



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### **Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### **About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

300

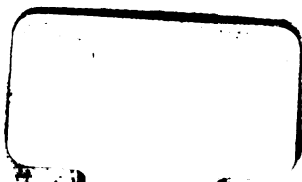
VALFRAGA DI MASINO E DI CALESIO.

VIII. 300.

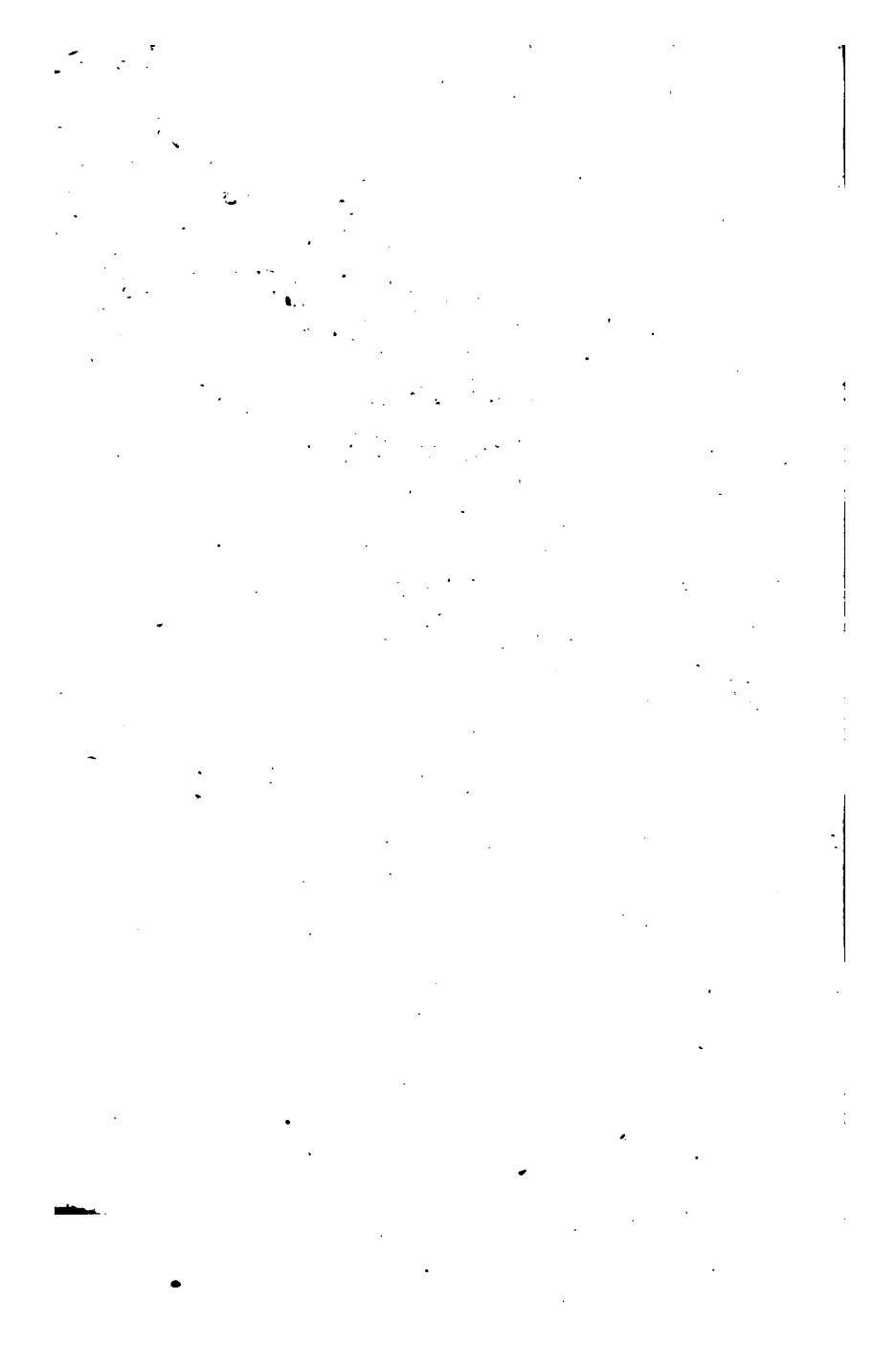
L



Thomas & Co. Sculptores et Mixini



QA  
35  
13740  
1757





*Boskovic, Rudiger Josip*

# ELEMENTORUM

UNIVERSÆ MATHESIOS

AUCTORE

P. ROGERIO JOSEPHO

BOSCOVICH

Societatis JESU

PUBLICO MATHESIOS PROFESSORE

TOMUS III.

CONTINENS

SECTIONUM CONICARUM ELEMENTA  
nova quadam methodo concinnata & Dissertationem  
de TRANSFORMATIONE LOCORUM GEOMETRICORUM,  
ubi de Continuitatis lege, ac de quibusdam Infiniti  
Mysteriis.

EDITIO PRIMA VENETA;

*summo labore ac diligentia ab erroribus expurgata.*



VENETIIS, MDCCLVII.

APUD ANTONIUM PERLINI.

SUPERIORUM PERMISSU, AC PRIVILEGIIS.

W. W. Roman

5-<sup>17</sup>25-1923

# AUCTORIS PRÆFATIO



*Sectionum Conicarum Elementa præ-*  
*miseram jam a pluribus annis, ac*  
*pluribus in locis, nova quadam me-*  
*thodo ex generali definitione deducta*  
*æ in Romano Litteratorum diario*  
*ad annum 1746. extat schediasma*  
*brevissimum; quo ex eadem illa de-*  
*finitione demonstratur in primis ra-*

*tio constans inter bina rectangula segmentorum binarum*  
*chordarum Sectionis Conicæ cujuscvis habentium Inclina-*  
*tionem constantem, & se invicem secantium; tum partim*  
*ex eo theoremate, partim iterum ex ipsa definitione*  
*precipua omnia, quæ ad ejusmodi curvas pertinent, &*  
*derivantur.*

*Id quidem argumentum plus quam decies ergo sane*  
*orditus sum in Auditorum meorum gratiam; neque un-*  
*quam impetrare potui à me ipso, ut ordinem; quem si-*  
*mel susceperam, tenerem, ac porro pergerem; sed no-*  
*vam quandam viam, quamvis ab eadem definitione di-*  
*gressus, inii semper, & sæpe etiam fere usque ad exitum*  
*tenui: Ex altera enim parte admirabilis quidam*  
*inter geometricas veritates nexus, ut in intricatissimo*  
*quodam labyrintho, mille ad eundem exitum diversos*  
*offerbat tramites; ex altera vel brevioris, vel expedi-*  
*tionis itineris oborta spes radium quoddam jam tolerati*  
*laboris induxerat.*

*Et sæpe hasissem diutius; nisi superiore anno gravis-*  
*simum accessisset ad maturandam editionem incitamen-*  
*tum. Conscripseram ego quidem latino sermone jam ab*  
*anno 1737 in usum nobilis adolescentis, quem geome-*  
*triciis studiis iniciandum susceperam, breve quoddam*  
*Geometriæ planæ compendiolum; quam ad 14 proposi-*

num summa veluti capita redegeram, adjectis corollariis nonnullis, & Scholiis ita, ut propositionibus quidem, & corollariis aperte contineretur, vel fere sponte inde fluere, ac facillime deduci posset, quidquid ad ceteras facultates mathematicas, vel Physicas ex ipsa Geometria requiritur, in scholiis autem usus haberentur nonnulli eorum, quae pertractata jam fuerant, quibus Tyronis animus incitaretur, & eorum fructuum, quos olim ex ipsa Geometria percepturus esset, jam aliquam voluptatem perciperet. Haud ita multo post Italico sermone breve itidem Arithmeticos compendiolum exaraveram in aliorum quorundam usum, ubi primo capite precepta, quae ad computationem pertinerent, indicaveram tantummodo, secundo proportiones, ac argumentandi modos, tertio progressionem, ac logarithmos aliquanto diligentius persecutus eram, demonstrationibus, in iis, quae ad computationem pertinebant, plerumque omissis, in reliquis summo semper cum rigore deductis. Compendiosa itidem Trigonometria spherica elementa Romana Taquetianorum Elementorum editioni inserueram, quae simplicitate quadam, & ordine se commendabant, nec omnium improbabantur.

Dum Geographia corrigenda causa, & Meridiani accuratius per Pontificiam ditionem traducti mensurandorum graduum, ditionem ipsam percurrerem itinere per summos montes laboriosissimo; & ab amicis, & ab iis, quibus ut paream, mihi ob ipsam instituti mei rationem religio est, per litteras inductus sum, ut eorum editionem permitterem tanquam exordium quoddam Elementorum universae Matheseos, adjectis iis, quae necessaria viderentur. Ipsum autem Geometria plana compendium illud meum, ejus discessu, in cujus gratiam conscriptum fuerat, jam tum amiseram, quod extabat ab alio Italico redditum, unde iterum ab Editore latinitate donatum fuerat, & idem Arithmetica quoque compendium in latinum sermonem converterat, quibus in versionibus mutationes etiam extiterant nonnullae, uti fit, aliis etiam quandoque adjectis, omissis aliis arbitrio interpretum. Interea vero Editor mihi amicissimus Geometria Solidorum compendium, & Planam Trigonometriam, ac AL-  
gebra

## P R A E F A T I O .

*Elementa sphaerica a me ipso arguentissimè litteris exposcebantur.*

Itaque ipsa elementa solidorum in medio itinere conscripta Romam transmisi, satis, ni fallor, & expedita, & perspicua, & vero simul etiam copiosa. Trigonometria autem sphaerica illi parum admodum mutata planam adjeci, qua in unum cum ea veluti corpus coalesceret. Et sane utriusque elementa adeo paucis innituntur principiis, & tam expedita methodo, ac tam continua, & necessaria deductione sunt concinnata, ut in iis, si iterum etiam edenda essent, nihil fere sit, quod mutatum velim, siue ordinem spectem, siue demonstrationum textum. Atque ea quidem omnia cum ad Urbem venissem, redeundum enim erat identidem, impressa inveni, quibus omnino addendam censui appendicem quandam aliquanto fusiores ad calcem, qua quaedam, qua ad Geometriam illam, & Arithmeticam necessaria censebam, continerentur. In ea demonstrationes, quae decerant, suppleantur passim, ac uberrima theorematum omnium elementariam seges colligitur, indicaturque, quo ordine, qua ratione ex iis solis 14 Geometriae propositionibus vel 12 potius, (nam bina ad proportionales secundo Arithmeticae capite uberius pertractatas pertinent), quidquid ad Elementarem Geometriam requiritur, deducendum sit, ac plura innuuntur problemata Tyroni exercendo aptissima.

In hac appendice continentur ea, qua meis ego quidem Tyronibus, viva voce insinuare consueveram, vel in quibus eosdem exercebam, quae sane ad Geometriam addiscendam cum fructu summa arbitror utilitatis. Obruitur plerumque Tyronis animus rerum disparatarum multitudine, dum ea omnia, quae ad elementa pertinere possunt, unico velat hiatu percurrit, ac licet singula perquam facile arripiat, rerum summam, ac admirabilem quandam nexum non tenet. Hinc utilissimum fore arbitratus sum, si ad precipua quaedam capita tota haec tam ampla materies redigeretur, quae sine aliorum adjumento sustinerens sese, ex quibus autem, ut ex primariis quibusdam fontibus, caetera omnia facile deducerentur. Ubi illa Tyro perspexerit, & totius aedificii quoddam veluti e tra-

bibus compactum fulcimentum habueris, tum reliqua illa cum longe majore fructu adjiciet, in quibus deducendis si vires primum suas experiatur, tum ubi impares senserit, Preceptoris opem imploret, na ille & ad inventionem, necessariam sane, sed raram admodum, viam sibi sternet expeditissimam, Illud enim omnino, mihi persuasum est, idcirco tam paucos prodire Geometras, qui nova invenire possint, vel propositorum theorematum demonstrationes supplere, licet tam multi Geometricis studiis operam navent, & multi iidem ad aliorum inventa percipienda deveniant; quod ubi primum se ad Geometriam addiscendam applicuerunt, explicata omnia, ac diserte deducta reppererint, nullo aut inventioni, aut deductioni relicto loco, quo acueretur industria, & exercitatio mentem excoleret, Verum ad eam hujus disciplinae rationem ductore est opus exercitato, qui noverit ejusmodi insinuare notitias, quas ad inventionem pro Tyronis captu satis fore censuerit; qua si adhuc ipsum, quo tendit, nequaquam perduxerint; ita ipsi reliqua paulatim addat; ut semper iidem relinquat aliquid, quod demum per se ipse inferat, qua nimirum ille tamquam inventa suo, gratulabitur sibi, & ingentem inde voluptatem percipiet, Et hac quidem de appendice illa, de qua in ipsa prima libri fronte, ac editoris prefatione, qua nimirum impressa jam fuerant, nulla tum quidem injecta est mentio.

Dum hac ederentur Algebra Elementa exposcebantur, Ea ex Urbe iterum digresso conscribenda fuerunt partim in itinere, partim Arimini, ubi diutius ob plures observationes ibidem institutas sum commoratus, unde ipsa elementa, ut effluebant e calama, ita Romam transmittentibus edenda, in quibus ea omnia qua ad equationum proprietates generales pertinent, ac ad tertium, & quartum gradum in primis, qua ad variables formularum valores, ad earundem incrementa, & decrementa, ad maximorum, ac minimorum determinationem spectant, aliquantula accuratius, & fusius sum persecutus, ac imaginariarum quantitatum usum in radicibus equationum gradus tertii, ex eadem unica formula eruendis protulit nec inuisilem, ut arbitror, nec inelegantem. At  
quod

quod ad illum , quem algorithmum vocant , sive ad præcipuas computandi rationes pertinet , compendiosiore methodo , institutionum more , que maxime necessaria videbantur , innui tantummodo , ac demonstravi , exemplis ubique adjectis , sed admodum paucis , plura Præceptoris arbitrio relinquens , qui ea pro Tyronis captu suggerat , & que opportuna videantur ad uberiores rerum intelligentiam , suppleat viva voce .

Ea omnia jam prodierant sine meo nomine , cum demum observationibus omnibus confectis Romam regressus , ac mea Mathematicas tradenda maneri restitutus , ad Conicarum Sectionum elementa perficienda animam applicare coactus sum , & ipsorum editionem maturare . Ita autem applicui , ut veteribus illis laboribus omnibus prætermisissis novam versum rationem inierim , & ab insperato diversam veritatum seriem adornarim . Id autem aliquanto plus otii nactus in hoc mihi opere præstandum in primis duxi , ut singula quam dilucide fieri posset , exponerem , nihil non accuratissime demonstrarem per finitam Geometriam , quam unam hic mihi adhibendam constitui , ita , ut quod ad Algebra usum in Conicis pertineret , eo reservarem , ubi de ipsius Algebra applicatione ad Geometriam agendum erit . Nexum autem quendam in primis , & deductionis ordinem ita rerum natura consentaneum persecutus sum ; ut inde manifesto apparere posset , ipsa Geometria duce ex assumpta definitione ad proprietates omnes necessario deveniri , que latere nequeant inquirentem , licet earum omnino ignarus ad hunc ordinem contemplationis accedat . Atque id quidem ita me affectum esse arbitror , ut quicumque satis in Geometria peritus ad hæc elementa percurrere animam applicuerit , per se ipse sine ductore ullo & theorematum demonstrationes omnes admodum facile assequi possit , & ordinem ipsum , ac nexum perspicere , cuius vi per sese iterum eodem ingressu callo eadem possit vel problemata sibi solvere , vel demonstrare theoremata , & eandem præcipuarum veritatum seriem contexere . Eam ob causam illam ipsum ordinem , quem in eo schesdiasmate proposueram , immutavi plurimum , & quod ibi ex ipsa definitione theorema deduxeram primum , hic ad sextam

propositionem rejectum est, ut generalis cujusdam constructionis fructus præcipuus quidem, sed qui alios ante se plurimos, ex eadem itidem profuentes, haberet, qui prætermittendi, ac differendi non essent. Ordinem autem hunc ipsam novum, quem reliquis præferendum censui, præcipua, quæ congesti, quæ scholiis interjectis adjeci, quæ in fusiore dissertatione ad calcem addita pertractavi, hic quam brevissime fieri poterit, perstringam.

In primis curvas hæc considerandas mihi duxi non in cono ipso, a quo nomen habent, cum solidorum consideratio multo complicatior sit, & multo majorem vim imaginationis requirat, sed in plano positas, quod & alii præstiterunt sane multi. Definita autem earum forma, & proprietatibus plurimis in ipso plano deductis, demum ad Coni, Cylindri, Conoidum sectiones gradum feci, quæ ita multo expeditiores evadunt.

Eam igitur Sectionis Conica perimetrum appellavi (nihil enim refert, si interea quamcumque nominis, ad arbitrium assumpti, definitionem usurpes, undecumque id nomen fluxerit, ac nominis ipsius derivationem alio reserves), in quapuncti cujusvis distantia a dato quodam puncto, quod Focus dicitur, ad distantiam a data quadam recta, quam Directricem appellavi, sit in ratione data, quæ ut esset minoris inæqualitatis, equalitatis, vel majoris inæqualitatis, ad Ellipsim, Parabolam, vel Hyperbolam perimeter persineret, ubi illud accidit satis ad rem oppositè, ut defectus, equalitas & excessus qui iis ipsis curvis Græco vocabulo id nomen jam olim dederant in communi methodo ex longe alia proprietate petitum, in hac mea ex ipsa definitione penderent.

Mira sane atque incredibilis est ejus definitionis ubertas, atque fecunditas, quæ, ut in adjecta dissertatione demonstravi num. 766, omnis hæc tractatio ad unicum problema reducitur, quo ex datis foco, directricè, ratione illa data, datæ rectæ concursus cum perimetro inquiritur; cujus problematis solutio rite ad casus omnes applicata, vel immediate per sese, vel ex iis, quæ inde primo deducta sunt, omnes exhibet harum curvarum proprietates, quas ad 9. propositiones redegi. Prioris tres  
tria



P R Æ F A T I O . . . . . ix

tria problemata continent ( num. 34, 128, 140 ) & definiunt concursum perimetri cum recta quavis directricè parallela, cum transeunte per focum, cum habente directionem quamcumque, cujus tertii problematis constructio generalis satis elegans, & secundissima, cum in prioribus binis casibus falleret, bina illa coegit præmittere singularia problemata, minus illa quidem fecunda, at ad naturam, & varias trium curvarum formas determinandas, sistendas animo, & verò etiam delineandas, atque oculis proponendas aptissima. Reliqua sunt theoremata e tertio problemate derivata. Quarta propositio ( num. 181 ) focorum proprietatem effert, quæ iis nomen dedit, ab æqualitate angulorum cum tangente petitum, quinta ( num. 206 ) diametros exhibet secantes bifariam ordinatas suas. Sexta ( num. 299 ) enunciat theoremata illud generale constantis reſtangulorum rationis, de quo mentio superius injecta est. Et ea quidem tria theoremata ab ipso tertio problemate singula per se immediate deducuntur. Ex eorum autem postremo potissimum alia bina proveniunt. Septima nimirum propositio complectitur ( num. 351. ) relationem quadrati semiordinatæ cujusvis diametri ad reſtangulum sub abscissis, vel ad abscissam unicam in Parabola, & latus reſtum. Octava ( num. 397. ) proportionem quandam armonicam rectæ e binarum tangentium concursu ductæ, & occurrentis perimetro bis, ac rectæ contactus jungenti semel; cujus quidem theorematis mira est sane, atque incredibilis fecunditas. Ex septima propositione nona deducitur ( num. 495. ) quæ eadem ex illa sexta deduci immediate posset, & illam exponit quadrati semiordinatæ relationem ad latus reſtum, & abscissam, quæ apud Veteres Ellipseos, Parabola, Hyperbola nomen dedit; quæ quidem propositio viam stravit ad demonstranda accuratissime per finitam Geometriam, quæcumque ad circulos Conicarum Sectionum osculatores pertinent, quos pluribus corollariis diligentissime sumo persecutus.

Et quidem propositionibus omnibus corollaria adjecta sunt plurima, quibus singulis sæpe ingens theorematum numerus, & ex propositionibus ipsis, & ex se mutuo confertim prorumpentium continetur. Habet definitio ipsa

Coro.

## P R Æ F A T I O.

Corollaria 5, propositio prima 4 sua, & cum novis definitionibus conjuncta alia 20: secunda propositio tantummodo 2, multa enim ex iis, quæ prima exhibuit, ex ea eisdem deduci possent: tertia 9, nam reliqua omnia, quæ consequuntur ad finem usque præ ejus corollariis haberi possunt; primum autem ejusdem corollarium tam multa simul theoremata continet ex diversis casuum conditionibus derivata pariter (num. 49) ut soli enunciationi vix integra pagina suffecerit: quarta 7: quinta 22, quibus imprimis ea omnia continentur, quæ ad Hyperbolarum asymptotos spectant: sexta 13: septima 12: octava reliquis fecundior 28: nona demum 10 ad circulos osculatores potissimum pertinentia.

Corollarium immixta sunt scholia sane multa sunt enim numerata 44, quibus vel, quæ maxime natatu erant digna, adnotarentur, vel quæ cum earundem curvarum proprietatibus copulata ad Geometriam generaliter pertinerent, pertractarentur, vel quibus ordo deductionis indicaretur, quod in tanta fecunditate, in tanto veritatum nexu necessarium omnino existit. Illud enim res ita arcta inter se copulatas, & pendentes a se invicem litteris consignature accidit perquam incommodum, quod, licet diutius meditatæ, ferruginem omnem tot veritatum, & deductionum unico etiam demum intuitu complectatur, & quæcumque velit sibi animo seorsum sistat; non nisi singula enunciare possit, atque conscribere, dum alia deducit ipsa iterum æque fecunda, aliis interea omnibus prætermissis, ad quæ regredi debeat memor, & ad omnes derivatæ delatus iterum, ramos jam peragratos omittit intactos aggredi, ac nullo surculo nulla prætermissa fronde, pariter circuit perlustrare.

Finge tibi densis confertum frondibus arbutum: tot ramos exurgentes ex trunco, tot minores ex ramis ramusculos, e ramusculis surculos prorumpentes, e surculis frondes, e frondibus flores, & folia. Hæc tum omnia unico intuitu contemplaris, quæ e quibus prorumpant, vides, quod libuerit folium, quemcumque florem animo elegeris, & tanta acie, ad mota manu per aerem, carpis, nullo ramo, nullo surculo tacto. At si formicam quampiam docere debeas, quæ iter disponendum ratione sit, ut ad singula

gula folia, ad singulos flores, nullo demum prætermisso, pertingas, quanta tibi arte opus erit, ne quid omittas, ne quopiam iterum labore irrita formicam tuam reducas. Ascendendum per truncum: ubi primum derivantur rami, notandus diligenter eorum numerus, ac cæteris interea prætermiſſis, arripiendus unicus, per quem ascendas: post paucos gressus plures occurruntur ramusculi; unicus iterum seligendus, sepositis cæteris: idem in surculorum, idem in frondium, idem in foliorum, & florum, eruptione multiplici præstandum semper, donec in unicum florem, vel folium, exiguum illum viatorem tuum invexeris. Inde ad proximum bivium, vel etiam trivium redeundum, & ad alia subinde, atque alia, donec fronde tata peragrata descendas iterum ad frondium ipsarum derivationem, tum ad divisiones singulas surculorum omnium, ramusculorum, ramorum, inire moleſtiſſimo sane, & ambiguitatis ubique plenissima.

Hæc quidem imago quedam est incundi laboris, rei adumbranda utcumque par, satis exponenda omnino impar. Neque enim ibi, ubi se furculi, frondesque dividerint, iterum coeunt, nova ambiguitatis fonte, & erroris periculo; quod ipsum si forte aliquando accidat; poteris sane ad postremum florem ascendere unica, & continua via, licet ad novam plurium surcularum conjunctionem deveneris unico peragrato, reliquis adhuc intactis. At hic, ubi e definitione constructiones quasdam erueris, ex iis theoremata demonstraris plura, quaquaversum facunda, fere semper ab novam quamdam veritatem educendam, ex illis veluti ramis, & surculis plura simul necessaria sunt, ex quibus ea ita pender, ut nisi omnia perlustraris, & mente adhuc retineas, illo veluti flore potiri omnia non possis.

En igitur incredibilem sane difficultatem, quam ego, scholiis identidem interjectis, mollire saltem conatus sum, quorum ope quid omittam interea, undò recesserim, quo regrediar, Tyrannem admonco. Illud enim mihi in hisce elementis concinnandis proposui, ut deductionis pateret ordo, & Geometriæ mira incales, atque artiſſimus omnium veritatum nexus transpiceretur utcumque; nam tum demum is patere omnino posset, cum aliis, atque  
aliis

aliis definitionibus assumptis, alio, atque alio ordine, veritates eadem deducerentur, quod innumeris sane, & a se invicem in immensum discrepantibus rationibus præstari posset. Illud in mentem venerat, ut hujus mea methodi quamdam, quemadmodum in familiarum derivationibus fieri solet, arborem designarem, in qua truncum teneret definitio, tria prima problemata ternos ramos: theoremata reliquis propositionibus, corollariis, scholiis contenta abirent in ramusculos, surculos, frondes, ac folia ita, ut a quovis theoremate curvæ quædam lineæ ad definitionem usque traducerentur per illa omnia theoremata numeris paragrahorum, quibus continentur, designata, quibus ad ejus demonstrationem est opus; ubi etiam signis quibusdam denotari poterat, quæ omnibus tribus communia essent Conicis Sectionibus, quæ ad singulas, vel binas pertinerent. Verum arbor ejusmodi ita excrescit, ut tanta amplitudo exigui voluminis mole contineri non possit. Eam parietari affigendam facile sibi quisque efformare poterit, si velit, regressu e singulis theorematibus factò, usque ad definitionem ipsam, ac adnotatis diligenter iis, quæ ad absolutam ejus demonstrationem assumuntur jam demonstrata.

Ethæc quidem ad ea scholia pertinent, quibus deductionis series identidem denotatur. In reliquis continentur sane multa adnotatu dignissima. Aliud (num. 18.) proportionis armonicæ proprietates persequitur; aliud (num. 111.) figurarum similitudinem contemplatur, quarum complementum quoddam est determinatio satis elegans puncti communis homologi, quod nisi in infinitum recedat in binis quibusque figuris habetur semper, & unicum, ac rectorum homologarum communium, quarum in inversa similitudine semper habetur unica per id punctum traducta, in directæ vero vel omnes ejusmodi sunt, vel nulla; & ea quidem in adjecta dissertatione habetur a num. 328. aliud (num. 12, 102) Conicarum Sectionum transformationem in rellas, in circulum, in se invicem persequitur; aliud (num. 102, 280, 388, 435, 442) ipsarum constructiones multiplices, ac determinationes exponit: aliud (num. 280) curvaturas determinat, & plures tangentium, ac secantium proprietates pro diversa positione puncti, per quod

P R Æ F A T I O: xiii

ducantur, definit. Aliud (num. 270) docet inventionem binarum mediarum continue proportionalium inter binas rectas datas, & arcus circularis, sive anguli trisectionem, quam omnino haberi non posse per Euclidæam Geometriam satis ibi quidem accurate, ni fallor, evinco; & ipsius repugnantia fontem aperio: aliud (num. 337) longe alium ordinem exhibet, quo elementa hæc ipsa diggeri potuissent: aliud (num. 343) similitum Ellipsisum; & Hyperbolarum, ac aequalium Parabolæ proprietatem evoluit, qua aliæ respectu aliarum fungantur vicibus asymptotorum: aliud (num. 536) varias circuli Sectionem Conicam contingentes mutationes considerat, donec demum is in osculatorem desinat. Accedit his, ut alia breviora scholia prætermittam, unicum generale geometricum lemma (num. 204) de tribus rectis ad punctum quoddam convergentibus, & parallelas rectas intercipientibus, quod mihi summa pluribus in locis exitit utilitatis.

Hisce omnibus absolutis, quæ pertinent ad harum curvarum considerationem in plano, ad solidorum sectiones gradum feci. Desinitis Cono (num. 546), Cylindro (num. 590), Conoide (num. 516), sectionum formas evolvi collateralis quibusdam, ac scholia suo loco disposui, quibus mira in primis transformationum geometricarum indoles continetur. Ibi autem notatu omnino dignissima sunt, quæ occurrunt (num. 653) in solido genito conversione Hyperbolæ circa axem conjugatum, in quo (num. 666) quædam etiam puncti cuiusdam adest veluti discissio, & crurum permutatio, post recessum Hyperbolæ in rectas lineas, mira sane, & ad continuitatis legem illustrandam apertissima. Verum, quod ad ejusmodi transformationes pertinet, in, adjecta dissertatione multo est uberius pertractatum.

Dissertatio autem ipsa aliquanto longior, quam initio arbitrarer, evasit; at ea in Geometriæ arcana intimitate irrumperè meditati facem præferet, & viam sternet mirum in modum. Multa autem continet, quæ licet sciri sane dignissima, ego quidem nusquam alibi offendi, multa, quæ licet alibi etiam occurrant sæpe, nusquam ego quidem ad certos reperi redacta canones, & geometrica methodo pertractata. Ea tamen pro novis venditare non

audco; cum mihi quidem infcitia mea culpa, nova esse possint, licet fortasse sint apud Litterariam Remp. venustissima.

Dissertatio ipsa de Locorum Geometricorum transformationibus agit. Ubi nimirum problema quodpiam generaliter solveris; mutata nonnihil datorum dispositione; plerumque ipsa constructio mutari plurimum debet; quædam summa in differentias abeunt; quædam rectorum, & angulorum directiones mutantur, quidam termini evadunt impossibiles, quidam in infinitum excrescunt ita, ut intersectio, quæ ad problematis solutionem necessaria erat, nusquam sit, ut ubi binæ rectæ convergentes abeunt in parallelas, quidam circuli, abeunte centro in infinitum, mutantur in rectas lineas; ac aliæ ejusmodi accidunt sane multa. In iis autem constantissimas quasdam leges observat Geometria, quæ nihil usquam operatur per saltum. Sed in ejusmodi continuitate servanda occurrunt sepe quidam progressus in infinitum, & quidam transitus per infinitum, qui secum trahunt quædam, quæ haud suo, an alio melius nomine appellari possint; quam mysteriorum quorundam infiniti; quæ tamen eo excrescunt, ut in vera demum absurda videantur recidere.

Hoc argumentum in ea mihi dissertatione evolvendum constitui, quo successu, videbit; qui legerit: nihil autem uspiam, præter communia Geometricæ; & mea Conicavum Sectionum elementa, requiritur ad absolutam omnium intelligentiam. Primo quidem negativas quantitates in Geometria considerandas esse, ut in Algebra; geometrica methodo ostendo; & ubi directio quantitatum mutatur, mutationum numerum parum in quantitatibus determinantibus, evinco, relinquere directionem quantitatis determinatæ, impari vero numerum eandem mutare; unde mihi imaginariæ quoque quantitates profuunt in lateribus quadratorum, quæ in negativa migrarint. Eorum vero omnium plura exempla profero e simplici Geometria admodum manifesta.

Ex theorematibus demonstratis deduco a num. 693 formas curvarum omnium, quæ ad sublimiores Parabolas, vel Hyperbolas inter asymptotos reducuntur, in quibus ordinata est in aliqua ratione rationali abscissa, quarum

curvarum geometricam accuratam constructionem profero per puncta, que cum erutis ex positivorum, negativorum, imaginariorum legibus mirum in modum consensunt. Tum a num. 714 ad continuitatis legem considerandam gradum facio, quam ubi quantitates e positivis transeunt in negativas, religiose observari demonstro. Transitum autem ejusmodi, ostendo fieri, tam per nihilum, quam per infinitum, ubi ingens quoddam infiniti mysterium se prodit. Recta nimirum linea, que utrimque in infinitum producta in illis quibusdam infinitis distantis oppositis connectitur quoddammodo, & in se ipsam redit, tamquam si esset circulus quidam infinitus, cui rectam lineam equivalere demonstro, ac eundem nexum, & in cruribus infinitis curvarum evinceo manifestissimum, plurima exempla proferens, & præcepta quedam adjiciens, que pertinent ad ejusmodi transitus. Illud autem imprimis ostendo a num. 729, ubi devenitur ad nihilum, vel ad infinitum, aliquando quidem transitu per eum limitem facto, quantitatem abire in negativam, aliquando vero inde regredi retro ex eadem parte, cujus exempla profero plura, & inde crurum seu parabolici, sive hyperbolici generis, quorum naturam doceo, regressus ex infinito multiplices, ac cuspidum naturam, & quedam alia, que ad tangentes, & curvaturam pertinent, evolvo, que sane omnia sunt ad continuitatis legem, & Geometriæ indolem cognoscendam aptissima.

Accedit alius quendam rectæ per modum circuli infiniti in se redeuntis considerata usus, quem contempler a num. 751, ubi cujus quantitatem, que post negativam, & binas positivas sit quarta, non negativam revera esse debere, demonstro, sed veluti plusquam infinitam, & datis binis punctis in recta infinita, ejus segmentum iis punctis interceptum, ostendo, esse duplex, alterum finitum, alterum per infinitum traductum, quorum primum bifariam secetur in puncto quodam datis interjacentis, secundum in infinito illo ipso, in binis infiniti tractus rectæ a binis illis punctis utrinque in infinitum producta connectuntur quoddammodo, & copulantur, que quidem consideratio ingentis est usus in Sectionum Conicarum analogia consideranda. Tum a num. 775 migrationem persequor a statu

statu reali ad imaginarium, qui nunquam haberi possit, nisi quantitas vel ad nihilum deveniat, vel ad infinitum, & in utroque casu bina puncta colliduntur quodammodo, ac in se mutuo irruant velocitate vel infinitesimajore, quam alibi, vel infinitesimajore, quod analogiam etiam quamdam exhibet haud sane inelegantem ejus migrationis cum vero viventium interitu. Ibidem autem in cono secto per planum mobile quoddam, series curvarum nascentes, in se mutuo transformatas, ac in imaginarietatem desinentes ostendo.

His expositis, & tanquam materia quadam novi cujusdam edificii preparata, ad ordinandam transformationum theoriam progredior num. 760, quam duplicis analogie definitione, & II Canonibus complector. Analoga dico, puncta, que eadem constructione petita ab intersectionibus eorundem Locorum Geometricorum definiuntur: lineas analogas, que punctis analogis, superficies, que lineis, solida, que superficiebus analogis terminantur. Bina autem distinguo analogie genera primum alterum, ubi etiam directio servatur, alterum secundarium, ubi ea contraria existit. Canon primus num. 764 pertinet ad quantitates, que primario analogie genere sunt analogae, in quibus nulla mutatio fit, nisi quepiam quantitates per infinitum traducte plusquam infinitae censenda sint, ubi etiam infiniti mysteria quadam occurrunt. Secundus num. 772 ad eas pertinet, que secundario genere analogie sunt analogae, ubi ostenditur, quando summe in differentias migrare debeant, & modi argumentandi mutantur. Tertius num. 777 mutationes directionis exponit, que in quavis proportione utcumque composita nonnisi numero pari haberi possint. Quartus num. 790 ad angulorum mutationes pertinet, que laterum mutationem consequuntur. Quintus num. 799 transitum continet anguli e positivo in negativum, mutata hiatus directione, sive ejusmodi mutatio fiat transendo per nihilum, sive per duos rektos. Sextus num. 807, quadrati negativii latera determinat imaginaria, & mediam inter binas quantitates, alterius tantum directione mutata, imaginariam, binas autem medias reales magnitudine equales, directione contrarias, qui quidem Canon in Sectionibus Com-



his considerandis incredibilem usum habet, ut mox ostendam.

Septimus num. 835 ad quantitates transit, quae in nihilum abeunt, vel ita in infinitum; ut saltem alter terminus nusquam jam sit, quod si in aliqua proportione binis terminis manentibus finitis contingat uni e reliquis, continget idem & alteri, nisi forte, qui manent, vel extremi fuerint, vel medii, quo casu abeunte altero in nihilum, alter in infinitum abire debet. Octavus num. 839 est de rektis, quae e convergentibus parallele fiunt, intersectione ita in infinitum recedente, ut nusquam jam sit, quarum & angulus ex altera parte evanescit, ex altera desinit in binos rektos. Nonus (num. 853) praescribit, quid agendum sit, ubi vertice trianguli abeunte in latus aliquod, rektae, quae se prius intersectabant, superponuntur. Decimus circuli peripheriam, docet (num. 858), abire in rektam, ubi altero radii termino extante, centrum ita in infinitum recedat, ut nusquam jam sit. Denum undecimus (num. 862) rationem desinit, quam habere debeant bina rektae in infinitum excrecentes, quae evadit aequalitatis ratio, ubi differentia finita maneat, ubi autem ea etiam in infinitum excreseat, quaevis esse potest, nulla, infinita, aequalitatis, vel finita inaequalitatis cujuslibet.

Porro singuli Canones demonstrantur accurate: singulorum exempla ex iis, quae praemissa fuerant proferuntur; singula ad Conicarum Sectionum naturam, & analogiam contemplandam applicantur, ac eorum usus in hisce meis earundem elementis concinnandis ostenditur. Plura sane occurrunt adnotatu digna, ut ea, quibus num. 84 ratio redditur ex infiniti mysteriis quibusdam repetita, earum etiam ubi quantitates per infinitum traductae abeunt in negativas, adhuc subtrahende sint, atque alia ejusmodi sane multa; illud in primis non omittendum, quod pluribus in locis ostenditur, potissimum vero, ubi secundaria analogia exponitur, & ubi fecundissimus ille sextus Canon ad Conicas Sectiones applicatur. Nimirum ubi Ellipsis in Hyperbolam transit per Parabolam, axis finito Eclipsos, & centro non succedit analogus primario analogae genere axis finitus Hyperbola, sed axis

per infinitum tractus, & finito illius centro, non centrum hujus finitum, sed punctum quoddam in infinito delitescens. Diametri autem secundaria Hyperbolae nullo analogia genere analogae sunt diametris Ellipticis, sed horum quadrata negative sumpta quadratis illorum negativis aequantur, quorum quadrata idcirco secundario analogia genere sunt analogae illarum quadraticis, latera vero, quae lateribus analogae essent, imaginaria sunt. Id ipsum manifesta ibidem evincitur. Inde autem deducitur, quae proprietates communes esse debeant Ellipsi, & Hyperbolae, quae ab altera ad alteram transferri nequeant. Inde nimirum patet, cur Ellipsis finita centro cavitatem, Hyperbolae convexitatem adverteat: cur axis transversus, & quaevis conjugata diameter in Ellipsi ad perimetrum terminetur, axis conjugatus Hyperbolae finitus ille, & secundaria diametri omnes ipsi perimetro nusquam occurrant: cur asymptotis, & tam multis elegantissimis asymptotorum proprietatibus Ellipsis carere debeat, ac alia ejusmodi evolvuntur sane multa earum curvarum discrimina, atque illud generaliter ostenditur, proprietates, quae a solis diametris conjugatis pendeant, nusquam esse debere communes, nec communi demonstratione, & constructione erui posse; quaecumque autem ab earum quadraticis pendeant, ea communia fore omnino, si quadrata diametrorum secundariorum Hyperbolae habeantur pro negativis. Exempla eorum proferuntur plurima, quae ad harum curvarum naturam cognoscendam & eorum elementorum commendationem plurimum conferunt.

Porro ubi in fine postremi Canonis de rationibus agitur quantitatibus abeuntium in infinitum, ibi jam demum incipiunt ipsa infiniti mysteria migrare in absurda, de quibus a num. 878 ad finem usque ita agitur, ut infinitum ipsum extensum pro impossibili haberi omnino debere videatur. Ratio autem impossibilitatis ipsius ex ipsa Conicarum Sectionum natura demum eruitur, quae ejusmodi invenitur, ut infiniti ipsius natura simplicitatem infinitam requirat, quae cum infinitis partibus ab omni quantitatibus excrescentium genere requisita conjungi omnino non potest; unde demum

ad ipsam illam Dei O. M., immunem ab omni com-  
positate simplicitatem immensam cum infinitate com-  
jungendam contemplantiam traducimur, in qua ipsa con-  
templatione fusior hæc dissertatio tandem aliquando a-  
brumpitur.

Hæc universi hujus operis est Synopsis quedam, in  
qua prætermittis quamplurimis, præcipua tantummodo  
capita innuuntur. Consequetur aliud agens de infinitis,  
& infinite parvis, quæ mihi indefinita sunt, quo-  
rum naturam explicabo, ordines diggeram, elementa  
tradam geometrico rigore demonstrata, & ex iis ad cur-  
varum generales proprietates gradum faciam, cuspidés,  
flexus contrarios crura infinita, contactus, oscula, evo-  
lutas, maximarum, & minimorum theoriam, atque  
alia ejusmodi evolvam, ac singulares præcipuarum, &  
maxime utilium curvarum proprietates deducam, ac de-  
monstrabo.

Itud unum hic demum monendum est. Si quis in hoc  
volamine vel non possit, vel nolit singula persequi, &  
præcipuas tantummodo, ac maxime necessarias Sectionum  
Conicarum proprietates inquiret; is & universam disser-  
tationem, & scholia fere omnia, & plurima etiam Co-  
rollaria omittere poterit sine demonstrationis, ac de-  
ductionis damno. Ita enim præcipua quedam inter se  
copulavi eam ipsam ob causam, ut reliquis non indige-  
rent. Vix autem paginas 100 requirunt præcipua ejus-  
modi proprietates inter se satis artè connexa. Ex nu-  
merorum seriem, quam reliquis omissis poterit perse-  
qui, in qua, ubi binis numeris puncta interseruntur,  
illud significatur, intermedios numeros omnes percurren-  
dos esse.

1 ... 3, 6 ... 11, 18 ... 30, 34 ... 47, 54, 56, 57,  
62 ... 84, 87, 93, 128 ... 137, 140 ... 144, 149 ...  
159, 164 ... 171, 173 ... 183, 189 ... 195, 198 ...  
201, 204 ... 213, 221 ... 231, 242 ... 247, 256 ...  
258, 260, 261, 299, 300, 305 ... 308, 328, 331,  
351 ... 355, 357, 358, 363, 364, 397, 398, 402 ...  
407, 411 ... 414, 436 ... 441, 457 ... 461, 495,  
497, 503 ... 508, 546, 550 ... 568, 590 ... 605,  
615 ... 643.

*Hinc usque habentur, quæ pertinent ad Conicas Sectiones consideratas vel in plano, vel in cono. Si Cylindri, & Conoidum Sectiones addere libeat, numeros 590 ... 605, 615 ... 643, superioribus addas, & voti penitus compos fiet.*





# SECTIONUM CONICARUM

## E L E M E N T A.

### DEFINITIO I.



1. *I ex omnibus punctis P cujusdam F. I. lineae ducta PD perpendiculari ad rectam AB indefinitam positione datam, & alia recta PF ad punctum F datum extra ipsam AB, fuerit semper FP ad PD in ratione data; lineam illam dico Sectionem Conicam, Ellipsim,*

*Parabolam, vel Hyperbolam, prout illa ratio fuerit minoris inequalitatis, aequalitatis, vel majoris inequalitatis: rectam AB Directricem, punctum F, Focum, rationem illam datam, Rationem determinantem; rectam PD, Ordinatam directrici ad angulos rectos, rectam FP, Foci radium.*

#### Coroll. I.

2. *Si in quovis alio angulo dato ordinentur directrici PH, semper ratio cujusvis radii foci ad suam ordinatam in angulo illo dato erit constans & data: nimirum composita ex ratione determinante, & ratione sinus inclinationis ad radium.*

3. *Nam ratio FP, ad PH componetur ex ratione FP ad PD; quae est ratio determinans, & ratione PD ad PH, quae ob angulum PDH rectum est ratio sinus anguli PHD ad radium (num. 88. Trig.)*

## SECTIONUM CONICARUM

Coroll. 2.

4. Et si in quadam linea ratio cuiusvis FP iungentis quodvis ejus punctum P cum dato puncto F ad suam PH in dato angulo ordinatam data recta non transeunt per F fuerit in ratione data, erit illa linea Sectio Conica; & ejus ratio determinans componetur ex illa ratione constanti, & ex ratione radii ad sinum inclinationis.

5. Ducto enim perpendiculari PD; ratio FP ad PD componetur ex ratione FP ad PH, & PH ad PD, quarum prima datur ex hypotesi, secunda est ratio radii ad illum sinum.

Coroll. 3.

6. Bini radii foci erunt ad se invicem, ut sue ordinate in quovis angulo communi.

7. Cum enim sit FP ad PH, ut Fp ad ph, erit alternando FP ad Fp, ut PH ad ph.

Coroll. 4.

3.4 8. Si recta quævis occurrans foco in F, directrici in Q occurrat Sectioni Conica in binis punctis P, p, altero ex iis jacente inter ipsa puncta F, Q altero ad partes utriuslibet, erit divisa in punctis p, F; P, Q in proportionem harmonice.

9. Erit enim Fp ad FP, ut pQ ad PQ, Sunt autem in fig. 3. in tribus rectis pQ, FQ, PQ rectæ pQ, PQ extremæ rectæ vero Fp, FP differentiarum extremarum a media; at in figura 4. trium Fp, FQ, FP rectæ Fp, FP extremæ, rectæ pQ, PQ extremarum differentiarum a media. Igitur utrobique erunt extremæ ad se invicem, ut patiter ad se invicem differentiarum extremarum a media, quæ est ipsa notio proportionis harmonice.

Coroll. 5.

10. Ratio radii foci ad ordinatam in quovis angulo obliquo erit in Ellipsi, & Parabola ratio minoris inæqualitatis, in Hyperbola minoris inæqualitatis, æqualitatis, vel majoris inæqualitatis, prout radius ad sinum inclinationis habuerit rationem majorem, æqualem, vel minorem ratione determinante, quam quidem inclinationem

## ELEMENTA.

*tionem tam, quæ rationem exhibet æqualitatis, dicemus Inclinationem æqualitatis, & ejus angulum acutum cum directrice, angulum Rationis æqualis, sive angulum Æqualitatis.*

11. Nam in triangulo rectangulo PDH semper ba- F. 1.  
 sis PH major est latere PD. Adeoque cum PD in El- 2.  
 lipsi sit major, quam PF (num. 1.), ac in Parabola  
 æqualis, erit semper in iis PH major, quam PF. At  
 in Hyperbola, in qua PD est minor, quam PF, pro-  
 ut ratio PH ad PD fuerit major, æqualis, vel mi-  
 nor respectu rationis PF ad PD, erit quoque PH ma-  
 jor, æqualis, vel minor respectu PF.

### SCHOLIUM I.

12. **L**ineas hujusmodi appellavimus Sectiones Coni-  
 cas, quia deinde demonstrabitur, cono ut-  
 tumque secto non per verticem, obvenire hujusmodi  
 lineas, ut pariter Ellipsis, Parabola, & Hyperbola  
 nomen accipiunt Græca origine in communi metho-  
 do tractandi Sectiones Conicas, a quodam defectu,  
 æqualitate, vel excessu, qui deinde demonstratur.  
 Quæcumque sit nominis ratio, modo semper in ea si-  
 gnificatione accipiat, in qua in definitione usurpa-  
 tum est, nihil interest. Ellipseos autem defectus ille,  
 Parabolæ æqualitas, & Hyperbolæ redundantia in hac  
 nostra methodo etiam ex ipsa definitione constat; cum  
 ratio determinans in prima sit minoris inæqualitatis,  
 in secunda æqualitatis, in tertia majoris inæqualita-  
 tis.

13. Potro mirum forte, quam immediate ex hac  
 proprietate, quam assumpsimus pro definitione, & quam  
 alii in Ellipsi saltem, & Hyperbola postremam fere  
 demonstrare solent (nam pro Parabola hanc ipsam as-  
 sumpsit etiam Hospitalius) præcipuæ Sectionum Coni-  
 carum proprietates fluant; & quidem, quæ iis com-  
 munes sunt, communi semper demonstratione eruun-  
 tur vinculo quodam, ac nullo nexu, quo Geometricis

## SECTIONUM CONICARUM

indoles, & vis sane incredibilis sponte incurrant in oculos?

14. Præterea multo expeditior harum linearum consideratio Tyroni evadit, si eæ in plano considerentur, quod & ipse Hospitalius præstitit, & alii multi, quam si solidorum Geometria opus sit, & variis planorum in cono intersectionibus.

15. Demum hæc definitio ita Conicis Sectionibus est propria, ut eas quodammodo & a circulo distinguat, qui cæteroquin inter Ellipses enumerari debet, & è Cono Secto, ut infra videbimus, ipse etiam prodit, sive is secetur sectione basi parallela, sive alia quadam, quæ dicitur subcontraria. Si enim Ellipsis in circulum abeat, directrix, ut patebit paullo inferius, abit in infinitum, nec usquam jam est.

16. At si directrix transfret per ipsum punctum datum pro foco, nullum aliud punctum inveni posset, cujus distantia ab ipso foco ad perpendicularum in directricem ductum haberet rationem datam, ubi ea ratio est minoris inæqualitatis. Sed si ratio esset æqualitatis, satisfacerent quæstioni puncta omnia rectæ directrici perpendicularis ductæ ex ipso puncto dato in utramvis plagam; & si ratio esset majoris inæqualitatis, satisfacerent puncta omnia binarum rectarum hinc inde inclinatarum, ut radius ad sinum inclinationis esset in ratione determinante.

F. 5. 17. Nam si punctum datum in directrice AB sit F, quodvis aliud punctum vel jacet in recta bFH perpendiculari ipsi AB ducta per F, ut R, & est FR tam distantia a puncto F, quam perpendicularum in directricem demissum, adeoque ea duo æquantur; vel jacet extra, ut Q, & ducto perpendicularo QZ in directricem, semper erit ipso major distantia QF basis trianguli rectanguli QZF. Quare nusquam haberi potest in eo casu ratio minoris inæqualitatis. Ratio autem æqualitatis habetur in ipsa recta perpendiculari HFb, in qua sumptis ubicumque punctis R, & r, est semper distantia FR, vel Fr, ad perpendicularum RF, vel rF in ratione æqualitatis. Ac demum si ratio sit majoris æqua:



E L E M E N T A . . .

Inæqualitatis sumpto in perpendiculari FH segmento EF ad arbitrium, ductaque per E recta EV indefinita parallela directrici, centro F intervallo rectæ, quæ ad EF, sit in ratione data determinante, inveniuntur in ipsa bina puncta u, & V, ac ducantur per ea, & per F rectæ indefinitæ Gg, Ii, & quodvis punctum utriuslibet, ut Q, q, satisfaciet quæstioni. Erit enim FQ ad QZ, ut FV ad EF in ratione data, & eadem est demonstratio pro q. Est autem ratio illa determinans FQ ad QZ, ut radius ad sinum inclinationis QFZ. Quare patent quæcumque fuerant propozita.

S C H O L I U M . II.

13. **I**N Coroll. 4. invenimus divisionem harmonicam, quæ in Sectionibus Conicis potissimum sæpe occurrit, & in Geometria elegantissimas proprietates habet. Præcipuas quasdam, quarum usus nobis occurret, hæc exponemus.

19 Si quatuor puncta A, B, C, D, ita disposita sint, ut distantia AB, CB, binorum A, C, alternatim sumptorum ab altero e reliquis B eandem rationem habeant, ac distantia eorundem AD, CD ab altero D, erunt in proportione harmonica tres distantia utriuslibet extremi a reliquis tribus, nimirum tam AD, BD, CD quam AB, AC, AD. F.6a

20. Primum patet: nam AD, DC erunt primi ternarii extremæ, & AB, BC extremarum differentia a media. Secundum facile deducitur. Cum nimirum sit AB ad BC, ut AD ad DC; erit & alternando AB ad AD, ut BC ad DC. Sunt autem AB, AD extremæ secundi ternarii, BC, DC extremarum differentia a media AC.

21. Patet autem eadem demonstratione, non posse proportionem harmonicam terminari ad alterum extremum D, quin simul terminetur ad alterum A.

22. Si jam intervallum binorum alternorum quorumvis AC dividatur bifariam in R, erunt RB, RC, RD in ea continua ratione geometrica, quam habet proportio

## 6 SECTIONUM CONICARUM

*portio harmonica trium quantitarum terminatarum ad extremum A assumptum pro bisectione; nimirum AB ad AD, vel BC ad CD.*

23. Assumptis enim  $Rb, Rd$  æqualibus  $RB, RD$ , erunt &  $Ab, Ad$  æquales  $CB, CD$ , adeoque erit  $bB$  rectorum  $AB, BC$  differentia,  $AC$  earum summa, ipsa  $AC$ , rectorum  $AD, DC$  differentia,  $dD$  earum summa. Cum igitur sint  $BC$  ad  $CD$ , &  $BA$  ad  $DA$  in eadem ratione, erit in eadem ratione & antecedentium differentia  $bB$  ad consequentium differentiam  $AC$ , & illorum summa  $AC$  ad horum summam  $dD$ ; (Cap. 2. Arit. num. 13.) ac sumptis dimidiis, erit  $RB$  ad  $RC$ , &  $RC$  ad  $RD$  in eadem ratione.

24. Contra vero si fuerint  $RB, RC, RD$  in continua ratione geometrica, & media  $RC$  assumatur æqualis  $RA$  ad partes oppositas, puncta,  $A, B, C, D$  constituent binas proportionibus harmonicas quantitarum terminatarum ad  $D$  &  $A$ , & ratio illa  $RB$ , ad  $RC$ , vel  $RC$  ad  $RD$  erit eadem, ac ratio proportionis terminorum terminatorum ad  $A$ , ut facile patebit regressu demonstrationis ipsius.

25. Datis binis punctis alternis  $A, C$ , & ratione proportionis harmonica, habebuntur facile, & reliqua duo, medium quidem secando  $AC$  in ea ratione in  $B$ , extremum secando  $AC$  bisariam in  $R$ , & sumendo  $RD$  tertiam proportionalem post  $RB, RC$ . Patet autem ex ipsa demonstratione debere  $D$  assumi ad partes  $B$  respectu  $R$ , quod quidem eo recedet magis a  $C$ , quo ratio data accedet magis ad rationem æqualitatis, puncto  $B$  eo pariter magis accedente ad  $R$ , quod quidem punctum abibit in ipsum  $R$ , punctum vero  $D$  ita in infinitum recedet, ut nusquam jam sit, ubi ratio data evaserit ratio æqualitatis.

26. Quotiescunque quatuor puncta  $A, B, C, D$ , constituent proportionem harmonicam, secta bisariam in  $R$  distantia binorum alternatorum  $AC$ , erunt geometricè proportionales quatuor distantie ab extremo  $D$  in bisectione non assumpto, nimirum  $AD$  ad  $RD$ , ut  $BD$  ad  $CD$ ;

## ELEMENTA.

CD, & quatuor a puncto B ejus alterno, nimirum AB ad RB, ut DB ad CB.

27. Cum enim ( num. 22. ) sit invertendo RD ad RC, sive ad RA in illa ratione DC ad CB, erit priorum summa AD ad primam RD, ut posteriorum summa DB ad tertiam DC. Cum vero sit invertendo DC ad CB, ut RC, sive RA ad RB; erit componendo DB ad CB, ut AB ad RB.

28. Si assumpta pro diametro distantia AC binorum, & quatuor punctis constituentibus proportionem harmonicam alternatim sumptorum, describatur circulus, & ad quodvis peripheria punctum E ducantur ex reliquis binis punctis rectæ BE, DE, erunt ea ad se invicem semper in eadem ratione BC ad CD, sive BA ad AD, recta CE eorum angulum BED secabit bisariam, & recta AE angulum BEG, quem altera BE continet cum altera DE producta.

29. Ductis enim BF, BG parallelis AE, CE, & occurrentibus rectæ DE in F, & G, erit ob parallelas DE ad EF, ut DA ad AB, nimirum ob proportionem harmonicam ut DC ad CB, sive ob parallelas ut illa eadem DE ad EG. Quare, æquales erunt GE, EF, angulus autem GBF, quem continent rectæ GB, BF æquatür angulo, quem continent AE, EC ipfis parallelæ qui rectus est in semicirculo. Igitur & is rectus erit; & circulus centro E diametro GF descriptus transibit per B; adeoque EB æqualls erit tam EF, quam EG; & habebit, ut illæ, ad EDeam rationem, quam BA ad AD; vel BC ad CD. Anguli vero BEC, FEC æquales, ille alterno EBG, hic interno & opposito G æqualibus ad basim trianguli isoscelis BEG æquabuntur inter se; & eodem argumento AEB, AEG æquales angulis EBF, EFB.

30. Contra vero si recta CE secet bisariam angulum ad E trianguli BED, & EA ipsi perpendicularis occurrat diametro in A, quatuor puncta A, B, C, D constituent proportionem harmonicam, cujus ratio in ternaria

ter-

## SECTIONUM CONICARUM

terminato ad D erit eadem, ac ratio laterum BE, B  
 ipsius trianguli. Ducta enim BG parallela CE, ang  
 EBG, EGB erunt æquales æqualibus BEC, DEC,  
 deoque & inter se & EG, EB æquales, ac facta  
 æquali ipsis EG, EB, angulus GBF erit rectus, adeo  
 que BF congruet cum recta rectæ AE parallela, qu  
 ibidem rectum angulum continere debet. Erit igit  
 DA ad AB, ut DE ad EF, sive ut ipsa DE ad B  
 nimirum ut DG ad BC. In hoc casu etiam recta  
 secabit bifariam angulum BEG, & patietur si recta  
 secante bifariam angulum BED, recta EA secet bifa  
 riam angulum BEG, puncta A, B, C, D proportio  
 nem harmonicam constituent.

F. 8. 31. Demum si in eadem circulo ducatur per B cho  
 da EH perpendicularis diametro, rectæ quidem DE,  
 DH contingunt circulum in E, & H, quævis autem r  
 eta in earum angulo ducta ex D, & occurrent chordæ  
 ipsi in L, circulo in I, & M secabitur in punctis M, L  
 I, D, in proportione harmonica.

32. Primum patet ex eo, quod ( num. 22. ) erit RE  
 ad RC, sive ad RE, ut hæc ad RD, ac proinde ut  
 angula RBE, RED ob angulum ad R commune simi  
 lia erunt, & angulus RED recto RBE æqualis: adeo  
 que ED perpendicularis radio ER erit tangens, & ead  
 dem est demonstratio pro recta DH.

33. Secundum sic demonstratur: Ductis per I, &  
 M chordis Li, Mm parallelis EH, ac proinde perpendi  
 cularibus ad DA, & bifariam secus, quæ occurrant  
 rectis DE, DH in F, G, & f, g, patet ipsas quoque  
 Ff, Gg bifariam debere secari ab ipsa DA, adeoque fore  
 Fi æqualem If, & Gm æqualem gM, ac rectangul  
 la FIf, GMg rectangulis IFi, MGm. Porro erunt FI ad  
 GM, & If ad Mg, ut DI ad DM: adeoque quadratum  
 DI ad quadratum DM ut rectangulum FIf, seu IFi, si  
 ve quadratum tangentis EF ad rectangulum GMg, sive  
 MGm, vel quadratum GE: adeoque ut quadratum IH  
 ad quadratum LM. Erit igitur DI ad DM, ut LI ad LM  
 ut oportebat.

PROPOSITIO I. PROBL.

34. *Dato foco, directrice, & ratione determinante, invenire omnia Sectionis Conicæ puncta.*

35. Ducatur per focum  $F$  recta  $HFh$  indefinita occurrens directrici  $AB$  ad angulos rector in  $E$ , ponaturque  $H$  ad partes  $F$ . Capta in directrice versus partem utramlibet, ut versus  $A$ , recta  $EK$  æquali  $EF$  ducatur per  $F$ , &  $K$  recta indefinita  $Tt$ , posito  $T$  ad partes  $F$ . Ducatur per  $F$  recta perpendicularis ipsi  $EF$ , ac in ea capiuntur  $FV$ ,  $Fv$ , quæ sint ad  $FE$  in ratione determinante, posito  $V$  in angulo  $FKE$ , quas quidem patet (num. 1.) fore minores  $FE$ , in Ellipsi, æquales in Parabola, majores in Hyperbola. Per  $E$ , &  $v$  ducantur recta indefinita  $Gg$ , posito  $G$  citra directricem ad partes  $F$ , quæ necessario occurreret rectæ  $Tt$  citra directricem inter  $K$ , &  $F$  alicubi in  $L$ ; tum per  $E$ , &  $V$  recta indefinita  $Ii$ , posito  $I$  citra directricem ad partes  $F$ , quam patet in parabola in fig. 10. debere esse parallelam ipsi  $Tt$  (cum nimirum  $EK$ ,  $VF$  ex una parte parallelæ sint, & ex alia æquantur eidem  $FE$ , adeoque & inter se) ac proinde in Ellipsi in fig. 9. debere occurrere ipsi  $Tt$  alicubi in  $l$  citra directricem ad partes  $T$  ob  $FV$  ibi minorem, quam  $FE$ ; & contra in Hyperbola (fig. 11.) debere ipsi  $Tt$  pariter occurrere, sed ultra directricem alicubi in  $l$ . Demum ex punctis  $L$ ,  $l$  ducantur rectæ directrici parallelæ, occurrentes ipsis  $Gg$ ,  $Hh$ ,  $Ii$  in  $L$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $n$ .

36. His ita semel præparatis, per quodvis punctum  $S$  rectæ  $Tt$  jacens in fig. 9. intra segmentum  $Ll$ , in fig. 10. ab  $L$  versus  $T$ , in fig. 11. extra segmentum  $Ll$ , ducta recta parallela directrici, quæ occurrat rectis  $Gg$ ,  $Hh$ ,  $Ii$  alicubi in  $O$ ,  $R$ ,  $Q$ , centro  $F$  intervallo  $RQ$ , vel  $RO$ , quæ ipsi æqualis erit, inveniuntur in ipsa  $OQ$  bina puncta  $p$ ,  $P$ : Inveniri autem semper poterunt bina, ac bina tantum, & omnia, ac sola puncta ita inventa una cum punctis  $M$ ,  $m$  in Ellipsi, & Hy-

70 SECTIONUM CONICARUM

Hyperbola, & cum puncto M in Parabola erunt ad Sectionem Conicam quaesitam.

37. In primis enim si centro F intervallo RQ, vel RO in recta OQ directrici parallela inveniatur punctum P, vel p, id esse debet ad quaesitam Sectionem Conicam, & si sit, ita inveniatur. Ducta enim PD perpendiculari ad directricem, adeoque parallela RE, cui proinde erit aequalis, erit FP ad PD, ut RQ, vel RO ad RE, sive ob  $AV$ , OQ parallelas FP ad PD, ut FV, vel Fw ad FE; nimirum per constructionem in ratione determinante; unde etiam patet ob FV, Fw assumptas aequales fore etiam aequales RQ, RO. Si autem P fuerit ad Sectionem Conicam, erit contra FP, ad PD, ut, FV, vel Fw ad FE; adeoque FP ad PD ut RQ, vel RO ad RE aequalem PD: adeoque oportebit FP esse aequalem RQ, vel RO, & punctum P inveniri centro F, radio RQ; & eadem est demonstratio pro puncto p.

38. Porro per quodvis punctum S rectae Tt ducta ORQ parallela directrici, inveniuntur centro F intervallo RQ bina puncta P, p hinc inde ab R, vel unicum congruens cum R, vel nullum, prout RQ fuerit major, vel aequalis, vel minor respectu FR. Nam EFR ipsi OQ perpendicularis est, cum sit perpendicularis directrici AB; adeoque circulus centro F descriptus, transcurrit ultra OQ, eamque secat in binis punctis hinc inde a perpendiculari FR, vel contingit in R, vel ad eam non pertingit.

39. Est autem FR semper aequalis RS, cum angulus FRS sit rectus, & ob KE, FE aequales, ac angulum KEF rectum, sit semirectus KFE, adeoque & SFR. Ipsa vero RS, assumpto S intra limites enunciatis in constructione, erit semper pars ipsius RQ, vel RO, adeoque minor ipsis: abeunte S in L, vel l, cum ipsis congruet: assumpto vero S extra limites enunciatis, erit e contrario RQ, vel RO pars ipsius RS, adeoque RS ipsis major, quod quidem admodum manifestum erit in figuris 12, 13, 14.

40. Nam in fig. 12. in Ellipsi tota linea  $LT$  jacebit  $F.12$   
 extra angulum  $GEI$ , adeoque puncto  $S$  assumpto in  $LT$ , 13.  
 erit  $RQ$  pars ipsius  $RS$ . Quod si  $S$  assumeretur in  $l$  14.  
 congruerent ibi puncta  $Q$ ,  $S$ . Tum tota  $LT$  jacet in-  
 tra angulum  $GEI$ , adeoque assumpto  $S$  in  $LF$ , est  $RS$   
 pars ipsius  $RQ$ ; abeunte  $S$  in  $F$ , ea evanescit; as-  
 sumpto  $S$  in  $FL$  evadit  $RS$  pars ipsius  $RO$ , abeunte  
 vero  $S$  in  $L$ , rursus conveniunt  $S$ ,  $O$ . At tota  $Lt$   
 jacet extra angulum  $GEI$ , & extra ipsi ad verticem  
 oppositum  $gEi$  ita, ut assumpto  $S$  in  $LK$ , sit  $RO$  pars  
 ipsius  $RS$ , abeunte  $S$  in  $K$ , evanescat  $RO$ , assumpto  
 $S$  in  $K$  sit iterum  $RQ$  pars  $RS$ .

41. In fig. 13. in Parabola eadem prorsus accidunt,  
 cum eo solum discrimine, quod ob  $Tt$ ,  $li$  parallelas  
 nunquam habent earum concursus  $l$ , adeoque tota in-  
 definita  $LT$  jacet intra angulum  $GEI$ , tota  $Lt$  extra  
 ipsum, & extra  $gEi$  ipsi ad verticem oppositum: ac  
 proinde per totam  $LT$  est  $RS$  pars  $RQ$ , vel  $RQ$ , per  
 totam  $Lt$  contra  $RO$ , vel  $RQ$  pars  $RS$ .

42. Demum in fig. 14. in Hyperbola tota pariter  
 $LT$  jacet intra angulum  $GEI$ , jacet autem  $l$  ultra di-  
 rectricem, & tota quidem  $Lt$  jacet extra angulos  $GEI$ ,  
 $gEi$ , sed tota  $lt$  intra  $gEi$  jacet: adeoque per totam  
 $LT$  est  $RS$  pars  $RQ$ , per  $FL$  pars  $RO$ , per  $LK$  con-  
 tra  $RO$  pars  $RS$ , per  $Kl$  vero  $RQ$  pars  $RS$ , & per  
 totam  $lt$  rursus  $RS$  pars  $RQ$ .

43. His omnibus perspectis patet, assumpto  $S$  in fig.  $F.9$   
 9. intra  $Ll$ , in fig. 10. per totam  $LT$ , in fig. 11. per  $10.$   
 totam  $LT$ ,  $lt$  inveniri in recta directrici parallela bina  $11.$   
 puncta ad Sectionem Conicam questam; eo assumpto  
 in  $l$ , vel  $l$ , coeuntibus in primo punctis  $S$ ,  $O$ , in  
 secundo punctis  $S$ ,  $Q$ , fieri  $FM$ ,  $Fm$  aequales  $ML$ ,  
 $ml$ , adeoque coire ibi puncta  $P$ ,  $p$  in unicum  $M$ , vel  
 $m$ , in quo nimirum circulus centro  $F$  radio  $ML$ , vel  
 $ml$  descriptus rectam  $MN$ , vel  $mn$  contingeret, exi-  
 stente ibidem  $FM$ , vel  $Fm$  ad  $ME$ , vel  $mE$ , ut  $ML$ ,  
 vel  $ml$  ad ipsas  $ME$ , vel  $mE$ , nimirum ut  $Fu$ , vel  $FV$   
 ad  $FE$ , sive in ratione determinante: at assumpto  $S$   
 ubicum-

## 72 SECTIONUM CONICARUM

tubicumque extra eos limites, nullum inveniri p̄ctum: Q.E.D.

Coroll. 1.

44. Datis foco, directricē, & ratione determinante, datur Sectio Conica.

45. Patet, cum iis datis, inveniantur omnia ejus puncta.

Coroll. 2.

46. Ellipsis tota citra directricem jacet, & in se ipsam redit: Parabola unicum habet ramum citra directricem in infinitum excurrentem; Hyperbola binos ramos in infinitum excurrentes, alterum citra, alterum ultra directricem.

47. Patet ex ipsa problematis constructione, cum nimirum ex omnibus rectis directrici parallelis omnes, & solæ rectæ ductæ in fig. 9. intra limites  $LI$  occurrant Ellipsi hinc inde a recta  $Mm$  in binis punctis  $P$  &  $p$ , quæ deinde in  $M$  &  $m$  coeunt; omnes autem, & solæ secantes infinitam  $LT$  in fig. 10. occurrant Parabolæ, ac omnes, & solæ in fig. 11. per infinitas  $LT$ , & Hyperbolæ occurrant.

Coroll. 3.

48. Ellipsis, Parabola, & ramus citrior Hyperbolæ contingunt rectas  $LN$ ,  $Lu$ ,  $NV$  in  $M$ ,  $u$ ,  $V$ ; Ellipsis autem, & ramus ulterior Hyperbolæ rectam  $ln$  in  $m$ .

49. De punctis  $M$ ,  $m$  patet; cum ibi puncta  $P$ ,  $p$  coalescant in unicum, & quævis directrici parallela ex altera parte rectæ  $LM$ , vel  $lm$ , ducta occurrat Sectioni Conicæ in binis punctis hinc inde ab  $M$ . De punctis autem  $V$ ,  $v$  colligitur ex eo, quod abeunte  $S$  in  $F$ , abeunt puncta  $O$ ,  $R$ ,  $Q$  in  $u$ ,  $F$ ,  $V$ , adeoque in ipsa  $Vv$  inveniendâ sunt bina puncta centro  $F$  intervallo  $FV$ , quæ erunt ipsa  $V$ ,  $v$ , evanescente nimirum ibidem  $FR$ , & factis  $RP$ ,  $RQ$  æqualibus inter se, ac ipsi  $FV$ . At utramque parum distet  $OQ$  ab  $vV$  utralibet ex parte, semper latus  $RP$  minus est, quam basis  $EP$ , adeoque quam  $RQ$ ; ac proinde Sectionis Conicæ punctum  $P$  utrinque circa  $V$  jacet citra rectam  $NV$ , & eadem est demonstratio pro  $v$ .

Co-



Coroll. 4.

30. Sectionis Conicæ perimenter est linea curva, nusquam interrupta.

31. Esse lineam curvam constat ex eo, quod recta esse non possit ea linea, quam plures rectæ ita contingant in unico puncto singulæ, ut ipsa utrinque circa contactum jaceat ad eandem ejusdem rectæ partem.

32. Numquam autem interrupti, patet ex constructione ipsa, cum satis pateat, puncto S excurrente motu continuo per rectam *LT* in Ellipsi, & per rectas *LT*, *LT* indefinitas in Parabola, ac Hyperbola, debere punctum P pariter excurrere motu continuo. Sed sic accuratius demonstratur.

33. Si alicubi abruptatur, ut fig. 15, 16 in P, vel recta *SP* alteri arcui *PA* occurreret iterum in P, ut in fig. 15, vel nusquam, ut in fig. 16. Primum fieri non potest, cum recta directrici parallela non nisi in unico puncto possit occurrere Sectioni Conicæ ad eandem partem rectæ *MH* ( num. 38. ). Secundum fieri non potest, quia ex altero extremo P arcus *PA* abrupti ducta per parallela directrici, aliæ parallelæ *VO* numero infinitæ ductæ per puncta V interposita punctis S, s, licet interceptæ iis limitibus definitis, in quibus quævis parallela debet occurrere perimetro sectionis hinc inde a recta *MH*, ipsi numquam ex ea parte occurrerent.

DEFINITIO II.

34. **C**irca illam *Vu* per focus ductam dico *Latus Rectum Principale Sectionis Conicæ*; *rectam Mm* in Ellipsi ( fig. 9. ) & in Hyperbola ( fig. 11 ) *Latus Transversum Principale*, sive *Axem Transversum*, ejusque *vertices M, m*, ac ipsa *Mm* *secta bisariam in C*, dico *C Centrum*: *erectis autem hinc inde rectis CX*, *Cx perpendicularibus axi transverso*, ac *mediis geometricè proportionalibus inter FM, Fra*  
 -Boscovà:h. Tom. III. C binas

## 14 SECTIONUM CONICARUM

binas distantias foci, a binis verticibus axis transf-  
 versis, dico XX Axem Conjugatum, ejusque vertices x,  
 X. Rectam autem MH indefinitam in Parabola (fig.  
 10.) dico ejus Axem transversum, & M ejus verti-  
 cem. Sed cum axem dixerō, & ejus magnitudinem non  
 definiēro, intelligam totam rectam utriusque indefini-  
 tam, in qua sunt axium vertices. Rectas axi utrilibet  
 perpendiculares, & ad Sectionis perimetrum utrinque ter-  
 minatas dico ejus Ordinatas, ut sunt chordæ Pp respec-  
 tu axis transversis; segmentum autem axis interceptum  
 inter ordinatam, & verticem, vel centrum, dico Ab-  
 scissam ab eo vertice, vel a centro, ut MR, mR  
 sunt abscissæ a verticibus M, & m; & CR abscissæ a  
 centro.

### SCHOLIUM I.

55. **P**ost hæc definitiones eruemus primo tria Co-  
 rollaria, quæ ab iis non pendent, nisi in so-  
 la nominum usurpatione, & debuissent continuare se-  
 ctionem Corollatorum propositionis primæ; cum ex sola  
 ejus constructione sponte fluant; sed definitiones in-  
 terferendæ fuerunt, ut ea, quorum proprietates enun-  
 ciantur, suis in ipsa enunciatione nominibus appella-  
 rentur. Consequentur Corollaria 4; & 5; quæ etiam  
 proprie Corollaria definitionum lateris recti, & semia-  
 xis conjugati, qui hic assumptus est ita, ut ejus qua-  
 dratum sit æquale rectangulo distantiarum foci a bi-  
 nis verticibus. Tum Corollarium 6 erit iterum Co-  
 rollarium propositionis primæ, & continebit præci-  
 pua Sectionum Conicatum proprietatem, quæ ea-  
 rum naturam exhibet, & fecundissima est ita, ut re-  
 liqua omnia Corollaria deinde ab ipsa pendent, &  
 ejus potissimum Corollaria sunt. Potuisset idcirco enun-  
 ciari per propositionem, tum ob enunciati theorema-  
 tis dignitatem, tum ob fecunditatem novam, tum  
 idcirco, quod paullo majore ambitu indigeat ad sui  
 demonstrationem, binarum nimirum rationum compo-  
 sitione

E L E M E N T A. 19

fiunde: Verum consultius duximus id quoque Cōsol-  
lariis immiscere; tum quia vix quidquam ad sui de-  
monstrationem postulat præter constructionem proble-  
matis primi; tum quia proprietatem enunciat axis  
transversi; quam deinde inveniemus generalem & axi  
conjugato; & diametris omnibus; (quæ in quavis  
Sectione Conicâ infinitæ sunt) & in propositione 6  
enunciabimus.

Coroll. 1.

36. Axis transversus bifariam secat suas ordinatas,  
& secat tam arcum, quam perimetrum Sectionis Coni-  
cæ terminatæ quavis ordinata in duas partes præterius æ-  
quales, & similes.

37. Nam ordinata  $Pp$  esset chorda circuli descripti  
cōtro  $F$ , radiis  $FP$ , adeoque (Coroll. 4. prop. 3. Geom.)  
perpendiculo  $FR$  per centrum ducto secatur bifariam;  
inde autem patet, totam Figuram  $MPR$ ; vel  $mRP$   
conversam circa axem transversum debere præterius cōn-  
gruere figuræ  $MRp$ ; vel  $mRp$ , cum quævis semioordina-  
ta  $RP$  debeat ob angulos ad  $R$ , rectos congruere sibi  
æquali  $Rp$ .

Coroll. 2.

38. Omnium fociradiorum minimus in Ellipsi est is,  
qui terminatur ad verticem axis transversi propiorem,  
maximus, qui ad remotiorem reliqui eo minores, vel majores,  
quo ad illam, vel hanc verticem accedunt magis  
puncta perimetri, ad quæ terminantur: in Parabola,  
& utrovis Hyperbole ramo ille minimus, qui ad axis  
verticem terminatur in eo ramo situm, reliqui eo ma-  
iores, quæ terminantur ad puncta ab eodem vertice re-  
motiora; nec nisi hinc inde bini æquales haberi  
possunt in eodem hinc inde angulo ab ipso axe trans-  
verso.

