Stromlinien orthogonale Trajectorien der Geschwindigkeitsniveauflächen, und es sind die früheren Querschnittsflächen $f_o f f' \dots$ als Elemente der letzteren Flächen anzusehen.

Ändert sich während der stetigen Bewegung einer Flüssigkeit durch irgend einen bestimmten Raum in keinem Punkte dieses Raumes der Bewegungszustand für diesen Punkt im Verlaufe der in Betracht kommenden Zeit, so dass alle Flüssigkeitstheilchen, die nach einander diesen Punkt erreichen, in diesem Punkte stets dieselbe Geschwindigkeit und dieselbe Bewegungsrichtung annehmen, so nennt man die Flüssigkeitsbewegung in diesem Raume eine stationäre. (Der stationäre Zustand der Bewegung wird auch häufig als Beharrungszustand oder permanenter Zustand bezeichnet.) Es muss demgemäß bei einer stationären Strömung die Bewegung eines jeden Flüssigkeitstheilchens stets längs einer Stromlinie vor sich gehen, so dass die Stromlinien zugleich auch die Bahnen der einzelnen Flüssigkeitstheilchen bestimmen.

Wendet man nun die den hydrodynamischen Grundgleichungen (1) zugrunde liegende Beweisführung, nämlich das d'Alembert'sche Princip in Verbindung mit der hydrostatischen Grundgleichung (4), (S. 702) auf irgend ein Element ds einer Stromlinie an, so gelangt man, da die componentale Beschleunigung der Bewegung parallel zu diesem Element ds die tangentielle Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ ist, wenn dv die Änderung der Geschwindigkeit v bedeutet, die ein Flüssigkeitstheilchen in der Zeit dt erfährt, offenbar zu folgender den Gleichungen (1) analogen Grundrelation:

$$\frac{dp}{ds} = \mu \left[P \cos(P, ds) - \frac{dv}{dt} \right] \dots (2)$$

In dieser Gleichung ist im allgemeinen die Geschwindigkeit v sowohl zu derselben Zeit t von s , d. i. von der Lage des Punktes A in der Stromlinie, als auch bei demselben Werte des s , d. h. bei

gegebener Lage des Punktes A von der Zeit t abhängig, indem immer neue Flüssigkeitstheilchen mit im allgemeinen verschiedenen Geschwindigkeiten nach A gelangen.

Ist jedoch die Bewegung eine stationäre, so ist die letztere Abhängigkeit nicht vorhanden, da die Geschwindigkeit in A im Verlaufe der Zeit constant bleibt. Es ist dann v bloß eine Function von s allein [$v = F(s)$], und nur insofern, als sich bei demselben materiellen Punkte, der sich in diesem Falle längs der Stromlinie $A_o A_o'$ bewegt, s in bestimmter Weise mit der Zeit ändert [also etwa $s = \varphi(t)$ ist], ist auch v eine Function der Zeit t . Es ist so nach in dem betrachteten Falle $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$, und, da dann das Element ds der Stromlinie das in der Zeit dt vom Flüssigkeitstheilchen zurückgelegte Wegelement ist, so ist $v = \frac{ds}{dt}$, also $\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds}$. Substituiert man diesen Wert in die Gleichung (2), so nimmt diese für eine stationäre Bewegung die Form an:

$$\frac{dp}{ds} = \mu \left[P \cos(P, ds) - v \frac{dv}{ds} \right] \dots (3)$$

Die außer der tangentialen Componente $\left(-\frac{dv}{dt}\right)$ in Betracht zu ziehende zweite Componente der aus den fictiven beschleunigenden Kräften $-\frac{d^2x}{dt^2}$, $-\frac{d^2y}{dt^2}$, $-\frac{d^2z}{dt^2}$ resultierenden beschleunigenden Kraft $(-p)$, d. i. des Trägheitswiderstandes ist die centrifugale, zu der Stromlinie normal gerichtete Beschleunigung $\frac{v^2}{\rho}$, wo ρ den Krümmungshalbmesser der Stromlinie bedeutet. Betrachtet man demgemäß irgend eine im Geschwindigkeitsniveau gelegene Curve, deren Elemente dn in ihren Richtungen mit den centrifugalen Richtungen der Krümmungshalbmesser der durch dieselben hindurchgehenden Stromlinien übereinstimmen, so muss für diese Curve die den Gleichungen (1) und (2) adäquate Relation bestehen:

$$\frac{dp}{dn} = \mu \left[P \cos(P, dn) + \frac{v^2}{\rho} \right] \dots (4)$$

Die früher erwähnte Continuitätsgleichung nimmt in ihrer Anwendung auf einen Stromfaden eine einfache Form an.

Ist nämlich durch m die Masse, durch v das Volum, durch μ die (mittlere) cubische Dichtigkeit desjenigen Elements $AA'B'B$ eines Stromfadens $A_o A_o' B_o' B_o$ (Fig. 208) bezeichnet, welches zur Zeit t durch zwei in dem entsprechend klein gewählten Abstände $AA' = \sigma$ von einander befindliche Querschnittsflächen (Elemente von

zwei Geschwindigkeitsniveauflächen) f und f' begrenzt ist, so ist zunächst $m = \mu v$. Bedeutet ferner v die Geschwindigkeit eines beliebig gewählten Punktes M der Fläche f zur beliebigen Zeit t und v' die gleichzeitige Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes M' der Fläche f' , so ist $v'\tau$ die Verschiebung, welche der Punkt M' der Fläche f' in dem der Zeit t unmittelbar folgenden, sehr klein angenommenen Zeitintervalle τ in der Richtung von v' erfährt, während gleichzeitig der Punkt M der Fläche f sich in der Richtung der Bewegung um $v\tau$ verschiebt. Bei entsprechender Wahl der Punkte M und M' ist also durch $f' \cdot v'\tau$ das Raumelement ausgedrückt, um welches sich nach einer Seite (bei A') das Volum der Masse m in der Zeit τ vergrößert, und durch $f \cdot v\tau$ jenes Raumelement, um das sich auf der anderen Seite (bei A) das Volum der Masse m gleichzeitig verringert. Es kann demnach das Volum v' , das die Masse m zur Zeit $t + \tau$ einnimmt, bestimmt werden durch $v' = v + f'v'\tau - fv\tau$, folglich ist

$$\frac{v' - v}{\tau} = f'v' - fv \dots (5)$$

Ist nun f_m die Fläche jenes Querschnitts, den ein dem Volum v gleicher senkrechter elementarer Cylinder (Prisma), dessen Höhe gleich $AA' = \sigma$ ist, besitzen müsste, so ist $v = f_m \cdot \sigma$.

Die Division der beiden letzten Gleichungen führt zu der Relation $\frac{1}{v} \cdot \frac{v' - v}{\tau} = \frac{1}{f_m} \cdot \frac{f'v' - fv}{\sigma}$, welche beim Übergange zu den Grenzwerten für unendlich kleine τ und σ , da der Grenzwert von f_m offenbar f ist, die Form annimmt:

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{1}{f} \cdot \frac{d(fv)}{ds} \dots (6)$$

wo ds ein unendlich kleines Längenelement der Stromlinie bezeichnet.

Da die Masse $m = \mu v$ eines und desselben Flüssigkeitsquantums einen constanten, von der Zeit t unabhängigen Wert hat, also $\frac{dm}{dt}$ Null ist, so führt die Differentiation von $m = \mu v$ zu der Gleichung $v \frac{d\mu}{dt} + \mu \frac{dv}{dt} = 0$, wo $d\mu$ die unendlich kleine Änderung der Dichtigkeit bedeutet, welche die Masse m bei ihrer Bewegung in der unendlich kleinen Zeit dt erfährt. Es ist also der letzten Gleichung zufolge

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt} = 0 \dots (7)$$

und daher zufolge (6) und (7)

$$f \frac{d\mu}{dt} + \mu \frac{d(fv)}{ds} = 0 \dots (8)$$

Dies ist die Form der Continuitätsgleichung bei ihrer Anwendung auf einen Stromfaden.

Ist die Strömung der Flüssigkeit eine stationäre, so ändert sich die Dichtigkeit μ der letzteren mit der Zeit t nur insofern, als sich bei der continuierlichen Bewegung in demselben Stromfaden die Länge $A_o A = s$ des vom betrachteten Flüssigkeitstheilchen durchlaufenen Theiles der Stromlinie und hiermit auch im allgemeinen die Dichtigkeit μ dieses Flüssigkeitstheilchens ändert, die zwar von einem Raumpunkte zum anderen veränderlich sein kann, doch in demselben Punkte des Raumes stets die gleiche bleibt; es ist mit anderen Worten bei einer stationären Strömung μ bloß eine Function von s und der durchlaufene Weg s als Function von t anzusehen, und es ist daher $\frac{d\mu}{dt} = \frac{d\mu}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{d\mu}{ds}$. Führt man diesen Wert in die Gleichung (8) ein, so kann diese offenbar auf die Form gebracht werden $\frac{d(fv\mu)}{ds} = 0$, welche lehrt, dass in diesem Falle stets das Product $fv\mu$ in dem ganzen Stromfaden einen von s unabhängigen, also constanten Wert besitzen muss. Es ist daher

$$fv\mu = f_o v_o \mu_o = f_o' v_o' \mu_o' \dots (9)$$

Diese überaus einfache Form nimmt sonach die Continuitätsgleichung bei einer stationären Strömung an.

Es ist übrigens leicht auch sofort einzusehen, dass das durch den Querschnitt f des Stromfadens in dem Zeitelement dt hindurchströmende Flüssigkeitsvolumen durch $f \cdot v dt$, also die hindurchströmende Flüssigkeitsmasse dM durch $dM = \mu \cdot f v dt$ bestimmt ist, und dass infolge der Continuität der Flüssigkeit diese Flüssigkeitsmasse dM für alle Querschnitte in demselben Zeitelemente dt die gleiche, also $\mu f v$ constant sein muss, da sonst zum mindesten an gewissen Stellen des unveränderlichen Stromfadens eine Änderung der Dichtigkeit μ eintreten müsste, was mit der Annahme des stationären Zustandes der Flüssigkeitsströmung unvereinbar ist.

Ist die Flüssigkeit eine homogene (incompressible), also die Dichtigkeit μ eine constante, von der Zeit t unabhängige Größe, so lehrt die Continuitätsgleichung (8), in welcher dann $\frac{d\mu}{dt} = 0$ zu setzen ist, dass $\frac{d(fv)}{ds} = 0$, d. h.

$$fv = f_o v = f_o' v' \dots (10)$$

also in der ganzen Ausdehnung des Stromfadens das Product aus der Geschwindigkeit v und dem entsprechenden Querschnitte f constant sein muss.

§ 107. **Antrieb und mechanische Arbeit der auf eine strömende Flüssigkeit einwirkenden Kräfte. Potential der inneren Kräfte.**

Zufolge der Entwicklungen des § 57 ist bei einem jeden bewegten Punktsystem von unveränderlicher Masse, zwischen dessen Punkten nur Wechselwirkungen erster Art (Anziehungen und Abstoßungen) stattfinden, demnach auch bei einer jeden strömenden Flüssigkeit die Summe der in der beliebigen Zeit t parallel zu irgend einer Achse $xy z$ eines Achsensystems, das an der Bewegung des Punktsystems nicht theilnimmt, erfolgenden mechanischen Antriebe der äußeren Kräfte gleich der gleichzeitigen Änderung der gesammten Bewegungsgröße des Punktsystems in der Richtung dieser Achse. Sind also durch m die Masse irgend eines ungemein kleinen Flüssigkeitselementes der unveränderlichen Gesammtmasse M einer bestimmten Flüssigkeit, ferner durch $P_x P_y P_z$ die Componenten der auf die Flüssigkeit einwirkenden äußeren Kräfte, also durch $\Sigma P_x, \Sigma P_y, \Sigma P_z$ die Componenten der Reductionsresultanten R sämmtlicher äußerer Kräfte, die gleichzeitig auf M wirken, ferner durch $v_x v_y v_z$ die Componenten der Geschwindigkeit v des Massenelements m zur Zeit t und durch $c_x c_y c_z$ die Componenten der Geschwindigkeit c desselben materiellen Punktes zur Zeit $t = 0$ bezeichnet, so ist zufolge der Gleichungen (2) und (4) auf S. 332 und 334

$$\left. \begin{aligned} \int_0^t \Sigma P_x dt &= \Sigma (m v_x) - \Sigma (m c_x) \\ \int_0^t \Sigma P_y dt &= \Sigma (m v_y) - \Sigma (m c_y) \\ \int_0^t \Sigma P_z dt &= \Sigma (m v_z) - \Sigma (m c_z) \end{aligned} \right\} (1)$$

Bedeutend $\xi \eta \zeta$ die Coordinaten des Massenmittelpunktes S dieser Flüssigkeitsmasse M , also $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_t, \left(\frac{d\eta}{dt}\right)_t, \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_t$ die Geschwindigkeitcomponenten desselben zur Zeit t und $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0, \left(\frac{d\eta}{dt}\right)_0, \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0$ jene zur Zeit 0 , so lassen sich die Gleichungen (1) (siehe S. 334) auch in folgender Form ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^t \Sigma P_x \cdot dt &= M \left(\frac{d\xi}{dt} \right)_t - M \left(\frac{d\xi}{dt} \right)_0 \\ \int_0^t \Sigma P_y \cdot dt &= M \left(\frac{d\eta}{dt} \right)_t - M \left(\frac{d\eta}{dt} \right)_0 \\ \int_0^t \Sigma P_z \cdot dt &= M \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)_t - M \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)_0 \end{aligned} \right\} (2)$$

Werden ferner die in dem letzten § 106 angewendeten Zeichen beibehalten, so ist gemäß der Gleichung (2) desselben für irgend ein dem Punkte A (Fig. 208) angrenzendes Element ds der Stromlinie $A_o A A'$, wofern P die äußere Kraft pro Masseneinheit bedeutet,

$$\frac{dp}{ds} = \mu \left[P \cos(P, ds) - \frac{dv}{dt} \right] \dots (3)$$

Da in der Fig. 208 angenommen wurde, dass s in der Richtung der Bewegung zunimmt, so ist in dieser Gleichung ds positiv und auch v positiv in Rechnung zu bringen.

Multipliziert man diese Gleichung mit dem Producte aus der Geschwindigkeit v in das dem Elemente ds der Stromlinie entsprechende Volumelement $f \cdot ds = v$ des Stromfadens und beachtet man, dass die in diesem Volumelemente v enthaltene Masse $m = \mu v = \mu \cdot f ds$ ist, so findet man

$$fv \cdot dp = m P \cdot v \cos(P, ds) - m v \frac{dv}{dt} \dots (4)$$

Nun ist $m P \cdot v \cos(P, ds)$ das Product aus der auf das Massenelement m einwirkenden äußeren Kraft $m P$ in die Projection $v \cos(P, ds)$ der Geschwindigkeit v desselben auf die Krafrichtung oder — was auf das Gleiche hinauskommt — das Product aus der in der Bewegungsrichtung wirksamen (tangentialen) Componente $m P \cdot \cos(P, ds)$ dieser Kraft in die Geschwindigkeit v , kurz es stellt das erste Glied der rechten Seite der Gleichung (4) den Effect der äußeren Kraft $m P$, d. i. den Differentialquotient $\frac{dA}{dt}$ der mechanischen Arbeit A dieser Kraft — genommen nach der Zeit — dar; es ist also

$$\frac{dA}{dt} = m P v \cos(P, ds) \dots (5)$$

Ferner lässt sich das Differential des Productes aus fv und dem Drucke p folgenderart ausdrücken: $d(fv \cdot p) = p \cdot d(fv) + fv \cdot dp$; somit findet man, wenn man in diese Gleichung den aus der Gleichung (5) auf S. 754 sich ergebenden Wert $d(fv) = \frac{dv}{dt}$ oder aber den aus der Continuitätsgleichung (8) auf S. 755 deducierbaren Wert

$$d(fv) = -\frac{f ds}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dt} = -\frac{v}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dt} = -\frac{m}{\mu^2} \frac{d\mu}{dt} \dots (6)$$

einsetzt, für $fv \cdot dp$ den Wert

$$fv \cdot dp = d(fvp) - p \cdot d(fv) = d(fvp) - p \frac{dv}{dt} = d(fvp) + \frac{mp}{\mu^2} \frac{d\mu}{dt} (7)$$

Schließlich ist das letzte Glied in (4), nämlich $mv \frac{dv}{dt}$ der Differentialquotient der zur Zeit t vorhandenen lebendigen Kraft $\frac{mv^2}{2}$ des betrachteten Flüssigkeitselementes m — genommen nach der Zeit t , d. h. $mv \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right)$.

Führt man diesen Wert und die Werte aus (5) und (7) in die Gleichung (4) ein, so nimmt diese die Form an

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \frac{dA}{dt} - d(fvp) + p \frac{dv}{dt} = \frac{dA}{dt} - d(fvp) - \frac{mp}{\mu^2} \frac{d\mu}{dt} (8)$$

Addiert man alle diese auf die einzelnen Massenelemente m , beziehungsweise Volumelemente v desselben Stromfadens und auf dasselbe Zeitelement dt sich beziehenden Gleichungen und beachtet, dass die Summe aller der in Betracht zu ziehenden Differenziale $d(fvp)$ der Gesamtänderung der Function fvp beim allmäligen Übergange von f_o bis f_o' , also der Differenz $f_o'v_o'p_o' - f_o v_o p_o$ gleich ist, wo sich die Geschwindigkeit v_o und der Druck p_o auf die anfängliche Querschnittsfläche f_o des Stromfadens, die im allgemeinen in der Flüssigkeitsoberfläche anzunehmen ist, und v_o' und p_o' auf den zweiten Endquerschnitt f_o' des Stromfadens bezieht, so findet man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Sigma \frac{mv^2}{2} &= \frac{d \Sigma A}{dt} - (f_o'v_o'p_o' - f_o v_o p_o) + \Sigma \left(p \frac{dv}{dt} \right) \\ &= \frac{d \Sigma A}{dt} + f_o v_o p_o - f_o'v_o'p_o' - \Sigma \left[\frac{mp}{\mu^2} \cdot \frac{d\mu}{dt} \right] \end{aligned} (9)$$

Das Summenzeichen Σ in dieser Gleichung erstreckt sich nach dem Gesagten auf die Summation der gleichzeitigen, auf die einzelnen Punkte des Stromfadens sich beziehenden Werte. Der Summand $\frac{d \Sigma A}{dt}$ bedeutet den gesammten Effect der auf die innere Flüssigkeitsmasse des ganzen Stromfadens wirkenden äußeren Kräfte zur Zeit t .

Bildet der Stromfaden einen in sich geschlossenen Canal, so ist offenbar $f_o = f_o'$, $p_o = p_o'$ und $v_o = v_o'$, und es muss demgemäß die Differenz $f_o v_o p_o - f_o'v_o'p_o'$ verschwinden. In allen anderen Fällen drückt diese Differenz die algebraische Summe der Effecte $\frac{dA_o}{dt} + \frac{dA_o'}{dt}$

jener äußeren Druckkräfte $p_o f_o$ und $p_o' f_o'$ aus, welche auf die beiden äußersten Grenzflächen f_o und f_o' einwirken, und zwar verrichtet der äußere Druck p_o , da derselbe nach dem Innern der Flüssigkeitsmasse des Stromfadens gerichtet ist, also die Richtung der Eintrittsgeschwindigkeit v_o hat, in der Zeit dt die positive elementare Arbeit $dA_o = p_o f_o \cdot v_o dt$, während der gleichfalls nach dem Innern gerichtete Druck p_o' , welcher der Richtung der Austrittsgeschwindigkeit v_o' entgegengesetzt ist, in demselben Zeitelemente dt die negative Arbeit $dA_o' = -p_o' f_o' \cdot v_o' dt$ leistet.