39. Nam radius foci  $FP$ , cum habeat ad  $PD$ , si-  
cut  $RE$  rationem constantem eandem (num. 1.), cre-  
scit, vel decrescit, ut ipsa  $ER$ . Patet autem abeunte  
in  $M$ , vel  $m$ , abire pariter  $R$  in eadem puncta,  
resedente  $P$  ab  $M$ , vel  $m$ , recedere &  $R$  ab eisdem,

## Y6 SECTIONUM CONICARUM

ac proinde ipsarum ER in Ellipsi, Parabola, & ramo citeriore Hyperbolæ minimam esse ipsam EM, tum vero perpetuo crescere in his quidem in infinitum Ellipsi vero donec in *m* evadat maxima, ac pariter in ramo ulteriore Hyperbolæ in fig. 11. fore omnium FR' minimam F*m*, tum eas in recessu puncti P ab *m* crescere in infinitum. Binæ vero FP, F*p*, quæ solæ communem RE habent, jacebunt hinc inde in angulis RFP, R*Fp* æqualibus ob FR communem, & latera RP, R*p*, ac FP, F*p* æqualia.

Coroll. 3.

60. *Differentia dimidii lateris recti principalis, & radii foci in Ellipsi, Parabola, ac ramo citeriore Hyperbolæ summa in ulteriore ad distantiam ordinata a foco est in ratione determinante.*

61. Cum enim sit & FP, ad RE, & FV ad FE in ea ratione, erit & illarum differentia, vel summa ad harum differentiam, vel summam in ratione eadem (cap. 2. Arit. n. 13). Porro distantia FR ordinatae P*p* a foco F est ubique differentia ipsarum ER, EF, & in ramo ulteriore Hyperbolæ in fig. 11 est FR: summa ipsarum ER', EF'.

Coroll. 4.

62. *Dimidium latus rectum principale ad distantiam foci a directrice est in ratione determinante, & in Parabola latus rectum principale est duplum ejus distantie, quadruplum tum distantie foci a vertice, tum distantie verticis a directrice.*

63. Patet primum ex ipsa constructione prop. 1. cum sit FV ad FE in ratione determinante. Porro in Parabola ea est ratio æqualitatis, & FM, ME æquantur inter se, Patent igitur & reliqua.

Coroll. 5.

64. *Quadratum semiaxis conjugati equatur differentia quadratorum semiaxis transversi, & distantia foci a centro, existente illo majore in Ellipsi, minore in Hyperbola; ac quadratum distantie foci a centro equatur in*

*Ellipsi differentia quadratorum semiaxium existentium semiaxe transverso semper majore ; in Hyperbola eorum summa.*

65. Patent ex eo, quod ex definitione ipsa quadratum semiaxis conjugati debeat esse æquale rectangulo  $MFm$ , & ob  $Mm$  sectam bifariam in  $C$ , quadratum  $CM$  (Coroll. 2 & 5 prop. 13. Geom.) æquetur in Ellipsi, ubi  $CF$  est minor quam  $CM$ , quadrato  $CF$ , & rectangulo  $MFm$  simul. At in Hyperbola, ubi  $CF$  est semper major quam  $CM$ , quadratum  $CF$  æquatur quadrato  $CM$ , & rectangulo  $MFm$  simul.

Coroll. 6.

66. Quadratum semiordinata axis transversæ æquatur in Parabola rectangulo sub abscissa a vertice, & quadrupla distantia foci ab ipso vertice, sive sub eadem abscissa, & latere recto principali; in Ellipsi vero & Hyperbola est ad rectangulum sub binis abscissis, ut quadruplum rectangulum sub binis distantis foci a binis verticibus ad quadratum axis transversæ, sive ut quadratum axis, vel semiaxis conjugati ad quadratum axis, vel semiaxis transversæ, sive ut latus rectum principale ad latus transversum, quæ rationes omnes æquales sunt.

67. Nam ob  $OQ$  sectam bifariam in  $R$ , & non bifariam in  $S$ , erit (Coroll. 4. 5. prop. 13. Geom.) quadratum  $RS$  cum rectangulo  $OSQ$  simul æquale quadrato  $RQ$ , sive quadrato  $FP$ , seu quadratis  $FR$ ,  $RP$ ; Cum igitur & quadratum  $RS$  æquetur quadrato  $RF$  ob ipsas  $RS$ ,  $RF$  æquales (num. 39.), erit & quadratum  $RP$  æquale rectangulo  $OSQ$ .

68. Est autem in fig. 10.  $SQ$  æqualis  $FV$  dimidii lateri recto  $UV$ , & æqualis  $LN$ , sive duplæ  $LM$ , nimirum (cum ob angulum  $LMF$  rectum, &  $LEM$  semirectum (num. 39.) æquantur inter se  $MF$ ,  $ML$ ) duplæ  $FM$ . Ducta vero  $Ly$  normali ad  $OS$ , quæ sititide erit parallela & æqualis abscissæ  $MR$ , erunt

78 SECTIONUM CONICARUM

$Oy$ ,  $yS$  ipsi æquales. Nam triangula  $SyL$ ,  $OyL$  similia sunt triangulis  $NME$ ,  $LME$  ob singula latera singulis lateribus parallela, adeoque ut  $NM$ ,  $LM$  æquantur  $MF$ , sive  $ME$ , ita &  $Sy$ ,  $Oy$  æquantur  $yL$ . Erit igitur  $OS$  dupla  $Ly$ , sive dupla abscissæ  $MR$ , & rectangulum  $OSQ$ , sive quadratum illud semiordinate  $RP$  æquale rectangulo sub dupla abscissa  $MR$  æquali dupla  $Ly$ , sive toti  $OS$ , ac dimidio latere recto  $FV$  æquale  $SQ$ , adeoque æquale rectangulo sub abscissa  $MR$ , & toto latere recto  $FV$ , sive rectangulo sub abscissa, & quadrupla distantia  $FM$  foci a vertice.

69. Ducta autem pariter  $Ly$  in fig. 9, & 11, quæ, si opus sit, producta occurrat rectæ  $ln$  in  $Y$ , erit  $OS$  ad  $ny$  duplam  $ml$ , sive duplam  $mF$  ( num. 43. ) ut  $LS$  ad  $Ll$ , sive ut  $Ly$  ad  $EY$ , vel ut  $MR$  ad  $Mm$ , &  $SQ$  ad  $EN$  duplam  $EM$ , vel pariter duplam  $MF$ , ut  $Sf$  ad  $Ll$ , sive ut  $yY$  ad  $LY$ , vel ut  $Rm$  ad  $Mm$ . Igitur conjunctis rationibus erit rectangulum sub  $OS$ , &  $SQ$ , sive quadratum  $RP$  ad quadruplum rectangulum sub  $MF$ , &  $Fm$ , ut rectangulum sub  $MR$ , &  $Rm$  ad quadratum  $Mm$ , vel alternando quadratum semiordinate  $RP$  ad rectangulum  $MRm$  sub abscissis, ut quadruplum rectangulum  $MFm$  sub binis distantis foci a verticibus ad quadratum axis transversæ  $Mm$ .

70. Porro cum  $CX$ ,  $Cx$  sint mediæ inter  $FM$ ,  $Fm$  ( num. 54. ), erit quadratum  $CX$ , vel  $Cx$  æquale rectangulo  $MFm$ , & proinde quadratum totius axis conjugati  $Xx$  æquale quadruplo rectangulo  $MFm$ , adeoque ratio ejus quadrupli rectanguli ad quadratum axis transversæ eadem est, ac ratio quadrati axis, vel semiaxis conjugati ad axem, vel semiaxem transversam quadratum.

71. Notum cum ipsa  $FV$  sit semiordinata, &  $FM$ ,  $Fm$  abscissæ a verticibus erit quadratum  $FV$  ad rectangulum  $MFm$ , sive ad quadratum  $CX$ , ut ipsum quadratum  $CX$  ad quadratum  $CM$ : Ac proinde  $FV$ ,  $CX$ ,  $CM$  sunt continue proportionales, & earum dupla  $Vc$ ,  
latus

E L E M E N T A. 79

factus rectum principale, & X axis conjugatus, NM axis transversus sunt continue proportionales, adeoque ratio primi ad tertium, est eadem, ac ratio quadrati secundi ad quadratum tertii.

Coroll. 7.

72. Vertices axis conjugati in Ellipsi sunt in ipsa ejus perimetro.

73. Nam quadratum semiordinate per centrum ductæ ad rectangulum sub MC, Cm, quæ sunt ejus abscissæ, sive ad quadratum CM, debet esse, ut quadratum semiaxis conjugati CX ad quadratum idem semiaxis transversi CM. Ac proinde semiordinatæ per centrum ducta æquatur ipsi CX, & punctum X est ad perimetrum, ac eadem est demonstratio pro \*.

Coroll. 8.

74. Quadrata semiordinatarum axis transversi sunt in Parabola, ut abscissæ a vertice, in Ellipsi, & Hyperbola, ut rectangula sub binis abscissis a verticibus.

75. Erat enim quadratum unius ordinate in Parabola ad quadratum alterius, ut rectangulum sub abscissa illius, & latere recto principali ad rectangulum sub abscissa hujus & eodem (num. 66.), ac idem illud latus rationem non mutat.

76. In Ellipsi aucti, & Hyperbola erit quadratum unius semiordinate ad rectangulum sub suis abscissis, ut quadratum alterius ad rectangulum sub suis; adeoque alternando erunt illa quadrata, ut illa rectangula.

Coroll. 9.

77. Perimeter Parabola, & utriusque ramæ Hyperbolæ, utriusque ab axe transverso recedunt ultra quoscumque limites.

78. Nam abscissæ MR in illa, & utraque abscissa MR, MR in hac crescunt ultra quoscumque limites,

## 10 SECTIONUM CONICARUM

adeoque & semiordinatarum quadrata ultra quoscumque limites crescunt.

*Coroll. 10.*

79. *Semiordinata axi transverso eque distantes a centro, vel a respectivis verticibus sunt aequales inter se in Ellipsi, & Hyperbola, quo autem centro propiores, eo majores in Ellipsi, minores in axe transverso Hyperbola.*

80. Erunt enim in ordinatis æque distantibus binę abscissę unius æquales binis abscissis alterius, abscissa nimirum unius a vertice  $M$ , abscissę alterius a vertice  $m$ , & viceversa, adeoque rectangula sub abscissis æqualia, & æqualia semiordinatarum quadrata. At cum rectangulum  $MRm$  sit differentia quadratorum  $CM, CR$ , quo minor erit  $CR$  in Ellipsi, eo major erit excessus quadrati  $CM$  supra ejus quadratum; & in Hyperbola eo minor ejus quadrati excessus supra quadratum  $CM$ . Quare eo ibi majus, hic minus rectangulum  $MRm$ , & proinde etiam quadratum semiordinate, & ipsa semiordinata.

*Coroll. 11.*

81. *Quævis recta in Ellipsi, & Hyperbola per centrum ducta, & ad perimetrum utrinque terminata, in ipso centro bifariam secatur.*

F. 17  
18

82. Ducta enim in fig. 17, 18 quavis  $PC$  ad centrum, ac semiordinata  $PR$  axis transversi, tum assumpta  $Cr$  æquali  $CR$ , & erecta ad partes oppositas semiordinata  $rp$ , ac ducta  $Cp$ , erit  $rp$  æqualis  $RP$  ob distantias  $Cr, CR$  æquales. Igitur ob angulos ad  $R$  &  $r$  alternos æquales, erunt in triangulis  $PRC, prC$  æquales & anguli ad  $C$ , & rectę  $PC, pC$ , ac proinde cum recta  $PC$  producta debeat efficere angulum ad verticem oppositum æqualem angulo  $RCP$ , debet abire in ipsam  $Cp$ ; & terminari ad  $p$ , ac in ipso centro secari bifariam.

*Coroll. 12.*

83. *In Ellipsi, & Hyperbola axis conjugatus omnes suas ordinatas bifariam secat, & ejus ordinata eque distantes a centro æquales sunt, quo autem remotiores a centro,*



*in Ellipsi minores, in Hyperbola majores, ac in Hyperbola quævis ordinata axi conjugato major axe transverso.*

84. Sumptis enim, in fig. 19, 20; CR, Cr in F. 19. axi transverso æqualibus, semiordinate RP, rp ad 20 eandem axis partem ductæ æquales erunt inter se. Quare & Pp jungens ipsas parallelas, & æquales erit parallela, & æqualis. Rr, cui cum perpendicularis sit axis Xx, erit & ipsi Pp perpendicularis, quam habebit pro sua ordinata, & secabit in I ita, ut PI, pI æquentur ipsis CR, Cr inter se æqualibus, adeoque & inter se æquales sint. Completis autem ordinatis PP', pp' axi transverso, erit eodem argumento P'p' ordinata axi conjugato. Patet autem fore æquales P'p', P'p', & earum distantias CI, C'I' a centro C æquales æqualibus semiordinatis RP, RP' axis transversi. Quo autem distantia CI fuerit major, eo semiordinata RP axis transversi erit major adeoque ejus distantia CR a centro eo minor in Ellipsi, major in Hyperbola, & proinde eo ibi minor, hic major etiam semiordinata IP axis conjugati, & tota ordinata Pp. Cumque in Hyperbola quævis CR abscissa axis transversi a centro major sit semiaxe CM, erit quævis semiordinata PI axi conjugato major ipso semiaxe, transverso CM, & tota ordinata Pp major toto axe Mm.

Coroll. 13.

85. *Quadratum semiordinate axi conjugata ad summam in Hyperbola, & differentiam in Ellipsi quadratorum semiaxis conjugati, & abscisse a centro, vel in hac ad rectangulum sub binis abscissis a binis verticibus est, ut quadratum semiaxis, vel axis transversi ad quadratum semiaxis, vel axis conjugati.*

89. Est enim ( num. 66. ) quadratum RP, sive CI ad rectangulum MRm, ut quadratum CX ad quadratum CM, adeoque alternando quadratum CI ad quadratum CX, ut rectangulum MRm ad quadratum CM. Porro ob Mm sectam bifariam in C ( Coroll. 2. 5. propol. 13. Geom. ) in fig. 19 quadratum CM

est

12 SECTIONUM CONICARUM

est æquale quadrato CR, & rectangulo MR<sup>m</sup>. At in fig. 20. quadratum CR æquale quadrato CM, & rectangulo MR<sup>m</sup>. Igitur ibi dividendo erit differentia quadratorum CI, CX, vel rectangulum XIx, tunc componendo, eorum summa ad quadratum CX, ut quadratum CR ad quadratum CM, & alternando, & invertendo quadratum CR sive PI ad summant in Hyperbola quadratorum CI, CX, differentiam in Ellipsi, vel in hac ad rectangulum XIx, ut quadratum CM ad quadratum CX, vel ut quadratum MR<sup>m</sup> ad quadratum Xx.

Coroll. 14.

87. Axi conjugatus Ellipsim facit in duas partes prorsus æquales, & similes; ac bini Hyperbola rami sunt prorsus in se æquales & similes, & tam Ellipsis, quam Hyperbola alium focum habent, ac directricem eque distantes a centro, & ab alternis verticibus, & habentes easdem prorsus proprietates, quas prior focus, & prior directrix.

88. Si enim super axe xX convertatur dimidia figura 19, 20 ita, ut abeat punctum m in M, abibi quævis mp in RP, & Ip, in IP, adeoque Semiellipsi xmx in xMX, ac tam in Ellipsi, quam in Hyperbola mp in MP.

89. Quod si capis Cf, Ce æqualibus, & oppositis Cf, Ce, ductaque ab perpendiculari axi transverso, tota figura convertatur circa axem conjugatum xCX, abibi ab in locum AEB, m in locum M, f in locum F, & viceversa; quævis autem perimetri tria puncta adhuc erunt in locis, in quibus alia perimetri puncta erant ante. Adeoque omnia, quæ respectu omnium perimetri punctorum verificabantur a loco F, & directricæ AB, jam verificabuntur de loco f, & directricæ ab. Porro ob CM, Cm, & CF, Cf, & CE, Ce æquales inter se, erunt pariter inter se æquales & ME, me, & MF, mf, & Me, mE;

Coroll. 15.

90. In Ellipsi, & Hyperbola distantia focorum a Perihelium, axis transversus, & distantia binarum directricum a se invicem, seu distantia centri a foco, a vertice axis transversi, & a directricibus sunt continue proportionales in ratione determinante.

91. Cum enim recta FE per focum ducta occurrat sectioni Conicæ in punctis M, m; jacente altero M inter puncta F, E, quatuor puncta m, F, M, E constituent proportionem harmonicam, (num. 8.), adeoque cum M secta sit bifariam in C, erunt (num. 22.) CF, CM, CE continue proportionales in ratione FM ad ME, nimirum in ratione determinante: ac in eadem ratione erunt eorum dupla Ff, Mm, Ee.

Coroll. 16.

92. Si ex quovis perimetri puncto ad binos focos ducantur bina rectæ, erit earum summa in Ellipsi, differentia in Hyperbola æqualis axi transverso.

93. Ducta enim per P recta axi transverso parallela, quæ binis directricibus occurrat in D, d, erit tam FP ad PD, quam fP ad Pd in ratione determinante; sicut ut Mm ad Ee. Quare ipsarum summa in Ellipsi (fig. 19) differentia in Hyperbola (fig. 20) ad Dd summam in illa, differentiam in hac ipsarum PD, Pd, erit pariter, ut Mm ad Ee. Cum igitur Dd, Ee æquales sint, erit & ipsarum FP, fP summa in Ellipsi, differentia in Hyperbola æqualis axi transverso Mm.

Coroll. 17.

94. Si ab extremis punctis Chordæ axi transverso parallelae ducantur ad eundem focum bina rectæ, earum summa in Ellipsi, differentia in Hyperbola æquatur axi transverso.

95. Ducta enim Fp, patet ipsam debere æquari fP; cum conversa figura circa axem conjugatum abeat. Fm f, & P in p. Quare summa vel differentia binarum FP, Fp erit eadem, ac binarum FP, fP,

Coroll. 18.

96. Si ad extrema puncta rectæ per centrum ductæ;

& ad

24 SECTIONUM CONICARUM

Et ad perimetrum utrinque terminata ducantur in Ellipsi, & Hyperbola ex eodem foco bina rectæ, earum summa in Ellipsi, differentia in Hyperbola æquabitur axi transverso.

F. 21 97. Nam in triangulis  $pCF$ ,  $PCf$ , erunt latera  $CP$ ,  
22  $Cf$  æqualia lateribus  $Cp$ ,  $CF$ , & anguli ad  $C$  ad verticem oppositi æquales. Quare &  $Pf$ ,  $pF$  æquales erunt. Cum igitur summa in Ellipsi, differentia in Hyperbola rectarum  $PF$ ,  $Pf$  æquetur axi transverso, æquabitur eidem etiam ibi summa, hinc differentia rectarum  $FP$ ,  $Fp$ .

Coroll. 19.

98. Differentia in Ellipsi, summa in Hyperbola laterum recti, & transversi ad distantiam focorum sunt in eadem ratione determinante, in qua est ea distantia ad axem transversum, & is ad distantiam directricum.

F. 19 99. Est enim ( num. 60 ) differentia in Ellipsi, summa in Hyperbola rectæ  $fP$ , & dimidii lateris secti, nimirum &  $Fu$ , ad  $fR$  in ea, ratione. Porro abeunte  $P$  in  $V$ , abit  $R$  in  $F$ , & evadit  $fR$  ipsa distantia focorum  $Ff$ , recta vero  $FP$  abit in  $FV$ . Quare in Ellipsi differentia  $fP$  ab  $Fu$  evadit differentia binarum  $fP$ ,  $PF$ , sive ( num. 92 ) totius axis transversi, a toto latere recto  $VFu$ ; at in Hyperbola cum  $fP$  contineat axem transversum, &  $PF$  ( num. 92 ), sive in eo casu axem transversum, &  $FV$ , erit summa  $fP$ , &  $Fu$  in eo casu summa axis transversi, & totius  $Vu$ .

Coroll. 20;

100. Si factò centro in altero foco  $f$  Ellipseos in fig. 23, vel Hyperbole in fig. 24, intervallo  $fE$ , vel  $fē$  equali axi transverso describatur circulus, & ex quovis puncto  $P$  perimetri Ellipseos, vel Hyperbole ducantur bina rectæ altera  $PF$  ad alterum focum  $F$ , altera  $PD$  perpendicularis peripheria ipsius circuli in Ellipsi ad partes oppositas ejus centro  $f$ , in Hyperbola versus ipsum, donec ipsi peripheria occurrat citra  $f$  in  $D$ , ut  $PD$ , vel ultra in  $d$ , ut  $pd$ , prout punctum perimetri jacuerit, ut  $P$ ; in eodem ramo

cum

Nam  $F$ ; vel in opposito, ut  $p$ , erunt semper ea recte an-  
gulares.

101. Nam peripheriæ circuli perpendiculares lineæ  
sunt radii, qui per centrum  $f$  transeunt; in Ellipsi au-  
tem hinc  $fP$ ,  $FP$  æquantur toti  $fD$  (num. 91.), adeo-  
que remanet  $FP$  æqualis  $PD$ . In Hyperbola vero  $fP$   
excedit  $FP$  per differentiam æqualem axi transverso  
(num. 92), adeoque æqualem  $fD$ . Quamobrem erit  
 $FP$  æqualis residuæ  $PD$ , & cum  $Fp$  excedat  $pf$  per a-  
xem transversum æqualem  $fd$ , eo addito, erit  $Fp$  æ-  
qualis  $pd$ .

SCHOLIUM II.

102. EST satis elegans ejus circuli analogia cum di-  
rectrice Parabolæ. In fig. 1. si ea Parabolam  
referat, distantia perpendicularis  $PD$  a directrice recti-  
linea  $AB$  æquatur distantia  $FP$  a foco  $F$ . Hic in fig. 23.  
24. distantia perpendicularis  $PD$  a peripheria circuli  
curvilinea  $AEB$  idem præstat, cum æquetur distantia  
 $FP$ , & cum ipsa directrix in Parabola directionem  
non mutet, in Ellipsi est cava versus  $F$ , in Hyperbola  
convexa.

103. Ex tam multis vero, quæ huc usque ex ipsa  
prima definitione fere sponte proflexerunt, jam hinc  
patet, quam apta sit definitio a nobis assumpta ad per-  
cipiendam Sectionum Conicarum naturam, atque indo-  
lem. Earum autem formam multo sibi evidentius o-  
culis subjiciet Tyro, si curvas ipsas hujus problema-  
tis ope delineaverit, ac, si ductum perpendet, naturam  
intelliget. Delineabit autem admodum facile hoc pacto.

104. Facto quovis angulo acuto  $GEI$ , ut in fig. 25, F. 25  
vel recto, ut in fig. 26, vel obtuso, ut in fig. 27; ac 26  
bisariam secto per rectam  $EH$ , assumatur in ea pro 27  
foco punctum  $F$  ad arbitrium, ducaturque recta  $T$ ,  
quæ cum  $Hb$  faciat angulum semirectum, quæ qui-  
dem alteri lateri anguli assumpti, ut  $EG$ , occurret  
ali-

## 26. SECTIONUM CONICARUM.

aliqui in  $L$ , alteri vero, ut  $EI$ , occurrerit in  $l$  ad eandem partes in fig. 25; erit parallela in fig. 26; occurrerit in  $l$  ad partes oppositas in fig. 27, lateri nimirum  $IE$  producto versus  $z$ : Nam ubi angulus  $GEI$  est rectus, ut in fig. 26; angulus  $HEI$  erit semirectus, & æqualis externo  $HFT$ ; adeoque  $FT$ ,  $EI$  parallela erunt; ubi vero est acutus angulus  $GEI$ ; ut in fig. 25; erit  $HEI$  semirecto minor; ubi ille obtusus; ut in fig. 27; erit hic semirecto major; ac proinde  $EI$ ,  $FT$  ibi convergent; hic vero divergent; convergentes ex parte opposita  $z$ ,  $z$ .

105. Assumptis autem in lateribus  $EI$ ;  $EG$ ; vel  $EG$  segmentis  $EN$ ,  $En$  æqualibus ipsis  $EL$ ;  $El$ , & applicata regula in  $LN$ ,  $ln$  definiatur puncta  $M$ ,  $m$  vertices axis transversi; tum assumptis pluribus  $EO$ ;  $EO$  æqualibus in ipsis lateribus anguli  $GEI$  inter puncta  $L$ ,  $n$ ; &  $N$ ,  $l$  in fig. 25, a punctis  $L$ ;  $N$  versus  $G$ ;  $I$  in fig. 26; ab ipsis versus  $Q$ ,  $I$ ; & a punctis  $l$ ,  $n$  versus partem oppositam  $g$ ,  $z$  in fig. 27; ac applicata semper regula ad puncta  $O$ ,  $Q$ , quæ rectæ  $HEH$  occurrerit in  $R$  ita, ut ob isoscelismum trianguli  $OEQ$ , & angulum ad  $E$  sectum bifariam; ipsa  $OQ$  sectur ibi bifariam; & ad angulos rectos; centro  $F$  intervallo  $RQ$ , vel  $RO$  inveniantur binæ puncta  $P$ ,  $p$  hinc inde: Pluribus demum punctis ita inventis delineati per ipsa poterit Sectio Conicæ, quæ determinatis præterea punctis  $u$ ,  $V$  per rectam ipsi  $EH$  perpendiculararem facilius quam alibi delineabitur circa puncta  $n$ ,  $V$ ,  $M$ ,  $m$  sequendo ductum rectarum  $Eu$ ,  $EV$ ,  $LN$ ,  $ln$ ; quas in iis punctis dabit curvæ coningere.

106. Porro collata hac constructione cum figuris  $g$ ,  $z$  114. & cum solutione problematis, facile patebit rem eodem redire. Recta autem  $FM$  sive  $LM$  erit minor, vel æqualis; vel major respectu  $ME$ ; prout angulus  $LEM$  fuerit semirecto minor; æqualis; vel major; nimirum prout totus  $GEI$  fuerit acutus, rectus, vel obtusus; ac proinde in primo casu obveniet Ellipsis; in secundo Parabola, in tertio Hyperbola,

Quod

107. Quod si maneat angulo mutaverit distantiam  
 a vertice anguli E, percipiet simul manere peris-  
 tome figuram, & mutari solam magnitudinem,  
 & quidem si hinc ejusmodi figuras descriperit, & ob-  
 servaverit semper rectas EQ, EQ in eadem ratione ut  
 obliqua ad rectas EN, EL, facile percipiet, majores  
 perisolas omnes; & omnia semper obvenire utrobique  
 indistincta; et mutato angulo GEL, statim forma ipsa cur-  
 ve mutabitur, ita, ut manentibus punctis P, M, &  
 procedente E ad M is accedat ad rectum; Ellipsis ob-  
 longatur per omnes magnitudinum gradus, donec, eva-  
 dente recto, desinat in Parabolam; vertice hinc ita in-  
 finitum recedente; ut nusquam jam sit, ac eodem fa-  
 cto obtuso mirabitur Parabolam in Hyperbolam; Vertice  
 hinc regredietur ex infinito ex parte opposita, ad hinc  
 Hyperbolam rami erunt quodammodo veluti quadam El-  
 lipso jam plusquam infinita, dimidia opposita ora  
 recedentia; Inde autem patebit & affinitas quadam El-  
 lipso in immensum oblongata cum Parabola; qua fit,  
 ut in Astrologia motus Cometarum in Ellipsis ma-  
 xime oblongis habeantur pro Parabolicis, sine ullo er-  
 rore notabili in eo arcu, qui est proximus foco, &  
 vertici nobis conspicuo.

108. Quoniam vero ab angulo LEM patet ratio  
 LM ad ME; sive ratio illa determinans FM ad ME,  
 & ille ab hac; patet omnes Parabolam fore inter se si-  
 milis; cum in iis angulus sit semper rectus; Ellipses  
 vero fore inter se similes, & Hyperbolas inter se, si  
 ratio determinans fuerit eadem. Nimirum si in fig. 9. P.  
 10; 11, maneat ratio determinans, & mutetur usque  
 que distantia FE a directrice, recte omnes FP in ead-  
 em angulo inclinamur ad ipsam EE; sive ad axem trans-  
 versum ex eadem parte verticis M, mutabuntur in ead-  
 em ratione. Si tamen sint binæ ejusmodi Sectiones Co-  
 nicae, erit in utraque FP ad PD sive RE in eadem ra-  
 tione, ob eandem rationem determinantem, & PF ad  
 RE ob æquales angulos in triangulis FRP, adeoque &  
 FP ad FE summam vel differentiam ER, RE, prout  
 R. ca-

### 28 SECTIONUM CONICARUM.

R cadat intra FE, vel extra; In eadem ratione erit, & proinde etiam FP in una ad FP in altera constanter, ut FE in illa ad FE in hac. Quin imo cum ratio CF ad CM in Ellipsi, & Hyperbola sit eadem, ac ratio determinans (num. 90): ea manente, manebit eadem ratio quadrati CM ad quadratum CF, adeoque & ad eorum differentiam, nimirum ad quadratum semi-axium conjugati, (num. 64) & viceversa. Quare si in pluribus Ellipsis, vel Hyperbolis fuerit eadem ratio semi-axium, vel axium, adeoque & ratio lateris recti principalis ad transversum, illæ erunt inter se similes; dissimiles, si diversa.

109. Quod si rectæ Ii, Gg manentibus punctis F, L, M, N in fig. 25. evadant parallelæ, & punctum E, ac directrix nusquam jam sit, Ellipsis mutatur in circulum, coeuntibus foco f, & centro C cum F, ac F. 28 fig. 25 abit in fig. 28, in qua cum RQ sit semper æqualis eidem FV, vel MN, punctum P est semper ad circulum descriptum radio eodem FV, ac centro F. Quamobrem circulus quidem est quædam velut Ellipsis, cujus foci coeant, sed ejus directrix ita in infinitum recedit, ut nusquam jam sit, & ejus ratio determinans ita in infinitum decrescit, ut penitus evanescat, & sit prorsus nulla; adeoque definitio a nobis assumpta ipsi revera in Geometrica saltem, ac reali consideratione aptari non possit, ut in Scholio 1. post ipsam Definitionem 1. innuimus.

110. Atque hoc quidem pacto Conicæ Sectiones in se invicem transformantur, vel in circulum. Possunt autem & ad rectas lineas, & ad punctum ita accedere, ut demum in eas desinant. Nam si potius manente foco F, (fig. 9. 10. 11.) & directrice, adeoque puncto E, minuatur in casu Ellipseos ratio determinans in infinitum, & penitus evanescat, accedentibus in infinitum punctis V, \* ad F, ac recedentibus demum in ipsum; latera IEi, GEg accederent ad axem EFH in infinitum, & in ipsum reciderent, ac interea tota Ellipsis contraheretur versus focum F, & in ipsum unicum pun-



punctum desereret. Si vero in casu Hyperbolæ ratio cresceret in immensum, & conciperetur jam omnes finitaram magnitudinum limites transgredi, recedentibus punctis  $n$ ,  $V$  in infinitum ita, ut nusquam jam sint; ultra ipsa  $IEz$ ,  $GEg$  accederent ad directricem consuetam positionibus  $AEB$ ,  $BEA$ , ac demum in ipsam reciderent, utroque Hyperbolæ ramo interea se expandens, ac verticibus  $M$ ,  $m$  accedentibus ad ejus punctum  $E$  ita, ut demum in ipsum reciderent, & abeuntibus ramis ipsis in directricem. Si demum manente directrice, & ratione determinante, focus  $F$  ita accedat ad directricem, ut demum in eam incidat in  $E$ ; patet ex numer. 16., Ellipsim quidem debere abire in ipsum unicum punctum  $E$ , Parabolam in rectam axi perpendicularem  $EFH$ , Hyperbolam in binas rectas ita inclinatas directrici, ut radius ad sinum inclinationis sit in ratione determinante. Nam si contra focus  $F$  recedat ultra quoscunque limites ita, ut nusquam jam sit, secum auferet & rectam  $Tz$ , & axium vertices, & totas curvas in infinitum, quo demum obrutæ nusquam jam erunt. Proderit autem plurimum hæc transformationes locorum Geometricorum contemplari, quibus vis quedam, atque admirabilis Geometriæ indoles intimius aliquanto perspicitur.

SCHOLIUM III.

III. **Q**Uoniam de Sectionum Conicarum similitudine mentio injecta est superiore Scholio, non est abs re pauca quedam de figurarum similitudine hic demonstrare, futura usui tum in Sectionibus Conicis, tum in omni late Geometria. *Sint in fig. 29, 30, 31*  $EF$  *bina recte data*  $FG$ ,  $fg$ , *& ad binas figuras cujuscum-* 30 *que forme*  $FADB$ ,  $fadb$  *ductis utrunque*  $FE$ ,  $fe$ , *que fa-* 31 *ciant angulos*  $GFE$ ,  $gfe$  *semper aequales, & vel semper* *ad eandem plagas, ut exhibent fig. 29, ac 30, vel ad* *oppositas, ut 29, ac 31, sit autem semper*  $FE$  *ad*  $fe$  *in*  $D$  *data*

### 30 SECTIONUM CONICARUM

data ratione; ejusmodi figuras dico Similes, in prima casu Ditecte, in secundo Contrarie, & rectas illas FE, sc Latera Homologa, eas autem ipsas, vel quasvis alias facientes cum iis, vel cum FG;  $\text{fg}$  angulos æquales ad easdem pariter plagas; vel ad oppositas; dico rectas Positione Homologas; que si assumantur pariter in illa constanti ratione; easdem dico pariter Latera Homologa; vel rectas etiam Magnitudine Homologas; puncta vero illa F, f dico itidem Homologa.

112. Si ductis utriusque FC, sc magnitudine & positione homologis, factis nimirum angulis GFC; gfc æqualibus; & captis FC, sc in illa constanti ratione; erunt & C, c puncta homologa, ac rectæ CE; ce pariter in iisdem angulis ductæ ad ipsas CF; cf incurrant in puncta homologa E, e, & erunt in eadem illa ratione constanti, nimirum erunt & positione, & magnitudine homologa.

113. Ductis enim FE, se in angulis æqualibus ad FG; fg, adeoque & ad FC, fc, tum EC, ec, erunt in triangulis FEC, fec tam angulis ad F; f æquales, quam latera FE, FC proportionalia lateribus se; fe; adeoque ipsa triangula similia; & anguli FEC, fec æquales, ac latera CE, ce in eadem illa ratione. Quamobrem rectæ ex C, c in æqualibus angulis ductæ ad CF cf congruet cum ipsis CE, ce, & incident in illa puncta homologa.

114. Patet, illa ipsa puncta E, e fore homologa, cum & FE, se inclinentur ad FG, fg in angulis æqualibus, & sint in illa constanti ratione: ac datis in singulis figuris singulis punctis homologis, cum rectis per ea transeuntibus, & positione homologis, ac ratione illa constanti posse inveniri infinita alia numerq; puncta homologa, & rectas, quæ bina puncta homologa binarum figurarum conjungunt, fore pariter homologas & positione, & magnitudine, ac facile colligitur binas rectas, quæ bina puncta conjungunt in una, ad aliam, quæ in ea conjungunt alia bina quævis,

debeant inclinari in eodem angulo, in quo in altera inclinantur rectæ jungentes puncta iis homologa: ac triangula ad ternâ quævis homologa puncta terminata fore similia.

115. Si altera e figuris similibus habuerit rectam aliquam pro perimetro, habebit & altera rectam ipsi & positione, & magnitudine homologam, ac si binæ ejusmodi rectæ concurrant in singulis figuris angulos æquales constituent.

116. Sit enim ejusmodi recta EB in prima e figuris (29); & ductis FE, FB, & ad quodvis ejus punctum I recta FI; ducantur in secunda (30, vel 31) rectæ fa, fb homologæ ipsis FE, FB tum positione tum magnitudine; eruntque puncta e, b in perimetro secundæ figuræ, ac homologa ipsis E, B; adeoque ducta eb erit & positione; & magnitudine homologa EB; ac angulus feb æqualis angulo FEB. Facto igitur angulo efi æquali EFI versus b; donec recta fi occurrat rectæ eb in i; erunt similia triangula EFI, efi adeoque & FI ad fi in eâ ratione constanti; adeoque & punctum i erit in perimetro secundæ figuræ; ac homologum I. Quare secundâ figurâ habebit pro perimetro rectam eb, & si prima habuerit plures rectas; secundâ habebit totidem iis homologas; & in iisdem angulis ad se invicem inclinatas.

117. Si prima figurâ habuerit perimetri partem aliquam curvilineam, habebit & secunda, ac chorda per bina singularum puncta homologa ducta, cum rectis quibusvis homologis continebunt angulos æquales, eruntque & positione; & magnitudine homologæ; ac tangentibus indefinita per puncta homologa ducta erunt positione homologæ; ipsi vero arcus punctis homologis terminari erunt in eadem illa ratione constanti, quos proinde itidem Homologos dico; area vero quæcunque clausa lineis homologis sive rectis, sive curvis erunt in ratione duplicata laterum homologorum.

118. Cum enim singulis lateribus rectis alterius figuræ, debeant respondere latera recta alterius, non

32 SECTIONUM CONICARUM

potest latus curvilineum non respondere lateri curvilineo, quod nimirum si non curvilineum sed rectilineum esset, illi in altera pariter rectilineum responderet. Porro puncta in illis homologa erunt ea, in quæ incident rectæ homologæ a quibusvis singulis singularum homologis punctis ductæ, & iccirco chordæ, quæ jungent homologa ejusmodi puncta, & ipsæ homologæ erunt & positione, & magnitudine, quæ iccirco ad rectas quascunque homologas habebunt inclinationem eandem. Si ejusmodi chordæ sint DE, de, quæ indefinite producantur in M, N; m, n, erunt ipsæ MN, mn positione homologæ, & cum homologis rectis eisdem continebunt angulos. Cocurrentibus vero punctis D, E; d, e, secantes MN, mn evadunt tangentes, quæ iccirco remanent positione homologæ, & cum homologis eisdem continent angulos. Porro cum arcibus in plures, ac plures particulas sectis in infinitum, chordæ semper homologæ sint & positione, & magnitudine, ac earum summe ad arcuum ipsorum magnitudinem accedant in infinitum, arcus ipsi erunt in ea ratione constanti. Si autem a quibusvis perimetri angulis, vel ab extremis chordarum homologarum utcumque parvarum punctis, ad bina puncta homologa assumpta singula in singulis figuris ducantur rectæ, triangula illa omnia jungent terna puncta homologa, adeoque similia erunt, & areas habebunt in ratione duplicata laterum homologorum. Quare omnes homologæ areæ figurarum similium sive rectilineæ sint, sive curvilineæ, ad quas areæ chordarum in infinitum accedunt, erunt in ratione duplicata laterum homologorum.

F. 32 119. Si ex quadam puncto F in fig. 22, 33 ad quævis puncta E figura AEB ductis rectis FE, capiantur in iis semper Fc ad FE in ratione data, vel versus E, ut in fig. 32, vel ad partes oppositas, ut in fig. 33, punctum c describet perimetrum figura acb directæ similis figura AEB, binis punctis homologis cocurrentibus in

in  $F$ , quod erit utrique commune, & puncta  $E$ , e erunt homologa, ut & recta  $FE$ ,  $Fc$ ; ac in iis quavis recta homologa erunt inter se parallela, quavis puncta homologa jaceant in directum cum puncto communi  $F$ , & si fuerint curvæ perimetri, tangentes ductæ per puncta homologa, sive per puncta, in quibus perimetro occurrunt ad easdem partes, vel ad oppositas recta ducta per  $F$  erunt parallela.

120. Patet, cum ducta per  $F$  quavis indefinita  $FG$ , & in ea assumpto  $g$  ad easdem partes in fig. 32, ad oppositas in fig. 33, semper  $GFE$ ,  $gFe$  debeat esse ibi idem angulus, hic æqualis ad verticem oppositus, & ratio  $FE$  ad  $Fc$  ponatur constans. Rectæ vero quavis homologæ ad quamvis rectam per  $F$  transeuntem debent ita esse inclinari, ut parallelismum servent. Ex puncto  $F$  ad quodvis punctum primæ figuræ ducta recta, assumenda erit in ea ipsa ad easdem partes, vel ad oppositas recta ipsi homologa, quæ punctum homologum definiat, ac tangentes per puncta homologa  $E$ , e ductæ debent cum recta  $Ee$  homologa continere angulos æquales ita, ut servent parallelismum.

121. Si autem figura sint directæ similes, & bina puncta homologa coeant, ac congruat directio unius recte cum recta homologa, vel ad easdem partes, vel producta ad partes oppositas, recta omnes ex eo communi puncto ductæ usque ad perimetrum ad easdem pariter, vel ad oppositas partes erunt in data ratione, & homologæ, ac habebuntur ea omnia, quæ superiore numero dicta sunt.

122. Nam si punctum  $F$  sit commune, & congruant binæ quavis rectæ homologæ  $FG$ ,  $Fg$  utrovis modo, ducta quavis  $FE$ , quæ occurrat perimetro secundæ figuræ in  $e$ , erit angulus  $GFE$  idem ac  $gFe$  in fig. 32, æqualis ad verticem oppositus in fig. 33, adeoque  $FE$ ,  $fe$  debent esse rectæ homologæ, & in illa ratione constanti.

123. Sed jam redeundum ad ipsas Sectiones Conicas,

34 SECTIONUM CONICARUM  
 quarum elegantem constructionem per motum continuu-  
 num opè filorum videbimus sequenti Scholio.

SCHOLIUM IV.

124. **E**X proprietate, quam num. 93. demonstravi-  
 mus, facile eruitur methodus describendi El-  
 lipsim, & Hyperbolem motu continuo opè filorum qua-  
 quidem passim utuntur fabri lignarii, & murarii pro  
 Ellipsi. *Assumpto filo, cujus longitudo æquetur axi fu-  
 tura Ellipseos, ejus extrema capita designantur punctis*  
 F. 19 *focorum F, f in fig. 19, tam stylo P filum circumducit-*  
*ur ita, ut semper extensum maneat, & excurrat, ac*  
*Ellipsis describitur, cum nimirum binæ FP, fP simul*  
*semper æquantur, eidem longitudini filii. Et vero et-*  
*iam datis binis Ellipseos axibus Mm, Xx, sive lon-*  
*gitudine & latitudine Ellipseos quesita, foci F, f aut-*  
*modum facile inveniuntur, duplicato nimirum filo, ac*  
*medio ejus puncto, sive ipso flexu superposito alteri ver-*  
*tici x axis conjugati, diducantur bina capita, donec ad*  
*axem transversum deveniant, extenso filo in F, & f.*  
 Patet enim eos fore focos, & Ellipsim transituram per  
 x, vel geometricè factò centro in altero vertice x axis  
 conjugati intervallo CM semiaxis transversæ, inveni-  
 tur in ipso axè transversò foci F, f; cum nimirum  
 (num. 64. debeat esse quadratum CF differentia qua-  
 dratorum Cx, CM, nimirum bina quadrata Cx, CF  
 quæ æquantur quadrato xF, debeant æquari quadrato  
 CM, adeoque ipsa xF semiaxi CM.

125. *At si bina fila ita jungantur, ut alterius ca-*  
*put tantum excurrat ultra caput alterius, quanta est lon-*  
*gitudo axis transversæ quasiæ Hyperbola, & ea capita*  
 F. 20 *designantur foci F, f, tam stylo P simul evolvantur il-*  
*la bina fila, ut extensa maneat, & æquales utrius-*  
*que partes in illa divaricatione, & explanatione extru-*  
*ant ex ipso stylo, describetur ramus Hyperbola circ-*  
*eum focam, cui filum brevius infixum fuerat. Semper*  
 enim

enim differentia florum FP, FP manebit, eadem, que fuerat initio. Tum permutatis capitibus, describetur etiam alter ramus. Foci autem F, f datis axibus inveniantur in axe transverso centro C intervallo Ma, cum nimirum (num. 64) quadratum CF, vel Cf in Hyperbola æquetur summe quadratorum semiaxium CM, Ca, adeoque ipsa CF, vel Cf ipsi Ma.

126. Parabola autem hoc pacto describi poterit ope filii. Sit regula AB in fig. 34. qua collocetur lace directricis, ac ipsi applicetur norma HDL ita, ut alterum ejus lateris DL cœquatur per ipsam regulam alteri lateri DH affigatur in H caput alterum filii, HPE, cujus longitudo æquetur lateri ipsi, alterum vero caput affigatur in F focus Parabole describende, & dum norma movetur, detineatur sepe mobili P filium ipsum partim applicatum regule in HP, partim distentum in FP. Patet fore semper PE æqualem PD, adeoque punctum P ad Parabolam foco E, directrice AB. Descripto autem arcu dimidio MP, poterit conversione normæ alter arcus Mg describi ex parte opposita.

SCHOLIUM V.

127. Constructione problematis primi determinatus est concursus rectarum directrici parallelarum, & axi perpendicularium cum Sectionis Conicæ peripetro. Sequenti vero problemate determinabimus concursum rectæ cujuscvis per focum ductæ, ac ejus quoque constructio harum curvarum formam proponet in oculos.

PROPOSITIO II. PROBL.

128. Datis directrice, foco, & ratione determinante invenire concursum rectæ datæ transverso per focum cum Sectionis Conicæ peripetro.

129. Sit primo recta data per focum transiens parallela

### 36 SECTIONUM CONICARUM

F. 35 *tallela directrici. Demisso in ipsam directricem in fig.*  
 36 35, 36 perpendicularo FE, capiuntur, in ea recta data  
 FV, Fv ad ipsam FE in ratione determinante, & 36  
 (num. 48) ejus concursus cum perimetro Sectionis Con-  
 icæ, erunt puncta u, V.

130. Si autem sit alia quavis non parallela, ea di-  
 etrici occurret in aliquo puncto Q. Capiantur in ipsa  
 directrice QG, Qg æquales ipsi QF, posito puncto G  
 ad eam plagam respectu Q, ad quam jacet F respectu  
 V. Ductisque GV, gV, earum occurfus, si qui erunt,  
 cum recta data QF, productis & ipsis, & QF utraque  
 ex parte, quantum opus fuerit, erunt quæsitæ con-  
 cursus cum Sectionis Conicæ perimetro, eruntque il-  
 li.

131. Nam ducta PD perpendiculari ad directricem,  
 similia erunt triangula FPV, QPG, QFE, QPD, &  
 adeoque erit FP, ad FV, ut QP, ad QG, sive ad QF,  
 nimirum ut PD ad FE; adeoque alternando FP ad  
 PD, ut FV ad FE in ratione determinante, & eadem  
 est demonstratio pro puncto p, substitutis p, g, d pro  
 P, G, D. Contra vero si punctum P fuerit ad Sectio-  
 nem Conicam, & ducatur per V, ac P recta occur-  
 rens directrici in G, erit FP ad PD, ut FV ad FE in  
 ratione determinante, & PD ad PQ, ut FE ad FQ,  
 ob FE, PD parallelas, adeoque ex æqualitate ordinata  
 FP ad PQ, ut FV ad FQ. Est autem FP ad PQ, ut  
 FV ad GQ ob ipsarum FV, GQ parallelismum: Ergo  
 erit GQ æqualis FQ. Quare punctum, quod ad Co-  
 nicam Sectionem sit, determinari omnino debet assum-  
 pta QG, vel Qg æquali QF, & ducta GV, vel gV;  
 adeoque puncta inventa ea constructione sunt ad ipsam  
 Sectionem Conicam, & sunt ea sola. Q. E. D.

#### Coroll. 1.

132. *Quævis recta per focum ducta occurrat Ellipsi in*  
*binis punctis hinc inde a foco: quævis pariter oc-*  
*curret Parabola hinc inde a foco, præter unicam di-*  
*rectrici perpendiculararem, cujus altera intersectio a di-*

rectri



Directrix remotior ita in infinitum recedit, ut nusquam jam sit. In Hyperbola autem quævis occurrit semel inter focus, & directricem; alter vero occursus in infinitum ita recedit, ut nusquam jam sit in binis rectis hinc inde directrici inclinatis in angulo, quem nunc 10. diximus angulum æqualitatis, in reliquis inclinatis in angulo minore habetur extra directricem ultra focum, in inclinatis in angulo majore ultra directricem.

133. Nam rectæ quidem QF, GV se decussantes, necessario semper sibi occurrent alicubi in P inter focum; & directricem: rectæ vero QF, GV vel erunt parallele, puncto p ita in infinitum abeunte, ut nusquam jam sit, vel convergent ad partes FV, ut in fig. 35, vel ad partes QG, ut in fig. 36, prout QG si sive QF fuerit æqualis, major vel minor respectu FV. Porro in Ellipsi in qua FE est major, quam FV, semper FQ, quæ vel congruit cum FE, vel est ipsa major, erit eque major, vel multo magis major quam ipsa FV, adeoque punctum p semper habebitur, ut in fig. 35, circa directricem ad partes oppositas P respectu F. In Parabola, in qua FE æquatur FV, si FQ congruat cum FE, nimirum sit perpendicularis directrici, erit equalis ipsi FV, & punctum p ita in infinitum recedet, ut nusquam jam sit. In reliquis vero positionibus omnibus erit FQ major, quam FE, adeoque major, quam FV, & punctum p habebitur, ut in Ellipsi. In Hyperbola vero, in qua FE est minor quam FV, si angulus FQE fuerit ejusmodi, ut radius ad ejus solum habeat rationem determinantem, quam nimirum habet FV ad FE, ipsa FQ habebit ad FE rationem eandem, adeoque æquabitur ipsi FV, & punctum p ita in infinitum recedet, ut nusquam jam sit. Si autem is angulus fuerit minor, erit FQ major, quam FV & habebitur casus figure 35, ut in Ellipsi, & Parabola; si autem is angulus fuerit major, erit Q minor, quam VF, & concursus p abibit, ut in fig. 36, extra directricem.

## SECTIONUM CONICARUM

F.37 134. Si recta Pp per focum F ducta in fig. 37, 38,  
 38 39, 40, & occurrat directrici in Q, sectioni Conica  
 39 in P, p secetur bifariam in R, erunt RF, RP, RQ  
 40 continue proportionales in ratione, quam habet foci ra-  
 dius ad ordinatam directrici in ea angulo FOE, & si  
 recta ipsi FQ perpendicularis ducta a foco F occurrat di-  
 rectrici in I, recta per I, & R ducta; erit in Parabola  
 perpendicularis directrici, in Ellipsi, & Hyperbola non  
 eorum transit.

135. Primum patet ex num. 22. Cum enim puncta  
 P, F, P, Q constituent proportionem harmonicam  
 ( num. 8. ), & Pp secetur bifariam in R, erunt RF,  
 RP, RQ in continua ratione FR ad PQ. Secundum  
 sic demonstratur.

136. Ducta praeterea PD perpendiculari directrici, &  
 FH eidem parallela, quae occurrat rectae IR productae,  
 si opus sit, in H, erit RF ad RQ, nimirum HF ad  
 IQ in duplicata ratione FP ad PQ, nimirum ut il-  
 lius quadratum ad hujus quadratum. Est autem ob an-  
 gulos IFQ, IEF rectos, & angulum ad I communem  
 triangulis FIQ, EIF, recta IQ ad IF, ut IF ad IE,  
 adeoque QI ad IE, ut quadratum QI ad quadratum FI,  
 sive ob similia triangula reetangula QEI, QDP, ut  
 quadratum QP ad quadratum PD; Erit igitur ex ae-  
 qualitate ordinata FH ad IE ut quadratum FP ad qua-  
 dratum PD, nimirum in ratione determinante dupli-  
 cata.

137. Porro ea ratio in Parabola est ratio aequalita-  
 tis adeoque in fig. 38 aequantur FH, IE; & proinde  
 FH parallela est rectae EF, & directrici perpendicularis.  
 At in Ellipsi in fig. 37, & in Hyperbola in fig. 39,  
 40, est ( num. 90 ) ad CF ad CM, & CM ad CE  
 in ratione determinante, adeoque CF ad CE in eadem  
 ratione duplicata. Erit igitur in utraque FH ad EI, ut  
 CF ad CE, ac proinde ductis CH, CI, triangula  
 CFH, CEI similia erunt ( Coroll. 2. prop. 12. Geom. )  
 & angulus FCH, ECI aequalibus, puncta I, H, C in  
 directum jacent.

S C H O L I U M.

138. **H**ÆC quidem constructio minus fecunda est, quam constructio primi problematis, adhuc minus & expedita est, & formam Conicarum Sectionum, ac earum discrimen proponit ob oculos; cum nimirum ex coroll. 1. statim pateat Ellipsim quidem redire in Orbem circa focum, Parabolam habere unquam tantum circa directricem protensam in infinitum, Hyperbolam vero binos ejusmodi ramos hinc inde, a directrice. Secundi autem Corollarii summus in præcipua quadam Sectionum Conicarum proprietate demonstranda usus erit paullo infra.

139. Satis autem facile perspicitur & illud, rectam F. 35 quoque per G, &  $\mu$  ductam debere transire per p, & 36 rectam ductam per g, & V debere transire per p, adeoque vel alteram e punctis V,  $\mu$  cum utroque G, g, vel alteram e punctis G, g cum utroque V,  $\mu$  problemati solvendo satisfacere.

PROPOSITIO III. PROBL.

140. **D**atis foco, directrici, & ratione determinante, invenire concursum rectæ datæ cum Sectione Conicæ.

141. Si recta data sit directrici parallela, solvetur problema per constructionem problematis 1 (n. 34, 36), F. 41 si transeat per focum solvetur per constructionem problematis 2 (num. 128). Si sit quævis alia KH, quæ directrici necessario alicubi occurret in H, con-  
tingit problema hoc pacto, 43

142. In figuris 41, 42, 43, 44, 45, quarum prima ad Ellipsim pertinet, secunda ad Parabolam, reliquæ ad Hyperbolam pro casibus, in quibus occurrat recta data soli ramo citeriori, vel solius ulteriori, vel utriusque, Assumpto puncto L ubivis extra directricem demissoque in ipsa directricem perpendiculo LG, ac in eo, si opus sit, produ-  
cto

## 40 SECTIONUM CONICARUM.

Et capta  $LS$ , quæ sit ad ipsum in ratione determinante, centro  $L$ , radio  $LS$  describatur circulus, ductaque  $LO$  parallela rectæ datæ  $KH$ , donec occurrat directrici in  $O$ , tum conjunctis punctis  $H, F$ , ducatur per  $O$  recta  $zOZ$  ipsi  $HF$  parallela posito in eâ puncto  $Z$  ad eandem directricis partem cum centro  $L$ , puncto vero  $z$  ad partem oppositam; & si ipsa  $OZ$  producta utraque ex parte indefinite alicubi occurrat circulo in  $T$  vel  $t$ , ducta  $LT$  vel  $Lt$ , ac ex  $F$  recta ipsi parallela, hujus concursus cum  $HK$  in  $P$  vel  $p$  determinabit punctum quæsitum, nec in aliis punctis præter hoc modo inventâ recta data potest datæ Sectioni Conicæ occurrere.

143. Ducta enim  $PD$ , vel  $pd$  perpendiculari ad directricem, ob rectas  $LO, GL$  parallelas rectis  $PH, DP$ , similia erunt triangula  $LGO, PDH$ ; & ob rectas  $LO, OT, TL$  parallelas rectis  $PH, HF, FP$ , similia  $LTO, PFH$ ; quare  $FP$  ad  $PH$ , ut  $LT$  ad  $LO$ , &  $PH$  ad  $PD$ , ut  $LO$  ad  $LG$ ; adeoque & ex æqualitate ordinata  $FP$  ad  $PD$ , ut  $LT$ , sive  $LS$  ad  $LG$ , nimirum in ratione determinante, adeoque punctum  $P$  est ad datam Sectionem Conicam, & eadem est demonstratio pro puncto  $p$ .

144. Contra vero si quoddam punctum  $P$  sit ad Sectionem Conicam datam, & manentibus cæteris ducatur  $LT$  parallela  $FP$ , donec occurrat rectæ  $OZ$  alicubi in  $T$ , erit  $LT$  ad  $LO$  ut  $FP$  ad  $PH$ , &  $LO$  ad  $LG$  ut  $PH$  ad  $PD$ , adeoque  $LT$  ad  $LG$  ut  $FP$  ad  $PD$  in ratione determinante, in qua cum sit  $LS$  ad  $LG$ , erit  $LT$  æqualis  $LS$ , adeoque punctum  $T$  ad circulum. Quare punctum quodvis, in quo recta  $HK$  occurrat Sectioni Conicæ, debet inveniri exposita constructione per concursum rectæ  $zOZ$  cum circulo, & sola puncta eo pacto inventa sunt ad Sectionem Conicam datam: Q. E. D.

## S C H O L I U M.

145. **M**irum sane quam foecunda est hæc constructio, quam Tyroni exercendo apta. Plurima quidem ex ea inferri possunt theoremata, & pleraque utilissima ac iterum foecunda: curabimus autem quantum fieri poterit, ne tanta rerum copia confusio nem pariat. Interea notandum illud; posse punctum assumi etiam ultra directricem, quamquam nos in hisce schematis ipsum semper citra directricem assumimus. Deinde posse ipsum assumi diversis locis, quæ multo faciliorem constructionem exhiberent, sed minus generalem, & generalibus theorematibus eruendis minus aptam. Potissimi casus, in quibus constructio contrahitur, sunt ii, in quibus assumatur punctum  $L$  in ipsa perimetro Sectionis Conicæ, nimirum in aliquo puncto  $P$  jam invento, quo casu radius circuli esset ipsa recta  $PF$ , quæ ad perpendicularum  $PD$  rationem habet determinantem; vel assumatur in foco ipso  $F$ , quo casu radius circuli esset dimidium latus rectum; sive in fig. 9, 10, 11  $FV$ , cum nimirum sit  $FV$ , ad perpendicularum  $FE$  pariter in ratione determinante, vel pro Ellipsi, & Hyperbola in centro, quo casu in fig. 19, 20 radius circuli esset semiaxis transversus  $CM$ , ad perpendicularum  $CE$  habet pariter rationem determinantem, vel pro quavis Sectione Conicæ in ipsa recta data, quo casu hic punctum  $Q$  congrueret cum puncto  $H$ , puncto nimirum  $L$  jam in ipsa  $KH$ . Poterit Tyro constructionem hanc generalem ad hosce casus particulares contrahere ac notare quo pacto mutata positione, vel directione rectæ datæ, possint erui plures satis diversæ & elegantæ constructiones, quibus omnia quæsitæ Sectionis Conicæ puncta inveniantur.

146. Et quidem ipsa constructione nostra generali partem inveniri puncta omnia, si nimirum manente directio-

## SECTIONUM CONICARUM

De rectæ datæ mutetur ejus positio; nimirum si manente angulo ad H excurrat punctum H per totam ductricem; vel si per datum punctum quodvis; ut per curvæ; vel in Ellipti & Hyperbola per centrum conicæ; vel per rectæ. In iis omnibus positionibus rectæ in parallelo delatæ; vel per datum punctum conversæ; habebantur omnia Sectionis Conicæ puncta; & eorum discrimen facile detegerunt; atque hanc ipsam ferimus nobis viam in eruendis iis; quæ tam multa se ipsæ offerunt.

147. Interea quod ad ipsam constructionem pertinet notetur illud. *Si recta data directrici parallela sit, per puncta H, O ita in infinitum abeunt, ut nusquam finiantur; ac si ea recta transeat per focum F; congruentibus HK; HF, congruant etiam OZ, OL; & LT; Lt autem in has; FP, Fp in illas; adeoque in utroque hoc casu. In generali hac constructione deserimur. Posset etiam ex ipsa pro utroque casu peculiaris constructio derivari; sed utrique casui consulimus est in Prop. 1. & 2. Proinde iis omissis; eruemus hic primo locum generalia theorematâ, quæ fluunt e motu parallelo datæ rectæ eandem semper inclinationem retinentis ad ductricem.*

148. Ac primo quidem Corollariis plurimâ simul conjungemus nimis inter se analogâ, quæ proveniunt e unico casu Ellipseos; in quo recta data quamcumque positionem habeat; & e binis Parabolæ, in quorum primo ea sit directrici utcumque obliquâ; in secundo perpendicularis; ac demum e ternis Hyperbolæ, in quarum primo recta datâ faciat cum directricæ angulum minorem angulo æqualitatis; in secundo æqualem; in tertio majorem.

### Coroll. i.

149. *E rectis omnibus datæ rectæ parallelis binæ per Ellipsim contingunt singula in singulis punctis; reliquæ omnes, quæ iis interjacent eam secant in binis singulis punctis, quæ extra illas cadunt, ipsi nusquam occurrunt; In Parabola unica contingit in unico puncto, liquet*

quæ omnes bis secant, vel ipsi nusquam occurrunt, præ-  
 jacente a tangente versus focum, vel ad partes opposi-  
 tas præter casum, quod recta data sit directrici perpendi-  
 cularis; quo casu nulla tangit; secant vero omnes in  
 punctis singulis, altera intersectione ita in infi-  
 nitum abeunte; ut nusquam jam sit. In Hyperbola se-  
 canda datur efficiat cum directricè angulum minorem un-  
 gulis æqualitatis; bine contingunt singulos ramos in sin-  
 gulis punctis, reliquæ vero nusquam occurrunt, vel extra  
 unum ramum in binis punctis secant; prout ita tangente  
 prætercasu; vel extra eas vadunt. Si recta data  
 prætercasu angulum æqualitatis; unica ex omnibus hy-  
 perbolicis nusquam Hyperbola occurrit; sed binos ra-  
 mos reliquit hinc inde; licet ad eos accedat magis,  
 tamen pro quavis data distantia necunquæ parum; atque  
 prætercasu dicitur Asymptotus; reliquæ omnes secant in sin-  
 gulis punctis singulæ ramos anteriorem; vel posteriorem;  
 prætercasu facerint hinc inde ab ipsa asymptoto; altera ea-  
 rum intersectione ita in infinitum abeunte; ut nusquam  
 sit. Si denum angulus inclinationis sit angulo  
 æqualitatis major; omnes rectæ secant bis Hyperbo-  
 las; singulos nimirum ramos quolibet in punctis sin-  
 gulis.

350. Horum omnium demonstratio sponte fuit rite F. 141  
 prætercasu positionibus omnibus circuli respectu directri-  
 cæ & rectarum LO; OZ positione respectu circuli. 42  
 primo quidem in Ellipsi, in qua ratio determinatis 43  
 ratio minoris inæqualitatis; erit LS minor, quam 44  
 ut in fig. 41; in Parabola æqualis; coeuntibus 45  
 prætercasu punctis G; S, ut in fig. 42; in Hyperbola ma-  
 jore; ut in fig. 43; 44; 45. Quare circulus in El-  
 lipsi ad directricem non pertinget; in parabola eam  
 attinget in eo puncto, in quo coeunt G; S, in Hy-  
 perbola ultra eam transcutet, quam proinde secabit  
 in binis punctis N, n, ad quæ ductæ LN, Ln incli-  
 nantur ad ipsam directricem in angulo æqualitatis;  
 nimirum sit radius ad sinum anguli LNG, vel  
 EN, vel Ln ad LG; nimirum in ratione  
 terminante.

#### 44. SECTIONUM CONICARUM

151. Præterea si recta  $zOZ$  circulo occurrat in binis punctis  $T, t$ , patet rectam  $KH$  debere Sectioni Conicæ occurrere pariter in binis punctis, dempto casu, quo  $LT$ , vel  $Lt$  congruat cum directione rectæ  $OL$ , recta vero  $KH$  non transeat per focus  $F$ , quo nimirum casu recta  $FP$ , vel  $Fp$  evadit parallela rectæ  $KH$ , puncto  $P$  vel  $p$ , in quo deberent concurrere ad determinandum Sectionis Conicæ punctum, ita in infinitum abeunte, ut nusquam jam sit. Quod si recta  $zOZ$  circulo nusquam occurrat, recta quoque  $KH$  nusquam occurreret Sectioni Conicæ. Facile autem colligitur & illud; punctum  $P$  vel  $p$  debere jacere citra vel ultra directricem, prout punctum  $T$ , vel  $t$  jacuerit ad easdem partes directricis cum centro  $L$ , vel ad oppositas, cum in figuris prorsus similibus  $FHD P$ ,  $TOGL$ , & ad directricem  $AB$  similiter positus, directrix ipsa debeat vel utrumque e lateribus secare, vel neutrum. Demum si coeuntibus punctis  $T, t$ , recta  $zOZ$  evadat tangens circuli, evanescente arcu illo intermedio  $Tt$ , coibunt etiam puncta  $P, p$  in Ellipsi, & recta  $KH$  evadet tangens.

152. Manente igitur inclinatione rectæ  $KH$  ad directricem, sive manente angulo ad  $H$ , concipiatur ea recta motu continuo translata ita, ut punctum  $H$  percurrat totam directricem, deveniendo ex parte sinistra  $A$  ex distantia quavis indefinite magna versus dexteram  $B$ , Habebuntur eo pacto omnes rectæ illam directionem habentes, & licebit contemplari quando, & qua ratione in datæ Sectionis Conicæ perimetrum incurrent. In omni eo motu punctum  $O$  manebit semper cum maneat punctum  $L$ , & inclinatio  $LO$  ad directricem. Recta  $FH$  perficiet dimidiam conversionem circa punctum  $F$ , tendente puncto  $H$  dextrorsum; adeoque & rectæ  $Oz$ ,  $OZ$  illi semper parallelæ dimidiam conversionem absolvent eodem ordine; sed si centrum circuli  $L$  assumptum fuerit citra directricem, quod ubique præstitimus, punctum  $z$  tendet a sinistra ad dexteram, punctum vero  $Z$  ipsi oppositum contra a dex-

tera



ura ad finistram. Ea mensuris oculis diligenter siltenda sunt; ut liceat unico velut conspectu casus complecti omnes, toto spatio per lineas KH, OZ indefinite utriusque productas tanquam per everticula quaedam velut paraflo.

153. Incipiendo ab Ellipsi in fig. 46 habebuntur 7 F. 46  
 Diversi casus lineæ  $\alpha$ OZ respondentes totidem casibus rectæ HK, siue FH. In primo casu  $\alpha$ OZ<sub>1</sub> extra circumferentiam cadet ex parte dextera, tum in secundo recta  $\alpha$ OZ<sub>2</sub> iam ipsum continget alicubi pariter ex parte dextera in unico puncto Q, deinde recta  $\alpha$ OZ<sub>3</sub> adhuc centrum L relinquens ad finistram circumferentiam ipsum secabit in binis punctis T<sub>1</sub>, t<sub>1</sub> tum  $\alpha$ OZ<sub>4</sub> transiens per ipsum centrum secabit circumferentiam in binis punctis T<sub>2</sub>, t<sub>2</sub> deinde  $\alpha$ OZ<sub>5</sub> relinquens iam centrum ad partem dexteram ipsum circumferentiam pariter secabit in punctis T<sub>3</sub>, t<sub>3</sub>, tum  $\alpha$ OZ<sub>6</sub> continget iterum alicubi in unico puncto q ex parte sinistra, ac demum  $\alpha$ OZ<sub>7</sub> extra circumferentiam cadet pariter ex parte sinistra. Eodem igitur passu in primo casu recta H<sub>1</sub>K<sub>1</sub> extra Ellipsim cadet ex parte sinistra; tum in secundo recta H<sub>2</sub>K<sub>2</sub> iam ipsam continget alicubi pariter ex parte sinistra in unico puncto I, deinde recta H<sub>3</sub>K<sub>3</sub> adhuc focum F relinquens ad dexteram Ellipsim ipsam secabit in binis punctis P<sub>1</sub>, p<sub>1</sub>, tum H<sub>4</sub>K<sub>4</sub> transiens per ipsum focum secabit Ellipsim in binis punctis P<sub>2</sub>, p<sub>2</sub>; illis nimirum, quæ determinavimus construatæ secundi problematis num. 128 juxta num. 132; deinde H<sub>5</sub>K<sub>5</sub> relinquens iam focum ad partem finistram ipsam pariter secabit in punctis P<sub>3</sub>, p<sub>3</sub>; tum H<sub>6</sub>K<sub>6</sub> continget iterum alicubi in unico puncto i ex parte dextera, ac demum H<sub>7</sub>K<sub>7</sub> extra Ellipsim cadet pariter ex parte dextera. Quamobrem q rectis omnibus datae parallelis bina semper Ellipsim contingunt singulae in singulis punctis; reliquæ omnes, quæ iis intersectant, semel secant in duobus punctis, quæ extra illas cadunt, nusquam occurrunt; quod quidem de Ellipsi proponemus.

154. In Parabola si recta data sit obliqua ad directam. F. 47  
 Boscovich. Tom. III. E cem;

46 SECTIONUM CONICARUM

cem, quem casum exhibet fig. 47. habebuntur casus tantummodo quinque, qui nimirum eodem prorsus pacto procedent, ac numero superiore in Ellipsi. Sed quoniam hic ipsa directrix OA contingit circulum in illo puncto, in quo coeunt G, & S, post lineam  $z_4OZ_4$  quævis linea  $z_5OZ_5$  utcumque exiguum cum directrice angulum continens ipsum circulum secabit in binis punctis  $T_3, t_3$ . Quare utcumque punctum  $H_5$  recedat versus B, recta  $FH_5$  continente cum directrice angulum utcumque exiguum, semper recta  $H_5K_5$  Parabolam secabit in binis punctis  $P_3, p_3$ . At si recta data sit perpendicularis directrici, ut in fig. 48; jam etiam LO evadente perpendiculari ad directricem, ipsum O congruit cum G, S in eo puncto, in quo directrix circulum tangit, & casus deducuntur ad tres tantum: Quævis enim  $zOZ$  ex illo contactu ducta circulum secabit in ipso puncto O, in quod proinde abibunt omnia puncta  $t$ , & præterea in aliquo alio puncto T: Nulla igitur ejusmodi recta HK Parabolam continget; secabit autem quævis ex iis in aliquo puncto P; quod determinabit recta FP parallela rectæ LT, & in casu rectæ  $H_2K_2$  transeuntis per focum punctum  $P_2$  determinabitur constructione Problematis secundi, vel Problematis primi, in quo verticem axis cujuscvis Conicæ Sectionis invenimus num. 36 & quidem in Parabola unicum: Recta autem ex F parallela rectæ L $_t$  ducta, quæ deberet alteram intersectionem determinare rectæ  $H_1K_1$  vel  $H_3K_3$  cum Parabola, congruet cum ipsa  $FK_2$ , quæ ipsis parallela est ita, ut intersectio post recessum in infinitum nusquam jam sit. Quare omnium ejusmodi rectarum *unica contingit in unico puncto, relique omnes ipsam bis secant, vel ipsi nusquam occurrunt prout facere a tangente versus focum, vel ad partes oppositas, præter rectas directrici perpendiculares sive axi parallelas; quarum nulla tangit, secant vero omnes in singulis punctis singula, altera intersectione ita in infinitum aberrante, ut nusquam jam sit.* Quod de Parabola fuerat propositum.

155. Pro Hyperbola faciat primo data recta cum directrice angulum minorem angulo æqualitatis, ut in fig. 49; & quoniam  $L_n$ ,  $LN$  inclinatur in ipso  $\alpha$ -F. 49 quocumque angulo (num. 150.); recta  $LO$  data recta parallela, adeoque continens angulum minorem ipsius  $LN_n$ ;  $L_nN$  debet directrici occurrere in aliquo puncto  $O$  extra circulum sito. Quare dum recta  $HI$  satis distat a foco  $F$  ita; ut  $FHI$  satis inclinatur ad directricem, recta quidem  $Z_1OZ_1$  non occurret circulo ex parte  $Z_1$ ; sed tamen ipsum secabit bis ex parte opposita  $Z_1$  in arcu ultra directricem excurrente. Eo casu patet ex num. 151. rectas  $Fp_1$ ;  $Fp_1$  parallelas rectis  $L_1T_1$ ;  $L_1T_1$  debere occurrere ipsi  $K_1H_1$  in binis punctis  $P_1$ ;  $p_1$  ultra directricem sitis; nimirum debere occurrere ramo ulteriori Hyperbolæ, atque id accidet, donec  $Z_2OZ_2$  contingat illum ipsum arcum alicubi in  $q$ ; recta  $H_2K_2$  ipsum ulteriorem ramum contingente in  $i$ ; num recta  $Z_3OZ_3$  nusquam circulo occurret, & recta  $H_3K_3$  nusquam occurrat Hyperbolæ. Ubi autem utrum  $OZ_4$  contigerit circulum in  $Q$  citra directricem, recta  $K_4H_4$  contiget jam ramum citiorem alicubi in  $l$ ; ac deinceps casus quintus; sextus; & septimus se habebunt prorsus ut casus tertius, quartus; & quintus in Ellipsi; ac quocumque in immensum recedat  $H_7$  versus  $B$  semper obtinebit idem casus septimus. Igitur si recta data efficiat cum directrice angulum minorem angulo æqualitatis, bina ex omnibus rectis ipsi parallelis contingunt singulos ramos singula in punctis singulis, reliqua vero nusquam occurrunt, vel secant in binis punctis eundem ramum, prout iis interjacent vel extra eas cadant. Quod primo loco de Hyperbola proposuimus.

156. Quod si recta data faciat cum directrice angulum æqualitatis, ut in fig. 50, recta  $LO$  abibit in ipso  $LN$ , abeunte puncto  $O$  in  $N$ . Quamobrem quæ F. 50 recta per  $O$  ducta secabit circulum in ipso puncto  $N$ , vel  $N$ ; in quod proinde abibunt omnia puncta  $t$ ; præterea in alio puncto  $T$ , præter unicam  $Z_2OZ_2$  per-

43 SECTIONUM CONIGARUM

perpendicularem radio LN, quæ circulum continget, ip-  
 quoque interfectione  $T_2$  ibi coeunte cum  $t$ , & cum  
 ac N. Donec igitur punctum  $H_1$  fuerit satis remotum  
 a foco, angulo  $FH_1B$  satis acuto, recta  $Z_1Oz_1$  secabit  
 ex parte  $z_1$  in  $T_1$  arcum circuli jacentem ultra direc-  
 tricem, & recta  $K_1H_1$  ramum ulteriorem in  $P_1$ , ac  
 ante autem  $t$  in O recta ipsi  $L_1$  parallela ex F ducta  
 erit parallela ipsi  $H_1K_1$ , ac ejus interfectio ita in  
 finitum recedet, ut nusquam jam sit facta  $Z_2z_2$  tan-  
 gente circuli, ubi &  $FH_2$  evadit perpendicularis ra-  
 ctæ  $K_2H_2$ , ac proinde abeunte in O ipso etiam pun-  
 cto  $T_2$ , recta ipsi  $L_2$  parallela ducta e foco F erit  
 det parallela ipsi  $K_2H_2$ , ac proinde utraque inter-  
 ctio determinanda nimirum a punctis  $t$ ,  $T$  ita in in-  
 finitum abit, ut nusquam jam sit: unde consequitur  
 rectam  $K_2H_2$  nusquam occurrere Hyperbolæ. Re-  
 quis autem omnibus  $OZ_3$ ,  $OZ_4$ ,  $OZ_5$  secantibus cir-  
 culum in puncto  $t$  coeunte cum O, & in alio pun-  
 cto  $T_3$ ,  $T_4$ ,  $T_5$ , citra directricem sito, reliquæ or-  
 nes  $K_3H_3$ ,  $K_4H_4$ ,  $H_5H_5$  secabunt ramum ceteri-  
 rem Hyperbolæ in unico puncto  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  singu-  
 lã, altera interfectione, quæ nimirum in rectis  $K_3H_3$ ,  
 $K_5H_5$  determinanda erat per punctum  $t$ , ita in in-  
 nitum abeunte, ut nusquam jam sit, quod de inter-  
 fectione rectæ  $K_4H_4$ , constat ex constructione probl-  
 num. 120. Cum vero quævis  $Z_1O$ ,  $Z_3O$  utcumque  
 parum inclinata ad illam  $Z_2O$  perpendicularem rad-  
 LO circulum necessario secet in aliquo puncto  $T_1$ ,  
 $T_3$  hinc, vel inde a contactu O, pariter quævis  $K_1H_1$ ,  
 $K_3H_3$  utcumque proxima illi  $K_2H_2$  secabit ramum  
 tiorum, vel ulteriorem in aliquo puncto  $P_1$ ,  $P_3$ ,  
 ac proinde recta illa  $K_2H_2$  indefinite producta ac-  
 det hinc ramo ulteriori, inde ceteriori indefinite pro-  
 ductis magis, quam pro data quavis distantia, quæ  
 ipsis unquam occurrat, quod ipsum exprimit asy-  
 ptoti nomen. Quare in Hyperbola, si rectæ, quæ  
 parallelæ sunt rectæ datæ, cum directrice efficiant  
 gulum equalitatis, nulla Hyperbolam contingit, una

Es omnibus est asymptotus, quae nimirum nusquam ipsi occurrat, sed binos ramos relinquit hinc inde, licet ad eas accedat magis, quam pro data quavis distantia uterque parva: reliqua omnes secant in singulis punctis, una regula ramum anteriorem, vel posteriorem, prout jacuerit hinc inde ab asymptoto sibi parallela, altera ex intersectione ita in infinitum abeunte, ut nusquam jam sit. Quod secundo loco de Hyperbola probavimus.

157. Si vero datum recta data faciat cum directricem angulum majorem angulo aequalitatis, ut in fig. 51, recta LO accedet magis ad perpendicularum LS, abeunt puncto O intra circulum. Quamobrem quavis recta ZO per ipsum O ducta secabit circulum in binis punctis, quorum alterum i jacebit ultra directricem, alterum T citra. Quaevis igitur recta KH secabit partem Hyperbolam in binis punctis, quorum alterum p jacebit ultra, alterum P citra directricem, quod de recta KzH2 transeunte per focum demonstratum est ex constructione problematis secundi. Quare si ille inclinationis angulus sit major angulo aequalitatis, omnes rectae secant Hyperbolam in binis punctis, nimirum in singulis ramis in singulis: Quod erat postremo loco propositum de Hyperbola.

Coroll. 2.

158. Recta Conicam Sectionem nec in pluribus, quam duobus punctis secat, nec in pluribus, quam in unico, contingit.

159. Patet ex Coroll. 1., ex eo nimirum, quod recta OZ circulum nec in pluribus, quam duobus punctis, secat, nec in pluribus, quam in unico, contingit.

## SCHOLIUM II.

160. **A**dmirabilis sane ac notatu dignissima est asymptotorum natura, quæ nimirum si perpetuo producantur, perpetuo ad lineas pariter productas ita accedunt, ut nulla sit distantia utcumque parva, quam aliquando non transcendat; licet omnino nunquam coincidant, in quo cum convergentibus seriis analogiam habent summam, & plurima sunt earum genera, de quibus agemus suo loco. Interea, ut evidentior evadat Tyroni res, immediate etiam hoc pacto demonstrabitur.

161. Si recta  $K_2H_2$  in fig. 50 usquam Hyperbolæ occurreret in  $R$ , vel  $r$ , deberet esse  $FR$  ad  $RH_2$ , vel  $Fr$  ad  $rH_2$  in ratione æqualitatis cum linea data in angulo æqualitatis ponatur inclinata ad directricem. Id autem fieri omnino non potest ob angulos  $RH_2F$ ,  $rH_2F$  rectos. Recta igitur  $K_2H_2$  quantumlibet producat, nusquam Hyperbolæ occurreret. At si sumatur, quævis  $K_1H_1$ , vel  $K_3H_3$  jacens ultra ipsam, vel citra, & ipsi utcumque proxima, illa Hyperbolæ occurreret, atque occurfus facile determinatur. Si enim ea occurrat rectæ  $FH_2$  in  $i$ , vel  $I$ , erit angulus  $FH_1i$ ,  $FH_3I$  acutus ob angulum  $F_1H_1$ ,  $F_1H_3$  rectum. Quare si fiat angulus  $H_1FP_1$ ,  $H_3FP_3$  æqualis ipsi  $FH_1i$ ,  $FH_3I$ , adeoque pariter acutus, recta  $FP_1$ ,  $FP_3$  occurreret alicubi rectæ  $H_1i$ ,  $H_3I$  in  $P_1$ ,  $P_3$ , eritque triangulum  $FP_1H_1$ ,  $FP_3H_3$  isosceles, ac proinde  $FP_1$ ,  $FP_3$  ad  $P_1H_1$ ,  $P_3H_3$  in ratione æqualitatis, & punctum  $P_1$ ,  $P_3$  ad Hyperbolam, quorum primum jacebit ultra directricem, ut  $i$ , secundum citra, ut  $I$ . Quæ quidem demonstratio & simplicissima, & evidentissima est.

162. Simul autem hic etiam sine circulo problema admodum facile solvitur inveniendi punctum ad Hyperbolam in recta inclinata in angulo æqualitatis, & patet ex constructione ipsa eam in unico puncto Hyper-

parabole occurrere . Eodem pacto etiam in parabola fig. F.48  
 148 rectarum KH directrici perpendicularium intersectio  
 cum Parabola facilius invenitur facto angulo HIFP  
 equali angulo FHIP . Res eodem redit , cum ibi an-  
 gulus rectus aequalem rationem requirat , & proinde  
 angulorum aequalitatis vices gerat .

163. Sequentibus hujus constructionis Corollariis eru-  
 untur primum proprietates quasdam harum linearum ,  
 quae scilicet inter omnes sibi parallelas Sectioni Conicae  
 nunquam occurrant , reliquis omnibus eam secantibus  
 semel , tum faciemus gradus ad eas , quarum aliae binae  
 secant , aliae contingunt .

Coroll. 3.

164. In Hyperbola asymptoti sunt binae , sunt perpen-  
 dicularis rectis a foco ductis , ad earum intersectionem cum  
 directrice , transeant per centrum , binos ramos binis ad  
 verticem oppositis angulis continent , quos angulos axis  
 transversae bisariam secat , ac earum segmenta interce-  
 dit inter centrum & directricem aequantur singula semia-  
 xi transverso .

165. Binas esse constat ex eo , quod habeantur binae  
 inclinationes LN , Ln in fig. 50 hinc inde in an-  
 gulo aequalitatis , ac singulae habere debeant asymptotum  
 sibi parallelam . Esse perpendiculares rectis a foco  
 ductis ad earum intersectiones cum directrice , demon-  
 stratum est num. 156. Reliqua sic demonstrantur . Cen-  
 tro C intervallo semiaxis transversae CM in fig. 52 in-F.54  
 describuntur in directrice puncta H , h ductisque CH , Ch ,  
 & IH , Fh , erit CF ad CH , ut CH ad CE , in ratio-  
 ne determinante , cum in ea sit CF ad CM , & CM  
 ad CE ( num. 90 ) . Quare primo quidem rectae CH ,  
 Ch , quarum ratio ad CE est eadem , ac ratio radii  
 ad sinum anguli CHE , ChE , inclinantur directrici in  
 angulo aequalitatis ( num. 10 ) . Deinde similia erunt  
 triangula CHF , CHE ( Coroll. 2. Prop. 12. Geom. )  
 Quare angulus CHF erit aequalis recto CEH , adeo-  
 que CH erit asymptotus , & eadem est demonstratio  
 pro Ch , quarum utraque praeterea ex constructione a-

## 52 SECTIONUM CONICARUM

quatur semiaxi transverso  $CM$ . Patet autem triangulum  $HCh$  isocelis angulum  $HCh$  ab axe  $CM$  perpendiculari basi secari bifariam, ut & basim ipsam, ac cum similitudine asymptoti binas ramos hinc inde relinquunt, oportet rami ipsi jaceant in binis earum angulis ad verticem oppositis.

Coroll. 4.

166. *Distantia foci ab intersectione asymptoti cum directrice equatur semiaxi conjugato, ac utrique equatur segmentum tangentis per verticem axis ducta, & interceptum ipso vertice, atque asymptoto.*

167. Nam ob angulum  $FHC$  rectum; est quadratum  $FH$  differentia quadratorum  $CF$ ,  $CM$ , cui (num. 64) æquatur quadratum semiaxis conjugati  $CX$ , adeoque  $FH$ ,  $CX$  æquantur inter se. Si autem recta axi perpendicularis per  $M$  ducta, quæ ibi Hyperbolam continget (num. 48), occurrat asymptotis in  $T$ ,  $t$ ; æqualia erunt triangula rectangula  $CMT$ ,  $CHF$ , quorum angulus ad  $C$  communis, & latera  $CM$ ;  $CH$  æqualia, adeoque &  $MT$  æquatur  $FH$ , &  $CT$  æquatur  $CF$ , ac eadem est demonstratio pro  $Fh$ ,  $Mt$ ,  $Ct$ .

Coroll. 5.

168. *Asymptoti sunt diametri ejus rectanguli, quem efficiunt recta utrique axi parallela, ducta per alterius vertices, habentis latera ipsis axibus æqualia; ac radius ad tangentem anguli, quem utraque asymptotus continet cum utrolibet axe, est ut ille axis ad alterum: & Hyperbola, que habent eosdem cum eodem axe asymptotorum angulos, sunt similes, & viceversa.*

169. Si enim per alterum axis verticem  $m$  ducatur recta axi transverso perpendicularis, occurrens asymptoti  $CT$ ,  $Ct$  in  $I$ , &  $i$ , erunt eadem demonstratione  $mi$ ,  $mi$  æquales ipsi  $CX$ ,  $Cx$ ; cum &  $eq$ , &  $Me$ , &  $MT$  sint iis præterea parallelæ, recta quoque  $IX$ ,  $Tx$  parallelæ erunt, & æquales (Coroll. 1. Prop. 2. Geom.) semiaxi transverso  $CM$ , & recta  $IX$ ,  $ix$  semiaxi  $Cm$ , ac totum  $Tsli$  rectangulum, habens latera æqualia ipsi

fis



sis axibus  $Mm$ ;  $Xx$ ; ubi radius ad tangentem anguli  $MCt$  est, ut  $CM$  ad  $Mt$ ; sive ad  $CX$ , vel ut  $Mm$  ad  $Xx$ ; ac radius ad tangentem anguli  $XCt$ , ut  $CX$  ad  $Xt$ , vel ad  $CM$ , sive ut  $Xx$  ad  $Mm$ ; Hyperbolæ vero, quæ eandem habebunt ad eandem axem asymptotorum, inclinationem, eandem habebunt rationem axis transversæ ad conjugatam, adeoque erunt similes, & viceversa.

*Coroll. 6.*

170. Si altera è binis Hyperbolis habeat pro axe transverso axem conjugatum alterius, & viceversa, quas dicimus Hyperbolas Conjugatas, communes habebunt asymptotas, & equalem focorum distantiam a communi centro.

171. Si enim alia Hyperbola habeat pro axe transverso  $Xx$ , pro conjugato  $Mm$ , rectangulum illud superioris Cotollarii erit pro utraque idem; adeoque communes utrique diametri ejus rectanguli, & distantie focorum a centro, quæ in singulis æquati debent eidem  $CT$ , vel  $Ct$ , communes erunt.

S C H O L I U M III.

172. **H**ÆC quidem de Hyperbolarum asymptotis fere sponte fluxerunt; ex quibus facile solvuntur plurima problemata, quibus quærantur asymptoti dato foco, centro, & directrice, vel foco, centro, & vertice axis transversæ; vel binis axibus, vel quærantur directrix datis asymptotis, & foco, vel alia hujusmodi, quæ per se quisque facile solvet; pendent autem a combinatione eorum, quæ in iis theorematibus connectuntur inter se. Plures aliæ maxime notabiles asymptotorum proprietates occurrent infra. Notanda interea mira indoles quatuor ramorum pertinentium ad binas Hyperbolas conjugatas, quorum crura in infinitam producta ad se invicem accedunt magis, quam pro quavis data differentia, quin usquam concurrant. Porro ejus figuræ, quam simul concludunt, ana-

## 94 SECTIONUM CONICARUM.

Analogia quædam satis elegans cum Ellipſi utro pariter ſe nobis offeret infra. Inſteatranſibimus ad nonnul- las proprietates ſectarum Conicam Sectionem ſequen- tum, quæ ad plures tangentium proprietates nos deducunt.

Coroll. 7.

173. Si recta directrici alicubi occurrere Sectionem Conicam in binis punctis ſecet, hinc radii facti ad Sectionum puncta ducti, cum recta tranſeunte per illum occuſum, & focum contingunt angulos hinc inde æquales. Si autem contingat, recta ducta a foco ad contactum, & occuſum cum directrice rectum angulum contine- bunt.

F.41 174. Nam in fig. 41, 42, 43, 44 in quibus puncta  
42 P, p jacent in eodem ramo, poſito V in recta HF pro-  
43 ducta ad partes F, in fig. verò 45 eo poſito ad partes  
44 H; anguli HFP, VFp, quos rectæ FP, Fp continent  
45 cum recta VF, erunt æquales angulis LTt, LtT, quos  
radii LT, Lt iis paralleli continent cum chorda Tt pa-  
rallela ipſi VFH; adeoque cum hi æquentur inter ſe  
ob iſoſceliſimum trianguli TLt, etiam illi inter ſe pari-  
ter æquales erunt.

175. Inde autem jam patet, ſi coeuntibus punctis P,  
p, ubi ad eundem ramum terminantur, recta KH eva-  
dat tangens, foci radiis FP, Fp coeuntibus in unicum,  
debet ipſum hunc radium evadere perpendicularem ipſi  
VFH. Sed idem multo magis manifeſtum ſit in fig. 46,  
47, 49, ubi angulus, quem IF, vel iF continet cum  
F.46 FH ſibi reſpondente, debeat eſſe æqualis angulo, quem  
47 circuli radius LQ, vel Lq priori parallelus continet cum  
49 QQ, qQ tangente circuli parallela poſteriori, adeoque  
rectius.

Coroll. 8.

176. Bina tangentes ductæ per extrema puncta chordæ tranſeuntis per focum (Chordam autem dico rectam, qua jungit bina quævis perimetri puncta, licet in Hyperbola ea pertineat ad ramos oppoſitos) concurrunt in directri- ce, & ibi continent angulum in Ellipſi acutum, in Pa- rabo-

*Parabola rectum, in Hyperbola obtusum, vel acutum, prout chorda jungit bina puncta ejusdem rami, vel ramorum oppositorum.*

177. Si enim chorda  $Pp$ , in fig. 53, 54 transeat per  $F$  focum  $F$ , ducta  $FH$  ipsi perpendiculari, donec occurrat directrici in  $H$ , rectæ  $PH$ ,  $pH$  erunt tangentes (num. 173). Ductis autem in primo casu in fig. 53 rectis  $PD$ ,  $pD$  perpendicularibus directrici, erit  $PF$  in Ellipsi minor, in Parabola æqualis, in Hyperbola major, quam  $PD$ , adeoque cum  $PD$ ,  $PF$  sint sinus angulorum  $PHD$ ,  $PHF$  ad radium communem  $HP$  (num. 25. Trig.), erit angulus  $PHF$  in Ellipsi minor, in Parabola æqualis, Hyperbola major, quam  $PHD$ ; ac pariter etiam  $pHF$  respectu  $pHd$ . Quare totus angulus  $PHp$  constans e binis  $PHF$ ,  $pHF$  minor in Ellipsi, æqualis in Parabola, major in Hyperbola binis  $PHD$ ,  $pHd$  simul sumptis, sive residuo ad duos rectos, quibus nimirum æquantur omnes anguli procedentes ex  $H$  versus  $F$  simul sumptis; ac proinde ipse  $PHp$  recto minor in Ellipsi, æqualis in Parabola, major in Hyperbola. At in fig. 54, ubi  $P$ ,  $p$  sunt ad ramos oppositos, ob angulum  $HFP$  rectum, acutus est totus  $FHp$ , adeoque multo magis  $PHp$  acutus est.

Coroll. 9.

178. *Recta ex concursu tangentium directrici perpendicularis in Parabola chordam per focum ductam secans bisariam, & ejus segmentum inter directricem, & chordam interceptionem æquat dimidiæ chordæ, ac secatur bisariam in ipsa Parabola perimetro.*

179. Nam in Parabola fig. 53, ob æquales angulos  $PHD$ ;  $PHF$ , & angulos  $PDH$ ,  $HFP$  rectos, angulus quoque  $HPI$  æqualis erit angulo  $HPD$ , sive ducta perpendiculari ad directricem, & proinde parallela  $PD$ , æqualis angulo  $PHI$  alterno ipsius  $HPD$ . Igitur & latera  $PH$ ,  $IP$  trianguli  $PHI$ , æqualibus angulis opposita, æqualia erunt, ac eadem demonstratione ipse æquatur  $HI$ , adeoque &  $IP$ . Si autem ipsa  $HI$  occurrat perimetro in  $V$ , erit  $FV$  æqualis  $VH$ , adeoque angulus  $VFH$  æqualis

## 36 SECTIONUM CONICARUM.

his VHF. Cum igitur in triangulo rectangulo IFH  
 ni anguli VHF, VIF simul æquantur tertio IFH recto,  
 erit & VIF æqualis VFI, & VI æqualis VF, adeo  
 que & VH.

### S C H O L I U M. IV:

180. **E** Corollario septimo admodum facile deducitur  
 aliud Theorema, quod quidem posset hic in  
 Corollariorum serie collocari: Verum cum contineat  
 unam è præcipuis Sectionum Conicarum generalibus  
 proprietatibus, & ipsam itidem admodum fecundam,  
 eandem sequenti Propositione enunciabimus: tum ex  
 ea plura deducemus Corollaria, quorum pleraque sum-  
 mum habent usum: At primi raro admodum usus ad-  
 veniet, nec ab eo alia pendent. Cum tamen in Ele-  
 mentis demonstrari soleat, ipsum etiam deducemus, &  
 ita exprimemus, ut generaliter verum sit, licet ab aliis  
 ita exprimi soleat, ut in aliquo casu sit falsum.

### PROPOSITIO IV. THEOREMA:

181. *SI è quovis puncto perimetri in Ellipsi, vel Hy-  
 perbola ducantur binæ rectæ ad binos focos, vel  
 in Parabola altera ad unicum focum, altera axi paralle-  
 la, ea cum tangente per idem punctum ducta æquales con-  
 tinent angulos hic inde.*

182. De Parabola patet ex eo, quod ob angulum  
 HFP in fig. 53 rectum (num. 173.), & basim HP  
 communem, ac latera PF, PD æqualia, æquatur an-  
 gulus HPF angulo HPD, vel productis DP, HP in  
 O, & Q, angulo quoque OPQ ipsi ad verticem op-  
 posito.

183. In Ellipsi autem, & Hyperbola fig. 55, 56 si  
 F.55 tangens per P ducta occurrat directrici AB pertinenti  
 56 ad focum F in H, & directrici ab pertinenti ad fo-  
 cum f juxta num. 87. in h, inclinabitur in eodem  
 angulo ad utranque, cum ea nimirum sint parallelæ.

Qua-

Quare erit (num. 2, & 87)  $FP$  ad  $PH$ , ut  $fP$  ad  $Ph$ , adeoque ob angulos ad  $F$ , &  $f$  rectos æquales ( num. 172) etiam (num. 25. Trig.) cosinus angulorum  $FPH$ ,  $fPh$ , & ipsi anguli  $FPH$ ,  $fPh$  inter se, ac in Hyperbola, productis pariter  $hP$ ,  $fp$  in  $Q$ , &  $O$ , anguli  $FPH$ ,  $OPQ$  æquales erunt. Q.E.D.

Coroll. I.

184. Duplum anguli, quem continent bina tangentes, æquatur in Parabola angulo, quem bina rectæ a contactibus ad focum ductæ ibi continent si ibi continent ita, ut cusps anguli spectet concursum tangentium; in Ellipse vero differentia, in eodem Hyperbola ramo summa binorum angulorum, quos ejusmodi rectæ ad binos focos ductæ in iis continent, si in Ellipse bini hiatus se mutuo spectent, & in Hyperbola uterque spectet eandem plagam; quod si anguli diversas positiones habeant, alter ex iis substitui debet ejus complemento ad quatuor rectos.

185. Nam in fig. 57 in Parabola si tangentes sint  $F.57$   $MPH$ ,  $mpH$ , ducantur  $PO$ ,  $po$ ,  $Hn$  parallelæ axi ad eam plagam, ad quam ipse in infinitum protenditur intra Parabolam, & recta  $HFN$  per focum  $F$ , erunt bini anguli  $FPH$ ,  $FpH$  æquales binis in contactu  $MPQ$ ,  $mpo$ , sive ob parallelas binis  $PHn$ ,  $pHn$ , adeoque simul toti  $PHp$ . Angulus autem  $NFP$  externus æquatur simul binis  $FPH$ ,  $FHP$ , &  $NFP$  binis  $FpH$ ,  $FHp$ , adeoque totus  $PFp$  toti  $PHp$  una cum binis  $FPH$ ,  $FpH$  ipsi æqualibus, nimirum duplo  $FHp$ .

186. At in Ellipse in fig. 58 ductis  $HFN$ ,  $Hfn$ , bi-  
F.58  
ni  $FPH$ ,  $FpH$  æquales erunt binis  $fPM$ ,  $fpm$ , sive quatuor internis, & oppositis  $PfH$ ,  $PHf$ ,  $pFH$ ,  $p fH$ , nimirum toti  $PHp$ , & toti  $Pfp$ . Angulus autem  $PFp$  æqualis binis  $PFN$ ,  $pFN$ , sive quatuor internis  $FPH$ ,  $FHP$ ,  $FpH$ ,  $FHp$ , vel binis illis  $FPH$ ,  $FpH$  cum angulo  $PHp$ , adeoque angulo  $PHp$  bis, & toti  $Pfp$  semel. Quare angulo  $Pfp$  dempto a  $PFp$ , remanet angulus  $PHp$  bis.

187. Demum in Hyperbola fig. 59 ductis  $fHn$ ,  $HFN$ ,  
angu-

## §8 SECTIONUM CONICARUM

F.59 angulis  $PFp$  constatis binis  $PFN$ ,  $pFN$  cum æquetur quatuor  $FPH$ ;  $FHP$ ;  $FpH$ ;  $PHp$ ; excedit  $PHp$  per binos  $FPH$ ;  $FpH$ . Simili argumento  $PHp$  excedit  $Pfp$  per binos  $HPf$ ;  $Hpf$  prioribus æquales: Igitur  $PFp$ ,  $PHp$ ;  $Pfp$  sunt in continua arithmetica proportione; & binorum extremorum summa æquatur duplo medio.

F.60 188. Quod si angulus  $PFp$  ut in fig. 60, 61, 62 ob-  
61 verrat hiatum ad partes oppositas  $N$ ; pro ipso sumen-  
62 dum erit ejus complementum ad quatuor rectos; nimi-  
rum aggregatum binorum  $PFN$ ;  $pFN$ ; ac demonstra-  
tio eodem redibit.

Coroll. 3.

189. In Ellipsi normalis tangenti; & in Hyperbola tangens dividit bifariam angulum, quem continent bini binorum focorum radii ad contactum ducti, ac ipsa normalis, & tangens una cum binis focus axem dividant in proportione harmonica.

F.63 190. Primum patet: si enim in Ellipsi in fig. 63, &  
64 in Hyperbola in fig. 64 tangens occurrat axi in  $T$ , ac  $PI$  ipsi normalis in  $I$ ;  $FP$ ,  $fP$  in Hyperbola debent æ-  
quales angulos continere cum tangente  $PT$ ; que si in El-  
lipsi producatut indefinite in  $H$  ad partes oppositas  $T$ ,  
erunt pariter æquales anguli  $FPT$ ;  $fPH$ ; adeoque &  
 $FPI$ ;  $fPI$ ; eorum complementa ad rectos  $TPI$ ;  $HPI$   
æquales erant.

191. Secundum autem deducitur ex primo; & ex nu.  
30, cum nimirum rectorum  $PT$ ;  $PI$  altera fecerit bifa-  
riam angulum  $FPf$ , altera sit huic ipsi perpendicularis:

Coroll. 3.

192. Bina distantia  $FP$ ;  $fP$  focorum a contactu; bi-  
na  $FI$ ,  $fI$  in axe computata a normali, bina  $FT$ ,  $fT$  ibidem  
computata a tangente sunt in eadem ratione inter se.  
Tres distantie  $CI$ ,  $CF$ ,  $CT$  centri  $C$  computata in  
axe a normali; a foco; a tangente sunt in conti-  
nua ratione geometrica rectorum  $FI$ ;  $FT$ ; in qua fo-  
cus dividit distantiam  $IT$  normalis a tangente. Si e  
binis focus, & centro demittantur perpendiculara  $FA$ ;  $CL$ ,  
fa in

fa in tangentem, sube in eadem ratione dicitur se quadruplæ  
 ræctarum binariis, 1. TF, FI, 2. TC, Tf, 3. FA, IP,  
 4. CL, fa.

193. Patent omnia ex proprietatibus proportionis har-  
 monicæ propositis ante Prop. 1. a num. 18. Nimirum  
 eandem esse rationem FI, If, & FT, Tf, ac FP, Ff  
 partim ex ipsa notionè proportionis harmonicæ, par-  
 tim ex num. 36. Rectas Cl, Cf, Ct, esse continue  
 proportionales in ratione If ad fT patet ex num. 22  
 ob Ff intervallum binorum punctorum alternorum se-  
 cum bifarium in C. Sunt autem If ad fT, ut If ad  
 fT, ex prima hujus parte: Dethum ob parallelismum,  
 rectæ FA, IP, CL, fa sunt inter se, ut FT, IT, CT,  
 fT. Hæc autem esse geometricè proportionales constat  
 ex num. 26.

Coroll. 4.

194. In Ellipsi, & Hyperbola si ex utrovis foco du-  
 catur perpendicularum in tangentem, recta jungens ha-  
 jus extremum punctum cum centro, parallela est rectæ  
 jungenti contactum cum foco altero, & equalis se-  
 mi-axi transverso, adeoque ipsi equalis erit recta ex  
 centro ad tangentem ducta parallela jungenti focum cum  
 contactu ipso; eidem vero æquale est etiam segmentum  
 rectæ transeuntis per contactum, & focum utrimlibet in-  
 terceptum ipso contactu, & recta tangenti parallela du-  
 cta per centrum.

195. Nam si tangens TP in fig. 63, 64 occu-  
 rat in A, & O rectis CA, FO parallelis rectæ fP,  
 recta veto ducta per C parallela ipsi HP rectis PF, Ff,  
 OF, in B, b, R, ob CF, Cf æquales; erunt æquales  
 etiam PA, AO (Coroll. 5 Propos. 12 Geom.) intercepti  
 iisdem parallelis FO, CA, fP, ac ob eandem rationem  
 CR, Cb æquales erunt inter se, ac proinde æquales  
 etiam FR, fb in triangulis RCF, bCf equalibus. Cum  
 vero recta FP contineat cum tangente eundem angu-  
 lum, quem fP, adeoque eundem, quem FO huic pa-  
 rallela, triangulum PFO erit isosceles, & FO equa-  
 lis FP. Quare primo quidem in triangulis FAO, FAP  
 ob

## 60 SECTIONUM CONICARUM

ob omnia latera equalia, anguli ad A erunt equales, & recta FA perpendicularis tangenti. Deinde cum RF equetur  $fb$ , & FO equetur FP in fig. 63, summa FP, Pb, bf, que (num. 92) equatur axi transverso, equalis erit summe OF, Pb, FR, sive binis OR, Pb, quarum singule cum equentur inter se, & equentur CA ob parallelismum, erit tam CA parallela  $fP$ , quam Pb equalis semiaxi transverso CM: imo cum & triangulum BPb sit isosceles ob angulos ad B, & b equales angulis alternis ad P, erit & PB equalis Pb, adeoque ipse semiaxi. In Hyperbola vero in fig. 64 excessus Pf supra FF, erit idem, ac summa excessuum Pf supra bf, sive FR, & ipsius FR supra PF, sive FO, que nimirum equabitur binis PB, OR equalibus inter se, vel duple AC. Cum igitur ille excessus Pf supra PF equetur pariter axi transverso, equabitur ejus dimidio tam CA, quam Pb, & eodem, quo in Ellipsi, argumento FB,

Coroll. 5.

196. Perpendicularum e foco in tangentem ductum incidit in Ellipsi, & Hyperbola in concursum tangentis ipsius cum circulo habentis pro diametro axem transversum, in Parabola vero in rectam axi perpendicularem in ipso vertice.

197. Primum constat ex precedenti, cum nimirum in fig. 63 64, ob rectam CA equalem CM, circulus, centro C radio CM debeat transire per A. Secundum F.65 patet in fig. 65 ex eo, quod si tangens occurrat recte FD in A, eam ibi secabit bifariam, cum secet bifariam. angulum ad P trianguli isoscelis FPD. Ac proinde, si ducatur MA, ea ob FD, FE sectas bifariam in A, & M erit parallela directrici ED, adeoque perpendicularis axi.

Coroll. 6.

198. In ipsa Parabola id perpendicularum est medium geometricè proportionale inter quadrantem lateris recti principalis, & distantiam contactus a foco, ac mutata utcum



in puncto contactus, est in ratione subduplicata distantia ipsius.

199. Nam triangula rectangula FMA, FAP similia sunt, cum habeant unum angulum rectum equalem, & angulus PFA equalis PDA ob PD, PF equales, & angulus etiam alterno AFM, ac proinde FM ad FA, ut PA ad FP. Hinc autem quadratum PA æquatur rectangulo sub FM, quæ (n. 68.) est quarta pars lateris recti principalis, & FP, adeoque ob FM invariata, ut tuncque mutetur P, id quadratum est, ut FP, nimirum ipsa FP in ratione duplicata FA, & hæc in subduplicata illius.

Coroll. 7.

200. In Parabola ipsa normalis terminata ad axem, est dupla perpendiculari e foco in tangentem demissa: distantia foci tam a normali, quam a tangente computata, in ipso axe, equalis distantia contactus a foco; subtangens dupla abscissa, subnormalis dimidia lateris recti principalis; normalis ad tangentem, ut latus rectum ad ordinatam.

201. Nam nomine Tangentis, Normalis, Subtangens, Subnormalis, intelligitur PQ intercepta inter contactum & axem; PI perpendicularis tangenti pariter terminata ad axem; QR segmentum axis inter tangentem, & ordinatam; RI segmentum ejusdem inter normalem, & ordinatam. Porro primo PI æquatur FD ob parallelas, adeoque est dupla FA. Secundo inde, ut IP dupla PA, ita IQ dupla FQ; adeoque RQ equalis FI, sive PD, nimirum distantia FP, sicut ut IP dupla FA, ita PQ dupla AQ, adeoque & tangens RQ dupla MQ, adeoque dupla etiam abscissæ residuæ RM. Quarto in triangulis FED, IRP ob similitudinem omnium parallelismum similibus, &, ob RP, PD æquales, æqualibus, erit subnormalis RI equalis dimidio lateri recto principali. Quinto demum ob similitudinem ad I communem triangulis rectangulis IRP, RQ erit normalis IP ad tangentem PQ, ut IR ad ordinatam RP, adeoque ut totum latus rectum ad ordinatam.

## 62 SECTIONUM CONICARUM

## S C H O L I U M.

202. **P**roprietas, quam in hac propositione demon-  
stravimus est una è potissimis Sectionum Co-  
nicarum proprietatibus, quæ nimirum ipsis focus no-  
men dedit. Nam radii lucis in speculum incidentes ita  
reflectuntur, ut angulum reflexionis faciant angulo in-  
cidentiæ æqualem; qui anguli, ubi speculi superficies est  
curva, æstimantur penes tangentem in ipso incidentiæ,  
F. 66 & reflexionis puncto: Nimirum in Ellipsi in fig. 66.  
67 radii omnes  $fP$  egressi e foco  $f$  incidentes in perime-  
68 trum debent reflecti ab  $F$ , & viceversa: in Parabola in  
fig. 67 radii omnes  $OP$  delati per rectas axi parallelas  
debent pariter colligi in  $F$ ; & radii egressi ex  $F$  debe-  
abire paralleli: In Hyperbola in fig. 68. si radii  $OP$   
deferentur cum directione tendente ad  $f$  debent pariter  
colligi in  $F$ , & si egrediantur ex  $F$ , debent abire tan-  
quam si egressi essent ex  $f$ : Atque hoc pacto igne sa-  
tis valido excitato in  $f$ , potest in magna distantia ac-  
cendi ignis in  $F$ , ac speculo Parabolico obverso soli,  
cujus radii adveniunt ad sensum paralleli, excitatur ig-  
nis in ejus foco  $F$ ; ibidem vero accensa candela in ipso  
 $F$ , lumen satis validum ad magnam distantiam trans-  
mitti potest per radios post reflexionem parallelos.

203. His perspectis regrediemur iterum ad constru-  
ctionem illam nostram, & motum lineæ parallelæ, unde  
de aliâ admodum insignem Sectionum Conicarum  
proprietaem eruemus, nimirum secundas diametros,  
quæ chordas omnes parallelas bifariam secant; ac ex  
hac ipsa alia theoremata tanquam ex novo quodam  
ramo novos furculos quoquoersum prorumpentes de-  
ducemus. Sed præmittemus Lemma quoddam generale,  
cujus usus etiam infra occurret, & in Cæcæmia late  
patet.

L E M M A.

104. Si tres recte, Pp, Qq, Tt in fig. 69; 70 con-F. 69

veniant in eodem puncto F; & a binis punctis 70  
 H, h minus sit is, ut Pp; ducantur bina parallela HA,  
 ha usque ad alteram e reliquis; Tt; & bina iidem pa-  
 rallela HR; hr, vel facentes, vel non facentes cum iis  
 in directionem usque ad alteram Qq; erit semper HA ad  
 HR; ut ha ad hr; at mutato utrumque puncto H per  
 rectam Pp; manentibus rectarum HA; HR directioni-  
 bus, manebit earum ratio constans: Contra vero si fue-  
 rint Ha, ha parallela inter se; & HR, hr inter se,  
 fuerit autem HA ad HR, ut ha ad hr, jacentibus pun-  
 ctis H; R; h; r, vel ad eandem plagam; ut in fig. 69.  
 vel ad oppositas, ut in fig. 70, prout HA, ha jacuerint  
 ut eadem, vel ad oppositas, recte Qq; Pp, Tt ducta  
 per extrema parallelarum puncta H; h; A; a; R; r,  
 vel nunquam concurrent, vel simul concurrent in eodem  
 puncto F; & si inaltero ratione HR ad HA, eorumque  
 directione, bina puncta H; A excurrant per binas rectas,  
 uterque uterque R per rectam, si illa eosunt; convergen-  
 tum ad idem punctum

105. Prima pars patet, quia triangula HFA, hFa ob  
 angulos parallelarum aequales erunt semper similia; ut  
 in HFR; hFr. Quare erit HA ad HF; ut ha ad hF  
 et HA ad HR; ut ha ad hr, adeoque ex aequalitate ordi-  
 nis HA ad HR; ut ha ad hr. Secunda pars directè  
 demonstrati potest, sed deducitur facilius e prima.  
 Si enim eosuntibus rectis Hb; Aa in F, tecta per F, & r  
 non transiret per R; transiret per aliud punctum  
 recte HR; & esset HA ad HO; ut ha ad hr, sive  
 hypotheti ut HA ad HR; & proinde HO; HR aequa-  
 les, pars, & totum.

## PROPOSITIO V. THEOREMA:

206. **C**hordas omnes parallelas inter se bifariam secant diameter, quæ in Ellipsi, & Hyperbola semper per centrum transit, in Parabola est directrici perpendicularis, sive axi parallela, & data Sectione Conica, ac inclinatione ordinarum, datur.

207. De chordis parallelis, vel perpendicularibus directrici patet ex num 56, & 83, per quos bifariam secantur hæ ab axe conjugato, illæ ab axe transverso.

E.71 De reliquis sic demonstratur. In fig. 71, 72, 73, 74  
 72 quæ constructæ sunt juxta num. 142, & quarum prima pertinet ad Ellipsim, secunda ad Parabolam, tertia  
 74 ad chordas jungentes in Hyperbola bina ejusdem rami puncta, quarta ad chordas jungentes in ipsa Hyperbola ramos oppositos, agatur  $LV$  perpendicularis ad chordam circuli  $Tt$ , quam & secabit bifariam: producat  $LO$ , quæ opus est, ut circulo ipsi occurrat in  $M$  &  $m$ ; secetur chorda  $Pp$  bifariam in  $R$ , ducaturque per focum  $F$  chorda  $P'p'$  ipsi parallela, occurrens directrici in  $Q$ , erectaque  $Fl$  ipsi perpendiculari, quæ necessario alicubi occurret directrici in  $I$ , ducatur  $IR$  ipsam  $p'P'$  secans bifariam in  $R'$ , quæ (num. 134) in Ellipsi, & Hyperbola transibit per centrum, in Parabola erit perpendicularis directrici, adeoque parallela axi.

208. Jam veuo cum sit  $HP$  ad  $HF$ , ut  $OL$  ad  $OT$  &  $HF$  ad  $Hp$ , ut  $Oe$  ad  $OL$ , erit ex æqualitate perturbata  $HP$  ad  $Hp$ , ut  $Oe$  ad  $OT$ , &  $HR$  ipsarum  $HP$ ,  $Hp$  semisumma in prioribus tribus figuris, semidifferentia in postrema, ad priorem  $HP$ , ut  $OV$  pariter semisumma, vel semidifferentia ipsarum  $Qe$ ,  $OT$  priorem  $Oe$ . Quate cum ratio  $HR$  ad  $HA$  componitur ex tribus  $HR$  ad  $HP$ ,  $HP$  ad  $HF$ ,  $HF$  ad  $HA$ , prima sit eadem ac  $OV$  ad  $Oe$ , secunda eadem ac  $Qe$  ad  $OT$ , ac tertia, ob triangulorum rectangulorum  $HAF$ ,

HAF, OVL similitudinem, eadem, ac OL ad OV, erit ipsa ratio HR ad HA eadem; ac solidi sub rectis OV, OL, OL ad solidum sub rectis Or, OT, OV, nimirum ob VO communem; ut quadratum OL ad rectangulum TOI; sive ad rectangulum MOm ipsi æquale (Prop. 13. Geom.). Ea ratio est constans, utcumque mutata positione chordæ Pp, dummodo ejus inclinatio ad directricem sit semper eadem, manentibus nimirum semper punctis O, M, L, m. Inde autem deducitur ex num. 204, omnia puncta R fore semper in eadem recta. Cum nimirum maneat & directio rectarum HA, HR, & ratio, ac puncta H, A excurrant per rectas IH, IF, excurreret etiam punctum R per rectam ex I ductam, & chordæ omnes parallelæ ab eadem diametro bifariam secabuntur. Ea autem diameter erit illa ipsa IR, quæ chordam per focum transeuntem bifariam secat: Atque id quidem patet ex eo, quod ea recta debet secare bifariam chordam quamvis utcumque proximam chordæ P'R' transeunti per focum F. Sed sic accuratissime demonstratur; nam demonstratio illa generalis, pro chordis omnibus non habet locum pro ea, quæ per focum transit, licet facile ad eandem reduci possit.

209. Ratio HR ad HA est eadem, ac quadrati EO ad rectangulum MOm (num. 208), nimirum (Coroll. 2. & 5; Prop. 13. Geom.) ad differentiam quadratorum OL, LM. Quare erit HR ad RA differentiam in prioribus tribus figuris, summam in quarta ipsarum HR, HA, ut quadratum OL ad quadratum LM, quod patet provenit si in illis a quadrato OL auferatur differentia quadratorum OL, LM; & in postrema figura auferatur, nimirum ut quadratum OL ad quadratum PL, vel ut quadratum HP ad quadratum PF, sive ut quadratum QP' ad quadratum P'F; & invertendo RA ad RH in ratione duplicata FP' ad P'Q, in qua ipsa ratione est R'F ad R'Q, cum (num. 134) R'F, R'P, R'Q sint continue in ea ratione simplici. Recta igitur IR debet transire per R' (num. 204). Cum vero

66 SECTIONUM CONICARUM

Ipsa  $IR'$  in Ellipsi, & Hyperbola transeat per centrum (num 134), in Parabola sit perpendicularis directrici, patet chordas omnes parallelas habere suam diametrum, quæ eas omnes bifariam secet, & transeat in illis per centrum, in hac sit perpendicularis directrici, & parallela axi, adeoque detur invento puncto  $I$  per rectam  $FA$  perpendicularitatem cuilibet ex hujusmodi chordis; Q. E. D.

Coroll. 1.

210. Quavis recta per centrum transiens in Ellipsi, & Hyperbola, præter solas Hyperbole asymptotas, & parallela axi in Parabola, est diameter suæ habens ordinatas, quas bifariam secat, & quarum directio datur, data Sectione Conica, & ipsa diametro, nec præter axes ulla diameter suis ordinatis perpendicularis est.

211. Rectam enim directrici parallelam, ac perpendicularam, sive axes ipsos, in Ellipsi & Hyperbola, quæ quidem ordinatis suis perpendicularis sit, esse ejusmodi constat ex num 56., & 83. Data autem quavis alia recta, quæ per centrum  $C$  transeat in fig. 71, 73, 74, ea directrici occurret in aliquo puncto  $I$ , ex quo ducta recta ad focum  $IF$ , & per Focum  $QF$  perpendiculari ipsi  $IF$ , ipsa  $IC$  secabit bifariam chordas omnes  $PP$  parallelas ipsi  $QF$ , quæ (num. 149) semper habebuntur in fig. 71 in Ellipsi, ac in Hyperbola habebuntur semper, præter casum, quo in fig. 73, 74 recta  $FQ$  inclinatur ad directricem in angulo æqualitatis, quo solo casu rectorum eam inclinationem habentium altera intersectio ita recedit in infinitum, ut nunquam jam sit. At is casus est ille ipse in quo  $CI$  est alterutra ex asymptotis, & ipsa  $QF$  parallela. Nam in fig. 50 recta  $FH_2$  est perpendicularis asymptoto  $K_2H_2$  transcunt per centrum, & rectæ  $K_4FH_4$  habenti inclinationem æqualitatis ad directricem, juxta num. 156. In Parabola vero in fig. 72 quavis recta parallela axi transverso occurrat directrici alteri in  $I$ , unde ducta recta  $IF$ , recta  $FQ$  huic perpendicularis,

non poterit esse perpendicularis directrici, in quo solo casu rectorum ipsi parallelarum altera intersectio in infinitum recedit, ut nusquam jam sit: cumque semper HF sit perpendicularis ordinate Pp, nusquam esse ipsi perpendicularis diameter IR.

Coroll. 2.

112. Quævis diameter in Ellipsi occurrit perimetro in duobus punctis, in Parabola quævis in unico, in Hyperbola quævis in duobus pertinentibus ad binos ramos oppositos, vel in nullo, prout jacuerit in iisdem asymptotum angulis, quos axis transversus bifariam secat, vel extra, que puncta diametrorum vertices dico; ut in axis: ac recta per hos ipsos vertices ducta ordinatis parallela est tangens. Porro cum diametri magnitudinem non desinio, intelligo segmentum ipsius interceptum binis verticibus, ac in Hyperbola diametros jacentes in angulis asymptotorum, in quibus jacet axis transversus, dico primarias, que jacens extra, dico secundarias, & hæc quædam occurrunt binis ramis Hyperbolæ conjugatæ, ac etiam quoque vertices, dico illa occursum puncta, pro eorum magnitudine assumens segmentum interceptum binis verticibus. In Ellipsi autem quæcumque diametrum primarium dico respectu suarum ordinarum, ac in utraque diametrum parallelam ordinatis alterius diametri, seu tangentibus per ejus vertices ductis, dico ejus conjugatam.

113. Nam in primis in Ellipsi chordæ omnes (num. 149.), in quocumque angulo inclinentur, habent binas tangentes parallelas, quibus clauduntur, in quam tangentem si desinat chorda Pp in fig. 71, debent binæ ordinatæ RP., Rp, quæ nimirum semper æquantur inter se, simul evanescere, punctis P., p simul cum puncto diametri R abeuntibus in ipsum contactum. Eodem argumento in Parabola, in qua ordinatæ quæcumque unquam tangentem sibi parallelam habent, diameter, quæ cum sit perpendicularis directrici, in unico puncto debet occurrere curvæ, illi occurret in illo ipso contactu. At in Hyperbola ordinatæ omnes, quæ

## 68 SECTIONUM CONICARUM.

ad directricem inclinatur in angulo minore, quam sit angulus æqualitatis, habent binas tangentes parallelas, contactibus pertinentibus ad ramos oppositos, quæ in angulo majore nullas habent. Porro in fig. F. 75 si CH sit altera ex asymptotis, & diameter quædam CI accedat ad perpendicularum CE magis, quam ipsa, C<sub>1</sub> minus, ac ipsis FI, FH, F<sub>1</sub> perpendiculares sint FO, FQ, F<sub>0</sub>, ( num. 134 ) quæ num. 211. erunt parallelæ ordinatis diametrorum CI, CH, C<sub>1</sub>, satis patet, FO inclinari ad directricem in angulo minore, quam FQ, quæ ipsi asymptotæ parallela, ob angulum FHC patiter rectum, inclinatur in angulo æqualitatis; F<sub>0</sub> in angulo majore; adeoque prout diameter accesserit magis, quam utraque ex asymptotis CH, C<sub>1</sub> ad axem CEF, vel minus, nimirum prout jacuerit in eo asymptotortum angulo HCh; quem axis transversus secat, vel extra, habebit binas tangentes suis ordinatis parallelas, & pertinentes ad ramos oppositos, vel nullas (nu. 149), & in primo casu per illos ipsos contactus transire debet, eodem argumento, in secundo nusquam occurreret perimetro, cui si uspiam occurreret, haberetur ibi tangens ordinatis parallela; deberet enim ejus ordinata abire in tangentem, coeuntibus nimirum binis ejus extremis punctis, quæ si non coirent, diameter ipsa ordinatam per idem punctum non secaret bifariam.

*Coroll. 3.*

214. *Diameter aream Conicæ Sectiæ terminatam ordinata quævis, & totam in Ellipsi aream bifariam secat.*

215. Patet ex eo, quod si concipiatur ordinata a vertice diametri motu continuo, & parallelo delata, binæ semiordinatæ semper sibi æquales, & eadem celeritate progredientes, generabunt areas semper æquales.

*Coroll. 4.*



Coroll. 4.

216. Chordæ per bina extrema binarum ordinatarum puncta ductæ, ac tangentes per bina extrema ductæ ejusdem chordæ, si parallela non sunt, concurrunt in diametro: diameter vero per concussum tangentium ducta habet pro ordinata chordam jungentem binos contactus.

217. Cum enim in Fig. 76, 77, ordinatæ  $AB$ ,  $ab$  bifariam secentur a diametro in  $E$ , &  $e$ , erit  $eb$  ad  $ea$ , ut  $EB$  ad  $EA$ , adeoque binæ rectæ  $AA$ ,  $BB$  debent (num. 104) concurrere cum diametro  $Ee$  in eodem ejus puncto  $D$ . Ubi autem coeuntibus ordinatis  $ab$ ;  $AB$ , rectæ  $AD$ ,  $BD$  definiunt in tangentes  $Ad$ ,  $Bd$ , debet punctum  $d$  manere in ipsa diametro. Hinc autem & postremum sponte fuit.

Coroll. 5.

218. Ellipsis centro, & utriusque foco cavitatem obvertit, Parabola foco cavitatem, Hyperbolæ ramus uterque centro convexitatem, foco vero ramus cterior cavitatem, ulterior convexitatem.

219. Nam in Ellipsi chordæ omnes, adeoque omnia arcus puncta (num. 149.) jacent inter binas tangentes, inter quas & centrum jacet, quod situm est in medio inter binos contactus, & focus uterque, cum chordæ per eos ductæ debeant iisdem tangentibus contineri; adeoque Ellipsis & centro, & utriusque foco cavitatem obvertit. In parabola focus jacet ad eas partes, ad quas chordæ jacent respectu tangentis, & in Hyperbola centrum inter binas tangentes, extra quas chordæ jacent cum arcibus, focus ad eam plagam vergentem quam ramus cterior protenditur, ramo ulteriore vergente ad partes oppositas. Patent igitur, quæ proximè etiam in iis.

# SECTIONUM CONICARUM

## SCHOLIUM I.

219. **Q**uod ad curvaturam pertinet respectu focorum, poterat etiam immediate ex num. 149; sed libuit potius huc reservare, ut simul haberentur etiam ea, quæ pertinent ad centra. Porro quò vergat curvatura respectu foci & centri, necessario demonstrandum est, cum inter cætera ubi in Mechanica inquiritur in vires, quibus Sectiones Conicæ describi possunt, inde pendeat, utrum eæ tendere debeant ad datum punctum, an ab ipso: nimirum utrum attractivæ esse debeant, an vero repulsivæ. Jam vero, faciemus gradum ad proprietates quasdam Hyperbolæ relatæ ad asymptotos, quæ ab hac diametrorum chordas bifariam secantium proprietate pendent, & fecundissimæ iterum sunt, ac quædam etiam, quæ Hyperbola habet Ellipsi quoque communia, sponte progignunt.

Coroll. 6.

221. In Hyperbola segmentum chordæ interceptum inter unum extremam, & unam asymptotam, æquatur segmento intercepto inter alteram, & alteram, ac diameter, ubi ordinatas bifariam secat, secat etiam bifariam eorum, si opus est, productarum segmentum interceptum a symptotis.

F. 78  
79  
222. Sit enim ejusmodi chorda Pp terminata ad eundem ramum in fig. 78, ad oppositos in fig. 79, quæ occurrat asymptotis in punctis H, h. Si PH, ph non sunt æquales, erit altera, ut PH, major. Abscissa PO æquali ph, ex C per O ducatur recta, quæ (num. 212) occurrat alicubi eidem ramo in P', ac recta per P' parallela chordæ priori occurrat asymptotis in H', & h', Hyperbolæ iterum in p'. Diameter quidem, quæ hujusmodi chordas pro ordinatis habet, per centrum C transibit, & ipsas chordas secabit bifariam in R, & R' (num. 206). Cum igitur æquantur & RP, Rp, & PO, ph, erit & RO æqualis Rh; adeoque (n. 204) & RP', & A'h' æquales erunt, nimirum & Rp, R'h' æquantur.

E L E M E N T A. 71

Inquam, pars, & totum. Equales igitur sunt ipsa PH, ph, & adita communis Pp, ipse pH, Ph equales erunt, ac additis RP, Rp equalibus erunt & RH, Rb equalis.

Coroll. 7.

223. Tangens Hyperbole asymptotis terminata, secans bisariam in ipso contactu, ac recta ex ipso contactu ducta parallelè alteri asymptota usque ad alteram, erit dimidia segmenti asymptoti prioris intercepti inter centrum & tangentem, ac secabit bisariam segmentum eiusmodi posterioris.

224. Si enim in fig. 78 recta HPh abeat in tangentem Ala, abeantibus punctis P, p in contactum I ductis Al esse equalis Ia: quare ducta præterea ID parallela CA, donec occurrat Ca in D, erit & DC equalis Da: ac ob Ia dimidiam Ae, erit & ID dimidia AC.

Coroll. 8.

225. Si e binis punctis P, p quibusvis Hyperbola, in fig. 30, si inclinentur ad binas asymptotas hinc recte PB, PO, & pb, po in quibusvis binis angulis datis, utrumque BPO sub binis inclinatis ab uno puncto, erit semper equalè rectangulo bpo sub inclinatis ab alio, quod proinde mutato puncto P utrumque manebit semper magnitudinis eiusdem.

F. 80  
81

226. Nam ob parallelas erit PB ad pb, ut PH ad ph, sive sumptis equalibus, ut ph ad Ph, nimirum, ob parallelas, ut po ad PO: ac proinde rectangulum sub arcibus PB, PO equalè rectangulo sub mediis pb, po.

Coroll. 9.

227. Si o quovis puncto Hyperbole P ordinatur PD ad unam asymptotam, parallela alteri, rectangulum sub abscissa a centro CD, & eiusmodi ordinata erit semper constans, quod rectangulum dicitur Potentia Hyperbole, & utique mutato utrumque puncto, erunt ordinata in ratione reciproca simplici abscissarum.

228. Nam si PO, PB abeant in PD, PR parallelas binis asymptotis, erit adhuc constans rectangulum sub PD,

## 72 SECTIONUM CONICARUM

PD, PB, quæ abiens in PR evadit æqualis CD, lateri opposito parallelogrammi PRC D. Erit igitur constans etiam rectangulum sub CD, DP, & respectu binorum punctorum P. p, erit PD ad pd; ut cd ad CD;

### SCHOLIUM II:

219. **H**ÆC constans Hyperbolæ potentia est una e præcipuis proprietatibus Hyperbolarum, & assumi solet pro determinatione naturæ ipsius Hyperbolæ relatæ ad asymptotos, ita ut curvæ; in quibus ordinatæ sunt in aliqua ratione multiplicatæ, vel submultiplicatæ reciproca abscissarum; ut hæc sunt in simplicior, appellentur Hyperbolæ altiores: Ex ea plurimæ proprietates profluunt, quarum aliquas, ut monui etiam sequentibus Corollariis, tum regrediar ad eas, quæ eruntur e præcedentibus Corollariis, ex quibus etiam illa ipsa potentia sponte profluxit:

Coroll. 10.

220. *Positis iisdem, area tam parallelogrammi CDPR, quod continent bina recta ordinata ab eodem puncto P ad binas asymptotos cum ipsis asymptotis, quam trianguli CDP, quam continet abscissa, ordinata asymptoto, & semidiameter, ac area in fig. 78 ACa; quam continet tangens ad asymptotos terminata cum ipsis asymptotis, sunt magnitudinis semper constantis.*

221. Si enim PB sit asymptoto perpendicularis, adhuc erit constans rectangulum sub PD; & PB, sive sub CR, & PB, nimirum factum ex basi, & altitudine parallelogrammi CDPR, adeoque tam ejus area; quam area trianguli PCD ejus dimidii. Ducta autem ID in fig. 78. parallela asymptoto AC, erit ob Aa sectam bifariam in I (numer. 223), area ACa dupla areæ ICA, adeoque, ob aC sectam itidem bifariam in D; quadrupla areæ CDI constantis.

Coroll. 11.

232. Si in fig. 80. e binis punctis P, p ejusdem ra-F.80  
 Hyperbola ducantur linea ordinata PD, pd ad alte-  
 ram asymptotum, & binae aliae PR, pr ad alteram, a-  
 rea DPPd clausa arcu, asymptoto, & prioribus hinc or-  
 dinatis, aequabitur area RPpr clausa eodem arcu, alte-  
 ra asymptoto, & posterioribus binis, ac earum singu-  
 lae erunt aequales areae sectoris PCp terminati ad cen-  
 trum C.

233. Si enim PD, pr sibi mutuo occurrant in e,  
 area Cpd aequabitur ( num. 230 ) areae CRPD. Qua-  
 re dempta communi CreD, & addita communi Pep,  
 erit area DPPd aequalis areae RPpr. Quoniam vero &  
 areae trianguli CDP aequatur areae trianguli Cdp, si  
 PD, Cp sibi invicem occurrant in I, dempta com-  
 muni CID, & addita communi Pip, erit area  
 sectoris PCp aequalis areae DPPd, adeoque & RPpr.

Coroll. 12.

234. Concurfus e ordinata PD in fig. 82 ad alte-F.82  
 ram asymptotum, cum ordinata rp ad alteram, & con-  
 cursus E ordinata RP cum ordinata dp fit in diame-  
 tro primaria ICi habente pro ordinata chodam Pp, &  
 si e vertice I ejus diametri ducatur ordinata IM ad  
 alteram asymptotum, erunt & abscisse CD, CM,  
 Cd, & ordinata DP, MI, dp continue proportio-  
 nales.

235. Ductis enim Ce, CE, erit ( num. 227 ) CD  
 ad Cd, ut pd, sive De ad DP, sive dE. Quare ob  
 angulos CDe, CdE in parallelis aequales, similia erunt  
 triangula CDe, CdE, & angulus DCE aequalis angu-  
 lo dCE ac propterea recta Ce supra CE cadit: ipsa  
 enim Ee diameter parallelogrammi PpEe bifariam se-  
 cut alteram ejus diametrum Pp in B, ut facile  
 colligitur. Quare cum Ee transeat per centrum C,  
 ipsa erit diameter habens pro ordinata eandem Pp,  
 & si occurrat perimetro in I, & ducatur IM  
 ordinata ad asymptotum Cd, erit ob trian-  
 gulorum

## SECTIONUM CONICARUM

gulum similitudinem  $CD$  ad  $CM$ , ut  $De$ , sive  $dp$  ad  $Ml$ , nempe ( num. 227. ) ut  $CM$  ad  $Ca$ , adeoque  $CD$ ;  $CM$ ;  $Ca$  in continua proportione; quibus cum sint reciproce proportionales ( num. 227. )  $PD$ ;  $IM$ ;  $pa$ ; erunt & ipse in continua proportione.

Coroll. 13.

236. Si sumantur abscisse in altera asymptoto in continua proportione geometrica; & erigantur ordinatae alteri asymptoto parallelae, areae clausae binis quibusvis proximis ordinatis; arcu, & asymptoto erunt inter se aequales; ac inter se aequales areae Sectorum terminatorum ad centrum a binis quibusvis proximis ordinatarum verticibus, constituentibus progressionem geometricam abscissis; vel ordinatis: area computata a data quavis ordinata; vel a data quavis semidiametro per ordinatae verticem ducta usque ad sequentes ordinatas; vel semidiametros crescet in progressionem arithmetica; & area clausa ordinata quavis; arcu, & asymptoto crescet in infinitum, si arcus & asymptotus in infinitum producantur.

237. Nam existentibus  $CD$ ;  $CM$ ;  $Ca$  in continua proportione geometrica; ut &  $DP$ ;  $Ml$ ;  $dp$ , recta  $CP$  ( num. 234. ) secat bifariam chordam  $Pp$  in  $B$ ; & proinde triangula  $PCB$ ,  $pCB$  habentia bases  $PB$ ;  $pB$  aequales, & eandem altitudinem in  $C$  habent areas aequales; a quibus si demantur areae hyperbolicae  $PIB$ ;  $pIB$  aequales ( num. 214. ) remanebunt aequales etiam areae sectorum  $PCl$ ;  $lCp$ , adeoque & areae Hyperbolicae  $PDMl$ ;  $lMdp$ ; quae illis aequales sunt ( num. 232. ) erunt inter se aequales. Eodem autem pacto sumpta  $Cm$  tertia post  $CM$ ;  $Ca$ ; inuenietur area sectoris  $pCl$ ; vel quadrilinei  $dpim$  & qualis prioribus; atque ita porro assumptis novis abscissis in continua proportione geometrica; ac remanentibus in eadem reciproca ordinatis, areis sectorum incipientibus a quavis semidiametro  $CP$ ; vel areis quadrilineis incipientibus a quavis ordinata  $PD$  accedent nova incrementa semper aequalia, atque areae proinde crescant in ratione arithmetica. Cumque numerus ab-

scis-

# E L E M E N T A 71.

scissarum in geometrica proportione assumptarum augeri possit in infinitum, potest etiam in infinitum augeri numerus incrementorum illorum æqualium, quorum proinde summa, quæcumvis finitam magnitudinem excedat.

## S C H O L I U M III.

238. **H**ÆC area in arithmetica progressionem ostendens proprietates; dum abscissæ crescunt in progressionem geometricam est admodum insignis & notanda digna. Inde enim fit, ut area Hyperbolica haberi possit pro logarithmis numerorum, quos expriment abscissæ; quod imo opæ ipsius areae Hyperbolicae computare methodo; quæ opæ calculi integralis facile invenitur; logarithmi quoque computantur; & comparatio semel logarithmis; area Hyperbolæ clausa datis ordinatis, & abscissis facile invenitur. Sed hic geometricas, non arithmeticas proprietates persequimur Sectionum Conicarum.

239. Pergam igitur ad aliam proprietatem, quæ partiter ex constanti illa potentia Hyperbolæ deducitur, cui alias ex aliis prorumpentes adjiciam.

### Coroll. 14.

240. *Recta alteri asymptoto parallela, occurrentis binis ramis Hyperbolarum conjugatarum, secatur bifariam ab altera asymptoto; ac Hyperbolarum conjugatarum potentie æquales sunt.*

241. Sint enim in fig. 83 juxta num. 170 axes communes  $Mm$ ,  $Xx$ , communes asymptoti  $TB$ , ab occurrentes, tangentibus per axium vertex ductis in  $T$ , &  $B$ ,  $b$ . Recta  $Mx$  parallela asymptoto  $TB$  secabitur ab asymptoto  $Ct$  bifariam in  $O$ , ut  $TB$  in  $C$ . Si autem quævis alia ipsi parallela  $IL$  occurrat  $Ct$  in  $D$ , erit (p. 117.)  $DI$  ad  $MO$ , ut  $CO$  ad  $CD$ , ut  $DL$  ad  $OX$ , adeoque ob  $OM$ ,  $OX$  æquales, æquabuntur &  $DI$ ,  $DL$ . Inde vero & rectangula  $CDI$ ,  $GDL$ , quæ sunt, binarum

78 SECTIONUM CONICARUM  
 rum Hyperbolarum conjugatorum potentie, æqualia  
 sunt.

Coroll. 13.

242. Tangens asymptotis intercepta æquatur diametra  
 conjugata ejus diametri, que per contactum transit,  
 ac recta jungens in vertice binas diametros conjugatas,  
 & alteri asymptoto parallela ab altera secatur bifariam.

243. Si enim  $Ala$  fig. 83. sit ejusmodi tangens, erit  
 ( num. 223 )  $CA$  dupla  $DI$ , adeoque æqualis  $IL$ , cui  
 cum parallela sit, erunt &  $AI$ ,  $CL$  æquales, & pa-  
 rallele adeoque & eorum dupla  $Aa$ ,  $Ll$  æqualia. Dia-  
 meter autem  $LCl$  cum parallela sit tangenti  $Ala$ , erit  
 ( num. 212 ) conjugata diametri  $ICi$ , & recta  $IL$  jun-  
 gens earum diametrorum vertices, asymptoto  $TB$  paral-  
 lela, ab asymptoto  $bt$  bifariam secatur.

Coroll. 16.

244. Diametri conjugata in Hyperbolis sunt sibi in-  
 vicem conjugata quatuor tangentes per earum vertices du-  
 ctæ concurrunt in asymptotis, ubi parallelogrammum consti-  
 tuunt inscriptum figure clausæ quatuor Hyperbolarum ra-  
 mis, cujus area est semper constans, æqualis nimirum  
 rectangulo sub axibus, ac parallelogrammum semi-  
 diametrorum conjugatarum rectangulo sub semiaxibus.

245. Ducta enim in fig. 83.  $aLQ$  patalla  $iCi$ , erit  
 segmentum asymptoti  $CQ$  æquale  $IL$ , adeoque duplum  
 $DL$ , ac proinde  $aLQ$  tangens ( num. 223 ), & ducta  
 $ldi$ , ac sumpta  $dq$  æquali  $dC$ , patet ob  $Cl$ ,  $Ci$ , æ-  
 quales  $CL$ ,  $CI$ , fore &  $li$  æqualem  $LI$ , adeoque æ-  
 qualem tam  $CA$ , quam  $CQ$ , & proinde  $dl$ ,  $di$  dimi-  
 dias  $CA$ ,  $CQ$ , Quare  $Al$ ,  $Qi$  convergent ad idem  
 punctum  $q$  ita, ut sit  $Cq$  dupla  $dq$ , &  $Aq$   $Qq$  sectæ bifari-  
 am in  $l$ ,  $i$ , adeoque tangentes. Erit igitur & dia-  
 meter  $li$  parallela tangentibus ductis per vertices dia-  
 metri  $Ll$ , adeoque ejus conjugata: &  $AaQq$  erit pa-  
 rallelogrammum, quatuor tangentium, cujus area con-  
 stanter æqualis erit areæ rectanguli  $TtBb$ , cum sint qua-  
 druplex



duplex triangulorum  $ACe$ ,  $TCe$  equalium (num. 220) & area  $CLL$  parallelogrammi semidiametrorum conjugatarum, vel area  $ACLI$  cui ea equatur, equalis area  $TMCx$ , cum sint duplex triangulorum  $ACI$ ,  $TCM$  equalium.

Coroll. 17.

246. Omnium diametrorum primariarum minima est axis transversus, secundariarum conjugatus; quarum vertices quo magis ab axe ipso transverso vel conjugato recedunt, ea majores sunt, nec nisi bina hinc inde in equalibus angulis inclinatae aequales: primaria autem est major, equalis, vel minor respectu sua conjugata, ac equalis asymptotorum, in quibus jacet axis transversus, & Hyperbola, sunt acuti recti, vel obtusi, prout axis transversus fuerit, major, equalis, vel minor respectu conjugati.

247. Nam quo magis semiordinata  $RI$  distat a vertice axis  $M$ , eo magis crescit (num. 79) & ipsa, ac crescentes abscissa a centro  $CR$ , crescit & summa quadratorum utriusque, adeoque crescit semidiameter  $CI$ . Eo autem magis &  $IL$  recedit ab  $MX$ , adeoque  $L$  ab  $X$ , & proinde eo magis crescit semidiameter secundaria  $CL$ , cum ea sit primaria Hyperbolae conjugatae. Bina autem  $CI$ ,  $CN$ , terminatae ad puncta  $I$ ,  $N$  ordinatae eisdem in angulis  $RCI$ ,  $RCN$  cum axe  $CM$  equalibus ob  $CR$  latus commune, &  $RI$ ,  $RN$  latera aequalia triangulorum rectangulorum  $CRI$ ,  $CRN$ , aequales sunt. Porro cum in triangulis  $COM$ ,  $COX$  latus  $CO$  sit commune, &  $OM$ ,  $OX$  latera aequalia (n. 240, prout semiaxis transversus  $CM$  fuerit major, equalis, vel minor respectu conjugati  $CX$ , etiam angulus  $COM$  erit equalis, vel minor angulo  $COX$ , adeoque, ob  $MX$ ,  $IL$  parallelas, &  $CDI$  major, equalis, vel minor  $CDL$ , & semidiameter primaria  $CI$  major, equalis, vel minor  $CL$ . Contra vero angulus asymptotorum  $TCt$  equalis alterno  $COX$  erit minor, equalis, vel major  $OCB$ , qui equatur  $MOC$ , adeoque is angulus  $TCt$  asymptotorum, in quo jacet

## 78 SECTIONUM CONICARUM

axis transversus & Hyperbola erit acutus, rectus, vel obtusus.

Coroll. 18.

248. *Differentia quadratorum binarum semidiametrorum conjugatarum est ad quadruplam potentiam Hyperbole ipsius, ut cosinus anguli asymptotorum ad radium adeoque semper constans, & equalis differentie quadratorum semiaxium.*

F.78 249. Ducta enim in fig. 78 IV perpendiculari asymptoto  $Ca$ , differentia quadratorum semidiametri  $CI$ , & tangentis  $Ia$  que tangens aequatur ( num. 242 ) semidiametro conjugate diametri  $Ii$  erit semper eadem, ac differentia quadratorum  $CV$ ,  $Va$ , cum ob angulos ad  $V$  rectos, quadratum illius semidiametri aequetur quadratis  $CV$ ,  $VI$  simul, & quadratum  $Ia$  quadratis  $aV$ ,  $VI$  simul. Porro quadratum  $CV$  excedit bina quadrata  $CD$ ,  $DV$  per bina rectangula  $CDV$ , & quadratum  $aV$  deficit a binis quadratis  $Da$ ,  $DV$  per bina rectangula  $VDa$ , sive a binis quadratis illis ipsis  $CD$ ,  $DV$  per bina illa ipsa rectangula  $CDV$ . Igitur differentia quadratorum  $CV$ ,  $Va$  aequatur quadruplo rectangulo sub  $CD$ ,  $DV$ . Est autem rectangulum sub  $CD$ ,  $DV$  ad rectangulum sub  $CD$ ,  $DI$ , sive ad potentiam Hyperbolae in ratione  $DV$  ad  $DI$ , nimirum ut cosinus anguli  $VDI$ , sive interni, & oppositi  $aCA$  ad radium, adeoque constans, & cum axes ipsi sint diametri conjugate, erit equalis differentie quadratorum semiaxium.

## SCHOLIUM IV.

250. **H**isce jam ex constanti illa Hyperbolae potentia deductis redeundum ad n. 223, ex quo potentia ipsa constans deducta est, ut alium sulculum inde simul cum ea prorumpentem persequamur, qui tamen minus fecundus est.

E L E M E N T A. 79

Coroll. 19.

351. Si ab orbita occurrat asymptotus; reſtangula ſub  
 punctis interſectionis cum asymptoto, & binis cum parva  
 punctis Hyperbolæ, vel utraque ex his; & illis binis,  
 punctis erunt inter ſe, & mutata utrunque poſitione  
 orbitæ, diameter manens directio; erunt ſemper ma-  
 gitudinis conſtantis, æqualia nimirum ſemper quadra-  
 to ſemidiametri parallelæ ipſis chordis; ac ubi chorda  
 in punctum ratiorem terminatur, quadrato etiam tangen-  
 ti in puncto contactu, & utraque asymptoto; & ſi  
 ipſa chorda occurrat etiam Hyperbolis conjugatis;  
 reſtangula inter ſe æqualia, & conſtantia erunt  
 eorundem.

352. Cum enim ſint in fig. 78, 79 æquales inter  
 ( num. 221 )  $HP, ph$ ; &  $Hp, hP$ , æqualia erunt  
 quatuor reſtangula  $HPb$ ,  $Hpb$ ,  $PHp$ ,  $Php$ , & manen-  
 tibus directionibus  $PH, Ph$  ad asymptotos, reſtangula  
 $HPb$  erit ſemper magnitudinis conſtantis ( num.  
 225 ). Ab eundem autem in fig. 78 punctis  $P, p$  in  
 puncto  $I$ , abis reſtangulum  $PHp$  in quadratum tan-  
 gentis  $AI$ ; cui æqualis eſt ( num. 242 ) ſemidiamet-  
 ri parallelæ ipſi; & chordis  $Pp$ ; ac in fig. 79 ab eun-  
 dem punctis  $H, h$  in punctum  $C$ , abis reſtangulum  
 $HPb$  in quadratum ſemidiametri  $CI$ . Hinc autem ſi in  
 fig. 84 ſint  $AL, Ll$  diametri conjugatæ; & ipſa chorda  
 occurrat per punctum Hyperbolæ conjugatæ in  $N, n$ ;  
 erunt quinque illa reſtangula  $HPb$ ,  $Hpb$ ,  $PHp$ ,  $Php$ , &  
 quatuor  $NHn$ ,  $Nhn$ ,  $HNh$ ,  $Hnh$  erunt æqualia ei-  
 ſdem quadrato ſemidiametri  $CL$ .

Coroll. 20.

353. Si fig. 84 e vertice  $p$  ſemidiametri primariæ in  
 punctis diametrum primariam  $ICI$  ducatur ſemidiamet-  
 ri  $pR$ , & e vertice  $D$  ſemidiametri  $CD$  ejus conjuga-  
 tæ  $DE$  ipſi  $pR$  parallelæ, erit quadratum  $CE$  ab  
 ipſo a centro per poſtiorum, æquale reſtangulo ſub  
 $R, Ri$  abſciſſis a binis verticibus per priorum, &  
 differentia binorum quadratorum binarum abſciſſarum  
 centro  $CE, CR$  aquabitur quadrato ſemidiametri  $CI$ ,

## SECTIONUM CONICARUM

*Est quam semiordinata est demissa : differentia vera quadratarum semiordinata  $PR$ , & parallela  $DE$  quadrato semidiametri  $CL$  conjugate ipsius  $CI$ , & idem habebitur si ea semiordinata, & ejus parallela ducatur in diametrum secundariam, sed ibi quadratum abscissa a centro per ordinatam equabitur rectangulo sub abscissis a binis verticibus per parallelam,*

254. Nam si  $Cp$ ,  $CD$  sint semidiametri conjugate,  $pD$  erit parallela asymptoto  $AQ$  ( num. 242 ), & secta bifariam a  $Cp$  in  $V$ . Quare si  $Rp$  occurrat asymptotis in  $H$ ,  $h$ , & ducatur  $hD$ , quæ occurrat asymptoto  $HC$  in  $H'$ , erit ( n. 204 ) etiam  $HH'$  secta bifariam in  $C$ , & cum  $Hh$  secetur bifariam in  $R$  ( nu. 221 ) erit  $hH'$  parallela  $CR$ , adeoque ordinata diametri  $ICL$ , & ab ea secta bifariam in  $R'$ .

255. Jam vero rectangulum  $hDH'$  ( quod est æquale ( num. 251 ) quadrato  $CI$  ) una cum quadrato  $RD$ ; sive  $CE$  equatur quadrato  $R'h$ , sive  $CR$ , vel quadrato  $CI$ , & rectangulo  $IRi$ ; adeoque dempto utrobique quadrato  $CI$ , quadratum  $CE$  equatur rectangulo  $IRi$ . Pariter cum quadrata  $CE$ ,  $CI$  simul æquentur quadrato  $CR$ , erit quadratum  $CI$  differentia quadratorum  $CR$ ,  $CE$ ; quadratorum vero  $ED$ ,  $Rp$ , sive  $Rh$ ,  $Rp$  differentia est rectangulum  $hpH$ , sive ( num. 251 ) quadratum  $CL$ . Demum ut  $Cp$ ,  $CI$  sunt semidiametri primariæ,  $CD$ ,  $CL$  secundariæ respectu Hyperbolæ  $PIp$ , illæ sunt secundariæ, hæ primariæ respectu Hyperbolæ  $DL$ . Quare patent tam quæ de primariis, quam, quæ de secundariis diametris affirmaveram.

Coroll. 21.

256. *Quadratum semiordinata ad differentiam quadratorum sua semidiametri, & abscissa a centro in diametris primariis, summam in secundariis, & ad rectangulum in illis sub binis abscissis a binis diametri verticibus est ut quadratum semidiametri, vel diametriconjugate ad quadratum illius ipsius sua semidiametri, vel diametri.*

E L E M E N T A 87

277. Si enim præterea diameter primaria  $LI$  occurrat ordinatæ in  $R$ , erit quadratum  $Rb$ , five quadratum  $Rp$  cum rectangulo  $Hpb$ , nimirum bina quadrata  $CE$  ad quadratum  $La$ , five  $CL$ , ut quadratum  $Rb$ , five quadratum  $Cf$  cum rectangulo  $IRi$  ad quadratum  $CI$ ; ac dividendo quadratum  $Rp$  ad quadratum  $CL$ , ut differentia quadratorum  $CR$ ,  $CI$ , five ut rectangulum  $IRi$  ad quadratum  $CI$ ; vel alternando quadratum  $Rp$  ad differentiam quadratorum  $CR$ ,  $CI$ , ut ad rectangulum  $IRi$ ; ut quadratum  $CE$  ad quadratum  $CI$ , vel ut quadratum totius  $LI$  ad quadratum totius  $LI$ .

278. Quod si diameter secundaria  $IL$  occurrat in  $R$  ordinatæ  $Pp'$ , asymptotis autem in  $b$ ,  $H'$ , erit quadratum  $Rb$  ad quadratum  $La$ , five  $CI$ , ut quadratum  $SR'$  ad quadratum  $CL$ , & componendo quadratum  $Rb$  cum quadrato  $CI$ , five cum rectangulo  $p'hp'$ , (nimirum quadratum  $Rp'$  ad quadratum  $CI$ , ut summa quadratorum  $CR'$ ,  $CL$  ad quadratum  $CL$ , & alternando quadratum  $Rp'$  ad summam quadratorum  $CR'$ ,  $CL$ , ut quadratum  $CI$  ad quadratum  $CL$ , five quadratum totius  $LI$  ad quadratum totius  $LI$ .

SCHOLIUM V.

279. Hæc deductis generaliter pro quavis Hyperbolarum specie, addam hic postremo nonnulla; quæ pertinent ad Hyperbolam æquilateram, quæ nimirum habet latus rectum æquale axi transverso, atque & ipsos axes æquales, & juxta num. 246 angulos asymptotorum rectos. Pleraque, quæ ad ipsam Hyperbolam æquilateram pertinent, deducuntur ex iis, hæc hic pro Hyperbolis in genere demonstravimus, atque hic pariter locum sibi vindicant. Interea notandum illud: Hyperbolam æquilateram esse id inter Hyperbolas, quod est circulus inter Ellipses. Nam Ellipses, cujus axes æquales sint, jam in circulum mi-

## 83 SECTIONUM CONICARUM

Coroll. 22.