Addirt man nun sämmtliche den einzelnen Stromfäden einer bestimmten endlichen unveränderlichen Flüssigkeitsmasse M entsprechenden Gleichungen (9), so dass sich die Summenzeichen Σ von nun an auf diese ganze Flüssigkeitsmasse M und auf alle auf dieselbe wirkenden Kräfte beziehen, und integriert dann die so erhaltene Gleichung nach der Zeit t innerhalb der Grenzen $t=0$ und t , so ergibt sich sofort aus der Gleichung (9), wofern die der Zeit $t=0$ entsprechenden Anfangsgeschwindigkeiten durch c und die in der Zeit t geleistete gesammte Arbeit der auf die ganze äußere Grenzfläche der Flüssigkeit M wirkenden äußeren Druckkräfte pf durch ΣA_o bezeichnet werden, zu der wichtigen Relation

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \left(\frac{mv^2}{2} \right) - \Sigma \left(\frac{mc^2}{2} \right) &= \Sigma A + \Sigma A_o + \Sigma \int_0^t p \frac{dv}{dt} dt = \\ &= \Sigma A + \Sigma A_o - \Sigma \int_0^t \frac{mp}{\mu^2} \frac{d\mu}{dt} dt \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Da die linke Seite dieser Gleichung die Änderung der kinetischen Energie der Masse M in der Zeit t und die Summe der beiden ersten Glieder der rechten Seite, nämlich $\Sigma A + \Sigma A_o$ die Gesamtsumme der gleichzeitigen mechanischen Arbeiten der theils auf die innere Flüssigkeitsmasse M , theils auf die äußerste Grenzfläche der Flüssigkeit wirkenden äußeren Kräfte mP , bzw. $p_o f_o, p_o' f_o' \dots$ ausdrückt, so müssen die letzten Summanden in (10) (siehe S. 324) die Summe der in der Zeit t geleisteten mechanischen Arbeiten a der inneren Kräfte bestimmen. Es ist also

$$\Sigma a = \Sigma \int_0^t p \frac{dv}{dt} \cdot dt = - \Sigma \int_0^t \frac{mp}{\mu^2} \cdot \frac{d\mu}{dt} dt \dots \quad (11)$$

und der gesammte Effect Σe der inneren Kräfte zur Zeit t ist

$$\Sigma e = \frac{d\Sigma a}{dt} = \Sigma \left(p \frac{dv}{dt} \right) = \Sigma \left(- \frac{mp}{\mu^2} \cdot \frac{d\mu}{dt} \right) \dots \quad (12)$$

Ist nun $F(\mu)$ jene Function der Dichtigkeit, welche die Abhängigkeit des Druckes p von der Dichtigkeit μ bei irgend einer compressiblen Flüssigkeit ausdrückt, d. h. ist

$$p = F(\mu) \dots (13)$$

und ist durch J das mit Zuhilfenahme dieses Functionswertes berechenbare — als eine Function von μ anzusehende — Integral

$$J = \int \frac{p}{\mu^2} d\mu = \int \frac{F(\mu)}{\mu^2} d\mu \dots (14)$$

bezeichnet, so ist der Differentialquotient der auf die einzelnen Massenpunkte m der Masse M ausgedehnten Summe $\Sigma(mJ)$ nach der Zeit t , nämlich

$$\frac{d\Sigma(mJ)}{dt} = \Sigma \left(m \frac{dJ}{dt} \right) = \Sigma \left(m \frac{dJ}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{dt} \right) = \Sigma \left(m \cdot \frac{p}{\mu^2} \frac{d\mu}{dt} \right)$$

der Gleichung (12) zufolge dem Gesamteffecte Σe der inneren Kräfte entgegengesetzt gleich, mit anderen Worten es ist durch diese Summe $\Sigma(mJ)$ das Potential u der inneren Kräfte bestimmt, so dass die Integration der letzten Gleichung nach der Zeit t für dieses innere Potential u den Wert liefert:

$$u = \Sigma(mJ) = \Sigma m \int \frac{p}{\mu^2} d\mu \dots (15)$$

Die Summe der in der Zeit t geleisteten mechanischen Arbeiten a der inneren Kräfte ist offenbar, wenn u_0 den Anfangswert dieses Potentials (zur Zeit $t=0$) bezeichnet, durch die Potentialdifferenz $\Sigma a = u_0 - u$ ausgedrückt, wie dies schon die Gleichung (11) lehrt.

Ist die Flüssigkeit incompressibel, so findet im Laufe der Zeit t keine Änderung der Dichtigkeit μ des Massenelementes m statt, es ist also $\frac{d\mu}{dt} = 0$, somit ist der Gleichung (11) zufolge $\Sigma a = 0$, d. h. die Summe der mechanischen Arbeiten der inneren Kräfte ist bei unzusammendrückbaren Flüssigkeiten, wie dies auch für starre Punktsysteme früher nachgewiesen wurde, stets Null. Dementsprechend ist der Gleichung (10) zufolge für alle incompressiblen Flüssigkeiten

$$\Sigma \left(\frac{m v^2}{2} \right) - \Sigma \left(\frac{m c^2}{2} \right) = \Sigma A + \Sigma A_0 \dots (16)$$

d. h. es hat der Satz der lebendigen Kraft, demzufolge die Summe der in irgend einer Zeit t geleisteten mechanischen Arbeiten der äußeren Kräfte gleich ist der gleichzeitigen Änderung der kinetischen Energie, auch Giltigkeit für eine jede Bewegung einer incompressiblen Flüssigkeit.

Anmerkung. Dass die mechanische Arbeit Σa der inneren Kräfte durch den Wert (11) bestimmt ist, dies lehrt auch folgende einfache instructive Überlegung:

Man fasse ein Flüssigkeitselement von der Form eines ungemein kleinen rechtwinkligen Parallelepipeds ins Auge, das (wenn seine Kanten zu den Richtungen der sogenannten Hauptachsen der Deformation parallel angenommen werden) auch nach der in dem Zeitelemente dt erfolgten Deformation die Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds beibehält. Die ursprünglichen Kantenlängen desselben zur Zeit t seien durch $\alpha\beta\gamma$, sein Volum durch v , und seine Masse durch m bezeichnet. Infolge der Flüssigkeitsbewegung wird dieses Element m nach Verlauf der Zeit dt eine andere Lage im Raume annehmen, und seine Kantenlängen werden sich infolge der eingetretenen Deformation um $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, und sein Volum um dv geändert haben.

Die ersterwähnte Änderung der räumlichen Lage des Elements kann man sich getrennt von der letzteren Deformation, also unabhängig von derselben denken, so dass man bei der Betrachtung dieser Lagenänderung allein das Element m als nicht deformiert, d. i. als starr ansehen kann. Man kann demnach diese Änderung der Lage des Elementes zufolge des § 63 als zusammengesetzt betrachten aus einer fortschreitenden Bewegung und einer Rotation um eine augenblickliche Achse. Da nun die zwischen den Flüssigkeitstheilchen des Elementes m thätigen inneren Kräfte nur als Gegenwirkungen der ersten Art (vergl. S. 24) anzusehen sind, so muss die Summe der mechanischen Effecte derselben sowohl bei der fortschreitenden Bewegung (siehe S. 547), als auch bei der Rotation um die augenblickliche Achse (siehe S. 557 und S. 661), indem die mechanischen Arbeiten je zweier solcher Gegenkräfte bei starren Punktsystemen entgegengesetzt gleich sind, Null sein.

Denkt man sich ferner die außerdem in Betracht zu ziehende Deformation in die Längenänderungen $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ zerlegt und diese theilweisen Deformationen statt gleichzeitig nach einander vor sich gehend, so lassen sich die mechanischen Arbeiten der erwähnten inneren Kräfte folgenderart ermitteln: Nimmt man das Flüssigkeitselement $v = \alpha\beta\gamma$ so klein an, dass der Druck p innerhalb desselben überall als gleich angesehen werden kann, und denkt sich dasselbe durch irgend eine Ebene E in zwei Theile v_1 und v_2 getheilt, so sind die in dem beliebigen Flächenelemente f dieser Schnittfläche E wirkenden, auf E senkrechten Kräfte pf und $-pf$, welche von der Einwirkung der beiden Theile v_1 und v_2 auf die Flüssigkeitstheilchen des Elements f herrühren, entgegengesetzt gleich, also die Summe der mechanischen Arbeiten dieser Kräfte bei einer jeden Bewegung des Flächenelements f Null. Es sind demnach bloß die mechanischen Arbeiten jener inneren Kräfte $p \cdot \beta\gamma$, $p \cdot \gamma\alpha$ und $p \cdot \alpha\beta$ in Betracht zu ziehen, die auf die äußersten Grenzflächen $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ u. s. w. des Parallelepipeds, welche das letztere nicht in zwei Theile zertheilen, und zwar senkrecht zu denselben nach auswärts wirken. Bei der longitudinalen Deformation (Dilatation) $d\alpha$, die parallel zur Kante α vor sich geht, reduciert sich nun die gesammte Arbeit da_1 dieser Kräfte bloß auf die Arbeit der zu dieser Kante parallelen Kräfte $p \cdot \beta\gamma$ und $-p\beta\gamma$, welche auf die beiden zur Kante α senkrechten Grenzflächen $\beta\gamma$ wirken — indem nämlich die Verschiebung $d\alpha$ senkrecht zu den anderen Kräften $p \cdot \gamma\alpha$ und $p \cdot \alpha\beta$ erfolgt, weshalb von diesen Kräften hiebei keine Arbeit geleistet wird — und zwar ist offenbar $da_1 = p\beta\gamma \cdot d\alpha$ (wo da_1 mit $d\alpha$ gleich bezeichnet ist). Es ist demnach der Effect der inneren Kräfte bei der Deformation $d\alpha$ bestimmt durch $\frac{da_1}{dt} = p\beta\gamma \cdot \frac{d\alpha}{dt}$, und aus gleichen Gründen sind $\frac{da_2}{dt} = p \cdot \gamma\alpha \cdot \frac{d\beta}{dt}$ und $\frac{da_3}{dt} = p\alpha\beta \cdot \frac{d\gamma}{dt}$ die Effecte der inneren Kräfte bei den weiteren linearen Dilatationen $d\beta$ und $d\gamma$. Der gesammte Effect der inneren Kräfte ist demnach

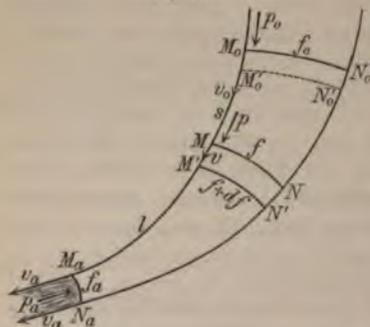
$$\epsilon = \frac{da_1}{dt} + \frac{da_2}{dt} + \frac{da_3}{dt} = p \left(\beta\gamma \frac{da}{dt} + \gamma\alpha \frac{d\beta}{dt} + \alpha\beta \frac{d\gamma}{dt} \right)$$

Die Differentiation der Gleichung $v = \alpha\beta\gamma$ nach der Zeit t lehrt aber, dass der eingeklammerte Ausdruck nichts anderes bedeutet als $\frac{dv}{dt}$, und es ist demnach $\epsilon = \frac{da_1}{dt} + \frac{da_2}{dt} + \frac{da_3}{dt} = p \cdot \frac{dv}{dt}$. Bezieht sich also das Summenzeichen Σ auf alle in der gesammten in Betracht gezogenen Flüssigkeitsmasse M enthaltenen Massenelemente $m = \mu \cdot v$, bezw. auf alle Volumelemente v dieser Masse M , wobei der Druck p im allgemeinen beim Übergange von einem Elemente zum andern sich ändert, so ist $\Sigma \epsilon = \Sigma \frac{da}{dt} = \frac{d\Sigma a}{dt} = \Sigma \left(p \frac{dv}{dt} \right)$ oder, da zufolge der Gleichung (7) auf S. 754 $\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\mu} \frac{d\mu}{dt} = -\frac{m}{\mu^2} \frac{d\mu}{dt}$ ist, so muss $\Sigma \epsilon = \frac{d\Sigma a}{dt} = \Sigma \left(p \frac{dv}{dt} \right) = -\Sigma \frac{m p}{\mu^2} \frac{d\mu}{dt}$ sein, wodurch die Richtigkeit der Gleichung (12) auf einem anderen Wege nachgewiesen ist.

§ 108. Geschwindigkeit des Ausflusses einer unter dem Einflusse gegebener äußerer Kräfte befindlichen Flüssigkeit aus Gefäßen.

Aus einem Gefäße, in welchem sich eine Flüssigkeit befindet, auf deren Massentheilchen gegebene Kräfte, deren auf die Masseneinheit bezogenes Potential im Punkte (x, y, z) durch U bezeichnet sei, einwirken, ströme durch eine in der Gefäßwand irgendwo befindliche Ausflussöffnung die Flüssigkeit in den äußeren Raum mit einer gewissen Geschwindigkeit, der sogenannten Ausflussgeschwindigkeit v_a . Es sei vorausgesetzt, dass die Flüssigkeit eine vollkommene (siehe S. 27), sei es compressible oder incompressible Flüssigkeit ist, dass ferner weder die relative Bewegung der Flüssigkeitstheilchen gegen einander, noch die Bewegung derselben längs der Gefäßwände einen Wider-

Fig. 209.



stand erfährt, kurz es sei hier sowohl von der inneren Reibung, als auch von der äußeren Reibung, die an den Gefäßwänden eintritt, vollkommen abgesehen. Desgleichen sei vorausgesetzt, dass nirgends eine plötzliche Änderung weder der Geschwindigkeit, noch der Dichtigkeit, noch des Druckes, noch auch der Querschnittsflächen des Gefäßes stattfindet. M_o, N_o, N, M, M_a (Fig. 209) sei irgend ein Stromfaden, und zwar sei M_o ein Punkt der Flüssigkeitsoberfläche und M_a ein Punkt der Ausflussöffnung des Gefäßes, deren Fläche in allen ihren Punkten senkrecht zur Richtung der entsprechenden Ausflussgeschwindigkeit — kurz als ein Element der Geschwindigkeits-

niveaufläche — angenommen sei, ferner bedeute v die Geschwindigkeit in dem beliebigen Punkte M der Stromlinie $M_o M M' M_a$, ferner v_o die Geschwindigkeit in M_o und v_a jene in M_a . Schließlich mögen für die Punkte $M_o M M' M_a$ die zur Zeit t herrschenden specifischen Drücke entsprechend durch $p_o p p' p_a$, die zugehörigen senkrechten Querschnittsflächen des Stromfadens, welche als Theile der entsprechenden Geschwindigkeitsniveauflächen zu denken sind, durch $f_o f f' f_a$, die Dichtigkeiten durch $\mu_o \mu \mu' \mu_a$ und die entsprechenden Potentialwerte pro Masseneinheit durch $U_o U U' U_a$ bezeichnet werden.

Ist die Strömung der Flüssigkeit in dem Stromfaden eine stationäre, in welchem (für die technischen Anwendungen wichtigsten) Falle die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen stetig längs der Stromlinie (Strömungscurve) $M_o M_a$ vor sich geht, so sind v_o und v_a als von der Zeit t unabhängige Größen und p, v, μ, U als Functionen von $\text{arc } M_o M = s$ allein anzusehen, indem der Druck p , die Geschwindigkeit v u. s. w. an derselben Stelle M der Stromlinie im Verlaufe der Zeit stets denselben Wert beibehält; es ist dann der Gleichung (3) auf S. 753 gemäß, da bekanntlich $\frac{dU}{ds} = -P \cos(P, ds)$ zu setzen ist, wenn ds das unendlich kleine Element MM' der Stromlinie bedeutet,

$$\frac{dp}{ds} = -\mu \left[\frac{dU}{ds} + v \frac{dv}{ds} \right] \dots (1)$$

daher im ganzen Verlaufe derselben Stromlinie $M_o M_a$

$$-\frac{dp}{\mu} = dU + v dv \dots (2)$$

Besteht nun für die ganze Flüssigkeit in dem Raume $M_o N_o N_a M_a$ die bestimmte eindeutige, von der Natur der Flüssigkeit abhängige Beziehung zwischen Druck und Dichtigkeit: $\mu = \varphi(p)$, bezw. $p = F(\mu)$, wo φ und F gegebene stetige Functionen bedeuten, so lässt sich das Integral von $\frac{dp}{\mu}$ im allgemeinen als bestimmbar voraussetzen. Die auf $M_o M$, bezw. $M_o M_a$ ausgedehnte Integration der Gleichung (2) führt dann zu den Relationen

$$\int_{p_o}^p \frac{dp}{\mu} = U_o - U - \frac{v^2 - v_o^2}{2}, \quad \int_{p_o}^{p_a} \frac{dp}{\mu} = U_o - U_a - \frac{v_a^2 - v_o^2}{2} \dots (3)$$

Aus der letzten Gleichung lässt sich, wenn, wie in der Folge meist vorausgesetzt werden soll, der Druck p_o an der Flüssigkeitsoberfläche und der Druck p_a an der Ausflussöffnung — also auch $\mu_o = \varphi(p_o)$ und $\mu_a = \varphi(p_a)$ — gegeben sind, die gesuchte Aus-

flussgeschwindigkeit v_a bestimmen. So findet man z. B., wenn die Geschwindigkeit v_o in der Flüssigkeitsoberfläche Null ist,

$$v_a^2 = 2 \left[(U_o - U_a) - \int_{p_o}^{p_a} \frac{dp}{\mu} \right] \dots (4)$$

Ist v_o verschieden von Null, so ist bei stationärer Strömung zufolge der Continuitätsgleichung (9) auf S. 755 $f v \mu = f_o v_o \mu_o = f_a v_a \mu_a$, also

$$v = \frac{f_a \mu_a}{f \mu} v_a, \quad v_o = \frac{f_a \mu_a}{f_o \mu_o} v_a \dots (5)$$

zu setzen. Substituiert man den letzten Wert in die Gleichung (3), so findet man

$$v_a^2 = 2 \frac{U_o - U_a - \int_{p_o}^{p_a} \frac{dp}{\mu}}{1 - \left(\frac{f_a \mu_a}{f_o \mu_o} \right)^2} \dots (6)$$

Diese allgemeine, für eine jede stationäre Strömung gültige Formel gestattet, die Ausflussgeschwindigkeit v_a aus den gegebenen Größen $U_o, U_a, p_o, p_a, f_a, f_o$ zu berechnen.

Es lassen sich auch die Gleichungen (3) und (6) ohne Schwierigkeit aus dem durch die Gleichung (10) des § 107 ausgedrückten Gesetze deducieren.

Anmerkung 1. Bei einer stationären Strömung muss nicht nur v_o den Wert (6), sondern es muss, wenn eine stationäre Strömung überhaupt möglich sein soll, auch die Geschwindigkeit v_o an der Oberfläche einen genau bestimmten Wert haben, der sich nämlich aus der zweiten Gleichung in (5) ergibt, wenn in derselben für v_a der Wert aus (6) eingeführt wird. Man gelangt so zu der Beziehung

$$v_o^2 = 2 \frac{f_a^2 \mu_a^2}{f_o^2 \mu_o^2 - f_a^2 \mu_a^2} \left[U_o - U_a - \int_{p_o}^{p_a} \frac{dp}{\mu} \right] \text{ zwischen den Größen } v_o, p_o, p_a, f_o$$

und f_a , die stets erfüllt sein muss, wenn eine stationäre Strömung eintreten soll. Bei gegebenen Werten von f_o und f_a , d. i. bei gegebener Form des Stromfadens (z. B. wenn der Stromfaden ein von festen Gefäßwänden begrenzter Canal ist), muss also in diesem Falle der aus dieser Gleichung bestimmte Wert von v_o vorhanden sein, und ebenso muss bei gegebenem v_o und f_a sich der Stromfaden derart gestalten, dass f_o den aus dieser Gleichung bestimmbaren Wert besitzt. So muss z. B. für $v_o = 0$ dieser Gleichung zufolge, was auch unmittelbar aus (5) folgt, das Verhältnis von f_a zu f_o Null, d. h. f_a unendlich klein im Verhältnis zu dem Querschnitte f_o an der Oberfläche sein.