260. Hyperbola, que axem transversum habet equalem conjugate, habet primo latus rectum equale axi transversa, unde & æquilatera dicitur: Secundo quæ datam distantia foci a centro duplum quadrato axi utriuslibet: Tertio angulus asymptotorum rectus: Quarto potentiam equalem dimidio quadrato semiaxis utriuslibet: Quinto quasvis diametros conjugatas æquales: Sexto quadratum cuiusvis semiorinata cuiuslibet diametri primarie æquale reſtanguſo ſub binis abſciſſis a binis verticibus: Septimo quadratum cuiusvis semiorinata cuiuslibet diametri ſecundaria æquale ſumma quadratorum ſemidiametri ipſius vel primarie, vel eius conjugate, & abſciſſa a centro: Octavo ipſam ſemiorinatam ad axem conjugatum æqualem diſtantiã ſui contactus cum ipſa axe a vertice axis tranſverſi: Nono e binis diametris primariis, vel e binis ſecundariis æqualibus, habet alteram alterius conjugatã perpendicularẽ.

261. Primum patet, cum ſit ( num. 71 ) latus rectum tertium proportionale poſt binos axes. Secundum deducitur ex num. 64. cum quadratum diſtantiæ foci a centro æquetur ſumme quadratorum binorum ſemiaxiũ, adeoque ſibi ii æquales ſunt, duplo quadrato utriuslibet. Tertium demonſtratum eſt num. 246.

F. 83 Quatum patet in fig. 83. Nam ſi angulus TCe fuerit in ea reſtus & COM ac MCO ſemirectus, & OC æqualis OM, adeoque reſtanguſum ſub CO, & OM, quod ( num. 227 ) dicitur potentia Hyperbolæ, æquabitur quadrato utriuslibet CO, vel OM, nimirum dimidio quadrato CM, vel CX. Quintum demonſtratum eſt n. 246, & eruitur etiam ex n. 248: cum quadratorum diſſerentiã nulla ſit in axibus, adeoque nulla in quibusvis diametris conjugatis. Sextum deducitur ex quinto, & ex num. 256, cum nimirum quadratum ſemiorinatæ ad reſtanguſum ſub iis abſciſſis debeat eſſe ut quadratum ſemidiametri conjugatæ, ad quadratum eius ſemidiametri primariæ, quæ in Hyper-

erbola, æquilatera est ratio æqualitatis. Septimum  
 ab eodem numero, nam in diametris secunda-  
 re quadratum semiordinatæ eodem argumento erit ad  
 quadratum quadratorum ejus semidiametri, & abscissæ  
 pariter in ratione æqualitatis. Octavum pa-  
 teret septimo & tertio. Nam ex septimo si in fig.  
 82,  $U$  sint axes, erit quadratum  $R'p'$  æquale qua- F.84  
 drato  $CR'$ ,  $CI$ , & ex tertio angulus  $ICR'$  rectus,  
 & si concipiatur  $RI$ , erit ejus quadratum æqua-  
 tum pariter quadratis  $CI$ ,  $CR'$  adeoque quadrato  $R'p'$ ,  
 & proinde ipsa  $R'p'$  ipsi  $RI$  æqualis. Nonum facile  
 demonstratur è quinto: nam in fig. 83 si  $CN$  sit equa- F.83  
 lis  $CI$  erit & angulus  $NCR$  æqualis  $ICR$  (nu. 245),  
 & adeoque &  $NCG$  æqualis  $ICD$ , qui ob omnia latera  
 triangulorum  $CDI$ ,  $CDL$  æqualia, erit æqualis angu-  
 lo  $DCL$ . Quare addito  $NCD$  communi erit  $NCL$  æ-  
 qualis recto  $GCD$ . Sunt autem  $NC$ ,  $IQ$  semidiamete-  
 ri primariæ respectu Hyperbolæ  $NMI$ , &  $CL$  conju-  
 gata posterioris, ac eadem sunt secundariæ respectu Hy-  
 perbolæ  $LX$ , adeoque valet idem pro utroque diame-  
 trum genere.

Coroll. 23.

261. Si e birtis verticibus  $V$ , u in fig. 85 cujusvis  
 generis primariæ Hyperbolæ æquilateræ, ducantur binæ  
 rectæ ad quodvis punctum  $P$  ejus perimetri, & per verticem  
 $V$  ejusdem rectæ tangens  $VI$  occurrens ipsi  $uP$  in  $I$ , an-  
 gulus  $VuP$  æquabitur angulo  $VPR$ , vel  $PVI$ , adeoque  
 quadratum chordæ  $VP$  æquabitur reſtångulo  $uPI$ ; diffe-  
 rentia angulorum ad basim  $Vu$  trianguli  $VPU$  constan-  
 ter æquabitur angulo  $uVI$ , quem continet tangens  $VI$  cum  
 diametro  $Vu$ .

262. Ducta enim semiordinatâ  $PR$ , quæ erit paral-  
 la tangenti  $VI$ , erit (num. 260) quadratum ipsius  
 æquale reſtångulo  $uRV$ , adeoque  $uR$  ad  $PR$ , ut  
 $PR$  ad  $RV$ , nimirum ab angulum ad  $R$  communem  
 in duobus triangulis  $VRP$ ,  $PRu$ , & angulus  $uRP$  æqualis  
 angulo  $VPR$ , adeoque & alterno  $PVI$ . Quare ob an-  
 gulum ad  $P$  communem etiam triangula  $IVP$ ,  $PuV$  re-

84. SECTIONUM CONICARUM  
 manent similia, & IP ad PV, ut PV ad P $\nu$ , ac quadratum VP æquale rectangulo  $\nu$ PI. Est autem angulus  $\nu$ VI differentia anguli  $\nu$ VP ab angulo IVP, sive V $\nu$ P.

### SCHOLIUM VI.

264. **A** Tque hoc quidem pacto ex constructione problematis tertii eruimus primariam proprietatem diametrorum ordinatas suas secantium bifariam, & inde Hyperbolæ ad asymptotos relatæ proprietates deduximus alias nihilo minus fecundas, ac Hyperbolæ demum æquilatere naturam, & proprietates plerasque. In hac postrema habetur etiam alia quedam elegans analogia ipsius Hyperbolæ æquilatere cum circula, & constructio loci geometrici, cujus usus nonnunquam occurrit.

F. 86 265. Constat ex primis Geometriæ elementis in circulo supra chordam quamvis V $\nu$  in fig. 86 ad quodvis peripheriæ punctum P ad eandem ab ipsa chorda partem jacentis ductas binas rectas, contineri angulum VP $\nu$  semper æqualem, cujus nimirum mensura est arcus dimidius V $\nu$ H, cui insistit, sive qui ab eadem chorda subtenditur ad partem oppositam. Quare in circulo reliquorum angulorum PV $\nu$ , P $\nu$ V summa est semper constans, æqualis nimirum complemento anguli VP $\nu$  duos rectos; qui cum sit æqualis angulo  $\nu$ VI, quem tangens Vi ad partem oppositam ducta continet cum ipsa chorda, erit summa illa angulorum PV $\nu$ , P $\nu$ V æqualis angulo  $\nu$ VI, quem ea chorda ad eandem partem continet cum tangente Vi; dum in Hyperbola non summa, sed differentia angulorum PV $\nu$ , P $\nu$ V æquatur angulo  $\nu$ VI, quem diameter  $\nu$ V continet pariter cum tangente Vi ad eandem partem.

266. Hinc si queratur hujusmodi Problema, *super data basi constituere triangulum ita, ut summa, vel differentia angulorum ad basim æquetur angulo dato; utrumque Problema erit indeterminatum, infinitas nimirum solutiones admittens, quas omnes idem continuus*



latus locus geometricus complectitur; qui pro summa erit arcus circuli, pro differentia crux infinitum Hyperbolæ. Pro utroque autem constructio est hujusmodi, *Ad punctum V extremum data basis fiat angulus  $\nu$ VI æqualis data summa, vel differentie. Tum pro F.85 summa in fig. 86 construat arcus circuli VPu habens 86 VI pro tangente, Vu pro chorda, & pro differentia in fig. 86. arcus Hyperbolæ æquilatæ VP indefinite productus habens pariter VI pro tangente, & Vu pro diametro primaria, & ad quodvis punctum P eorum arcuum ductis rectis VP, Pu habeatur solutio problematis.*

267. Postea circulus cum iis conditionibus admodum facile describitur. Ducatur VC perpendicularis ad VI, ac secta bifariam Vn in O; erigatur OC perpendicularis ad Vn, donec occurrat in C priori perpendiculari; ac centro C intervallo CV, vel Cn, quas partes fore æquales; fiat circulus, quem patet debere transire per V, n, & habere pro tangente VI perpendiculararem ejus radio. Ac eadem constructio esset, si quaeretur, quod eodem recidit, punctum P ita, ut angulus VPn esset æqualis dato. Tum nimirum faciendus esset angulus  $\nu$ Vi ad partes oppositas P æqualis dato; & peracta reliqua constructione haberetur; quod quaerebatur: ac eodem pariter redit Problema; quo scilicet per data Vn quaeratur segmentum circuli capiens angulum VPn æqualem dato.

268. Hyperbolæ vero æquilatæ facile pariter determinatur data diametro primaria Vn, & tangente VI. Secta enim diametro ipsa Vn bifariam in C, & acta per C recta parallela tangenti, in qua capiantur CB, Cb æquales semidiametris CV, Cn, erit Bb diameter conjugata æqualis primariæ Vn, ac datis binis diametris conjugatis datur Hyperbolæ.

269. Nam in primis ex num. 223 eruitur expeditissima methodus describendi Hyperbolam per puncta dato puncto P & asymptotis concurrentibus in C in fig. 87. Circumspecta circa P regula, quæ ipsi asymptotis

86 SECTIONUM CONICARUM.

is occurrat in  $H, h$ , sumatur semper  $hp$  aequalis  $HP$  directione contraria eritque  $p$  ad Hyperbolam; cuius uterque ramus facile describitur. Datis autem binis dist.  
 F.84 metris conjugatis  $Il, Ll$  in fig. 84 facile inveniuntur asymptoti (num. 244) ducendo per  $I, i, l, L$  rectas ipsi parallelas ac per puncta,  $A, Q, a, q$ , in quibus concurrunt, asymptotos; quibus datis, & dato puncto  $I$  iam dantur omnia puncta per expositam constructionem.

SCHOLIUM VII.

270. **E**X eadem proprietate Hyperbolæ, ex qua eusmodi constructio derivatur, & illud ostendi potest, admodum facile per concursum Hyperbolæ datæ cum dato circulo inveniri binas medias continue proportionales inter binas rectas datas, cujus Problematis casus particularis est etiam celebris illa cubi duplicatio ab Apolline olim præscripta, quod Problema idcirco Veteres usque adeo torserit, & tandem frustra per planam Geometriam, sive per rectarum intersectiones inter se, vel cum circulo est quaesitum.

271. *Capiantur in lateribus anguli recti  $HCh$  in fig. 88. binæ rectæ  $CR, Cr$  æquales datæ, & completo re-*  
 F.88 *ctangulo  $RPrC$  ducatur  $CP$ , quæ assumpta pro diametra describatur circulus, qui ob angulos ad  $R, r$  rectos transibit per ipsa puncta  $R, r$ : per punctum autem  $P$ , asymptoti  $HC, Ch$  describatur Hyperbola, quæ ubi circulo occurreret iterum in  $p$  solvet problema; ducta enim per perpendiculari  $Ch$ , erunt  $ip, Ci$  media continue proportionales inter  $Cr, CR$ .*

272: Ducta enim per  $P, p$  recta, quæ asymptoti occurrat in  $H, h$ ; erit ex natura Hyperbolæ  $HP$  aequalis  $ph$ , &  $Hp$  aequalis  $Ph$  adeoque &  $Cp$  aequalis  $ih$ . Ex natura vero circuli recta  $Cp$  erit perpendicularis  $Pp$ , ac triangula rectangula  $Cip, pih$  similia toti  $Cph$ , adeoque & inter se. Erit igitur  $Cr$  ad  $Ci$ , ut  $HP$  ad  $Hp$ , sive sumptis æqualibus, ut  $hp$  ad  $hP$ , sive ut  $ip$  ad  $rP$ .  
 Erit

Etia autem & *hi* ad *ip*, ut *ip* ad *Ci*; quamobrem & *Ci* ad *ip* erit, ut *ip* ad *Ci*; adeoque eadem erit ratio *Ci* ad *ip*, *ip* ad *Ci*, *Ci* ad *FP*, vel *CR*, & *Ci*, *ip*, *Ci*, *CR* continue proportionales.

273 Verum etiam sine totius Hyperbolæ constructione satis erit descripto circulo unicum ejus punctum determinare, circumducendo regulam circa *P* donec apprehendatur *PH* æqualis *pb*; quin ista etiam sine circulo secta *PC* bisariant in *O* satis erit regulam circumducere, donec deprehendatur *OH* æqualis *Ob*; ductis enim *OB*, *Cp* perpendicularibus ad *Hb* ob triangulum *HOH* isoscelium erit *HB* æqualis *Bb*, & ob *PO*, *OC* æquales, erit *PB* æqualis *Bp*, adeoque & *PH* æqualis *pb*. Sed determinatam problematis solutionem dat binorum locorum geometricorum circulis, & Hyperbolæ intersectis, ubi se continui eorum arcus intersectant:

274 Circuli pariter & Hyperbolæ intersectio exhibet etiam admodum expeditam methodam trisectionis anguli, quod Problema pariter diu a Geometris per planam Geometriam nequicquam questum, quam tandem transcendit proffus; ac ex ipsa constructione patebit, fieri omnino non posse, ut per circulum, & rectam linteam solvatur unquam. Satis autem constat, angulum quemvis secari in partes æquales tres, si secetur in tres partes æquales arcus circuli habentis centrum in anguli vertice, & interceptus inter anguli ipsius crura, seu latera.

275. Sit igitur arcus circuli *FBm* fig. 89 secundus in partes æquales tres. Chorda *mF* secetur bisariam in *E*. Agatur per *E* recta *AB* ipsi perpendicularis, que transibit per centrum *C*. Foco *F*, directrici *AB*, ratione determinante 2 ad 1 sit Hyperbola, que arcum circuli occurrat in *P*, eritque *FP* pars tertia arcus *FBm* ita, ut ducta *PO* parallela *Fm*, que ipsi directrici occurrat in *D* arcus in binis punctis *P*, *O* sectus sit in tres partes æquales.

276. Demonstratio est admodum facilis, Quoniam  
chor.

## §§ SECTIONUM CONICARUM

Chorda  $PO$  est diametro  $AB$  perpendicularis, ab ea secatur bifariam. Est autem  $FP$  ad  $PD$  in ratione determinante 2 ad 1. Quare  $FP$  est dupla  $PD$ ; adeoque æqualis  $PO$ , & proinde arcus  $FP$ ,  $PO$  æquales. Ob chordas autem  $Fm$ ,  $PO$  parallelas, etiam  $FP$  est æqualis  $MO$ . Quare tres partes  $FP$ ,  $PO$ ,  $Om$  sunt inter se æquales, ut oportebat. Quoniam autem est &  $Fm$  ad  $ME$ ; ut 2 ad 1; patet  $m$  fore alterum axis transversii verticem. Quod si alter vertex sit  $M$ , erit  $FM$  dupla  $ME$ , & assumpta  $m$   $V$  versus  $M$  æquali  $FM$ , erit &  $mV$  dupla  $VE$ ; adeoque  $VE$ ;  $ME$  æquales, &  $FM$  æqualis  $MV$ , sive  $FM$ ,  $MV$ ,  $Vm$  æquales: nimirum divisa  $Fm$  in  $M$ , &  $V$  in partes tres erunt,  $M$ ,  $m$  vertices axis transversii,  $V$  centrum Hyperbolæ.

277. Porro idem ramus Hyperbolæ secabit circulum etiam alicubi in  $p$ , ac ramus oppositus alicubi in  $P$ , & erit  $Fp$  dupla  $pd$ , æqualis  $po$ , ac tres chordæ, & arcus  $Fp$ ;  $po$ ,  $om$  æquales, ac pariter  $FP'$  dupla  $P'D$  æqualis  $P'O'$ , quæ etiam ob  $P'O'$ ,  $mF$  parallelas erit æqualis  $O'm$ . Quare tres chordæ, & arcus  $FP'$ ,  $P'O'$ ,  $O'm$  æques. Nimirum sicut  $FP$  erit pars tertia arcus  $FBm$ , ita  $FBP$  erit pars tertia arcus  $FBP'...FBm - AFBm$ , sive ipsius  $Fm$  integro circulo aucti; &  $FBmAp$  erit pars tertia arcus  $FBmAFBmAFBm$ ; sive arcus  $Fm$  aucti binis circulis, & e contrario arcus  $Fp$  erit tertia pars arcus  $FAm$ ;  $FAP'$  erit tertia pars  $FAmBFAm$  ejusdem  $FAm$  circulo aucti  $FAmBP$  pars tertia  $FAmBFAmBFAm$  ejusdem aucti binis circulis, & cum  $FP$  sit tertia pars arcus  $FBm$ , &  $Fp$  tertia arcus  $FAm$ , erit  $PP'$  tertia totius circuli: cumque  $FP$  sit tertia  $FBm$ , &  $FBP'$  tertia  $FBmAFBm$ , sive ipsius  $FBm$  circulo aucti, erit  $PP'$  pars itidem tertia circuli totius, & puncta  $p$ ,  $P$ ,  $P'$  totum circulum dividunt in partes æquales tres.

278. Id autem semper continget in quavis solutione geometrica, qua quæraturs pars tertia arcus cujuscumque. Semper omnino inventiri debent puncta tria, quæ totum circulum dividant in partes æquales tres, nec

corum

horum punctorum inveniri unquam potest unum, si-  
ne reliquis binis. Ratio ejus est ipsa circuli natu-  
ra in se ipsum redeuntis in infinitum, infinito quo-  
dam quarundam veluti spirarum numero, quarum  
nulla prima, nulla ultima. Semper autem ipse circu-  
lus ita sibi similis erit, ut quascumque proprietates  
habuerit quivis ejus arcus binis punctis interceptus ge-  
nerales, & pendentes unice ab eo, quod singula ejus  
puncta eque distent a centro eodem, easdem habe-  
re debeat tam arcus, qui ab altero ex iis punctis  
incipiens desinat in alterum in eadem spira, quam  
qui desinat post unam integram conversionem pera-  
ctam, tam qui post duas, tam qui post earum nume-  
rum quemcumque, idque tam progrediendo ab eo pun-  
cto versus unam plagam, quam tendendo versus oppo-  
sitam. Quare ubi queritur pars tertia arcus inci-  
pientis ab  $F$ , & desinentis in  $m$ , fieri omnino non  
potest, ut aliqua geometrica constructione determi-  
netur pars tertia arcus  $FBm$ , non vero simul & arcus  
 $FBmAFBm$ , & ita porro quocumque numero integra-  
rum conversionum assumpto. Quin imo eadem simul  
constructione invenienda erit pars tertia omnium o-  
mnino arcuum, qui pergendo ab  $F$  versus  $A$  desinunt  
in  $m$ , sive in eadem assumatur spira punctum  $m$ , si-  
ve in quavis quocumque integris conversionibus dis-  
tincta.

279. Quamobrem licet eo problemate videatur re-  
qui una pars tertia unius arcus, revera requiruntur  
innumere innumerorum arcuum, quod prima fron-  
te videretur factu impossibile non solum per circulum  
& rectam lineam, sed per curvas in immensum ma-  
gis compositas. Sed illud perquam commode accidit,  
ut omnium illorum numero infinitorum arcuum tri-  
sectiones habeantur in illis ipsis tribus punctis  $P$   
 $P'$ ,  $P''$ , a se invicem distantibus per tertiam circu-  
li partem. Si enim  $FP$  sit tertia pars arcus  $FBm$ ;  
addendo huic integrum circulum, addenda erit par-  
s tertiae prioris pars circuli tertia  $POP'$ , & habebitur

## 90 SECTIONUM CONICARUM.

Pro parte tertia totius  $FBm$  arcus  $FPP$ : addito toti arcui trifecando alio integro circulo: addenda erit parti tertia iterum pars tertia circuli  $PP$ ; & jam pars tertia arcus trifecandi erit  $FPPp$ : addendo veto iterum alium circulum; addenda erit parti tertia iterum pars tertia circuli totius  $PP$ ; eritque pars tertia arcus trifecandi  $FBm$  arcus  $FPP$ ; & ita porro novis advenientibus circulari arcui trifecando; novi semper accedent parti tertia trientes circuli; & trifectionum puncta semper discurrunt per  $P$ ;  $P'$ ;  $p$  in infinitum. Existente autem partiter  $Fp$  parte tertia arcus  $FAm$ ; ac novis integris subjectis circulis trifectiones discurrunt per  $p$ ;  $P'$ ;  $P$  in infinitum. Quamobrem tria requiruntur ad hoc Problemata circuli puncta; & cum recta; vel circulus circulus non nisi in duobus punctis secare possit; id Problema solvere omnino non poterunt: poterit Hyperbola; quae potest in tribus punctis circulo occurrere; immo potest etiam si quatuor puncta requirerentur; ac in applicatione Algebrae ad Geometriam ostendemus binas qualvis Sectiones Conicas problemati solvendo sufficere; vel quamvis cum circulo. Sed hisce omissis regressandum est jam ad illam nostram generalem Problematis constructionem.

## SCHOLIUM VIII.

280. **U**T ex generali constructione Propositionis tertiq; novos & satis uberes capiamus fructus; punctum illud  $L$ ; quod ibi assumpseramus ubicunque; F. 90 assumamus jam in fig. 90, 91; 92 in ipsa recta data 91  $KH$ ; cujus concursus queritur cum Conica Sectione. 92 Patet punctum  $O$  fig. 41 debere hic abire in  $H$ ; cum ibi recta  $LQ$  quaerita sit parallela ipsi  $KH$ ; adeoque illius rectam  $OZ$ ; quae ibidem erat parallela rectae  $HF$  abire in ipsam  $HF$  hujus. Quare jam constructio evadet multo simplicior. Sumpto radio  $LM$ , qui ad perpendiculariculum demissum ex  $L$  in directricem sit in ratione deter-

E L E M E N T A. 31

determinante, & descripto circulo, si is alicubi occurrat  
 in recta FH, in  $T$ ; rectæ FH, FH parallele ipsi  
 Li determinabunt puncta P; p ad Conicam Sec-  
 tionem, ac si punctis T, t coeuntibus recta HF con-  
 tineret circulum, etiam puncta P, p coeunt, & recta  
 in Sectionem Conicam continget. Quod si præterea  
 punctum L abeat in aliquo perimetri punctum P, ut  
 in fig. 93; patet etiam PH fig. 90, 91, 92 debere abi-  
 re in LT sibi parallelam; circulo transiente per focus  
 coeunt bina puncta F, T: At si L fuerit extra F. 93  
 circum, vel Parabolam; vel inter binos Hyperbolæ  
 ramos oppositos; focus F jacebit extra circulum; si ve-  
 ro L assumatur intra Ellipsim, vel Parabolam; vel in  
 unius Hyperbolæ ramum; focus cadet intra circulum.  
 Quod sic etiam accuratissime demonstrari potest;

ad. Sit in fig. 94; 95; 96 P in perimetro Sectio-  
 nis Conicæ circa directricem, & ducta PH perpendi-  
 culari ad directricem ipsam, ac producta tantundem ad  
 partes oppositas ita, ut PQ æquetur PH; per H, P,  
 Q ducantur ex F rectæ indefinite ad partes H, P, Q,  
 & vel neutra rectarum FP, FQ, incidet in directricem  
 ut in fig. 94; vel incidet FP in l; ut in fig. 95; vel  
 etiam FQ in h, ut in fig. 96. Assumpto in FP quovis  
 puncto L; agatur recta AL parallela HQ occurrens  
 directrici in S; rectis FH, FQ in A, a, ac ipsi pa-  
 rallela in fig. 96 sit hq occurrens rectis FH, FP in g,  
 & patet fore semper FL ad LA, vel La; ut FP ad  
 FH, vel PQ ipsi æqualem; nimirum in ratione de-  
 terminante, ac in eadem ratione fore FP ad ph in  
 fig. 96 coeuntibus ibi punctis a, S cum h, ubi L con-  
 tineretur cum p.

21. Inde vero patet, solum in fig. 96 punctum p  
 in iterum ad Sectionem Conicam existente Ep ad pb  
 ratione determinante, cum nimirum in nullo pun-  
 cto haberi possit FL ad LS in ea ratione, nisi id vel  
 signat cum P congruentibus A, S cum H, vel abeat  
 congruentibus a, S cum h. Erit igitur punctum  
 circa Ellipsim, Parabolam, & utrumque Hyperbolæ  
 ramum,

## 92 SECTIONUM CONICARUM

ramum, si assumatur in fig. 94, 95 ubicumque ultra P, & in fig. 96 inter P, p, erit autem intra illas, vel intra alterum hujus ramum, si assumatur extra P inter ipsum & F, vel in fig. 96 ultra p.

283. Porro cum radius circuli assumi debeat ad LS in ratione determinante, in qua semper est LP ad LA, vel La patet, ipsum fore majorem, æqualem, vel minorem respectum LF, prout LS fuerit major, æqualis, vel minor respectu LA, vel La. Patet autem assumpto LI ubicumque inter F, & P, fore LISI majorem, quam LIAI, assumpto L in P, fore LS æqualem LA, & eodem assumpto in fig. 96 in p fore LS æqualem La; assumpto autem L<sub>2</sub> ubicumque ultra P in fig. 94, & inter P ac I in reliquis, fore L<sub>2</sub>S<sub>2</sub> minorem quam L<sub>2</sub>A<sub>2</sub>, si L assumeretur in ipsa directrice in I evanescente LS, evanesceit & circulus, ac in punctum abit, at assumpto L<sub>3</sub> ubicumque ultra I in fig. 95, & inter I, ac p in fig. 96, fore L<sub>3</sub>S<sub>3</sub> minorem, quam L<sub>3</sub>A<sub>3</sub>, ac demum assumpto L<sub>4</sub> ubicumque ultra p in fig. 96, fore iterum L<sub>4</sub>S<sub>4</sub> majorem quam L<sub>4</sub>A<sub>4</sub>. Quare radius circuli erit major, æqualis, vel minor, quam distantia LF a foco, prout punctum L assumptum fuerit intra Ellipsim, Parabolam, utrumlibet Hyperbolæ ramum, vel in perimetro, vel extra: Q. E. D.

284. Inde autem facile eruitur primo illud. Si assumatur punctum intra Ellipsim, Parabolam, vel utrumlibet ramum Hyperbolæ, nullam rectam inde posse duci, qua Sectionem Conicam contingat, & quamvis rectam per ipsum ductam debere ipsam secare bis, præter rectas parallelas axi in Parabola, vel utrilibet asymptoto in Hyperbola, quarum altera intersectio ita in infinitum recedit, ut nusquam jam sit.

F.91 285. Nam in hoc casu punctum F, ut in fig. 91. cadet intra circulum, nec ulla ex eo duci poterit recta FH, quæ circulum tangat, quævis ex iis, quæ per ipsum ducatur, circulo occurreret bis punctis T, adeoque & HL Sectioni Conicæ occurreret in binis punctis P, p, nisi forte alterum ex iis ita in infinitum recedat,



usquam jam sit, quod in iis casibus posse fieri patet ex num. 149.

286. Quod si punctum assumatur in perimetro Sectionis Conicæ, unica e rectis omnibus per ipsum transeuntibus, continget ibidem ipsam Sectionem Conicam, relique omnes occurrunt iterum, præter rectas parallælas axi Parabolæ, vel Hyperbolæ asymptotis.

287. Nam in eo casu focus F jacebit, ut in fig. 93F.93 circuli peripheria, adeoque unica e rectis per ipsum transeuntibus, ut FH<sub>2</sub> ipsum circulum continget, reliquis secantibus iterum: unde consequitur unicam P<sub>3</sub>H<sub>2</sub> e rectis transeuntibus per P debere Sectionem Conicam contingere ibidem in P, reliquis extra expositos casus occurrentibus ipsi iterum.

288. Si vero punctum assumatur extra Ellipsim, Parabolam, vel utrumque Hyperbolæ ramum, binæ e rectis per ipsum transeuntibus Sectionem Conicam contingunt, reliquarum omnium ea, quæ jacebunt in iis tangentium angulis, in quibus focus jacet, occurrunt bis, altera tamen occursu in rectis axi Parabolæ, vel utriuslibet asymptoto Hyperbolæ parallelis, abeunte in infinitum ita, ut usquam jam sit, utroque autem occursu in Hyperbolæ pertinente ad eundem ramum, vel ad oppositos, prout recta inclinabitur ad directricem in angulo minore quam asymptoti, vel majore; hinc vero contactus jacebunt in eodem Hyperbolæ ramo, vel in oppositis, prout punctum ipsum jacuerit in iis asymptotorum angulis, in quibus ipsi jacent, vel extra; Et in priore casu terminabuntur ad eum ramum, qui jacet in eodem asymptotorum angulo cum puncto assumpto. Sed cadente puncto in alteram asymptotum, alter contactus in infinitum recedet, eo cadente in centrum, recedet uterque, nec usquam jam erit.

289. Nam in eo casu focus F jacebit, ut in fig. 97. F.97 98, 99 extra circulum, adeoque binæ ad ipsum ex F 98 tangentes duci poterunt FQH<sub>1</sub>, FqH<sub>2</sub> quæ binas LI, 99 Sectionis Conicæ tangentes determinabunt. Ex re-  
ctis vero omnibus transeuntibus per F, cæ omnes, quæ

## 94 SECTIONUM CONICARUM

transibunt per quodvis directricis punctum  $H_3$  jacentem inter puncta  $H_1, H_2$ , circulum secabunt bis, quamvis transiens hinc inde per puncta  $H_4, H_5$ , nisi quam circulo occurreret. Quare idem accidet & recedentibus per  $L$  respectu Sectionis Conicæ, & poterit punctum  $H_3$  fore in iis rectorum  $L_1, L_2$  productis, qua opus est, angulis, in quibus jacet focus  $F$ , ut in fig. 97, 98, in angulo  $H_1LH_2$ , qui in illa est ipsi  $IL_2$  ad verticem oppositus; in hac est ipse  $IL_1$ , ut in fig. 99 in angulo  $ILH_2$ , quem continet tangens  $IL$ , cum tangente  $iL$  producta. Quod autem attinet ad punctum intersectionis  $P$ , vel  $p$  recedens in infinitum, jam toties vidimus ex num 149, Puncta vero contactuum  $L, l$  jacebunt in ramo ceteriori vel ulteriori, vel ita in infinitum recedent, ut nusquam jam sint; prout puncta  $Q, q$  jacuerint respectu directricis in arcu circuli secti a directrice ipsa in  $N$ , &  $n$  eodem cum centro  $L$ , vel in opposito, vel inciderint in illa ipsa puncta  $N, n$ .

290. Concipiatur autem centrum circuli  $L_1$  positum citra directricem, vel  $L_2$  ultra deferti ex parte  $A$  directricis versus  $B$  ita, ut intersectio  $N$  ipsius circuli cum directrice primo quidem in fig. 100 distet a puncto axis  $E$  magis, quam intersectio  $H$  asymptoti  $CH$  parallele ipsi  $LN$ ; tum in fig. 101 abeat  $L$  in ipsam asymptotum  $CH$ , adeoque  $N$  in  $H$ , ac deinceps in fig. 102 transcurrat ultra ad partes  $B$ , ac arcus quidem  $NO_n$  jaceat ad eandem directricis partem cum centro  $L$ , arcus  $NO_n$  ad oppositam, & recta  $VN_n$  perpetuo tangat ipsum circulum in  $N$ . Quoniam ea rectum angulum continet cum  $NL$ , &  $FH$  cum  $HC$  (num. 164), patet, ipsam  $V_n$  fore parallelam ipsi  $FH$ , ac focum  $F$  relinquere in fig. 100 ad partes  $B$ , in ipsum incidere in fig. 101, eum relinquere ad partes  $A$  in fig. 102. Quare etiam tangens  $Fq$  jacebit in primo casu in arcu  $NO_n$ , abibit in secundo in  $N$ , jacebit in tertio in  $NO_n$ , & contactus Hyperbolæ respondentis ipsi  $q$  in primo casu jacebit in ramo ulteriore,

in

E L E M E N T A. 85

in secundo abibit in infinitum ita; ut nusquam cesset, in tertio faciet in ramo citiore: Cumque itelligatur debeat pariter evenire contactui Q; ubi centrum circuli deveniat ex parte B versus A; patet; productis asymptotus HC, hC in D, d; donec punctum L erit in angulo HCa; vel hCD; binos contactus terminati ad binos ramos oppositos illo existente in angulo HCB; utrumque contactum debere jacere in ramo citiore; illo jacente in hCD; utrumque jacere in ramo utriusque; illo vero abeunte in alteram asymptotum; alteram contactum debere abire in infinitum; alteram remanere in eo ramo; ad quem id asymptotum punctum accedit; at illo demum abeunte in centrum; utrumque contactum ita removeri; ut nusquam jam sit.

291. Ex hisce autem omnibus plurima sponte consequuntur, quorum pauca utiliora attingemus. Ex numero 284 constat; *Ellipsim Parabolam, ramum Hyperbola binae cavitatem obvertere quaquaversus cuiuscumque puncti intra ipsas sitis, convexitatem aliquo saltem arcu puncti sitis extra.* Nam si aliqua ex parte puncto intra sitis convexitatem obverteret arcus aliquis; posset retrogrediendo versus eam deveniri ad locum; ex quo ad illam tangens duci posset. Non potest autem punctis intra sitis obvertete cavitatem; nisi obvertat convexitatem sitis extra.

292. Ex num. 286 patet *in quovis puncto perimetri Sectionis Conicæ nonnisi unicam tangentem haberi posse.* facile autem demonstrari posset; ibi arcum curvæ utriusque circa contactum jacere semper ad eandem tangentis partem; quod tamen & ex num. 149; & ex num. 283 sponte fluit; cum nimirum recta ibi motu parallelo delata, hic circumvoluta circa punctum sitiam curvæ Sectionem Conicam primum incipiat eam contingere; tunc in binis hinc inde a contactu punctis flexione. Inde autem consequitur *Sectionem conicam nulli flexum mutare; sed perpetuo in eadem plagam incurvari.*

96 SECTIONUM CONICARUM.

293. Ope ipsius num. 286 facile demonstratur & illud, licet recta Conicam Sectionem contingat in unico puncto, nullam aliam rectam duci posse in angulo, quod ea binae lineae in ipso contactu constituunt. Nam in fig. 93, in qua  $KP_3H_3$  est tangens, sit quævis  $FH_1$  &  $FH_5$  utcumque parum inclinata ad tangentem circuli  $FH_3$ , & ea circulum secabit iterum alicubi in  $Tr$ , vel  $T_5$ ; & recta  $H_1P_3$ , vel  $H_5P_3$  Sectionem Conicam in aliquo puncto  $P_1$ , vel  $P_5$ . Sumatur jam punctum quodvis  $P_2$ , vel  $P_4$  ipsi  $P_3$  propius, & puncto  $T_2$ , vel  $T_4$  jacente in arcu  $FT_1$ , vel  $FF_5$ , ac recta  $FH_2$ , vel  $FH_4$  subeunte angulum tangentis circuli  $H_3F$ , productæ, si opus est, versus chordam, cum ipsa chorda,  $FT_1$ , vel  $FT_5$ , subibit  $H_2P_3$ , vel  $H_4P_3$  angulum, quem continet tangens Sectionis Conicæ  $KP_3H_3$  cum illa  $FH_1$ , vel  $FH_5$ , & jacebit in arcu  $P_3P_1$ , vel  $P_3P_5$ , adeoque ut arcus circuli aliquis  $FT_2T_1$ , vel  $FT_4T_5$  hinc inde a contactu subit semper inter tangentem, & rectam quamvis tangenti utcumque proximam, ita idem in Sectionibus Conicis evenit.

294. Patet inde quo pacto dato puncto in Sectionis Conicæ perimetro duci possit tangens, ducendo nimirum inde ad focus rectam  $P_3F$ , tum huic perpendiculararem  $FH_3$  usque ad directricem, ac jungendo puncta  $H_3$ ,  $P_3$ , quod quidem jam ex num. 193 innotuerat. At hic præterea ex num. 288 eruitur methodus admodum expedita ducendi tangentem ad Sectionem Conicam e puncto  $L$  ubivis dato extra ipsam. Centro  $L$  in fig. 97, 98, 99, intervallo, quod ad perpendicularum demissum ex  $L$  in directricem sit in ratione determinate, describatur circulus, ad quem ducantur rectæ  $FQ$ ,  $Fq$  tangentes, quæ occurrant directrici alicubi in  $H_1$ , &  $H_2$ . Rectæ ductæ per ea puncta, & per  $L$  contingent Sectionem Conicam, & puncta contactuum  $I$ , &  $i$  inveniuntur ductis  $FI$ ,  $Fi$  perpendicularibus ad  $FH_1$ ,  $FH_2$ ; quæ semper inveniuntur, præter casum, quo  $L$  cadat in Hyperbolæ asymptotos. Quod si for-

si forte altera e tangentibus circuli FQ, Fq evadet  
 parallela directrici, puncto H<sub>1</sub>, H<sub>2</sub> abeant in infinitum  
 ita, ut nusquam jam sit, ipsa quoque LI, vel L<sub>i</sub>  
 evadet directrici parallela, & contactus I, vel i abibit in  
 verticem axis transversi. Si vero punctum detur in di-  
 rectrice, ut H in fig. 53, 54, circulus quidem evan- F.53  
 scet, sed ducta ad focum HF, & chorda Pp per focum 54  
 ipsi perpendiculari, habebuntur binæ tangentēs Hp; HP,  
 juxta num. 177.

195. Præterea facile deducitur & illud, rectam,  
 que ex concursu binarum tangentium ad focum duci-  
 tur, secare bisariam angulum, quem ibi continent bi-  
 ni radii focū ducti ad binos contactus, vel, ubi bi-  
 ni contactus jacent in binis ramis oppositis, alter ex  
 his cum altero productis. Nam in fig. 97 si angulis F.97  
 H<sub>1</sub>FI, H<sub>2</sub>Fi rectis (num. 173) auferantur anguli 98  
 LFH<sub>1</sub>; LFH<sub>2</sub> æquales ob latera triangulorum FLQ, 99  
 FLq æqualia, relinquuntur anguli LFI, LFi æqua-  
 les. In fig. 98 a rectis QFI; qFi demptis æquali-  
 bus QFL, qFL relinquuntur æquales LFI, LFi: at in  
 fig. 99 producta IF in O; a rectis QFO, qFi demptis  
 QFL, qFL æqualibus; pariter remanent LFO; LFi  
 æquales.

196. Possit hic etiam facile deduci in Ellipsi quan-  
 tis rectam per centrum ductam bis occurrere Ellipsi hinc  
 inde a centro, Hyperbolæ autem bis, vel nunquam,  
 prout jaceat in illis asymptotum angulis, quos axis se-  
 cat, vel in reliquis, deducendo primum ex num. 284,  
 cum nimirum centrum intra Ellipsim jaceat, secundum  
 vero ex num. 288, quorum utrumque jam a num. 212  
 deduximus; quin imò assumpto centro Ellipseos vel Hy-  
 perbolæ pro centro circuli L; cujus radius esset ipse  
 semiaxis transversus, ut innuimus num. 145, deduci  
 possent multa ex iis, quæ in fig. 63, 64 demonstravi-  
 mus num. 195.

197. Sed adhuc elegans est ratio, qua hinc di-  
 recta demonstratione deducatur illa Hyperbolæ ad asym-  
 ptotos relatæ proprietas, quam num. 221 deduximus

98 SECTIONUM CONICARUM

ex natura diametrorum per reductionem ad absurdum  
 103 nimirum si chorda Pp in fig. 103, 104, occurrat asym-  
 104 ptoti in L, L', fore PL, æqualem PL'. Si enim asym-  
 ptoti occurrant directrici in punctis R, r, & per cen-  
 tro circuli assumatur tam L, quam L', patet (nupta  
 290) debere circulos transire illum per R, hunc per r,  
 & contingi ibidem ab FR, Fr æqualibus inter se cum  
 hic puncta R, r sint illa interseccio asymptoti cum di-  
 rectrice, quæ in fig. 101 est in H, quæ chorda si de-  
 more occurrat directrici in H, ac recta HF circulis in  
 T, t, T', t', erit FP parallela tam LT, quam L' T',  
 & Fp tam Lt, quam L' t', ac rectangula Tff, T'f'  
 æqualia erunt quadratis æqualibus FR, Fr. Quare  
 erit FT' ad FT, sive PL', ad PL, ut Ff ad Ff', sive ut  
 pL ad pL', & componendo in fig. 103, dividendo in  
 fig. 104 erit LL' ad LP, ut ipsa LL' ad pL', & proinde  
 LP, Lp æquales.

298. Atque ex his omnibus jam patet, quam fecun-  
 da sit hæc constructio. At multa, & multo graviora  
 supersunt, ac ipsa iterum ita fecunda, ut quocumque  
 te veritas novi semper ex eodem veluti trunco rami, &  
 singulis ramis ramenta alia, furculi, frondes quoque  
 versum prorumpant, atque profusiant. Sequenti Propo-  
 sitione præcipuam quandam, & fecundissimam Sectio-  
 num Conicarum proprietatem ex eadem constructione  
 deducemus.

PROPOSITIO VI. THEOREMA.

299. **I**n rectis omnibus transiuntibus per punctum da-  
 tum quodcumque, & Sectioni Conicæ his occur-  
 rentibus, rectangula, que continguntur sub binis distan-  
 tiis puncti ipsius a binis occurribus singularum recte-  
 rum, sunt inter se in ratione, que pendet a sola ratio-  
 ne determinante speciem Sectionis Conicæ, & incli-  
 natione rectarum ipsarum, substituto etiam quadra-  
 to tangentis, ubi bini occurfus coeuntes abeant in  
 eandem directionem; manente vero inclinatione linearum re-

rum, ac mutata utcumque illo puncto in data Sectione Conica manebit semper constans ratio unius rectanguli vel quadrati ad aliud,

90. Occurrat enim circulo recta KH in fig. 90, F.90  
 92 in M, m, recta vero per L, & F ducta in D, 91  
 Erit LP ad TF, ut LH ad TH, & Lp ad tF, ut LH 92  
 ad TH. Igitur conjunctis rationibus erit rectangulum  
 LP ad rectangulum TFt, sive ad rectangulum DFd,  
 quadratum LH ad rectangulum THt, sive MHm,  
 quadratum ad differentiam quadratorum LH, LM. Jam  
 vero ratio LH ad LM sive ad LT est eadem, ac ratio  
 FP ad PF, sive quam habet ordinata ad directricem  
 in angulo AHL ad foci radium FP, quæ pendet a so-  
 la ratione determinante speciem Sectionis Conicæ, &  
 inclinatione rectæ LH, cum sit FP ad PH (num. 7.)  
 in ratione composita ex ratione determinante, & ra-  
 tione sicut ejus inclinationis ad radium. Pendebit igitur  
 ab iis solis etiam ratio quadrati HL ad quadratum  
 LM, & quadrati HL ad eorum quadratorum differen-  
 tiam, adeoque & ratio rectanguli PLp ad rectangu-  
 lum DFd. Sed si quevis alia HL eodem modo occur-  
 rit in aliis punctis P, p manente puncto L, ratio quo-  
 rum rectanguli ejusdem DFd ad rectangulum novæ PLp  
 pendebit a sola ratione determinante speciem Sectionis  
 Conicæ, & inclinatione hujus novæ LH. Ergo & ra-  
 tio unius rectanguli PLp ad quodvis aliud pendebit a  
 sola ratione illa determinante, & inclinatione rectan-  
 gulum ipsarum. Quare si jam illud punctum, per quod  
 rectæ transeunt, mutetur utcumque, sive ubicumque  
 recipiatur, & per ipsum transeant rectæ cum iisdem  
 eademque inclinationibus, ea ratio rectanguli pertinen-  
 tis ad unam ex iis rectis ad rectangulum pertinens  
 ad aliam in omnibus diversis puncti positionibus ma-  
 nebit constans, ac patet coeuntibus punctis P, p in fig. F.97  
 97, vel 98 in I, adeoque in ipso contactu factis LP, 98  
 Lp equalibus LI, rectangulum PLp debere abire in  
 quadratum tangentis LI, quod illi rectangulo substitui  
 poterit. Patet igitur quidquid erat propositum.

## SCHOLIUM I.

301. **S**I rationem ipsam velimus expressam finitine inclinationis, & algebraicis signis, facili tinebimus. Si nimirum ratio determinans dicatur ad  $Q$ , finis autem inclinationis dicatur in priore in posteriore  $s$ , erit ratio rectæ  $FP$  ad  $PH$  in priora ratio  $SP$  ad  $Q$ , & in posteriore  $sP$  ad  $Q$ . Quare ratio primi rectanguli ad secundum erit composita ex rationibus  $QQ$  ad  $QQ - SSPP$ , &  $QQ - sPP$  ad  $QQ$  five  $QQ - ssPP$  ad  $QQ - SSPP$ , quæ quidem est expressio ejus rationis admodum simplex.

302. Porro cum Sectiones Conicæ possint aliquando in rectas desinere, proprietates rationis constantium rectangulorum in rectis datam directionem habentibus & se interfecantibus communis est etiam, ubi eæ occurrant binis anguli rectilinei lateribus, ut  $Pp$ ,  $Pp'$  in fig. 105, & 106, vel binis rectis parallelis, ut in fig. 107. Id autem in iis casibus multo facilius perspicitur. Nam manebunt semper anguli triangulorum  $PRP'$  adeoque & ratio rectæ  $RP$  ad  $RP'$ , &  $Rp$  ad  $Rp'$  semper eadem: ac proinde ratio quoque rectangulorum  $PRp$  ad rectangulum  $P'Rp'$ .

## SCHOLIUM II.

303. **D**emonstratio propositionis cum pendeat a constructione Problematis tertii, non habet vim, ubi punctum datur in directrice ipsa, quæ casu circulus evanescit, nec ubi recta sit directrici parallela, vel per focum transeat, ut notavimus in ipsa Problematis constructione. Posset quidem & iis casibus aptari demonstratio longiore ambitu; sed satis erit notare illud: cum ex generali constructione Theorema locum habeat in casibus omnibus, in quibus punctum datum accedit ad directricem quantumlibet, & rectæ ad eas binas positiones patitur accedere quantum-



# E L E M E N T A 161

libet, oportet sane, ut & in iis casibus sit vera i  
 quos generalis constructio desinit, postquam ultra  
 postquam limites ad eos accesserit;

304. Sic etiam liceret ex propositione ipsa deducere  
 ut bina Theoremata pro rectis axi, vel asymptoto  
 libet parallelis in Parabola, vel Hyperbola, qua-  
 rum nimirum altera intersectio ita in infinitum rece-  
 dit, ut nusquam jam sit; considerando, quid accidat  
 locus ad eas directiones accedentibus ultra quoscum-  
 que limites. Sed libet per finitam Geometriam hosce  
 casus evolvere ex ipsa constructione; cum ex primo po-  
 tissimum pendat diametrorum omnium natura in Pa-  
 rabola, & asymptotorum in Hyperbola.

### Coroll. I.

305. Si recta per datum punctum transiens sit paral-  
 lela aut in Parabola, & alteri asymptoto in Hyperbo-  
 la, qua nimirum (num. 149.) altera intersectione ita in  
 infinitum recedente, ut nusquam jam sit, in unico pun-  
 cto curvæ perimetro; in eâ pro constanti ratione re-  
 ctangulo sub binis distantis a binis occuribus substitu-  
 tum rectangulum sub distantia ab unico occurso; & re-  
 ctæ quavis constanti in Parabola; vel illi ipsi asymp-  
 toto in Hyperbola, ex ipsa dato puncto in angu-  
 lo constanti, & ratio illa constans pendebit præterea à  
 magnitudine rectæ constantis in Parabola, & rectæ du-  
 ctæ in inclinatione ad asymptotum in Hyperbola.

306. Nam si in fig. 108, 109, 110, quarum prima 108  
 pertinet ad Parabolam, reliquæ ad Hyperbolam, recta 109  
 110 occurat bis in P perimetro Sectionis Conicæ, 110  
 tunc veto TL semel in P, recta FT per focum tran-  
 siet, erit recta FP, æqualis Pr, cum P sit ordina-  
 ta in angulo æqualitatis, & FP parallela TL. Cen-  
 tro F intervallo Fr inveniatur in recta P punctum I,  
 etique triangulum isosceles IFr simile isoscelio FP, cum  
 habeant unum angulum ad basim communem in  
 P, adeoque & reliquos æquales. Quare erit Ie ad IF,  
 ut P ad Pr, sive ut FT ad PL, adeoque rectangu-  
 lum sub Ie & PL æquale erit rectangulo FT sive  
 rectan;

## 107. SECTIONUM CONICARUM

rectangulo constanti  $M' m$ , cui æquatur rectangulum  $T E t$ , & quod ad rectangulum  $P L p$  in data Sectione Conica, in qua ratio determinans est semper eadem, habet rationem pendente[m] a sola inclinatione rectæ  $LH$  juxta Propositionis demonstrationem.

307. Porro si per  $F$  ducatur recta  $FO$  in fig. 108 directrici parallela; & in fig. 109, 110 recta tendens ad  $R$  occursum directricis cum asymptoto parallela ipsi  $L t$ , ea ipsam secabit in  $O$  ad angulos rectos, cum  $r P$  sit perpendicularis directrici in fig. 108 ex hypothesis, &  $FR$  occurrat asymptoto  $CR$  ad angulos rectos (num. 164). Quare basim  $r I$  trianguli isoscelii  $r P I$  secat bisariam in  $O$ . Est autem  $r O$  in fig. 108 semper constans, nimirum æqualis distantia foci  $F$  a directrice, que (num. 62) est dimidia lateris recti principalis Parabolæ; adeoque  $r I$  semper æqualis lateri recto principali, & rectangulum sub  $L t$ , &  $P L p$  ad rectangulum sub  $P' L$  & quavis recta constanti habebit rationem constantem, quam habebit latus rectum principale ad illam rectam, quæ proinde pendebit a magnitudine ipsius rectæ.

308. At in fig. 109, 110 est  $r O$  ad  $OR$ , quæ æquatur distantia perpendiculari puncti  $L$  ab asymptoto  $CR$ , in ratione constanti, nimirum ob similitudinem trianguli rectanguli  $ROr$  cum rectangulo  $FER$ , cum quo habet angulum æqualem, vel eundem ad  $R$ , adeoque cum triangulo rectangulo  $FRC$ , in ratione  $FR$  ad  $RC$ , sive (num. 164, & 166) semiaxis conjugati ad semiaxis transversum. Quare cum quævis recta in quovis dato angulo inclinata ex  $L$  ad asymptotum  $CR$  debeat habere ad rectam ex ipso  $L$  perpendicularem asymptoto ipsi, sive ad distantiam illam perpendicularem, quæ æquatur  $OR$ , rationem constantem, quæ pendebit ab inclinatione ejus rectæ; illa ipsa  $O r$  & recta quoque ejus dupla  $L t$  habebunt ad quamvis inclinatam ex  $L$  in quovis angulo dato rationem constantem pendente[m] ab ejus inclinatione, compositam ex binis constantibus  $r O$  vel  $r I$  ad  $OR$ , &  $OR$  ad eandem

E L E M E N T A. 103

inclinatam, adeoque & rectangulum sub  $LP$  & ad rectangulum sub  $P'L$  & ejusmodi recta inclinata angulo constanti habebit rationem constantem tantam ab inclinatione ejus ipsius rectae.

Coroll. 2.

109. Si a quavis puncto  $L$  in fig. III, IIII ducatur recta  $LP$ ,  $LP$  asymptotici parallela, occurrat perimetra in  $P$ ,  $p$ , & ex punctis  $P$ ,  $p$  ducantur per  $L$  rectae  $PD$ ,  $pd$  in datis quibusvis angulis ad asymptotici; rectangula  $LPD$ ,  $Lpd$  erunt in ratione constanti, mutato utcumque puncto  $L$ , & si inclinationes rectarum  $PD$ ,  $pd$  ad suas asymptotas aequales fuerint, ratio erit aequalitatis.

110. Nam si per  $L$  ducatur quaevis alia recta in dato angulo, quae nimirum occurrat perimetra in  $I$ , &  $i$ , tam rectangulum  $LPD$ , quam  $Lpd$  habebunt (num. 108) rationem constantem ad  $LI$ , cum  $LI$  occurrat perimetra bis,  $LP$  semel, & tam  $PD$ , quam  $pd$  in datis angulis inclinentur; adeoque habebunt rationem constantem etiam inter se. Porro cum ea ratio pendat ab inclinatione rectarum  $PD$ ,  $pd$  ad asymptotas, si inclinatio fuerit utrobique eadem, ratio utriusque rectanguli  $LPD$ ,  $Lpd$  ad idem  $LI$  erit eadem, adeoque aequales erunt inter se aequalia.

Coroll. 3.

111. Si a quavis puncto  $P$  Hyperbola ducantur binae rectae  $PG$ ,  $PV$  singulae parallelae alteri asymptotico, & terminentur ad alteram, continebunt rectangulum magnitudinis semper constantis, & si ex altero puncto  $p$  ducantur rectae  $pu$ ,  $pg$ , quarum prior sit parallela  $PG$ , posterior  $PV$ , erunt rectae  $pp$ ,  $gg$ ,  $Vp$  inter se parallelae, & intersectionibus  $GP$ ,  $gp$  in  $L$ ;  $VP$ ,  $vp$  in  $I$ , recta  $LI$  transibit per centrum  $C$ , & parallelogramma  $CGLg$ ,  $CvIi$ ,  $LPlp$  similia erunt.

112. Erit enim ex Corollario praecedenti rectangulum  $Lpw$  aequale rectangulo  $Lpu$ . Quare  $pu$ , sive  $Cg$  ad  $LP$ , sive  $Vp$ , ut  $PV$  sive  $CG$  ad  $IP$ , sive  $Cu$  : adeoque per conversionem rationis  $Cg$  ad  $CV$ , ut  $CG$  ad

## 154 SECTIONUM CONICARUM

ad  $Cu$ , & rectangulum sub  $Cg$  &  $Cu$ , sive sub  $pg$  &  $pu$ , equale rectangulo sub  $CG$  &  $CV$ , sive sub  $PG$  &  $PV$ , quod proinde manebit constantis magnitudinis, utcumque mutato puncto  $P$ .

313. Jam vero proportionalium terminorum capiendo summas, vel differentias, vel substituendo rectas iis parallelas, & equales, patebit; forte  $LP$  ad  $LG$ , ut  $Lp$  ad  $Lg$ , adeoque  $Pp$ ;  $Gg$  parallelas; &  $CG$  ad  $Cu$ , ut  $Cg$  ad  $CV$ , adeoque  $Gg$ ;  $Vv$  parallelas; & demum inde  $CG$  ad  $Cu$ , ut  $LG$  ad  $lu$ , adeoque triangula  $GCL$ ,  $Cl$  similia, & eorum angulos ad  $C$  æquales recta  $Cl$ , si producat, qua opus est, abeunte in  $L$ ; unde patent omnia.

## SCHOLIUM III.

314. **H**OC quidem pacto delapsi sumus ad potentiam illam Hyperbolæ constantem, quam demonstravimus num. 227, cum nimirum hic habeatur constantis rectangulum etiam sub  $CG$ , &  $GP$ . Inde autem facili regressu demonstrarentur ea omnia, quæ ad asymptotos pertinentiæ erimus e proprietate diametrorum chordas bifariam secantium a num. 221; quæ quidem demonstrari potuissent etiam ope num. 297. At quoniam ea jam demonstrata sunt, hic progrediemur ad Corollariæ quædam generalia, quæ ab ipsa Propositione, vel ab hisce Corollariis sponte consequuntur.

### Coroll. 4.

315. Si per quoddam punctum transeant binæ rectæ secantes Sectionis Conicæ perimetrum, rectangula sub binis distantibus puncti ipsius a binis singularum intersectionibus erunt inter se; ac quadrata tangentium iis parallelarum, si qua sunt, a concursu ad contactum, & ut quadrata semidiametrorum parallelarum.

316. Primum patet ex ipsa enunciatione Propositionis, cujus est casus particularis. Nam si ex uno puncto ducantur binæ rectæ; & ex alio binis iis paralle-

hæ habebunt ad directricem eandem inclinationem  
 illæ. Quare si illæ secentur bis, hæ tangant, illæ  
 rectangula ad se invicem, erunt ut harum qua-  
 rum. Secundum in omnibus diametris Ellipseos, &  
 diametris primariis Hyperbolarum patet ex eo, quod  
 semper ad perimetrum Sectionis Conicæ terminen-  
 tur, & secantur bifariam in centro. Debeant enim  
 rectangula sub binis semidiametris per idem centrum  
 esse in eadem ratione, in qua sunt rectangula  
 sub binis iis parallelarum transeuntium per illud alium  
 punctum. Pro secundariis Hyperbolæ dia-  
 metris, quæ non terminantur ad perimetrum Hyper-  
 bolæ ejusdem, sed ad perimetrum conjugatæ, sic de-  
 monstratur. Occurrat chorda Pp in fig. 113 eidem ra-  
 mo Pp binis & utraque binis in fig. 114, prior autem F. 113  
 utrobique alteri asymptoto in G, & per G ducatur 114  
 chorda li parallela Pp'. Erit rectangulum PLp ad re-  
 ctangulum P'Lp', ut rectangulum PGp ad rectangulum  
 P'G'p' (num. 299). Sunt autem rectangula PGp, IGi  
 quadrata (num. 251) quadratis semidiametrorum sibi  
 parallelarum.

Coroll. 5.

317. Si plures chordæ, vel tangentes parallele ab  
 aliqua chorda transversim secantur, erunt quadra-  
 ta tangentium; & rectangula sub segmentis chordæ  
 transversæ, ut rectangula sub segmentis chordæ transversæ.

318. Si enim in fig. 115, 116 chordæ Vu occur- F. 115  
 rant tangentes IA, Ia inter se parallele in A, a, & 116  
 chordæ Pp, P'p' in L, L', oportebit esse quadrata IA,  
 Ia, & rectangula PLp, P'L'p' ad rectangula VAn, Van,  
 VL'n in eadem ratione, adeoque & illa inter  
 se, ut hæc inter se.

Coroll. 6.

319. Singula ejusmodi quadrata, vel rectangula tan-  
 gentium, vel chordarum parallelarum equantur singulis  
 rectangulis sub segmento chordæ transversæ intercepto in-  
 ter alterum ejus extremum, ac tangentem, vel chor-  
 dæ parallelam, & segmento tangentis, vel chordæ pa-  
 rallele

## 306 SECTIONUM CONICARUM

*Parallela intercepta inter ipsam chordam transversam, & aliam rectam datum ductam per alterum verticem chorda transversa.*

320. Si enim ex quovis puncto chordæ transversæ  $R$  ducatur  $RS$  illi chordæ, vel tangentibus parallelis; quæ sit ad  $VR$  in ea ratione data, in qua est rectangulum  $PLP$  ad  $VL$ ; & per  $u$ ; &  $S$  ducatur recta tangentibus occurrens in  $B$ ;  $b$ ; chordis in  $D$ ;  $D'$ ; erit rectangulum  $VLD$  ad rectangulum  $VLb$ ; ut  $LD$  ad  $Lb$ ; sive ut  $RS$  ad  $Ru$ ; nempe ut rectangulum  $PLP$  ad idem illud  $VL$ . Quare illi rectangulo  $VLD$  æquabitur hoc rectangulum  $PLP$ ; sive abeuntibus  $L$  in  $A$ ;  $P$ ;  $p$  in contactum  $I$ ;  $D$  in  $B$ ; æquabitur rectangulo  $VAB$  quadratum  $AI$ .

*Coroll. 7.*

321. Si pro chorda transversa substituatur tangens; quæ recte parallela fœrent, utrumque præcedens Corollarium habebis locum; dummodo rectangulo segmentorum chordæ transversæ substituatur quadratum tangens intercepta inter contactum; & parallelas.

F.117 322. Si nimirum in fig. 117. tangens per  $V$  ducta occurrat chordis  $Pp$ ,  $P'p'$  parallelis; & tangenti  $IA$  in  $L$ ;  $L'$ ;  $A$ ; erunt rectangula  $PLP$ ;  $P'L'P'$ ; & quadratum  $AI$  ad se invicem; ut quadrata  $VL$ ;  $VL'$ ;  $VA$ ; (num. 317.) & ex puncto quovis  $R$  tangentis  $AI$  ducta  $RS$  illis parallela; quæ sit ad  $VR$  in ratione data rectanguli  $PLP$  ad quadratum  $LV$ ; si ducatur  $VS$  illis rectis parallelis occurrens in  $D$ ;  $D'$ ;  $B$ ; erunt rectangula  $PLP$ ;  $P'L'P'$ ; & quadratum  $AI$  æqualia rectangulis  $VLD$ ;  $VL'D'$ ;  $VAB$ .

*Coroll. 8.*

F.118 323. Si binis tangentibus  $IE$ ,  $iE$  in fig. 118; 119  
119 concurrentibus in  $E$  occurrat tangens ducta per  $V$  in  $A$ ;  $a$ ; ejus segmenta  $AV$ ;  $aV$  erunt in ratione composita  $AI$ ;  $ai$ ; &  $Ei$ ;  $EI$ .

324. Si enim ex  $A$  ducatur recta parallela tangenti  $Ei$  occurrens perimetro in  $P$ ;  $p$  erit quadratum  $VA$  ad quadratum  $Va$ ; ut rectangulum  $PAP$  ad quadratum  $aa$ ; sive

in ratione composita ex rationibus rectanguli  $PAQ$  quadratum  $AI$ ; & quadrati  $AI$  ad quadratum  $AI$ . In igitur, ( huc 317 ) sit rectangulum  $PAQ$  ad quadratum  $AI$ ; ut quadratum  $Ei$  ad quadratum  $Ei$ ; quadratum  $AV$  ad quadratum  $AV$ ; in ratione composita quadrati  $AI$  ad quadratum  $AI$ ; & quadrati  $Ei$  ad quadratum  $Ei$ ; adeoque  $AV$  ad  $Va$  in ratione composita  $AI$  ad  $AI$ ; &  $Ei$  ad  $Ei$ .

Coroll. 9.

325. Si tangens  $AVa$  fig. 120; 121 binis tangentibus  $F.120$  parallelis  $AI$ ,  $ai$  occurrat; erit  $VA$  ad  $Va$ , ut  $121$   $AI$  ad  $ai$ ; quæ si præterea in Ellipse fuerit parallela tangenti contactus bisariam secubunt in ipso contactu.

326. Erit enim quadratum  $VA$  ad quadratum  $AI$ ; ut quadratum  $Va$  ad quadratum  $ai$ . Quare  $VA$  ad  $AI$ ; ut  $Va$  ad  $ai$ ; & alternando  $VA$  ad  $Va$ ; ut  $AI$  ad  $ai$ . Quod si Ellipse in fig. 120 fuerit  $Aa$  parallela  $AI$ ;  $ai$  æquales; adeoque æquales &  $VA$ ,  $Va$ .

#### SCHOLIUM IV.

327. Huc usque deduximus Corollaria ex ipsa Propositione. Hoc postremum sponte exercent aliud Theorema utilissimum ac lidem fecundum aliorum quartuplum, quæ ex ultimo partem profuerunt. Sed ne nimis late evagentur, id eruam in generaliiori, quod refero propositioni integre ex qua ipsum cum suis Corollariis pariter fuit. præterea huc usque deductis alia analogæ, quæ a Corollario primo hujus propositionis 6 deducuntur; per se, quæ nimirum pertinent ad casum rationis unitatis; in quo altera intersectio in Parabola & Hyperbola ita in infinitum recedit, ut nullam jam sit, ac sequentia quidem duo Corollaria dependunt quinto & sexto e Propositione deductis; in quartum transferri non potest ad rectas parallelas in Parabola, directrici in Hyperbola, quæ nullam tan-

## 108 SECTIONUM CONICARUM

tangentem habent sibi parallelam, nec semidiametrum, diametris nimirum omnibus in Parabola in infinitum productis, & nulla diametro existente in Hyperbola parallela asymptotis.

*Coroll. 10.*

328. Si plures chordæ, vel tangentes parallele secantur transversim a recta axi parallela in Parabola, vel alteri asymptoto in Hyperbola, erunt quadrata tangentium, & rectangula sub segmentis chordarum, ut segmenta ejus parallela abscissa ab ipsius concursu cum perimetro.

329. Si enim in fig. 122, 123, quarum illa ad F, 122 Parabolam, hæc ad Hyperbolam pertinet, rectæ VL, 123 parallelæ ibi axi, hic alteri asymptoto, quæ quidem occurrerit perimetro in unico puncto V ( num. 149 ), occurrant tangentes IA, ia inter se parallelæ in A, a, & chordæ Pp, Pp' in L, L', oportebit ( num. 305 ) esse quadrata IA, ia, & rectangula PLp. P'L'p' ad rectangula in Parabola quidem sub quavis recta constanti, in Hyperbola vero sub recta ducta a punctis A, a, L, L' in dato quovis angulo ad asymptotum illam ipsi VL parallelam, quæ idcirco constans pariter erit, & abscissis VA, Va, VL, VL' in ratione constanti. Igitur erunt etiam illa quadrata, vel rectangula inter se, ut hæc rectangula inter se, quæ ob rectam illam constantem sunt, ut ipsæ VA, Va, VL, VL'.

*Coroll. 11.*

330. Singula ejusmodi quadrata, vel rectangula equantur singulis rectangulis sub ejusmodi abscissis recte illius parallele axi, vel asymptoto, & recta quadam data.

331. Si enim assumatur quarta proportionalis post quamvis VL, LP, Lp, rectangulum sub VL, & ipsa æquabitur rectangulo PLp, rectangula autem sub VA, Va, VL', & ipsa ad rectangulum sub ipsa, & VL erunt, ut VA, Va, VL' ad VL, sive ut quadrata AI, ai, & rectangulum PLp' ad rectangulum PLp, adeoque quadrata AI, ai, & rectangulum P'L'p' pariter equalia rectangulis sub illa eadem quarta proportionali, & abscissis VA, Va, VL' singula singulis.

SCHO-



SCHOLIUM V.

332. **H**ujus Corollarii II. relatio ad Corollarium  
 6 facilius percipietur, si assumpto pariter  
 recta VL quovis puncto R, ducatur RS parallela  
 tangentibus, vel chordis, & equalis illi constanti quar-  
 tae proportionali, tum per S ducatur ipsi VL parallela:  
 quae occurrat tangentibus in B, b, chordis in D, D';  
 Patent enim pariter quadrata AI, ai, & rectangula PLP,  
 PLY aequalia rectangulis VAB. Vab, VLD, VL'D'  
 ac figura 115, vel 116 abit in 122 vel 123, si pun-  
 cto in illis ita in infinitum abeunte, ut nusquam  
 jam sit, rectae VR, BS nusquam jam sibi occurrant;  
 adeoque parallelae evadant.

Coroll. 12.

Fig. 124  
125

333. Si in chordam Vu, vel tangentem IB in fig.  
 124, 125 incurrant plures rectae LP, L'P' axi paralle-  
 lae in Parabola, vel alteri asymptoto in Hyperbola, erunt  
 rectangula VLu, VL'u sub segmentis chordae, vel qua-  
 drata IL, IL' tangentis ibi, ut segmenta LP, L'P' re-  
 ctae illius parallelae intercepta inter chordam, vel tan-  
 gentem, & perimetrum, hic ut rectangula sub iisdem  
 segmentis, & recta in quovis angulo dato ducta ex in-  
 terfectione ipsius cum chorda, vel tangente, ad asym-  
 ptotam parallelam.

334. Patent ex ipso Coroll. 1, vel etiam II. Sunt  
 ibi quadrata IL, IL', vel rectangula VLu, VL'u  
 in Parabola, ut rectangula sub L'P'; LP, & recta con-  
 stanti, quae rationem non mutat; hic ut rectangula sub  
 L'P, LP, & rectis ex L, & L' ductis ad asym-  
 ptotam parallelam in quovis angulo dato.

Coroll. 13.

335. Segmenti Parabolici VMu in fig. 126. area est  
 ad aream trianguli VMu habentis pro basi chordam Vu,  
 & verticem in M in vertice diametri MR, cujus ipsa  
 ordinata, ut 4 ad 3; ad parallelogrammum vero  
 Ecu clausum tangente per M ducta, & proinde ipsi  
 Bosovich. Tom. III. Vu

## 110 SECTIONUM CONICARUM

Vu parallela, sive ad rectangulum sub ipsa chorda  $Vu$  & perpendicularo in eam demisso ex eodem vertice, ut 2 ad 3.

336. Secta enim bifariam  $MV$  in  $B$ , agatur per  $B$  recta parallela diametro  $MR$ , occurrens chordæ  $uV$  in  $L$ , perimetro Parabolæ in  $D$ . Patet fore  $LB$  ad  $MR$ , ut  $VB$  ad  $VM$ , ut 1 ad 2, vel ut 2 ad 4. Erit autem  $MR$  ad  $LD$  (n. 333) ut rectangulum  $VRu$  ad rectangulum  $VLu$ , sive in ratione composita  $VR$  ad  $LV$ , &  $Ru$  ad  $Lu$  nimirum 2 ad 1, & 2 ad 3 sive ut 4 ad 3, ac proinde  $BL$  ad  $LD$ , ut 2 ad 3, &  $BL$  ad  $BD$  ut 2 ad 1. Quare & area trianguli  $bVL$  dupla erit area  $BVD$  ob altitudinem communem in  $V$ , sumptis  $BL$ ,  $BD$  pro basibus. Area autem trianguli  $VDM$  pariter dupla est areae trianguli  $VDB$  ob basim  $VM$  duplam bases  $VB$ . Igitur area trianguli  $VDM$  erit equalis areae  $BVL$ , quæ cum sit ad aream trianguli similis  $MVR$ , ut quadratum  $BV$  ad quadratum  $VM$ , erit, ut 1 ad 4. Eodem vero argumento area trianguli  $Mdu$  erit quarta pars areae  $MRu$ . Quare totum triangulum  $VMu$  ad binâ triangula  $VDM$ ,  $udM$  simul, ut 4 ad 1. Eodem vero pacto sectis bifariam chordis  $VD$ ,  $DM$ ,  $Md$ ,  $du$  haberentur quatuor triangula, ad quæ priora illa duo simul essent, ut 4 ad 1 tum octo alia, ad quæ illa quatuor essent pariter, ut 4 ad 1, & ita porro, ac series rectarum semper magis in infinitum accederet ad perimetrum Parabolæ; & area ad aream segmenti parabolici, quâ concluderetur omnis illa progressio in infinitum producta, cujus progressionis primus terminus esset triangulum  $CMu$ , & ratio primi termini ad secundum, ut 4 ad 1. Quoniam igitur in progressionibus geometricis decrescentibus est (c. 3. n. 10. Arith.) differentia primi termini a secundo ad primum, ut primus ad totam progressionis summam: erit ut 3 differentia 4 ab 1 ad 4, ita illud triangulum ad aream sectoris parabolici. Parallelogrammum vero  $CEeu$  est duplum ejus trianguli, & æquale rectangulo sub basi  $Cu$ , & altitudine  $MI$ . Igitur erit id parallelogrammum, &

id

ad rectangulum ad aream ipsius sectoris ut 6 ad 4 ;  
sive ut 3 ad 2 :

SCHOLIUM VI.

337. NISI supra demonstrata fuisset proprietas dia-  
metrorum chordas omnes bifariam secan-  
tium admodum facile hic ex hac ipsa propositione de-  
duci posset pro omnibus diametris Ellipseos ; ac Para-  
bolæ ; & pro secundariis Hyperbolæ :

338. Si enim sint binæ tangentes IB ; *ib* parallela  
in Ellipsi in fig. 127 ; vel in Hyperbola in fig. 128 ,  
ac in eas incidat in L ; *l* chorda Pp parallela *li* jun-  
genti contactus ; debebunt rectangula PLp ; Plp ad qua-  
drata tangentium LI ; *li* habere rationem eandem ;  
cumque ipsa IL ; *il* æquales esse debeant ; erunt æqua-  
lia etiam ea rectangula ; adeoque Pl ad PL , ut pL ad  
Pl , sive componendo in Ellipsi ; dividendo in Hyperbo-  
la L ad PL , ut ipsa L ad pl adeoque Pl ; pl æquales ;  
Quare si secta bifariam *il* in C agatur per C recta CR  
ipsius tangentibus parallela ; quæ nimirum abscindet re-  
ctas RL ; Rl æquales rectis Cl , Cl , adeoque & inter se ;  
ea ipsa & chordam Pp secabit bifariam in eodem puncto R :

339. Et eo quidem pacto haberetur proprietas dia-  
metrorum omnium in Ellipsi ; si nimirum concipiatur ,  
tangentes parallelas BI ; *bi* in fig. 127 converti circa ori-  
nem Ellipsium ; conversa cum iis *li* , & positione chor-  
darum Pp . In Hyperbola vero habentur omnes diame-  
tri secundariæ ; quæ solæ tangentes habent sibi paralle-  
las . Sed pro primariis hoc pacto progredi liceret . Af-  
sumpta in fig. 128 CR' æquali CR ; & ducta P'L'R'l'p'  
parallela rectæ PLRlp ; debebunt esse æquales IL ; IL' ;  
adeoque æqualia rectangula P'L'p' ; PLp ; quæ ad æqua-  
la quadrata IL' , IL eandem rationem habent . Essent  
etiam æquales P'L' p' . Quamobrem ob L'l' æqualem  
si P'L' esset major , vel minor PL , etiam Lp' es-  
set pariter respectu Lp : adeoque rectangulum P'L'p'  
erit æquale rectangulo PLp ; nisi PL æquetur P'L' .

112 SECTIONUM CONICARUM

Ducta igitur  $PP'$ , quam  $CI$  fecerit in  $r$ , ea erit parallela  $LL'$ , & bifariam rectam in  $r$ , ut  $LL'$  in  $I$ , ac  $CI$  erit diameter omnes chordas  $PP'$  parallelas tangenti  $LL'$  secans bifariam, & eadem est demonstratio pro chordis  $pp'$ .

F. 129 340. At in Parabola in fig. 129 si sit quævis chorda  $Pp$ ; ac e contactu  $l$  tangenti ipsi parallela ducantur recta parallela axi, ea ipsam chordam secabit bifariam in  $R$ . Ductis enim  $PL$ ,  $pl$  pariter axi parallelis, erunt quadrata  $IL$ ,  $il$  ad se invicem, ut ipsæ  $LP$ ,  $lp$ , quæ cum æquales esse debeant, erunt æqualia & ipsa quadrata, & rectæ  $IL$ ,  $il$ , &  $RP$ , &  $Rp$  ipsis æquales.

341. Porro jam ex ipsa hac demonstratione patet, in Parabola omnes diametros debere esse axi parallelas: ac in Ellipsi, & Hyperbola omnes debere transire per centrum, demonstraretur ex eo, quod omnes chordæ per centrum transeuntes in ipso centro bifariam secantur (n. 81 & diametri ejusmodi chordas etiam secare debeant bifariam, adeoque per illud idem centrum transire. Atque hæc quidem innuere libuit, ut pateret, quam facile alio profus pacto ex eadem definitione series proprietatum deduci posset, deducta ante alias hac constanti ratione rectangulorum sub chordarum segmentis.

342. Sed iis omiſſis contemplabimur hic potius miram quandam analogiam, quam habent Ellipses, & Hyperbolæ similes communi centro, & positione axis transversi, ac Parabolæ æquales communi positione axis, cum asymptotis Hyperbolarum, quæ profuit partim ex Prop. 5, partim ex hac Prop. 6, & Corollariis.

SCHOLIUM VII.

F. 130 343. *SI sunt in fig. 130. bina Ellipses, & in fig. 131, 132 bina Hyperbola similes, quarum 132 commune centrum C, & axes transversi  $Cu$ ,  $Cu'$  positione congruant; ac in fig. 133 bina Parabolæ æquales, congruente axium positione; ordinatarum eandem in utraque positionem habentium diametri positione congruent, & si quadam alterius ordinata  $Pp$  occurrat alteri in  $H$ ,*

h ja-

in *ajacentibus* P, p in fig. 131 in eodem ramo, in fig. 132 in ramis oppositis erunt semper equalia segmenta HP, hp, & Hp, hP intercepta hinc inde inter interiorum, & exteriorum.

344. Si enim ducatur in fig. 130; 131 diametri h chordæ Pp, quæ alteri Ellipsi, & Hyperbolæ occurrat in E, & e, tangentes per I, & E ductæ, erunt parallele (n. 119.). Quare cum ordinata Pp debeat esse parallela tangenti per verticem suæ diametri I, erit & Hb parallela tangenti ductæ per verticem diametri E, adeoque ipsius ordinata. In fig. vero 132 si ipsi Pp diameter parallela Ii occurrat alteri Hyperbolæ in A, & diameter habens pro ordinata Pp debeat esse (n. 212.) parallela tangenti ductæ per verticem I. cum debeat esse conjugata diametri Ii, & pariter diameter ordinata Hb parallela tangenti ductæ per A. Cum igitur eæ tangentes parallele esse debeant; eandem habebunt directionem earum ordinarum diametri, & cum debeant transire per idem centrum commune C, positione congruent. Demum in fig. 133 si concipiatur Parabola HVh translata per axem ita, ut segmentum axis VF abeat in segmentum axis VF' sibi æquale; congruet tota cum illa Parabola sibi æquali ita, ut diameter ER abeat in IR' existente vertice I in eadem distantia ab axe, in qua erat, adeoque in eadem recta prior erit diameter IR, & quoniam adhuc tangens per I ducta cum diametro eundem angulum continet, quem tangens per E, erunt hujusmodi tangentes parallele, & proinde communis directio ordinarum utriusque diametri, & communis ordinarum eandem directionem habentium diameter.

345. Igitur in omnibus ejusmodi figuris a communi diametro secantur ambæ ordinatæ Pp, Hb bifariam R; ac proinde erit HP æqualis hp, & Hp æqualis Ph.

346. Manente ordinarum ejusmodi directione quatuor angula HPh, PHp, Hph, Php semper erunt inter se equalia, & magnitudinis constantis, ac semper equalia in fig. 130, 131, 133 quadrato tangenti IA, vel

214 SECTIONUM CONICARUM

In ducta per verticem I diametri interioris, ac detenninata contactu, & perimetro exteriori, ipsa tangente Aa secta bifariam in I; in fig. vero 132 differentia quadratorum semidiametrorum parallelarum CI, CA.

347. Ducta enim per P, & I recta, quæ alteri curvæ occurrat in M, & N, erit & PM æqualis IN, & MI æqualis PN. Quare rectangulum MPN erit æquale rectangulo MIN. Est autem (n. 299.) rectangulum MPN ad rectangulum HPh, ut MIN ad rectangulum AIa. Igitur etiam rectangulum HPh erit æquale rectangulo AIa. Porro rectangula HPh, PHp, Hph, Php, patet, æqualia esse ob PH, ph, & Hp, hP æquales, rectangulum autem AIa erit in fig. 130, 131, 133 æquale quadrato AI, cum cocuntibus punctis P, p in I abeant HP, hp æquales in AI, aI, & in fig. 132 ob diametrum Aa sectam bifariam in C erit rectangulum AIa differentia quadratorum CI, Ca.

348. Hic autem jam patet analogia Sectionis Conicæ externæ respectu internæ cum asymptotis. Segmenta rectæ interceptæ hac externa perimetro, & interna æquantur hic inter se (num. 345), ut (n. 221) segmenta rectæ interceptæ asymptotis, & Hyperbola. Ex ea æqualitate inferitur hic (num. 346) constans mensura illorum quatuor rectangulorum, quæ continentur sub distantia alterius intersectionis cum altera e binis perimetris, & binis intersectionibus cum altera, ut in asymptotis (numer. 251), & ut ibi, ita etiam hic, ubi habetur tangens ordinatis rectis parallelæ, ea in ipso contactu secatur bifariam, ac illa rectangula æquantur quadrato tangentis interceptæ contactu, & perimetro exteriori. Ubi autem in fig. 132 non habetur tangens parallela, æquantur illa rectangula differentię quadratorum CI, CA, quæ in asymptotis, ubi CA evanescit, æquantur (num. 251) quadrato toti ipsius CI. At in eo etiam conveniunt. Si enim axis Vv minuatür in infinitum ita, ut demum evanescat, Hyperbola desinit in binas rectas evanescentes per C juxta numer. 16 & 110, quæ erunt

sunt ipsæ asymptoti, quo casu evanescente AC, distantia quadratorum CI, CA est idem, ac ipsum quadratum CI. Quamobrem proprietates asymptotorum sunt generales in Hyperbola omnibus Hyperbolis similibus communi centro, & axium positione, quæ, ac evanescente, desinunt demum in asymptotos ipsas, in quibus generales illæ proprietates manent, licet aliquæ ex iis ita immutentur, ut remaneant accommodatæ ipsis rectis, & evanescentiæ axis transversi, ac ex natura rectæ lineæ cum iis ipsis proprietatibus conjuncta deducantur alia Theoremata.

349. Et quidem in ejusmodi similibus perimetris analogia cum asymptotis in Hyperbola, & Parabola etiam ulterius progreditur. Nam in iis, ubi in infinitum producuntur, perimetèr exterior ad interiorem accedit ultra quoscunque limites, quin tamen unquam sibi occurrant. In Ellipsi quidem perimetrorum distantia est semper finita, & quidem minima in ipsis axium conjugatorum verticibus, maxima in verticibus transversorum. At in Hyperbola in fig. 131, & in Parabola in fig. 133 recedente ordinata Pp in infinitum, crescit ipsa in infinitum, adeoque crescit in infinitum & Hp ipsa major, & cum sit Hp ad Al, ut IA ad pb, ob rectangulum illud æquale quadrato Al ipsa pb decrescit pariter in infinitum. Sed cum Hp nunquam abeat in infinitum (nam omnes chordæ parabolæ alicui secanti bis eundem ramum inclinantur ad directricem (num. 149) in angulo minore, quam sit angulus æqualitatis), & proinde eam secant bis, ac omnes pariter in Parabola bis secant (n. 154) auctam pb evanescet.

SCHOLIUM VIII.

350. Sed jam regrediendum ad seriem Theorematum hinc scholiis interruptam ac eruemus proprietatem maxime notabilem, quæ licet sit quoddam

116 SECTIONUM CONICARUM  
 simplex veluti Corollarium ipsius Propositionis 6, ta-  
 men hic nova Propositione 7 enunciabitur cum nimi-  
 ram naturam ipsam Sectionum Conicarum contineat,  
 & usum habeat frequentissimum.

PROPOSITIO VII. THEOREMA:

351. **Q**uadratum semiordinata cujusvis diametri pri-  
 maria in Ellipsi & Hyperbola ad rectangu-  
 lum sub abscissis a binis verticibus est in constanti ra-  
 tione, nimirum ut quadratum diametri, vel semidiamet-  
 ri conjugata ad quadratum ejus diametri vel semi-  
 diametri sive si, ut in axe, tertia continue propor-  
 tionalis post diametrum ipsam, & diametrum conjuga-  
 tam dicatur parameter, vel latus rectum, & ipsa dia-  
 meter latus transversum, erit, ut latus rectum, vel  
 parameter ad latus transversum, vel diametrum illam  
 ipsam: In Parabola vero equatur rectangulo sub abscis-  
 sa ab unico diametri vertice, & recta constanti, quam  
 dico parametrum; vel latus rectum; & que equatur  
 ordinata per focum ducta, ac equatur quadrupla  
 distantia verticis diametri a foco, vel a directrice.

F.134  
 135 352. Pro Ellipsi, & diametris primariis Hyperbo-  
 lae, in fig. 134, 135 haberi rationem constantem  
 quadrati semiordinate LP, vel Lp ad rectangulum VLu  
 sub binis abscissis a binis verticibus V, ut patet  
 ex Propositionibus 5, & 6. Nam ex prop. 6 re-  
 ctangulum PLp ad rectangulum VLu habet rationem  
 constantem, manente ordinarum directione, &  
 ex Propositione 5 recta Pp bifariam secatur in L,  
 adeoque rectangulum PLp æquatur quadrato PL,  
 vel pL. Idem pro Hyperbola constat etiam ex nu-  
 mer. 256.

353. Eam rationem esse eandem, quam parame-  
 tri, vel lateris recti ad diametrum, vel latus trans-  
 versum, patebit ex definitione perametri, si demon-  
 stretur esse eandem, ac rationem quadrati diametri, vel  
 semi-



semidiametri conjugatæ ad quadratum diametri, vel semidiametri primariæ. Id autem pro Ellipsi patet in fig. 134, cum diametri omnes in ea terminentur ad perimetrum, adeoque si  $AC$  sit diameter conjugata, esse debeat in eadem illa ratione rectangulum  $AC$  ad rectangulum  $VC$ , sive quadratum  $AC$  ad quadratum  $VC$ , adeoque & quadratum  $AA$  ad quadratum  $VN$ . Pro Hyperbola demonstratum est num. 256.

354. In Parabola vero in fig. 136 cum rectangulum  $PLP$ , sive quadratum  $PL$  sit per Coroll. 1. Prop. 6 ad rectangulum sub abscissa  $VL$ , & quavis recta constante in ratione constanti; si semel assumatur pro recta illa constanti, sive pro parametro tertia proportionalis post aliquam abscissam, & ejus semiordinatam, jam quadratum semiordinatæ fiet æquale rectangulo sub abscissa, & ea parametro, adeoque ea ratio constans in reliquis omnibus ordinatis erit ratio æqualitatis.

355. Quod si ordinatâ  $PLP'$  transeat per focum  $F$ , & diameter  $L'V$  occurrat directrici in  $H$ , erit (num. 178)  $VL'$  dimidia  $L'H$ , &  $L'H$  dimidia  $P'P'$ , ac proinde æqualis  $PL'$ . Quare erit  $L'V$  ad  $L'P'$  ut  $L'P'$  ad  $P'P'$ , & proinde ordinatâ  $P'P'$  per focum ductâ erit illa parameter constans, quæ erit quadrupla  $VH$ , adeoque & quadrupla  $VF$ . Q. E. D.

### SCHOLIUM I.

356. **C**Um ex hac quoque Propositione plurima conclusaria prosuant, ordinem quemdam in iis deducendis persequar. In primis quæ omnes Sectiones conicæ communia habent in diametris omnibus cum  $P$ , quæ initio de axibus sunt Demonstrata Corollario 1. indicabo; tum deducam bina, quæ Parabolæ soli sunt propria, quibus demonstratis progrediar ad Theorema quædam pertinentia ad Ellipsim, & Hyperbolam generaliter: demum occasione nacta comparationis Ellipsos cum circulo, plures ejus proprietates evolvam.

## 118 SECTIONUM CONICARUM.

Coroll. 1.

357. *Qua deducta sunt pro ordinatis axis transversæ in Corollariis 8, 10, 13, 13 definit. 2 num. 74, 79, 83. 85, eadem locum habent in ordinatis diametrorum omnium, si pro axe conjugato ponatur in binis postremis diameter conjugata.*

358. *Demonstratio est eadem utrobique, petita pariter ex ratione constanti; quam habet quadratum semiordinatæ ad rectangulum sub abscissis, & quod pertinet ad Coroll. 13 demonstratum est pro Hyperbola num. 256.*

Coroll. 2.

359. *Latus rectum cujuscvis diametri in Parabola æquatur lateri recto principalit, & quadrupla abscissa a vertice axis per ordinatam ductam ex ejus diametri vertice.*

F.65 360. *Est enim in fig. 65 parameter diametri transeuntis per P quadrupla (num. 351) PD, adeoque quadrupla ER compositæ ex EM quarta parte lateris recti principalis, & MR ejusmodi abscissæ a vertice.*

Coroll. 3.

F.124 361. *Si e quovis puncto L chorda Vu Parabola in*  
 125 *fig. 124, vel tangentis IL in fig. 125, ducatur LP axi parallela usque ad perimetrum, erit ibi rectangulum VLu, hic quadratum IL æquale rectangulo sub PL, & latere recto ejus diametri, cujus ibi chorda Vx est ordinata, & qua hic transit per contractum I.*

362. *Secta enim in fig. 124 chorda Vn bifariam in R, & erecta RM parallela axi, quæ erit (num. 206, & 212) diameter ejus chordæ, erit quadratum VR, five rectangulum VRn (num. 351) æquale rectangulo sub RM, & latere recto diametri ipsius. Erit autem rectangulum VLu ad rectangulum VRn (num. 333) ut rectangulum sub LP, & illa parametro assumpta pro constanti, ad rectangulum sub RM, & eadem parametro, adeoque & rectangulum VLn erit æquale rectangulo sub LP, & eadem parametro. Porro si coeuntibus V, n secans LVn abeat in tangentem, quadratum*  
 ejus

ejus tangentis debet æquari rectangulo sub  $LP$ , & ea parametro. Sed idem in fig. 125. patebit, si in diametrum  $IR$  axi, adeoque ipsi  $PL$  parallelam ducatur semiordinata  $PR$ , quæ erit parallela, & æqualis  $LP$ . Erit enim quadratum  $RP$  æquale rectangulo sub  $IR$ , & parametro diametri  $IR$ , adeoque & quadratum  $IL$  æquale rectangulo sub  $LP$ , & eadem parametro.

Coroll. 4.

363. *In Ellipsi, & Hyperbola diametri conjugatae sunt sibi invicem conjugatae.*

364. Pro Hyperbola demonstratum est etiam (n. 344.), sed pro utraque sic evincitur communi demonstratione. Sint in fig. 137, 138 binæ ordinatæ  $Pp$ ,  $Pp'$  eidem diametro  $Vu$  æqualiter distantes a centro  $C$  per  $CL$ ,  $Cl$ , & proinde æquales (num. 357, & 79). Si ducatur per centrum  $C$  diameter  $ACA$  parallela ordinatis  $Pp$ ,  $Pp'$ , ea secabit chordas  $PP'$ ,  $pp'$  bisariam, cum  $LP$ ,  $Lp$ , &  $lp$ ,  $lp'$  debeant æquari æqualibus  $CL$ ,  $Cl$ , ac proinde habet ipsas chordas  $PP'$ ,  $pp'$  pro ordinatis. Igitur binæ diametri  $Vu$ ,  $Aa$  ejusmodi sunt, ut alterius ordinatæ sint alteri mutuo parallelæ, adeoque (num. 212) ipsæ diametri sibi mutuo conjugatæ sunt.

Coroll. 5.

365. *Si communem diametrum habeant plures Ellipses, vel plures Hyperbola eandem primariam diametrum, ordinatæ vero sint in quibusvis angulis inclinatae ad ipsas diametros; semiordinatæ ad idem diametri punctum pertinentes erunt in omnibus in constanti ratione inter se, quam habebunt diametri conjugatae, & idem respectu Ellipsium contingit semiordinatæ ad circulum, & respectu Hyperbolarum tangenti ex eodem puncto diametri ductæ ad circulum ipsum eadem diametro descriptum, habita ipsius circuli diametro pro diametro ejusdem conjugata, cui tangenti semiordinatæ Hyperbole æquatæ æqualis erit.*

366. Si enim in fig. 139, 140 ejusmodi Ellipsium, vel Hyperbolarum semiordinatæ fuerint  $LP$ ,  $LP'$ , erunt, inveniendò in proportionè hujus Propositionis 7, quadrata

## 260 SECTIONUM CONICARUM.

ducta semiordinatarum  $LP$   $LP'$  ad quadrata suarum semi-  
 diametrorum conjungatarum in eadem ratione com-  
 munitis rectanguli  $VL\mu$  ad quadratum communis semi-  
 diametri  $CV$ , adeoque &  $LP$  ad suam semidiametrum  
 conjugatam, ut  $LP'$  ad suam; ac proinde alternando  
 $LP$  ad  $LP'$ , ut altera semidiameter conjugata ad alteram.

367. Quod si in fig. 139  $VP\mu$  sit circulus, in eo  
 quadratum  $LP$  æquatur rectangulo  $VL\mu$ , & si in fig. 140.  
 ducatur  $LT$  tangens ad circulum  $VT\mu$ , quadratum ip-  
 sius æquatur rectangulo  $VL\mu$ . Quare etiam in iis erit  
 quadratum  $LP$  figuræ 139, &  $LT$  fig. 140. ad quadra-  
 tum semidiametri circuli, ut rectangulum  $VL\mu$  ad qua-  
 dratum  $CV$ , nimirum in ratione æqualitatis, ac pro-  
 inde manebit demonstratio. In Hyperbola vero æqui-  
 latera diametri conjugatæ erunt æquales, (num. 260),  
 adeoque ratio quadrati  $LP$  in fig. 140 ad rectangu-  
 lum  $VL\mu$ , vel quadratum  $LT$  ratio æqualitatis, adeo-  
 que  $LP$  æqualis  $LT$ .

### Coroll. 6.

368. *In eodem casu chorda  $Pp$ ,  $P'p'$  ducta per verti-  
 ces binarum ordinarum pertinentium ad bina communia  
 diametri puncta  $L$ ,  $l$ , vel tangentes ducta per bina ex-  
 trema puncta  $P$ ,  $P'$  ordinarum pertinentium ad commu-  
 ne diametri punctum  $L$  concurrent in ipsa diametro ali-  
 cubi in  $Q$ , quod etiam in Ellipsi cum circulo compara-  
 ta contingit, in qua iccirco erit abscissa a centro ad se-  
 midiametrum, ut hac ad distantiam tangentis a centro  
 comparatam in ipsa diametro.*

369. Patet ex lemmate generali num. 204. Erit enim  
 $LP$  ad  $LP'$ , ut  $lp$  ad  $lp'$ , adeoque rectæ  $Pp$ ,  $l$ ,  $P'p'$   
 ad idem punctum  $Q$  convergent. Accedent autem pun-  
 cto  $l$  ad  $L$ , donec cum ipso congruat, evanescentibus  
 simul chordis  $Pp$ ,  $P'p'$ , simul ambæ focantes  $pPQ$ ,  $p'P'Q$   
 abibunt in tangentes, & adhuc ipsæ tangentes in co-  
 dem diametri puncto  $Q$  concurrent. Porro si in fig. 139  
 $VP\mu$  sit circulus, &  $PQ$  tangens, angulus  $CPQ$  erit re-  
 ctus, & similia triangula  $CLP$ ,  $CPQ$  ob angulum ad  
 $C$  communem, adeoque  $CL$  ad  $CP$ , live  $CV$ , ut  $CV$   
 ad  $CQ$ .

## S C H O L I U M II.

370. **P**lures hinc Ellipseos proprietates profluunt sane elegantissimæ, tam quæ ad ejus diametros conjugatas pertinent, quam quæ ad ipsius comparationem cum circulo, quæ quidem Hyperbolæ vel nullo modo conveniunt, vel non omnino communes sunt. Eas aliquot Corollariis persequar eo ordine, quo alię ex aliis oriuntur.

## Coroll. 7.

371. *In Ellipsis, annumerato iis etiam circulo, habentibus diametrum communem, si ordinate ductæ per vertices binarum diametrorum, quarum singule ad singulas pertineant, transeant per idem cujusvis diametri punctum, transibunt etiam ordinate ductæ per vertices diametrorum conjugatarum per aliud diametri punctum commune.*

372. Sint enim in fig. 141 semidiametri CP, CP' F. 141 & ordinate ad communem diametrum Vu ductæ per P, P' transeant per idem diametri Vu punctum L. Sit quoque Cp semidiameter conjugata CP, adeoque parallela tangenti PQ, & ducta semiordinata pl, tum semiordinata lp, demonstrandum est fore Cp' semidiametrum conjugatam CP'. Sic autem facile demonstratur. Tangens ducta per P' terminatur ad idem punctum Q, & ob similia triangula plC, PLQ est Cl ad lp, ut QL ad LP, & (num. 365) lp ad lp', ut LP ad LP'. Quare ex equalitate ordinata Cl ad pl' ut QL ad LP', adeoque ob angulos QLP', Clp' in parallelis equales, similia erunt triangula QLP', Clp', & Cp' parallela QP', adeoque conjugata semidiametri CP'.

## Coroll. 8.

373. *In Ellipsi si ad quamvis diametrum uV e verticibus P', p' diametrorum quarumvis conjugatarum ducantur semiordinatae P'L, p'l, alterius abscissa a centro CL erit media proportionalis inter alterius abscissas VL, ul a binis verticibus, ac summa quidem quadratorum bina-*

122 SECTIO NUM CONICARUM

rum abscissarum a centro  $CL$ ,  $Cl$  equabitur quadrato semidiametri  $CV$ ; in quam ea demissa sunt, summa vero quadratorum semiordinatarum  $PL$ ,  $p'l$  quadrato semidiametri  $CA'$  conjugata ipsius  $CV$ :

374. Si enim eadem diametro sit circulus  $VPu$ , & erigantur semiordinatæ  $LP$ ,  $lp$  erit (num. 371)  $Cp$  parallela tangenti  $QP$ ; adeoque angulus  $PCp$  equalis alterno  $CPQ$  recto in contactu. Quare bini anguli  $PCL$ ,  $pCl$  simul equantur recto. Cum igitur equentur recto & bini  $PCL$ ,  $CPL$  in triangulo rectangulo  $CLP$ , erit angulus  $CPL$  equalis  $pCl$ , & proinde similia triangula  $CPL$ ,  $pCl$ ; quæ præterea ob bases  $CP$ ;  $Cp$  æquales erunt equalia; adeoque  $CL$  equalis  $lp$  mediæ proportionali inter  $Vl$ , ut ex circuli natura. Præterea vero summa quadratorum  $CL$ ,  $Cl$  equabitur quadrato  $CP$ ; sive quadrato  $CV$ ; cumque sit  $Cl$  sive  $PL$  ad  $LP'$ , &  $CL$ , sive  $lp$  ad  $lp'$ , ut semidiameter  $CA$  ad semidiametrum  $CA'$  conjugatam  $CV$ ; erit & summa quadratorum  $Cl$ ;  $CL$  ad summam quadratorum  $LP'$ ,  $lp'$ , ut quadratum  $CA$ ; seu  $CV$  æquale illi primæ summæ ad quadratum  $CA$ ; quod proinde erit æquale summæ posteriori.

Coroll. 9.

375. Summa quadratorum diametrorum, seu semidiametrorum conjugatarum in Ellipsi constanter equatur summa quadratorum axium, vel semiaxium; parallelogrammum; cujus latera semidiametri conjugata, rectangulo sub semi-axibus; ac parallelogrammum Ellipsi circumscriptum, quod continent tangentes ductæ per diametrorum conjugatarum vertices rectangulo sub axibus; cujus parallelogrammi angulorum vertices erunt semper in perimetro Ellipseos alterius prioris similis; cujus latera ad ejus latera homotoga erunt in ratione subduplicata 2 ad 1:

F. 142 276. Nam in fig. 142. si  $Vu$  fuerit axis Ellipseos  $VPu$ ; & diameter circuli  $VPu$ ; &  $CP$ ,  $Cp$  semidiametri conjugatæ; ductis  $P'LP$ ;  $p'lp$  axi perpendicularibus usque ad circuli peripheriam, tum  $CP$ ,  $Cp$  erit quadratum  $CA$  ad quadratum  $CA'$ ; ut quadratum  $LP$  ad quadratum  $LP'$ , & quadratum  $lp$  ad quadratum  $lp'$ ;

adeo-

adeoque ut summa quadratorum  $LP'$ ,  $lp'$  ad summam quadratorum  $LP$ ,  $lp'$ , seu ob  $PL$  equalem  $Cl$  ( num. 373 ) summa quadratorum  $PL$ ,  $pl$  æquatur summæ  $Cl$ ,  $lp'$ , sive quadrato  $Cp$ , vel  $CA$ . Igitur & summa quadratorum  $LP'$ ,  $lp'$  æquatur quadrato  $CA'$ . Cum vero etiam  $Cl$  æquetur  $LP$ , adeoque bina quadrata  $Cl$ ,  $Cl$  æquentur binis  $PL$ ,  $CL$ , sive quadrato  $CP$ , vel  $CV$ , quatuor quadrata  $LP'$ ,  $lp'$ ,  $CL'$ ,  $Cl$ , sive bina semidiametrorum conjugatarum  $CP'$ ,  $Cp'$  æquabuntur binis quadratis semiaxim  $CA'$ ,  $CV$ , adeoque & quadrata diametrorum conjugatarum quadratis axium.

377. Ductis autem  $pL$ ,  $p'L$ , erunt, ut  $CA$  ad  $CA'$ , tam areæ triangulorum  $PpL$ ,  $P'p'L$ , &  $PCL$ ,  $P'CL$ , quæ, cum sint inter easdem parallelas, sunt ut bases  $LP$ ,  $LP'$ , quam areæ triangulorum  $pLl$ ,  $p'Ll$ , &  $pCl$ ,  $p'Cl$ , quæ pariter sunt ut bases  $pl$ ,  $p'l$ . Sunt igitur in eadem ratione & tota quadrilinea  $PLlp$ ,  $P'Llp'$ , & triangula  $PCL$ ,  $P'CL$ , ac  $pCl$ ,  $p'Cl$ , adeoque & residua triangula  $PCp$ ,  $P' Cp'$ , est autem triangulum  $PCp$  rectangulum ad  $C$  dimidium rectanguli sub  $PC$ ,  $Cp$ , sive sub  $VC$ ,  $CA$ , & triangulum  $P' Cp'$  dimidium parallelogrammi  $P' Cp' T$ . Quare erit rectangulum sub  $AC$ , &  $CV$  ad parallelogrammum  $P' Cp' T$  pariter, ut  $CA$  ad  $CA'$ , sive ut idem rectangulum sub  $AC$ , &  $CV$  ad rectangulum sub  $CA'$ , & eadem  $CV$ , nimirum ad rectangulum sub semiaxibus, cui proinde æquale erit illud parallelogrammum.

378. At in fig. 143 si  $QTqt$  sit parallelogrammum tangentium ductatum per vertices  $P$ ,  $p$ ,  $P'$ ,  $p'$  diametrorum conjugatarum  $Pp$ ,  $P'p'$ , satis patet ob ipsarum tangentium parallelismum cum ipsis diametris, fore inter se æqualia quatuor parallelogramma  $CT$ ,  $CQ$ ,  $Ct$ ,  $Cq$ ; quorum proinde cum singula ut  $CT$ , æquentur rectangulo sub semiaxibus, simul omnia æquabuntur rectangulo sub axibus. Ducta vero  $CQ$ , quæ Ellipsi occurrat in  $V$ , chordam  $Pp$  ea bifariam secabit in  $R$ , & ibidem ab ea bifariam secabitur; cum sint binæ diametri parallelogrammi, eritque  $PP'$   
ordi-

124 SECTIONUM CONICARUM.

ordinata semidiametri VC, adeoque ( num. 368 ) CR ad CV, ut CV ad CQ, & CQ ad CV, in ratione subduplicata CQ ad CR, sive 2 ad 1. Pariter si PP', CT sibi occurrant in r, & CT Ellipsi in B, erit CT ad CB in ratione subduplicata CT ad C, sive 2 ad 1, adeoque Q, T ad hujusmodi Ellipsium per num. 119.

Coroll. 10.

379. *Diametrorum omnium in Ellipsi maxima est axis transversus, minima axis conjugatus, reliquarum ea major, que axis transverso propior, ac bina hinc inde*  
 F. 142 *in angulis cum ipso equalibus aequales.*

380. Nam in fig. 142 si Vu sit axis transversus, qui conjugato semper est major (num. 64), erit LP major, quam LP' in eadem ratione; adeoque quadratum CP æquale quadratis CL, PL erit majus quadrato CP, quod est æquale quadratis CL, LP'; ac proinde CP, vel CV major quam CP', & axis transversus duplus CV major quavis diametro dupla CP'.

381. Porro quoniam quadratum PL ad quadratum PL est in constanti ratione, in eadem ratione crescent, & decrescent & ipsa, & eorum differentia. Crescit autem semper sinus PL in circulo, dum P ab V ab A tendit, decrescente CL, ac in A est maximus, adeoque & differentia quadratorum LP', LP quæ eadem est, ac differentia quadratorum CP, CP', semper crescit ab V ad A, vel A'; & proinde cum quadratum CP sit semper idem, decrescet perpetuo CP', & abeunte P' in A' fiet minimum. Quare diametri quoque quo magis distant ab axe transverso eo minores sunt, & axis conjugatus est omnium minimus.

382. Demum si Ellipsis completa occurrat ipsi PP' in I, erit LI æqualis LP', adeoque & CI æqualis CP', & angulus LCI æqualis LCP'. Quare binæ semidiametri CP', CI hinc inde in equalibus angulis ab axe transverso æquales, adeoque æquales & integre diametri,



Coroll. 11.

383. Diameter per cuius verticem ducta ordinata ad axem habebis abscissam a centro ejusmodi, ut ejus quadratum sit dimidium quadrati ejusdem semiaxis, habebit conjugatam sibi equalem, & ea, datis axibus, facile determinatur.

384. Si enim fuerint  $CP$ ,  $CP'$  æquales, erunt æquales & anguli  $P'CL$ ,  $P'CL$ , adeoque &  $CL$ ,  $CL$ , nimirum (si  $CP'$  fuerit conjugata  $CP'$ )  $CL$ ,  $LP$ , & quadratum  $CL$  dimidium quadrati  $CP$ , sive  $CV$ . Dato autem axe  $V$ , si fiat angulus  $VCP$  semirectus, tum capta  $CP$  æquali  $CV$ , ducatur  $PL'$  perpendicularis ipsi axi, & capiatur  $LP'$  ad  $LP$  in ratione semiaxis  $CA'$  ad semiaxem  $CV$ , erit  $P'C$  semidiameter, quæ suæ conjugatæ æqualis erit.

Coroll. 12.

385. Si eodem axe sit Ellipsis, & circulus; erit æqualitas circuli ad aream Ellipseos, ut in axis ad alterum, quæ ratio erit eadem in segmentis communes abscissas habentibus; ac area totius Ellipseos erit media geometricè proportionalis inter areas circulorum habentium pro diametris binos ejus axes, sive circuli circumscripti & inscripti, ac æqualis area circuli habentis diametrum median geometricè proportionalem inter binos axes.

386. Si enim  $V$  sit jam axis uterlibet, & circulus vocatæ  $PP'$  occurrat in  $I'$ , erit  $PI'$  ad  $IP'$  semper ut  $PL$  ad  $LP'$ , sive ut semiaxis  $CV$  ad  $CA'$ , sive ut totus axis  $V$  ad axem alterum. Quare & areae genitæ eodem motu earundem rectarum  $PI'$ ,  $IP'$  erunt in eadem ratione, nimirum area segmenti  $PVI'$  ad segmentum  $IVP'$ , & area totius circuli ad aream totius Ellipseos.

387. Porro cum hinc area circuli habentis pro diametro axem transversum sit ad aream Ellipseos, ut axis transversus ad conjugatum, & area Ellipseos ad aream circuli habentis pro diametro axem conjugatum sit iterum, ut axis transversus ad conjugatum, erit area Ellipseos media inter areas illorum circulorum, & cum

## 126 SECTIONUM CONICARUM

quævis semidiameter sit minor semiaxe transverso, major semiaxe conjugato, patet, circulum descriptum, assumpto pro radio illo priore, fore circumscriptum, assumpto vero hoc posteriore, fore inscriptum. Cuiusque areæ circularum sit in ratione duplicata diametrorum, patet, circulum pariter habentem diametrum mediam geometricè proportionalem inter binos axes, habiturum aream pariter mediam inter areas eorundem illorum circularum, & æqualem areæ Ellipseos.

## SCHOLIUM III.

388. **A**Tque hoc quidem pacto multa deducimus, quæ Ellipsi ita propria sunt, ut ad Hyperbolam saltem eodem pacto transferri non possint, licet suas habeat Hyperbola ipsa proprietates, quæ earum plerisque respondeant. Sic nonnullis eorum, quæ hic proponuntur n. 373, 375, 379 respondent, quæ pro Hyperbola proposita sunt num. 253, 248, 244.

389. Ex ipsa Propositione facile deducitur, *dati lateris transverso, & recto, ac directione ordinarum, vel dati in Ellipsi & Hyperbola binis diametris conjugatis magnitudine, & positione, posse inveniri omnia Sectionis Conicæ puncta*. Assumpta enim quavis abscissa in latere transverso, & ducta recta in ea directione, quam habere debent ordinatæ, quæ nimirum in Ellipsi, & Hyperbola parallela est diametro conjugatæ, satis erit pro Parabola assumere in ipsa hinc inde binas semiordinatas medias proportionales inter abscissam, & latus rectum, in Ellipsi, & Hyperbola assumpta media proportionali inter binas abscissas a binis verticibus, satis erit assumere hinc & inde binas semiordinatas, quæ ad eam sint in ratione simplici diametri conjugatæ ad diametrum illam, in qua assumpta est abscissa, sive in ratione subduplicata lateris recti ad illam diametrum. Habebitur enim, ut patet, debitus semiordinatæ valor, & mutata utcumque abscissa, describetur omnis Sectio Conicæ per puncta.

390. Sed ut pro Hyperbola ex datis binis diametris conjugatis elegantissimam, & expeditissimam constructionem habuimus num. 269 ope regulæ gyrantis circa datum punctum inter binas asymptotos, sic hic pariter habemus aliam nihilo minus expeditam, & elegantem constructionem Ellipseos per puncta, datis itidem binis diametris conjugatis, idque pariter ope regulæ quædam data lege gyrantis inter datas binas rectas.

391. Sint binæ diametri conjugatæ in fig. 144, 145  $VC_u$ ,  $ACP$ . Ex alterius vertice  $A$  demisso in alteram  $F:144$  perpendiculò  $AB$ , capiatur  $AD$  in eodem, vel ad partes  $A$  producto, ut in fig. 144, vel versus  $B$ , ut in  $145$  fig. 145,  $AD$  æqualis semidiametro  $CV$ , ac per  $C$ , &  $D$  ducta indefinita  $EF$ , productaque indefinite utrinque  $V_u$  in  $G$ , &  $H$ , moveatur lineâ  $BD$  ita, ut puncto  $B$  excurrente per rectam  $GH$ , ac puncto  $D$  per  $EF$  abeat in  $ab$ ; & punctum  $A$  abiens in  $a$  describet Ellipsim.  $F:145$   
 Ducta enim ex  $d$  recta parallela  $DB$ , quæ occurrat rectis  $AP$ ,  $V_u$  in  $L$ ,  $N$ , erit (num. 204)  $dL$  ad  $dN$ , ut  $DA$  ad  $DB$ , sive ut  $da$  ad  $db$ : Quare ducta  $aL$ , erunt similia triangula  $adL$ ,  $bdN$ ; adeoque  $aL$  parallela diametro  $VC_u$ . Erit autem  $DA$  ad  $dL$ , ut  $AC$  ad  $LC$ , adeoque quadratum  $DA$ , sive  $CV$  ad differentiam quadratorum  $DA$ ,  $dL$ , sive  $da$ ,  $dL$ , nimirum ad quadratum  $aL$ , ut quadratum  $AC$  ad differentiam quadratorum  $AC$ ,  $LC$ , sive ad rectangulum sub abscissis  $AL$ ,  $LP$ . Quare alternando quadratum  $VC$  ad quadratum  $AC$ , ut quadratum  $aL$  ad rectangulum  $ALP$  sub abscissis, & proinde  $aL$  æqualis semiordinatæ, & punctum  $a$  describet Ellipsim.

392. Quod si in fig. 146, 147  $V_u$ ,  $AP$  fuerint axes,  $F:146$  constructio evadet facilior. Sumpto enim in axe  $CA$   $147$  segmento  $AD$  vel ad partes oppositas centri  $C$ , ut in fig. 146, vel versus ipsum, ut in fig. 147, & notatis per regulam punctis  $D$ ,  $C$ ,  $A$ , ipsa regula ita convertatur, ut punctum  $C$  excurrat per axem  $VC_u$  in  $c$ , puncto  $D$  excurrente per  $ACP$  in  $d$ , ac punctum  $A$  transeat in  $a$  describet Ellipsim. Ducta enim  $aL$  parallela

123 SECTIONUM CONICARUM

la VC, erit  $da$  ad  $dL$ , ut  $ca$  ad  $CL$ , adeoque quadratum  $da$ , sive CV ad differentiam quadratorum  $da$ ,  $dL$  sive quadratum  $aL$ , ut quadratum  $ca$ , sive CA ad differentiam quadratorum  $ca$ ,  $CL$ , sive CA, CL; nimirum ad rectangulum ALP, adeoque alternando quadratum CV ad quadratum CA, ut quadratum  $La$  ad rectangulum ALP, ut oportebat.

393. Quoniam vero illa puncta  $a, b, d$  in fig. 144, 145, vel  $a, c, d$  in fig. 146, 147 possunt etiam notari in extremo rectilineo chartæ margine, & charta ipsa ita translata, ut puncta  $b, d$ , vel  $c, d$  semper sint in rectis GH, EF, notari, facile possunt quotcumque puncta  $a$ , & per ea duci linea continua; admodum facile Ellipsis describitur. Solet autem & instrumentum construere respondens fig. 147, in quo virga  $dca$  habeat in  $a$  stylum, in  $c$ , &  $d$  binos pedes insertos ita crenis in lamina incavatis secundum directiones CV, C $\mu$ , CA, CP, ut per ipsas excurrant, ac stylus  $a$  motu continuo Ellipsim describat, & ut plurima Ellipsium genera describi possint, virga paratur longior, per quam stylus  $a$ , & pedes  $c, d$  possint excurrere, & ad moveri ad se invicem, ac removeri ita, ut  $da$  fiat æqualis semiaxi transverso  $ca$  conjugato.

394. Ovalem linguam, quæ referat Ellipsim, sic etiam ope circini licebit describere. Fiat in fig. 148. rhombus quivis HD $\mu$ BE, cujus latera ad partes angulorum oppositorum B, & H producantur; tum centris B, & H, quovis, sed utrobique eodem intervallo, describantur arcus circuli FG, IL, ac centris E, & D reliqui FL, GI, qui apte connectentur cum prioribus in F, G, I, L cum perpendicularares sint iisdem EF, DG, DI, EL, habentibus eorum centra. Quin etiam si dentur in fig. 149. axis major VC $\mu$ , & minor AC $\mu$  facile sic determinabitur rhombus HD $\mu$ BE, cujus ope ejusmodi ovalis fiat. Centro C radiis C $\mu$ , CA fiant quadrantes circuli  $\mu$ K, AS occurrentes in K, S ipsi CA, C $\mu$ . Ducatur A $\mu$  occurrens arcui AS in G, & per quodvis punctum I arcus DG ducatur recta CI occurr-

circus quadranti  $\ast K$  in  $L$ , ducanturque rectæ  $\ast L$ ,  $M$ , per quarum concursum  $F$  ducta recta parallela ipsi  $LC$ , quæ occurrat rectis  $C\ast$ ,  $CP$  in  $B$ ,  $E$  assumptisque  $CH$ ,  $CD$  versus  $V$ , &  $A$  æqualibus  $CB$ ,  $CE$ , habebitur rhombus quæsitus  $EBDH$ . Nam triangula  $FB\ast$ ,  $FEA$  sunt similia isosceles  $LC\ast$ ,  $ICA$ , adeoque arcus circuli radio  $B\ast$  abibit in  $F$ , & radio  $EF$  in  $A$ .

395. Pro quovis rhombæ sic facilius invenietur quadratum. Sumatur  $AN$  versus  $P$  æqualis  $\ast C$ , tum  $CM$  versus  $\ast$  æqualis  $CN$ , ductaque  $MN$ , ac bifariam secta in  $R$ , sumantur  $MB$ ,  $NE$  ad partes oppositas  $C$  æquales  $MR$ , vel  $NR$ , &  $CH$ ,  $GD$  æquales, ipsi  $CB$ ,  $CE$ , ac habebitur intentum. Patet enim  $HDBE$  fore quadratum, ob æqualia triangula  $BCD$ ,  $DCH$ ,  $HCE$ ,  $ECB$ . Ductis autem  $RB$ ,  $RC$ , &  $RO$  parallela  $NE$ , ob  $CM$ ,  $CB$  æquales  $CN$ ,  $CE$  patet,  $MN$ ,  $BE$  fore parallelas, & proinde angulum  $RBO$  æqualem alterno  $MRB$ , sive  $MR$  ob  $MB$ ,  $MR$  æquales, vel  $CBR$ . Angulus quoque  $ROB$  æqualis est semirecto  $NEO$ , sive semirecto  $BCR$ , &  $BR$  communis triangulis  $BRC$ ,  $BRO$ . Igitur erit  $OB$  æqualis  $CB$ , & ducto arcu  $\ast F$ , erit  $OF$  æqualis  $C\ast$ , sive  $NA$ . Quare additis  $EO$ ,  $EN$ , æqualibus eadem  $NR$ , erit &  $EF$  æqualis  $EA$ , ac arcus radio  $EF$  abibit in  $A$ . Sed hæc constructio locum non habet, ubi  $CN$  differentia semiaxium sit ita magna, ut  $MB$  evadat major, vel æqualis  $M\ast$ .

SCHOLIUM IV.

396. Progreдемur jam ad aliud Theorema deducendum e Prop. 6, ac pariter fecundissimum plurimorum pertinentium potissimum ad tangentes, quoniam nonnulla etiam e Corollariis ipsius Prop. 6, deduci poterant, ut monui num. 327. Ordinem deductionis indicabo in Scholiis interjectis.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA.

397. **S**i per concursum  $Q$  fig. 150, 151, 152 tangen-  
tis  $PQ$  cum diametro  $QR$  ducatur recta occurrens  
perimetro sectionis Conicæ in  $T$ ,  $t$ , & ordinata  $Pp$  in  
 $K$ , erit  $QK$  media harmonice proportionalis inter  $QT$ ,  
 $Qt$  in fig. 150: 151, in quibus  $T$ ,  $t$  sunt in eodem ra-  
mo, vel  $KT$ ,  $Kt$  in fig. 152, in qua eadem jacent in  
ramis oppositis.

F.150  
151  
152  
398. Ducta enim recta  $Qp$ , agantur per  $T$ ,  $t$  rectæ  
parallelae ipsi  $Pp$  occurrentes rectis  $QP$ ,  $QR$ ,  $Qp$  in  
 $H$ ,  $h$ ,  $l$ ,  $i$ ,  $L$ ,  $l$ , & perimetro iterum in  $S$ ,  $s$ . Quo-  
niam ordinatæ  $TS$ ,  $ts$  a diametro pariter bifariam se-  
cantur in  $I$ ,  $i$ , & (num. 204) rectæ  $HL$ ,  $hl$  a recta  
 $QR$  debent secari bifariam in  $I$ ,  $i$ , ut recta  $Pp$  in  $R$ ;  
erunt &  $HS$ ,  $hs$ , æquales  $TL$ ,  $tl$  & rectangula  $THS$ ,  
 $ths$  rectangulis  $HTL$ ,  $htl$ . Porro cum sit  $HT$  ad  $ht$ ,  
&  $TL$  ad  $tl$ , ut  $QT$  ad  $Qt$ ; erit quadratum  $QT$  ad  
quadratum  $Qt$ , ut rectangulum  $HTL$  ad rectangulum  
 $htl$ , sive ut rectangulum  $THS$  ad rectangulum  $ths$ , ni-  
mirum (num. 321) ut quadratum  $PH$  ad quadratum  
 $Ph$ , vel ut quadratum  $KT$  ad quadratum  $Kt$ . Quare  
 $QT$  ad  $Qt$ , ut  $KT$  ad  $Kt$ . Sunt autem  $QT$ ,  $Qt$  in  
fig. 150, 151 trium  $QT$ ,  $QK$ ,  $Qs$  extremæ, &  $KT$ ,  
 $Kt$  differentie extremarum a media, ac in fig. 152 hæ  
extremæ trium  $KT$ ,  $KQ$ ,  $Kt$ , illæ differentie earunden  
a media. Habetur igitur utrobique ratio harmonice  
proposita.

SCHOLIUM I.

399. **S**i recta  $QK$  sit parallela axi in Parabola, &  
alteri asymptoto in Hyperbola, puncto  $t$  in  
in infinitum recedente, ut nusquam jam sit, fiet jux-  
ta num. 25  $QT$  æqualis  $TK$ . Sed quoniam eo casu in  
Parabola  $QK$  deberet congruere cum diametro  $QR$   
cum ipsum casum, qui nimirum usui futurus est  
accu-

accurate post hoc Scholium per finitam Geometriam demonstrabo.

400. Quod si punctum R abiret in centrum; Pp in fig. 150, 151 evaderet diameter, & tangens PH diametro RQ parallela, adeoque punctum Q abiret in infinitum, quo casu recta Tt pariter parallela tangenti Hb, esset ordinata diametri Pp, & ab ea bisariam secaretur in K, quod pariter congruit cum iis, quæ num. 25. demonstrata sunt de harmonica proportionis ratione in equalitatem desinente, ubi alterum e quatuor punctis vicinis abit in infinitum.

401. In casu vero, in quo QK evadat diameter, & congruat cum QR, punctum T ubique, & t in Ellipse, ac Hyperbola evadit ejus vertex, adeoque evanescentibus TS, ts, fiunt HL; hl tangentes, & rectangula HTL, htl evadunt quadrata tangentium, quo tamen casu adhuc demonstratio vim habet, & in casu Ellipseos, ac Hyperbolæ coincidit cum demonstratione Coroll. 9. Propositionis 6. expositi num. 325, in qua seriem quandam consecutorum ejusdem Propositionis abruptimus, ut num. 327. monui, ne nimis late evagaremur, huc reservatis iis, quæ jam deducemus.

Coroll. 1.

402. Tangens PQ in fig. 153, 154, & ordinata per idem punctum P ducta in Ellipse, & diametris Vu tri-F. 153  
 maris Hyperbola, ipsam diametrum secant in Q, & R. 154  
 in eadem ratione directa, & ad eandem centri partem, 155  
 in Parabola in fig. 155, abscindunt segmenta VR, VQ  
 a vertice equalia.

403. Nam in fig. 153, 154 puncta Q, V, R, n  
 respondent punctis Q, I, K, i fig. 150, 152. Ac pro-  
 pterinde est VQ ad nQ, ut VR ad Rn. Idem autem erue-  
 tur etiam ex illo Coroll. 9, Prop. 6: si enim tangentes  
 per V, & n ductæ occurrant tangenti PQ in A, & B,  
 erunt parallelae, & per id Corollarium erit AV ad Bn,  
 ut AP ad Bb, adeoque VQ ad Qn, ut VR ad Rn.

404. Inde autem sequitur puncta Q, & R debere ja-

## 132. SECTIONUM CONICARUM

tere ad eandem centri partem; quia binę distantię VQ, VR ab eodem vertice V, quę sunt primus & tertius proportionis terminus, debent esse vel simul majores, vel simul minores quam binę distantię ab altero vertice  $\mu$ , adeoque jacere ad eandem partem centri verticibus interjecti, & ad quam jacet vertex propior.

405. In Parabola vero in fig. 135 sic per finitani Geometriam demonstratur fore QV, VR æquales. Pręterea diameter ducta per P occurrat tangenti ductę per V in M, ordinatę in r, ac ex concursu A binarum tangentium ducatur AN diametris, & axi parallela usque ad perimetrum, Erunt ob parallelismum æquales QV, Pr, & VR, MP, adeoque etiam QR, Mr. Erit autem (num. 328) QV ad AN, ut quadratum QP ad quadratum PA, sive ut quadratum QR ad quadratum VR, & AN ad MP, sive VR ut quadratum VA ad quadratum VM, sive ut quadratum rP ad quadratum rM, vel ut quadratum QV ad quadratum QR. Igitur ex æqualitate perturbata, erit QV ad VR, ut quadratum QV ad quadratum VR, quod ostendit eam esse rationem æqualitatis; eritenim rectangulum sub QV & se ipsa, nimirum ejus quadratum, ad rectangulum sub QV, & VR, ut ipsam quadratum QV ad quadratum VR, adeoque rectangulum sub QV & VR æquale quadrato VR, sive QV æqualis VR.

Coroll. 1.

406. In Ellipsi & diametris primariis Hyperbole segmenta diametri VR, VQ, qua abscindit ab altero vertice V ordinata PRp, & tangens PQ, per idem punctum P ducta, sunt ut ejusmodi segmenta abscissa ab altero vertice, & ea ratio in Ellipsi est minoris, in Hyperbola majoris inequalitatis, in Parabola æqualitatis.

407. Paret primus ex precedentis Corollarii propositione. Nam alternando est VQ ad VR, ut  $\mu$ Q ad

$\mu$ R



$VR$ , sive invertendo  $VR$  ad  $VQ$ , ut  $VR$  ad  $VQ$ .  
 Patet secundum, quia ordinata  $Pp$  secat diametrum in  
 $H$  in Ellipsi inter vertices  $Vn$ , in Hyperbola extra;  
 num debeat ( num. 149. ) jacete ibi inter duas tan-  
 gentes sibi parallelas transeuntes per diametri verti-  
 ces ( num. 213 ), hic extra. Iacebit igitur contra  
 $Q$  ibi extra, hic intra, & in Ellipsi  $VR$  erit minor,  
 quam  $VQ$ , in Hyperbola major. In Parabola veto ex  
 Corollario superiore equantur  $VQ$ ,  $VR$ .

Coroll. 3.

408. Si tangens  $VM$  ducta per verticem  $V$  diametri occurrat in  $M$  recta transeunti per quodvis perime-  
 tri punctum  $P$ , & per alterum verticem  $u$  in Ellipsi  
 & Hyperbola, ac diametri parallela in Parabola, ea  
 secabitur bifariam in  $A$  a tangente ducta per  $P$ , ac  
 in Parabola tangentes  $VM$ ,  $PQ$  ducta per binos binor-  
 um diametrorum vertices  $V$ ,  $P$ , & terminata ad ip-  
 sas diametros se mutuo secant bifariam in  $A$ .

409. Erit enim in fig. 153, 154  $Bu$  ad  $AV$ , ut  
 $VQ$  ad  $VQ$ , adeoque ( nu. 406 ) ut  $VR$  ad  $VR$ , ni-  
 mirum ut  $VP$  ad  $PM$ , vel denum ut eadem  $Bu$  ad  
 $AM$ , adeoque  $AV$ ,  $AM$  æquales. At in fig. 155 ob  
 $QY$  dimidiam  $QR$ , erit  $VA$  dimidia  $PR$ , vel  $VM$ ,  
 &  $QA$  dimidia  $QP$ , ac proinde æquales &  $AV$ ,  $AM$ ,  
 &  $AQ$ ,  $AP$ .

## SCHOLIUM II.

410. **H** Actenus Propositionis confectaria quedam  
 deduxi, quæ a rationis harmonicæ pro-  
 prietatibus non pendent. Nunc quoniam puncta quo-  
 que  $Q$ ,  $R$ ,  $V$ ,  $u$  in Ellipsi & Hyperbola harmoni-  
 cam proportionem constituunt, cujus tum priora illa  
 duo, tum hæc posteriora alterna sunt, deducam ea,  
 quæ ex proprietatibus ejusdem harmonicæ proportionis  
 consequantur, secta distantia binorum alternorum  $V$ ,  
 $u$  bifariam a centro  $C$ , quorum bina potissimum de-  
 monstravi num. 22, 26. Quod autem ibi in fig. 6  
 sunt

134 SECTIONUM CONICARUM

sunt puncta A, R, B, C, D, hoc hic in Ellipsi in fig. 153. sunt puncta, u, C, R, V, Q, & in Hyperbola in fig. 154. u, C, Q, V, R. Primum autem prioris proprietatis consecutaria, tum posterioris persequar.

Coroll. 4.

411. In Ellipsi, & Hyperbola diametris primariis semidiameter Cu, vel CV est media geometricè proportionalis inter CQ, CR distantias ordinata Pp, & tangenti PQ in eadem diametro assumptas, quæ ad eundem centri partem jacent amba.

412. Patet primum ex num. 22. ob proportionem harmonicam punctorum Q, R, V, u: quorum alterna sunt V, u, & eorum distantia secta est bifariam in C. Debere autem R, & Q jacere ad eandem partem centri C patet ex num. 402.

Coroll. 5.

413. In eisdem est CR abscissa a centro ad Ru abscissam ab uno vertice, ut VR abscissa ab altero, ad RQ subtangentem.

44. Cum enim sit CR ad CV, ut CV ad CQ, erit in eadem ratione & RV differentia ipsarum CR, CV ad VQ differentiam ipsarum CV, CQ, adeoque CR, ad CV, ut VR ad VQ; & proinde CR ad Ru priorum summam, ut VR ad RQ summam posteriorum.

Coroll. 6.

F. 156 415. In Hyperbola in fig. 156. semidiameter quoque secundaria CV, vel Cu est media geometricè proportionalis inter CR, CQ distantias ordinata Pp, & tangenti PQ in eadem diametro assumptas, sed ea ad partes oppositas jacent, & tangens, ac ordinata diametrum ipsam conjugatam secant in eadem ratione, sed reciproca.

416. Si enim diametro primariæ Dd conjugatæ ipsius Vv occurrat tangens PQ in I, semiordinata sua PE parallela ipsi Vv in E, perunt EP, EC equales RC, RP, eritque RQ ad CQ, ut RP, sive CE ad CI, nimirum ob CI, CD, CE conjunctas proportio-

tiona-

clonales ( num. 411 ), ut quadratum CE vel RP ad quadratum CD. Quare dividendo RC ad CQ, ut differentia quadratorum RP, CD ad quadratum CD. Est autem ( num. 351 ) quadratum CB, vel CR ad rectangulum DE, sive differentiam quadratorum CD, CE, vel CD, RP, ut quadratum CV ad quadratum CD, adeoque alternando quadratum CR ad quadratum CV in eadem illa ratione differentie quadratorum RP, CD ad quadratum CD. Igitur erit RC ad CQ, ut quadratum RC ad quadratum CV, adeoque RC, CV, CQ sunt continue proportionales.

417. Jacebit autem CQ ad partes oppositas CR, quia cum CI, CE jaceat ad eandem partem ( num. 411 ) tangens PQ prius incidet in diametrum primariam CD, quam in secundariam Vw, ac proinde jacebit Q ultra centrum respectu PR.

418. Jam vero si capiatur Cq equalis, & contraria CQ, ob CR, CV, Cq continue proportionales, & Cq aequali CV, quatuor puncta q, V, R, & constituent proportionem harmonicam ( num. 24 ) adeoque erit VR ad Rq, ut Vq ad qv, sive ut CQ ad QV, & diameter Vw secta in Q, & in R in eadem ratione, sed reciproca.

Coroll. 7.

419. *Semidiameter quavis in Ellipsi & Hyperbola est media proportionalis inter semiordinatam diametri ipsi conjugata, & suum segmentum interceptum inter centrum, ac tangentem per extremum semiordinatae ductam.*

420. Si enim in fig. 153, 154 sit PE semiordina-  
ta ad diametrum CD conjugatam CV, erit equalis CR, adeoque erit ( num. 411 ) ipsa EP ad CV, ut CV ad CQ. Si vero in fi. 153 semidiameter CD producatur usque ad tangentem QP in H, cum sit pariter CE equalis semiordinatae PR, erit CD media inter CE, CH ( num. 411 ), adeoque inter PR, CH. In figura vero 154 cum CV sit media inter

P. 153  
154

ter

136 SECTIONUM CONICARUM  
 ter CR, CQ; erit media inter femiordinata EP,  
 & segmentum CQ.

Coroll. 8.

421. In quavis Sectione Conica tangentes ductæ per  
 extrema puncta cujuscvis ordinata; cõtunt in aliquo pun-  
 cto ejus diametri; cujus ea est ordinata, ac si plures  
 Ellipses annumerato iis etiam circulo, vel plures Hy-  
 perbola communem habeant diametrum, tangentes du-  
 ctæ per extrema puncta ordinarum eandem abscissam  
 habentium convergent ad idem ejusdem diametri pun-  
 ctum. Si autem Hyperbola communem cum Ellipsi,  
 vel circulo habeat diametrum primarium, & hujus tan-  
 gens cum illius ordinata congruat in ipsâ diametro,  
 concurreret etiam hujus ordinata cum illius tangente.

422. Tangentes per extrema ordinata puncta du-  
 ctas concurrere in diametro; demonstratum est etiam  
 num. 216; tangentes Ellipsoidum & circuli, vel Hyper-  
 bolarum communem habentium diametrum, & abscis-  
 sam, concurrere in eodem diametri puncto, demon-  
 stratum est num. 368. Idem hic patet, quia in Para-  
 bola distantia concursus cum diametro utriusque tan-  
 gentis ductæ per bina extrema puncta ordinata a ver-  
 tice ipsius diametri debet esse æqualis eidem abscis-  
 sæ, ac in reliquis omnibus casibus Ellipsoidum, & Hy-  
 perbolarum existente abscissa a centro, & semidia-  
 metro communi, debet esse communis etiam distan-  
 tia concursus tangents cum diametro ab ipso centro.

F. 1578c ad eandem partem jacere, Pro circulo autem est  
 itidem manifestum; quia si in fig. 157. PQ sit tan-  
 gens, PR femiordinata circuli; in triangulis rectan-  
 gulis similibus CRP, CPQ erit CR ad CP, ut CP ad  
 CQ, adeoque CP, sive CV media itidem inter ab-  
 scissam CR, & distantiam CQ a tangente.

423. Quod si fuerit VP<sub>n</sub> vel circulus, vel Ellipsoidum  
 & Vp Hyperbola eadem diametro primaria V<sub>n</sub>, &  
 RP femiordinata prioris, ac Rp posterioris tangens  
 pertineat ad idem diametri punctum R, etiam prio-  
 ris tangens ducta per P, ac posterioris femiordinata

per

per  $p$  debent convergere ad idem punctum  $Q$  diametri, cum pro utraque debeat esse illa  $CQ$  tertia post  $CR$ ,  $CV$ .

Coroll. 9.

424. Tangens  $Aa$ , vel  $Bb$  in fig. 153, 154, 155 <sup>153</sup>  
 per diametri verticem  $V$ , vel  $u$  ducta, & terminata <sup>154</sup>  
 ad tangentes  $PQ$ ,  $pQ$  ductas per extrema puncta or- <sup>155</sup>  
 dinata  $Pp$  in ipso vertice secatur bifariam, & bina  
 recte  $Ba$ ,  $bA$  jungentes in Ellipsi, & Hyperbola an-  
 gulos oppositos quadrilinei  $AaBb$  earum quatuor tan-  
 gentium, transeunt per concursus  $R$  ordinata cum  
 diametro.

425. Patet primum ( num. 204 ), cum  $Pp$  sece-  
 tur bifariam in  $R$ , & recte  $PQ$ ,  $RQ$ ,  $pQ$  per idem  
 punctum  $Q$  transeant. Secundum sic demonstratur.  
 Cum sit  $Va$  aequalis  $Va$ , erit ipsa ad  $Bu$ , ut  $VA$   
 ad ipsam  $Bu$ , sive ut  $VQ$  ad  $Qu$ , vel ut  $VR$ , ad  
 $uR$ : adeoque ob angulos  $RVA$ ,  $RuB$  in parallelis  
 aequales, similia triangula  $RVA$ ,  $RuB$ , & anguli ad  
 $R$  aequales, ac proinde recta  $uR$  producta ex par-  
 te  $R$  in fig. 153, ex parte  $e$  in fig. 154 congruet  
 cum  $RB$ .

SCHOLIUM III.

426. **H**Æc quidem profluxerunt ex illa prima  
 proprietate proportionis harmonice indica-  
 tata num. 410, & proposita num. 22; nunc progre-  
 diar ad alteram ibidem indicatam, & propositam n.  
 26 nihilo minus fecundam.

Coroll. 10.

427. In Ellipsi, & Hyperbola in fig. 153, 154  
 sunt geometricè proportionales tum quatuor distantia  
 $QV$ ,  $QR$ ,  $QC$   $Qu$  concursus  $Q$  tangenti cum dia-  
 metro a vertice  $V$ , ab occurssu ordinata  $R$ , a centro  
 $C$ , & ab altero vertice  $u$ ; tum quatuor  $RQ$ ,  $RV$ ,  
 $Ru$ ,  $RC$ , occurssus ordinata  $R$  ab occurssu tangenti  
 $Q$ , a vertice  $V$ , ab altero vertice  $u$ , & a cen-  
 tro  $C$ .

## 14. SECTIONUM CONICARUM.

428. Est proprietas ( numer. 26 ) proportionis harmonicæ quatuor punctorum  $u, V; R, Q$ , quorum alterna  $V, u$ , & eorum distantia dividitur bifariam in  $C$ ; adeoque  $Q$  &  $R$  sunt reliqua binâ in bisectione non assumpta, &  $Q$  est extremum in fig. 152, & 154. Coroll. 11.

429. Si tangens ducta per extremum ordinata punctum  $P$  in fig. 158, 159 occurrat tangentibus ductis per vertices diametri  $V, u$ , in  $A$ , &  $a$ , & semidiametro conjugata  $CD$  in  $H$ , erunt tam  $RP, CH$  media, licet non continua proportionalas, quam semidiameter  $CD$  media continne proportionalis inter binas tangentes  $VA, ua$ .

430. Nam  $VA, RP, CH$ , *au* erunt ad se invicem ut  $QV, QR, QC, Qu$ , quæ ( num. 427 ) sunt in geometrica proportione, quare inter  $VA, ua$  erunt media  $RP, CH$ , adeoque erit etiam media  $CD$ ; quæ ( num. 419 ) est media in ipsas  $PR, HC$ , semiosdinatam nimirum, & segmentum diametri conjugatæ interceptum centro  $C$ , ac tangente  $PQ$ .

Coroll. 12.

431. Rectangula, que continentur sub binis tangentibus parallelis  $VA, ua$  interceptis inter contactus, & quamvis aliâ tangente  $QP$ , ac sub binis hujus segmentis  $PA, Pa$  interceptis inter illas, & contactus æquantur quadratis semidiametrorum parallelarum in ipsis tangentibus alterum alteri.

432. Cum enim ( num. 429 )  $CD$  sit media inter tangentes  $AV, ua$ , erit ejus quadratum æquale rectangulo sub iisdem. Quod si  $Cl$  sit semidiameter parallela tangenti  $QP$ , erit ( n. 315 ) tam  $AV$  ad  $AP$ , quam *au* ad  $aP$ , ut  $CD$  ad  $Cl$ ; adeoque rectangulum sub  $AV, ua$  ad rectangulum  $APa$ , ut quadratum  $CD$  ad quadratum  $Cl$ . Cum igitur rectangulum sub  $AV, ua$  æquetur quadrato  $CD$ , etiam rectangulum  $APa$  æquabitur quadrato  $Cl$ . Coroll. 13.

433. Rectangulum  $QPH$  sub segmentis tangentis cujusvis interceptis inter contactum, & binas quaslibet  
dic-

*diagramma conjugatarum est aequale quadrato semidiametri  
 CI parallela ipsi tangenti.*

434. Cum enim sit (num. 427) VR ad RQ, ut CR ad R<sub>1</sub>, erit etiam AP ad RQ, ut HP ad P<sub>1</sub> : adeoque rectangulum QPH aequale rectangulo AR<sub>1</sub> sive (num. 431) quadrato CI.

SCHOLIUM IV.

435. **H**is deductis progrediendum ad alia, quae inde profluunt, si consideretur praeterea perpendicularum ductum ex centro in tangentem, vel ex puncto contactus ad tangentem ipsam usque ad axem utrumvis, nimirum ad proprietates perpendiculari in tangentem, & normalium terminatarum ad axes ipsos, ubi cum diametris & axibus comparantur, quae & elegantes sunt per sese, & summi saepe usus in Astronomia, ac Physica.

436. At integra in binis Scholiis ad alia quaedam nihilo minus utilia, digrediemur. In primis notandum illud, ope hujus postemi Corollarii *admodum facile definitur axes datis binis diametris conjugatis*.

Si enim sint in fig. 160, 161 diametri conjugati PC<sub>1</sub>, IC<sub>1</sub>, & ducta per P recta indefinita HQ parallela Ii, quae nimirum debet esse Ellipseos, & Hyperbolae tangens, ac sumpta PS aequali dimidio lateri recto diametri Py in Ellipsi in fig. 160 in GP producta, in Hyperbola in fig. 161 versus C, sectaque bifariam CS in T, agatur TG perpendicularis ipsi CS, donec occurrat HQ in G, ac centro G intervallo GC, GS, quae intervalla patet fore aequalia, inveniuntur in ipsa tangente puncta Q, H; rectae CV, CH, determinabunt positiones axium, & sumpta CV media geometrica proportionali inter CQ, CR, & CD inter CE, CH, tum sumptis C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub> ipsis aequalibus ad partes oppositas, habebuntur axes V<sub>1</sub>, D<sub>1</sub>.

437. Cum enim circulus transire debeat per puncta C, S, Q, H, erit rectangulum HPQ aequale re-

160  
161

ctum

140 SECTIONUM CONICARUM

Angulo CPS, adeoque quadrato CImediæ nimirum inter CP, & dimidium latus rectum; angulus HVC rectus erit, ut oportebat, in axibus, & CD, CV erunt mediæ inter CE, CH, & CR, CQ, quæ nimirum haberi debebant in ejusmodi Ellipsi, vel Hyperbola, existente HPQ tangente parallela diametri conjugate Pp.

438. Erit autem in fig. 160 axis transversus is, qui evadet longior, in fig. 161 is, cujus occursum cum tangente ut Q est propior contactui P. Invenitur axibus facile ( num. 124, & 125 ) inveniuntur foci, & datis focus, ac axe transverso invenitur ( nu. 90 ) directrix, atque adeo Conica Sectio ex definitione, qua ab initio usq̄ sumus. Porro descripta iis axibus Sectione Conica, ea necessario transibit per punctum P, & habebit Pp, lî pro diametris conjugatis. Erit enim quadratum CV sive rectangulum sub CR, CQ ad rectangulum VR<sub>u</sub>, sive differentiam quadrati CR a quadrato CV, sive a rectangulo sub CR, & CQ, nimirum rectangulum sub RC & RQ, ut CQ ad RQ, sive CH ad RP, vel ad CE, nimirum ( num. 411 ) ut quadratum CD ad quadratum CE, sive ad quadratum RP, adeoque alternando quadratum CV ad quadratum CD, ut rectangulum VR<sub>u</sub> ad quadratum RP; ac proinde ipsa RP erit semiordinata, & perimeter transibit per P, cujus tangens erit ( num. 411 ). HTQ ob CR, CV, CQ continue proportionales, & CI, Ci semidiameter conjugata, cum tangenti parallela sit, & ejus quadratum æquetur rectangulo HPQ, juxta n. 433.

439. Hinc inde illud consequitur: si in quadam figura recta Bb in dato angulo inclinata ad datam rectam Vu secentur bifariam ab ipsa in K, vel intercepta V, u, ut in fig. 162, vel extra ut in fig. 163 ac sint quadrata BK, ut rectangula VKu, sive, quæ eadem redit, quadratum KB ad rectangulum VKu in data ratione; ea figura erit Ellipsis in primo casu Hyperbola in secundo. Secta enim bifariam Vu in C

& du-



dicta per C recta  $ICi$  in eodem illo angulo ita ,  
 quadrata  $CI$ ,  $Ci$  ad quadratum  $CV$  sint in illa ead-  
 em ratione, ac constructis Ellipsi & Hyperbola, que  
 habeat ipsas  $Vu$ ,  $Ii$  pro diametris conjugatis, ejus El-  
 lipsos, vel Hyperbolæ semiordinata quævis pertinens  
 ad punctum  $K$  debebit congruere cum  $Kb$ , vel  $Kb$ ,  
 cum debeat esse parallela  $Ii$  (n. 212) & debeat (n. 351)  
 ejus quadratum ad rectangulum  $VKu$  esse in eadem il-  
 la ratione quadrati  $VC$  ad quadratum  $CI$ , adeoque  
 ejus figure puncta omnia congruent cum punctis ejus-  
 modi Ellipseos, vel Hyperbolæ.

40. Id vero summo usui erit infra, ubi demon-  
 strandum erit, Cono non per verticem secto, obve-  
 nire unam e tribus Conicis sectionibus initio defini-  
 tis, & proinde habere omnes proprietates, quas ex  
 illa definitione deduximus. Sed præterea addendum,  
 illud, sicut fig. 164. quadrata semiordinatarum  $BK$  sive  $F.164$   
 sive, ut abscissa  $PK$  a vertice diametri  $PK$ , curvam  
 sive Parabolam, cujus parameter tertia continue propor-  
 tionis post quævis abscissam, & suam semiordina-  
 tam  $BK$ . Nam in ea curva productum sub parame-  
 tro, & quavis alia abscissa erit æquale quadrato suæ  
 semiordinate, cum hoc aliud quadratum ad illud prius  
 debeat esse, ut rectangulum sub sua abscissa, & illa  
 tota ad rectangulum sub abscissa priorè, & recta ead-  
 em. Data autem diametro  $PK$ , & directione ordi-  
 natum  $Bb$ , ac magnitudine unius ex iis, vel para-  
 metro, tertia post abscissam  $PK$ , & semiordinatam  
 $BK$ , determinatur focus, & directrix Parabolæ, qui-  
 bus datis, datur Parabola ipsa, quam debere congrue-  
 re cum ejusmodi curva, facile demonstratur.

41. Producta nimirum diametro  $KP$ , donec sit  
 quarta parametris pars, recta  $AM$  ipsi  $PM$  perpendi-  
 cularis erit directrix. Ducta vero  $PQ$  parallela ordi-  
 natæ, & facto angulo  $QPF$  æquali  $QPM$ , ac recta  
 $PF$  æquali  $PM$ , erit  $F$  focus: Si enim foco  $F$ , di-  
 rectricæ  $AM$  describatur Parabola, erit (num. 1)  $P$

## 142 SECTIONUM CONICARUM

ad ipsam ob  $PF$  æqualem  $PM$ : erit  $PQ$  tangens ( num. 181 ) ob angulum  $MPF$  sectum bifariam a  $PQ$ ; erit  $PK$  diameter ( num. 206 ) & ejus parameter ( num. 351 ) quadrupla  $PM$ . Quare ejus ordinata congruet cum  $Bb$  & directione, & magnitudine, cum debeat esse parallela tangenti  $PQ$ ; & semiordinate quadratum æquale ( num. 351 ) reſtanguſo ſub  $PK$ , & parametro, adeoque æquale quadrato  $KB$ , vel  $Kb$ .

### S C H O L I U M VI.

442. **E**odem pacto plurima alia Problematà ex demonſtratis Theorematis ſolvi facile poſſunt, in quibus vel ſe quiſque, vel Tyronem Præceptor exercere poterit. Nonnulla hic innuam, ex quibus conſtet, *datis 5 punctis determinari Sectionem Conicam, ac proinde binas Sectiones non poſſe occurrere ſibi mutuo, vel circulo, qui inter Ellipſes enumerari poſſet, in pluribus, quam in quatuor punctis.*

443. In primis *datis binis chordis parallelis, patet, dari directionem unius diametri, ſectis nimirum iſtis chordis bifariam, & per ſectionum puncta ducta reſta indefinita. Hinc autem dato arcu Sectionis Conicæ facile poſſet inveniri ejus centrum.* Si nimirum ducantur bina patia chordarum parallelarum, quarum ſingula determinabunt ſuarum diametrorum directionem, quæ proinde diametri, ſi concurrant, determinabunt centrum iſtius Sectionis, quæ ſi diametri evaſerint parallelæ erit Parabola, centro in ea in infinitum abeunte; & ubi eæ convergunt, ac centrum determinant, arcus ille Ellipſim; vel Hyperbolam pertinebit, ( num. 83 ) prout iſtum centrum fuerit propius longiori e binis chordis parallelis, vel breviori; quæ ſi forte æquales evaſerint, fatiſ erit aliam chordam ducere aliquando priorẽ centro, quam ſit altera e ductis, & videre, an chorda iſta priorẽ longior evaſerit an brevior. Quanquam idem patebit etiam

iam

lam (nu. 218), videndo, an arcus centro cavitatem, an convexitatem obvertat.

444. Datis binis chordis parallelis inaequaliter a centro distantibus, adeoque inaequalibus (num. 83) & centro, facile inveniri possunt binae diametri sibi invicem conjugatae, vel sc. centro in infinitum abeunte constet, Sectionem Conicam debere esse Parabolam, facile invenietur unius diametri vertex, & parameter, quibus datis cum ipsa ordinatarum positione, datur (n. 436, 438, 441) Sectio Conica.

445. Sint in fig. 165, 166, 167, binæ chordæ Pp, P'p', & centrum C jaceat in p'tima ad partes majoris, in reliquis ad partes minoris, ac si inter utramque jaceret res esset prorsus eadem, dummodo in illa esset majori propius, in hac minori, ut illa Ellipseos casum referat, hæc Hyperbolæ binos casus, in quarum priore chordæ datæ sint ordinatæ ad diametrum primariam, in posteriore ad secundariam. Sectis bifariam ipsis chordis in R, R' habebit directio diametri Vv eas habentis pro suis ordinatis, ignotis adhuc ejus verticibus, & ducta per centrum C recta iis parallela, ea exhibebit positionem diametri Bb ejus conjugatæ, cujus pariter vertices B, b adhuc ignorantur. Ducta vero per P recta parallela RR', quæ occurrat P'p' in I, Bb in H, si sumatur in ea HA æqualis, & contraria HP, patet CA fore ordinatam diametro Bb: & proinde A ad Sectionem Conicam. Debet autem esse (n. 299) rectangulum datum P'Ip' ad rectangulum datum PIA in fig. 165, 166, ut rectangulum PRp, sive quadratum PR datum, ad rectangulum VRv sive ad differentiam quadratorum CR, CV, & in fig. 167 ut rectangulum BHB, sive differentia quadratorum CH, CB ad quadratum HP, sive CR datum. Dabitur igitur utrobique ea quadratorum differentia, & data præterea CR in fig. 165, 166, ac CH in fig. 167, dabitur ibi CV, & Cu, hic CB, & Cb.

446. Constructio autem erit hujusmodi. Capta in

## SECTIONUM CONICARUM

fig. 165. media proportionali inter  $PI$ ,  $Ip'$ , tum inter  $AI$ ,  $IP$  inveniat quarta post ipsas, &  $PR$ , cui æqualis ad angulos rectos cum  $CR$  erigatur  $RQ$ , & centro  $C$  intervallo  $CQ$ , invenientur puncta  $V, \mu$ , Erit enim quadratum primæ mediæ ad quadratum secundæ, sive rectangulum  $P'Ip'$  ad rectangulum  $AIP$ , ut quadratum  $PR$  ad quadratum  $RQ$ , quod proinde debet esse æquale differentiæ quadratorum  $CR$ ,  $CV$  existente  $CV$  majore, & erit, cum sit differentia quadratorum  $CR$ ,  $CQ$ .

447. In fig. 166 inventa eodem pacto quarta illa, erigatur  $CQ$  ex  $C$  ipsi æqualis, & ad angulos rectos eisdem  $CR$ , tum centro  $Q$  intervallo  $CR$  inveniantur vertices  $V, \mu$ , & demonstratio erit eadem. Sed si  $CQ$  evaserit æqualis  $CR$ , puncta  $V, \mu$  abibunt in  $C$  evanesceat diameter  $V\mu$ , & Hyperbola abibit in rectam lineam, ut numer. 110. Erit enim eo casu  $P'Ip'$  differentia quadratorum  $P'R'$ ,  $R'I$ , sive  $P'R'$ ,  $PR$  ad rectangulum  $PIA$ , sive differentiam quadratorum  $HI$ ,  $HP$ , vel  $CR'$ ,  $CR$ , ut quadratum  $PR$  ad quadratum  $CR$ ; adeoque additis proportionalibus etiam quadratum  $PR$  ad quadratum  $CR$ , ut quadratum  $P'R'$  ad quadratum  $CR'$ , adeoque si ducerentur  $CP$ ,  $CP'$ , angulus ad  $C$  in triangulis  $R'CP'$ ,  $RCP$  esset idem, & puncta  $C, P, P'$  in directum.

448. Quod si quarta illa proportionalis obvenerit major quam  $CR$  in fig. 166, centro  $Q$  intervallo  $CR$  non poterunt inveniri puncta  $V, \mu$ , & tum casus pertinebit ad fig. 167, &  $V\mu$  non erit diameter primaria, sed secundaria. Nimirum factis ut media inter  $PI$ ,  $IA$  ad mediam inter  $PI$ ,  $Ip'$ , ita  $HP$ , sive  $CR$  ad quartum, debet obvenire recta minor, quam  $CH$  sive  $PR$ , cum nimirum recta major, quam  $CR$  habuerit in priore casu ad  $PR$  eam rationem, quam media inter  $PI$ ,  $IA$  ad mediam inter  $PI$ ,  $Ip'$ . Erecta igitur  $CQ$  perpendiculari ad  $HC$  æquali quartæ inventæ, centro  $Q$ , intervallo  $CH$ , vel  $RP$  determinantur vertices  $B, b$  diametri primariæ conjugatæ ipsius

$V\mu$ ,

*Vu*, cum debeat quadratum illius quartæ æquari differentię quadratorum *CH*, *CB*.