Ist $p_o = p_a$, also auch $\mu_o = \mu_a$, d. h. ist irgend eine Flüssigkeit an der Ausflussöffnung demselben Drucke ausgesetzt wie an der Flüssigkeitsoberfläche (etwa dem herr-

schenden atmosphärischen Drucke) — ein Fall, der sehr häufig vorkommt — so verschwindet, da das Integral der ersten Gleichung (3) eine eindeutige stetige Function von p ist, das bestimmte Integral

$\int_{p_o}^{p_a} \frac{dp}{\mu}$, dessen Grenzen in diesem Falle identisch sind, und es führen dementsprechend die Gleichungen (3) und (6) zu den Folgerungen

$$U_o - U_a = \frac{v_a^2 - v_o^2}{2}, \quad v_a^2 = 2 \frac{U_o - U_a}{1 - \left(\frac{f_a}{f_o}\right)^2} \dots (7)$$

Die erstere Gleichung drückt aus, dass, wenn $p_o = p_a$ ist, für jede Masseneinheit die Potentialdifferenz $U_o - U_a$ gleich ist der Änderung der lebendigen Kraft pro Masseneinheit; es ist demzufolge bei einer jeden Flüssigkeit, für welche $p_o = p_a$ ist, die Ausflussgeschwindigkeit identisch mit der Endgeschwindigkeit v_a eines freibeweglichen oder in einer vorgeschriebenen Bahn $M_o M_a$ (Fig. 209) sich bewegenden materiellen Punktes, der unter der Einwirkung derselben beschleunigenden Kraft (deren Potential U ist) aus der dem Punkte M_o der Flüssigkeitsoberfläche zugehörigen Niveaufläche (mit dem Potential U_o) nach der der Ausflussöffnung M_a entsprechenden Niveaufläche (mit dem Potential U_a) sich bewegt, wofern als Anfangsgeschwindigkeit desselben gleichfalls v_o angenommen wird. Der normale Druck, welcher von dem den Flüssigkeitsfaden umgebenden Körper (z. B. der Gefäßwand) ausgeübt wird, hat, mag er welche Größe auch immer haben, auf diese Geschwindigkeit v_a keinen Einfluss, da derselbe stets normal zur Bewegungsrichtung wirkt, sodass er keine mechanische Arbeit leistet.

Auch die weitere Bewegung der Flüssigkeit über die Ausflussöffnung hinaus unterliegt dem durch die erste Gleichung (7) ausgedrückten Gesetze, sodass man mittels dieser Gleichung auch die Geschwindigkeit v_a in jedem anderen Punkte des ausfließenden Flüssigkeitsstrahles bestimmen kann.

Befindet sich die ganze Flüssigkeitsmasse bloß unter dem Einflusse ihres eigenen Gewichtes, sodass auf die inneren Flüssigkeitsmassentheilchen m außer der Schwere mg keine weiteren äußeren Kräfte einwirken, so ist zufolge der Ausführungen des § 45 für U das Potential der auf die Masseneinheit bezogenen Schwerkraft $U = -gz + C$ einzusetzen, wofern als positive z -Achse eines orthogonalen Coordinatensystems eine vertical nach abwärts gerichtete Achse angenommen wird, und es ist daher, wenn die verticale Höhendifferenz $z_a - z_o$ des Punktes M_o der Oberfläche und des Punktes M_a

der Ausflussöffnung, d. i. die sogenannte Druckhöhe, durch h bezeichnet wird, in allen früheren Gleichungen

$$U_o - U_a = g(z_a - z_o) = gh \dots (8)$$

zu setzen. Dementsprechend ist z. B. die Ausflussgeschwindigkeit v_a einer jeden (compressiblen oder incompressiblen) der Schwerkraft allein unterworfenen Flüssigkeit unter der Voraussetzung, dass der Druck an der Oberfläche und an der Ausflussöffnung derselbe, also $p_a = p_o$ ist, der Gleichung (7) zufolge

$$v_a = \sqrt{v_o^2 + 2gh} = \sqrt{2 \frac{gh}{1 - \left(\frac{f_a}{f_o}\right)^2}} \dots (9)$$

Ist die Geschwindigkeit v_o an der Flüssigkeitsoberfläche so klein gegen v_a , somit auch (siehe Anm. 1) f_a so klein gegen f_o , dass $\frac{v_o}{v_a}$ und $\frac{f_a}{f_o}$ gegen 1 vernachlässigt werden können, so führt die Gleichung (9) zu dem bekannten einfachen Gesetze

$$v_a = \sqrt{2gh} \dots (10)$$

welches lehrt, dass die Ausflussgeschwindigkeit v_a einer schweren Flüssigkeit, wofern $p_o = p_a$ und die Ausflussöffnung ungemein klein ist, bei einer stationären Strömung stets einer Geschwindigkeitshöhe $\frac{v_a^2}{2g}$ entspricht, die der Druckhöhe $h = z_a - z_o$ gleichkommt oder, was dasselbe besagt, dass die Ausflussgeschwindigkeit gleich ist jener Endgeschwindigkeit $\sqrt{2gh}$, die ein Körper beim freien Falle durch die Druckhöhe (im luftleeren Raume) erlangen würde.

Dieses durch die Gleichung (10) ausgedrückte Gesetz wird nach seinem Entdecker Toricelli (*„Del moto dei gravi.“* Florenz 1644) das Toricelli'sche Theorem genannt.

Strenggenommen ist stets der Gleichung (9) zufolge im Falle der Gleichheit von p_o und p_a die Differenz der der Ausflussgeschwindigkeit v_a und der Oberflächengeschwindigkeit v_o entsprechenden Geschwindigkeitshöhen $\frac{v_a^2}{2g} - \frac{v_o^2}{2g}$ gleich der Druckhöhe h .

Anmerkung 2. Die Gleichung (9) ist identisch mit der zuerst von Johann Bernoulli (*Hydraulica nunc primum detecta ac demonstrata directe ex fundamentis pure mechanicis.* 1732) und (dessen Sohne) Daniel Bernoulli in seinem berühmten, für die Hydrodynamik grundlegenden Werke: *„Hydrodynamica sive de viribus et motibus fluidorum commentarii“* (Straßburg 1738) aufgestellten Formel $v_a = \sqrt{\frac{2ghf_o^2}{f_o^2 - f_a^2}}$.

Bei der eben durchgeführten theoretischen Ableitung des Wertes der Geschwindigkeit des Ausflusses von Flüssigkeiten aus Gefäßen wurde, wie gleich zu Anfang hervorgehoben wurde, sowohl von der inneren Reibung, als auch von der äußeren Reibung an den Gefäßwänden und an der Gefäßmündung, sowie von der Adhäsion, die zwischen der Flüssigkeit und den Gefäßwänden stattfindet u. s. w., abgesehen. Infolge dieser Umstände, welche offenbar die Geschwindigkeit verringern, wird die effective Ausflussgeschwindigkeit v_a' etwas kleiner werden als die durch die früheren Formeln bestimmte theoretische Ausflussgeschwindigkeit v_a . Das Verhältnis α des ersten Wertes zum letzteren, nämlich $\alpha = (v_a' : v_a)$, das eine zwischen 0 und 1 gelegene Zahl ist, wird in der technischen Mechanik gewöhnlich als Geschwindigkeitscoefficient bezeichnet und auf experimentalem Wege bestimmt. Für den Ausfluss von Wasser ist z. B. als Mittelwert $\alpha = 0.97$ gefunden worden, so dass dann als effective Ausflussgeschwindigkeit im Mittel $v_a' = 0.97 v_a$ angenommen werden kann, wo für v_a der Wert aus (11), (16) oder (17) einzuführen ist.

Anmerkung 3. Oben wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass das Gefäß, aus welchem die Flüssigkeit ausströmt, in Ruhe (in Bezug zur Erde) sich befindet. Würde aber z. B. das Gefäß etwa um eine Achse (die z -Achse) mit der constanten Winkelgeschwindigkeit w rotieren, so wäre für eine schwere Flüssigkeit das Potential U der relativen Kraft die Summe aus dem Potential $-gz$ der Schwere und dem Potential $-\frac{1}{2} r^2 w^2$ der Fliehkraft [siehe Gleichung (14) auf S. 715], daher $U_o - U_a = gh + \frac{1}{2} r_a^2 w^2$, wo r_a den Abstand der Ausflussöffnung f_a von der z -Achse und h etwa den Höhenunterschied zwischen der Ausflussöffnung f_a und dem Punkte, für welchen $z = 0$ und $r = 0$ ist, d. i. dem Durchschnittspunkte M_o der Rotationsachse mit der Flüssigkeitsoberfläche, bedeutet.

Kurz es bedeutet U in allen bisherigen und den folgenden Formeln stets das Potential der relativen Kraft in Bezug auf das Gefäß und v_a die relative Ausflussgeschwindigkeit.

Bisher wurde bloß die Flüssigkeitsbewegung in einem Stromfaden untersucht. Das Gesagte lässt sich auch ohne weiteres auf die stationäre Flüssigkeitsbewegung in einem beliebig ausgedehnten Raume, z. B. in irgend einem beliebigen Gefäße, anwenden; nur hat man in den den einzelnen Stromfäden entsprechenden Werten von v_a , welche durch die bisherigen Gleichungen bestimmt sind, die entsprechenden auf die Flüssigkeitsoberfläche bezüglichen Werte von v_o , U_o , p_o , f_o u. s. w. einzuführen, welche im allgemeinen beim Übergange von einem Stromfaden zum nächsten variieren können.

Der einfachste Fall, der gewöhnlich zur Betrachtung gelangt, ist jener, in welchem in allen Punkten der Flüssigkeitsoberfläche derselbe Druck p_o und derselbe Potentialwert U_o besteht. Hat zudem die Geschwindigkeit v_o für alle Punkte der Oberfläche denselben

Wert, so muss der Gleichung (3) zufolge für gleiche Werte von U und p_a sich bei allen Stromfäden auch derselbe Wert für die Ausflussgeschwindigkeit v_a ergeben, nämlich

$$v_a = \sqrt{v_o^2 + 2 \left[U_o - U_a - \int_{p_o}^{p_a} \frac{dp}{\mu} \right]}$$

Kann der austretende Flüssigkeitsstrahl von irgend einer ebenen Querschnittsfläche F_a an, d. i. im allgemeinen jenem zur Bewegungsrichtung senkrechten Querschnitte, in welchem die Contraction, die der Strahl beim Ausflusse meist erleidet, ihr Maximum erreicht, in seinem weiteren Fortschreiten, wenigstens soweit das folgende an F_a angrenzende Element dV des Strahles in Betracht kommt, als ein senkrechter Cylinder angesehen werden, dessen Leitlinie der Umfang von F_a ist, und kann ferner das Potential U_a in dieser Fläche F_a als constant angenommen werden, so muss der Gleichung (4) auf S. 753 zufolge, da unter diesen Voraussetzungen für alle Stromfäden der Krümmungshalbmesser ρ_a in den Punkten dieses Querschnitts unendlich groß und $\frac{dU_a}{dn}$, d. i. $-P_a \cos(P_a, dn)$ gleich Null ist, auch der specifische Druck p_a , somit auch μ_a , in der ganzen Fläche F_a constant sein. Es muss demnach in diesem Falle, wofern, wie früher, p_o, U_o, v_o constant sind, auch die durch die letzte Gleichung bestimmte Geschwindigkeit v , für alle Punkte des Querschnitts F_a dieselbe sein und die in der Zeiteinheit austretende Flüssigkeitsmasse M den Wert haben

$$\begin{aligned} M &= \Sigma (\mu_a f_a v_a) = \mu_a v_a \cdot \Sigma f_a = \mu_a F_a \cdot v_a = \\ &= \mu_a F_a \cdot \sqrt{v_o^2 + 2 \left[U_o - U_a - \int_{p_o}^{p_a} \frac{dp}{\mu} \right]} \end{aligned}$$

Erfolgt zudem die Bewegung der in der Flüssigkeitsoberfläche gelegenen Theilchen senkrecht zu der Oberfläche, so dass diese eine Geschwindigkeitsniveaufläche ist, was nur bei einer entsprechenden Form der mit der Flüssigkeitsoberfläche zur Berührung kommenden Theile der Gefäßwände möglich ist, so hat bei stationärer Strömung zufolge der Gleichung (5) das Verhältnis $\frac{f_a \mu_a}{f_o \mu_o}$ für alle Stromfäden den constanten Wert $\frac{v_o}{v_a}$, und es muss demnach dieser Wert bekanntlich auch gleich sein dem Verhältnisse $\frac{\Sigma (f_a \mu_a)}{\Sigma (f_o \mu_o)} = \frac{\mu_a \Sigma f_a}{\mu_o \Sigma f_o}$. Bedeutet also F_o die Größe Σf_o der ganzen Flüssigkeitsoberfläche, so kann in der Gleichung (6) das Glied $\left(\frac{f_a \mu_a}{f_o \mu_o} \right)^2$ des Nenners ohne

weilers auch durch $\left(\frac{F_a \mu_a}{F_o \mu_o}\right)^2$ ersetzt werden, und es drückt dann (6) den Wert der constanten Ausflussgeschwindigkeit v_a aus.

Ist $p_o = p_a$, so verschwindet in dem obigen Werte von M das letzte Integral, ferner ist dann $\mu_a = \mu_o$, und in der für diesen Fall giltigen Gleichung ist statt $\frac{v_o}{v_a}$ oder $\frac{f_a \mu_a}{f_o \mu_o}$ zu setzen $\frac{F_a}{F_o}$. Für eine ihrer eigenen Schwere überlassene Flüssigkeit ist demnach unter allen obangeführten Voraussetzungen (dass nämlich der spezifische Druck an der horizontalen Oberfläche derselbe ist wie an der Stelle F_a der größten Contraction des ausfließenden Strahles, dass ferner jener Theil der Seitenwände des Gefäßes, in welchem die der Flüssigkeitsoberfläche und den Seitenwänden gemeinsame Benetzungslinie gelegen ist, eine verticale Cylinderfläche darstellt u. s. w.)

$$v_a = \sqrt{v_o^2 + 2gh} = \sqrt{2 \frac{gh}{1 - \left(\frac{F_a}{F_o}\right)^2}}$$

$$M = \mu_a F_a v_a = \mu_a F_a \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{F_a}{F_o}\right)^2}}$$

Anmerkung 4. Das Verhältnis der Größe jener Fläche F_a , in welcher beim Ausflusse einer schweren Flüssigkeit aus einer Wandöffnung F die Contraction des Strahles am größten ist, zur Größe F dieser Wandöffnung bezeichnet man in der technischen Mechanik als den „Contractioncoefficienten“. Für den Ausfluss des Wassers aus einer kreisförmigen Öffnung in einem dünnwandigen horizontalen Boden eines Gefäßes ist experimentell 0.64 als der Mittelwert dieses Contractioncoefficienten gefunden worden.

Treffen die erwähnten Voraussetzungen nicht zu, so hat man strenggenommen behufs Bestimmung der in der Zeiteinheit ausströmenden Flüssigkeitsmasse M mittels der Formeln (3) bis (6) für ein der Wandöffnung zunächst gelegenes Geschwindigkeitsniveau F_a des Flüssigkeitsstrahles den jedem einzelnen Stromfaden vom Querschnitte $f_a = dF_a$ zugehörigen Wert von v_a zu bestimmen und hierauf die der Gleichung (9) auf S. 755 entsprechenden, in der Zeiteinheit durch den Querschnitt f_a strömenden Flüssigkeitsmassen $f_a v_a \mu_a$ zu summieren. Es ist also

$$M = \Sigma (\mu_a f_a v_a) = \int \mu_a v_a \cdot dF_a.$$

Bedeutet dF_a ein unendlich kleines Element der im allgemeinen als eben voranzusetzenden Fläche F_a der Ausströmungsöffnung und kann der Krümmungshalbmesser ρ_a für alle Stromlinien in den einzelnen Punkten dieser Fläche F_a als unendlich groß, also p_a und μ_a als constant angesehen werden, ist ferner $p_a = p_o$ (somit auch $\mu_a = \mu_o$) und

$v_o = 0$, so ist zufolge der Gleichung (7) $v_a = \sqrt{2(U_o - U_a)}$ und

$$M = \mu_a \int v_a \cdot dF_a = \mu_a \sqrt{2} \int \sqrt{U_o - U_a} \cdot dF_a.$$

Bezeichnet man ferner durch V die mittlere Ausflussgeschwindigkeit, d. i. jene bei allen Stromfäden als gleich vorausgesetzte Ausflussgeschwindigkeit, die bei derselben Größe von F_a und derselben Dichtigkeit μ_a vorhanden sein müsste, damit in der Zeiteinheit dieselbe Flüssigkeitsmasse M ausströmt, so ist $M = \mu_a F_a \cdot V$. Aus den beiden letzten Gleichungen ist zu ersehen, dass $V = \frac{\int v_a \cdot dF_a}{F_a} = \frac{\sqrt{2} \cdot \int \sqrt{U_o - U_a} \cdot dF_a}{F_a}$ ist.

Anmerkung 5. So ist z. B. unter den erwähnten Voraussetzungen für eine schwere aus einer Öffnung der Seitenwand strömende Flüssigkeit, wenn F_a ein Rechteck ist, dessen Ebene gegen den Horizont unter den Winkel α geneigt und von dessen beiden anstoßenden Seiten a und b die erstere horizontal ist, sofern man ferner die Ebene von F_a zur xy -Ebene eines orthogonalen Achsensystems und die x -Achse desselben in der horizontalen Flüssigkeitsoberfläche annimmt, zufolge der Gleichung (8) $U_o - U_a = g \cdot y \sin \alpha$, somit $v_a = \sqrt{2(U_o - U_a)} = \sqrt{2g \sin \alpha} \cdot y$ und $dF_a = a \cdot dy$. Kann daher die Flüssigkeitsoberfläche als unveränderlich vorausgesetzt werden und bedeutet ferner c , bzw. $c + b$ die Ordinate y der höheren, beziehungsweise tieferen horizontalen Rechteckseite a , so ist

$$M = \mu_a \int v_a \cdot dF_a = \mu_a a \sqrt{2g \sin \alpha} \cdot \int_c^{c+b} y \cdot dy = \frac{2}{3} \mu_a a \sqrt{2g \sin \alpha} \left[(c+b)^{\frac{3}{2}} - c^{\frac{3}{2}} \right]$$

Für $c = 0$ ist $M = \frac{2}{3} \mu_a \cdot a b \cdot \sqrt{2g b \sin \alpha}$ und die mittlere Geschwindigkeit $V = \frac{M}{\mu_a F_a} = \frac{M}{\mu_a \cdot a b} = \frac{2}{3} \sqrt{2g \cdot b \sin \alpha}$, d. h. die mittlere Geschwindigkeit V beträgt zwei Drittel von der der unteren horizontalen Rechteckseite a zufolge der Gleichung (10) entsprechenden Ausflussgeschwindigkeit $\sqrt{2g \cdot b \sin \alpha}$.

Die der mittleren Geschwindigkeit V entsprechende Druckhöhe, beziehungsweise Geschwindigkeitshöhe H , die man öfters als mittlere Druckhöhe bezeichnet, muss der Gleichung (10) zufolge der Gleichung $V^2 = 2gH$ entsprechen; durch Einsetzung des zuletzt gefundenen Wertes von V findet man $H = \frac{4}{9} \cdot b \sin \alpha$.

a) Ausflussgeschwindigkeit incompressibler Flüssigkeiten im besonderen.