449. Inventa autem diametro primaria *Vu* in fig. 165, 166; & *Bb*, in fig. 167; admodum facile inveniuntur diametret ejus conjugata. In illis enim sumenda erit *CB* ad *CV*; ut *PR* ad mediam inter *VR*; *Ru*, in hac *CV* ad *CB*; ut *HP* ad mediam inter *BH*; *Hb*; cum timentum (n. 351) quadratum semidiametri conjugate sit ad quadratum semidiametri primarię; ut quadratum semiordinate ad rectangulum sub abscissis.

450. In parabola autem in fig. 168 ducta *PI* paral-  
lela *RR'*; si capiatur media inter *P'I*; *I'*; tum tertia post ipsam; & *PR*; erit illa media ad hanc tertiam; ut *PI* ad *R'V* sumendam in directum cum *RR'* ad partem ordinatę minoris. Erit enim *PI* ad *R'V*; ut quadratum illius medię; sive rectangulum *P'I'* ad quadratum *PR*; seu rectangulum *PRP'* ut debet esse per num. 361.

451. Datis autem binis diametris conjugatis; & centro determinatur Ellipsis, vel Hyperbola (num. 436; 438); & dato vertice; ac directione diametri; & una quavis ordinata; adeoque & latere recto tertio post abscissam; & semiordinatam; ac ordinatarum directione datur Parabola num. 440.

452. Quod si bina chordę dataę æquales sint, Problema erit indeterminatum, vel impossibile; prout equaliter, vel unequaliter a centro distiterint. In eo casu punctum *I* cadet in *P*, & assumpta alia chorda parallela binis illis æqualibus magnitudinis cujuscumque; per datum; & per alteram e datis determinata Sectione Conica; ea debet habere pro chorda sua illam etiam alteram e binis æqualibus datis, quę si a centro æquale distiterint Problema impossibile erit; cum quavis Sectio Conica debeat habere ordinatas; quę inæqualiter a centro distant, inæquales, & pertinebit casus ad Ellipsim desinentem in binas rectas parallelas; ubi axe conjugato manente; & æquali ipsis chordis datis, axis transversus concipiatur excrecere in infinitum

## 146 SECTIONUM CONICARUM

ita, ut ejus vertices jam nusquam sint, in quas & Parabola abibit, si binæ ejus ordinatæ æquales sint, vertice V in fig. 168 ita in infinitum abeunte, ut nusquam jam sit.

**F. 169** 453. *Dentur jam in fig. 169, 170 quinque puncta*  
**170A**, P, p, B, P', per quæ oporteat Sectionem Conicam determinare. Conjungantur bina quævis paria punctorum rectis, at BA, Pp, quæ si fuerint parallelæ, jam definient unius diametri positione ( num. 443 ), si non fuerint parallelæ concurrent alicubi in Q. Ducta per quintum punctum P' recta alteri ex iis, ut Pp parallela occurrens alteri, si opus est productæ in I, fiat ut media inter AQ, QB ad mediam inter QP, Qp, ita media inter AI, IB ad quartum. Tum capiatur tertia continue proportionalis post PI & quartum terminum inventum, cui in ipsa recta P'I producta, si opus est, capiatur æqualis Ip' ad partes P, vel ad oppositas ita, ut si punctum Q fuerit vel simul intra utramque AB, Pp, vel simul extra utramque etiam I vel sit simul inter utramque AB, P'p, vel simul extra utramque, si vero illud fuerit inter alteram, & extra utramque, si vero illud fuerit intra alteram ex his, & extra alteram, eritque etiam p' ad eandem Sectionem Conicam. Erit enim rectangulum AQB ad rectangulum PQp, ut rectangulum AIB ad rectangulum P'Ip': ac binæ chordæ Pp, P'p' parallelæ determinabunt unius diametri positionem. Eodem modo conjunctis Ap, PB, & ducta P'i parallela Ap determinabitur iq, & alterum par chordarum parallelarum P'a, Ap, ac per ipsas altera diameter. Si binæ diametri fuerint parallelæ, Sectio Conica erit Parabola, & per binas chordas parallelas determinabitur juxta nu. 450: si concurrant alicubi, determinabunt centrum, ac per ipsum, & binas chordas parallelas definietur Ellipsis, vel Hyperbola juxta n. 444. Quod si forte binæ ordinatæ, ut Pp, P'p' evaserint æquales, & æqualiter a centro distantes, ad earum diametrum ex utrovis reliquorum datorum punctorum A, B ducta recta pa-

parallela iis usque ad diametrum, & producta tantum dem, jam habebitur alia chorda inæqualiter a centro distans, & Problemæci determinando par.

454. In fig. 169 punctum Q erat extra utramque  $AB$ , erat I intra  $AB$ , assumenda fuit  $Ip'$  ad partes oppositas respectu  $IP'$ , ut I remaneret simul intra utramque  $AB$ ;  $Pp'$ , & eodem pacto quoniam  $q$  fuit intra utramque  $Ap$ ,  $Bp$ , &  $i$  intra  $AB$ , assumpta est  $ia$  ad partes oppositas  $IP'$ . At in fig. 170 erat Q intra  $p$ , sed extra  $BA$ . Quare cum I fuerit intra  $AB$ , assumenda fuit  $Ip'$  ad partes  $IP'$ , ut I jaceret extra  $Pp'$ . Et cum  $q$  fuerit intra  $PB$ , sed extra  $Ap$ , &  $i$  extra  $BA$ , assumenda fuit contra  $ia$  ad partes oppositas  $IP'$ , ut  $i$  remaneret intra  $AP'$ . Id autem semper necessario habendum præ oculis. Nam ubi agitur de Ellipsi, & Parabola, semper concursus binarum chordarum habebitur inter utramque, vel extra utramque, prout id punctum jacuerit intra Sectionem Conicam, vel extra. In Hyperbola vero si utraque recta vel simul inclinetur directrici in angulo majore, quam sit angulus equalitatis, vel simul in angulo minore, utraque vel binos conjunget ramos oppositos, vel ejusdem rami puncta, & concursus utriusque in primo casu habebitur intra utramque chordam, si id punctum jacuerit inter utramque ramum, habebitur vero extra, si jacuerit intra utrumvis ramum; in secundo vero casu habebitur intra utramque, si jaceat intra eum ramum, extra utramque, si extra eum jaceat. At si altera inclinetur in angulo majore, altera in minore; illa conjunget utrumque ramum, hæc ejusdem rami bina puncta, quo casu concursus necessario jacebit semper intra alteram, & extra alteram. Quare generaliter hæc verum erit in binis paribus chordarum, quarum priores bina posterioribus binis sunt parallela, debere utrumque concursum, vel simul esse intra utramque, vel simul extra utramque, vel simul intra alteram, & extra alteram, qui postremus casus solum habebitur in Hyperbola, ubi altera chorda debeat

## 148 SECTIONUM CONICARUM

*conjungere binos ramos oppositos; altera bina puncta eju-  
dem rami.*

455. Infinitum esset persequi omnes casus; in quibus constructio rectas lineas pro Sectionibus Conicis exhibebit. Verum id generaliter licebit etiam ante constructionem deprehendere: Sectio enim Conica non nisi unam rectam; vel duas abire potest; Quamobrem non saltem tria puncta in directum jaceant; in rectas non inciditur; quæ si jacuerint in directum; rectæ lineæ omnino habebuntur. Pariter si pro binis punctis detur tangens cum ipso contactu; res eodem redibit; considerato puncto dato pro duplici; ut si puncta  $P$ ;  $Q$  concurrent, & recta  $QP$  abiret in tangentem; ac ita daretur tangens cum contactu; & tria puncta præterea; vel dentur binæ tangentes cum binis contactibus; & aliud punctum; eodem pariter res rediret: sed ista; & alia ejusmodi persequi; ut ubi dantur tangentes sine contactu; infinitum esset; quorum nonnullos casus Newtonus elegantissime solvit principiorum lib. 1.

456. Illud unum satis erit inferre; quod supra innuimus; *Sectionem Conicam alteri Sectioni Conicæ non posse occurrere; nisi in quatuor punctis*: Si enim quinque puncta congruant; congruit jam tota Conicæ Sectio cum tota. Porro si binæ intersectiones coeant habentur contactus; si tertia iis accedat habentur contactus arcior extra verticem axium; qui; ut infra patebit; sunt id; quod osculum dicimus: ubi autem omnes concurrunt in unicum punctum; evadit osculum adhuc certius in axium verticibus. Sed hæc non sunt hujus loci; & post excursum fusiorem ad solutionem Problematum pertinentium ad determinationem Sectionum Conicarum ex quibusdam datis; regrediemur ad ferendam Corollariorum interruptam numero 435; persequentes ea; quæ pertinent ad normalem; ac perpendicularum e centro in tangentem adjecta reliquis ante consideratis.



E L E M E N T A. 149

Coroll. 14.

457. Rectangulum sub bis normalibus  $PM$ ;  $Pm$  ad quodvis punctum  $P$  pertransiens; ac  $P.171$  terminatis ad binos axes equatur tam rectangulo  $HPQ$   $.172$  sub bis segmentis  $QH$  tangentis per idem punctum ducta & terminata ad binos axes  $Vu$ ;  $Dd$ , quam quadrato semidiametri  $CI$  paralleli ipsi tangenti; & perpendiculari transiens per idem punctum  $P$ .

458. Sunt enim similia bina triangula rectangula  $MPQ$ ,  $mPH$ , cum ob angulum ad  $Q$  in fig. 171 communem triangulis rectangulis  $MPQ$ ,  $HCO$ ; & in fig. 172 angulos ad verticem  $Q$  oppositos æquales sit ipsum  $MPQ$  simile  $HCO$ , ac ob angulum ad  $H$  communem sit eisdem  $HCO$  simile  $mPH$ . Quare erit  $MP$  ad  $PQ$  ut  $PH$  ad  $Pm$ , & rectangulum sub  $MP$ , &  $Pm$  æquale rectangulo sub  $HP$ , &  $PQ$ ; adeoque æquale (num. 433) quadrato  $CI$ .

Coroll. 15.

459. Rectangulum sub perpendicularo  $CL$  ducto ex centro in tangentem, ac normali  $PM$ , vel  $Pm$  ad alterum axem  $Vu$ , vel  $Dd$  terminata equatur quadrato semiaxis alterius  $CD$ ; vel  $CV$ ; & bina normales inter se sunt in ratione reciproca duplicata axium; ad quas terminantur, perpendiculara vero ex centro in tangentem, ducta utrumque puncto contactus in ratione reciproca normalis utriuslibet.

460. Dicitur enim semiordinati  $PR$ ,  $PE$  ad axes  $Vu$ ;  $Dd$  erunt similia triangula rectangula  $CLH$ ,  $PRM$  ob angulos ad  $C$ , &  $P$  a parallelis contentos æquales, & pariter similia  $CLQ$ ;  $PmE$ . Erunt igitur  $CL$  ad  $CH$ , ut  $PR$  ad  $PM$ ; adeoque rectangulum sub  $CL$ , &  $PR$  æquale rectangulo sub  $CH$ , &  $PR$ ; sive (num. 419) quadrato semiaxis conjugati  $CD$ , ac pariter  $CL$  ad  $CQ$ ; ut  $PE$  ad  $mP$ , adeoque rectangulum sub  $CL$ , &  $mP$  æquale rectangulo sub  $CQ$ , &  $PE$ ; sive (num. 419.) quadrato semiaxis  $CV$ .

461. Hinc autem ob  $CL$  utriusque rectangulo communem, erunt  $PR$ ,  $Pm$ , ut quadrata  $CD$ ,  $CV$ , ob  
ma-

150 SECTIONUM CONICARUM

magnitudinem vero constantem rectanguli sub CL. & utravis normali, ipsum perpendiculum CL augebitur, vel minuetur in eadem ratione, in qua contra minuetur, vel augebitur normalis ipsa,

Coroll. 16.

462. Subnormalis ad abscissam a centro in utroque axe est, ut quadratum alterius axis ad quadratum ipsius, & in axe transverso abscissa est ad distantiam occursus normalis cum axe ipso a centro, ut quadratum semiaxis transversi ad quadratum distantie foci utriuslibet a centro.

463. Est enim in iisdem triangulis tam subnormalis MR ad PE, sive RC, quam PR ad subnormalem Em, ut PM ad Pm, sive ( num. 459. ) ut quadratum semiaxis CD ad quadratum semiaxis CV. Hinc autem erit CR ad CM differentiam in Ellipsi, summam in Hyperbola ipsarum CR, RM, ut quadratum semiaxis transversi ad quadratum distantie foci a centro, quod ( num. 64 ) in Ellipsi æquatur differentie in Hyperbola summe quadratorum semiaxium.

Coroll. 17.

F.173 464. Si per verticem axis V in fig. 173, 174, 174 175, 176, ducantur recta VO perpendicularis axi, & 175 equalis dimidio lateri recto ipsius axis, tum CO in Ellipsi 176 in fig. 173, ac in Hyperbola in fig. 174, 175 per centrum, & in Parabola in fig. 176 OI parallela axi, occurrens ordinata RP in D, erit RD equalis subnormali RM.

465. Erit enim Ellipsi in Hyperbola RD ad abscissam CR, ut dimidium latus rectum VO ad semiaxem CV, nimirum ut quadratum alterius axis ad quadratum axis Vu, sive ( num. 462 ), ut RM ad ipsam RC. In Parabola vero in fig. 176 erit RD equalis dimidio lateri recto VO, adeoque ( num. 200. ) subnormali RM.

Coroll. 18.

466. Rectangulum sub semidiametro CI conjugata semi-

semidiametri CP in fig. 171, 172, & perpendicularo, vel  
 O e vertice P diametri eius conjugata demisso in ipsam,  
 CL e centro C in tangentem per P ductam aequarum  
 angulo sub semiaxibus, & semidiametri, vel diametri  
 sunt in ratione reciproca ejusmodi perpendicularorum.

457. Est enim tam quadratum CL ad rectangulum  
 CL, & PM, quam rectangulum sub CL, & Pm  
 ad rectangulum sub PM, & Pm, ut CL ad PM, ob  
 CL communem in utroque termino primæ rationis, &  
 Pm in utroque secundæ. Quare cum & num. 459)  
 rectangulum sub CL, & PM æquetur quadrato semia-  
 xis CD, rectangulum vero sub CL, & Pm quadrato  
 semiaxis CV; rectangulum sub PM, & Pm (num.  
 457) quadrato CI, erit quadratum CL ad quadratum  
 CD, ut quadratum CV ad quadratum CI, adeoque  
 CL ad CD, ut CV ad CI, & rectangulum sub CL, &  
 CI, vel sub CI, & PO æquali ipsi CL in paralle-  
 logrammo CLPO æquale rectangulo sub semiaxibus  
 CD, CV.

458. Porro cum rectangulum sub eo perpendicularo  
 & CI constanter æquetur eidem rectangulo sub semia-  
 xibus, mutato ipso perpendicularo, mutabitur CI in ra-  
 tione ejus reciproca.

S C H O L I U M VI.

469. P Oset hic jam admodum facile communi de-  
 monstratione pro Ellipsi, & Hyperbola eruit,  
 parallelogrammum circumscriptum Ellipsi, vel in-  
 scriptum quatuor ramis Hyperbolarum conjugatarum,  
 quod continetur rectis ductis per vertices alterius e dia-  
 metris conjugatis parallelis alteri, æquari rectangulo sub  
 binis axibus; quod pro Hyperbola demonstravi num.  
 444; pro Ellipsi num. 375. Nam parallelogrammum,  
 quod potest continere semidiameter CI cum semidiamete-  
 ro CP in suo angulo, esset ejus pars quarta, & æqua-  
 tur rectangulo sub basi CI, & altitudine CL, nimi-  
 tum rectangulo sub semiaxibus. Sed ad alia pergendum  
 nondum eruta.

## 253 SECTIONUM CONICARUM.

*Coroll. 19.*

470. *Quævis semidiameter est ad normalem ductant per verticem ejus conjugata, & terminatam ad alterum axem, ut is semiaxis, vel axis ad alterum, & omnes semidiametri sunt, ut ejusmodi normales.*

471. Est enim IC ad PM, vel Pm, ut rectangulum sub IC, & CE, sive (num. 466) sub CD, CV ad rectangulum sub CL, & PM, vel Pm, nimirum (num. 459) ad quadratum CD, vel CV, adeoque ut CV ad CD, vel ut CD ad CV. Cumque eâ ratio sit constans, mutabuntur eodem pacto ipsæ CI, PM, Pm.

### S C H O L I U M VII.

472. **H**UC usque persequuti sumus præcipuas proprietates, quæ ex illa harmonica tangentis proportionè profiunt, considerando prius ejus unius confectaria, tum introducendo considerationem centri, & diametrorum conjugatarum, ac deinde normales ad curvam; & perpendiculum e centro in tangentem. Nunc etiam focos inducemus, quorum relationem ad tangentem vidimus num. 181, cum nimirum radii foci ad contactum ducti debeant cum ipsa tangente continere angulos æquales, adeoque & cum normali; & aliam ibidem habuimus proportionem harmonicam (num. 182) definitam a tangente, normali, & binis focis. Quo tamen plures assumuntur termini comparandi, eo plures etiam combinationes proveniunt, quibus animus defatigatur, atque obruitur. Quamobrem multis omissis, quas persequi infinitum esset, præcipuas tantummodò delibabimus.

*Coroll. 20.*

F.177 473. *Diameter Mm in fig. 177, 178, 179 est media*  
 178 *proportionalis inter cordam Pp ductam per focum, & 179*  
 179 *æm transversam.*

474. Si enim ipsi Mm occurrat tangens per P ducta in A, & semiordinata in D, ac ordinatam Pp sua diameter ipsi PD parallela secet in I, erit (num. 194) CA æqua-

alis semiaxi transverso CV ob suum parallelismum  
 PP ducta per focum, PI vero dimidia Pp erit æ-  
 CD. Cum igitur (num. 411, & 415) sit CM  
 a inter CA, CD, erit tota Mm mediâ inter Vn  
 CA, & Pp.

Coroll. 21.

Si in fig. 180, 181 in Ellipsi, & Hyperbolâ  
 cursu M normalis terminata ad axem transversum  
 axe ipso, ducatur perpendicularum MT in rectam  
 ductam ad punctum P perimetri, ex quo norma-  
 ductur, id in ipsa ab eodem puncto abscindet seg-  
 PT æquale dimidio lateri recto principali, quod  
 in Parabola locum habet.

476. Ducta enim per C diametro Ii parallela tangen-  
 PQ, ea a recta PF abscindet (num. 194) segmentum  
 D æquale semiaxi transverso; & in normali PM seg-  
 mentum PO æquale perpendicularo CL ex centro C du-  
 in tangentem PQ, eritque (num. 459) rectangu-  
 OPM æquale quadrato semiaxis conjugati. Erunt  
 similia triangula rectangula PTM, POD, adeo-  
 erit PD ad PO, ut PM ad PT, & rectangulum  
 PT, & PD semiaxe transverso æquale rectangulo  
 PM, & PO, sive quadrato semiaxis conjugati, ni-  
 PT tertia post semiaxem transversum, & conju-  
 gum, sive æqualis dimidio lateri recto principali. In  
 parabola vero in fig. 176 ducta MT perpendiculari ad F. 176  
 æqualia erunt triangula rectangula PTM, MRP,  
 ob latera FP, FM æqualia (num. 200) sint æqua-  
 anguli FPM, FMP, & PM communis. Quare erit  
 T æqualis subnormali RM, sive (num. 200) dimidio  
 lateri recto principali.

Coroll. 22.

477. Dimidium latus rectum principale ad normalem  
 transverso est, ut perpendicularum e centro in tangen-  
 ad semiaxem ipsum transversum.

478. Est enim fig. 180, 181 PT ad PM, ut PD æ- F. 180  
 alis semiaxi transverso ad PO æqualem perpendicu- 181  
 CL. Poterat etiam deduci ex num. 459, ex quo re-

triangulum sub PM, & CL æquatur quadrato semiaxis conjugati, sive (n. 71, vel 351.) rectangulo sub dimidio latere recto principali, & semiaxæ transversæ.

Coroll. 23.

479. *Differentia quadratorum normalis ad axem transversum terminata, & dimidii lateris recti principalis æquatur in Parabola quadrato semiordinate ipsius axis; est in Ellipsi, & Hyperbola ad ipsum, ut quadratum distantia focorum ad quadratum axis transversæ, sive ut differentia in Ellipsi; summa in Hyperbola quadratorum semiaxis transversæ, & conjugati ad quadratum semiaxis conjugati, sive ut differentia in Ellipsi, summa in Hyperbola totius, vel dimidii lateris recti principalis, & totius, vel dimidii axis transversæ ad totum, vel dimidii axem transversum, quæ rationes omnes eadem sunt.*

F.176 480. Patet in Parabola in fig. 176, cum in triangu-  
 177 lis illis PTM, PRM æqualibus, etiam MT debeat æ-  
 178 quari PR, ac ob angulum ad T rectum ejus quadratum differentia quadratorum normalis PM, & dimidii lateris recti PT, quod immediate patet in triangulo rectangulo PRM, in quo PM normalis, RM æqualis dimidio lateri recto, PR semiordinate. Pro Ellipsi & Hyperbola sic demonstratur in fig. 180, 181. Ducta Pf ad alterum focum, & semiordinate PR, similia erunt triangula rectangula FMT, FPR ob angulum ad F communem. Quare erit PR ad MT, ut FP ad FM, adeoque etiam (num. 192) ut fp ad fM, nimirum ut summa in Ellipsi, differentia in Hyperbola ipsarum FP, fp, sive utrobique axis transversus ad summam in Ellipsi; differentiam in Hyperbola rectarum FM, fM, sive utrobique ad distantiam focorum Ff. Adeoque quadratum semiordinate PR ad quadratum MT, sive differentiam quadratorum normalis PM, & dimidii lateris recti PT, ut quadratum axis transversæ ad quadratum distantie focorum, vel sumendo dimidiorum quadrata, ut quadratum semiaxis transversæ ad quadratum distantie foci a centro; nimirum (num. 64) ad differ-

ren-

entiam in Ellipsi, summam in Hyperbola quadratorum  
 semiaxis transversi, & conjugati; cumque sit (nu. 66)  
 quadratorum semiaxis transversi ad quadratum conjuga-  
 ti, ut axis; vel semiaxis transversus ad totum, vel di-  
 midium latus rectum; eadem illa ratio erit differentie  
 totius, vel dimidii axis transversi, & totius, vel dimi-  
 dii lateris recti in Ellipsi; summæ in Hyperbola ad to-  
 tum; vel dimidium axem transverso.

Coroll. 24.

481. Differentia in fig. 182 in Ellipsi, binarum PF,  
 & Pd ducarum a quovis puncto P ad binos focos, & sum- F.182  
 ma in fig. 183 in Hyperbola ad CR abscissam a cen- 183  
 tro in axe transverso est constanter, ut distantia focorum  
 Cf ad semiaxem transversum CV.

482. Si enim recta Pf occurrat in B; & D rectis  
 FB, CD ductis e foco F; & centro C parallelis tan-  
 genti QP, erit PD (num. 194) æqualis semiaxi tran-  
 sverso VC, & ob angulos PFB, PBF æquales iis, qui  
 sunt in P cum tangente; adeoque (num. 181) equales  
 inter se; erit PB æqualis PF; & fB in Ellipsi differen-  
 tiæ, in Hyperbola summæ binarum Pf, PF; quæ ob  
 ff duplam FC, sive fC; erit dupla fD. Erit autem  
 summa illa, vel differentia ad ff, distantiam focorum;  
 sive fD ad fC, ut DP, sive CV ad CQ, nimirum  
 (num. 411) ut CR ad CV, & alternando fB ad CR,  
 ut ff ad CV.

Coroll. 25.

483. Rectangulum sub binis rectis PF, Pf in fig. 184; F.184  
 ductis a quovis puncto P ad binos focos æquatur qua- 185  
 drato semidiametri conjugate ejus; quæ tendit ad P, re-  
 ctangolo sub binis normalibus terminatis ad binos axes,  
 & rectangolo sub segmentis tangentis interceptis inter  
 binos axes; & ipseus rectanguli FPf, ac  
 quadrati ipsius CP summa in Ellipsi; differentia in Hy-  
 perbola æquatur ibi summa, hic differentia quadratorum  
 semiaxium.

484. Concipiatur enim circulus circumscriptum trian-  
 gulo FPf, qui occurrat axi conjugato in m, & N;  
 posito

176 SECTIONUM CONICARUM,

posito  $N$  in arcu  $FPf$  in fig. 184 in opposito in fig. 185, ducatur  $Pm$  occurrens axi transverso  $Vu$  in  $M$  &  $NP$  secans axem  $Vu$  in  $Q$ , ac recta  $Fm$ . Ob rectam  $Ff$  sectam bifariam, & ad angulo rectos in  $C$  diametro  $Nm$ ; arcus  $FNf$ ,  $Fmf$  secabuntur bifariam in  $N$ ,  $m$ . Quare tam recta  $Pm$  in fig. 184, quam  $PN$  in fig. 185 secabit bifariam angulum  $FPf$ , cum angulo insistente aequalibus arcibus  $Fm$ ,  $fm$  in fig. 184,  $FN$ ,  $fN$  in fig. 185 aequales esse debeant; recta veto  $PN$  erit ipsi  $Pm$  perpendicularis ob angulum  $mPN$  rectum in semicirculo. Erit igitur utrobique num. 181.  $PN$  normalis,  $PN$  tangens. Angulus autem  $FmP$ , erit equalis angulo  $MfP$ , cum uterque insistat eidem arcui  $FP$  adeoque ob angulos ad  $P$  aequales in triangulis  $FPm$ ,  $MPf$ , erunt similia ea triangula, &  $FP$  ad  $Pm$ , ut  $PM$  a  $Pf$ , ac rectangulum  $FPf$  aequale rectangulo  $MPm$  adeoque num. 457) tum quadrato semidiametri conjugatae ejus, quae tendit ad  $P$ , tum rectangulo  $NPQ$ . Cumque summa in Ellipsi num. 375, 248), differentia in Hyperbola quadratorum semidiametrorum conjugatarum aequetur ibi summae, hic differentiae quadratorum semiaxium, aequabitur eidem ibi summa, hic differentia rectanguli  $FPf$ , & quadrati  $PC$ .

Coroll. 26.

485. Rectangulum  $FmF$  sub binis distantibus concursus normalis cum axe transverso a binis focus equatur in Ellipsi differentia, in Hyperbola summa quadrati normalis  $PM$  ad ipsum terminata, & quadrati semidiametri conjugatae ejus, qua terminatum ad  $P$ , vel rectanguli  $FPf$  binarum ductarum ab binis focus, & rectanguli  $FQf$  sub binis distantibus concursus tangenti a binis focus aequatur in Ellipsi summa, in Hyperbola differentia quadrati tangenti  $PQ$  terminata ad axem transversum & quadrati ejusdem illius semidiametri conjugatae, & rectanguli  $FPf$ .

486. Nam ex circuli natura rectangulum  $FmF$  aequatur rectangulo  $mMP$ , & rectangulum  $FQf$  rectangulo  $PQN$ . Porro rectangulum sub  $Mm$ , &  $MP$ , additum qua-



quadrato MP in fig. 184, & ablato in fig. 185, evadit rectangulum sub mP, & PM, sive quadratum illius semidiametri conjugate, vel rectangulum FPf, & rectangulum sub PQ, & QN, ablato in fig. 184 quadrato PQ & addito in fig. 185, evadit rectangulum FPQ, & PN, sive illud idem quadratum semidiametri conjugate, vel rectangulum FPf,

Coroll. 27.

487. Si o binis focus F, & in Ellipsi in fig. 63, & F. 64 Hyperbola in fig. 64. ducantur in tangentem PT bina perpendiculara FA, fa eorum rectangulum equabitur quadrato semiaxis conjugati.

488. Erit enim (num. 192) FA ad normalem IP, ut perpendiculum CL e centro in tangentem ad fa; ac proinde rectangulum sub FA, & fa equabitur rectangulo sub IP, & CL, sive (n. 459.) quadrato semiaxis conjugati.

Coroll. 28.

489. Radius ad sinum anguli, quem recta e foco ducta ad contactum continet cum tangente, est in Ellipsi, & Hyperbola, ut semidiameter parallela tangenti ad semiaxem conjugatum, & is angulus in Ellipsi a recto maxime in ipsius axis conjugati verticibus distat, angulo quem bina recta inde ad focum ducta continent ibi existente maximo: tum illius differentia a recto, quo equatur duplo hujus, eo magis minuitur, quo punctum contactus ad verticem propiorem axis transversi accedit: in Hyperbola is angulus eo magis recedit a recto, & ille, quem ea bina recta continent, eo magis minuitur, quo contactus magis distat a vertice axis transversi.

490. Nam ob angulos FPA, fPa utrobique aequales (num. 181) est FP ad FA, ut fP ad fa in eadem ratione, ac proinde quadratum FP ad quadratum FA, & rectangulum FPf, sive (n. 483) quadratum semidiametri parallele tangenti PT ad rectangulum sub FA, & fa, sive (n. 487) quadratum semiaxis conjugati; ac

## 138 SECTIONUM CONICARUM

Proinde FP ad FA, sive radius ad sinum Anguli FPA, ut illa ipsa semidiameter ad eum semiaxem.

491. Quamobrem is sinus eo erit minor, & angulus proinde eo magis recedet a recto, quo ea semidiameter major erit. Porro ea semidiameter in Ellipsi eo est major, quo ejus conjugata CP est minor, cum summa quadratorum utriusque sit (num. 375) constantiter æqualis summæ quadratorum semiaxium, & CP eo est minor (num. 379, quo magis P accedit ad vertices axis conjugati, & recedit a vertice propiore axis transversi. Quare angulus FPA eo magis recedit a recto, quo magis P accedit ad verticem axis conjugati, ubi maxime a recto recedit. Cumque ejus differentia a recto API sit angulus FPI, & FPf sit duplus ipsius FPI; ipse angulus FPf erit maximus puncto P congruente cum semiaxis conjugati vertice, & eo major erit, quo magis P ad eum verticem accedet, & recedet a vertice sibi propiore axis transversi.

492. At in Hyperbola in fig. 64 cum diameter CP in recessu a vertice axis conjugati perpetuo crescat (num. 246; & differentia quadratorum semidiametrorum conjugatarum sit constantiter eadem; etiam semidiameter conjugata perpetuo augetur, adeoque perpetuo recedet a recto angulus FPA, & minuetur tam ipse, quam FPf ejus duplus.

## SCHOLIUM VIII.

493. **P**ostrema hæc Corollaria, quæ ad focum pertinent, licet non profluxerint immediate ab ipsa propositione hæc 8, tamen profluxerunt a Corollariis ex ea deductis combinatis cum iis, quæ antea fuerant eruta, quam ob causam hinc divellenda non fuerant. Postremam hoc determinat anguli, quem foci radius cum tangente continet, magnitudinem, ac incrementa, & decrementa pro Ellipsi, & Hyperbola. Pro Parabola idem deduci facile potest e num. 198. Est nimirum radius ad sinum anguli FPA in fig. 65, ut FP ad

ad FA, five ob FP, FA, FM continue proportionales; & FP æqualem. (num. 351) quartæ parti latetis rectæ pertinentis ad diametrum transeuntem per P; erit rādītus ad eum sinum in ratione subduplicatā distantie contactus a foco ad quartam partem lateris recti principalis; five in subduplicata ratione latetis recti diametri ductæ per contactum ad latus rectum principale; & quoniam in recessu puncti P à vertice axis transferri semper augetur ( num. 58 ) distantia FP; semper angulus rectæ FP cum tangente magis recedet a foco.

494. Jam vero progrediat ad aliam proprietatem Sectionum Conicarum, quæ ipsis nomen dedit; & quæ ita pariter a sexta Propositione profuit; ut sit merus particulāris casus Theorematis demonstrati (num. 319). Verum hic iterum demonstratur ope Prop. 7; & tenet nobis viam ad definiendos circulos osculatores Sectionum Conicarum per finitam Geometriam, qui nimirum ita ad arcum Sectionis Conicæ accedant; ut quemadmodum inter arcum circuli, & rectam tangentem nulla alia recta duci possit, licet infiniti numero circulares arcus possint duci; ita inter arcum Sectionis Conicæ; & arcum ejus circuli osculatoris, nullus alius circularis arcus transire possit, licet in unico puncto se contingant; & infiniti numero arcus Sectionum Conicarum possint interfieri; quæ generalis est proprietas pro circulis osculatores curvarum quarumcumque. Sed aggre diamur rem ipsam.

PROPOSITIO IX. THEOREMA.

495. *SI per verticem V diametri cujusvis in Ellipsi in fig. 186, & Parabola in fig. 187, ac cujusvis* F. 186  
*diometri primaria Hyperbola in fig. 188 ducatur tan-* 187  
*gens VA æqualis lateri recto ipsius; & per A recta transiens* 188  
*per alterum verticem u in Ellipsi; ac Hyperbola, ac pa-*  
*rallela axi in Parabola, quæ ordinata PRp occurrat in*  
*L, trius quadratum semiordinata RP æquale rectangulo*

160 SECTIONUM CONICARUM

sub abscissa VR, & intercepta RL inter diametrum, ac rectam ductam per A, qua intercepta erit quarta proportionalis post latus transversum, rectum, & abscissam ab altero vertice, cui latus rectum non applicatur. Idem vero quadratum, & rectangulum in Parabola equabitur rectangulo sub illa abscissa VR, & latere recto; in Ellipsi ab eodem deficiet; in eo Hyperbola ramo, cui latus rectum est applicatum, excedet ipsum, per rectangulum sub ipsa abscissa, & quarta proportionali post latus transversum, rectum, & ipsam abscissam.

496. Est enim (num. 351) quadratum PR in Parabola in fig. 187 æquale rectangulo sub abscissa VR, & latere recto VA, adeoque sub VR, & RL. At in Ellipsi, ac Hyperbola est ipsum quadratum PR ad rectangulum VR $\mu$ , ut latus rectum AV ad transversum V $\mu$ , sive ut LR ad R $\mu$ , vel assumpta VR communi, ut rectangulum sub VR, & RL ad idem rectangulum VR $\mu$ . Quare quadratum ipsum RP æquale erit rectangulo sub VR, & RL.

497. Patet autem in Parabola RE æquari lateri recto VA, in Ellipsi esse minorem ipso VA, in Hyperbola majorem; & si in his ducatur VO usque ad Pp parallela AE, cui & æqualis erit, & abscindet OL æqualem lateri recto VA, erit V $\mu$  ad VA, ut VR ad RO, ac proinde ipsa RO quarta post latus transversum V $\mu$ , rectum VA, & abscissam VR, ac rectangulum sub VR, & RL a rectangulo sub VR, & OL, vel VA deficiet in Ellipsi, ipsum excedet in Hyperbola per rectangulum sub VR, & OR. Q. E. D.

SCHOLIUM I.

498. CUM quadratum semiordinatæ rectangulo illi sub abscissa, & latere recto æquetur in Parabola, deficiat ab eo in Ellipsi, redundet in Hyperbola, hinc Parabolæ, Ellipsi, Hyperbolæ nomen datum a Verteribus, quod Græco sermone æqualitatem, defectum, & redundantiam mensuræ exprimit, Sed in nostra de-

fici-

finiione, ut num: 12 notavimus, habentur statim æqualitas quædam alia, defectus, & excessus rationis illius determinantis;

499. Porro hic recta AL data idem prorsus præstat pro Ellipsi, & Hyperbola, quod num. 319. in fig. 115, Fig. 116 illa BD, quæ ibi etiam transit per u, & si ipsum V congruat ibi cum contactu I, & chorda Vn evadat diameter; illæ figuræ abibunt in has ita, ut ibi puncta D, L sint eadem; quæ hic L, R; ordinata vero Pp secabitur in R bifariam; ac rectangulum illud PDP æquale rectangulo sub VL, & DL evadet hic ipsum quadratum semiordinate RP æquale rectangulo sub VR, & RL.

500. Sed jam ex hac Propositione comparata cum num. 464. eruat Corollarium non inutile, & sponte fluens; quod ad subnormalem pertinet, tum ad osculatores circulos faciemus gradum.

Coroll. 1.

501. *Subnormalis in axe transverso deficit per dimidium lateris recti principalis in Parabola ab ipso latere recto principali, in Ellipsi & Hyperbola a quarta proportionali post latus transversum, rectum, & abscissam a vertice axis remotiore, sive ab illa recta; cum qua continet abscissa rectangulum æquale quadrato semiordinate.*

502. Nam in fig. 173, 174, 176 si capiatur VA dupla VO; adeoque æqualis lateri recto principali; tum recta ex A parallela axi VR in Parabola in fig. 176, tendens ad u in reliquis, & occurrens ordinatæ PR in L, subnormalis RM, quæ æquatur RD (num. 464), deficit ab RL; quæ est illa ipsa recta enunciata in hac Prop. 9, & in hoc Coroll. 1, per DL æqualem AO dimidio lateri recto principali VA.

Coroll. 2.

503. *Circulus qui communem in aliquo puncto tangentem habet cum Conica Sectionis perimetro, & e diametro per id punctum transeunte abscindit chordam æqualem lateri recto ejus diametri, maxime omnium accedit ad arcum Sectionis.*

182 SECTIONUM CONICARUM

Sectionis ipsius ita, ut nullius alterius circuli arcus inter arcus ipsorum transire possit, sed cujuscumque majoris arcus aliquis continuus utrinque a contactu extra utrumque cadat inter ipsos & tangentem, cujuscumque minoris a tangente recedat magis, quam uterlibet ex iis, & jaceat ex parte ipsorum cava; quem circulum osculatozem voco.

504. Manentibus enim in fig. 189, 190, 191 punctis V, R, n, A, L, O, ut in Propositione in fig. 186, 187, 188 (perimeter autem Sectionis Conicæ non ducitur vitandæ confusionis gratia) eadem recta VA, quæ Sectionem Conicam contingit in V, tangat ibidem & circulum MVm, qui a diametro abscindat chordam aliquam VH, ac rectæ LR parallelæ tangenti occurrat in M, m; ipsi vero tangenti VA occurrat tangens HT ducta per H in T, & rectæ MN, mn parallelæ tangenti HT occurrant rectæ VH in N, n.

505. In primis erit quadratum MR æquale rectangulo sub VR, & NH, ac quadratum m R rectangulo sub VR, & nH. Nam in fig. 189 ob MN, MR parallelas tangentibus TH, TV, anguli MRN, MNR æquantur angulis THV, TVH æqualibus, cum eos singulos mensuret dimidijs arcus VH, adeoque & ipsi æquales erunt, & æquales MRV, MNH eorum complementa ad binos rectos, ac rectæ MN, MR æquales. Quare cum etiam angulus VMR æquetur alterno FVM chordæ VM cum tangente VT, qui (Coroll. 6 Prop. 9. Geom.) æquatur angulo MNH insistenti in alterno segmento, similia erunt triangula VRM, MNH, eritque VR ad RM, ut MN, sive ipsa MR ad NH, & quadratum MR æquale rectangulo sub VR, & HN. Eodem prorsus argumento anguli VRm, Hnm æquales sunt & æquales VmR, & nHm, adeoque est etiam VR ad Rm, ut mn, sive Rm ad Hn, adeoque quadratum Rm æquale rectangulo sub Hn, & VR.

506. Cum igitur quadratum semiordinatæ Sectionis Conicæ, in quavis e tribus figuris æquetur (num. 495) rectangulo sub VR, & RL, patet fore id quadratum

major, aequale, vel minus quadrato  $MR$ , vel  $mR$ , ac punctum  $M$ , vel  $m$  debere jacere intra eam Sectionis Conicam, in ea, vel extra prout  $RL$  fuerit major, aequalis, vel minor respectu  $HN$ , vel  $Hn$ .

507. Jam vero si is circulus intercipiat chordam  $VH$  majorem latere recto  $VA$ , accipiat recta  $HB$  versus  $V$ , si intercipiat chordam minorem, accipiat pariter versus  $V$  recta  $Hb$  aequalis ipsi lateri recto. Et quoniam chorda  $Mm$  potest accedere ad tangentem  $VA$  quantum libuerit, ac in eo accessu possunt puncta  $M$ ,  $R$ , & ad  $V$ , & ad se invicem accedere quantumlibet. Et ob  $MN$ ,  $mn$  semper parallelas eidem rectae  $HT$ , etiam puncta  $N$ ,  $n$  possunt accedere ad  $R$ , &  $V$  quantumlibet, in quo accessu incipiet aliquando  $HN$  esse in primo casu major, & in secundo  $Hn$  minor, quam  $RL$ , quod in parabola in fig. 190 accidet statim ac punctum  $N$  subierit inter  $B$ , &  $V$ , vel  $n$  inter  $b$  &  $V$ , cum nimirum recta  $RL$  ibi aequetur  $VA$ , sive  $HB$  in primo casu,  $Hb$  in secundo. In Ellipse vero in fig. 189 in primo casu ante etiam quam  $N$  subeat inter  $B$ , &  $V$ ,  $HN$  incipiet esse major, quam  $RL$ , cum  $HB$  aequalis  $AV$  jam sit major  $RE$ , & in Hyperbola in secundo casu in fig. 191 antequam  $n$  subeat inter  $b$  &  $V$ , jam  $Hb$  erit minor quam  $RL$ , cum  $Hb$  sit aequalis  $VA$ , adeoque minor  $RL$ . At pro secundo casu Ellipseos, vel primo Hyperbolae accedente  $R$  ad  $V$  quantum libuerit, etiam  $O$  ad  $R$  accedet quantumlibet, & proinde ibi  $bn$ , sive  $BN$  fiet aliquando major, quam  $OR$ , & tunc in Ellipse ob  $Hb$ ,  $OL$  aequales eidem  $AV$ , & inter se, demptis inaequalibus relinquetur  $Hn$  minor quam  $RL$ , & in Hyperbola addendo aequalibus  $HB$ ,  $OL$  inaequales  $BN$ ,  $OR$ , evadet  $HN$  major, quam  $RL$ . Per aliquam autem arcum omnem  $MV$ , accedente adhuc magis  $N$ , vel  $n$ , ad  $V$ , & adhuc magis aucta  $BN$ , vel  $bn$ , & imminuta  $RO$ , multo magis  $HN$  superabit  $RL$ , vel  $Hn$  superabitur ab ipsa.

508. Quare per totum illum arcum recta  $RM$  in primo casu erit major, quam semiordinata Sectionis

## 164 SECTIONUM CONICARUM:

Conicæ, adeoque multo magis  $Rm$ , & in secundo casu recta  $Rm$  erit minor, quam ordinata ejusdem, ac multo magis  $RM$ , adeoque in circulis intercipientibus chordam  $VH$  majorem latere recto semper aliquis arcus  $MVm$  utrinque circa contactum  $V$  jacebit extra Sectionem Conicam; in circulis vero intercipientibus chordam minorem ipso latere recto, aliquis arcus utrinque circa ipsum contactum jacebit intra: Quoniam vero minores circuli toti infra majores jaent, & proinde minorem etiam intercipiunt chordam  $VH$ , omnes ii, qui intercipient chordam majorem latere recto jacebunt etiam extra eum, qui intercipient æqualem, & omnes; qui intercipient minorem, jacebunt etiam intra eundem: is circulus, qui æqualem intercipit, ita ad arcum Sectionis Conicæ accedit circa ipsum contactum, ut cujusvis alterius utcumque paullo majoris arcus aliquis utrinque circa contactum jaceat tum extra eum circum, tum extra eum arcum Sectionis Conicæ, cujusvis vero alterius utcumque paullo minoris arcus aliquis utrinque circa contactum jaceat, tum intra eum circum, tum intra Sectionis Conicæ arcum; ac proinde nullius circuli arcus poterit duci inter arcum Sectionis Conicæ, & arcum ejus circuli, qui intercipit chordam lateri recto æqualem, qui proinde præ cæteris omnibus ipsi arcui est proximus, & idcirco jure dicitur *Osculator*.

Coroll. 3.

509. *Circulus qui Conicam Sectionem osculatur in vertice axis utriuslibet, habet pro diametro latus rectum ejus axis, ac perimetrum in eodem unico puncto contingit ita, ut qui osculatur Ellipsim in vertice axis conjugati, totus extra Ellipsim jaceat, ac sit minimus ex circumscriptis, in cæteris omnibus totus jaceat intra, ac sit maximus ex inscriptis, nec in priore casu ullus inscriptorum maximus habeatur, in posteriore ullus minimus circumscriptorum.*

510. Nam si concipiamus  $VH$  pertinere ad axem aliquem; tangens  $VA$  erit ipsi perpendicularis, adeoque ipsa  $VH$ , quæ æquatur lateri recto  $AV$ , evadit diame-



At circuli. Chorda quoque  $Mm$  evadet ipsi  $VH$  perpendicularis, ac proinde secabitur bifariam in  $R$ , &  $MN$ ,  $m$  congruent cum  $MR$ ,  $mR$ , punctis  $N$ ,  $n$  abeuntibus in  $R$ , quadratum vero tam  $RM$ , quam  $Rm$  evadet æquale rectangulo sub  $VR$ , &  $RH$ . Quare si  $VH$  fuerit æqualis lateri recto in fig. 191 in Hyperbola, & in parabola in fig. 190, erit  $HR$  semper minor, quam  $RL$ , cum debeat esse minor, quam  $HV$ , sive quam  $VA$ , quæ in Parabola æquatur  $RL$ , & in Hyperbola est ipsa adhuc minor. At in Ellipsi in fig. 189 cum sit  $VR$  ad  $OR$ , ut  $Vn$  ad  $AV$ , erit  $VR$  major, vel minor, quam  $RO$ , prout axis  $nV$  fuerit major vel minor suo latere recto  $VA$ . Quare ob  $VH$  æqualem  $VA$ , adeoque  $OL$ , erit contra  $RH$  minor, vel major  $RL$ , prout axis fuerit major, vel minor suo latere recto. Axis autem transversus major est suo latere recto, conjugatus minor, cum axis transversus conjugato sit major; & latus rectum utriuslibet axis sit ( num. 351 ) continue proportionale post ipsum, & axem alterum. Igitur si  $V$  fuerit vertex axis transversi, erit  $HR$  minor semper, quam  $RL$ , si conjugatus major. Quamobrem in vertice axis conjugati Ellipseos erunt  $RM$ ,  $Rm$  semper maiores, quam ordinata ejusdem Ellipseos, in reliquis omnibus axium verticibus erunt minores; & prinde circulus, qui Conicam Sectionem osculatur in aliquo axis vertice, eam in eodem unico puncto contingit, & qui osculatus Ellipsim in vertice axis conjugati totus extra ipsam jacet, reliqui jacent intra omnes, ac ille est circumscriptus, hi omnes inscripti.

511. Porro quoniam in illo casu omnes circuli majores cadunt extra & curvam, & osculatorem, ac minores omnes & intra ipsum, & per aliquem arcum utrinque circa contactum etiam intra Ellipsim cadunt, ille est circumscriptorum minimus: cum vero e contrario in reliquis casibus omnes minores cadant intra & curvam, & osculatorem, omnes autem majores & extra ipsum, & per aliquem arcum utrinque circa contactum

266 SECTIONUM CONICARUM

factum cadant extra curvam, is erit inscriptorum maximus. Porro nullus in primo casu minor osculatorum in reliquis major, ita ad eum accedet, ut alii proprietas haberi non possint numero infiniti, secto nimirum centorum intervallo, ut libuerit, pro novo censo circuli intermedii, qui intermedius adhuc aliquo arcu utrinque circa contactum cadet in illo primo casu et iam intra curvam, in hisse reliquis extra. Quare nullus habebitur ibi inscriptorum maximus, hic minimus circumscriptorum.

Coroll. 4.

512. *Circulus, qui Sectionem Conicam osculatur in vertice cuiusvis alterius diametri, licet eandem ibi tangentem habeat, tamen ibidem eum secat ita, ut ex parte anguli obtusi chorda illius aequalis lateri recto cum tangente, jaceat extra ipsam Sectionem Conicam, ex parte vero anguli acuti intra, ac praeterea in alio puncto, quod in eo geometrico describi potest, ipsam iterum secat.*

513. Ducatur enim in fig. 190 in Parabola chorda  $VF$  parallela tangenti  $HT$ , & patet puncto  $m$  assumpto, ut figura indicat, ultra eam chordam semper debere  $m$  ipsi  $FV$  parallelam jacere ultra ipsam, &  $Hm$  fore majorem, quam  $HV$ , sive in casu circuli osculatoris, quam  $VA$ , vel  $RL$ : at ipso puncto  $m$  abeunte in  $F$ , abibit  $n$  in  $V$ , ac fient  $Hn$ ,  $RL$  aequales: eodem vero puncto  $m$  descendente in arcum  $FH$ , etiam  $n$  ingreditur chordam  $VH$ , eritque  $Hn$  minor, quam  $HV$ , adeoque minor, quam  $RL$ . Quare per totum arcum  $VmF$  erit  $Rm$  major quam semiordinata Parabolae, in  $F$  aequalis, per arcum  $FH$  minor: per totum autem arcum  $VMH$  erit  $HN$  minor quam  $HV$ , adeoque minor, quam  $RL$ , &  $MR$  minor, quam semiordinata Parabolae. Arcus igitur  $VMH$  ex parte anguli acuti jacet intra Parabolam totus, &  $VmF$  in angulo obtuso extra, quam Parabolam proinde is circulus secat in  $V$ , & cum iterum arcus  $FH$  jaceat intra Parabolam, eam idem circulus secat in  $F$ .

514. At

514. At in Ellipfi in fig. 189 arcus  $Vm$  jacebit omnino extra, faltem donec  $n$  cadat extra circulum, cum debeat  $Hn$  eſſe major, quam  $HV$ ; adeoque major, quam  $VA$ , & multo major, quam  $RL$ ; at pro parte oppoſita ſi verſus  $H$  capiatur  $TQ$  ad  $TH$ , ut eſt laſus tranſverſum  $Vn$  ad rectum  $VA$ , & dueatur  $VQ$  occurrens circulo in  $F$ , totus arcus  $VMF$  jacebit intra, & circulus in ipſo puncto  $F$  iterum Ellipſim ſecabit. Ducta enim ad quodvis punctum  $G$  inter  $F$ , &  $Q$  recta  $VG$ , quæ circulo occurrat in  $M$ , ac producta  $NM$  uſque ad tangentem in  $I$ , erit  $NV$  ad  $RV$ , ut  $NI$  ad  $MI$ , ſive ( num. 204 ) ut  $HT$  ad  $GT$ , & erit  $VR$  ad  $RO$ , ut  $Vn$  ad  $VA$ , ſive ut  $TQ$  ad  $TH$ . Quare ex æqualitate perturbata erit  $VN$  ad  $RO$ , ut  $TQ$  ad  $TG$ , adeoque donec  $TG$  fuerit minor, quam  $TQ$ , erit &  $RO$  minor, quam  $VN$ , ac proinde ob  $OL$ ,  $VH$  æquales, erit  $RL$  major  $NH$ , & ſemiordinata Ellipſeos major, quam  $RM$ , ac punctum  $M$  intra Ellipſim. Abeunte vero  $G$  in  $Q$ , &  $M$  in  $F$ , evadent  $VN$ ,  $RO$  æquales, & punctum  $M$  erit in ipſa Ellipſi; facta autem  $TG$  adhuc majore, evadet  $M$  extra Ellipſim, adeoque totus arcus  $VMF$  jacebit intra Ellipſim, quam circulus deinde iterum ſecabit in  $F$ .

515. Demum in Hyperbola in fig. 191 ſemper erit  $HN$  minor, quam  $HV$ , adeoque minor, quam  $VA$ , & multo minor, quam  $RL$ ; ac proinde totus arcus  $VMH$  jacebit intra, facta autem  $TQ$  ad  $TH$  in eodem ratione lateris tranſverſi ad laſus rectum, ſed ad partes oppoſitas, ac ducta recta  $QV$ , quæ circulo occurrat in  $F$ , tum per quodvis punctum  $G$  ipſius  $TQ$  ducta  $GVm$ , eodem præſus argumento erit  $Vn$  ad  $Rn$ , ut  $ln$  ad  $ml$ , ut  $HT$  ad  $TG$ , & erit  $VR$  ad  $RO$ , ut  $Vn$  ad  $VA$ , ut  $TQ$  ad  $TH$ ; ac proinde  $nV$  ad  $RO$ , ut  $TQ$  ad  $TG$ ; nimirum donec  $FG$  fuerit minor, quam  $TQ$ , quod fiet per totum arcum  $VF$ , erit  $RO$  minor, quam  $Vn$ , & proinde  $RL$  minor, quam  $Hn$ , nimirum ſemiordinata Hyperbolæ minor quam  $Rm$ , &  $m$  extra ipſam Hyperbolam. Abeunte  $m$  in  $F$ , &  $G$  in

## 168 SECTIONUM CONICARUM.

G in Q, habebitur æqualitas, & punctum  $m$  erit in Hyperbolæ perimetro, tum per totum arcum FH, vadent TG majore, quam TQ jacebit  $m$  intra Hyperbolam.

Coroll. 3.

516. Nullus arcus necumque parvus circuli osculatorii congruit cum arcu Sectionis Conicæ, sed cum ea angulum continet quovis circulari minorem.

517. Patet primum ex ipsa demonstratione Corollarii secundi, & tertii, cum nusquam in casu Coroll. 2. NM,  $mn$  fiant æquales semiordinatis Sectionis Conicæ, in casu Coroll. 3. punctum F congruat cum ejus perimetro ita remotum ab osculo V, in arcu continuo circa ipsum V sit NM semper minor  $nm$  semper major. Patet autem & secundum ex Coroll. 2, cum nullus circularis arcus duci possit inter arcum Sectionis Conicæ, & arcum circuli osculatoris.

Coroll. 6.

518. Hyperbola, Parabola, & Ellipsis idem habentes latus rectum, & eandem inclinationem ordinatarum ad diametrum, cujus id est latus rectum, habent circulum osculatorem æqualem, quacumque sit diametri magnitudo, ad quam tamen ubi arcus circuli jacet intra Conicam Sectionem, ut ex parte anguli acuti, & arcus VM in quavis diametro, ac in vertice axis Parabolæ, vel axis transversæ Hyperbolæ, omnium maxime accedit Ellipsi, & eo magis, quo eius diameter est minor, tum Parabola, tum omnium minime Hyperbola, & eo minus, quo minor est eius diameter: Contra vero ubi arcus circuli jacet extra: ac ut, licet in angulo rectæ tangentiæ cum arcu circuli nulla alia recta duci possit, & is angulus sit quovis rectilineo minor, possunt tamen duci arcus circularum maiorum, qui eo propius ad tangentem accedunt, quo diameter est maior, sic licet in angulo circuli osculatoris cum arcu Sectionis Conicæ nullus alius circulus duci possit, & is angulus sit minor quovis circulari, possunt tamen duci arcus Sectionum Conicarum, qui

## E L E M E N T A.

189. *proprius ad circulum osculatorum accedo-  
metri ad eas partes tangentis, ad quas cir-  
culi, maiores fuerint, vel ad oppositas minores.*

519. Omnes ejusmodi Sectiones Conicas  
habere circulum osculatorem patet, quia si  
duo circulis, omnes ii circuli congruent, omne  
quod eandem habebunt tangentem, & ex eadem recta  
intercipiunt chordam eandem æqualem communi lateri  
recto. Porro in fig. 189. quo maior fuerit axis  $Vu$ ,  
et manente puncto  $A$ , erit minor recta  $RO$  quarta  
partis  $Vu$ ,  $VA$ ,  $VR$ , adeoque eo major  $RL$ , & maior  
arcus ordinata. Quamobrem eo magis ejusmodi or-  
dinata superabit  $RM$ , at eo minus superabitur ab  $Rm$ ,  
et eo magis distabit arcus ipsius ab arcu  $VM$ , vel mi-  
nus ab arcu  $Vm$ . In Parabola vero in fig. 190, in  
qua  $RL$  jam æquatür  $VA$ , ea erit major, quam in  
Ella Ellipsi. Deinum in Hyperbola in fig. 191, adhuc  
est major, quam  $VA$ , & eo major, quo major  
est  $RO$  quarta post  $Vu$ ,  $VA$ ,  $VR$ , adeoque eo ma-  
jor, quo  $Vu$  minor. Subibit igitur ex parte  $VM$  ar-  
cus cujusvis Hyperbole habentis diametrum  $Vu$  majorem  
inter arcum habentis minorem, & arcum  $VM$ ,  
et inter eos omnes, &  $VM$  subibit arcus Parabolæ,  
et inter hunc quoque arcus cujusvis Ellipseos, & in-  
ter arcum Ellipseos habentis diametrum majorem, ac  
 $VM$  subibit arcus habentis ipsam minorem. Ex parte  
vero  $Vm$  inter arcum  $Vm$ , & arcum Ellipseos habentis  
minorem diametrum  $Vu$  subibit arcus habentis ma-  
jorem, tum inter hos omnes, & illum arcus Parabo-  
læ, tum Hyperbolarum omnium eo propius, quo ma-  
jorem habuerint diametrum  $Vu$ . Eodem verò argumen-  
to continget primum illud utrinque in axium vertici-  
bus, ubi arcus circuli jaceat intra, hoc secundum, ubi  
extra. Reliqua patent ex his.

*Coroll. 7.*

190. *In Ellipsi & Hyperbola radius circuli osculato-  
ris est tertius continue proportionalis, post perpendicularum  
ductum in tangentem ductum, & semidiametrum coniu-  
gatam,*

270 SECTIONUM CONICARUM

*gatem, & radii circularum osculatorum inter se sunt in ratione reciproca triplicata eiusmodi perpendicularum, ac directa triplicata normalium ad utrumlibet axem terminatarum.*

§ 31. Si enim circulus osculetur Ellipsim in fig. 192, P<sub>192</sub> vel Hyperbolam in fig. 193 in P, e diametro Pp abscondet ( num. 503 ) chordam PH equalem lateti recto eius diametri: Sit eius circuli centrum in K, & recta KE perpendicularis ipsi chordæ eam bifariam secabit in E, ac ducto CL perpendicularo in tangentem PQ, erunt similia triangula rectangula CLP, PEK, nam eorum anguli ad C, & P erunt alterna in fig. 192, internus, ac externus, & oppositus in fig. 193. Erit igitur CL ad CP, ut PE ad PK: Sed cum PE sit dimidium latus rectum diametri Pp, ducta diametro coniugata ICi, erit ( num. 351 ) CP ad CI, ut CI ad PE: Igitur ex æqualitate perturbata erit CL ad CI, ut CI ad radium circuli osculatoris PK.

§ 32. Hinc autem eruitur, fore radium KP æqualem quadrato semidiametri coniugatæ CI applicato ad perpendicularum CL, adeoque in ratione composita ex directa duplicata ipsius semidiametri, & reciproca simplici eius perpendiculari, nimirum cum semidiametri conjugatæ sint ( n. 466. ) reciproce ut eiusmodi perpendiculara, erit ille radius in ratione reciproca triplicata eisdem perpendiculari, quæ ( num. 459 ) est eadem, ac ratio directa triplicata normalis ad utrumlibet axem terminatæ.

Coroll. 8.

§ 33. *In quavis Sectione Conica radius circuli osculatoris est quartus continue proportionalis post dimidium latus rectum principale, & normalem terminatam ad axem transversum.*

§ 34. Est enim in Ellipsi, & Hyperbola PM ad PK ut rectangulum sub PM, & CL, sive ( n. 459 ) quadratum semiaxis conjugati CD, ad rectangulum sub CL, & PK, sive ( num. 520 ) quadratum semidiametri conjugatæ CI, nimirum ( num. 456. ) ut quadratum

drum perpendiculari  $CL$  ad quadratum semiaxis transf-  
recti  $CV$ , sive ( num. 477 ) ut quadratum dimidii  
lateris recti principalis ad quadratum normalis  $PM$ .  
Quare si inter  $PM$ , & radius  $PK$  sumatur recta me-  
dia proportionalis, ad cuius quadratum erit quadra-  
drum  $PM$ , ut ipsa  $PM$  ad  $PK$ , sive ut quadratum di-  
midii lateris recti principalis ad quadratum normalis,  
erit ipsa etiam normalis ad eam rectam, ut dimidium  
latus rectum principale ad normalem, & dimidium la-  
tus rectum principale normalis  $PM$ , ea recta assumpta,  
ac  $PK$  continue proportionales.

§ 5. In Parabola vero, fig. 194, si tangens ducta per  $F$  194  
P occurrat tangenti ductæ per verticem  $V$  in  $A$ , recta  
 $FA$  est ( nu. 196 ) perpendicularis ipsi tangenti  $PA$ , &  
( n. 198 ) media proportionalis inter  $FV$ ,  $FP$ , qua-  
rum prima est ( n. 198 ) quarta pars lateris recti princi-  
palis adeoque ( n. 200 ) dimidia subnormalis  $RM$ , secun-  
da vero ( n. 251 ) quarta pars lateris recti diametri tran-  
sversus per  $P$ , adeoque rectæ  $PH$ , & proinde dimidia  
 $PE$ , & triangula  $FVA$ ,  $PRM$ ,  $PEK$  similia sunt ob om-  
nia latera parallela: Quare erit  $PM$  ad  $PK$ , ut  $RM$  ad  
 $PE$ ; sive, sumptis dimidiis, ut  $FV$  ad  $FP$ ; nimirum ut  
quadratum  $FV$  ad quadratum  $FA$ ; sive ut quadratum  
 $RM$  dimidii lateris recti principalis ad quadratum  $PM$ ,  
adeoque eodem argumento  $PK$  quarta continue propor-  
tionalis post ipsum dimidium latus rectum principale,  
& ipsam normalem  $PM$ .

## SCHOLIUM II.

¶ Oterat communi & faciliori demonstratione  
idem Corollariorum hoc etiam pacto de-  
monstrari. Radius circuli osculantis perimetrum in ver-  
tice axis transversus ( num. 509 ) æquatur dimidio la-  
teri recto principali: ibidem autem normalis  $PM$  189  
fig. 173, 174, 176 evanescente  $PR$  evadit æ- 190  
qualis subnormali,  $RM$ , sive rectæ  $RD$ , quæ abe- 194  
at  $R$  in  $V$  evadit æqualis dimidio ipsi lateri recto  
VO.

172 SECTIONUM CONICARUM.

VO. Cum igitur ( num. 520 ) sint radii ipsi , ut cubi normalium , erit dimidium latus rectum principale ad radium circuli Sectionem Conicam osculantis in quovis puncto in ratione triplicata ipsius dimidii lateris recti ad normalem , ac proinde ille radius quarta continue proportionalis post ipsum dimidium latus rectum , & normalem .

Coroll. 9.

527. Circulus , qui communem in aliquo puncto tangentem habet cum Sectionis Conica perimetro , & ipsi perimetro in aliquo alio puncto occurrit , abit in ipsum circulum osculatorem , ubi id punctum ita ad contactum illum accedit , ut demum in ipsum abeat , ac concursus binarum rectarum , quarum altera sit perimetro perpendicularis in extremo puncto chordæ cujuscumque , altera ipsi chordæ perpendicularis in ejus medio , vel altero extremo , abit in centrum circuli ipsam osculantis in priore illo puncto , vel in finem diametri ipsius circuli per illud idem punctum transeuntis , ubi evanescente chorda , congruunt extrema ejus puncta .

F. 189 528. Si enim in fig. 189, 190, 191 V sit contactus 190 ille , & M , vel  $m$  ad Conicam Sectionem pertineat , 191 erit ex natura circuli ( num. 505 ) HN , vel  $Hn$  tertia post VR , & RM , vel  $Rm$  , ac ex natura Sectionis Conicæ ( num. 495 ) RL pariter tertia post easdem . Quare semper HN , vel  $Hn$  æqualis RL . Accedat jam M , vel  $m$  ad V ita , ut demum congruant : coibunt simul cum ipso puncto V etiam puncta M ,  $m$  , N ,  $n$  , ac punctum L abibit in A . Quare & HV fiet æqualis HN , sive RL , nimirum lateri recto VA , & proinde circulus ( num. 503 ) evadet osculator ; unde patet primum .

529. Jam vero diameter per contactum V transiens est perpendicularis tangenti , adeoque & perimetro Sectionis Conicæ , ac recta quidem ex centro ducta ad ængulos rectos in chordam VM , vel  $Vm$  debet ipsam secare bifariam , recta vero ex extremo illius diametri pun-



Quo ducta ad punctum  $M$ , vel  $m$  extremum chordæ, debet continere angulum semicirculo rectum. Quare patet, concurrentiam rectæ perpendicularis perimetro ductæ per  $V$  cum recta perpendiculari chordæ ducta per mediam ipsam chordam, vel ejus extremum  $M$ , vel  $m$ , debere abire in centrum circuli osculatoris, vel extremum punctum ejus diametri, ubi punctis  $M$ , vel  $m$ , &  $V$  cœuntibus, evanescit chorda.

Coroll. 10.

530. *Binarum normalium per bina Sectionis Conicæ puncta ductarum concursus abit in centrum circuli osculatoris, ubi ea puncta ad se ita accedunt, ut demum congruant.*

531. Concurrent enim in fig. 195 in Parabola, 196 in Ellipsi, 197 in Hyperbola binæ normales  $PK$ ,  $F$  195  
 $PK$  in  $K$ , & fecant axem transversum in  $M$ ,  $m$ , ac 196  
 assumpta  $VO$  perpendiculari axi transverso, & equali 197  
 dimidio lateri recto principali, recta ex  $O$  ducta parallela axi in fig. 195, ad centrum  $C$  in fig. 196, 197 occurrat semiordinatis  $PR$ ,  $pr$  productis in  $D$ ,  $d$ , eritque (num. 464) subnormalis  $RM$ ,  $rm$  æqualis  $RD$ ,  $rd$ . Chorda  $Pp$  occurrat axi transverso in  $Q$ , & recta ex  $P$  parallela ipsi axi occurrat rectis  $pr$ ,  $PK$  in  $H$ ,  $E$ . Erit ubique  $PK$  ad  $MK$ , ut  $PE$  ad  $Mm$ , sive in ratione composita  $PE$  ad  $PH$ , &  $PH$ , vel  $Rr$  ad  $Mm$ .

532. Porro  $PE$  ad  $PH$  est (num. 204), ut  $Qm$  ad  $Qr$ , &  $Rr$  in fig. 195 æquatur  $Mm$ , cum æquantur  $RD$ ,  $rd$ , adeoque &  $RM$ ,  $rm$ , & dempta communi  $Mr$ , ipsæ  $Rr$ ,  $Mm$ . At in fig. 196 sumpta  $OB$  equali semiaxi transverso  $CV$  versus  $V$ , & in fig. 197 ad partes oppositas, ductaque  $CB$ , quæ ipsi semiordinatis occurrat in  $T$ ,  $t$ , ductisque  $dI$ ,  $dA$  parallelis  $CV$ ,  $CB$  usque ad rectam  $DP$ , erit  $Mm$  æqualis  $IA$ . Erit enim  $QB$  ad  $DT$ , ut  $OC$  ad  $DC$ , ut  $CV$  ad  $CR$ , adeoque & ob  $OB$ ,  $CV$  æquales, erit  $DT$  æqualis  $CR$ , ac eodem argumento  $dI$  æqualis  $Cr$ , quæ etiam cum sit æqualis  $AT$ , erit  $Rr$  æqualis  $dIA$ ; cumque sit &  $RD$  æqualis  $RM$ ,

174 SECTIONUM CONICARUM

erit  $RA$  equalis  $rM$ ; est vero &  $rm$  equalis  $rd$ , sive  $RI$ . Igitur erit  $Mm$  equalis  $IA$ . Inde vero cum binæ quævis latera triangulorum  $IdA$ ;  $VCB$  sint parallela, erit  $dI$  ad  $IA$ ; sive  $Rr$  ad  $Mm$ ; ut  $CV$  ad  $VB$ .

533. Coeant jam puncta  $P$ ,  $p$ ; & secans  $pPQ$  a-bibit in tangentem; coibunt puncta  $R$ ,  $r$ ; & puncta  $F.198M$ ;  $m$ ; fig. 195; 196; 197 mutabuntur in 198; 199 199; 200; & erit  $PK$  ad  $KM$  in Parabola in fig. 200 198; ut  $QM$  ad  $QR$ ; at in reliquis in ratione compo-sita ex ipsa  $QM$  ad  $QR$ ; & ex altera semiaxis trans-versi  $CV$  ad  $VB$  differentiam in Ellipsi; summam in Hyperbola ejus; & dimidii lateris recti principalis  $VO$ .

534. Porro ob similia triangula  $QPM$ ;  $RPM$ ;  $QRP$ ; est tam  $MQ$  ad  $QP$ ; quam  $QP$  ad  $QR$ ; ut  $MP$  ad  $PR$ ; adeoque  $QM$  ad  $QR$ ; ut quadratum  $MP$  ad qua-dratum  $PR$ . Quare erit in Parabola in fig. 198  $PK$  ad  $KM$ ; ut quadratum  $PM$  ad quadratum  $PR$ ; adeo-que sumendo differentiam terminorum ad anteceden-tem; erit quadratum dimidii lateris recti  $MR$  ad qua-dratum normalis  $PM$ ; ut ipsa normalis  $PM$  ad  $PK$ . At in Ellipsi; & Hyperbola cum sit (num. 479) semia-xis transversus  $CV$  ad  $VB$  ibi differentiam; hic sum-mam ipsius; & dimidii lateris recti principalis; ut qua-dratum semiordinatæ  $RP$  ad differentiam quadratorum normalis  $PM$ ; & dimidii lateris recti principalis  $VO$ ; binæ illæ rationes compositæ erunt quadrati  $PM$  ad quadratum  $PR$ ; & quadrati  $PR$  ad eam quadratorum differentiam; quæ reducuntur ad unicam quadrati  $PM$  ad suam differentiam a quadrato  $VO$ . Erit igitur  $KP$ ; ad  $KM$ ; ut quadratum  $PM$  ad differentiam quadra-torum  $PM$ ;  $VO$ ; adeoque  $PM$  differentia priorum terminorum ad primum  $PK$ ; ut quadratum  $VO$  ad qua-dratum  $PM$ .

535. Igitur ubique ratio normalis  $PM$  ad  $PK$  est ea-dem, ac quadrati  $OV$ , ad quadratum  $PM$ ; adeoque eodem argumento; quo in superioris Corollarii de-monstratione;  $PK$  quarta continue proportionalis post dimidium latus rectum principale  $VO$ ; & norma-lem

letū PM, ac proinde æqualis radio Circuli osculato-  
ris, puncto K abeunte in ipsius Circuli osculatoris  
centrum.

SCHOLIUM III.

536. **V**idebimus suo loco, ubi nimirum de cur-  
vis generaliter agemus ope infinitesimorum,  
generalem hanc proprietatem esse circularum osculato-  
rum, ut nimirum eorum arcus cum arcu curvæ angu-  
lum constituat quovis circulari minorem ita, ut licet  
in unico conveniant puncto, & in eo angulo infiniti  
aliam curvarum arcus duci possint, adhuc tamen  
non possit ullus circularis arcus, & concursus ultimus  
rectæ secantis chotdam ad angulos rectos, ac bifariam  
tam normali per alterum ejus extrema ducta, vel  
binarum normalium, incidat in ipsum centrum circulo  
osculatoris, ubi binis perimetri punctis coeuntibus chor-  
da evanescit, sed interea libuit ea hic ex ipsa natura,  
& proprietatibus Sectionum Conicarum de ipsarum cir-  
culis osculatoribus accuratissime demonstrare per finitam  
Geometriam:

537. Et quidem postremum hoc Corollarium usus  
nam in Physica magnos habet, ut ubi queritur Tel-  
uris figura per graduum dimensiones: Nam gradus  
Terræ dicitur ejus ille arcus, per cujus extrema pun-  
ta ductæ binæ normales, ubi conveniunt, angulum  
continent unius gradus, ille vero conveniunt prope  
centrum circuli ipsum arcum osculantis in medio, cum  
ta puncta parum a se invicem distent, & si ea con-  
gruant in medio, concursus normalium in id centrum  
ire debet: Quare præcedentis Corollarii vi assumi so-  
let pro arcu curvæ arcus exiguus circuli osculatoris, qui  
eo parum admodum differre potest; cum arcus cir-  
culi in osculatore desinentis debeat ad ipsum acce-  
dere ultra quoscumque limites, antequam congruant,  
& semper arcus aliquis curvæ concludatur inter ar-  
cum circuli osculatoris, & arcum vel majoris, vel

176 SECTIONUM CONICARUM

minoris circuli, desinentis demum in osculatorem ipsum, ubi arcus curvæ in infinitum imminutus penitus evanescit.

F.189 538. Ubi in Coroll. 4. in fig. 189 Ellipsim consideravimus, expressimus in ipsa figura casum, in quo latus rectum  $VH$  esset majus diametro  $V\mu$ , in quo casu, ut ipsa figura exhibet, sumpta  $TQ$  ad  $TH$  in ratione  $V\mu$  ad  $HV$ , punctum  $Q$  cadit inter  $H$ , &  $T$ . Si latus rectum æquaretur diametro, abiret punctum  $Q$  in  $H$ , adeoque & punctum  $F$ , in quo circulus osculator Ellipsim iterum secat, abiret in  $H$ ; quod si adhuc esset minus, & excederetur ab ipsa  $V\mu$ , abiret  $Q$  citra  $H$  in tangentem  $TH$  productam, &  $F$  in arcum  $V\mu H$ , quo casu ad demonstrandum eam partem arcus  $VF$ , quæ jaceret citra  $H$ , esse intra Ellipsim, immutanda nonnihil esset demonstratio, & ei aptanda casui, quod facile fieri potuisset; sed ad id, quod propositum fuerat, id quidem non erat necessarium, cum nimirum satis esset ostendere, aliquem arcum  $VM$  jacere intra, aliquem  $V\mu$  extra & alicubi debere iterum Ellipsim secari a circulo osculatore in puncto, quod geometricè definiri posset, quæ quidem omnia ex ipsa constructione casus primi in figura expressi, pro casibus omnibus sunt satis manifesta, ac ejus demonstratio iis omnibus, vel prorsus communis est, vel admodum facile accomodatur.

359. Porro non erit abs re considerare, quo pacto circulus aliquis Sectionis Conicæ osculator evadat. Potest eam circulus in quatuor punctis secare, ut in fig. F.201  
202 201 secat Ellipsim in punctis  $P$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Nam  
203 circulum aliquem cuilibet Sectioni Conicæ posse occur-  
204 rere in quatuor punctis, admodum facile demonstra-  
205 tur; ut si per bina extrema puncta unius rectæ axi ordinatæ, & per unum extremum alterius ducatur circulus; is profecto transibit etiam per alterum posterioris extremum, Habebit enim centrum in ipso axe priorem ordinatam, suam chordam, secante bifariam, adeoque & posteriorem ordinatam habebit pro chorda

chorda, quam itidem secabit bifariam. Si jam cen-  
 tri locus mutetur ita, ut bina puncta  $A$ ,  $P$  congru-  
 ant; evanescente communi chorda  $PA$ , communis  
 secans  $EG$  abit in communem tangentem, ac ipse  
 circulus Ellipsim contingit in  $P$ ; figura 201 abeunte  
 in 202, ubi circulus, & Ellipsis se mutuo contingunt  
 in  $P$ ; & adhuc se possunt secare in binis aliis pun-  
 ctis  $C$ ,  $B$ ; centrum autem  $K$  jacebit in recta  $PK$  per-  
 pendiculari tangenti & contactus erit exterior, arcu  
 circuli utriusque circa contactum  $P$  existente extra El-  
 lipsim. Quod si perpetuo minuaturs radius  $PK$ , inter-  
 sectio illa  $C$  accedet ad  $P$ , donec in ipsa  $P$  inci-  
 dat, quo casu evadet circulus osculator; in cujus  
 osculo tria communia puncta uniantur in unicum;  
 quod saltem tribus æquivalet intersectionibus, vel uni  
 contactui, & uni intersectioni. Interea vero & al-  
 tera illa intersectio  $B$  ascendet, & si  $P$  fuerit vertex  
 axis cujusdam, tuta  $PK$  erit in ipso axe; & admodum  
 facile demonstratur, fore eo casu [intersectiones  $C$ ,  
 &  $B$  æque distantes a  $P$ ; ut in fig. 203, nec] pote-  
 rit abire  $C$  in  $P$ , nisi abeat &  $B$ , osculo in axium  
 verticibus æquivalente quatuor communibus punctis,  
 sive quatuor intersectionibus, vel binis intersectionibus,  
 & uni contactui, vel binis contactibus. At ubi  $P$   
 non est in vertice axis alicujus, ut in fig. 202, pun-  
 cta  $C$ , &  $B$  non æque distabunt a  $P$ ; & mutata cir-  
 culi magnitudine prius alterum, ut  $C$ , eo appellet,  
 altero  $B$  adhuc inde distante per aliquod intervallum,  
 ita erit, ut circulus, qui Conicam Sectionem oscu-  
 lat in axium verticibus, ipsi nusquam alibi occur-  
 rat, nec ibidem secet, sed vel inscriptus sit, vel cir-  
 cumscribitus; ut ostendi Coroll. 3; at in verticibus  
 aliquarum diametrorum ibidem eam tangat, & secet,  
 iterum secet alicubi; ut vidimus Coroll. 4. Quod  
 si adhuc minuaturs radius  $PK$ , jam illa intersectio  $C$   
 transibit ad partes oppositas  $P$ , ut in fig. 204: conta-  
 ctus fiet interior, & tamen aliquis arcus  $CB$  adhuc  
 extra Ellipsim cadet; donec coeuntibus etiam punctis

## 178 SECTIONUM CONICARUM

C, B, contingat ipsam iterum interius, ac demum totius incipiat cadere intra Ellipsim.