Bisher wurde die Art der Flüssigkeit unbestimmt gelassen, und es haben demgemäß die hier abgeleiteten Gesetze für alle Flüssigkeiten Gültigkeit. Ist nun die Flüssigkeit eine homogene, incompressible Flüssigkeit, so hat die Dichtigkeit μ in der ganzen Ausdehnung des Stromfadens einen constanten Wert, und es ist daher $\mu = \mu_a = \mu_o$, und zwar ist, wenn γ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit bedeutet, $\mu = \gamma : g$ (siehe S. 473) zu setzen. Durch die Integration der Grundgleichung (2), bzw. bei Berücksichtigung der Gleichungen (3) und (6) erhält man die Relationen:

$$\left. \begin{aligned} p - p_o &= \mu \left[U_o - U - \frac{v^2 - v_o^2}{2} \right] \\ v_a^2 &= v_o^2 + 2 \left[U_o - U_a + \frac{p_o - p_a}{\mu} \right] \\ v_a^2 &= 2 \frac{U_o - U_a + \frac{p_o - p_a}{\mu}}{1 - \left(\frac{f_a}{f_o} \right)^2} \end{aligned} \right\} (11)$$

Anmerkung 6. Diese Gleichungen ergeben sich übrigens auch unmittelbar aus dem Satze der lebendigen Kraft, der, wie auf S. 760 nachgewiesen wurde, für incompressible Flüssigkeit Giltigkeit hat. Betrachtet man nämlich die Bewegung der zur Zeit t im Raume $V = \overline{M_o N_o N M}$ (Fig. 209) befindlichen Flüssigkeitsmasse in dem darauf folgenden unendlich kleinen Zeitelemente τ , in welchem ein Übergang derselben aus dem Raume V in einen zweiten Raum $V' = \overline{M_o' N_o' N' M'}$ derart erfolgt, dass sich der Raum V einerseits um das Raumelement $\overline{M N N' M'} = f \cdot v \tau$ vergrößert (vergl. S. 755), andererseits um das wegen der Unzusammendrückbarkeit der Flüssigkeit gleiche Raumelement $\overline{M_o N_o N_o' M_o'} = f_o \cdot v_o \cdot \tau$ verkleinert, und bezeichnet man die in diesem Raumelemente $f v \tau = f_o v_o \tau$ enthaltene Masse durch m , so dass $m = \mu \cdot f v \tau = \mu \cdot f_o v_o \tau$ ist, ferner durch M jene Masse, die sich in dem den beiden Räumen V und V' gemeinsamen Raume $\overline{M_o' N_o' N M}$ befindet, durch T ferner die wegen des vorausgesetzten stationären Zustandes constante lebendige Kraft in diesem gemeinsamen Raume und durch u das gleichfalls gleichbleibende Potential der auf die Masse M einwirkenden äußeren Kräfte, so ist leicht einzusehen, dass der Potentialwert für die Masse $M + m$ zur Zeit t , bezw. $t + \tau$ durch $m U_o + u$, bezw. $m U + u$ und die lebendige Kraft durch $\frac{1}{2} m v_o^2 + T$, bezw. $\frac{1}{2} m v^2 + T$ bestimmt ist, und dass die von der Umgebung des Stromfadens herrührenden, zur Bewegungsrichtung normalen Druckkräfte keine mechanische Arbeit verrichten, dass dagegen von den auf die Endflächen f_o und f einwirkenden Druckkräften $p_o f_o$ und $p f$ die Arbeit $p_o f_o \cdot v_o \tau = p_o \cdot \frac{m}{\mu}$ und $- p f \cdot v \tau = - p \cdot \frac{m}{\mu}$ geleistet wird. Es ist demgemäß die Summe der von den äußeren mechanischen Kräften geleisteten Arbeiten durch

$$\left(p_o \cdot \frac{m}{\mu} - p \cdot \frac{m}{\mu} \right) - (m U + u) + (m U_o + u) = m \left[\frac{p_o - p}{\mu} + U_o - U \right] \dots (12)$$

und die gleichzeitige Änderung der kinetischen Energie durch

$$\left(\frac{1}{2} m v^2 + T \right) - \left(\frac{1}{2} m v_o^2 + T \right) = \frac{1}{2} m (v^2 - v_o^2) \dots (13)$$

bestimmt. Die Gleichsetzung von (12) und (13) führt unmittelbar zu der ersten Gleichung (11) und für $p = p_a$, $U = U_a$, $v = v_a$ zu den beiden anderen Gleichungen (11).

Auf ganz analoge Art lässt sich auch für compressible Flüssigkeiten die allgemeine Gleichung (3), bezw. (6) aus dem durch die Gleichung (10) auf S. 759 ausgedrückten Gesetze deducieren.

Ist v_o gegen v_a , also f_a gegen f_o ungemein klein, so erhält die Gleichung (11) die einfache mit (4) übereinstimmende Form

$$v_a = \sqrt{2 \left(U_o - U_a + \frac{p_o - p_a}{\mu} \right)} \dots (14)$$

Für eine bloß dem Einflusse des eigenen Gewichtes unterworfenen homogenen Flüssigkeit ist, wie früher für $U_o - U_a$ in den Gleichungen (11), (12) und (14), der Wert gh aus (8) einzuführen. Es ist dann

$$U_o - U_a + \frac{p_o - p_a}{\mu} = g \left[h + \frac{p_o - p_a}{\mu g} \right] = g \left[h + \frac{p_o - p_a}{\gamma} \right] = gH \quad (15)$$

wo $\gamma = \mu g$ das specifische Gewicht der homogenen Flüssigkeit und H die Summe aus der Druckhöhe h und jener Druckhöhe $\frac{p_o - p_a}{\gamma}$, die der Druckdifferenz $p_o - p_a$ an der Oberfläche und der Ausflussöffnung entspricht (siehe S. 731), somit die gesammte sogenannte reducierte Druckhöhe bedeutet. Die zweite Gleichung in (11) lehrt, dass diese reducierte Druckhöhe H der Differenz der den Geschwindigkeiten v_o und v_a entsprechenden Geschwindigkeitshöhen gleich ist, so dass sich durch die Einsetzung von (15) in (11)

$$v_a = \sqrt{v_o^2 + 2gH} = \sqrt{\frac{2gH}{1 - \left(\frac{f_a}{f_o}\right)^2}} = \sqrt{\frac{2g \left(h + \frac{p_o - p_a}{\gamma} \right)}{1 - \left(\frac{f_a}{f_o}\right)^2}} \quad (16)$$

und für sehr kleine Werte von v_o und $(f_a:f_o)$

$$v_a = \sqrt{2gH} = \sqrt{2g \left(h + \frac{p_o - p_a}{\gamma} \right)} \dots (17)$$

ergibt.

Ist die Strömung der homogenen Flüssigkeit in einem gegebenen Stromfaden $M_o N_o N_a M_a$ (Fig. 209) nicht stationär, sondern ändert sich die Geschwindigkeit v in demselben Punkte M des Stromfadens im Laufe der Zeit, so hat man zurückzugehen zur ursprünglichen Gleichung (2) auf S. 752, die, wenn, wie bisher U das Potential der einwirkenden äußeren beschleunigenden Kraft bedeutet, lautet:

$$\frac{dp}{ds} = -\mu \left[\frac{dU}{ds} + \frac{dv}{dt} \right] \dots (18)$$

In dieser Gleichung muss jedoch, der Continuitätsgleichung (10) auf S. 755 zufolge,

$$v = \frac{f_a v_a}{f} = \varphi \cdot f_a v_a \dots (19)$$

sein, wo durch φ der reciproke Wert von f bezeichnet ist. Setzt man bei gegebener Gefäßform voraus, dass die Gestalt des Stromfadens sich im Laufe der Zeit nicht ändert, so dass f , somit auch φ nur eine Function von s allein ist und nur insofern, als bei der Bewegung der Flüssigkeit dasselbe Flüssigkeitstheilchen in dem gegebenen Stromfaden in dem Zeitelement dt um ds vorrückt, sich auch φ mit der Zeit t ändert, und zwar zur Zeit $t + dt$ den Wert $\varphi + d\varphi$, d. i. den

reciproken Wert von $f + df$ annimmt, so ist $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{d\varphi}{ds}$, also zufolge der Gleichung (19) $\frac{d\varphi}{dt} = f_a v_a \cdot \varphi \frac{d\varphi}{ds}$ zu setzen.

Dies wäre wohl auch bei stationärer Strömung der Fall, jedoch ist zu beachten, dass in dem vorliegenden Falle in der Gleichung (19) sich nicht nur φ in der eben erwähnten Weise mit der Zeit t ändert, sondern auch der letzte Factor v_a , so dass man bei Beachtung der letzten Gleichung und der Gleichung (19)

$$\frac{dv}{dt} = f_a \cdot \frac{d(\varphi v_a)}{dt} = f_a \left[v_a \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \varphi \cdot \frac{dv_a}{dt} \right] = f_a \left[f_a v_a^2 \varphi \frac{d\varphi}{ds} + \varphi \cdot \frac{dv_a}{dt} \right]$$

erhält.

Dementsprechend ist für denselben Zeitmoment t (in welchem v_a und $\frac{dv_a}{dt}$ irgend einen bestimmten Wert haben), wie sich durch die auf die Stromlinie M_oM ausgedehnte Integration der letzten Gleichung nach s ergibt,

$$\int_0^s \frac{dv}{dt} ds = f_a \left[f_a v_a^2 \cdot \frac{\varphi^2 - \varphi_o^2}{2} + \frac{dv_a}{dt} \int_0^s \varphi ds \right]$$

oder, wenn man φ wieder durch den zugehörigen reciproken Wert von f und ebenso φ_o durch $(1:f_o)$ ersetzt,

$$\int_0^s \frac{dv}{dt} ds = f_a \left[\frac{f_a v_a^2}{2} \left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{f_o^2} \right) + \frac{dv_a}{dt} \int_0^s \frac{ds}{f} \right]$$

Integriert man demgemäß die Gleichung (18) nach s zwischen den Grenzen o und s , so erhält man für denselben Zeitpunkt t

$$p - p_o = -\mu \left[(U - U_o) + \frac{1}{2} f_a^2 v_a^2 \left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{f_o^2} \right) + f_a \frac{dv_a}{dt} \int_0^s \frac{ds}{f} \right] \dots (20)$$

Wendet man diese Gleichung auf die Ausflussöffnung an, so hat man $s = s_a$, $p = p_a$, $U = U_a$, $f = f_a$ zu setzen, und man findet so

$$p_a - p_o = -\mu \left[U_a - U_o + \frac{1}{2} v_a^2 \left(1 - \frac{f_a^2}{f_o^2} \right) + f_a \frac{dv_a}{dt} \int_0^{s_a} \frac{ds}{f} \right] \dots (21)$$

wo das letzte Integral, das lediglich von der Gestalt des Stromfadens abhängt, auf den ganzen Stromfaden, dessen Länge durch l bezeichnet sei, auszudehnen ist.

In den meisten in der technischen Mechanik zur Betrachtung kommenden Fällen einer nicht stationären Strömung in einem gegebenen Canal ist das letzte Glied innerhalb der eckigen Klammern in (21) im Verhältnisse zu den anderen Gliedern, zumeist im Verhältnisse zu $U_a - U_o$ (mit anderen Worten es ist die Geschwindigkeit $\frac{f_a}{f} \cdot \frac{dv_a}{dt}$, mit der sich an irgend einer Stelle M bei gleichbleibendem f — der Gleichung (19) zufolge — die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsbewegung für diese Stelle ändert, im Verhältnisse zu der tangentialen Beschleunigung $\frac{dU}{ds} = -P \cos(P, ds)$ der äußeren Kraft an derselben Stelle) so gering, dass man von diesem Gliede abzusehen pflegt. In allen jenen Fällen,

in welchen diese Annahme gestattet ist, stimmt dann die derart reducierte Gleichung (21) mit der letzten Gleichung in (11) — beziehungsweise für compressible Flüssigkeiten, wie sich bei derselben Annahme in gleicher Weise zeigen lässt, mit der Gleichung (3) — überein, d. h. es ergibt sich in diesem Falle annähernd für die Ausflussgeschwindigkeit v_a derselbe Wert wie bei einer stationären Strömung. Nur muss bei dieser Anwendung der letzten Gleichung (11), bezw. der Gleichung (3) und der aus (11) gefolgerten Gleichung (16) in diesem Falle auf die während der Flüssigkeitsbewegung im allgemeinen vor sich gehende Änderung der in derselben vorkommenden Größen U_o, f_o, p_o u. s. w., die sich auf die Flüssigkeitsoberfläche beziehen, und mit welchen sich demgemäß auch die Ausflussgeschwindigkeit v_a ändert, Rücksicht genommen werden.

Findet z. B. der Ausfluss einer schweren homogenen Flüssigkeit aus einem Gefäße statt, in welchem der Druck p_o auf der Oberfläche und der Druck p_a an der Ausflussöffnung sich während des Ausflusses nicht ändern, und werden ferner die obersten Theile der Stromfäden in der Nähe der Flüssigkeitsoberfläche bis zu jener Tiefe, bis zu welcher der Flüssigkeitsspiegel in der hier in Betracht gezogenen Zeit t sinkt, als verticale Cylinder, daher f_o als constant vorausgesetzt (was strenggenommen nur dann gestattet ist, wenn jener Theil der Innenwand des Gefäßes, der mit dem Flüssigkeitsspiegel zur Berührung kommt, eine verticale Cylinderfläche darstellt), so ändert sich die Höhendifferenz $h = z_o - z_a$ der Ausflussöffnung und der Oberfläche, wofern vorausgesetzt wird, dass keine Flüssigkeit dem Gefäße zuströmt, offenbar derart, dass $v_o = -\frac{dh}{dt}$, also [der Gleichung (10) auf S. 755 $v_o = \frac{f_a}{f_o} v_a$ zufolge] $dt = -\frac{f_a}{f_o} \cdot \frac{dh}{v_a}$ ist, somit, wenn in diese Gleichung der Wert aus (16) eingeführt und durch H die reducierte Druckhöhe bezeichnet wird, für welche $dH = dh$ ist,

$$dt = -\sqrt{\frac{f_o^2}{f_a^2} - 1} \cdot \frac{dH}{\sqrt{2gH}}$$

Die Integration dieser Gleichung zwischen den Grenzen o und t lehrt, dass

$$t = \sqrt{\frac{f_o^2}{f_a^2} - 1} \left[\sqrt{\frac{2H_o}{g}} - \sqrt{\frac{2H}{g}} \right] \dots (22)$$

ist, wenn durch H_o der Anfangswert von H zur Zeit $t = 0$ bezeichnet ist. Aus dieser Gleichung kann man ohneweiters H und daher auch die Senkung $H_o - H$ des Flüssigkeitsspiegels und das Volumen der in der Zeit t aus dem Stromfaden ausströmenden theoretischen Ausflussmenge $f_o(H_o - H)$ und deren Masse $\mu f_o(H_o - H)$ durch die Zeit t leicht ausdrücken.

Lässt sich jedoch in der Gleichung (21) das letzte Glied nicht vernachlässigen, so müssen in dieser Gleichung — der Natur des besonderen zu behandelnden Problems entsprechend — bei gegebener Form der Gefäßwände etwa die auf die Flüssigkeitsoberfläche sich beziehenden Größen $p_o U_o$ (eventuell auch p_a) als bekannte Functionen der Ausflussgeschwindigkeit v_a oder der Zeit t oder dieser beiden Größen vorausgesetzt werden, so dass die Differentialgleichung (21) nur die Variablen v_a und t enthält, also durch ihre Integration v_a als Function von t ausgedrückt werden kann.

Wird z. B. dem Gefäße stets neue Flüssigkeit derselben Art zugeführt, so zwar, dass trotz des stetigen Abflusses die Flüssigkeitsoberfläche stets in constanter Lage, also in derselben Niveauläche vom Potentialwert U_o erhalten wird, so dass U_o und f_o sich nicht ändern, und wird auch p_o und p_a als constant

vorausgesetzt, so lässt sich, nachdem das von der Form des Stromfadens abhängige Integral $\int_0^l \frac{ds}{f}$ berechnet worden ist, die Bestimmung von v_a folgenderart leicht durchführen: Bezeichnet man kürzshalber durch a den constanten, bisher betrachteten, aus der letzten Gleichung in (11) bestimmbaren Geschwindigkeitswert, der sich für v_a ergeben würde, wenn in (21) die Beschleunigung $\frac{dv_a}{dt}$ Null gesetzt würde und durch b das constante Verhältnis der Coefficienten von $\frac{dv_a}{dt}$ und von v_a^2 in der Gleichung (21), also

$$a^2 = 2 \frac{U_0 - U_a + \frac{p_0 - p_a}{\mu}}{1 - \frac{f_a^2}{f_0^2}}, \quad b = 2 \frac{f_a \int_0^l \frac{ds}{f}}{1 - \frac{f_a^2}{f_0^2}} \dots (23)$$

so erhält (21) die Form:

$$dv_a = \frac{a^2 - v_a^2}{b} dt \dots (24)$$

Ist nun b positiv, also $f_a < f_0$, so stimmt (24) — wenn v_a durch v ersetzt wird — genau mit der der Gleichung (11) auf S. 163 unmittelbar folgenden Gleichung überein, wofern nur $\frac{c^2}{g} = b$ gesetzt wird; somit ist der Gleichung (12) auf S. 163 zufolge, wofern der Anfangswert der Ausflussgeschwindigkeit v_a zur Zeit $t = 0$ durch c_a bezeichnet wird,

$$t = \frac{b}{2a} \log \text{nat} \frac{(a + v_a)(a - c_a)}{(a - v_a)(a + c_a)}, \quad \text{sonach } v_a = a \cdot \frac{(a + c_a) e^{\frac{a}{b} t} - (a - c_a) e^{-\frac{a}{b} t}}{(a + c_a) e^{\frac{a}{b} t} + (a - c_a) e^{-\frac{a}{b} t}}$$

Der Grenzwert von v_a für $t = \infty$ ist a , d. h. der Geschwindigkeitswert für eine stationäre Strömung.

Für $c_a = 0$, d. h. wenn die Strömung vom Ruhezustande aus beginnt, ist der letzten Gleichung, beziehungsweise der Gleichung (13) auf S. 163 gemäß (wo dann $v_0 = c_a = 0$ zu setzen ist)

$$v_a = a \cdot \frac{e^{\frac{a}{b} t} - e^{-\frac{a}{b} t}}{e^{\frac{a}{b} t} + e^{-\frac{a}{b} t}} \dots (25)$$

Der Druck p in einem beliebigen Punkte M des Stromfadens hat, wie sich durch Substitution des Wertes von dv_a aus (24) in (20) ergibt, den Wert

$$p = p_0 + \mu \left[U_0 - U - \frac{f_a a^2}{b} \int_0^s \frac{ds}{f} + \left(\frac{f_a}{b} \int_0^s \frac{ds}{f} - \frac{1}{2} \frac{f_a^2}{f^2} + \frac{1}{2} \frac{f_a^2}{f_0^2} \right) v_a^2 \right] (26)$$

wo für v_a der Wert aus (25) einzusetzen ist.

Das in der Zeit t ausströmende Flüssigkeitsvolum V ist, da in der Zeit dt durch die Mündungsfläche f_a ein Flüssigkeitsstrahl von der Länge $v_a dt$ und der Querschnittsfläche f_a , also vom Volum $f_a \cdot v_a dt$ austritt, durch $V = f_a \cdot \int_0^t v_a dt$, also durch das Product aus f_a und dem in Gleichung (14), S. 164 durch s bezeichneten Werte bestimmt. Es ist sonach für $c_a = 0$

$$V = f_a b \cdot \log \text{nat} \frac{e^{\frac{a}{b} t} + e^{-\frac{a}{b} t}}{2}$$

Die Beziehung zwischen diesem Volum und der augenblicklichen Ausflusgeschwindigkeit v_a ist durch die Gleichung (9), S. 162 bestimmt.

Für einen negativen Wert des in (23) dem a^2 gleichgesetzten Ausdruckes würden sich, sofern dieser Wert durch $(-a^2)$ bezeichnet wird, in ganz analoger Weise die in § 39 a) und für $a = 0$ die in § 39 c) gefundenen Werte für die Ausflusgeschwindigkeit $v_a = v$ und die Ausflusmenge $V = f_a t$ ergeben.

Um alle diese Formeln auf Flüssigkeiten, die ihrer eigenen Schwere überlassen sind, in Anwendung zu bringen, hat man nur in denselben wie früher $U = -gz + C$ und $U_o - U_a = gh$ einzusetzen.

b) Ausfluss compressibler Flüssigkeiten im besonderen.

Ist die im Gefäße befindliche und aus der Gefäßmündung strömende Flüssigkeit nicht homogen, und ist durch $\mu = f(p)$, bezw. $p = F(\mu)$ das für die betreffende Flüssigkeit charakteristische Gesetz der Abhängigkeit der Dichtigkeit μ vom Drucke p ausgedrückt, so hat man bei einer stationären Strömung von den Gleichungen (1) bis (10) Anwendung zu machen und in diese $\mu = f(p)$, bezw. $p = F(\mu)$ einzusetzen.

Für eine jede compressible Flüssigkeit, für welche die Dichtigkeitszunahme der Druckzunahme direct proportional, also in Übereinstimmung mit S. 708

$$\mu - \mu_o = A(p - p_o), \quad dp = \frac{d\mu}{A} \dots (27)$$

ist, findet man so nach Substitution des letzten Wertes in die Gleichung (3) und (6), mit Rücksicht auf (5)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A} l \frac{\mu}{\mu_o} = U_o - U - \frac{v^2 - v_o^2}{2} = U_o - U - \frac{f_a^2 \mu_a^2}{2} \left(\frac{1}{f^2 \mu^2} - \frac{1}{f_o^2 \mu_o^2} \right) v_a^2 \\ v_a^2 = v_o^2 + 2 \left[U_o - U_a - \frac{1}{A} l \frac{\mu_a}{\mu_o} \right] = 2 \frac{U_o - U_a - \frac{1}{A} l \frac{\mu_a}{\mu_o}}{1 - \left(\frac{f_a \mu_a}{f_o \mu_o} \right)^2} \end{aligned} \right\} (28)$$

Man hat nur für μ_a den Wert $\mu_a = \mu_o + A(p_a - p_o)$ in die letzte Gleichung einzusetzen, um mittels derselben sofort die Ausflusgeschwindigkeit zu finden, sofern die Potentialdifferenz $U_o - U_a$, ferner der constante Wert $\frac{A}{\mu_o}$ (siehe Anm. auf S. 708), außerdem die Druckdifferenz $p_a - p_o$ und die Querschnittsflächen f_a und f_o , bezw. die Oberflächengeschwindigkeit v_o bekannt sind.

Entwickelt man $l \frac{\mu}{\mu_0} = l \left[1 + \frac{A}{\mu_0} (p - p_0) \right]$ in die Reihe $\frac{A}{\mu_0} (p - p_0) - \frac{1}{2} \frac{A^2}{\mu_0^2} (p - p_0)^2 + \dots$, so ersieht man, dass das erste Glied in (28) sich auch folgenderart ausdrücken lässt:

$$\frac{1}{A} l \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{p - p_0}{\mu_0} - \frac{1}{2} A \cdot \frac{(p - p_0)^2}{\mu_0^2} + \frac{1}{3} A^2 \frac{(p - p_0)^3}{\mu_0^3} - \dots$$

Ebenso kann in der ersten Gl. (28) $\frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu_0^2} \left[1 + \frac{A}{\mu_0} (p - p_0) \right]^{-2} = \frac{1}{\mu_0^2} \left[1 - 2 \frac{A}{\mu_0} (p - p_0) + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} \frac{A^2}{\mu_0^2} (p - p_0)^2 - \dots \right]$ gesetzt werden.

Für eine incompressible Flüssigkeit ist $\mu = \mu_0$, also $A = 0$ und in voller Strenge $\frac{1}{A} l \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{p - p_0}{\mu_0}$. Es stimmen dann die Gleichungen (28) mit den Gleichungen (11) überein. Auch bei einer compressiblen Flüssigkeit kann man, wenn entweder die Druckdifferenz $p_a - p_0$ im Verhältnis zur Dichtigkeit μ_0 oder aber das constante Verhältnis A der Dichtigkeitsänderung zur Druckänderung entsprechend klein ist, also die Dichtigkeit sich relativ (im Verhältnisse zu ihrem Werte) nur wenig im Stromfaden ändert, sich in der ersten Annäherung auf das erste Glied der oberwähnten Reihe beschränken, also $\frac{1}{A} l \frac{\mu_a}{\mu_0} = \frac{p_a - p_0}{\mu_0}$ setzen. Es ist dann zufolge der Gleichung (28)

$$v_a^2 = v_0^2 + 2 \left[U_0 - U_a + \frac{p_0 - p_a}{\mu_0} \right] = 2 \frac{U_0 - U_a + \frac{p_0 - p_a}{\mu_0}}{1 - \left(\frac{f_a}{f_0} \cdot \frac{\mu_a}{\mu_0} \right)^2} \quad (29)$$

Kann zudem die Potentialdifferenz $U_0 - U_a$ (also bei schweren Flüssigkeiten gh) im Verhältnisse zu $\frac{p_0 - p_a}{\mu_0}$ vernachlässigt werden, und ist überdies $v_0 = 0$ oder f_a ungemein klein gegen f_0 , so erhält (29), bezw. (28) die Form

$$v_a = \sqrt{2 \frac{p_0 - p_a}{\mu_0}} \dots \quad (30)$$

Diese Näherungsformel wurde zuerst von Daniel Bernoulli (Hydrodynamica sive de viribus etc., Straßburg 1738, S. 236) für die Ausströmungsgeschwindigkeit v_a von in irgend einem Gefäße eingeschlossenen Gasen aus engen Ausflussöffnungen bei constant bleibender Druckdifferenz $p_0 - p_a$ aufgestellt. [Bei technischen Anwendungen wird gewöhnlich dieser theoretische Wert von v_a (siehe S. 767) noch mit einem Geschwindigkeitscoefficienten, der im Mittel 0.98 ist, multipliziert.]

Für ein vollkommenes Gas, das bei constanter Temperatur das Boyle'sche (Mariotte'sche) Gesetz befolgt, ist $\mu = Ap$, $\mu_o = Ap_o$, $\mu_a = Ap_a$; es ist also in den allgemeinen Formeln (28) $\frac{1}{A} = \frac{p_o}{\mu_o}$ und $\frac{\mu}{\mu_o} = \frac{p}{p_o}$ zu setzen; man findet so:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_o}{\mu_o} \int \frac{p}{p_o} = U_o - U - \frac{v^2 - v_o^2}{2} = U_o - U - \frac{1}{2} v_a^2 \left(\frac{f_a^2}{f_o^2} \cdot \frac{p_a^2}{p_o^2} - \frac{f_a^2}{f_o^2} \cdot \frac{p_a^2}{p_o^2} \right) \\ v_a^2 = v_o^2 + 2 \left[U_o - U_a - \frac{p_o}{\mu_o} \int \frac{p_a}{p_o} \right] = 2 \frac{U_o - U_a - \frac{p_o}{\mu_o} \int \frac{p_a}{p_o}}{1 - \left(\frac{f_a}{f_o} \cdot \frac{p_a}{p_o} \right)^2} \end{aligned} \right\} (31)$$

Wird auch hier $v_o = 0$, also f_a sehr klein im Verhältnisse zu f_o vorausgesetzt, und kann überdies die Potentialdifferenz $U_o - U_a$ im Verhältnisse zu dem letzten Gliede $\frac{p_o}{\mu_o} \int \frac{p_a}{p_o}$ als verschwindend klein angenommen werden, so dass das Gas im ganzen Gefäße den Druck p_o besitzt, an der Ausströmungsöffnung f_a aber dem constanten äußeren Drucke p_a ausgesetzt ist, so führt die letzte Gleichung zu der Formel:

$$v_a = \sqrt{2 \frac{p_o}{\mu_o} \cdot \log \text{nat} \frac{p_o}{p_a}} \dots (32)$$

Diese Formel wurde von Navier gefunden („Sur le mouvement d'un fluide élastique, qui s'écoule hors d'un réservoir ou gazomètre“ in den Annales de chimie et de physique, 1827).

Auch dieser Wert von v_a wird bei Anwendungen in der Praxis mit dem früheren Geschwindigkeitscoefficienten multipliciert. Die Navier'sche Formel (32) übergeht in die Bernoulli'sche Formel (30), wofern man $\int \frac{p_a}{p_o}$, d. i. $\int \left(1 + \frac{p_a - p_o}{p_o} \right)$ gleichsetzt $\frac{p_o - p_a}{p_o}$, also die Druckdifferenz $p_o - p_a$ sehr klein annimmt im Verhältnisse zu p_o .

Anmerkung 7. Die Gleichungen (28) bis (32) lassen sich auch leicht (ähnlich wie in Anm. 6) ableiten aus dem durch die Gleichung (10) auf S. 759 ausgedrückten Gesetze, wenn man mit Zugrundelegung der Gleichung (27) den Effect $\mathcal{S}e$ der inneren Kräfte bei der in Betracht gezogenen stationären Strömung in dem Stromfaden $M_o M_a$ in Rechnung bringt. Es ist nämlich zunächst das Integral in dieser Gleichung (10), nämlich

$$\int \frac{p}{\mu^2} d\mu = \int \left(p_o - \frac{\mu_o}{A} \right) \frac{d\mu}{\mu^2} + \frac{1}{A} \int \frac{d\mu}{\mu} = \left(p_o - \frac{\mu_o}{A} \right) \cdot -\frac{1}{\mu} + \frac{1}{A}$$

oder, da zufolge (27) $p_o - \frac{\mu_o}{A} = p - \frac{\mu}{A}$ ist, $\int \frac{p}{\mu^2} d\mu = -\frac{p}{\mu} + \frac{1}{A} (1 + \int \frac{1}{\mu})$, somit die mechanische Arbeit $\mathcal{S}a$ der inneren Kräfte in der Zeiteinheit, wenn M die in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Stromfadens strömende

Flüssigkeitsmasse $M = \mu_a f_a v_a = \mu_o f_o v_o$ bedeutet, zufolge der Gleichung (11) auf S. 759

$$\Sigma a = -\Sigma \int_{\mu_o}^{\mu_a} m \frac{p}{\mu^2} d\mu = \Sigma m \left[\frac{p_a}{\mu_a} - \frac{p_o}{\mu_o} - \frac{l\mu_a - l\mu_o}{A} \right] = M \left(\frac{p_a}{\mu_a} - \frac{p_o}{\mu_o} - \frac{1}{A} l \frac{\mu_a}{\mu_o} \right)$$

oder, wenn man den letzten Wert von M beachtet, $\Sigma a = p_a f_a v_a - p_o f_o v_o - \frac{M}{A} l \frac{\mu_a}{\mu_o}$. Andererseits ist die von den äußeren Kräften in der Zeiteinheit geleistete Arbeit $\Sigma A + \Sigma A_o = M(U_o - U_a) + p_o f_o v_o - p_a f_a v_a$ und $\Sigma \left(\frac{m v^2}{2} \right) - \Sigma \left(\frac{m c^2}{2} \right) = \frac{M v_a^2}{2} - \frac{M v_o^2}{2}$. Substituiert man die Werte aus den drei letzten Gleichungen in die Gleichung (10) auf S. 759, so gelangt man ohneweiters zu der Gleichung (28) und dadurch auch zu allen folgenden Gleichungen.

Bemerkenswert ist, dass der Effect e der inneren Kräfte bei vollkommenen Gasen von constant bleibender Temperatur, indem bei diesen $\frac{1}{A} = \frac{p_a}{\mu_a} = \frac{p_o}{\mu_o}$ ist, der früheren Gleichung zufolge (eine stationäre Strömung vorausgesetzt) durch den einfachen Wert $-\frac{M}{A} l \frac{\mu_a}{\mu_o} = -p_a f_a v_a \cdot l \frac{p_a}{p_o}$ bestimmt ist, und dass ferner bei denselben die Summe der mechanischen Arbeiten der auf die Oberfläche und die Ausflussöffnung wirkenden äußeren Druckkräfte $\Sigma A_o = p_o f_o v_o - p_a f_a v_a = M \left(\frac{p_o}{\mu_o} - \frac{p_a}{\mu_a} \right)$ den Wert Null hat.

Da jedoch bei Gasen mit der Dichtenänderung auch eine Temperaturänderung verbunden ist, so wird das Mariotte-Boyle'sche Gesetz streng genommen von den ausströmenden Gasen nicht befolgt, und zwar wird die Abweichung von diesem Gesetze um so größer sein, je größer die Druckdifferenz $p_a - p_o$ und demgemäß auch die Temperaturänderung ist; es sind daher auch die das Boyle'sche Gesetz voraussetzenden Formeln (28) bis (32) für die Ausströmung von Gasen nicht strengrichtig und nur für geringe Gasdruckdifferenzen anwendbar.

Genauere Werte für die Ausflussgeschwindigkeit der Gase bei stationärer Strömung ergeben sich, wenn man auf die Temperaturänderungen Rücksicht nimmt, die infolge der Compression, beziehungsweise Expansion derselben stattfinden.

Nimmt man an, dass sich das Gas bei einer Strömung im Gefäße so wie in einer für die Wärme undurchdringlichen, d. i. adiabatischen [α (α privativum) = nicht und $\delta\alpha\beta\alpha\lambda\upsilon\epsilon\upsilon\upsilon$ (diabainein) = hindurchgehen] Hülle befindet, so dass weder Wärme von außen dem Gase zugeführt, noch Wärme nach außen abgegeben wird, so führt folgende einfache Überlegung zu der bei dieser sogenannten adiabatischen Expansion, beziehungsweise Compression giltigen Beziehung zwischen dem Drucke p und der Dichtigkeit μ :

Es sei V das Volum der Masseneinheit eines (vollkommenen) Gases und $\mu = (1:V)$ die Dichtigkeit desselben bei dem Drucke p und der sogenannten absoluten Temperatur von T Graden, d. i. bei der Temperatur von $T = 273 + t$ Graden, wo t die positive oder negative Zahl der Temperaturgrade nach der Celsius'schen Scala bedeutet, ferner sei $V + dV$ das Volum derselben Gasmasse bei der absoluten Temperatur $T + dT$ und dem Drucke $p + dp$. Man

kann sich das Gas aus dem ersten Zustande A in den letzteren Zustand B derart überführt denken, dass man zuerst durch Zuführung einer gewissen Wärmemenge dQ_1 (wo dQ_1 positiv oder negativ ist, je nachdem dV positiv oder negativ ist) bei gleichbleibendem äußeren Drucke p das Volum V des Gases solange ändert, bis es den Wert $V + dV$ annimmt, wodurch die Temperatur T etwa um dT_1 sich ändert, hierauf aber durch Zuführung einer zweiten Wärmemenge dQ_2 (wo dQ_2 mit $d p_2$ gleichbezeichnet ist), wobei gleichzeitig der äußere Druck derart variabel angenommen wird, dass das nunmehrige Volum $V + dV$ der Gasmasse stets constant bleibt, den inneren Druck p des Gases ändert, bis derselbe den Wert $p + dp$ annimmt, wodurch die Temperatur sich etwa um dT_2 ändert, so dass also $dT = dT_1 + dT_2$ ist. Bedeutet demgemäß c_1 die — erfahrungsmäßig bei den vollkommenen Gasen constante (d. i. von dem Drucke p und der Temperatur unabhängige) — Wärmemenge, die im Stande ist, die Temperatur des oberwähnten Gasquantums von der Masse 1 bei gleichbleibendem Drucke p um einen Temperaturgrad (nach Celsius) zu erhöhen, bedeutet mit anderen Worten c_1 die sogenannte spezifische Wärme des Gases bei constantem Drucke p , so ist $dQ_1 = c_1 \cdot dT_1$ und ebenso ist $dQ_2 = c_2 \cdot dT_2$, wofern c_2 die sogenannte spezifische Wärme bei constantem Volumen, d. i. jenes (gleichfalls als constant angenommenes) Wärmequantum, das man dem obigen Gasquantum von der Masse $m = 1$ zuführen muss, um dessen Temperatur bei gleichbleibendem Volumen um 1° C. zu erhöhen, bedeutet. Um daher das obige Gasquantum aus dem Zustande A in den Zustand B zu überführen, muss die Wärmemenge $dQ = dQ_1 + dQ_2 = c_1 \cdot dT_1 + c_2 \cdot dT_2$ dem Gase zugeführt werden. Findet also die oben vorausgesetzte adiabatische Zustandsänderung statt, so dass dem Gase bei dieser Überführung von A in B weder Wärme zugeführt, noch demselben entzogen wird, so ist $dQ = 0$, also

$$c_1 \cdot dT_1 + c_2 \cdot dT_2 = 0 \dots (33)$$

Bezeichnet man durch V_n dasjenige Volum des Gasquantums von der Masse 1, welches dasselbe bei der Temperatur 0° C., also der absoluten Temperatur 273 einnehmen würde, wenn der (normale) Druck einen bestimmten Wert p_n (der z. B. dem Atmosphärendrucke gleich ist, also der normalen Druckhöhe von 76 Centimetern in einem Quecksilbermanometer entspricht) hätte, und durch V_o das Volum desselben Gasquantums bei derselben Temperatur und dem Drucke p , so müsste, da nach Mariotte-Boyle's Gesetze der Druck der Dichtigkeit direct, also bei demselben Gasquantum dem Volum invers proportional ist, $V_n p_n = V_o p$ sein. Ferner ist andererseits bei gleichbleibendem Drucke p erfahrungsgemäß (nach dem Gesetze Gay-Lussacs) die cubische Dilatation α des Gases, d. i. das Verhältnis der bei der Temperaturänderung von 0° C. bis t° (also bei der Änderung der absoluten Temperatur von 273 auf $T = 273 + t$) eintretenden Volumänderung $V - V_o$ zum ursprünglichen Volum V_o , der Temperaturänderung $t = T - 273$ stets direct proportional. Ferner hat der entsprechende Proportionalitätsfactor, d. i. das (vom Drucke p unabhängige) Verhältnis der Dilatation $\alpha = \frac{V - V_o}{V_o}$ zur Temperaturänderung $T - 273$ (d. i. der sogenannte Ausdehnungscoefficient) den für alle vollkommenen Gase nahezu constanten Wert $\frac{1}{273}$, wenn die Temperaturänderung in Celsiusgraden ausgedrückt ist, und es ist somit $\frac{V - V_o}{V_o} = \frac{1}{273} (T - 273)$; demnach ist bei gleichbleibendem Drucke $\frac{V}{T} = \frac{V_o}{273}$, d. h. es ist das Volum V der absoluten Temperatur T direct proportional. Setzt man in diese Gleichung für V_o den aus der obigen Gleichung $V_n p_n = V_o p$ sich ergebenden Wert ein, so findet man

$$\frac{p}{\mu T} = \frac{Vp}{T} = \frac{V_n p_n}{273} = k \dots (34)$$

Zufolge dieses aus der Combination des Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetzes sich ergebenden Gesetzes hat somit der Quotient, der sich bei derselben Gasmasse ergibt, wenn man das Product aus dem Volum V und dem Gasdrucke p durch die absolute Temperatur T dieses Gases dividirt, einen constanten, experimentell bestimmbaren Wert $k = \frac{V_n p_n}{273}$. Es ist sonach $Vp = kT$. Da nun bei constantem Drucke p sich das Volumen nach Früherem um dV ändert, wenn die Temperatur T um dT_1 sich ändert, so ergibt die Differentiation der letzten Gleichung: $p \cdot dV = k \cdot dT_1$, und da ferner bei constantem Volum sich der Druck bei einer Temperaturänderung dT_2 und dp ändert, so ist $V \cdot dp = k \cdot dT_2$. Bestimmt man aus den beiden letzten Gleichungen dT_1 und dT_2 , so findet man

$$dT_1 = \frac{p \cdot dV}{k}, \quad dT_2 = \frac{V \cdot dp}{k} \dots (35)$$

Substituiert man diese Werte in die für die adiabatische Expansion gültige Gleichung (33) und dividirt dieselbe durch $\frac{pV}{k}$, so ergibt sich $c_1 \frac{dV}{V} + c_2 \frac{dp}{p} = 0$, somit, wenn durch α das constante Verhältniß der specifischen Wärme c_1 bei constantem Drucke zur specifischen Wärme c_2 bei constantem Volum $\alpha = c_1 : c_2$ bezeichnet wird,

$$\frac{dp}{p} + \alpha \frac{dV}{V} = 0 \dots (36)$$

Die Integration der letzten Gleichung lehrt, dass $lp + \alpha lV = lp + lV^\alpha = l(pV^\alpha)$ constant ist, dass somit bei adiabatischer Zustandsänderung auch das Product pV^α einen constanten Wert C hat

$$pV^\alpha = C \dots (37)$$

(Dieses Gesetz, das schon vor Poisson, und zwar von Laplace (Oeuvres de Laplace, V. pag. 155 in der Abhandlung „De la vitesse du son et du mouvement des fluides élastiques“, 12. Buch, Capitel III) gefunden und von Poisson wiederholt benutzt wurde, wird öfter (mit Unrecht) als das Poisson'sche Gesetz bezeichnet.)