540. Et quidem si P, p in fig. 250 fuerit axis conjugatus, & concipiatur, facto centro alicubi in ipso axe in K, circulus radio PK primo quidem minimus, tum perpetuo crescens; is quidem primo erit totus intra Ellipsim, tum eam contingeret iterum in p, deinde, ut figura exprimit, eam secabit in binis punctis C, B, quæ perpetuo accedent ad P, cum quo congruent, ubi ipse circulus habuerit pro diametro latus rectum ejus axis, & evaserit osculator; ac is erit primus ex iis, qui tangent Ellipsim exterius, qui quidem reliqui omnes erant eo majores, & toti extra Ellipsim cadent,

541. At in fig. 203 si Pp fuerit axis transversus, & concipiatur circulus primo quidem maximus, tum perpetuo imminutus; primo quidem ambiet universam Ellipsim, tum contingeret etiam in p, deinde secabit in binis punctis C, B, quæ cum ipso P congruent, ubi is habuerit pro radio dimidium latus rectum ejus axis, & evaserit osculator, ac is erit primus ex iis, qui tangent Ellipsim interius, qui quidem erunt reliqui omnes eo minores, & toti intra Ellipsim cadent. Et idem accidet circulis tangentibus Parabolam, vel Hyperbolam in vertice axis transversi, sed in iis circulus utcumque magnus præter contactum in vertice semper habebit binas intersectiones, quæ illo imminuto accedent ad contactum P, in illum recident, nec ulquam jam erunt eodem profus ordine, quo in superiore numero.

542. Extra axes vero ducta PK, ut in fig. 202, perpendiculari tangenti EG, & facto circulo ingenti, is totus cadet extra Ellipsim, tum imminutus illam alicubi contingeret circa D, deinde secabit in binis punctis C, B, ac in Parabola; utcumque sit magnus, secabit semper, & adhuc contingeret exterius, aliquo ejus arcu CPB jacente extra curvam, reliquo CDB intra. Imminuto vero etiam magis circulo, intersectiones illæ accedent ad contactum P, in quem ita incidet altera,

ut

ut  $C$ , ante alteram, ut ibi circulus perimetrum & tangat, & secet, altera intersectione  $B$  non congruente, ac aliter ex arcibus a  $P$  ad  $B$  remanebit extra, ut prius, aliter erit intra; tum radio adhuc imminuto, jam utrinque interius continget in  $P$ , transeunte, ut vidimus,  $C$  ad partes oppositas, ut in fig. 204, adhuc tamen exeunte arcu aliquo  $CB$  extra Sectionem Conicam, donec punctis  $C$ ,  $B$  coeuntibus mutantur binæ intersectiones in contactum, ac deinde incipiat jacere circulus totus intra Sectionem Conicam.

543. Patet autem vel ex ejusmodi consideratione debere haberi circulum aliquem, qui ad arcum curvæ hujusmodi accedat magis, quam quivis alius ita, ut in eorum angulo nullus alius circularis arcus duci possit, ac is vel inscriptus sit, vel circumscriptus, in primo casu maximus ex inscriptis, in secundo minimus & circumscriptis ita, ut ubi habetur minimus & circumscriptis, nullus sit maximus ex inscriptis, & viceversa. Dum enim arcus, qui jacebat in contactu extra curvam, motu continuo mutatus abit in jacentem intra, omnino alicubi is transitus haberi debet, & si ob diversam curvæ naturam, nullus circuli arcus congruit cum arcu ipsius curvæ, debet alicubi ille transitus fieri ita, ut e circulis omnibus aliquis sit proximus, nec ullus propior haberi possit, qui si inscriptus sit, sive intra curvam jaceat, quivis minor multo magis jacebit intra, quivis vero major extra, aliter ille proximus non esset, sed is alius, qui eo major adhuc jaceret intra, omnino esset propior. Erit igitur ille maximus ex inscriptis: sed utrumque parum alius quispiam illum excedat, semper alius haberi poterit, qui ipsum excedat minus, medius nimirum inter utrumque, & centrum inter eorum centra habens, qui adhuc & ipse circumscriptus erit, & curvæ propior, & priore circumscripto minor, adeoque ille prior non poterat esse circumscriptorum minimus, quod idem de hoc novo pariter demonstratur, & de alio minore quovis, cum nimirum dato intervallo aliquo pro circuli

radio, nullum haberi possit intervallum, quod ad ipsum accedat ita, ut infiniti alii accedentes magis haberi non possint. Atque eadem est demonstratio pro excludendo maximo ex inscriptis, ubi is, qui est proximus, est circumscriptus.

544. Atque in his quidem attingimus tantummodo comparationem Sectionum Conicarum cum circulo. Omnia, quæ in prioribus 8 Propositionibus, & earum, ac Definitionum Corollaris, ac Scholiis demonstravimus, pertinent ad comparationem rectarum eum Sectionibus Conicis, & earum occurfus, qui licet in singulis rectis bini tantummodo esse possint, adhuc tamen tantam proprietatum multitudinem prodiderunt; quarum aliæ etiam habentur quamplurimæ, quas omisimus, quod minoris sint usus, & pleræque longiore demonstrationum ambitu indigeant, ac complicatiores sint. Quod si occurfus circuli, vel alterius Sectionis Conicæ, qui in singulis quaterni esse possunt, considerarentur generaliter, quam multæ, quanto sublimiores proprietates profuerent, quæ quidem maxima saltem ex parte nostræ menti imperviæ sunt, qui nimirum rectæ lineæ folius naturam satis evidenter percipimus, & veluti intuemur, ac idcirco ad ipsas rectas exigimus curvas quas contemplamur, & quarum proprietates immediate, & in se ipsis intueri non possumus? Alio mentis genere opus esset ad ejusmodi Geometriam, quæ ista omnia vel immediate videret, vel facile ex iis, quæ immediate videt, colligeret. Nos ea per quandam relationem ad rectas tantummodo contemplamur.

545. Quamobrem iis omissis, licet nonnulla longiore ambitu possemus assequi, progrediamur jam ad contemplandum Conum, ejusque Sectiones, quæ hujusmodi curvis nomen dederunt. Contemplabimur autem sectiones Cylindri, & Conoides genitas conversione Sectionum Conicarum circa se ipsas, earumque itidem sectiones, ubi videbimus Ellipsoidem non gignere nisi circulum & Ellipses, Paraboloidem addere Parabolas,



bolis ; Hyperboloidem vero etiam Hyperbolas conu-  
nere. Sed in iis aliquanto minus immorabimur.

DEFINITIO III.

546. **S**I recta MNn in fig. 206 utrinque indefinita  
semper transiens per punctum datum V positum  
extra planum dati circuli AB perpetuo motu percurrat  
ejusdem circuli peripheriam ; superficiem , quam generat,  
dico Superficiem Conicam , solidam ea inclusum , dico  
Conum , V Verticem , circulum ipsum Basim , rectam  
VC transeuntem per verticem , & centrum circuli dico  
Axem , qui si fuerit perpendicularis plano basis , Conum  
dico Rectum ; secus Scalenum , rectam autem ipsam ge-  
nitricem Latus Coni.

SCHOLIUM I.

547. **S**olent plerumque appellare conum id tantum,  
quod inter verticem , & basim interja-  
cet reliquum vero ad eandem appellant conum produ-  
ctum , ad oppositam conum oppositum . At libet potius  
coni nomine appellare quidquid recta linea ; quae est  
locus geometricus simplicissimus , & natura sua utrin-  
que sine fine produci potest , gignit motu continuo circa  
locum geometricum iidem simplicissimum , nimirum  
circuli peripheriam . Locus geometricus integer ab eor-  
um locorum combinatione nascitur , cujus frustum  
quoddam est id , quod certa quadam basi , ac vertice  
terminatur . Sic ergo Hyperbolarum ramos oppositos  
appellavi ; quos alii fere Hyperbolas oppositas no-  
minant :

Coroll. 1.

548. Conus testus generatur ; si altero anguli AVC  
rectilinei latere VC immoto , alterum latus VA conuer-  
tatur circa ipsum .

549. Si enim ex quovis puncto A ducatur AC per-  
pen-

## 183 SECTIONUM CONICARUM

pendicularis in VC, ac in illo motu generabit circulum (num. 30 solid.) , qui erit basis conæ habentis verticem in V, cujus axis VC erit perpendicularis basi ipsi.

*Coroll. 2.*

550. Si Conus quævis secetur æquumque plano per verticem ducto, sectio efficiet in superficie conæ binas rectas utrinque indefinite productas, continentes binos angulos ad verticem oppositos, quarum segmenta intercepta inter verticem & basim in cono recto equalia erunt inter se, in cono scaleno unequalia ita, ut omnium minimum, ac maximum jaceant in plano transeunte per axem, & perpendicularum demissum e vertice in plano basis, minimum quidem ipsi perpendicularo propius, maximum vero ab eodem remotius.

551. Si enim sectio fiat plano transeunte per verticem V, & bina puncta peripheriæ basis AB, ubi recta genitrix deveniet ad puncta A, & B congruet cum lineis VAQ, VBN sectione genitris, cum debeant jace- re in superficie conæ, & transire illa, per puncta V, A, hæc per V, B. Quare ipsæ linæ VAQ, VBN erunt rectæ, & continebunt angulos QVN, qVn oppositos ad verticem.

552. Ductis autem AC, BC radiis basis utriusque æqualibus, ipsi radii in cono recto continebunt cum axe VC angulos rectos. Adeoque triangulorum VCA, VCB habentium præterea latus VC commune, bases VA, VB æquales erunt. Reliqua patent ex num. 135. solidorum.

*Coroll. 3.*

553. Quævis sectio basi parallela erit circulus, cujus centrum in ipso occurso axis cum eadem sectione.

554. Si enim sectio basi parallela occurrat axi in e ex utraque parte verticis, planis autem VCA, VCB in rectis ca, cb; erunt rectæ CA, ca, & CB, cb intersectiones planorum parallelorum parallelæ (num. 9. solidorum). Quare cum rectæ Aa, Cc, Bb transeant per idem punctum V, erit (num. 204.) ca ad cb, ut

CA

CA ad CB, nimirum in ratione æqualitatis. Manente igitur puncto A, & a, & utcumque mutato B, & b, semper *cb* erit æqualis eidem *ca*, adeoque *b* ad circulum radio *ca* descriptum.

Coroll. 4.

555. *Sectiones parallelae utcumque inclinatae eiusdem conici erunt semper inter se similes.*

556. Si enim AB, *ab* referant sectiones quascunque parallelas utcumque etiam inclinatas, ac manentibus rectis VA, VC, planum CVB gyret utcumque circa rectam VC; erunt semper & CA, *ca*, & CB, *cb* parallelae inter se, ac proinde adhuc *ca* ad *cb*, ut CA ad CB, adeoque puncta B, *b* (num. 111.) ad figuras similes.

Coroll. 5.

557. *In Cono Scaleno alia quoque sectio basi non parallela, que dicitur subcontraria, est circulus.*

558. Si enim in fig. 207. per centrum C, & verticem V ducatur (num. 74 solid.) planum AVB perpendicularare plano basis, tum ad quodvis punctum M rectæ AV fiat angulus VMm æqualis angulo VBA ita, ut recta Mm faciat cum latere VA eundem angulum, quem AB facit cum VB, unde ob angulum V communem, vel æqualem in triangulis AVB, MVm, consequetur etiam, ut eadem Mm cum VB contineat eundem angulum, quem AB continet cum VA; tum per Mm fiat sectio perpendicularis plano AVB (num. 74 solid.), ea sectio dicitur subcontraria basi, & eam fore circulum sic facile demonstratur.

559. Per quodvis punctum R rectæ Mm ducta sectio parallela basi occurrat plano AVB in *ab*, sectioni ductæ per Mm in recta Pp. Ea erit circulus (num. 553), cuius *ab* erit diameter, ac chorda Pp intersectio binorum planorum perpendicularium eidem AVB, cum debeat ipsi perpendicularis esse, erit perpendicularis utriusque *ab* & Mm, ac a priore, utpote a circuli dimetro, incidetur bifariam in R, eritque quadratum PR æquale rectangulo aRb (Cor. 1. Prop. 13. Geom.). Porro in trian-

## 184 SECTIONUM CONICARUM

triangulis  $aRM$ ;  $bRm$  anguli ad verticem oppositi in  $R$  æquales sunt, & ob angulum  $VMR$  æqualem ex hypotefi angulo  $VBA$ , sive  $VbR$ , erit &  $aMR$  æqualis  $mbR$ . Quare similia erunt ea triangula, &  $MR$  ad  $Ra$ , ut  $Rb$  ad  $Rm$ , sive rectangulum  $MRm$  æquale rectangulo  $aRb$ ; vel quadrato  $RP$ . Secta autem  $Mm$  bifariam in  $c$  quadratum  $cM$  æquatur rectangulo  $MRm$ , & quadrato  $cR$  simul (Coroll. 2. Prop. 13. Geom.), adeoque æquabitur binis quadratis  $cR$ ,  $RP$  simul, sive ob angulum  $cRP$  rectum, quadrato  $cP$ . Erit igitur semper  $cP$  æqualis  $cM$ , adeoque punctum  $P$  ad circulum radio  $cM$  descriptum.

### Coroll. 6.

560. Pro basi assumi potest quævis sectio sive parallela prima basi, sive subcontraria ex utraque parte a vertice  $V$ .

561. Nam quævis ejusmodi sectio circularis est, & recta per verticem  $V$  transiens; ac ejus superficiem conradens eundem generat conum.

### Coroll. 7.

562. Quævis alia sectio conici erit Ellipsis, Parabola; vel Hyperbola, sicut planum per conici verticem ductum plano sectionis parallelum cadet extra conum, vel eum continget, vel intra ipsum immergetur.

563. Secetur enim quivis conus quovis plano non parallelo basi, & planum ipsi sectioni parallelum ductum per verticem  $V$  occurret plano basis in recta quadam  $OS$ , quæ vel cadet extra basim, ut in fig. 208, 209 209; vel eam continget alicubi, ut in fig. 210, vel intra ipsam immergetur, ut in fig. 211; ac si ducatur 211 per centrum basis  $C$  recta  $CT$  ipsi  $OS$  perpendicularis occurrens perimetro basis in punctis  $A$ , &  $B$ , cadet punctum  $T$  in fig. 208; 209 extra diametrum  $AB$ , in fig. 210 in altero ejus extremo, ut  $B$ , in fig. 211 intra diametrum, quæ nimirum segmentum rectæ  $OS$  circulo interceptum, cum ad angulos rectos secet, secabit (Coroll. 4. Prop. 5. Geom.) bifariam.

564. Ducto jam per  $ABV$  plano, quod plano illi  $OV6$  occurret in recta  $VT$ , superficiem conii in rectis  $VA$ ,  $VB$ , plano sectionis in recta quadam  $Iz$  parallela (num. 9. solid.) rectæ  $VT$  ob parallelismum plani sectionis cum plano  $OVT$ , quæ idcirco rectam  $VA$  secabit alicubi in  $M$ , ac si ponatur punctum  $I$  ab  $M$  versus conum, & ad partes oppositas, necessario secabit in fig. 208, 209 etiam latus  $VB$  alicubi in  $m$  versus  $I$ , erit in fig. 210 ipsi parallela, in fig. 211 secabit versus  $z$  ad partes oppositas supra verticem  $V$  ipsum latus  $BV$  productum, cum ipsa  $VB$  in fig. 208, 209 declinet ab  $VT$  versus parallelam  $Iz$  ad partes  $B$  in fig. 210 cum priore congruat, in fig. 211 declinet versus partem oppositam. Quamobrem rectæ  $Iz$  segmentum  $Mm$  totum, & solum jacebit in fig. 208, 209 intra conum, in fig. 211 extra, in fig. 210. tota  $MI$  indefinita jacebit intra, tota vero  $Mz$  extra.

565. Assumpto in ipsa  $Iz$  puncto quovis  $R$  inter  $M$ , &  $m$  in fig. 208, 209, extra eos limites in fig. 211, ab  $M$  versus  $I$  in fig. 210 ducatur per id punctum planum parallelum plano basis, quod plano  $AVB$  occurrat in recta  $ab$ , plano prioris sectionis in  $Pp$ , & patet fore ipsam sectionem hanc novam circulum (num. 553) diametro  $ab$ , ac ipsas  $ab$ ,  $AT$ , ac  $Pp$ ,  $OS$  intersectiones planorum parallelorum cum eodem plano fore (n. 9 solid.) parallelas inter se, adeoque (num. 19 solid.) ut  $AT$  est per constructionem perpendicularis  $OS$ , ita erit diameter  $ab$  perpendicularis chordæ  $Pp$ , quam proinde (Coroll. 4. Prop. 5. Geom.) secabit bifariam, adeoque & recta  $Iz$  erit diameter quædam prioris sectionis, cujus nimirum chordas per quodvis punctum  $R$  transeuntes parallelas eidem datæ rectæ  $OS$ , & inter se, secabit bifariam.

566. Ducta  $MD$  parallela  $AB$ , quæ rectæ  $VB$  occurrat in  $D$ , ac in fig. 208, 209, 211 ducta pariter  $md$  parallela eidem  $AB$ , quæ occurrat in  $d$  rectæ  $VA$ , jacente  $md$  in fig. 208 intra triangulum  $VMD$ , in fig. 209 extra ad partes  $MD$ , in fig. 211 extra ad partes  $V$ , con-

186 SECTIONUM CONICARUM

concipiatur circulus rectam AV contingens in M, ac transiens per D (is duci posset, sed vitandæ confusio- nis gratiâ non ducitur), qui a recta Ii transeunte per contactum M abscindet segmentum ME ita, ut ductâ DE, angulus MED æquetur (Coroll. 6: Prop. 9. Geom.) angulo, quem chordâ MD continet cum ipsa tangente AMV ad partes oppositas, adeoque angulo MR; qui in fig. 208 æquatur angulo AMD; in reliquis angulo VMD externo, & opposito. Cumque etiam EMD æ- quetur alterno MRa; similia erunt triangula aRM; EMD; ac aR ad RM, ut ME ad MD.

567. Est autem præterea in fig. 210; ob MR; D<sup>b</sup> parallelas; MD æqualis Rb. Erit igitur ibi aR ad RM, ut ME ad Rb; adeoque rectangulum aRb; sive quadra- tum semiordinatæ RP æquale rectangulo sub abscissâ MR, & rectâ constanti ME; adeoque (num. 440) pun- ctâ P; p ad Parabolam diametro MI parametro ME descriptam.

568. At in reliquis erit præterea Rb ad Rm, ut MD ad Mm. Quare conjunctis rationibus, rectangu- lum aRb; sive quadratum semiordinatæ RP ad rectan- gulum MRm sub binis abscissis a binis verticibus, ut rectangulum sub ME, & MD ad rectangulum sub Mm, & MD, sive in constanti ratione ME ad Mm; adeo- que (num. 439) puncta P; p erunt in fig. 208, 209 ad Ellipsim; in fig. 211 ad Hyperbolam descriptam dia- metro Mm, & parametro ME.

Coroll. 8.

569. In Ellipsi, & Hyperbola diameter conjugata dia- metri Mm est media geometricæ proportionalis inter MD, md.

570. Erit enim md ad Mm, ut Ra ad RM, sive ut ME ad MD; adeoque rectangulum sub md; & MD æquale rectangulum mME sub diametro & paramet- ro; nimirum (num. 351.) quadrato diametri con- jugatæ.

Coroll. 9.

571. Si planum AVB fuerit perpendiculare plano ba- sis,

*sis, quæ in cono recto consistet semper, in cono scaleno in unica directione diametri AB, erit lMi axis, & quædam in Hyperbola Mm semper in eo casu erit axis transversus; in Ellipsi in cono recto pariter semper transversus, in cono vero obliquo erit transversus, vel conjugatus; prout sectio jacuerit inter sectionem parallelam basi ductam per M; & subcontrariam; vel extra eorum angulum.*

572 Si enim planum AVB fuerit perpendiculare plano basis, recta OS jacens in plano basis, & perpendicularis per constructionem intersectioni AT, plani AVB cum ipsa basi, erit (n. 66. solid.) perpendicularis illi ipsi plano, adeoque & rectæ VT: Quare & ordinata Pp erit perpendicularis diametro Mm, adeoque Mm (num. 210) erit axis

573: Cum vero in cono recto axis conici per C transiens sit perpendicularis plano basis, quodvis planum AVB transiens per V & C, adeoque per axem conici, erit (num. 62. solid.) perpendiculare plano basis. At in cono scaleno perpendiculum ex V demissum in planum basis cadet extra C; adeoque in ea unica directione, in qua diameter AB transiens per C dirigatur ad id punctum; planum AVB transibit per rectam perpendicularem plano basis, adeoque ipsa perpendicularis erit:

574. Porro in Hyperbola axis conjugatus ipsius perimetro nusquam occurrit (num. 212), adeoque eum ipsi occurrat Mm in M; & m; erit axis transversus.

575. Pro Ellipsi vero si fig. 213 exhibeat triangulum AVB pro casu conici recti figur. 213, 214 pro casu conici scaleni, quod in illa erit (num. 550) isosceles, in hac scalenum, circulus MED in primo casu continget etiam latus VB in D; in secundo ipsum ibi secabit, & iterum secabit pariter alicubi in L versus B, vel versus V, prout latus VA, in quo jacet M, fuerit majus latere VB, ut in fig. 213, vel minus, ut in fig. 214. Si enim ejus circuli centrum sit O, ductis MO, DO, angulus OMD erit æqualis angulo OMD ob latera OM,

## 188 SECTIONUM CONICARUM

OM, OD æqualia, cumque & latus VM sit in fig. 212 æquale lateri VD, in fig. 213 majus, in fig. 214 minus; erit angulus VDM æqualis in fig. 212 angulo VMD, major in fig. 213, minor in fig. 214, ac proinde totus angulus VDO æqualis angulo recto VMO in fig. 212, major in fig. 213, minor in fig. 214; Quamobrem recta quoque VDB continget circulum in fig. 212, ipsum in reliquis secabit alicubi in L, jacento L ad partes anguli acuti radii OD cum recta VD, nimirum in fig. 213 a D versus B, & in fig. 214 versus V.

576. Hinc in fig. 212 ducta quavis Mm, quæ lateri VB occurrat ab V versus B, vel supra MD, ut Mm<sub>1</sub>, vel infra ut Mm<sub>2</sub>, semper ea prius occurret circulo in E<sub>1</sub>, vel E<sub>2</sub>, eritque semper axis Mm major latere recto ME, adeoque multo major (num. 351) altero axe, & proinde erit axis transversus. At in fig. 213, 214; ubi m abierit in L, sicut Mm, ME æquales abeunte in L etiam E, quo casu æquabuntur axis, & ejus latus rectum, adeoque bini axes, Ellipsi abeunte in circulum juxta num. 109, qui quidem casus pertinet ad sectionem subcontrariam ob angulum MLD æqualem angulo LMD in fig. 213, & AMD in fig. 214 tangentis cum chorda MD referente sectionem basi parallelam. Quare quævis Mm<sub>2</sub> jacens inter MD, ML occurret prius lateri VB, quam circulo ultra ipsum procurrenti, eritque axi Mm<sub>2</sub> minor suo latere recto ME<sub>2</sub>, adeoque & axe altero. Quævis autem jacens extra eos limites, ut Mm<sub>1</sub>, Mm<sub>3</sub>, erit major sua ME, & proinde intra eos limites erit Mm axis conjugatus, extra eos transversus.

## Coroll. 10.

577. *Ex quovis cono abscondi potest quævis data Ellipsis, ac Parabola, plurime itidem Hyperbole licet, non omnes, ac ex cono recto nulla potest ex iis, in quibus latus rectum principale ad axem transversum habeat rationem majorem, quam tangens dimidii anguli AVB in vertice constituta ad contangentem, sive, quod eodem redit,*



*576. In quibus axis conjugatus ad transversum habeat rationem majorem, quam tangens ejusdem dimidii anguli ad rādiū, reliquæ omnes possunt.*

578. Nam primo quidem in fig. 212 secto cono utramque per axem plano AVB, & assumpto puncto M ad arbitrium, capiatur VD æqualis VM, ducatur circulus tangens AV in M, & transiens per D, capiatur MF ad MV in ea ratione, in qua est in data Ellipsi latus rectum principale ad axem transversum, quod cum semper sit minus ipso latere transverso ( n. 66, 64 ) erit semper MF minor, quam MV, adeoque acta ex F recta parallela VB, ea necessario occurrerit alicubi circulo in binis punctis E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub>, cum ipsa VB illum tangat ( num. 575 ). Si autem ducantur rectæ ME<sub>1m1</sub>, ME<sub>2m2</sub>, ipsæ determinabunt sectiones similes datæ Ellipsi; erit enim in iis latus transversum Mm ad rectum ME, ut MV ad MF, nimirum ut in data Sectione Conica latus transversum ad rectum. Quare si alter ex iis axibus Mm evaserit æqualis axi transverso datæ Ellipseos, sectio per ipsum ducta perpendicularis plano AVB exhibebit Ellipsim datam; si neuter, satis erit assumere in ipso latere AV aliam VM, quæ ad prius assumptam sit, ut est axis transversus datæ Ellipseos ad Mm<sub>1</sub>, Mm<sub>2</sub> prius inventas; & sectio per novum punctum M parallela ductæ per priorem Mm<sub>1</sub>, vel Mm<sub>2</sub> exhibebit quæsitam Ellipsim. Erit enim ( num. 555 ) priori sectioni similis, ac ejus axis transversus ad Mm prius inventam, ut nova VM ad priorem.

579. Quod si agatur ME<sub>3</sub> parallela VB, ea determinabit Parabolam, in qua si latus rectum non obvenierit æquale lateri recto datæ Parabolæ, eodem artificio mutata VM in eâ ratione, invenietur Parabola æqualis datæ.

580. Si demum acta diametro DOI, tangens per I occurrat lateri VA in H, & detur Hyperbola, in qua latus rectum principale ad axem transversum habeat rationem utcumque minorem, quam HM ad MV, su-

190 SECTIONUM CONICARUM

mat<sup>r</sup>  $Mf$  ad ipsam  $MV$  ad partes oppositas  $V$ ; sive  
 versus  $H$  in ratione ejus lateris recti principalis ad a-  
 xem transversum, & recta ex  $f$  parallela  $VB$  eodem  
 pacto determinabit binā puncta  $E_4, E_5$ ; ex quibus du-  
 ctæ binæ  $E_m$  determinabunt binas Sectiones similes  
 Hyperbolæ datæ, in quā si illa ratio lateris recti prin-  
 cipalis ad axem transversum fuerit eadem, ac  $HM$  ad  
 $MV$ , coeuntibus punctis  $E_4, E_5$  in  $I$ ; sectio per  $I$ ; &  
 $M$  ducta exhibebit Hyperbolam similem; si ratio fuerit  
 adhuc major, patet similem exhiberi non posse: Muta-  
 to igitur puncto  $M$ , ut prius, inveniatur quidem Hy-  
 perbola æqualis datæ in duplici inclinatione in primo  
 casu, unica in secundo, at in tertio inveniri nequa-  
 quam poterit.

§81. Porro quoniam ob tangentes  $MI, HM, \& VM,$   
 $VD$ , æquales, rectæ  $OH, OV$  secant bifariam angulos  
 $IOM, MOD$ ; angulus  $HOV$  erit æqualis binis  $IOH,$   
 $VOD$ , qui cum ipso constituunt binos rectos; adeoque  
 erit rectus, & angulus  $MOV$ , qui ob  $OMV$  rectum,  
 est complementum anguli  $MVO$ , erit complementum  
 $MOH$ , adeoque ipse  $MOH$  æqualis illi  $MVO$  dimidio  
 totius  $AVB$ . Cum igitur sint  $HM, MV$  tangentes angu-  
 lorum  $HOM, MOV$ , erit illa tangens, hæc cotangens  
 dimidii anguli  $AVB$ , & Hyperbolæ, quæ non pote-  
 runt secari ex dato cono recto, erunt eæ; in quibus la-  
 tus rectum principale ad transversum habet ratio-  
 nem majorem, quam tangens illius dimidii anguli,  
 ad cotangentem. Quoniam vero ob similitudinem trian-  
 gulorum rectangulorum  $HMO, OMV$ , est  $HM$  ad  
 $MO$ , ut  $MO$  ad  $MV$ , & est latus rectum principa-  
 le ad axem conjugatum, ut hic ad transversum; si  
 axis conjugatus habuerit ad transversum rationem ma-  
 jorem, æqualem, vel minorem respectu ejus, quam  
 $HM$  tangens dimidii anguli  $AVB$  ad radium  $MO$   
 habebit pariter latus rectum principale ad latus tran-  
 versum rationem majorem, æqualem, vel minorem  
 respectu ejus, quam habet tangens  $HM$  ad cotan-  
 gentem.

582. In cono autem scaleno si AVB in fig. 213, 214 referat sectionem per axem; quæ sit perpendicularis basi, eodem prorsus argumento haberi poterit quævis Ellipsis semper duplici inclinatione  $Mm_1$ ;  $Mm_3$ ; ac si concipiatur  $hi$  parallela lateri VB, quæ tangat in  $i$  arcum LD situm extra angulum AVB; & ratio axis transversi ad conjugatum fuerit minor ratione  $Mb$  ad MV; vel ei æqualis; poterit eadem illa Ellipsis erui ex eodem cono binis directionibus  $ME_2$ , hinc & inde ab  $i$ ; vel unica; qua E abeat in  $i$ : Poterit semper Parabola directione  $ME_4$  parallela lateri VB; tum succedunt omnia Hyperbolarum genera usque ad eam; cujus latus rectum principale ad transversum sit ut  $MH$  ad MV: Quod si AVB non referat sectionem basi perpendicularem; sed aliam quamcumque; definiti patiter poterunt limites rationis, quam habebit latus rectum cujuspiam alterius diametri ad suam diametrum; ita tamen; ut cum nec angulus V; nec inclinatio trianguli AVB ad basim variari possint, nisi intra certos limites; semper certus in quovis cono habeatur limes pro hyperbolis:

Coroll. II.

583. *Data quavis Sectione Conica inveniri possunt infiniti cono, ex quibus ea abscindi possit; qui tamen ad Hyperbolam æquilataram abscindendam habere debent in cono recto angulum ad verticem V rectum, vel acuto majorem.*

584. Nam quævis Ellipsis & Hyperbola abscindi possunt ex quovis cono: Data autem quavis Hyperbola, si supra quamvis rectam AB in fig. 212 fiant anguli VAB; VBA inter se æquales; & non minores eo; cuius cotangens ad radium est; ut ejus Hyperbolæ, axis conjugatus ad transversum; tum diametro AB describitur circulus in plano perpendiculari ad planum AVB & sumpto V pro vertice; ac eo circulo pro basi; fiat conus; ex eo semper abscindi poterit ejusmodi Hyperbola: Cum enim binii anguli VAB; VBA simul cum

## 192 SECTIONUM CONICARUM

AVB contineant binos rectos, singuli sunt complementa dimidii anguli AVB, & eorum cotangens erit hujus dimidii tangens. Quoniam vero tangens anguli femirecti æquatur radio (num. 49. Frigon.), & anguli minoris est minor, majoris major; ut æquilatera esse possit Hyperbola, debet dimidium anguli AVB non esse minus femirecto, adeoque is totus non esse acutus.

## SCHOLIUM II.

385. **A**Tque hoc pacto jam habentur præcipua eorum, quæ ad conorum sectiones pertinent, & notari facile potest affinitas, quam habent inter se, & cum recta; ac mutua transformatio in se invicem, & in rectas, ei similis, quam persecuti sumus in Scholio 2 post Coroll. 20 defin. 2. a num. 107. Concipiatur in fig. 212 punctum M immotum, dum punctum  $m$  primo abit in V, Ellipsis eo casu in infinitum attenuata, area evanescit, ac ejus perimenter abit utrinque in rectam MV. Inclinata Sectione versus D in  $Mm_1$ , habetur Ellipsis initio quidem tenuissima, & formæ admodum oblongæ existente ratione lateris recti  $ME_1$  ad transversum  $Mm_1$  admodum exigua, tum sensim pinguefcit, ac ubi  $m_1$  abit in D, æqualibus latere recto, & transverso, migrat in circulum: tum in  $Mm_2$  redit ad formam iterum oblongam, ac iterum decrefcit ratio lateris recti  $ME_2$  ad transversum  $Mm_2$  per omnes gradus in immensum, donec abeunte  $E_2$  in  $E_3$ , vertex  $m$  ita in infinitum recedat, ut nusquam jam sit, ac Ellipsis in Parabolam migret, nusquam in se redeuntem. Inclinato autem adhuc magis, utcumque parum, plano sectionis per  $E_4M$ , jam incipit vertex  $m_4$  apparere ex parte opposita V, initio quidem in immensa distantia ita, ut nulla sit distantia in se determinata ejusmodi, quæ cuiquam determinato puncto  $E_4$  non respondeat, qua proinde majores aliæ an-

ne non extiterint respondentes aliis punctis  $E_4$  adhuc propioribus puncto  $E_3$ : Parabola autem jam in Hyperbolam migrat binos habentem ramos utrinque in infinitum productos, in qua ratio lateris recti  $ME_4$  ad transversum  $Mm_4$  initio in immensum exigua sensim crescit dilatata Hyperbolæ forma, donec abeunte  $E_4$  in  $I$ , fiat maxima illa ratio; tum iterum eadem in  $E_5$  decrescit, & comprimuntur Hyperbolæ, ac demum evanescente  $ME_5$ ; & abeunte  $m_5$  in  $V$ , desinit Hyperbola in rectam, ab  $M$  versus  $A$ , &  $V$  ad partes oppositas in immensum productam.

586. Idem contingit in fig. 213, & 214 in cono scaleno cum hoc solo discrimine, quod ubi Ellipsis primo oblonga per  $Mm_1$  perpetuo pinguescit, ac abit in circulum in ipso appulsu  $m_1$  in fig. 213 ad  $D$ , in fig. 214 ad  $L$  dilatatur adhuc magis, facta  $Mm_2$  jam axe conjugato, tum iterum ad formam circularem redit abeunte  $m$  in fig. 213 in  $L$ , in fig. 214 in  $D$ , ac deinde oblongatur in immensum, dum in Parabolam desinat, ac ad Hyperbolam transeat primo quidem se veluti expandentem, tum iterum compressam, donec abeat in rectam. Ac in omnibus hisce casibus Ellipsis, ac Hyperbola, ubi in rectas desinunt, id præstant axe transverso finito, & latere recto evanescente, ac perimetro utrinque abeunte in axem, dum & axe excrecente in immensum, & latere recto finito, in Parabolam migrant. Post omnes Ellipsium, ac Hyperbolarum species adstringentium formam ita, ut ratio lateris recti ad transversum decrescat ultra quoscumque limites, bini sunt velut limites quidam, recta linea, & Parabola, quæ quodammodo velut ejusdem sunt ultimæ speciei, & ad alteram devenitur axe transverso finito, & latere recto evanescente, ad alteram finito latere recto, & axe transverso excrecente in infinitum. Utcumque parum quædam Ellipsis, & Hyperbola a recta distent, & formam adstringant, habent sectionem aliam, Parabola pariter proximam, majorem quidem,

## 194 SECTIONUM CONI CARUM

dem, sed formæ profus ejusdem, atque ipsi omnino similem,

587. Quod si manente directione sectionis, concipiatur punctum  $M$  accedere ad  $V$ , tam Ellipsis, quam Parabola, & Hyperbola, eandem retinent formam, juxta (num. 555), sed perpetuo decrescunt, donec abeunte  $M$  in  $V$  Ellipsis ut patet in fig. 208, 209 abeat in unicum punctum  $V$ , Parabola in fig. 210 in rectam  $VT$ , Hyperbola in fig. 211 in binas rectas  $VO$ ,  $VS$  utrinque in infinitum productas juxta num. 550.

588. Si manente basi, & plano sectionis, vertex  $V$  moveatur per rectam  $VT$ , ac desinat in  $T$ , Ellipsis quidem in fig. 208, 209, coeuntibus punctis  $M$ , definit in rectam perpendicularem rectæ  $CT$  consideratam ut duplicem interceptam tangentibus ex  $T$  ductis ad basin, abeunte superficie conii in omne illud spatium, quod eæ tangentibus utrinque in infinitum productæ continent. Parabola in fig. 210 definit in unicum simplicem rectam itidem perpendicularem  $CT$  indefinite productam hinc, & inde, abeunte conii superficie in totam aream basis hinc inde a tangente  $OS$  indefinite productam. Hyperbolæ in fig. 211 ramus uterque abit in eandem unicum rectam eodem modo in infinitum productam, & consideratam ut duplicem ita, ut in eam totam singuli abeant rami, abeunte pariter utraque conii superficie in planum basis indefinite productum.

589. Quod si punctum  $V$  recedat a basi in infinitum per eandem rectam ita, ut nusquam jam sit, conus quidem definit in cylindrum, at Ellipsis formam Ellipsis retinet, Parabolæ in fig. 210, ac Hyperbolæ in fig. 211 vertex  $V$  nusquam jam est, perimetrum vero abit in binas rectas parallelas, quæ sunt ipsa cylindri latera. Atque eodem pacto liceret plurimas alias transformationes contemplari. Quod vero ad cylindrum attinet, jam hinc inferri potest quamvis sectionem axi parallelam efficere in ejus superficies binas rectas, quamvis parallelam basi, vel in cylindro obliquo subcontrariam effi-

efficere circulum basi æqualem, quamvis aliam effi-  
cere Ellipsim. Sed ea, ut & pauca alia, quæ ad cy-  
lindri sectiones pertinent, libet porius per finitam Geo-  
metriam accurate demonstrare, quod utique præsta-  
ri poterit fere eadem profus methodo, quæ in cono  
pili sumus.

DEFINITIO IV.

390. **S**I recta Nn in fig. 215 utrinque indefinita sem-  
per parallela data cuiusdam rectæ posite extra  
planum dati circuli AB perpetuo percurrat ejusdem circuli  
peripheriam, superficiem, quam generat, dico Superficiem<sup>F. 215</sup>  
Cylindricam, solidum ea inclusum, dico Cylindrum,  
circulum ipsum Basim; rectam VCu per centrum basis  
ductam, & data illi rectæ parallellam dico Axem, quæ  
si fuerit perpendicularis plano basis, Cylindrum dico re-  
ctum, secus obliquum, rectam vero illam mobilem dico  
Cylindri Latus.

SCHOLIUM I.

391. **H**IC parite Cylindrum appellavi totum locum  
geometricum, qui natura sua in infinitum  
utrinque producit, licet plerunque Cylindri nomine de-  
signari solet hujusmodi Cylindri segmentum tantum-  
modo binis planis parallelis terminatum.

Coroll. I.

392. Cylindrus rectus generatur, si altero e binis op-  
positis rectanguli lateribus utrinque in infinitum produ-  
cto totum rectangulum circa latus alterum immotum con-  
vertatur.

393. Nam utrumvis e reliquis binis lateribus cum  
lateri immoto perpendicularare sit, describet (num. 30  
solid.) circulum perpendiculararem ipsi lateri immoto,  
quod proinde erit axis Cylindri, cujus ille circulus est  
basis.

198 SECTIONUM CONICARUM

Coroll. 2.

594. Si Cylindrus quivis secetur utcumque plano per axem ducto, vel axi parallelo; sectio in ejus superficie generabit binas rectas axi parallelas utrinque in infinitum productas.

595. Secabit enim basim in quadam recta  $AB$ ; ac si sectio transeat per axem in ipso plano sectionis duci poterunt per  $A$ , &  $B$  binæ rectæ  $Qq$ ,  $Nn$  parallelæ eidem axi, sin minus, intersectiones planorum  $VCA$ ,  $VCB$ , tum ipso sectionis plano erunt binæ rectæ  $Qq$ ,  $Nn$  transeuntes per  $A$ , &  $B$ , cum quibus debet congruere recta mobilis, quæ superficiem generat, ubi appellit ad puncta  $A$ ,  $B$ .

Coroll. 3.

596. Quævis sectio basi parallela erit circulus basis æqualis, cuius centrum in ipso occurfu axis cum eadem sectione, ac Cylindri latera binis planis parallelis intercepta erunt æqualia inter se.

597. Si enim sectio basi parallela occurrat axi in  $c$ ; plano autem  $VCB$  basis in recta  $CB$ , ei vero sectioni in recta  $cb$ , erunt  $CB$ ,  $cb$  parallelæ ( num. 9. solid. ), adeoque  $CBbc$  parallelogrammum, cujus latera opposita æqualia, & proinde  $cb$  semper æqualis eidem radio circuli  $CB$ , ac pariter &  $Bb$  semper æqualis eidem  $Cc$ .

Coroll. 4.

598. Quævis sectio parallela basi, pro basi assumi poterit.

599. Patet ex eo, quod sit circulus, & recta mobilis tam ipsum, quam basim perpetuo conradat.

Coroll. 5.

600. In Cylindro obliquo alia quoque sectio basi non parallela, que subcontraria dicitur, est circulus.

601. Si enim in fig. 216 per axem  $VC$  ducatur planum  $F.216$  basis plano perpendiculare, secans basim in recta  $AB$ , superficiem Cylindri in rectis  $Qq$ ,  $Nn$ , angulorum  $qAB$ ,  $nBA$  alter erit acutus, ut  $qAB$ , alter obtusus, ut  $nBA$ . Quare si e quovis puncto  $M$



sectæ  $Qq$  ducta in eodem plano recta  $MD$  parallela diametro basis  $AB$ , cui & æqualis erit, angulus  $AMm$  equalis angulo  $BDM$ , occurrente ea recta lateri  $Nn$  in  $m$ , erit &  $MmD$  æqualis ipsi  $MDm$ , cum æquetur alterno  $AMm$ , & triangulum  $mMD$  isosceles. Porro si Cylindrus secetur per  $Mm$  plano perpendiculari ipsi  $AMDB$ , ea sectio dicetur subcontraria, & erit circulus basi æqualis;

602. Nam per quodvis punctum  $R$  rectæ  $Mm$  facta sectione  $aPbp$  parallela basi, quæ sectioni priori occurrat in  $Pp$ , plano  $MABD$  in  $ab$ , erit ea (num. 596) circulus, cujus centrum in axe, adeoque diameter ipsa  $ab$ , eritque  $PRp$  intersectio binorum planorum perpendicularium eidem plano  $MABm$  perpendicularis ipsi toti, adeoque perpendicularis  $Mm$ , &  $ab$ , ac proinde chorda  $Pp$  bifariam secta a diametro  $ab$  in  $R$ , & quadratum  $PR$  æquale rectangulo  $aRb$ , nimirum, cum ob triangula  $MRA$ ,  $mRb$  similia triangula  $DMm$ , adeoque isosceles, sit &  $MR$  æqualis  $Ra$ , &  $mR$  æqualis  $Rb$ , rectangulo  $MRm$ , quibus si secta  $Mm$  bifariam in  $c$  addatur quadratum  $cR$ , erunt binâ quadrata  $cR$ ,  $RP$  æqualia quadrato  $cR$ , & rectangulo  $MRm$ , nempe quadratum  $cP$ , quod ob angulum ad  $R$  rectum æquatur illis, æquale quadrato  $CM$ , quod ob  $Mm$  sectam bifariam in  $c$  æquatur his, & punctum  $P$  ad circulum radio  $cM$  descriptum.

Coroll. 6.

603. Quævis alia sectio erit Ellipsis habens centrum in ipso Cylindri axe.

604. Nam ea non erit parallela axi, quem proinde secabit alicubi in fig. 217 in  $c$ , ut pariter & omnia Gylindri latera, ac totam ejus perimetrum alicubi secabit in  $MPmp$ . Nec erit parallela basi, cujus plano proinde alicubi occurreret in recta quadam  $OS$ , ad quam ducto perpendiculari  $CT$  ex centro basis, & per ipsum ac per axem ducto plano, id basim secabis alicubi in  $AB$ , superficiem Cylindri in rectis  $QAq$ ,  $NBn$ , planum Sectionis in  $Mm$ , jacente  $Mm$  intra  
Cy-

198 SECTIONUM CONICARUM.

Cylindrum . Ductis in eo plano MD, *md* parallelis AB, adeoque & ipsi, & inter se æqualibus, per quodvis punctum R recte Mm fiat sectio parallela basi, quæ erit circulus ( num. 596 ), ac plano AMmB occurret in recta *ab* sua diametro, plano autem MPmp in recta Pp, quæ erit perpendicularis ipsi *ab*, cum rectæ Pp, *ab* debeant esse parallelæ rectis CT, OS intersectionibus planorum parallelorum cum iisdem planis, & CT, OS sibi invicem perpendiculares sint per constructionem.

605. Erit igitur Pp bifariam secta in R, & quadratum PR æquale rectangulo *aRb*. Est autem *aR* ad MR, ut *md*, sive MD ad Mm, & *Rb* ad Rm, ut MD ad Mm, adeoque rectangulum *aRb*, sive quadratum RP ad rectangulum MRm in ratione constanti quadrati MD ad quadratum Mm. Quamobrem erit MPmp Ellipsis, cuius diameter altera Mm, adeoque ( num. 351 ) ejus conjugata MD, quæ Ellipsi in circulum non abibit, nisi Pp sit perpendicularis ipsi Mm, quod non accidet, nisi planum AMmB sit perpendiculare plano *aPbp*, sive plano basis, & præterea Mm sit æqualis DM, nimirum nisi sectio sit subcontraria basi. Pater autem Mm secari bifariam ab Vu, ut AB, adeoque centrum esse in axe.

Coroll. 7.

606. In Cylindro recto semper Mm erit axis transversus; in cylindro vero obliquo si planum AMmB fuerit perpendiculare plano basis, erit Mm pariter axis, sed erit conjugatus, vel transversus, prout sectio jacuerit inter sectionem basi parallelam, & subcontrariam, vel extra eos limites.

607. Nam quotiescumque fuerit planum AMmB perpendiculare plano basis, quod in Cylindro recto semper continget; erit OS perpendicularis MT, adeoque ordinatæ perpendiculares diametro Mm, quæ proinde erit axis.

608. Porro in Cylindro recto angulus MDm erit semper rectus, & Mm major; quam MD, adeoque  
axis

axis transversus. In Cylindro scaleno  $Mm$  evadet minima, ubi fuerit perpendicularis lateri  $BD$ , tum in recessu a perpendiculari hinc, & inde æque perpetuo crescet, donec deveniat hinc ad  $MD$  parallelam basi, inde ad sectionem subcontrariam, ac deinde perget utrinque crescere, adeoque erit minor vel major, quam  $MD$ , prout jacuerit  $MD$ , & sectionem subcontrariam, vel extra eos limites. Coroll. 8.

609. *E quovis Cylindro potest secari Ellipsis cujuscunque speciei, sed in Cylindro recto semper ejus axis conjugatus debet esse equalis diametro basis, ut etiam in Cylindro obliquo quotiescumque fuerit sectio perpendicularis plano per axem, quod perpendicularare sit plano basis, & jacuerit extra binas sectiones circulares; si vero jacuerit intra, axis transversus erit semper diametro basis equalis.*

610. Nam si fiat in Cylindro recto quævis sectio per axem, & in obliquo sectio per axem perpendicularis basi, quæ sit  $MABD$ , in qua ducatur e quovis puncto  $M$  recta  $MD$  parallela diametro basis, tum capiatur recta, quæ ad ipsam sit, ut est axis transversus ad conjugatum in data Ellipsi, & centro  $M$ , eo intervallo necessario invenietur in recta  $BD$  ex utralibet parte puncti  $D$ , punctum  $m$ , ad quod ducta  $Mm$ ; tum secto Cylindro plano per  $Mm$  perpendiculari ad  $MABm$  habebitur Ellipsis, cujus axis transversus  $Mm$  ad conjugatum  $MD$  erit, ut in data Ellipsi, adeoque erit ipsi similis.

611. In Cylindro autem scaleno, si axis conjugatus non sit ad transversum in ratione minori, quam sit ea sinus anguli  $MAB$  ad radium, poterit etiam datæ Ellipsi similis abscindi Ellipsis etiam plano ducto inter binas circulares. Nam ubi  $Mm$  sit perpendicularis, adeoque minima, erit ad  $MD$ , ut sinus anguli  $MDm$  five  $MAB$  oppositi in parallelogrammo ad radium, ac centro  $M$  intervallo rectæ cujuscvis minoris quam sit  $MD$ , sed non minoris quam sit id perpendicularum, invenietur vel unica  $Mm$  cum eo perpendicularo congruens

300 SECTIONUM CONICARUM.

gruens, vel duplex hinc; & inde, quæ exhibebit axem conjugatum minorem transverso MD in ea ratione, in qua est in data Ellipsi. Verum semper in primo casu MD erit axis conjugatus; in secundo axis transversus.

SCHOLIUM II.

612. SI in Cylindro obliquo planum MAB<sup>m</sup> sit obliquum ad planum basis; adhuc & axis uterque haberi poterit inæqualis diametro basis; erit enim tum M<sup>m</sup> diameter quædam, & MD ejus conjugata, quarum utraque cum debeat esse (num. 379.) minor axe transverso, major conjugato, habebitur axis conjugatus minor ipsa MD, transversus major.

613. Quod si describatur circulus, qui rectam AM contingat in M, & transeat per D, qui quidem occurreret diametro M<sup>m</sup> in E eodem pacto, quo in cono demonstratum est (num. 566, 568) demonstrabitur hic, fore ME latus rectum diametri M<sup>m</sup>, ut & illud patet sectionem maxime inclinam ad axem Cylindri esse maxime oblongam, tum crescente angulo paulatim accedere ad circuli formam, & eam assequi demum semper in Cylindro recto in usica positione perpendiculari ad axem, in obliquo vero si planum AM<sup>m</sup>B sit basi perpendiculare, eam quidem primum assequi, tum adhuc magis contrahi, & axem transversum mutare in conjugatum, recedendo a forma circulari semper magis, donec perpendicularis evadat, tum incipiat iterum ad eam formam accedere, ipsi iterum congruat ac iterum per eòsdem gradus oblongetur in infinitum.

614. Possent etiam inquiri in mutationes omnes, quæ accidunt, ubi planum AMDB est inclinatum ad planum basis; sed quoniam ejusmodi perquisitio nec usus habet ferme ullos & prolixior est aliquanto, eam hic omittendam duxi, ut & aliam ei similem in cono scaleno: ac potius gradum faciam ad considerandas

sphæ-

spheroides, ac conoides, quas Conicę sectiones generant circa axem revolutę, earumque sectiones usui futurę sæpe, ubi illud mirum ex *Ellipsoide* secari non posse nisi *circulum*, & *Ellipsim* non magis a circulari forma recedentem, quam recedat *Ellipsis* genitrix; & *Paraboloide* posse *circulum*, *Ellipsim*, & *Parabolam*: ex *Hyperboloide* *circulum*, *Ellipsim*, *Parabolam*, & *Hyperbolam* non magis a forma *Parabola* recedentem, quam ipsa recedat *Hyperbola* genitrix.

DEFINITIO V.

615. **S**I circa axem utrumvis convertatur *Ellipsis*, solidum ea conversione ortum dico *Ellipsoidem*, seu *Spheroidem Oblongam*, vel *Oblatam*, prout gyretur circa axem transversum, vel conjugatum: Si convertatur circa suam axem *Parabola*, dico *Paraboloidem*, vel *Conoidem Parabolicam*, si *Hyperbola* circa axem transversum, dico *Hyperboloidem*, sive *Conoidem Hyperbolicam*; axem autem illum conversionis dico *Axem ipsius Spheroidis, vel Conoidis, ac axis vertices Polos*.

Coroll. I.

616.  *Sectio Spheroidis, vel Conoidis cujuscvis per axem equatur prorsus figura genitrici, & sectio axi perpendicularis est circulus habens centrum in ipso axe.*

617. Si enim in fig. 218 sit Sphærois Elliptica, in F. 218 fig. 219 Conois Parabolica, in fig. 220 Conois in Hyperbolica; & secetur plano per axem; ubi figura genitrix ad id planum deveniet, cum ea sectione congruet, adeoque ei æqualis esse debet.

618. Si autem secetur plano  $PBp$  perpendiculari ad axem, cui occurrat in  $R$ , & ducantur bina quævis plana per axem  $MRP$ ,  $MRB$ , quæ ipsi sectioni occurrant in  $RP$ ,  $RB$ , anguli  $MRP$ ,  $MRB$  erunt recti, & proinde ubi figura genitrix ad ea plana deveniet, eadem semiordinata ipsius primum congruet cum  $RP$ , tum cum  $RB$ , adeoque semper quævis  $RB$  eadem

dem  $RP$  æqualis est; & punctum  $B$  est ad circulum radio  $RB$ .

## SCHOLIUM I.

619. **S**atis patet per Theoremata esse commune cuiusvis solidogenito rotatione figuræ planæ cujuscumque circa axem quemvis positum in eodem plano; nam demonstratio non pendet a natura Sectionum Conicarum.

620. Ex hoc primo Corollario etiam pauca quedam; quæ pertinent ad solidorum ejusmodi relationem ad se invicem; ac ad dimensionem Sphæroidum Ellipticarum summo futura usui; quæ facile perspicuntur; & e simplici Cavalleriana methodo consequuntur: Reliqua suo loco aptius demonstrabuntur infinitesimali methodo, ac calculo integrali: Prius tamen aliud Theorema sponte fluens pro Ellipsoidibus deducam.

### Coroll. 2.

621. *Circulus omnium maximus est in Sphæroide Elliptica is, qui habetur sectione per centrum ducta, ac æque distat ab utroque polo, qui etiam ejus equator dicitur; reliqui quo magis hinc; & inde ab eo distant; & ad polum propiorem accedunt; eo minores sunt; ac bini hinc, & inde æque distantes æquales sunt.*

622. Nam omnium ejusmodi circulorum diametri sunt rectæ  $Pp$  ordinatæ axi, quæ in quavis Ellipsi eo minores sunt, quo a centro distant magis (num. 83), adeoque earum maxima est illa, quæ per centrum transit, & binæ; quæ hinc, & inde æque ab ipso centro distant æquales sunt per n. 83.

### Coroll. 3.

623. *Si plures Ellipsoïdes; vel plures Paraboloides; vel plures Hyperboloides æqualem habentes axem inter se conferantur; earum segmenta planis æque a vertice distantibus abscissa; ac Ellipsoïdes tot. 2 annuncra-*

*In Ellipsoidibus etiam sphaera, erunt inter se ut earum latera recta pertinentia ad eundem axem, sive in Ellipsoidibus, ac Hyperboloidibus ut quadrata axium reliquorum, nimirum in Sphaeroidibus Ellipticis, ut quadrata diametrorum aequatoris.*

624. Nam quodvis planum circulare  $PBp$  erit, ut quadratum radii  $RP$ ; Erit autem id quadratum semper in quavis Paraboloidae aequale rectangulo sub abscissa  $MR$ , & latere recto (num. 351); at in Ellipsoidibus; & Hyperboloidibus ad rectangulum  $MRm$  (num. 351) semper ut latus rectum ad transversum, sive in Ellipsoidibus, ac Hyperboloidibus, ut quadratum axis alterius ad quadratum axis  $Mm$ . Quare si assumantur abscissae  $MR$  aequales, ac praeterea in Ellipsoidibus; & Hyperboloidibus sint axes  $Mm$  aequales; adeoque aequales &  $Rm$ ; & aequalia rectangula  $MRm$ ; erunt ubique quadrata  $RP$ , ut latera recta, & in Ellipsoidibus inter se comparatis, ac Hyperboloidibus inter se; ut quadrata axium reliquorum, circa quos non fit conversio, qui axes in Sphaeroidibus Ellipticis sunt diametri aequatoris: cumque ea ratio habeatur ubique, utcumque mutato puncto  $R$ , erunt in eadem constanti ratione tota solida ab ejusmodi circularibus planis genita; dum  $R$  excurrit per totum segmentum axis  $MR$ , & in Ellipsoide per totum axem  $Mm$ .

SCHOLIUM II.

625. **H**Oc etiam Theorema generale est solidis omnibus genitis rotatione circa eundem axem a figuris, quarum semiordinatae  $RP$  constantem semper rationem habeant, ut patet ex ipsa demonstratione.

Coroll. 4.

626. *Sphaeroidis Elliptica est ad sphaeram eodem axe descriptam, ut quadratum axis ipsius ad quadratum diametri aequatoris, & sphaeroides omnes sunt inter se in ratione composita ex simplici axis, & duplicata aequatoris.*

204 SECTIONUM CONICARUM

627. Nam sphaerę eodem axe descriptę diameter æquatoris est axis ille idem . Si autem binę sphaeroides diversos axes habeant ; erit prima ad sphaeram eodem axe descriptam in ratione duplicata diametri æquatoris primę ad ejus axem , hæc sphaera ad sphaeram habentem axem communem cum secunda in ratione triplicata axis primę ad axem secundę , hæc secunda sphaera ad secundam sphaeroidem in ratione duplicata axis secundę ad diametrum æquatoris ejusdem . Collectis rationibus elisa ratione duplicata directa , ac reciproca axis primę ad axem secundę , habetur ratio composita ex simplici axis primę ad axem secundę , & duplicata diametri æquatoris illius ad diametrum hujus .

Coroll. 5.

628. Sphaeris oblonga , ac oblata ab eadem Ellipse genita sunt medię geometricę proportionales inter sphaeram inscriptam , & circumscriptam .

629. Nam inscripta habebit pro axe axem conjugatum Ellipseos, sive axem sphaeroidis oblataę, circumscripta axem transversum, sive axem oblongę . Quare erit sphaera inscripta ad sphaeroidem oblataam, ut quadratum transversi, & pariter sphaeris oblonga ad sphaeram circumscriptam, ut idem quadratum axis conjugati ad quadratum transversi . Erit igitur sphaera inscripta ad sphaeroidem oblataam, ut oblonga ad circumscriptam, adeoque alternando sphaera inscripta ad oblongam, ut oblata ad circumscriptam . Porro est etiam sphaeris oblonga ad oblataam in ratione composita ex simplici axis transversi ad conjugatum, & duplicata conjugati ad transversum, adeoque in ratione simplici conjugati ad transversum ; in qua ratione duplicata cum sit sphaera inscripta ad sphaeroidem oblataam, erit oblonga media inter inscriptam, & oblataam ; adeoque sphaera inscripta, sphaeris oblonga, sphaeris oblata, sphaera circumscripta sunt continue proportionales .

Coroll. 6.

630. Sphaera sphaeroidi oblonga equalis habet pro diametro primam & binis mediis geometricę continue proportio-



nonnullis inter axem conjugatum Ellipseos genitricis, & transversum, spheroidi vero oblata secundam.

631. Si enim concipiantur binę medię continue proportionales inter axem conjugatum Ellipseos genitricis, sive diametrum spherę inscriptę, & axem transversum, sive diametrum spherę circumscriptę, quatuor spherę, nimirum inscripta habens pro diametro illum axem conjugatum, spherę habens pro diametro primam & binis mediis, spherę habens pro diametro secundam, & circumscripta; erunt & ipsę continue proportionales, cum nimirum sint in ratione triplicata diametrorum proportionalium. Quare cum etiam spherę inscripta, spherę oblonga, spherę oblata, & spherę circumscripta sint continue proportionales, erit spherę oblonga æqualis spherę habenti pro diametro primam, oblata secundam ex illis binis mediis continue proportionalibus,

S C H O L I U M III.

632. **H**is demonstratis pergendum jam ad reliquas Spheroidum, & Conoidum sectiones, quę aequę facile determinantur.

Coroll 7.

633. *Quęvis sectio sive Spheroidis, sive Conoidis non perpendicularis axi est Sectio Conica, in Ellipsoide semper Ellipsis, in Paraboloidē Ellipsis, vel Parabola, prout sectio fuerit obliqua axi, vel ei parallela; in Hyperboloidē Ellipsis, Parabola, vel Hyperbola, prout sectionis planum inclinabitur ad axem in angulo majori, æquali, vel minori respectu ejus, quo asymptotus utraq; ad ipsum inclinatur.*

634. Referat enim in fig. 221. HMI frustum cujusvis Spheroidis, vel Hyperboloidis, & in fig. 222 HMI, F231  
 cui pertinent ad binos ramos oppositos, & plano 222  
 sectionis cujusvis PBP obliquę ad axem, ducatur per axem ipsum perpendicularare ( num. 74 solid. ) planum HMI, quod excidet Ellipsim, Parabolam, vel Hyperbolam genitrici similem ( num. 616 ), & occurret

## 206 SECTIONUM CONICARUM

alicubi sectioni priori in recta aliqua  $Pp$ , quæ nusquam erit perpendicularis axi; nam si ipsa esset axi perpendicularis, totum planum  $PBp$  esset eidem axi perpendicularare ( num. 66. solid. ) Ipsa autem  $Pp$  ( num. 149 ) Ellipsi occurreret semper in binis punctis  $P$ ;  $p$ , Parabolæ occurreret semper in binis; præter casum, quo planum sit axi parallelum; quo casu altero puncto  $p$  in infinitum recedente; ita ut nusquam jam sit; habebitur unicus occurfus  $P$ . In Hyperbola demum occurreret bis eidem ramo, vel semel; altera interfectione ita in infinitum abetente, ut nusquam jam sit; vel occurreret ramis oppositis; prout inclinabitur ad directricem in angulo minore, equali, vel majore respectu anguli æqualitatis nimirum, cum in ipso angulo equalitatis inclinentur asymptoti ( num. 149 ), prout ad axem ipsi directrici perpendiculararem inclinabuntur in angulo majore, quam asymptoti, vel æquali, vel minore.

635. Porro per quodvis punctum  $R$  rectæ  $Pp$  ducto plano parallelo basi; sectio erit circulus habens centrum in axe ( num. 616 ), adeoque in ipsa  $P'Rp'$  interfectione figuræ genitricis  $HMI$ , & ejus interfectio  $BRb$  cum plano prioris sectionis erit perpendicularis toti plano  $HMI$ , adeoque tam diametro circuli  $P'p'$ , quam rectæ  $Pp$ , & proinde secta bifariam in  $R$ , & quadratum  $BR$  æquale rectangulo  $P'Rp'$ . Ipsum autem rectangulum  $P'Rp'$  in casibus, in quibus  $p$  non recedit in infinitum, ad rectangulum  $PRp$  habet rationem datam ( num. 299 ), manente nimirum  $Pp$ , & directione chordarum  $Pp'$ ; in casibus vero, in quibus  $p$  nusquam jam est, nimirum ubi  $PR$  est parallela axi in Parabolâ, vel asymptoto utrilibet in Hyperbolâ, erit rectangulum  $P'Rp'$ , ut recta  $PR$ . Quare semper  $Pp'$  erit diameter sectionis  $BPb$ , chordas omnes  $Bb$  eandem directionem habentes, eidem nimirum plano  $HMI$  perpendiculares secans bifariam, idque ita, ut in postremis hisce casibus, quorum alter ad Parabolam pertinet, alter ad Hyperbolam, sint quadrata  $BR$ , ut abscissæ  $PR$ , & proinde ( num. 440 )

sectio ipsa Parabola, in cæteris omnibus quadraturis BR sit ad rectangulum PRp in data ratione, adeoque (num; 439.) sectio Ellipsis, vel Hyperbola, prout R jacuerit, ut in fig. 221. inter vertices P, p, quod semper accidit in Ellipsoide, in Paraboloides semper, præter casum, in quo sectio axi sit perpendicularis, in Hyperboloides semper, ubi inclinatio ad axem habeatur in angulo majori, quam ad ipsum asymptoti inclinentur, vel jacuerit ipsum R extra vertices P, p, ut in fig. 222, quod continget, ubi angulus plani sectionis cum axe fuerit minor.

SCHOLIUM IV.

636. **H**ic addemus dimensionem solidi parabolici, quæ admodum facile simplicis Cavalleriana methodo obtinetur,

Coroll. 8.

637. Segmentum Conoidis Parabolica PVp in fig. 223. abscissum per quamvis Ellipsim Pp æquatur dimidio cylindraceo circumscripto, cujus basis Ellipsis eadem, tota generans PA æqualis, & parallela recta RV, quæ ex centro Ellipseos ducitur parallela axi Parabola.

638. Si enim ducatur recta Vp, tum quævis sectio parallela, quæ cylindraceum secabit in Ellipsi Mm æquali, & simili Ellipsi Pp, & Conoidem Parabolicam in Ellipsi Nn pariter simili ipsi Pp, ac rectas Vp, VR in aliquibus punctis I, O, eritque Ellipsis Pp, sive Mm ad Ellipsim Nn, ut quadratum Rp ad quadratum On, sive (num. 351) ut VR ad VO, nimirum ut Rp, sive Om ad OI. Igitur cum Om sit constantis rectæ OI, Om exponit areas Ellipsium Nn, Mm, & solidum Parabolicum genitum ab Ellipsi nN ad cylindraceum genitum ab Ellipsi Mm erit, ut area descripta ab OI, nimirum triangulum RVp, ad aream descriptam ab Mm, nimirum parallelogrammum RVap, sive ut 1 ad 2.

108 SECTIONUM CONICARUM

Coroll. 9.

639. *Conoides abscissa planis parallelis erunt, ut quadrata abscissarum VR,*

640. Erunt enim ut bases, & altitudines. Bases erunt ut quadrata Rp, sive ut VR, altitudines iterum ut VR, quare erunt ut quadrata ipsarum VR.

SCHOLIUM V.

641. **J** Am persequamur alia consecutaria Corollarii septimi.

Coroll. 10.

642. *Recta RP erit semper axis sectionis, & in Ellipsoide quidem oblata axis conjugatus, in oblonga, & in caeteris omnibus solidis axis transversus,*

643. Patet primum ex eo, quod diameter PR est perpendicularis suis ordinatis Bb, adeoque axis. Ubi autem chorda Pp Hyperbolæ genitricis terminatur ad binos ramos oppositos, ut in fig. 222, patet ipsam fore axem transversum, cum sectionis perimetro occurrat in ipsius punctis P, p. At in fig. 221 erit in casu Ellipsoidis & Hyperboloidis quadratum axis Pp ad quadratum axis alterius, ut rectangulum PRp ad quadratum BR, sive ad rectangulum P'Rp', nimirum ( num. 315 ) ut quadratum diametri curvæ genitricis parallelæ Pp ad quadratum diametri parallelæ chordæ Pp', sive ad quadratum axis transversi in spheroidæ oblata, conjugati in oblonga, & Conoide Hyperbolica. Porro quævis diameter in Ellipsi est ( num. 379 ) minor axe transverso, major conjugato, Quare in spheroidæ oblata erit axis Pp minor altero axe, in oblonga major, adeoque ibi conjugatus, hic transversus. At in Hyperbolæ diameter parallelæ chordæ Pp erit ( n. 149, 212 ) semper diameter secundaria, quæ ( num. 246 ) major axe altero conjugato, adeoque & axis Pp major axe altero, At in Parabola rectangulum PRp ad rectangulum P'Rp, sive quadratum BR, erit ( n. 361 ), ut latus rectum diametri habentis pro ordinata chordam Pp, ad latus

latus rectum axis habentis pro ordinata chordam  $Pp'$  ; cumque quodvis latus rectum sit ( num. 359 ) majus latere recto principali in Parabola , erit semper rectangulum  $PRp'$  majus quadrato  $RB$  , & proinde  $Pp'$  axis transversus :

Coroll. II.

644. Ex quavis Spheroidē abscondi poterit Ellipsis cujuscumque speciei , in qua ratio axium ab equalitate non magis distet , quam in Ellipsi genitrice ; & intra eas species cujuscvis magnitudinis habentis axem transversum in oblata , conjugatum in oblonga non majorem axe ibi transverso , hic conjugato Ellipseos generantis . Ex quavis Paraboloidē quavis Ellipsis & specie , & magnitudine data , sed Parabola soli genitrici equalis : eā quavis Hyperboloidē quavis Ellipsis & specie , & magnitudine , ac quavis Parabola , Hyperbola utro cujuscumque speciei , in qua axis transversus ad conjugatum non habeat rationem minorem , quam in genitrice , intra eas vero species quacumque etiam magnitudine data , in qua axis conjugatus non sit minor axe conjugato genitricis .

645. Nam pro Ellipsoide factō centro in centro Ellipseos genitricis in C in fig. 224 , quæ exhibit spheroidem oblongam , vel 225 , quæ exhibit oblatam , intervallo quovis nec minore , nec majore utroque semiaxe  $CM$  ,  $CQ$  inventi poterit punctum S ; & sectio per  $SC$  habebit pro altero axe  $Ss$  , pro altero  $Qq$  , eritque  $Ss$  in priore casu axis transversus , in secundo conjugatus ; ac sectiones  $Pp'$  ductæ per chordas quavis  $Pp'$  parallelas  $Ss$  erunt similes inter se , cum in fig. 221 , & 222 manente directione plani  $BPb$  , maneat directio rectæ  $Pp'$  , & proinde ( num. 299 ) ratio rectanguli  $PRp'$  ad  $P'Rp'$  , sive ad quadratum  $BR$  quæ ( num. 351 ) est ratio duplicata axium , adeoque erunt similes sectioni ductæ per  $Ss$  , & habebunt rationem axium  $Ss$  ad  $Qq$  . Sed axis  $Pp'$  erit minor axe  $Ss$  ( num. 83 ) . Data igitur quavis specie Ellipseos , in qua ratio axium non magis distet ab equalitate ,

219 SECTIONUM CONICARUM

quam in Ellipsi genitrice, abscindi poterit ejus speciei Ellipsis, & intra eas species haberi non poterit Ellipsis, cujus ibi axis transversus, hic conjugatus sit major axe  $Qq$  ibi conjugato, hic transverso Ellipseos genitricis; quæ æqualem habeat, abscindetur per  $Ss$ ; quæ minorem, abscindetur, si facta  $CV$  æquali semiaxi Ellipseos datæ ibi conjugato, hic transverso, ducatur  $VP$  semiordinata diametri  $Ss$ , tum  $Pp$  parallela axi ipsi  $Ss$ , quæ a diametro conjugata ipsius  $Ss$ , & parallela  $VP$  ita secabitur bifariam in  $R$ , ut sit  $PR$  æqualis  $VC$ , adeoque  $Pp$  axis novæ sectionis duplus  $CV$ , & æqualis axi dato.

F226 646. Pro Paraboloide si  $AB$  in fig. 226 sit directrix Parabolæ genitricis, cui axis occurrat in  $A$ , & sumatur  $AD$  ad  $AM$ , ut est quadratum axis transversæ datæ Ellipseos ad quadratum conjugati, ducaturque  $DI$  perpendicularis axi, donec occurrat ipsi Parabolæ in  $I$ , quævis sectio facta per chordam  $Ss$  ordinatam diametro ductæ per  $I$  exhibebit Ellipsim datæ similem. Si enim ea diameter directrici occurrat in  $B$ , erit ejus latus rectum quadruplum  $IB$  (num. 351), ad latus rectum principale quadruplum  $AM$ , nimirum in fig. 221. rectangulum  $PRp$  ad rectangulum  $P'Rp'$ ; adeoque hic quadratum axis transversæ  $Ss$  Ellipseos effectæ ad quadratum axis conjugati, ut  $BI$ , sive  $AD$  ad  $AM$ , nimirum in ratione data, adeoque Ellipsis ejusmodi similis datæ. Quod si ipsa  $Ss$  suæ diametro occurrat in  $C$ , & capta  $CV$  versus  $S$  æquali semiaxi transverso datæ Ellipseos, sive ea sit minor quam  $CS$ , sive utcumque major, agatur  $VP$  parallela  $CB$ , donec occurrat Parabolæ in  $P$  tum chorda  $PRp$  parallela  $Ss$ , erit ipsa dupla  $PR$ , sive  $VC$ , nimirum æqualis axi transverso datæ Ellipseos, adeoque Ellipsis sectione genitricis equalis datæ.

647. At si  $PR$  in fig. 221 evadat in Paraboloide parallela axi, abeunte  $p$  in infinitum ita, ut nusquam jam sit, erit rectangulum  $P'Rp'$ , sive quadratum  $BR$  æquale rectangulo sub  $RP$ , & parametro diametri cu-

ius  $Pp'$  ordinata, nempe parametro axis, velleteri recto principali Parabolę genitricis. Quare & ejusmodi sectio, quę Parabola erit, habebit idem latus rectum principale, quod Parabola genitricis, & Ellipsis quidem quęvis poterit sectione Paraboloidis obtineri, sive detur specie tantum, sive magnitudine, sed Parabolę omnes inde exsecrę erunt genitrici equales.

648. Proq Hyperboloide sit Hyperbolę genitricis axis transversus  $Mm$  in fig. 227, conjugatus  $Qq$ , & centro  $C$  intervallo rectę, quę ad semiaxem conjugatum  $CQ$  sit, ut axis transversus datę Ellipseos ad conjugatum, inveniatur in Hyperbola conjugata punctum  $S$  (quod semper poterit tum hinc, tum inde a  $Q$ , cum axis transversus sit major conjugato in quavis Ellipsi, & omnium semidiametrorum conjugatarum minimus sit in Hyperbola semiaxis  $CQ$ ); ducta  $SC$ , per quamvis chordam  $PRp$  ipsi parallelam, habebitur Ellipsis datę similis, cujus nimirum axis conjugatus ad transversum erit, ut  $Qq$  ad  $Ss$ , ac assumpta  $CV$  versus  $S$  equali semiaxi transverso datę Ellipseos; ductaque  $VP$  parallela diametro  $CI$  conjugatę ipsius  $SC$ , tum chorda  $PRp$  parallela  $SC$  habebitur Ellipsis æqualis datę, ut prius, cujus nimirum axis transversus equabitur rectę  $Pp$ .

649. Quod si jam quæratur ibidem Hyperbola datę similis; satis erit centro  $C$  intervallo rectę, quę ad  $CQ$  sit, ut est axis transversus datę Hyperbolę ad conjugatum invenire in Hyperbola  $PM$  punctum  $I$ , quod solum poterit, si ea ratio non sit minor ratione  $Mm$  ad  $Qq$ ; nam  $CM$  est minima omnium  $CI$ . Ducta vero quavis  $Pp'$  parallela  $Ri$ , sectio per ipsam erit similis datę Hyperbolę, cum debeat habere axem transversum ad conjugatum, ut est  $Ii$  ad  $Qq$ . Porro quęvis  $Pp'$  est major, quam  $Ii$  (num. 83, & 357), adeoque sectionis per quamvis  $Pp'$  ductę, axis conjugatus erit major, quam  $Qq$ , ductę autem per  $Ii$  erit æqualis, adeoque nulla Hyperbola exsecari inde poterit, cujus axis conjugatus sit minor axe conjugato  $Qq$  Hyperbolę genitricis, cui si æqualis sit sectio per  $Ii$ , rem

212 SECTIONUM CONICARUM

absolvat, si major utcumque, capta CR in CI producta  
 æquali semiaxi transverso dato, tum ducta Pp' parallela  
 li, quæ erit dupla CR, adeoque æqualis axi dato, sec-  
 tio per ipsam erit similis, & æqualis datæ Hyperbolæ.