Die Curve, deren Gleichung (37) ist, wofern das Volum V durch die Abscisse und der Druck p durch die Ordinate dargestellt ist, führt (nach Rankine) den Namen „adiabatische Curve“.

Da V das Volum der Masseneinheit bezeichnet, so ist, wenn μ wie bisher die variable Dichtigkeit des Gases bedeutet, $V\mu = 1$. Setzt man somit in die Gleichung (37) [wie es auch in (34) geschehen ist] statt V den reciproken Wert von μ ein und bezeichnet nunmehr durch μ_0 die Gasdichtigkeit, welche bei dem Gasdrucke p_0 und bei der einer adiabatischen Zustandsänderung, also den Gleichungen (34) und (37) entsprechenden Temperatur vorhanden sein muss, so nimmt diese Gleichung (37) die Form an

$$\frac{p}{\mu^\alpha} = \frac{p_0}{\mu_0^\alpha} = C \dots (38)$$

Dies ist die gesuchte Beziehung zwischen dem Drucke p und der Dichtigkeit μ . Für den wichtigen constanten Exponenten $\alpha = \frac{c_1}{c_2}$ hat man folgende Werte gefunden: Für atmosphärische Luft $\alpha = 1.41$, für

Kohlensäure $\kappa = 1.31$, für Wasserstoff $\kappa = 1.39 \dots 1.41$ u. s. w. Selbst bei Wasserdämpfen ist es nach Zeuner (Z. Grundzüge der „Mechanischen Wärmetheorie“) gestattet, bei adiabatischer Expansion und Compression innerhalb gewisser Grenzen, die in der Praxis gewöhnlich nicht überschritten werden, die Gleichung (37) und (38) in Anwendung zu bringen, sofern für κ folgender empirischer Wert gesetzt wird: $\kappa = 1.035 + 0.10 y$, wo y den vor der Expansion vorhandenen relativen Gehalt an wasserfreiem (trockenem) Dampf bedeutet, so dass für ganz trockenen gesättigten Dampf $y = 1$ und $\kappa = 1.135$ zu setzen ist. (Die oben erwähnten Gültigkeitsgrenzen sind nach Zeuner $y = 1$ und $y = 0.70$.)

Der Gleichung (38) gemäß ist $p = C\mu^\kappa$, $dp = C\kappa\mu^{\kappa-1}d\mu$, somit bei Beachtung des Wertes $C = \frac{p_0}{\mu_0^\kappa}$

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = C\kappa \int_{\mu_0}^\mu \mu^{\kappa-2} d\mu = C\kappa \cdot \frac{\mu^{\kappa-1} - \mu_0^{\kappa-1}}{\kappa-1} = -\frac{p_0}{\mu_0} \cdot \frac{\kappa}{\kappa-1} \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{\kappa-1} \right]$$

Wird also eine stationäre Strömung in irgend einem Stromfaden und eine adiabatische Zustandsänderung vorausgesetzt, so ist, wie sich durch Substitution des letzten Wertes in die Gleichung (3) ergibt, sofern (5) berücksichtigt wird,

$$\frac{p_0}{\mu_0} \cdot \frac{\kappa}{\kappa-1} \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{\kappa-1} \right] = U - U_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2} = U - U_0 + \frac{v_0^2}{2} \left[\frac{f_0^2 \mu_0^2}{f^2 \mu^2} - \frac{f_0^2 \mu_0^2}{f_0^2 \mu_0^2} \right] \quad (39)$$

Für die Ausflussgeschwindigkeit v_a der Gase bei adiabatischer Strömung findet man demnach, sofern in dieser Gleichung $v = v_a$, $U = U_a$

$\mu = \mu_a$, $f = f_a$ und zufolge (38) $\frac{\mu_a}{\mu_0} = \left(\frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{1}{\kappa}}$ gesetzt wird, oder auch unmittelbar aus (6) den Wert

$$\left. \begin{aligned} v_a^2 &= v_0^2 + 2 \left[U_0 - U_a + \frac{p_0}{\mu_0} \cdot \frac{\kappa}{\kappa-1} \left(1 - \left(\frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right) \right] \\ &= 2 \cdot \frac{U_0 - U_a + \frac{p_0}{\mu_0} \cdot \frac{\kappa}{\kappa-1} \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}{1 - \frac{f_a^2}{f_0^2} \cdot \left(\frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{2}{\kappa}}} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

(Für $\frac{p_0}{\mu_0}$ kann der Gleichung (34) zufolge auch kT_0 gesetzt werden, wo T_0 die dem Drucke p_0 und der Dichtigkeit μ_0 entsprechende absolute Temperatur, und k den experimentell bestimmbaren Wert $\frac{V_n p_n}{273}$ bedeuten.)

Ist die Druckdifferenz $p_0 - p_a$ sehr klein gegen p_0 , so kann annäherungsweise $\left(\frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(1 - \frac{p_0 - p_a}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa} \cdot \frac{p_0 - p_a}{p_0}$ gesetzt werden. Es übergeht dann die Gleichung (40) sofort in die Gleichung (29), bzw. in die Bernoulli'sche Formel (30).

Die Gleichung (40) ließe sich übrigens auch leicht aus der Gleichung (10) auf S. 759 ableiten. Es ist nämlich, wenn dieselben Bezeichnungen wie in der letzten Anmerkung 7 beibehalten werden, zufolge der Gleichung (38) $\int \frac{p}{\mu^2} d\mu =$

$$= C \int \mu^{x-2} d\mu = C \cdot \frac{\mu^{x-1}}{x-1}, \text{ sonach } \Sigma a = - \int_{\mu_0}^{\mu_a} m \frac{p}{\mu^2} d\mu = MC \frac{\mu_0^{x-1} - \mu_a^{x-1}}{x-1}$$

ferner $\Sigma A_0 = p_0 f_0 v_0 - p_a f_a v_a = M \left(\frac{p_0}{\mu_0} - \frac{p_a}{\mu_a} \right)$, $\Sigma A = M(U_0 - U_a)$ und $\Sigma \left(\frac{mv^2}{2} \right) - \Sigma \left(\frac{mc^2}{2} \right) = \frac{Mv_a^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2}$. Führt man diese Werte in die Gleichung (10) auf S. 759 ein und setzt der Gleichung (38) gemäß $\mu_a = \mu_0 \left(\frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{1}{x}}$ und $C = \frac{p_0}{\mu_0^x}$, so gelangt man sofort zur Gleichung (40).

§ 109. Hydrodynamischer Druck und die aus demselben resultierende Einwirkung auf die die strömende Flüssigkeit berührenden Wände. (Reaction der ausströmenden Flüssigkeit. Druck des isolierten Flüssigkeitsstrahles u. s. w.).

Mit Hilfe der Gleichung (3) auf S. 763 lässt sich der hydrodynamische Druck p in einem beliebigen Punkte M (Fig. 209) irgend einer Stromlinie $M_0 M M_a$ bei stationärer Strömung bestimmen. Es ist nämlich

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\mu} = U_0 - U - \frac{v^2 - v_0^2}{2} \dots (1)$$

wobei die Dichtigkeit μ , wie bisher, als eine bekannte, von der Art der Flüssigkeit abhängige Function $\mu = f(p)$ des Druckes p anzusehen ist. Der hydrostatische Druck entspricht zufolge der Gleichung (6)

auf S. 706 der Relation $\int_{p_0}^p \frac{dp}{\mu} = U_0 - U$. Es kann also für eine be-

stimmte Flüssigkeit von bestimmter Oberfläche und für denselben in dieser Oberfläche herrschenden Druck p_0 und für dieselben äußeren Kräfte der hydrodynamische Druck p an irgend einer Stelle des Stromfadens nur dann dem hydrostatischen Drucke an Größe gleich sein, wenn $v = v_0$, sonach zufolge der Gleichung (5) auf S. 764, wenn $f\mu = f_0\mu_0$ ist.

Setzt man in die obige Gleichung (1) die Werte aus der Gleichung (5) auf S. 764 ein, so nimmt jene die Form an

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\mu} = U_0 - U - \frac{1}{2} f_a^2 \mu_a^2 v_a^2 \left(\frac{1}{f^2 \mu^2} - \frac{1}{f_0^2 \mu_0^2} \right) \dots (2)$$

Ist also v_a mit Hilfe irgend einer Formel des § 108 bestimmt worden, so enthält diese Gleichung (2) nach Einsetzung von $\mu = f(p)$, wofern die Gestalt des Stromfadens und das Potential U

der beschleunigenden äußeren Kraft bekannt ist, nur die eine Unbekannte p und kann daher zur Bestimmung dieses hydrodynamischen Druckes p benutzt werden.

So ist z. B. bei einer homogenen, in stationärer Strömung beharrenden Flüssigkeit, da für diese $\mu = \mu_o = \mu_a$ ist, zufolge der Gleichung (2)

$$p = p_o + \mu \left[U_o - U - \frac{1}{2} \left(\frac{f_a^2}{f^2} - \frac{f_o^2}{f_o^2} \right) v_a^2 \right] \dots (3)$$

wo für v_a^2 der Wert aus der Gleichung (11) auf S. 771 einzusetzen ist.

Ist in diesem Falle der Druck p_o an der Oberfläche gleich dem äußeren Drucke p_a an der Ausflussöffnung, so erhält die Gleichung (3) nach der Substitution des Wertes (11) auf S. 771 oder (7) auf S. 765 die Form

$$p = p_o + \mu \left[(U_o - U) - (U_o - U_o) \cdot \frac{f_a^2}{f^2} \cdot \frac{f_o^2 - f^2}{f_o^2 - f_a^2} \right] \dots (4)$$

welche lehrt, dass je nach den Werten von $U_o U U_a f_o f f_a$ der hydrodynamische Druck p bald größer, bald kleiner sein kann als der äußere Druck $p_o = p_a$.

Ist die Strömung der homogenen Flüssigkeit nicht stationär, so hat der hydrodynamische Druck p in einem gegebenen als unveränderlich vorausgesetzten Stromfaden den aus (20) auf S. 773 ersichtlichen Wert

$$p = p_o + \mu \left[U_o - U - \frac{1}{2} v_a^2 \left(\frac{f_a^2}{f^2} - \frac{f_o^2}{f_o^2} \right) - f_a \frac{d v_a}{d t} \int_o^s \frac{d s}{f} \right] (5)$$

der für constante Werte von $U_o f_o p_o p_a$ in den Wert (26) auf S. 775 und für $\frac{d v_a}{d t} = 0$ in den Wert (3) übergeht.

Der hydrostatische Druck würde sich aus den Gleichungen (3) und (5) ergeben, wenn $v_a = 0$ gesetzt würde; es wäre dann, wie bekannt, $p = p_o + \mu (U_o - U)$. Die positive oder negative Differenz zwischen diesem Werte und den früheren, welche durch die letzten Glieder in den Gleichungen (3) bis (5) bestimmt ist, ist auf Rechnung der Flüssigkeitsbewegung zu setzen.

Der hydrodynamische Druck p einer compressiblen Flüssigkeit, bei welcher die Druckzunahme der Dichtenzunahme direct proportional ist, lässt sich aus der ersten Gleichung (28) auf S. 776 bestimmen, in welcher nur $\mu = \mu_o + A (p - p_o)$ zu setzen ist. Für kleine Druckdifferenzen $p - p_o$ kann man hier bei der Entwicklung von $l \frac{\mu}{\mu_o} = l \left[1 + \frac{A}{\mu_o} (p - p_o) \right]$ und $\frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu_o^2} \left(1 + A \frac{p - p_o}{\mu_o} \right)^{-2}$ sich auf die ersten Glieder der entsprechenden Reihen beschränken,

wodurch die Bestimmung von p vereinfacht wird. Bei vollkommenen Gasen von constanter Temperatur lässt sich p aus der Gleichung (31) auf S. 778 und, wofern sich die Temperatur bei einer als adiabatisch vorausgesetzten Strömung ändert, aus der Gleichung (39) auf S. 782 bestimmen, wofern in der letzteren der aus (38) auf S. 781 bestimmbare Wert von μ eingesetzt wird. Auch in dieser Gleichung (39) kann man für geringe Druckdifferenzen bei der Entwicklung der in $\mu^{x-1} = \mu_0^{x-1} \left(1 + \frac{p-p_0}{p_0}\right)^{\frac{x-1}{x}}$ und $\frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu_0^2} \left(1 + \frac{p-p_0}{p_0}\right)^{-\frac{2}{x}}$ vorkommenden Potenzen der eingeklammerten Binome in die bekannte Binomialreihe sich mit den ersten Gliedern dieser Reihe begnügen.

Es ist jedoch wohl zu berücksichtigen, dass nicht in der ganzen Geschwindigkeitsniveaufläche des Flüssigkeitsstrahles, deren Elemente f sind, der hydrodynamische Druck p derselbe ist, denn denkt man sich im Geschwindigkeitsniveau des Punktes M irgend ein von M ausgehendes Curvenelement $\overline{MN} = dn$, dessen Richtung übereinstimmt mit der centrifugalen Richtung des dem Punkte M entsprechenden Krümmungshalbmessers ρ der Stromlinie $M_0 M M_a$, so ist die Druckdifferenz dp in den Punkten M und N durch die Gleichung (4) auf S. 753 bestimmt, somit der Druck p_N im Punkte N

$$p_N = p + dp = p + \mu \left[P \cos(P, dn) + \frac{v^2}{\rho} \right] dn \dots (6)$$

oder, da der Potentialwert $U + \frac{dU}{dn} dn$ der beschleunigenden äußeren Kraft für den Punkt N bekanntlich der Gleichung $\frac{dU}{dn} = -P \cos(P, dn)$ entsprechen muss, und da ferner, wenn ds das benachbarte Element MM' der Stromlinie $M_0 M_a$ und $d\alpha$ den diesem Curvenelemente entsprechenden Contingenzwinkel (Krümmungswinkel) bedeutet, $\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds}$ ist,

$$p_N = p + dp = p + \mu \left[-\frac{dU}{dn} + \frac{v^2}{\rho} \right] dn = \left\{ \begin{array}{l} \\ = p + \mu \left[-\frac{dU}{dn} + v^2 \frac{d\alpha}{ds} \right] dn \end{array} \right. (7)$$

Am einfachsten denke man sich, um den gleichzeitigen hydrodynamischen Druck in den verschiedenen Nachbarpunkten kennen zu lernen, drei Systeme von sich orthogonal schneidenden Curven. Das erste System besteht aus den gleichzeitigen Stromlinien, das zweite System aus jenen in den Geschwindigkeitsniveauflächen gelegenen Curven, deren Elemente die oberwähnten Curvenelemente dn sind, und das dritte System aus jenen gleichfalls in den Geschwin-

digkeitsniveauflächen gelegenen Curven, deren Elemente dr durchwegs senkrecht stehen zu den entsprechenden Elementen dn , also auch senkrecht zur Richtung der aus der tangentialen Componente $\frac{dv}{dt}$ und der centripetalen Kraft $\frac{v^2}{\rho}$ (oder auch aus $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$) resultierenden beschleunigenden Kraft. In dem ersten dieser drei Systeme orthogonaler Trajectorien ändert sich der Druck gemäß der Gleichung (2) auf S. 752, bzw. den hier betrachteten Gesetzen (1) bis (5) gemäß, im zweiten Systeme entspricht derselbe der Gleichung (6) und (7), während im dritten Systeme, da die in die Richtung von dr fallende Componente der resultierenden beschleunigenden Kraft Null ist, offenbar

$$\frac{dp}{dr} = -\mu \frac{dU}{dr} \dots (8)$$

ist. Es ändert sich also der Druck in den Curven des dritten Systems, wie die Übereinstimmung von (8) mit der hydrostatischen Grundgleichung (6) auf S. 706 lehrt, in derselben Weise von Punkt zu Punkt derart, als wäre die Flüssigkeit nicht in Bewegung, sondern in Ruhe.

Ist die Form der Stromfäden, daher auch jene der Geschwindigkeitsniveauflächen nicht bekannt, so ist die Bestimmung des hydrodynamischen Druckes p in den einzelnen Punkten mit größeren Schwierigkeiten verbunden, denen man öfter durch bestimmte Annahmen für die den Formen der Gefäßwände möglichst entsprechenden Stromlinien oder durch andere Annahmen zu begegnen sucht.

Eine derartige, besonders in der technischen Mechanik häufige Annahme ist die, dass die Niveauflächen mit constantem Kraftpotential U , deren innerhalb der Flüssigkeit gelegener endlicher Theil etwa durch F bezeichnet sei, auch Geschwindigkeitsniveauflächen und zudem Flächen gleichen Druckes p , also auch gleicher Dichtigkeit μ sind. Es ist dann in den Gleichungen (6) bis (8) $dp = 0$ und $dU = 0$ zu setzen, so dass der Gleichung (7) zufolge für alle Stromfäden $\rho = \infty$ angenommen werden muss, wofern v von Null verschieden ist. Unter dieser Voraussetzung muss bei einer stationären Strömung zufolge der Gleichung (1), wenn in der ganzen Flüssigkeitsoberfläche derselbe Druck p_0 , dasselbe Potential U_0 und für alle Stromfäden daselbst dieselbe Geschwindigkeit v_0 vorausgesetzt wird, auch die Geschwindigkeit v in allen Punkten der Fläche F dieselbe, also für ein constantes p_0 und U_0 auch v_0 für alle Stromfäden dasselbe sein. Es hat dann der Gleichung (5) auf S. 764 zufolge auch das Verhältnis $\frac{f_0}{f}$ für alle Stromfäden denselben Wert und kann dementsprechend

gleichgesetzt werden dem Verhältnisse $\frac{\sum f_a}{\sum f} = \frac{F_a}{F}$ und ebenso kann dann aus gleichen Gründen in allen bisherigen Gleichungen $\frac{f_a}{f_o} = \frac{\sum f_a}{\sum f_o} = \frac{F_a}{F_o}$ gesetzt werden, wie dies auch gewöhnlich geschieht. Für Flüssigkeiten, die bloß der Einwirkung der Schwere unterworfen sind, hat die obige Annahme die Bedeutung, dass in der ganzen Ausdehnung einer horizontalen Flüssigkeitsschichte derselbe Druck herrscht und dieselbe Geschwindigkeit stattfindet, und dass ferner die Bewegungsrichtung aller Flüssigkeitstheilchen vertical ist. Es führt diese Hypothese den Namen der „Hypothese des Parallelismus der Schichten“ (parallelisme des tranches).

Für Flüssigkeiten, auf welche keine anderen äußeren Kräfte außer der Schwerkraft einwirken, ist bekanntlich unter der Voraussetzung einer vertical nach abwärts gerichteten z -Achse in den Gleichungen (1) bis (8), wie in § 108, $dU = -gdz$, $U_o - U = -g(z - z_o)$, $U_o - U_a = gh$ zu setzen.

In ähnlicher Weise, wie aus den hydrostatischen Druckkräften auf die starren Gefäßwände eine im § 105 betrachtete resultierende Einwirkung auf die letzteren sich ergibt, muss auch aus den hydrodynamischen Druckkräften auf die Gefäßwände im allgemeinen eine Einzelkraft R und ein Kräftepaar M resultieren.

Ist nämlich dF ein unendlich kleines Element der Oberfläche eines festen Körpers K (z. B. der Gefäßwand), der mit der strömenden Flüssigkeit längs einer Fläche von der Größe F in Berührung steht, und ist p der specifische hydrodynamische Druck, dem das Element dF infolge dieser Berührung ausgesetzt ist, so wirkt auf den Körper K in diesem Elemente dF bekanntlich eine zu dF normale Druckkraft $dN = p \cdot dF$, während nach dem Principe der Gegenwirkung das Oberflächenelement dF des Körpers K auf die Flüssigkeit mit der entgegengesetzt gleichen Gegenkraft $-dN = -p dF$ reagiert. Mit Hilfe der früher gefundenen Werte von p lassen sich nun ohne besondere Schwierigkeit sowohl die Größe der Reductionsresultanten R der auf den Körper K wirkenden Kräfte $dN = p \cdot dF$, als auch ihre Componenten $R_x R_y R_z$, welche zu den beliebig gewählten orthogonalen Achsen xyz parallel sind, bestimmen. In einfacherer Weise kann man jedoch bei einer stationären Flüssigkeitsströmung diese Kräfte $R R_x R_y R_z$ ermitteln, wenn man das durch die Gleichung (1), bzw. Gleichung (2) auf S. 756, bzw. 757 ausgedrückte Gesetz der Änderung der Bewegungsgröße in Anwendung bringt.

Werden nämlich für eine in irgend einem Stromfaden stationär strömende compressible oder incompressible Flüssigkeit die Be-

zeichnungen der Fig. 209 beibehalten, so ist die Masse dM der durch die Ausflussöffnung f_a in dem unendlich kleinen Zeitelemente dt austretenden Flüssigkeit durch $dM = \mu_a \cdot f_a \cdot v_a dt = \mu_o f_o v_o \cdot dt$, ferner ihre Geschwindigkeitscomponente etwa parallel zur x -Achse durch $v_a \cos(xv_a)$, demnach ihre Bewegungsgröße parallel zu dieser Achse durch $dM \cdot v_a \cos(xv_a) = \mu_a f_a v_a^2 \cos(xv_a) \cdot dt$ ausgedrückt. In der Zeit dt vergrößert sich demnach einerseits die in der Richtung der x -Achse geschätzte Bewegungsgröße $\Sigma(mv_x)$ der ganzen Flüssigkeitsmasse M , die sich zur Zeit t zwischen $M_o N_o$ und $M_a N_a$ (Fig. 209) im Stromfaden befindet, um diesen Ausdruck, während sich gleichzeitig diese Bewegungsgröße andererseits infolge der Bewegung der in der Oberfläche f_o befindlichen Flüssigkeitstheilchen durch den Raum $M_o N_o M_o' N_o'$ aus gleichen Gründen um $dM \cdot v_o \cos(xv_o) = \mu_o f_o v_o^2 \cos(xv_o) \cdot dt$ verringert, wobei ferner infolge des stationären Zustandes der Strömung die Bewegungsgröße der Masse $(M - dM)$, die den Raum $M_o' N_o' M_a N_a$ einnimmt, sich nicht ändert, so dass die Änderung der Bewegungsgröße der zur Zeit t in dem Raume $M_o N_o N_a M_a$ befindlichen Masse M parallel zur x -Achse durch die Differenz $\mu_a f_a v_a^2 \cos(xv_a) \cdot dt - \mu_o f_o v_o^2 \cos(xv_o) \cdot dt$ bestimmt ist. Da nun zufolge der Gleichung (1) auf S. 756 diese Änderung der Bewegungsgröße $\Sigma(mv_x)$ der Masse M in dem Zeitelemente dt gleich ist dem gleichzeitigen Antriebe $\Sigma X \cdot dt$ der x -Componenten X der auf diese ganze Flüssigkeitsmasse M einwirkenden äußeren Kräfte, so besteht die Gleichung

$$\Sigma X = \mu_a f_a v_a^2 \cos(xv_a) - \mu_o f_o v_o^2 \cos(xv_o) \dots (9)$$

Da ferner diese auf die Flüssigkeitsmasse M einwirkenden Kräfte theils von den auf jedes Massentheilchen wirkenden äußeren Kräften P , theils von den oberwähnten, von dem Körper K ausgehenden Widerstandskräften $-dN$, deren Reductionsresultante $-R$ ist, theils von den in der Oberfläche f_o und der Ausflussöffnung f_a thätigen, zu diesen Flächen senkrechten äußeren Druckkräften $p_o f_o$ und $p_a f_a$, von denen die erstere Kraft $p_o f_o$ mit v_o gleichgerichtet, die letztere aber der Ausflussgeschwindigkeit v_a entgegengesetzt gerichtet ist, herrühren, so ist

$$\Sigma X = \Sigma P_x - R_x + p_o f_o \cos(xv_o) - p_a f_a \cos(xv_a).$$

Aus dieser Gleichung und den beiden analogen auf die Achse y und z sich beziehenden Gleichungen lassen sich nach Einführung des Wertes (9) von ΣX und der analogen Werte von ΣY und ΣZ die seitens der strömenden Flüssigkeit auf die Oberfläche von K wirkenden Componenten $R_x R_y R_z$ der zu suchenden Kraft R leicht bestimmen. Es ist nämlich

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \Sigma P_x + \mu_o f_o v_o^2 \cos(x v_o) - \mu_a f_a v_a^2 \cos(x v_a) + \\ &\quad + [p_o f_o \cos(x v_o) - p_a f_a \cos(x v_a)] \\ R_y &= \Sigma P_y + \mu_o f_o v_o^2 \cos(y v_o) - \mu_a f_a v_a^2 \cos(y v_a) + \\ &\quad + [p_o f_o \cos(y v_o) - p_a f_a \cos(y v_a)] \\ R_z &= \Sigma P_z + \mu_o f_o v_o^2 \cos(z v_o) - \mu_a f_a v_a^2 \cos(z v_a) + \\ &\quad + [p_o f_o \cos(z v_o) - p_a f_a \cos(z v_a)] \end{aligned} \right\} (10)$$

Setzt man nun voraus, dass der mit der strömenden Flüssigkeit nicht in Berührung stehende Theil der inneren Gefäßwand überall demselben Drucke p_o und die äußere Gefäßwand überall demselben Drucke p_a wie die Ausflussöffnung f_a ausgesetzt ist, so halten sich zufolge des § 105 sowohl alle von p_o herrührenden Druckkräfte unter sich an dem Gefäße das Gleichgewicht, als auch die von p_a herrührenden Kräfte, so dass man unter dieser Voraussetzung bei der Berechnung der Reductionsresultanten R der gesammten auf das Gefäß, beziehungsweise den Körper K wirkenden Kräfte von den in den eckigen Klammern in (10) stehenden Summanden ganz absehen, somit folgende Gleichungen benützen kann:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \Sigma P_x + \mu_o f_o v_o^2 \cos(x v_o) - \mu_a f_a v_a^2 \cos(x v_a) \\ R_y &= \Sigma P_y + \mu_o f_o v_o^2 \cos(y v_o) - \mu_a f_a v_a^2 \cos(y v_a) \\ R_z &= \Sigma P_z + \mu_o f_o v_o^2 \cos(z v_o) - \mu_a f_a v_a^2 \cos(z v_a) \end{aligned} \right\} (11)$$

In den Gleichungen (9), (10) und (11) sind nun die in § 108 gefundenen Werte für v_a bezw. v_o einzuführen. Ferner ist vorausgesetzt, dass die der Natur der Flüssigkeit entsprechende Function $f(p)$, welche die Abhängigkeit der Dichtigkeit μ von dem Drucke p ausdrückt, bekannt, also $\mu_a = f(p_a)$ und $\mu_o = f(p_o)$ gegeben ist.

Wäre $v_o = 0$ und $v_a = 0$, also die Flüssigkeit in Ruhe, so wäre zufolge der Gleichung (11) $R_x = \Sigma P_x$, $R_y = \Sigma P_y$, $R_z = \Sigma P_z$, was übrigens schon in der Hydrostatik nachgewiesen wurde. Es kann also eine jede der Componenten $R_x R_y R_z$ als zusammengesetzt angesehen werden aus einer auch im Ruhezustande der Flüssigkeit wirksamen, von den äußeren Kräften herrührenden (hydrostatischen) Componente ΣP_x , bezw. ΣP_y , ΣP_z und einer zweiten auf Rechnung der Flüssigkeitsströmung zu setzenden (hydrodynamischen) Componente, die durch r_x , bezw. r_y , r_z bezeichnet sei. Es ist dann zufolge (11)

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \Sigma P_x + r_x, \quad r_x = \mu_o f_o v_o^2 \cos(x v_o) - \mu_a f_a v_a^2 \cos(x v_a) \\ R_y &= \Sigma P_y + r_y, \quad r_y = \mu_o f_o v_o^2 \cos(y v_o) - \mu_a f_a v_a^2 \cos(y v_a) \\ R_z &= \Sigma P_z + r_z, \quad r_z = \mu_o f_o v_o^2 \cos(z v_o) - \mu_a f_a v_a^2 \cos(z v_a) \end{aligned} \right\} (12)$$

Die aus $r_x r_y r_z$ resultierende, lediglich aus der Strömung der Flüssigkeit entspringende (hydrodynamische) Kraft r , die nebst den oberwähnten äußeren Kräften ΣP_x , ΣP_y , ΣP_z und den durch den

äußeren Druck p_o und p_a bedingten Druckkräften auf das Gefäß, beziehungsweise den Körper K einwirkt, bezeichnet man gewöhnlich als die Reaction der ausströmenden Flüssigkeit.

Ist die Flüssigkeitsoberfläche in Ruhe, also $v_o = 0$, so ist $r_x = -\mu_a f_a v_a^2 \cdot \cos(x v_a)$, $r_y = -\mu_a f_a v_a^2 \cdot \cos(y v_a)$ und $r_z = -\mu_a f_a v_a^2 \cos(z v_a)$, woraus sofort zu ersehen ist, dass dann die resultierende Reaction r der strömenden Flüssigkeit den Wert

$$r = \mu_a f_a v_a^2 \dots (13)$$

hat, also durch das Product aus der Dichtigkeit μ_a des ausfließenden Flüssigkeitsstrahles, der Größe der Ausflussöffnung f_a und dem Quadrate der Ausflussgeschwindigkeit v_a bestimmt ist, und dass dieselbe ferner der Richtung von v_a , d. i. der Richtung des ausfließenden Flüssigkeitsstrahles entgegengesetzt gerichtet ist. Ersetzt man v_a^2 in (13) durch den Wert aus (4) auf S. 764, so findet man

$$r = 2 \mu_a f_a \left[U_o - U_a - \int_{p_o}^{p_a} \frac{dp}{\mu} \right] \dots (14)$$

Ist z. B. $p_o = p_a$, also der äußere Druck (z. B. der atmosphärische Druck) auf die Flüssigkeitsoberfläche gleich dem Drucke auf die Ausflussöffnung, sonach auch $\mu_o = \mu_a$, so lehrt die letzte Gleichung (14), dass die Reaction

$$r = 2 \mu_a f_a (U_o - U_a) \dots (15)$$

ist. Dieser Gleichung gemäß ist unter der früheren Voraussetzung, dass $v_o = 0$ und $p_o = p_a$ ist, die Reaction r einer durch die Öffnung f_a ausströmenden homogenen Flüssigkeit von der constanten Dichtigkeit μ genau das Doppelte jener Kraft $\mu f_a (U_o - U_a)$, mit welcher eine der Ausströmungsöffnung f_a gleiche Wandfläche bei ruhigem Stande der Flüssigkeit und unter denselben sonstigen Verhältnissen, d. i. bei derselben Oberfläche, derselben Flüssigkeit und denselben äußeren Kräften vom Potential U , gedrückt würde, da im letzteren Falle der specifice Druck (für $p_o = 0$) zufolge der Gleichung (7) auf S. 708 den Wert $p = \mu (U_o - U_a)$ haben müsste.

Für eine beliebige (incompressible oder compressible) bloß der Schwere unterworfenen Flüssigkeit wäre in (15) bekanntlich $U_o - U_a = gh$, wenn h die Druckhöhe $h = z_a - z_o$ bedeutet, also zufolge (15) $r = 2 f_a h \cdot \mu_a g = 2 f_a h s_a$, wo durch s_a das specifice Gewicht $s_a = \mu_a g$ der ausströmenden Flüssigkeit bezeichnet ist, ferner ist für diese schwere Flüssigkeit, wenn die z -Achse vertical nach abwärts gerichtet ist, in (12) $\Sigma P_x = 0$, $\Sigma P_y = 0$, $\Sigma P_z = Q$ zu setzen, wo Q das Gewicht der gesammten Flüssigkeit bezeichnet.

Ist die Geschwindigkeit an der Oberfläche von Null verschieden, so kann man in den auf eine jede vollkommene Flüssigkeit anwendbaren Gleichungen (12), da die Strömung als eine stationäre vorausgesetzt ist, zufolge der Continuitätsgleichung $v_o = \frac{\mu_a f_a}{\mu_o f_o} v_a$ setzen, wodurch diese Gleichungen die Form annehmen:

$$\left. \begin{aligned} r_x &= \mu_a f_a v_a^2 \left[\frac{\mu_a f_a}{\mu_o f_o} \cos(x v_o) - \cos(x v_a) \right] \\ r_y &= \mu_a f_a v_a^2 \left[\frac{\mu_a f_a}{\mu_o f_o} \cos(y v_o) - \cos(y v_a) \right] \\ r_z &= \mu_a f_a v_a^2 \left[\frac{\mu_a f_a}{\mu_o f_o} \cos(z v_o) - \cos(z v_a) \right] \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

In diesen Gleichungen ist, je nachdem die Flüssigkeit homogen ist, oder aber die Abhängigkeit der Dichtigkeit μ von dem Drucke durch die Gleichung $\mu = \mu_o + A(p - p_o)$ oder bei Gasen durch die Gleichung der adiabatischen Curve $\frac{p_a}{p_o} = \left(\frac{\mu_a}{\mu_o}\right)^{\gamma}$ u. s. w. ausgedrückt ist, für v_a^2 der Wert der Gleichung (11) auf S. 771 oder aus der Gleichung (28) auf S. 776 oder aus der Gleichung (40) auf S. 782 u. s. w. einzusetzen.

Ist $p_a = p_o$, also auch $\mu_a = \mu_o$, so ist für alle Flüssigkeiten zufolge der Gleichung (7) auf S. 765 in diesen Gleichungen $v_a^2 = \frac{2(U_o - U_a)}{1 - \left(\frac{f_a}{f_o}\right)^2}$. Ist im letzteren Falle $f_a = f_o$ und $U_a = U_o$, was

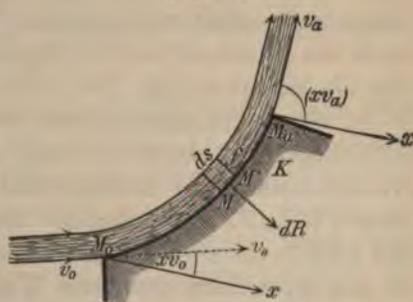
unter anderem dann der Fall ist, wenn gar keine äußere Kraft auf die längs einer festen Fläche strömende Flüssigkeitsmasse einwirkt, also $U_a = U_o = 0$ ist, so muss zufolge der ersten Gleichung (7) auf S. 765 $v_a = v_o$ sein. Die Gleichungen (16) sind dann für den Druck eines isolierten Flüssigkeitsstrahles auf eine widerstehende Fläche anwendbar und nehmen die einfache Gestalt an:

$$\begin{aligned} r_x &= \mu_o f_o v_o^2 [\cos(x v_o) - \cos(x v_a)], \\ r_y &= \mu_o f_o v_o^2 [\cos(y v_o) - \cos(y v_a)], \\ r_z &= \mu_o f_o v_o^2 [\cos(z v_o) - \cos(z v_a)]. \end{aligned}$$

Anmerkung: Diese Formeln für die Druckcomponenten eines isolierten Flüssigkeitsstrahles bei stationärer Strömung lassen sich auch leicht auf verschiedene andere Arten direct ableiten.

Eine einfache Ableitung ist folgende: Ist der Stromfaden (Fig. 210) überall dem gleichen äußeren Drucke ausgesetzt, so dass dementsprechend auch die Dichtigkeit durchwegs als gleich angenommen

Fig. 210.



werden kann (abgesehen von der durch die Gleichung (6) bestimmten unendlich kleinen Variation des Druckes und der Dichtigkeit in irgend einem Querschnitte) und wirken außer den normalen Widerstandskräften $-dR = -dN$ des Körpers K keine äußeren Kräfte auf den Stromfaden, so muss zufolge der Gleichung (3) auf S. 763, da $p_o = p$ und $U_o = U = 0$ ist, auch $v = v_o$ sein, d. h. in dem ganzen Stromfaden die Geschwindigkeit constant sein, was schon daraus hervorgeht, dass die Geschwindigkeit eines in irgend einer Curve sich bewegendem materiellen Punktes durch die Einwirkung von Kräften, die zur Bewegungsrichtung normal wirken, nicht abgeändert werden kann. Es muss dementsprechend auch infolge der Unveränderlichkeit des Wertes von μ und v zufolge der Gleichung (9) auf S. 755 auch der Querschnitt f eines jeden Stromfadens in seiner ganzen Ausdehnung als gleich angenommen werden. Die normale Kraft $dR = dN$, die ein Element MM' des Stromfadens von der Länge ds , dem Volum $f \cdot ds$ und der Masse $dM = \mu \cdot f \cdot ds$ bei seiner Bewegung in der etwa als eben vorausgesetzten, in der xy -Ebene gelegenen Curve $M_oMM'o$ auf die Oberfläche des widerstehenden Körpers K ausübt, ist unter den obigen Voraussetzungen offenbar lediglich die Centrifugalkraft und hat demnach den Wert $dR = dN = dM \cdot \frac{v^2}{\rho} = dM \cdot v^2 \cdot \frac{d\alpha}{ds} = \mu f v^2 \cdot d\alpha$, wo ρ den Krümmungshalbmesser für den Punkt M und α den Richtungswinkel $\alpha = (x, ds) = (x, v)$ bedeutet. Da nun $(x, dR) = (x, ds) + (ds, dR) = \alpha - \frac{\pi}{2}$, also $\cos(x, dR) = \sin \alpha$ ist, so hat die X -Komponente dr_x der Kraft dR die Größe $dr_x = dR \cos(x, dR) = \mu f v^2 \cdot \sin \alpha d\alpha$. Die Summe der gleichzeitigen X -Komponenten aller der auf die einzelnen Elemente von M_oM_o , d. i. auf die Oberfläche des den Widerstand leistenden Körpers K einwirkenden Kräfte ist demnach

$$r_x = \int dr_x = \mu f v^2 \cdot \int_{(xv_o)}^{(xv_o)} \sin \alpha d\alpha = \mu f v^2 [\cos(xv_o) - \cos(xv_o)]$$

Vertauscht man in dem letzten Ausdrucke x mit y , so erhält man den Wert von r_y .

Die vorstehenden Formeln (11) bis (16) lassen sich auf eine beliebig im Raume ausgedehnte, in stationärer Strömung befindliche Flüssigkeit in Anwendung bringen, nur hat man behufs der Bestimmung der Componenten der Einwirkung der Flüssigkeit auf die Gefäßwände oder auf den Körper K die entsprechenden auf die einzelnen Stromfäden bezüglichen Werte der Kräftecomponenten, die durch die Gleichungen (11) bis (16) bestimmt sind, zu summieren, also die Summen ΣR_x , ΣR_y , ΣR_z , bezw. Σr_x , Σr_y , Σr_z zu bilden. Ist in einer anfänglichen Geschwindigkeitsniveaufläche F_o die Geschwindigkeit v_o aller der diese Fläche F_o normal durchsetzenden Flüssigkeitstheilchen dieselbe und ist auch die Dichtigkeit μ_o in dieser Fläche F_o eine constante (also bei einer compressiblen Flüssigkeit auch p_o in allen Stromfäden dasselbe) und hat auch etwa (xv_o) für alle Stromfäden denselben Wert, so ist bei der Bildung der erst-erwähnten Summe $\Sigma [\mu_o f_o v_o^2 \cos(xv_o)] = \mu_o v_o^2 \cos(xv_o) \cdot \Sigma f_o = \mu_o v_o^2 \cos(xv_o) \cdot F_o$ zu setzen, also in den ersten Gleichungen (11) und (12) f_o einfach durch F_o zu ersetzen. So ist z. B. unter dieser

Voraussetzung die X -Komponente der Einwirkung eines ursprünglich cylindrischen Flüssigkeitsstrahles vom Querschnitte F_o , dessen Achse zur x -Achse angenommen sei, auf eine widerstehende ebene, zur x -Achse senkrechte Wand K , wofern alle Stromfäden die Wand in Richtungen, die zur Wand parallel sind, verlassen, also $(xv_o) = 0$ und $(xv_a) = \frac{\pi}{2}$, somit $\cos(xv_a) = 0$ ist, zufolge (12) bestimmt durch

$$\Sigma r_x = \mu_o v_o^2 \Sigma f_o - \Sigma (\mu_a f_a v_a^2 \cdot o) = \mu_o v_o^2 F_o \dots (17)$$

Bisher wurden bloß die Componenten $R_x R_y R_z$ der Reductionsresultanten R der Druckkräfte $dN = p \cdot dF$, die seitens der strömenden Flüssigkeit auf die Oberfläche des Körpers K , bezw. auf die Wände des Gefäßes K ausgeübt werden, in Betracht gezogen. Zur vollständigen Erkenntnis der dynamischen Einwirkung der Flüssigkeit auf den Körper K ist es noch nothwendig, das Reductionsmoment M der Kräfte dN für irgend einen Reductionspunkt O , bezw. dessen Componenten $M_x = \Sigma m_x$, $M_y = \Sigma m_y$, $M_z = \Sigma m_z$ für drei durch O gelegte rechtwinklige Achsen xyz , d. i. die Summe der Momente der Kräfte $dN = p \cdot dF$ bezüglich dieser drei Achsen zu bestimmen. Da die Gegenkräfte $-dN$, welche auf die strömende Flüssigkeit seitens des Körpers K (des Gefäßes) in denselben Punkten der Gefäßwände ausgeübt werden, den Kräften dN entgegengesetzt gleich sind, so sind ihre entsprechenden Momentensummen $-\Sigma m_x$, $-\Sigma m_y$, $-\Sigma m_z$. Setzt man also wie früher voraus, dass die außerhalb der Flüssigkeit befindliche innere Gefäßwand durchwegs dem Drucke p_o und die äußere Gefäßwand dem Drucke p_a ausgesetzt ist, dass sich also die dem Drucke p_o , bezw. p_a entsprechenden Kräfte das Gleichgewicht halten, und bezeichnet man die Momentensummen der auf die Flüssigkeitsmasse einwirkenden äußeren Kräfte (z. B. der Schwerkkräfte) durch ΣM_x , ΣM_y , ΣM_z , so sind $\Sigma M_x - \Sigma m_x$, $\Sigma M_y - \Sigma m_y$, $\Sigma M_z - \Sigma m_z$ die Momentensummen sämtlicher Kräfte, unter deren Einfluss die strömende Flüssigkeit steht.

Zur Ermittlung der Werte dieser Momentensummen kann auch (so wie früher zur Bestimmung von $R_x R_y R_z$) in manchen Fällen die Betrachtung der Bewegungsgrößen der materiellen Punkte der strömenden Flüssigkeitsmasse zweckmäßig sein. Es ist nämlich der auf jedes Punktsystem, also auch auf Flüssigkeiten, anwendbare Gleichung (7) des § 55 (dem Principe der Flächen) zufolge für irgend eine jede Achse, etwa die z -Achse

$$\Sigma M^{(z)} - \Sigma M_o^{(z)} = \int (\Sigma M_z - \Sigma m_z) dt \dots (18)$$

wo $\Sigma M^{(z)}$ den Endwert und $\Sigma M_o^{(z)}$ den Anfangswert der Momentensummen der Bewegungsgrößen der einzelnen Punkte einer bestimmten Flüssigkeitsmasse M bedeutet.

Die Anwendung der letzten Gleichung ist besonders dann von Vortheil, wenn sich die Momentensumme der Bewegungsgrößen der in irgend einem unveränderlichen Raume enthaltenen Flüssigkeitstheilchen im Laufe der Zeit nicht ändert, so dass dann die Änderung $\Sigma M^{(z)} - \Sigma M_o^{(z)}$ der Momentensummen für die Masse M auch (vergl. S. 788) gefunden wird, indem man von der Momentensumme der in der betrachteten Zeit aus diesem Raume austretenden Masse m jene der in diesen Raum gleichzeitig eintretenden Masse abzieht. So ist z. B. bei dem früher betrachteten Stromfaden, wenn die früheren Bezeichnungen beibehalten werden und die Betrachtung auf das Zeitelement dt beschränkt wird, in welchem Falle das Integralzeichen der letzten Gleichung wegfällt, bei einer stationären Strömung diese Differenz gleich dem Unterschiede zwischen dem Momente $\mu_a^{(z)}$ der Bewegungsgröße $m v_a$ und dem Momente $\mu_o^{(z)}$ der Bewegungsgröße $m v_o$ bezüglich der z -Achse, wo, wie auf S. 788, $m = dM = \mu_a f_a \cdot v_a dt = \mu_o f_o \cdot v_o dt$ ist.

Auch wenn der Stromfaden, in welchem eine stationäre Strömung stattfindet, um die z -Achse gleichförmig rotiert, ändert sich offenbar die Momentensumme der Bewegungsgrößen in irgend einem Raumtheile des Stromfadens bezüglich der z -Achse im Laufe der Zeit dt nicht, und man kann demnach die Änderung der Momentensummen $\Sigma M^{(z)}$ in gleicher Art ausdrücken, nur hat man in diesem Falle nicht die früheren Momente von $m v_a$ und $m v_o$, sondern die Momente der Bewegungsgrößen $m V_a$ und $m V_o$ zu subtrahieren, wo V_a die nunmehr aus der relativen Ausflussgeschwindigkeit v_a und der Geschwindigkeit infolge der rotierenden Bewegung resultierende Geschwindigkeit in der Ausflussöffnung f_a und V_o die resultierende Geschwindigkeit in f_o bedeutet. Bezeichnet man demgemäß durch w die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Rotation des Stromfadens um die z -Achse und durch r_o und r_a die Entfernungen der Punkte M_o und M_a (Fig. 209) von dieser Achse, so resultiert das Moment von $m V_a$ aus dem Momente $\mu_a^{(z)}$ von $m v_a$ und aus dem Momente der Bewegungsgröße $m \cdot r_a w$, das offenbar den Wert $m r_a w \cdot r_a = m r_a^2 \cdot w$ hat. Es ist daher das Moment von $m V_a$ bezüglich der z -Achse $\mu_a^{(z)} + m r_a^2 \cdot w$, und aus gleichen Gründen ist $\mu_o^{(z)} + m r_o^2 \cdot w$ das Moment von $m V_o$, sonach ist die Differenz dieser beiden Momente zufolge der Gleichung (18) gleich $(\Sigma M_z - \Sigma m_z) dt$, also

$$(\Sigma M_z - \Sigma m_z) \cdot dt = \mu_a^{(z)} - \mu_o^{(z)} + m (r_a^2 - r_o^2) \cdot w \dots (19)$$

Um in dieser Gleichung die Momente $\mu_a^{(z)}$ und $\mu_o^{(z)}$ der relativen Bewegungsgrößen $m v_a$ und $m v_o$ in Bezug auf die z -Achse zu be-

stimmen, werde ein in unveränderlicher Lage zu dem rotierenden Stromfaden befindliches, also an der Rotation mit der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit w theilnehmendes rechtwinkliges Achsensystem xyz zugrunde gelegt, dessen z -Achse mit der unveränderlichen Rotationsachse zusammenfällt, und dessen x - und y -Achse so gewählt sei, dass die kürzeste Drehung von der positiven x -Achse nach der positiven y -Achse (um $\frac{\pi}{2}$) mit der thatsächlichen Drehungsrichtung übereinstimmt. Die Strömung der Flüssigkeit ist in Bezug auf dieses Achsensystem als stationär vorausgesetzt worden, und es haben daher v_a und v_o , ebenso die Winkel (xv_a) , (yv_a) , (zv_a) und (xv_o) , (yv_o) , (zv_o) , sowie die relativen Coordinaten $x_a y_a z_a$ des Punktes M_a der Ausflussöffnung und die Coordinaten $x_o y_o z_o$ des Punktes M_o der Oberfläche constante Werte. Da nun zufolge der Gleichung (6) des § 55 das Moment $\mu_a^{(s)}$ der Bewegungsgröße $m v_a$ durch $\mu_a^{(s)} = m [x_a \cdot v_a \cos(yv_a) - y_a \cdot v_a \cos(xv_a)]$ und $\mu_o^{(s)}$ durch $\mu_o^{(s)} = m [x_o v_o \cos(yv_o) - y_o v_o \cos(xv_o)]$ bestimmt ist, so führt die Substitution dieser beiden Werte in die Gleichung (19) zu der Relation

$$(\Sigma M_x - \Sigma m_x) dt = m \{ v_a [x_a \cos(yv_a) - y_a \cos(xv_a)] - v_o [x_o \cos(yv_o) - y_o \cos(xv_o)] + (r_a^2 - r_o^2) w \}$$

Substituiert man in diese Gleichung den Wert von $m = \mu_a f_a v_a dt$ und bezeichnet kürzshalber durch c_a und c_o die constanten, durch die Gestalt des Gefäßes K bedingten Werte innerhalb der eckigen Klammern, nämlich

$$\left. \begin{aligned} c_a &= x_a \cos(yv_a) - y_a \cos(xv_a) = \\ &= r_a [\cos(xr_a) \cos(yv_a) - \sin(xr_a) \cos(xv_a)] \\ c_o &= x_o \cos(yv_o) - y_o \cos(xv_o) = \\ &= r_o [\cos(xr_o) \cos(yv_o) - \sin(xr_o) \cos(xv_o)] \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

so findet man nach der Division durch dt

$$\Sigma M_x - \Sigma m_x = \mu_a f_a v_a \{ v_a c_a - v_o c_o + (r_a^2 - r_o^2) w \}$$

woraus sich die gesuchte Summe Σm_x der Momente der auf das Gefäß wirkenden Druckkräfte $dN = p \cdot dF$ bestimmen lässt; es ist nämlich

$$\Sigma m_x = \Sigma M_x - \mu_a f_a v_a \{ v_a c_a - v_o c_o + (r_a^2 - r_o^2) w \} \quad (21)$$

In diesem Ausdrücke ist nur $v_o = \frac{\mu_a f_a}{\mu_o f_o} v_a$ zu setzen und für v_a der entsprechende im vorhergehenden § 108 gefundene Wert zu substituieren. So ist z. B., wenn eine gleichförmige Rotation um die z -Achse vorausgesetzt wird und U das Potential der äußeren

Kraft P pro Masseneinheit bedeutet, $U - \frac{r^2 w^2}{2}$ das Potential der aus P und der Centrifugalkraft $r w^2$ resultierenden relativen Kraft, daher bei der hier betrachteten relativen stationären Bewegung in dem Stromfaden die Ausflussgeschwindigkeit v_a und die Geschwindigkeit v_o zufolge der Gleichungen (6) und (5) auf S. 764 bestimmt durch

$$\left. \begin{aligned} v_a^2 &= 2 \frac{\left(\frac{r_a^2 w^2}{2} - U_a\right) - \left(\frac{r_o^2 w^2}{2} - U_o\right) - \int \frac{dp}{\mu}}{1 - \frac{\mu_a^2 f_a^2}{\mu_o^2 f_o^2}} \Bigg|_{p_o}^{p_a} \\ v_o^2 &= \frac{\mu_a^2 f_a^2}{\mu_o^2 f_o^2} v_a^2 = 2 \frac{\left(\frac{r_a^2 w^2}{2} - U_a\right) - \left(\frac{r_o^2 w^2}{2} - U_o\right) - \int \frac{dp}{\mu}}{\frac{\mu_o^2 f_o^2}{\mu_a^2 f_a^2} - 1} \Bigg|_{p_o}^{p_a} \end{aligned} \right\} (22)$$

Sind der äußere Druck p_o an der Oberfläche und der Druck p_a für die Ausflussöffnung, daher auch $\mu_o = f(p_o)$, $\mu_a = f(p_a)$ bekannt, so lassen sich v_o und v_a aus den beiden letzten Gleichungen (22) und daher auch Σm_x mittelst der Gleichung (21) berechnen.

Wird die Flüssigkeit als eine incompressible, bloß der Schwere allein unterworfenen Flüssigkeit und die z -Achse (z. B. für Turbinen) vertical vorausgesetzt, so ist in diesen Gleichungen $\mu_a = \mu_o = \mu$, $U_o - U_a = gh$ und $\Sigma M_x = 0$ zu setzen.

Addiert man sämtliche auf die einzelnen Stromfäden einer beliebig ausgedehnten Flüssigkeit sich beziehenden Momentensummen Σm_x in (21), so erhält man das gesammte Moment M_x der Druckkräfte $dN = p \cdot dF$, die auf den ganzen Körper (die rotierende hydraulische Maschine, z. B. eine Turbine) seitens der strömenden Flüssigkeit ausgeübt werden, in Bezug auf die Rotationsachse, und es ist demnach M_x bestimmt durch die Gleichung

$$M_x = \Sigma M_x - \Sigma \{ \mu_a f_a v_a [v_a c_a - v_o c_o + (r_a^2 - r_o^2) w] \} \dots (23)$$

In diese Gleichung, durch deren Multiplication mit der Winkelgeschwindigkeit w auch der Effect $M_x w$ des gesammten Flüssigkeitsdruckes bestimmt werden kann (siehe S. 557 und 660), hat man nur die Werte von c_a , c_o , v_a und v_o aus (20) und (22) einzusetzen.

Will man das gefundene Moment M_x und den Effect $M_x w$ durch die entsprechenden absoluten Geschwindigkeiten V_a und V_o , die bekanntlich aus den relativen Geschwindigkeiten v_a , bezw. v_o und aus den Geschwindigkeiten $r_a w$, bezw. $r_o w$ resultieren, ausdrücken, so hat man bloß zu beachten, dass die zu den Achsen xyz parallelen Componenten der letzteren Geschwindigkeit $r_a w$ (siehe S. 687) durch

— $w y_a$, $w x_a$, o , dagegen die Componenten der Geschwindigkeit v_a durch $v_a \cos(x v_a)$, $v_a \cos(y v_a)$, $v_a \cos(z v_a)$ bestimmt sind, dass demnach

$$V_a^2 = [v_a \cos(x v_a) - w y_a]^2 + [v_a \cos(y v_a) + w x_a]^2 + v_a^2 \cos^2(z v_a) \\ = v_a^2 + w^2 r_a^2 + 2 v_a w [x_a \cos(y v_a) - y_a \cos(x v_a)]$$

ist. Berücksichtigt man demgemäß die Werte (20), so findet man

$$V_a^2 = v_a^2 + r_a^2 w^2 + 2 v_a c_a \cdot w \quad \left. \vphantom{V_a^2} \right\} (24) \\ \text{und analog } V_o^2 = v_o^2 + r_o^2 w^2 + 2 v_o c_o \cdot w$$

Subtrahiert man diese Gleichungen und setzt für v_a^2 und v_o^2 die Werte aus (22) ein, so ergibt sich nach der Division durch $2w$

$$\frac{1}{w} \left[\frac{V_a^2 - V_o^2}{2} - U_o + U_a + \int_{p_o}^{p_a} \frac{dp}{\mu} \right] = v_a c_a - v_o c_o + (r_a^2 - r_o^2) w$$

somit zufolge (23)

$$M_s = \Sigma M_s - \Sigma \left\{ \frac{\mu_a f_a v_a}{w} \left(\frac{V_a^2 - V_o^2}{2} - U_o + U_a + \int_{p_o}^{p_a} \frac{dp}{\mu} \right) \right\} \dots (25)$$

Der Effect $M_s w$ ist demnach auch gegeben durch die Gleichung

$$M_s \cdot w = \Sigma M_s \cdot w - \Sigma \mu_a f_a v_a \left(\frac{V_a^2 - V_o^2}{2} - U_o + U_a + \int_{p_o}^{p_a} \frac{dp}{\mu} \right). *$$

*) In der früheren Auflage ist hier schließlich ein rein mathematischer, mehrere Druckbogen umfassender Anhang angefügt, welcher in dieser Auflage in Anbetracht des größeren Umfangs derselben nicht aufgenommen wurde.

Verlag von Alfred Hölder, k. u. k. Hof- und Universitäts-Buchhändler in Wien.
I., Rothenthurmstrasse 13.

Lehrbuch der Geologie. Ein Leitfaden für Studierende

von
Dr. Franz Toula,

k. k. Hofrath, o. ö. Professor der Geologie an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

Mit 367 Illustrationen, einem Atlas von 30 Tafeln (mit ca. 600 Figuren) u. 2 geologischen Karten.
Text und Atlas geheftet K 14.40 = M. 12.—, in einem Halbfranzband K 17.20 = M. 14.40, in zwei
Halbfranzbänden K 17.60 = M. 14.80.

Daraus apart:

Geologische Karte der Erde, entworfen von Franz Toula. roh K 6.— = M. 5.—

Geologische Karte von Mittel- u. West-Europa, nach der internationalen
geologischen Karte entworfen v. Franz Toula. Maßstab: 1:4,000,000.

roh K 6.— = M. 5.—

Ferner dieselbe

**Geologische Karte von Mittel- und West-Europa in 6 Einzel-
Formationen-Blättern** für Unterrichtszwecke als geologisch-analytischer
Atlas gedruckt. Maßstab: 1:4,000,000. roh K 8.— = M. 6.80.

Bei der Bearbeitung des oben angekündigten Lehrbuches ging der bekannte Geologe von dem
Standpunkte aus, vor allem den Zuhörern in möglichst gedrängter Form und anschließend an den Unter-
richtsgang der Vorschule einen Leitfaden bei ihren Studien an die Hand zu geben, ohne damit die bereits
vorhandenen großen Lehrbücher ersetzen zu wollen, deren Gebrauch dem nach Vertiefung Suchenden
vorbehalten bleiben soll.

Selten wirken Wort und Bild so zusammen, um dem Zweck der Wissenschaft wie dem Bedürfnis
nach Belehrung gleichermaßen zu dienen. Nicht nur den Herren Studierenden, sondern auch den Herren
Fachlehrern an Hoch- und Mittelschulen, berg- und hüttenmännischen, land- und forstwirtschaftlichen
Anstalten, Ingenieurschulen u. s. w., sowie allen Bibliotheken seien das Toula'sche Buch und die
Karten zur Anschaffung wärmstens empfohlen.

Abhandlungen der k. k. zoolog.-botan. Gesellschaft in Wien.

I. Band. 1. Heft. **Die Phoriden.** Von Theodor Becker.

Lexikon-Octav, mit 5 Lichtdrucktafeln. Preis K 9.— = M. 7.60.

Verhandlungen der k. k. zoolog.-botan. Gesellschaft in Wien.

Herausgegeben von der Gesellschaft. — Redigiert von

A. Handlirsch,

k. k. Custos-Adjunct am naturhistorischen Hofmuseum.

Bisher erschienen 50 Bände complet.

Botanik und Zoologie in Österreich

in den Jahren 1850 bis 1900,

herausgegeben von der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien
anlässlich der Feier ihres fünfzigjährigen Bestandes.

Mit 38 Tafeln und 9 Abbildungen im Texte. — Preis geheftet K 16.— = M. 14.—.

Elemente der wissenschaftlichen Botanik

von

Dr. Julius Wiesner,

k. k. Hofrath, o. ö. Prof. der Anatomie und Physiologie der Pflanzen und Director des pflanzen-physiologischen
Institutes an der k. k. Wiener Universität, wirkliches Mitglied der kais. Akademie der Wissenschaften etc.

I. Band: **Anatomie und Physiologie der Pflanzen.**

4. Auflage. — Mit 158 Holzschnitten. — Preis geh. K 8.40 = M. 7.—, in Halbfranz geb. K 10.— = M. 8.40.

II. Band: **Organographie und Systematik der Pflanzen.**

2. Auflage. — Mit 270 Holzschnitten. — Preis geh. K 9.60 = M 9.—, in Halbfranz geb. K 11.20 = M. 10.40.

III. Band: **Biologie der Pflanzen.**

(Erscheint in neuer Auflage im October 1901.)

Verlag von Alfred Hölder, k. u. k. Hof- und Universitäts-Buchhändler in Wien.
I., Rothenthurmstrasse 13.

Druck von Adolf Holzhausen,
k. und k. Hof- und Universitäts-Buchdrucker in Wien







1873