650. Demum pro parabolis exsecandis ex Hyperboloi-  
 de, abeunte in fig. 221 p ultra quoscumque limites  
 ita, ut nusquam jam sit, erit latus rectum Parabolæ  
 tertium post PR, & RB, sive quartum post PR, RP',  
 Rp'. Hinc si in fig. 228. CD sit asymptotus, ad quam  
 ducatur per focum F, secta FD parallela directrici  
 AB, occurrrens Hyperbolæ genitrici in V, u, quæ erit  
 ( num. 54 ) ejus latus rectum principale, tum sumat-  
 tur DI in ea ad DF, ut est latus rectum principale  
 datæ Parabolæ ad latus rectum Vv Hyperbolæ genitri-  
 cis, & ducta per I recta PR asymptoto CD parallela,  
 quæ occurrat Hyperbolæ genitrici in P, rectæ  
 Vv in I, ea determinabit Parabolam æqualem datæ.

651. Si enim ducatur usque ad directricem FA pa-  
 rallela asymptoto DC, quæ occurrat perimetro in E,  
 ea & erit æqualis dimidio lateri recto principali FV,  
 vel Fv, & erit secta bisariam in E. Nam ducta vB pa-  
 rallela eidem asymptoto, erit æqualis ipsi FA lateri  
 opposito parallelogrammi AFvB, & erit æqualis Fv,  
 cum sit ducta ad directricem in angulo æqualitatis,  
 in quo ad ipsam inclinatur asymptotus, ac eandem ob-  
 sationem erit & FE æqualis EA, adeoque erit EF ad  
 FV, ut Fv ad totam Vv, & rectangulum sub EF,  
 & Vv æquale rectangulo VFv. Ducta autem quavis  
 chorda P'Rp' parallela Vv, quæ occurrat rectæ PR in-  
 tra Hyperbolam genitricem in R, asymptoto in H,  
 erit rectangulum VFv ad rectangulum P'Rp' (nu. 305)  
 ut rectangulum sub EF, & FD ad rectangulum sub PR,  
 & RH, vel sub PR, & DI, sive pro FD, ID sub-  
 stitutis latere recto Hyperbolæ genitricis, & latere re-  
 cto principali Parabolæ datæ, erit rectangulum illud  
 VFv ad P'Rp', ut rectangulum sub FE, & Vv ad re-  
 ctangulum sub PR, & latere recto principali datæ Pa-  
 rabolæ adeoque cum rectangulum VFv æquetur rectan-  
 gulo



golo sub  $EP$ , &  $Vu$ , etiam rectangulum  $P'Rp'$  æquabitur rectangulo sub  $PR$ , & latere recto principali datæ Parabolæ; adeoque est  $PR$  ad  $Rp'$ , ut  $Rp'$ , ad latus rectum principale Parabolæ datæ: cumque sit etiam  $PR$  ad  $Rp'$ , ut  $Rp'$  ad latus rectum principale Parabolæ provenientis ex sectione; hæc Parabolæ erit æqualis datæ. Cumque  $DI$  ad  $DF$  assumi possit in quavis ratione; patet quamvis datam Parabolam ex quavis Hyperboloidæ haberi posse.

SCHOLIUM VI.

552. **H**isce Sphæroidibus, ac Conoidibus libet jam adnectere solidum genitum conversione Hyperbolæ circa axem cojugatum; in quo solido multa occurrunt notatu dignissima, & ad Geometriæ indolem cognoscendam sanè aptissima; ut permutatio quædam crurum ad oppositos Hyperbolæ ramos pertinentium satis elegans. Enunciabo autem unico velut habitu quæcumque pertinent ad sex diversos casus sectionum huius solidi, tum singula pro singulis casibus demonstrabo accuratissime:

Coroll. 12.

653. Si Hyperbolæ convertatur circa axem conjugatum, generabis solidum, quod si secetur plano, cui occurrat planum ipsius Hyperbolæ genitricis ad angulos rectos, & considerentur sex positiones rectæ, in qua planum sectionis occurrat ei plano Hyperbolæ genitricis, ac in eorum primo recta ipsa sit perpendicularis axi rotationis, sive axi conjugato Hyperbolæ genitricis, in secundo ad ipsum inclinetur, sed in angulo maiore quam asymptoti, in tertio sit asymptoti parallelæ, in reliquis tribus inclinetur in angulo minore, quam asymptoti, sed in quarto secet tantum utrumlibet Hyperbolæ genitricis in eo plano jacens, in quinto alterutrum tangat, in sexto neutrum occurrat, binis nimirum paral-

## 214. SECTIONUM CONICARUM

parallelis tangentibus interjecta, erit sectio in primo equi-  
 su circulus, in secundo Ellipsis, in tertio Parabola,  
 vel si planum transeat per alteram asymptotum, bina  
 recta parallela, in quarto Hyperbola perturbans illud pla-  
 num Hyperbole genitricis perpendicularare plano sectionis,  
 & habens in ipso plano vertices axis transversi, in  
 quinto angulus rectilineus constans binis rectis utrinque  
 indefinite protensus, in sexto Hyperbola illud pla-  
 num Hyperbole genitricis non attingens, sed singulos  
 suos ramos efformans e binis cruribus respondentibus  
 iis, que pertinebant in casu quarto ad binos ramos  
 oppositos singula ad singulos, conjunctis, & permu-  
 tatis in transitu per casum quintum, ac curvitate  
 in oppositam plagam ibidem conversa. Et interse-  
 ctioni illi, cujus sex casus considerantur, in casu se-  
 cundo, & quarto parallelus est axis transversus se-  
 ctionis, qui nimirum equatur chorda Hyperbole geni-  
 tricis, in sexto, ubi nulla ejusmodi est chorda,  
 eidem parallelus est axis conjugatus, ac in illis ra-  
 tio axis transversi ad conjugatum, in hoc conjugati  
 ad transversum, & in casu quinto ratio radii ad tan-  
 gentem anguli, qua recta sectione obvniens inclina-  
 tur ad planum illud Hyperbole genitricis, est eadem  
 ac ratio diametri parallele illi ipsi intersectioni, cu-  
 jus sex casus considerantur, ad axem transversum Hy-  
 perbole genitricis; adeoque sectiones omnes curvilinee  
 planis parallelis facte similes erunt inter se, prater Hy-  
 perbolas casus sexti, qua non erunt similes Hyperbolis  
 casus quarti, sed earum conjugatis; habebunt tamen  
 Hyperbola planis parallelis eaducta communem asymp-  
 totorum inclinationem tam in casu quarto, quam in  
 sexto, que erit eadem, ac reclarum casus quinti. Im-  
 primo vero casu haberi poterit quivis circulus, cujus dia-  
 meter non sit minor axe transverso Hyperbole genitri-  
 cis, in secundo quovis cujuscumque speciei Ellipsis, cu-  
 jus axis conjugatus non sit minor axe conjugata eiu-  
 dem Hyperbole genitricis, in tertio quovis Para-  
 bola, in quarto quovis Hyperbola & specie, & ma-  
 gni-

quitudine, cuius axis transversus ad conjugatum non habeat rationem minorem, quam axis conjugatus Hyperbolæ genitricis ad transversum, in quinto recte inclinata ad planum Hyperbolæ genitricis in quovis angulo, quæ cum non superet, quo asymptoti ad axem conjugatum inclinantur, in sexto quovis Hyperbolæ & speciei, & magnitudinis, in qua axis conjugatus ad transversum non habeat rationem minorem, quam in Hyperbolæ genitrice, & in qua axis transversus axem transversum Hyperbolæ genitricis non superet.

654. Nam si Hyperbolæ HMD gyretur circa axem conjugatum Qq in fig. 229, 230, 231, 232, 233, generabitur solidum quoddam figuræ tetraedricæ; cuius sectio quævis P'Bp' perpendicularis ipsi axi erit circulus iuxta (n. 619), cuius diameter erit chorda P'p' Hyperbolæ genitricis, quæ cum semper debeat esse major axe transverso Mm, omnium circulorum minimus erit is, qui habebitur secto eiusmodi solido per ipsum axem MCm; ac proinde circulus habens minorem diametrum haberi non poterit; poterit autem habens æqualem, vel utcumque majorem, ex quo patet, quæ de primo casu sunt dicta.

655. Secetur jam in fig. 229 idem solidum plano P'Bp' eiusmodi, ut planum HDdb per axem transiens, & ipsius sectionis plano perpendiculare occurrat sectioni ipsi in recta Pp' inclinata ad axem conjugatum Qq in angulo majore, quam sit is, in quo ad ipsum inclinantur asymptoti. Occurret recta eiusmodi raris oppositis (num. 149) in P, p, & si per quodvis ejus punctum R jacens inter P, p ducatur planum P'Bp' perpendiculare plano axis, quod plano HDdb occurrat in recta P'p', ac priori sectioni in recta RB perpendiculari ad totum planum HDdb, adeoque ad P'p', & Pp', hæc ipsa nova sectio erit circulus habens pro diametro P'p', & quadratum RB æquabitur rectangulo P'Rp', quod ad rectangulum PRp' erit (num. 315), ut quadratum axis transversi Mm Hyperbolæ genitricis ad quadratum diametri Ss parallelæ chordæ Pp'. Erit igitur constans ratio

216 SECTIONUM CONICARUM

nō quadrati  $RB$  ad rectangulum  $PRp$ , adeoque  $PBp$  Ellipsis, cujus axis transversus  $Pp$ , qui ad conjugatum erit, ut est diameter  $Ss$  ad axem transversum  $Mm$  Hyperbolæ genitricis: Ejusmodi Ellipsim exhibet fig. 234, & patet si directio rectæ  $Pp$  in fig. 229 sit constans; constantem fore diametrum  $Ss$  ipsi parallelam, utcumque mutetur distantia ejus chordæ a centro  $C$ , adeoque constantem fore rationem axium in Ellipsi; & omnes ejusmodi Ellipses planis parallelis abscissas similes fore: Si autem Ellipsis educenda & specie, & magnitudine sit data, nec in ea axis conjugatus sit minor, quam axis transversus  $Mm$  Hyperbolæ genitricis; factis, ut ibi  $Nn$  ad  $Pp$ ; ita in fig. 229  $CM$  ad  $CS$  applicandam centro  $C$ , usque ad Hyperbolam genitricem  $HMD$ ; quævis sectio ducta per rectam  $Ss$  perpendicularis plano  $HDdb$  exhibebit Ellipsim datæ similem, & capta in fig. 229  $CV$  æquali  $PO$  fig. 234, ductaque  $VP$  parallela diametro  $Ii$  conjugatæ ipsius  $Ss$ , tum ducta  $POp$  chorda parallela  $Ss$ , patet eam fore dupl. rectæ  $CV$ , & æqualem dato axi  $Pp$  figuræ 234; adeoque & Ellipsim ortam sectione per  $Pp$  fore æqualem datæ, unde patet quidquid de secundo casu est propositum.

656. Quod si jam fiat sectio  $PBT$  per rectam  $PR$  in fig. 230, parallelam asymptoto  $Ss$ , erit (num. 328)  $F_{230}$   $235$  rectangulum  $PRp$ , sive quadratum  $BR$ , ut recta  $PR$ , adeoque sectio ipsa Parabolæ, quam exhibet fig. 235, quæ quidem si detur magnitudine, satis erit in recta per focus  $F$  ducta perpendiculari axi transverso  $Mm$ , & occurrente Hyperbolæ genitrici in  $V, u$ , asymptoto in  $S$ , assumere  $SL$  ad  $SF$  in ratione lateris recti principalis datæ Parabolæ ad axem  $Mm$  transversum Hyperbolæ genitricis, & ducere  $LPR$  parallelam asymptoto  $Ss$ . Nam si ducatur  $Fe$  usque ad perimetrum Hyperbolæ genitricis, ea juxta (num. 651) erit dimidia  $FV$  dimidii lateris recti principalis, cumque (num. 54) rectangulum  $MFm$  æquetur quadrato semiaxis conjugatæ  $CQ$ , cui (num. 66) æquatur etiam rectangulum  $MFm$  dimi-

dimidio latere recto  $FV$ , & semiaxe transverso  $MC$ , erit rectangulum  $MFm$  æquale rectangulo sub  $Fe$ , & toto axe transverso  $Mm$ . Est autem (num. 305) rectangulum  $MFm$  ad rectangulum  $P'Rp'$ , sive quadratum  $RB$ , ut rectangulum sub  $Fe$ , &  $FS$  ad rectangulum sub  $RP$ , &  $LS$ , sive pro  $FS$ ,  $LS$  positis proportionalibus axe  $Mm$ , & latere recto principali datæ Parabolæ, ut rectangulum sub  $Fe$ , &  $Mm$  ad rectangulum sub  $RP$ , & latere recto datæ Parabolæ: cumque rectangulum  $MFm$  æquetur rectangulo sub  $Fe$ , &  $Mm$ ; etiam quadratum  $RB$  æquabitur rectangulo sub  $RP$ , & latere recto Parabolæ datæ, quod cum æquetur rectangulo sub  $RP$ , & latere recto Parabolæ  $PBT$ , erit hoc latus rectum æquale lateri recto datæ Parabolæ, adeoque  $PBT$  datæ Parabolæ æqualis.

657. At si per ipsam asymptotum  $Ss$  transeat sectio, efficiat duas rectas parallelas asymptoto ipsi, & ab ea distantes hinc inde per intervallum æquale semiaxi transverso  $CM$ . Nam si  $Pp'$  occurrat asymptoto in  $r$ , &  $rn$  sit occurfus plani  $P'Bp'$  cum sectione per asymptotum ducta, erit quadratum  $rn$  semper æquale rectangulo  $p'P'$ , adeoque semper æquale (num. 251) quadrato semiaxis  $CM$ ; & proinde  $n$  ad rectam  $Nn$  parallelam asymptoto distantem ab ea per intervallum  $CN$  æquale semiaxi  $CM$ ; unde jam patet, quidquid etiam pro tertio casu fuerat propositum.

658. Si autem recta sectionem determinans inclinatur ad axem conjugatum in angulo adhuc minore, quam asymptoti, vel eidem ramo (num. 149) bis occurrat, ut in fig. 231, in duobus punctis  $P, p$ , vel  $232$  cum continget in  $P'$ , ut recta  $R'R$  in fig. 232, vel  $233$  inter utrumque ramum transibit binis tangentibus parallelis interjecta, & neutri ramus occurrens, ut in fig. 233.

659. Ubi occurrit bis, qui est casus quartus; per quodvis punctum  $R$  extra limites  $Pp$  ducta sectione circulari, ductaque diametro  $SCs$  parallela ipsi  $Pp$ , erit (num. 315) rectangulum  $P'Rp'$ , sive quadratum  $RB$  ad  $236$  rectan-

## 218 SECTIONUM CONICARUM

rectangulum  $PRp$ , ut quadratum  $Mm$  ad quadratum  $Ss$ ; adeoque punctum  $B$  ad Hyperbolam; cujus axis transversus  $Pp$ ; ac is ad conjugatum; ut  $Ss$  ad  $Mm$ ; quam exhibet fig. 236. Cumque ratio axis transversi ad conjugatum maneat eadem; utcumque mutata distantia chordæ  $Pp$  a centro; dummodo directio maneat; patet, omnes ejusmodi Hyperbolæ fore similes inter se. Sed cum quævis diameter secundaria  $Ss$  sit (num. 246) major axe conjugato  $Qq$ ; patet; in nulla ex ejusmodi Hyperbolis axem transversum ad conjugatum posse habere rationem mistorem; quam habeat axis conjugatus  $Qq$  Hyperbolæ genitricis ad transversum  $Mm$ ; quæ ratio si fuerit eadem; chordæ parallelæ axi conjugato  $Qq$  exhibebunt Hyperbolæ similes datæ; si major, centro  $C$  intervallo rectæ; quæ ad  $CM$  habeat rationem; quam in datâ Hyperbola habet axis transversus ad conjugatum; inveniantur in Hyperbola conjugata Hyperbolæ genitrici puncta  $S$ ;  $s$ ; & chordæ  $Pp$  parallelæ diametro  $Ss$  exhibebunt Hyperbolæ datæ similes. Assumptâ vero  $CV$  in ipsa  $Ss$  aequali semiaxi transverso datæ Hyperbolæ; ac ductâ  $VP$  semiorbitata ipsius diametri  $Ss$ ; &  $Pp$  parallela ipsi ordinata diametro  $iz$  conjugatæ ipsius  $Ss$ ; & ab eâ secta bifariam in  $O$ ; habebitur  $Pp$  dupla  $CV$  æqualis axis transverso datæ Hyperbolæ; adeoque Hyperbola orta sectione erit ipsi datæ Hyperbolæ æqualis; & hinc patent quæcumque ad quartum casum pertinebant.

660. Pro casu 5 in fig. 232 recta  $R'PR$  tangat Hyperbolam genitricem in  $P$ , & coibunt ibi puncta  $P$ ,  $p$ ;  $F_{232}$   $I$ ,  $O$ : erit autem rectangulum  $P'Rp'$ , sive quadratum  $BR$  ad quadratum tangentis  $PR$  in illa eadem ratione  $237$  quadrati  $Mm$  ad quadratum  $Ss$ : Quare utcumque mutato puncto  $R$  erit semper  $PR$  ad  $RB$ ; sive ob angulum  $PRB$  rectum radius ad tangentem anguli  $RPB$  (num. 25. Trigon.) in constanti ratione  $Ss$  ad  $Mm$ ; ac proinde angulus idem constans; omnia puncta  $B$  ad rectam transcuntem per  $P$ , & inclinâtam ad planum  $Hbd$  in angulo; cujus tangens ad radium est; ut  $Mm$

ad  $Ss$ , quæ ratio non potest esse major ratione  $Mm$  ad  $Qq$ , adeoque recta  $IF$  non potest inclinari ad planum  $HDdb$  in angulo majore, quam sit is, in quo asymptoti inclinantur ad axem conjugatum; quæ inclinantur ad illum in angulo; cujus tangens ad radium est, ut axis transversus ad conjugatum. Cum verò idem contingat hinc, & inde a contactu  $P$ , sectio ejusmodi exhibebit binas rectas  $TT'$ ,  $tt'$ , quas exhibet fig. 237, & contactus  $P$  determinans sectionem; in qua habetur data inclinatio rectæ ad ipsum planum  $HDdb$  invenietur, invento puncto  $S$ , ut in casu præcedente in Hyperbola conjugata ita, ut sit  $CS$  ad  $CM$ , ut est tangens datæ inclinationis ad radium. Patent igitur etiam ea omnia, quæ ad quintum casum pertinebant.

661. Demum præ casu sexto recta  $R'R$  in fig. 233, F233  
eadem directione; ac prius jaceat inter vertices  $L$ , & 238  
illius ejusdem diametri  $ICi$ ; cui occurrat in  $O$ . Per quodcumque ejus punctum  $R$  ubicumque assumptum agatur circulus  $P'Bp'$ , habebitur semper aliqua  $RB$ ; nimirum aliqua distantia sectionis  $INT$  ad planum  $HDdb$ ; quod planum proinde ipsa non attinget. Quod si etiam per  $O$  ducatur sectio circularis  $LNl$ , occurrens plano sectionis prioris in  $ON$ , ducaturque per  $R$  ordinata  $GRg$  ad diametrum  $Ss$  conjugatam ipsius  $Ii$ ; a qua bisariam alicubi secabitur in  $X$ ; erit ut quadratum  $Mm$  ad quadratum  $Ii$ , ita rectangulum  $P'Rp'$ , sive quadratum  $RB$  ad rectangulum  $GRg$ , ut rectangulum  $LOl$ ; sive quadratum  $ON$  ad rectangulum  $IOi$ ; Cumque sit rectangulum  $GRg$  excessus quadrati  $XG$  supra  $XR$ , & rectangulum  $IOi$  excessus quadrati semidiametri  $Cl$  minoris (num. 83) semiordinata  $XG$ , supra quadratum  $CO$ ; vel lateris  $XR$  ipsi paralleli; erit semper rectangulum  $GRg$  majus rectangulo  $IOi$ ; adeoque & quodvis quadratum  $BR$  majus quadrato  $ON$ ; puncto  $N$  omnium ejus sectionis punctorum maxime accedente ad planum  $HDdb$ ; differentia vero rectangulorum  $GRg$ ;  $IOi$  erit eadem; ac differentia quadratorum  $XG$ ;  $Cl$  ob illas  $XR$ ;  $CO$  æquales; adeoque, sublati proportionalibus,

## 220 SECTIONUM CONICARUM:

bus, differentia quadratorum  $RB$ ,  $ON$  ad differentiam quadratorum  $XG$ ,  $CI$  erit, ut quadratum  $Mm$  ad quadratum  $Ii$ . Est autem, ut facile colligitur ex demonstratis num. 86 translatis ad diametros, differentia quadratorum semiordeinate  $XG$ , & semidiametri primarie  $CI$  ad quadratum abscisse  $CX$  in diametro secundaria, sive ad quadratum  $OR$  sibi parallele, & equalis, ut est quadratum  $Ii$  ad quadratum  $Ss$ . Erit igitur ex equalitate ordinata differentia quadratorum  $RB$ ,  $ON$  ad quadratum  $OR$ , ut quadratum  $Mm$  ad quadratum  $Ss$ , adeoque punctum  $B$  ad Hyperbolam, cuius  $O$  centrum, semiaxis transversus  $ON$ , ac axis ipse transversus ad conjugatum, ut  $Mm$  ad  $Ss$ . Si enim ejusmodi Hyperbolam referat fig. 238, erit & ibi differentia quadratorum  $RB$ ,  $ON$  ad quadratum  $OR$ , ut quadratum axis transversi ad conjugatum, ac proinde capitis  $OR$  ibi, & in fig. 233 equalibus, semiordeinate  $RB$  equalis erunt, & superpositis punctis  $O$ ,  $R$  congruent.

662, In ea autem Hyperbola jam non axis transversus jacebit in illa recta  $R'R$ , sed conjugatus, eritque transversus  $Nn$  in fig. 238, ipsi perpendiculari, ratio axis transversi ad conjugatum erit eadem  $Mm$  ad  $Ss$ , que in casu quarto erat ratio axis conjugati ad transversum; adeoque cum Hyperbole conjugate axes permutant, erit ratio axis transversi ad conjugatum in casu sexto eadem, ac in Hyperbolis conjugatis Hyperbolarum casus quarti, & Hyperbole omnes casus sexti erunt similes inter se, & similes non ipsis Hyperbolis casus quarti, sed earum conjugatis; asymptotos autem in eodem angulo habebunt inclinatas ad se invicem, & ad illos axes permutatos, cum tangens anguli quo ad alteram e rectis  $R'R$ , vel  $Nn$  inclinatur, debeat esse eadem, ac erat in casu quarto, & eadem ac in rectis casus quinti. Ramus autem novus  $TBNb'$  in fig. 338, coalescet e binis cruribus  $BT$ ,  $b't'$ , quorum alterum in fig. 236 pertinebat ad ramum  $TBPbt$ , alterum ad ramum  $t'bpBT'$ , & pariter ramus  $tbnBT'$  fig. 238, e reliquis binis cruri-



Cruribus fig. 236, conjunctis nimirum verticibus P, P' in casu quinto in fig. 237 in O, in quo crura ipsa in asymptotos abeunt, tum cruribus transgressis asymptotos, distracto crure TB a bt, & conjuncto cum b't', ac curvatura in oppositam partem obversa.

663. Data autem Hyperbola fig. 238, si ejus axis transversus Nz, non sit ad conjugatum in ratione majore, quam in fig. 233 Mm ad Qq, inventa CS, ut in casu quinto, & quarto, quæ sit ad Mm, ut axis conjugatus datæ Hyperbolæ ad transversum, diameter SC, exhibebit directionem sectionis pro Hyperbolis datæ similibus. Quod si etiam Nn in fig. 238 non excedat Mm fig. 233, invenietur in hac punctum O, per quod transire debeat recta RR' exhibens Hyperbolam æqualem datæ. Nimirum capta CV perpendiculari ad Iz, quæ sit ad NO in fig. 238 datam, ut CI ad CM in fig. 233, centro V intervallo CI invenietur in ipsa CI punctum O quæsitum ex utralibet centri parte. Erit enim in fig. 238, quadratum CV differentia quadratorum VO, CO, sive CI, CO, æqualis rectangulo IOz, quod ad rectangulum LOI, sive quadratum ON est, ut quadratum CI ad quadratum CM, adeoque CV tam ad ON fig. 233, quam ON fig. 238, habebit rationem eandem, quam CI ad CM, ac proinde binæ ON, sive bini axes transversæ sectionis, & Hyperbolæ datæ erunt inter se æquales, & æquales ipsæ Hyperbolæ. Patent igitur etiam omnia quæ ad sextum casum pertinebant.

S C H O L I U M VII.

664. **A**Dmodum utile est illas transformationes locorum Geometricorum in se invicem, & in alia affinia considerare, ut innotescat Geometriæ indoles, quæ nihil inordinatum admittit, nihil abruptum per saltum. Consideretur enim puncto P. immoto in fig. 229, planum sectionis cum recta PR converti motu continuo circa ipsum. Circulo, qui habetur, recta P'P'

## 223 SECTIONUM CONICARUM

perpendiculari axi  $Qq$ ; succedit; sectione inclinata, series continua omnium specierum Ellipsium; in quibus ratio axis transversi ad conjugatum perpetuo crescit, donec ea per omnes magnitudinis finitæ gradus progressa, jam Ellipsi succedat Parabola fig. 230; in qua vertex  $p$ ; centrum, axis conjugatus nusquam jam sunt; quæ tamen nequaquam esse desinent, nisi ubi per omnes finitarum magnitudinum gradus recesserint. Adhuc magis inclinata sectione, jam ea habentur ex parte opposita, & in fig. 231; ramus nascitur Hyperbolæ oppositus, cujus axis transversus ad conjugatum rationem initio habet utcumque magnam, quæ ratio per omnes magnitudinum finitarum gradus ab infinito quodammodo redit cum ipso vertice  $p$ , decrescit decrescente  $CS$ ; donec ipsa  $CS$  evadat æqualis  $CQ$ , ubi nimirum fit ipsa  $PO$  parallela axi conjugato  $Qa$ . Pergente conversione circa  $P$ , iterum cresceret ipsa ratio crescente  $CS$  ex parte opposita axis  $CQ$ , donec cocuntibus  $P$ ,  $p$ ; jam Hyperbola abiret in rectas casus quinti, sed motu ipso adhuc crescente, & puncto  $P$  immoto non permutarentur ramorum crura, verum vertex quidem  $p$  transiret in arcum  $PD$ , & ratio axis transversi ad conjugatum iterum cresceret in infinitum, donec facta  $Pp$  alteri asymptoto parallela, iterum haberetur Parabola, cui Ellipsim nova series succederet ad circuli formam accedens, ac in ipsam delinens; in ipso regressu rectæ  $Pp$  ad præcedentem positionem, post quam iterum eodem ordine eadem series evolverentur, ac semper circulus a se mutuo discerneret binas Ellipsium series, in quarum altera cresceret in altera decresceret ratio axis transversi ad conjugatum, Parabola vero Ellipses ab Hyperbolis, inter quas Hyperbolas in medio veluti cursu rectilineus etiam angulus occurreret, in quem pluribus jam vicibus Hyperbolam mutari posse vidimus, & mutabitur semper, ubi axis transversus evanescat, dum ejus ratio ad axem conjugatum expressa aliis lineis nec evanescit, nec in infinitum crescit.

665. At si potius manente directione sectionis parallela eidem  $Ss$ , excurrat planum ipsum motu parallelo, in primo casu habetur semper circulus, congruente quidem sectione minimus; sed semper ejusdem formæ, ac pariter in secundo casu habetur Elliptium series profus similibus, quarum minima in fig. 229, quæ per ipsam  $Ss$  abscinditur, nec in iis quidquam notatu dignum accidit; At in casu Parabolæ in fig. 230, quo magis recta  $PR$  ab asymptoto recedit, eo augetur magis latus rectum, quo magis illa accedit, eo hoc decrefeit; & in primo casu expanditur, in secundo contrahitur Parabola donec recta  $PR$  abeunte in asymptotum; & evanescente  $SL$  evanescat latus rectum: sed vertex simul in infinitum recedit ita, ut nusquam jam sit: quo casu Parabola, quæ evanescente latere recto, & vertice adhuc alicubi existente, abiret in axem suum, ut in eum abiit; ubi Coni Sectio (num. 587) per verticem transit, ac Conum jam contigit non secuit, in hoc casu abit in binas rectas parallelas axi suo, qui in asymptotum desinit. Plano autem sectionis adhuc progressu, vertex  $P$ , qui per omnes distantiarum finitarum magnitudines ita in infinitum recesserat; ut nusquam jam esset; statim ex parte opposita  $d$  enasceretur quodammodo, & eodem ordine regrederetur ex infinito, aucto per eisdem gradus latere recto: ubi notandum maxime illud, quo pacto crux  $BT$ , quod prius versus  $T$  recedebat in infinitum ab axe, & versus  $B$  recidebat in ipsum, in  $P$  paulatim ad axem ipsum ex parte  $T$  accesserit, & ad rectæ parallelæ formam, ut in transitu per asymptotum desereret demum ipsum axem ex parte  $B$ , & ei ex parte opposita conjungeretur, e priorè illa in infinitum recedens.

666. In postremis autem casibus multo major se prodit rerum vicissitudo, sed constans quædam Geometriæ indoles ubique regnat. Habentur in fig. 231, 236 binii Hyperbolæ rami; qui chorda accedente ad centrum, ad se accedunt, & ad asymptotos, donec conjunctis

## 224 SECTIONUM CONICARUM

punctis  $P, p$  in ipsas asymptotos recidunt, ut in fig. 232, 237, ac demum mira illa crurum permutatione, quam vidimus in fig. 233, 238 transiliant ad partes asymptotorum oppositas, nec curvaturam mutant, nisi in transitu per rectam; licet pariter ad rectam in casu Parabolæ arcus appellens, illam tamen nequaquam mutaverit. Notandum autem, quo pacto crurum  $TB, t'b$  puncta  $P, p$  in fig. 231. paulatim ad se accesserint, nec coierint in fig. 233. in unicum ramum, nisi posteaquam se in ipso centro  $O$  conjunxerint in fig. 232, & ibi veluti conglutinauerint arcus, quodammodo veluti relictis suis illis punctis  $P, p$ , quæ cum natura sua indivisibilia in partes dividi non potuerint, nec simul in oppositas directiones abire, relictæ quodammodo ibi sunt, ac punctis  $N, n$ , quæ pariter imminuto axe conjugato devenerant ad centrum  $O$ , in eorum locum suffectis, arcus iidem ex centro ipso cum hisce novis verticibus transgressi sunt asymptotos, & progressi. Nam puncta illa  $P, p$  delata per rectam  $RR'$  nequaquam potuerunt saltu quodam in Geometria absurdo mutare directionem, & per aliam rectam priori perpendicularem progredi sine ulla inflexione, sed per easdem vel. regredi debuerunt, vel progredi, cujusmodi regressuum, & progressuum exempla plurima occurrunt in transformatione locorum geometricorum. Et quidem puncta  $N, n$  fig. 238 non esse eadem, ac  $P, p$  fig. 236: patet etiam ex eo, quod ratio axis  $Nn$  ad suum conjugatum in illa non est eadem, ac in hac ratio axis  $Pp$  ad suum conjugatum, sed relictis in fig. 238 punctis  $P, p$  in verticibus axis conjugati in eadem recta  $RR'$ , habetur ratio  $Nn$  ad  $Pp$  utrobique eadem.

667. Sed de hisce transformationum mysteriis hic satis. Agemus de iis infra ordinatius, & quidem Sectionum Conicarum proprietates admirabilem sane per huiusmodi permutationum, evolutionum, mysteriorum fetetem ubique offerunt, quæ animum intimius rimantem jucundissima quadam contemplatione defigunt. Illud  
unum

unum hic addemus, quod nonnulli, ubi de Conicis Sectionibus agunt, notare solent.

668. Si recta gyretur circa axem extra ejus planum figuram generat solidum, cujus sectionibus Conica Sectiones exhibentur.

669. Id patet in nostro casu, quia si recta SN fig. 230, connexa cum axe Qq per rectam CN, vel rectam PT, fig. 232 per rectam PC gyretur, erit semper in eo solido, in quo esset, si tota figura converteretur circa axem Qq, nimirum in solido genito conversione Hyperbolae circa axem conjugatum, cujus sectiones vidimus esse Conicas Sectiones.

670. Datis autem binis rectis utriusque, altera pro axe, altera movenda circa ipsum, facile invenietur Hyperbola generans idem solidum. Sit prior recta Qq in fig. 230, posterior Nn. Ex quovis prioris puncto Q sumpta Qa parallela datae Nn, ad planum aQq, ex quovis ipsius Nn puncto n, ducatur nr perpendicularum in id planum, tum in eodem plano recta rs parallela aQ, quae idcirco parallela erit etiam datae nN, & cum ea non fuerit parallela Qq; aliter enim in eodem plano jacuissent, ipsa rs secabit alicubi in datam Qq quantum opus est productam. Ducta CM perpendiculari ad Qq, & aequali rn, tum facto angulo MCS aequali MCS per punctum M inter asymptotos CS, CS' describatur Hyperbola, quae sui conversione circa Qq generabit solidum idem, quod recta Sn. Erit enim CM ejus Hyperbolae semiaxis transversus, & recta Nn in plano Nnr perpendiculari ad planum Hyperbolae genitricis parallela asymptoto, distabit ab eo per rn aequalem semiaxi transverso.

671. Possent infinitae aliae Hyperbolae inveniri, quae solidum idem generarent: nec difficile esset etiam in fig. 232, data recta PT, & assumpto in ea puncto P, ad arbitrium determinare in plano per P, & axem Qq ducto Hyperbolam HMD ejusmodi, ut ducto in IT plano perpendiculari in illius planum, intersecte-

reflectio PE Hyperbolam ejusmodi congeret in P. Sed prior illa determinatio satis ostendit solidi illius generi a reeta utcumque posita sectionem quamcumque cum conicis Sectionibus congruere.

## S C H O L I U M VII.


672. **S**unt solidorum genera, quorum sectiones quæcumque exhibent pariter Sectiones Conicas easdem, quas huc usque persecuti sumus, nimirum omnia genera corporum Conoidicorum, vel Cylindraceorum, quæ oriuntur ex conversione rectæ radentis non circulum, sed aliquam e tribus Conicis Sectionibus, Ellipsim, Parabolam, Hyperbolam, & transeuntis per datum punctum, vel delatæ motu parallelo, sive corpora Conoidica, & Cylindracea, habentia pro basi non circulum, sed unam e tribus Conicis Sectionibus. Demonstratio autem est eadem ferè, quæ pro cono, & Cylindro superius est adhibita. Nam in primis si in fig. 206, 215 basis AB sit quævis Sectio Conica, recta vero Cc quævis transiens ibi per illud punctum V, hic parallela rectæ gyranti; eadem demonstratione numeri 553, & 596 erit ibi semper *cb*, ad CB, ut *ca* ad CA, hic *cb* æqualis CB, & *ca* æqualis CA. Quare quævis sectio basi parallela erit ibi similis basi (num. 111), hic etiam ipsi æqualis. Deinde in fig. 208, 209, 210, 211 si AB sit quævis diameter basis Ellipticæ, Parabolicæ, vel Hyperbolicæ, & OS parallela ordinatis ejusdem basis, erit semper *ab* diameter sectionis *aPbp*. Parallela basi, & Pp ejus ordinata secta bifariam in R; adeoque (num. 305) rectangulum PRp, sive quadratum PR, ad rectangulum *aRb* in ratione data. Erit autem ut in demonstratione numeri 562, rectangulum *aRb* in fig. 210, ut MR, in reliquis, ut rectangulum MRm. Igitur erit quadratum semiorinatæ PR ibi ut abscissa MR, hic ut rectangulum MRm, adeoque punctum P ubique ad Conicam Sectionem.

tionem juxta num. 439, & 440. Eadem vero erit demonstratio pro Cylindracei in fig. 217, ubi qua-F.217  
 dratum PR, erit, ut rectangulum  $aRb$ , sive ut re-  
 ctangulum MR $m$ . Quin immo ubicumque in iis so-  
 lidis inter sectiones haberi poterit & circulus: ex-  
 dem semper erunt verus conus, vel Cylindrus habens  
 ipsum circulum pro basi. Sed longum esset singu-  
 los casus persequi, & jam ad transformationes quas-  
 dam locorum Geometricorum generaliore faciemus  
 gradum \*



228 DE TRANSFORMATIONE  
LOCORUM GEOMETRICORUM

*Ubi de continuitatis lege, ac de quibusdam  
Infiniti mysteriis.*

673.  Ira quaedam se prodit in omni Geometricorum Locorum transformatione Geometriae indoles, mira admodum, & nostris mentibus prorsus impervia incurrat in oculos Infiniti Geometriae quaedam velut mysteria, quae quidem in iis etiam, quae de Conicis Sectionibus a nobis demonstrata sunt, contemplari licet; quam ipsam ob causam ea hic evolventa nobis censuimus, ut ad sublimiores curvas, & infinitesimorum methodos brevi evulgandas promior Tyroni via sternatur.

674. In primis quaecumque ejusdemque geometrico loci pars eandem naturam habet, quae ipsius definitione continetur, atque idcirco habet etiam proprietates prorsus easdem ex illa ipsa natura fluentes; Quamobrem quidquid de una aliqua ejus parte demonstratur fluens ex illa ipsa natura, reliquis omnibus partibus aptari debet eodem modo, nec quidquam sola illius naturae contemplatione demonstrari poterit de una aliqua parte, quin de parte alia quavis eadem pariter ratione demonstratur. Quaecumque enim eandem naturam aequae participant, ea omnia debent itidem aequae participare quidquid ex ejus unius naturae consideratione deducitur. Atque id ipsum perspeximus num. 278, ubi de arcus circularis trisectione egimus, quam ibi vidimus obtineri non posse, quin simul infinitorum numero aliorum arcuum, eadem constructione trisectione obtineretur. Atque hanc ipsam ob causam, ubicumque in Geometria vel solvuntur problemata, vel demonstrantur theoremata, certum quoddam, & determinatum schema subjicitur oculis, cui investigatio, vel



LOCORUM GEOMETRICORUM. 219.

Vel demonstratio applicatur. Id quidem schemata unum casum oculo subjiciat ex infinitis numero ipsi profus similibus; & quidquid in eo contingere vident oculi, mens ad reliquos omnes transfert, argumentatione communi pro omnibus. Sic si recta linea bifariam secanda sit; constructio aptatur certae cuidem lineae, ut unius pollicis, quae tamen eadem cuidem lineae, ut unius pollicis, quae tamen eadem cuivis alteri longitudini eque aptatur, nec longitudinem ipsam determinatam in schemate oculis proposito mens intuenitur, sed solam lineae rectae habentis binos terminos notionem; unam cum nozione circulorum ad solutionem problematis requisitorum, & rectae per eorum intersectiones ducendae.

675. Ex quidem aliquando fit, ut solutio uni casui in schemate oculis proposito applicata, sine ullo peculiari discrimine applicetur casibus omnibus, ac schema ipsum remaneat eiusdem formae. Multo tamen saepius in ipsis casibus positio diversa ita schema perturbat; ut artificiosum quoddam sit opus, ad servandam analogiam, & retinendam solutionis, ac demonstrationis vim, quae quidem positio illud etiam praestat, ut quandoque summa aliqua in differentiam abeat.

676. Exemplum proferemus e Geometria plana positum. Sint in fig. 239 binae rectae parallelae indefinitae AB, DG, quas secet in C, & H, recta EF pariter indefinita. Sit autem ducenda per datum punctum P recta occurrens iisdem tribus rectis AB, DG, EF in M, O, N ita, ut summa binarum MN, ON, quae intercipiuntur inter primam, & tertiam, ac inter secundam, & tertiam aequetur rectae datae. Facto centro in quovis puncto K alterius e parallelis, ut AB intervallo eiusdem rectae datae inveniat, si ea sit satis longa, in altera parallela DG punctum I, ducaturque KI, tum ex P recta ipsi KI parallela; quae si rectae EF occurrerit in Ni inter C, & H, solvet problema; erit enim ipsarum MINi, ONi summa aequalis MIOi, adeoque equalis lateri KI, opposito in paral-

parallelogrammo  $MIKIOI$ . Ubicumque punctum  $P$  fuerit collocatum ita, ut  $N_1$  cadat inter  $C$ , &  $H$ , solutio problematis rite procedet. At si  $P$  jaceat in  $P_2$ , vel  $P_3$  ita, ut  $N$  cadat extra  $CH$ , vel in  $N_2$ , ad partes  $H$ , vel in  $N_3$  ad partes  $C$ , eadem constructio prima fronte videbitur fallere. Nam in utroque casu eorundem rectatum  $MN$ ,  $NO$  non erit summa, sed differentia  $MO$ , quæ æquatur  $CI$ .

677. Verum si positionis vis consideretur, manebit etiam ibi analogia, & patebit, idem profus præstari in omnibus casibus, ac illam, quæ videtur differentia binarum qualitatum, revera esse summam. Nam & in quantitate discreta, ut numeris, ac algebraicis formulis, & in quantitate continua, ut in Geometricis lineis, sunt quædam quantitates, quæ dicuntur negative, & quæ si positivis addantur, eas minuunt, vel minuuntur ab iis. Si quis decem nummos habeat, & lucretur alios tres, habebit tredecim: & si potius contrahat debitum trium, habebit 7; si debitum sit 9, habebit 1; si debitum sit 10, habebit nihil, sed si debitum sit 13, jam habebit debitum quidem, sed 3, minus nimirum, quam 13. Debitum illud est quædam negativa quantitas, quæ conjuncta cum positiva illa re habita, illam minuit, vel ab illa minuitur. Eodem pacto si quis, secundo fluvio remis etiam urgentibus promoveatur, & intra fluvium progrediatur remorum ope singulis minutis per passus 10, motu autem fluvii procedat per passus 3; conjunctis motibus progredietur per 13. At si fluvius retro reflectat motum, & retrahat navim per passus 3; vel 9, vel 10, vel 13, progressu, & regressu conjunctis, habebitur progressus 7, vel 1, vel nihil, vel etiam regressus 3. Regressus ille est negativa quantitas, quæ progressum positivam quantitatem minuit, vel ab eo minuitur.

678. Porro in hoc secundo casu mutatio directionis positivam quantitatem mutat in negativam, sicut generaliter in Geometria, directionis oppositæ eandem

## LOCORUM GEOMETRICORUM. 231

mutationem inducit. Pro quavis quantitate variabilis plaga positivorum ad arbitrium assumi potest, qua semel assumpta, directio contraria quantitates exhibebit negativas, ac si in aliquo casu habebatur summa quaedam quantitatum quarundam, & earum aliqua in casu alio directionem mutet; adhuc habebitur summa omnium, si ea quantitas in summam negativo modo computetur, eam nimirum demendo; vel si communitas consideratio adhibeatur, quæ nimirum positionem, & directionem non curat, sed solam magnitudinem contemplatur, differentia succedet summe.

679. Satis patet, in exposito problemate in casu secundo  $P_2$  directionem  $M_2N_2$  manere eandem, quæ fuerat in  $M_1N_1$ , at directio  $N_2O_2$  est opposita directioni  $N_1O_1$ . In tertio vero casu  $P_3$  directio quidem  $N_3O_3$ , manet eadem, quæ  $N_1O_1$ , sed  $M_3N_3$  est contraria illi, quæ fuerat in  $M_1N_1$ . Hinc nimirum summa, quæ in primo casu erat equalis rectæ datæ, abiit in reliquis in differentiam. Quod si e casu  $P_2$ , progrediamur ad  $P_1$ , tum inde ad  $P_3$ , differentia, quæ habetur in primo ex hisce tribus, abit in summam in secundo ob directionem alterius tantum mutatam, tum summa secundi mutatur in differentiam tertii, cum iterum mutetur directio etiam alterius. Cumque comparando primum ex hisce casibus cum tertio, utriusque quantitatis directio mutetur; in utroque habetur differentia; quia nimirum si  $M_2N_2$ , &  $N_2O_2$ , in casu  $P_2$  considerentur ambæ, ut quantitates positivæ, sicut in tertia negativæ ambæ, quæ eandem restituant negativo modo, sive directione contraria. Demendo  $O_2N_2$ , ab  $M_2N_2$  relinquitur  $M_2O_2$ , hoc demendo  $N_3O_3$  ab  $M_3N_3$  remanet  $O_3M_3$ , negativè sumpta, sive  $M_3O_3$ , ut prius.

680. In quavis casuum diversorum contemplatione, ut in quavis combinatione locorum geometricorum, simpliciter considerari debet ejusmodi positio, quæ in locorum transformatione semper easdem proprietates retinet, dummodo ubicumque quantitatis directio mutetur,

retur, illa habeatur pro negativa, adeoque jam demittitur si addebatur; vel contra addatur, si demebatur. Quae enim addenda fuerat, dum decrefcit perpetuo, femper minus addet; fi evadat nulla, & evanefcat, addet nihil; fi in contrariam etiam mutetur, mutata directione, contrarium itidem effectum preftare debet, nimirum minuet id, quod antea augebat.

681. Et in lineis quidem, ubi mutetur directio, & thus ope poftiva migrent in negativa, fatis erit manifeftum per fe fe, vel recte lineae fint, vel curvae. Sic **E240** in fig. 240, fi binæ circuli chordæ fe mutuo fecent intra circulum in C, meñfura anguli ACB eft femifumma arcuum AB, DE a rectis ipfum continentibus Interceptorum (Cor. 4. Pr. 9; Geom.). At fi punctum C<sub>2</sub> jaceat extra circulum; ea ipfa meñfura anguli AC<sub>2</sub>B evadit differentia arcuum AB, DE<sub>2</sub> quod nimirum directio arcus DE<sub>2</sub> eft contraria directioni DE, quæ fi negativo modo fumatur; adhuc pro meñfura habebitur femifumma. Immo proderit hic etiam omnes mutationum vices contemplari, easque deducere ex folo primo cafu reftarum AE, BD, & poftitione puncti E percurrentis totam circuli peripheriam; donec eo redeat, unde digreffum eft. Anguli nimirum ACB meñfura eft femifumma arcuum AB, ED. Abeat punctum E in D, & arcus ED fiet nullus hinc meñfura anguli ADB, in quem tum abibit ACB, erit dimidius arcus AB. Abeat E in E<sub>2</sub>, & mutata directione arcus DE<sub>2</sub>, contraria nimirum directioni DE; jam anguli AC<sub>2</sub>B meñfura erit femidifferentia arcuum AB, E<sub>2</sub>D. Evadat E<sub>3</sub>D æqualis ipfi AB, jam femidifferentia erit nulla, quare recta AE cum BD, nullum angulum continebit; & quidem eo cafu patet, ipfas parallelas effe. Crefcet adhuc DE<sub>4</sub>, & jam evadet major, quam AB. Illius igitur dimidio dempto & dimidio AB, femidifferentia evadet negativa. Quare angulus habebitur A<sub>4</sub>B, fed ad partes oppofitas jacebit; ac fpectabit plagas oppofitas, ut figura exprimit, ejuſque meñfura erit adhuc illa femidifferentia.

Abeat

LOCORUM GEOMETRICORUM. 233

Abeat  $E_5$  in  $A$ , & evadet  $A_5C_5$  tangens, anguli vero  $AC_5B$  mensura erit semidifferentia arcuum  $DE_5$ ,  $AB$ , sive  $DA$ ,  $AB$ , quod ita esse patet; nam eorum arcuum differentia est  $AE_3$ , ob  $E_3D$  æqualem  $AB$ , ac anguli quem tangens  $A_5A$ , producta continet cum chorda  $AE_3$  parallela rectæ  $BD$ , qui idcirco æquatur interno, & opposito  $AC_5B$ , mensura est dimidius arcus  $AE_3$ . Abeat  $E_6$  inter  $A$ , &  $B$ , & anguli  $AC_6B$  mensura erit semidifferentia  $DAE_6$ ,  $BA$ , quæ ob  $AE_6$  communem, reducet ad semidifferentiam  $DA$ ,  $BE_6$ . Abeat punctum  $E$  in  $B$ , & evanescente  $E_6B$ , mensura anguli  $ABD$  fiet dimidium arcus solius  $DA$ . Abeat demum punctum  $E_7$  ultra  $B$ , &  $BE_7$  jam mutabit directionem, adeoque mensura anguli  $ABD$ , spectantis easdem plagas erit semisumma arcuum  $DA$ ,  $E_7B$ , ut patet omnino esse.

682. Et hæc quidem de lineis. At in superficiebus notandum erit illud. Si sumatur rectangulum binarum rectarum, & una ex iis positionem mutet, mutabitur, & rectangulum, ac e positivo migrabit in negativum: si vero mutet utraque, adhuc erit considerandum ejusdem generis, ac erat, cum neutra positionem mutaverat. Nam si in fig. 241  $CD$ .  $CA$  considerentur, ut quantitates positivæ, & earum rectangulum  $DCAB$ , ut positivum, mutetur autem  $CA$  in  $CF$ ; jacebit  $DCFE$  ad partes oppositas, adeoque id rectangulum respectu prioris considerandum erit, ut negativum. Quod si iterum mutetur  $CD$  in  $CH$ , jam rectangulum  $FCGH$ , mutabit directionem respectu  $FCDE$ , adeoque debet prestare effectum contrarium, nimirum, minuere, quod id augebat, augere, quod id minuebat, ac proinde negativum negativum erit, & iterum in positivum migrabit.

683. Hinc in Geometria idem accidet; quod in Arithmetica, & Algebra contingit, ut nimirum ubi ducendo unam quantitatem in aliam, oritur productum quoddam, si altera e binis quantitatibus mutetur in negativam, fiat negativum productum; si utraque maneat,

neat, sit positivum, quod ibi exprimitur dicendo, ex multiplicatione tum binorum positivorum, tum binorum negativorum oriri positivum, ex multiplicatione positivi per negativum, vel viceversa; oriri negativum; sive signa conformia in multiplicatione exhibere positivum, difformia negativum.

684. Porro hinc illud consequitur, ut lineæ cujuscunque quadratum positivum semper maneat, licet eadem linea e positivâ mutetur in negativam, positione mutata. Quadratum enim lineæ est ipsa linea in se ipsam ducta, quæ e superiore canone producit planum positivum: Inde vero deducitur; quadrati negativi latus impossibile esse, quod in Arithmetica; & Algebra appellatur quantitas imaginaria. Quadratum autem quodcumque binâ semper habere potest latera alterum positivum, alterum negativum: Atque idcirco ubicunque problema aliquod ad sui solutionem requireret; ut inveniatur dati quadrati latus; semper id ipsum latus adhiberi poterit cum directione utraque, tam positivum, quam negativum.

685. Id patebit sequenti exemplo. Debeat inveniri inter binas rectas media proportionalis. Quæsitæ mediæ quadratum debet æquari dato rectangulo sub datis rectis: Quare binas omnino solutiones habere debet id problema, & binâ ejus quadrati latera inveniri debebunt constructione eadem: Atque id quidem  
 F. 242 omnino continget. Nam si in fig. 242 binæ rectæ datæ abscondantur in AB, BD in eadem recta ita; ut earum summa constituat AD; ac ipsa AD sectam bifariam in C; radiâ CA ducatur circulus, is rectæ EBF perpendiculari AD occurret in binis punctis G; G; eritque ex naturâ circuli utriuslibet BG quadratum æquale eidem rectangulo sub AB; & BD; & utraq; ex iis mediâ quæsitâ: Ubicumque punctum B fuerit inter A, & D; solutio rite procedet: At si id sumatur extra; vel ad partes A in B<sub>2</sub>; vel ad partes D in B<sub>3</sub>; mutata in primo casu directione AB<sub>2</sub>, in secundo DB<sub>3</sub>; jam rectangulum ABD mutabitur in negativum;

rum, adeoque negativum evadet etiam illud quadratum, & idcirco ejus latus impossibile; quam ob rem id ea constructione inveniri nequaquam poterit. Ea quidem rectæ  $E_2B_2F_2$ ;  $E_3B_3F_3$  ipsi AD perpendiculares nunquam occurrent circulo. Potesit quidem alia constructione determinari media inter  $AB_2$ , &  $B_2D$ , vel  $AB_3$ ; &  $B_3D$  independenter ab illa mutatione directionis, nimirum ducendo binas tangentes  $B_2H$ , vel  $B_3H_2$  ad circulum ipsum, quæ erunt mediæ quæsitæ. Verum ibi iterum  $AB_2$ ; &  $B_2D$  considerantur, ut positivæ; & si deinde  $B_2$  migret in  $B$ , & positio mutetur, jam ea constructio nos deseret; neque enim ex  $B$  tangentes ad circulum duci poterunt, quæ problema eadem constructione solvant; migrante vero  $B$  in  $B_3$ , jam &  $AB_3$ , &  $DB_3$  habent directiones contrarias directionibus  $AB_2$ ; &  $DB_2$ ; adeoque rectangulum earundem iterum evadit positivum, ac iterum constructio redit cum binis tangentibus. Atque idcirco si in rectis  $EF$  sumantur binæ  $B_2L$ , vel binæ  $B_3L_2$ , æquales binis tangentibus, puncta  $L$ ;  $L_2$  erunt ad binos ejusdem Hyperbolæ æquilatæ ramos, quæ est Locus Geometricus diversus ab illo circulo, cum quo nequaquam continuatur in  $A$ ; ubi arcuum quamvis contiguorum natura, & proprietates sunt admodum diversæ; licet arcus assumantur quam proximi. Et hæc ipsam ob causam circulus quidem ordinatas  $BG$  axi perpendicularis habet respondentes punctis  $B$  assumptis inter  $A$ , &  $D$ ; nullas autem habere potest extra eos limites; contra vero Hyperbola extra eos limites habet semper, intra eos habere omnino non potest.

686. Idem autem etiam in admodum simplicibus Geometriæ theorematibus notare licet. Est quarta Euclidis Propositio Libri 2, puncto  $B$  jacente inter  $A$ , &  $D$ ; bina quadrata  $AB$ ,  $BD$  cum binis rectangulis sub  $AB$ ,  $BD$  æquari quadrato  $AD$ , septima vero, puncto  $B_2$  jacente extra  $A$ , &  $D$ ; bina quadrata  $AB_2$ ,  $B_2D$  æquari quadrato  $AD$  cum binis rectangulis sub  $AB_2$ , &  $B_2D$ . Hæc binæ propositiones exhibent san-

tum-

tunc modo binos casus ejusdem theorematum, & secunda sponte fit e prima, dummodo notetur,  $AB_2$  habere directionem contrariam ei, quam habet  $AB$ . Directionem vero  $DB_2$  esse eandem; ac  $DB$ . Eo pacto patebit, quadrata quidem manere ut prius, & illa bina rectangula mutare positionem, & fieri negativa. Quamobrem ubi ante summa ex binis quadratis  $AB$ ,  $BD$ , & binis rectangulis sub  $AB$ , &  $BD$  æquabitur quadrato  $AD$ , jam illi æquabitur non summa, sed differentia, quæ habetur demendo ab illis quadratis illa bina rectangula; unde sequitur illa bina quadrata æquari quadrato  $AD$  binis illis rectangulis aucto.

687. Eodem etiam pacto tam quinta, & sexta, quam nona, & decima, & immo etiam secunda, & tertia, duodecima, & decimatertia ejusdem libri ad singula theorematum reduci possunt, habita ratione positivorum, ac negativorum in mutatione directionis, mutante valorem rectanguli, non vero quadrati. Ac in reliquis quidem mutatio illa valoris enunciationem ipsam theorematum mutat, cum in iis habeantur rectangula. At in nona, & decima, quæ continent sola quadrata, nullo in iis mutato valore: enunciatio manet eadem. Secta  $AD$  bifariam in  $C$ , si punctum  $B$  sit inter  $A$ , &  $D$ , bina quadrata  $AB$ ;  $BD$  æquabuntur per nonam binis  $CA$ , & binis  $CB$ . Si autem  $B_2$  sit extra eos limites, erunt pariter per decimam bina quadrata  $AB_2$ ,  $DB_2$  æqualia binis  $CA$ , & binis  $CB_2$ . Mutata est directio lateris  $AB$  in  $AB_2$ , sed valor quadrati non est mutatus.

688. In solidis pariter, si una e tribus rectis solidum continentibus mutet directionem mutatur solidum e positivo in negativum; si enim concipiatur planum a reliquis binis contentum immobile, recta vero, quæ directionem mutat, sit solidi altitudo, jacebit solidum ipsum ad partem oppositam post mutationem directionis in eadem altitudine; ac proinde & ejus valor mutabitur. Quod si mutantur binæ, redibit iterum ad valorem positivi.



positivum, cum iterum mutari debeat; si mutentur omnes partes, iterum valor solidi mutabitur, & generatim ubicumque aliquod sive recta sit, sive area, sive solidum, definiatur ductu, vel proportionibus restarum quocumque, si earum numerus impa-  
 directionem mutet, ipsum productum mutabit valorem; si numerus earum, que mutantur, sit par, valor manebit. Nam singularum mutatio debet valorem producti mutare, quod proinde e positivum in negativum, & negativum in positivum abibit per vices, adeoque post numerum parem eodem semper regredietur, ac alia mutatione deinde addita, in oppositum valorem migrabit.

689. Id manifestum erit, ubi datis tribus rectis quaeratur quarta proportionalis post ipsas, Ducantur, hinc rectæ AB, DE indefinite in fig. 243, quæ se mutuo secant in C; sumantur CH, CF versus A æquales prioribus binis, CI versus E æqualis tertiæ; ducatur HI, tum ex F recta ipsi parallela, quæ abscindet ex DE rectam CG, quaeritam post CH, CF, CI. Mutetur jam directio primæ CH in oppositam in fig. 244, manentibus directionibus CF, CI, recta FG parallela IH solvet itidem problema, sed CG jacebit ad partes oppositas directione mutata. Mutetur in figura 245, etiam CF, & jam recta FG parallela HI sedabit ad positionem CG eandem, quam habuit in fig. 243. Mutetur demum in fig. 246 etiam CI, & jam CG quoque iterum mutabitur ad directionem oppositam. Quin immo si quæcumque ex illis tribus CH, CF, CI figuræ primæ mutetur in contrarium, patebit eos casus delineanti mutari semper CG. Sed quodcumque binarum mutetur quavis ex iis relicta in directione priore, patebit semper, directionem CG manere; ac si quis rationes etiam compositas adhibeat quocumque, poterit sane mutationes quolibet exeri, & semper inveniet, numerum mutationum imparem inducere mutationem, parem vero retinere valorem pristinum.

690. Porro in ejusmodi mutationibus anguli quoque

rectarum mutabuntur ita; ut mutata directione unius lateris; mutetur angulus in eum; qui ejus complementum est ad duos rectos; mutata autem directione utriusque lateris mutabitur angulus in alium sibi ad verticem oppositum; qui ipsi prorsus æqualis est; & ejus vices æque præstabit in demonstratione quacumque. Ac demonstratio; vel ipsa etiam theorematum, propositi veritas admodum facile ab uno casu transferetur ad alium; si ubi alterius tantummodo lateris mutetur directio; substituatur angulo priori ejus complementum ad duos rectos; ubi utriusque; substituatur angulus ad verticem oppositus. Fiet autem aliquando in ejusmodi mutationibus; ut qui anguli in parallelis alterni erant; mutantur in externum; ac internum; & oppositum; internus in externum aliquando migret; & viceversa; ac alia ejusmodi consequentur; quæ sponte incurrent in oculos; ac singula persequi; & exemplis illustrare infinitum esset. Satis erit in illis ipsis casibus; quos expressimus in ejusmodi figuris; notare vim demonstrationis; & mutationem in angulis factam. Triangula  $HCI$ ;  $FCG$  in fig. 243 similia sunt; quia habent angulum  $HCI$ ;  $FCG$  communem; nempe eundem ac  $ACE$ ; anguli autem  $CHI$ ;  $CIH$  externi æquales sunt angulis  $CFG$ ;  $CGF$  internis; & oppositis in parallelis  $HI$ ;  $FG$ . Hinc est  $CH$  ad  $CF$ ; ut  $CI$  ad  $CG$  in figura 244 sunt itidem similia triangula  $HCI$ ;  $FCG$ ; sed idcirco similia sunt; qui anguli  $HCI$ ;  $FCG$  sunt ad verticem oppositi æquales; &  $CHI$ ;  $CIH$  æquales alternis  $CFG$ ;  $CGF$ . Mutatio lateris  $CH$  mutavit angulum  $ACE$  in  $ECB$ ; & mutatio lateris  $CG$  mutavit ipsum  $ACE$  in  $ACD$ . Anguli vero  $CHI$ ;  $CIH$ ; qui erant externi respectu  $CFG$ ;  $CGF$  internorum; & oppositorum in fig. 243; evaserunt alterni in fig. 244. At demonstrationis vis adhuc relicta est.

691. Patet itidem mutatione ipsa directionis argumentationem; quæ fit componendo; mutari debere in eam; quæ fit dividendo; quoviscumque in proportione aliqua binum tantummodo termini antecedentes; vel

binum

bini consequentes mutant directionem, manere, si mutant priores bini; vel bini postremi; vel omnes simul: mirabunt autem semper vel nullus; vel bini, vel omnes; cum si è prioribus tribus mutet primus solus, vel tres; debeat mutare quartus, si bini; quartus manere debeat; unde patet, fieri non posse; ut eorum, qui mutant; numerus sit impar. In fig. 243; cum sit CF ad CH; ut CG ad CI; erit dividendo FH ad CH, ut GI ad CI. At in fig. 244; ubi CG, & CH mutant directionem, fiet componendo FH ad CH, ut GI ad CI. In fig. 245; ubi mutant priores bini; & fig. 246; ubi mutant omnes; habetur iterum argumentum componendo. Ratio est manifesta; quia summam primi, & secundi; vel tertii; & quarti mutatur in differentiam; vel differentia in summam, ubi alter ex iis positionem mutat; manet vero summa, vel differentia, si vel neuter mutet; vel uterque.

692. Ex iis, quæ demonstravimus, licebit sæpe Locorum Geometricorum ductum; & varios casus, ac transformationes contemplari. Exemplum desumemus à curvis quibusdam, quæ summum in universa Geometria usum habent; & quas diligentius persequemur ibi, ubi infinitesimorum elementis traditis; agemus de curvis generaliter, ac ea curvarum genera, quæ majoris sunt usus persequemur. Interea earum ductus hic definitus plurimum proderit ad quædam infiniti mysteria evolventa; & cognoscendam intimius continuitatis geometricæ legem, ac ipsa plurimorum casuum contemplatio, & locorum generalis constructio sibi ubique respondens, ad Geometriæ ipsius indolem, miram sanè, percipiendam partiter plurimum proderit.

693. Curvæ quarum naturam; & genesim hic contemplabimur, erunt eæ, in quibus ordinatæ ratio simplex, vel utcumque multiplicata est eadem, ac ratio simplex; vel utcumque multiplicata, sive reciproca, sive directa abscessæ. Si algebraicis signis uti libeat, & considerare altiores linearum potestates, quæ exprimantur indefinite per litteras  $m$ , &  $n$ , ac absces-

sa dicatur  $P$ , ordinata veto  $Q$ ; lineæ hujusmodi sunt, in quibus  $P^m$ , ut  $Q^n$ , exprimentibus  $m$ , &  $n$  numeros quoscumque rationales integros, sive positivos, sive negativos, vel, quod eodem redit, in quibus sit  $P$ , ut  $Q^n$ , exprimente  $n$  numerum quemcumque rationalem integrum, vel fractum, positivum, vel negativum. Sed hic, ubi Geometriam contemplamur; geometricum etiam sermonem usurpabimus, adhibendo rationum æqualium compositionem, quem etiam multiplicatio rationum appellatur, potius quam potestates linearum, quæ ultra secundam, & tertiam, nimirum ultra quadratum, & cubum, in Geometria non assurgunt, assurgunt autem in Arithmetica consideratione ad gradum quemcumque; si quædam linea dicatur unitas, qua de re ibi aptius, ubi de Algebrae applicatione ad Geometriam dicendum erit. Porro inter ejusmodi Loca Geometrica habetur etiam recta linea tam axi inclinata, quam parallela, & tam Parabola ad axem relata, quam Hyperbola ad asymptotos pro axe assumptos, & præterea omnis quædam, quam vocant Parabolarum, ac Hyperbolarum familia.

694. Sit in fig. 247 recta indefinita  $MN$ , in qua sumantur abscissæ a quodam puncto dato  $V$  positivæ versus  $N$ , ut  $VR$ , adeoque negativæ versus  $M$ , ut  $VR_2$ , ac deducta per  $V$  indefinita  $OVQ$  perpendiculari ad  $MN$ , ordinatæ capiantur parallele ipsi, & habeantur pro positivis directione  $VO$ , ut  $RP$ , adeoque pro negativis directione contraria  $VQ$ , ut  $R_2 P_2$ .

695. Sint autem primò ordinatæ in ratione simplici abscissarum. Sumpta  $VA$  ad arbitrium ex parte positiva, & erecta  $AB$  parallela  $VO$  ex parte eadem positiva longitudinis cujuscunque, & ducta per  $V$ , &  $B$  recta  $ST$  indefinita ita, ut  $S$  jacet ad partes  $V$ , ac  $T$  ad partes  $B$ , patet, eam fore Locum Geometricum questum; ducta enim quavis  $RP$  parallela  $VO$ , semper erit ordinata  $PR$  ad abscissam  $VR$ , ut  $BA$  ad  $AV$  in eadem

LOCORUM GEOMETRICORUM. 247

Item ratione constanti adeoque illa mutabitur, ut hæc  
 five erit ordinata in ratione simplici directâ abscissæ ;  
 Porro in hoc casu patet ; abscissæ positivæ VR debe-  
 re semper respondere ordinatam positivam RP , nega-  
 tivæ vero VR<sub>2</sub> negativam R<sub>2</sub>P<sub>2</sub> : Nam debet esse  
 AB ad PR , ut VA ad VR , in qua proportione VA ;  
 & AB constantes sunt , adeoque mutata positione ab-  
 scissæ VR , mutari etiam debet positio ordinatæ RP ,  
 juxta num. 688. Semper autem respondebit cuivis ab-  
 scissæ , sua ordinata atque ea unica , cum hic nullâ  
 occurrant quadratorum hæretâ ; quæ binæ esse possunt  
 positionum oppositarum , vel quæ quadrato negativo fa-  
 cto evadant impossibilia . Crescente autem in infini-  
 tum abscissa , debet crescere & ordinata , ac ea eva-  
 nescente , evanescere . Et hæc quidem omnia omni-  
 no accidunt in ea ipsa rectâ , quæ & transit per  
 Y , & utinque in infinitum recedit ab axe ad par-  
 tes oppositas :

696. Debeat in fig. 248 esse ordinata RP in ratione <sup>248</sup>  
 duplicata directâ abscissæ VR . Abscissis omnibus positivis ;  
 patet , debere respondere ordinatam positivam , & uni-  
 cam , quæ invenietur , sapiendo RP ad AB in ratione du-  
 plicata VR ad VA , five ut est quadratum VR ad qua-  
 dratum VA . Facta autem abscissa VR<sub>2</sub> negativa , adhuc  
 ordinata R<sub>2</sub>P<sub>2</sub> debet esse positiva . Nam in illâ ratione  
 duplicata VR<sub>2</sub> bis ingreditur & proinde positio bis mutatur ;  
 ac quadratum abscissæ VR<sub>2</sub> quamvis negativæ , est positi-  
 vum . Porro patet , crescente in infinitum abscissa ,  
 debere crescere in infinitum ; & ordinatam , ac in-  
 finities magis ; unde colligitur , bina Loci Geometri-  
 ci crura in infinitum abire ex parte VO versus T , &  
 S ; recedendo semper & ab axe MN , & ab VO in in-  
 finitum : at abscissa in infinitum decrescente patet , etiam  
 ordinatam infinities magis debere decrescere ; unde infer-  
 tur evanescente abscissâ , debere evanescere & ordinatam ,  
 adeoque Locum Geometricum hunc transire pariter per  
 V : Quoniam vero ordinata infinities magis crescit ,  
 quam abscissa ; ubi ambæ crescunt ultra quoscumque

242 DE TRANSFORMATIONE

limites, infinities autem magis decrefcit, ubi ambae decrefcunt, patet, fi per  $V$ , &  $P$  ducatur recta  $VI$  indefinita, angulum  $VPR$  in primo cafu, &  $PVR$  in fecundo decrefcere ultra quofcumque limites; adeoque fi arcus  $VR$  concipiatur continuatus in infinitum verfus  $T$ , angulus  $OVI$  alternus ipfius  $VPR$  decrefcet in infinitum, accedente recta  $VI$  ad  $VO$ , ultra quofcumque limites, quod nobis infra ufui erit, ubi agemus de infinito. Si vero arcus  $VP$  evanefcat abeunte  $P$  in  $V$ , evanefcet angulus  $IVN$ , & recta  $VI$ , quae eo cafu evadet tangens, recidet in ipfum axem  $MVN$ , quae proinde locum  $SVT$  in  $V$  continget. Patet autem ex ipfa proportione expofita,  $SVT$  debere effe Parabolam e Coni Sectione orta, cujus axis  $VO$ . Ducta enim  $PE$  perpendiculari ad eum axem, eft in Parabola  $VE$  abfciffa, ut quadratum  $EP$ , quae in ea dicitur femiordinata, adeoque  $RP$ , quae hic dicitur ordinata, eft in ratione duplicata  $VR$ , quae hic dicitur abfciffa. Porro in Parabola Conica patet crura  $VS$ ,  $VT$  effe illius ipfius formae, quam hic ex illa pofitivorum, & negativorum notione deduximus.

697. Quod fi debeat effe ordinata in ratione triplicata abfciffae, habebuntur, utin fig. 249, binii arcus  $VT$ ,  $VS$  infiniti, quorum alter jacebit in angulo  $OVN$ , alter in  $MVQ$ . Nam facta  $VR_2$  negativa, habetur in illa ratione triplicata numerus negativorum impar & proinde negativa eft etiam ordinata. Eodem vero argumento crura in infinitum abeunt, ac arcus tranfit per  $V$ , ubi a recta  $MN$  contingitur, a qua cum etiam fecetur, habetur ibidem mutatio directionis curvaturae, quae appellatur mutatio flexus. Contactus autem, & interfectio hic uniuntur, ut ubi circulus osculator Sectionem Conicam ( num. 512 ) fecat simul, & tangit in ipfo osculo. Porro hic locus appellatur Parabola cubica, in qua fi  $OVQ$  affumatur pro axe, cubi ordinarum  $PE$  funt, ut abfciffae.

698. Generaliter autem fi ordinata  $PR$  fit in ratione abfciffae  $VR$  utcumque multiplicata per numerum in-

LOCORUM GEOMETRICORUM. 243

negrum positivum parem, ut si sit in quadruplicata, sextuplicata, decuplicata, debet haberi ordinata quoque  $R_2P_2$  positiva, & forma crurum, eadem, quæ in fig. 248; si per imparem mutabitur in negativam, & habebitur forma fig. 249.

699. Si vero ratio duplicata ordinata sit eadem, ac ratio directa utcumque multiplicata per numerum imparem (nam si sit eadem, ac ratio multiplicata per numerum parem, erit ratio simplex ordinata eadem, ac ratio abscissæ multiplicata per dimidium ejus numeri paris, & easus reducetur ad alterum e binis præcedentibus) habebuntur binæ crura ejus formæ, quam exhibet fig. 250 jacentia in angulis  $QVN$ ,  $QVN$ . F250  
 Nam existente  $VR$  positiva, invenietur positivus valor quadrati ordinatæ; adeoque binæ ejus latera habebuntur (num. 684)  $RP$ ,  $R_p$ . Existente vero  $VR_2$  negativa, valor quadrati ordinatæ negativus fiet, & proinde ordinata ipsa impossibilis, quam ob causam recta  $LR_2L$  ordinatis parallela nusquam occurret curvæ. Quoniam autem eodem argumento decrescente  $RP$  infinites magis, quam  $RV$ , adhuc  $VN$  contingit curvam; curva ipsa in  $V$  cuspidem habet admodum acutam, in qua retro regreditur.

700. Idem generaliter contingit, quotiescunque ratio ordinatæ multiplicata per quemvis numerum parem est eadem, ac ratio abscissæ multiplicata per imparem majorem. Imparitas abscissæ, & paritas ordinatæ dabit regressum curvæ a recta  $OO$ , & binas ordinatas cum directionibus oppositis: excessus numeri abscissæ supra numerum ordinatæ, exhibebit contactum rectæ  $VN$ , & cuspidem in  $V$ . Quod si ratio ordinatæ multiplicata per numerum imparem quemvis, sit eadem, ac ratio abscissæ per numerum majorem parem, vel imparem, redibit forma fig. 248, & 249, qui sunt omnes ejusmodi casus, nam ratio ordinatæ multiplicata per parem æqualis rationi abscissæ per parem reducitur continua bisectione ad imparem in altera e binis, adeoque ad unum e præcedentibus casibus. Et hæc quidem omnia facile generali demonstratione erui

possunt ope constructionum quarundam, quas paulo  
infra exhibebimus.

701. Si jam numerus per quem multiplicatur ra-  
tio abscissæ, sit minor eo, per quem multiplicatur ra-  
tio ordinatæ, habebuntur figuræ 251, 252, 253,  
252 quas exhibebunt 248, 249, 250 si permutantur abscis-  
sæ earum, & ordinatæ ac illarum rectæ OQ succedat  
hærum axis MN si enim hæc sint VR, & RP, que  
ibi erant VE, & EP, sive PR, & VR, habebitur  
hic eadem ratio ordinarum ad abscissas, quæ ibi  
abscissarum ad ordinatas. In iis omnibus casibus erit  
OVQ tangens, & numerus major par in ordinata  
impar in abscissa præbebit in fig. 251, binas ordinatas  
oppositas ex parte abscissæ positiva, & ex parte nega-  
tiva impossibiles; impar in ordinata, & in abscissa  
& in fig. 252 ordinatas singulas, & ejusdem legis cum  
abscissis; impar in ordinata, par in abscissa, ordina-  
tas semper singulas pro singulis abscissis, semper posi-  
tivas, & cuspidem.

702. Hi quidem sunt omnes casus rationis directæ.  
Si vero ratio fuerit reciproca, non directæ: patet, si  
fuerit simplex, haberi in fig. 254 Hyperbolam ST, Si  
inter asymptotos MN, OQ. Nam in ea (num. 227)  
est rectangulum sub VR, & RP semper constans, a-  
deoque RP in ratione reciproca simplici VR. Ea ve-  
ro Hyperbola binos habet ramos in binis angulis ad  
verticem oppositis OVN, MVQ, in infinitum excur-  
rentes, ac accedentes ad eam angulorum crura ultra quos-  
cumque limites. Id autem etiam deducitur ex tradi-  
tis negativorum regulis, & ex natura rationis reci-  
procæ simplicis. Nam mutata directione abscissæ mu-  
tari debet etiam directio ordinatæ in cuius deter-  
minationem illa semel ingreditur. Generaliter autem si  
ratio ordinatæ utcumque multiplicata per numerum im-  
parem æquetur rationi reciprocæ abscissæ multiplicatæ per  
numerum imparem, forma erit eadem, ac in fig. 254.  
Ordinatæ positivis abscissis positivæ, negativis negati-  
væ respondebunt singulis singule, ac crescentæ in infini-



LOCORUM GEOMETRICORUM. 245

si abscissa, decreſcet ordinata, ſed nunquam evaneſcet; decreſcente ordinata, abſciſſa creſcet in infinitum; & ſemper habebitur aliqua; adeoque quatuor curvæ erunt aſymptotica, habebunt pro aſymptotis omnia quatuor latera VM, VO, VN, VQ, & jacebunt in binis angulis ad verticem oppoſitis OVN, **244Q.**

703. At ſi numerus ordinatæ fuerit impar, ſed abſciſſæ par, orietur forma figuræ 255. Ordinatæ ſingulis abſciſſis reſpondebunt ſingulæ, ſed omnes poſitivæ erunt, adeoque bini rami aſymptotici jacebunt in binis angulis OVN, OVM.

704. Si demum numerus ordinatæ fuerit par, & abſciſſæ impar, negativis abſciſſis nullæ ordinatæ reſpondebunt, poſitivis reſpondebunt binæ oppoſitæ ſingulis; & forma erit, quæ exhibetur in fig. 256, jacebunt bini rami aſymptotici in angulis NVO, **NVQ.**

705. Ut unico velut conſpectu contemplari liceat omnes ejuſmodi caſus, ſit  $P^m$ ; ut  $Q^n$ , ſive  $P$ , ut  $Q$ , exprimentè  $P$  abſciſſam,  $Q$  ordinatam,  $n$ , &  $m$  numeros quocumque intègros poſitivos, vel negativos, inter ſe primos ita; ut fractio  $\frac{n}{m}$  non poſſit reſtari ad minorem expreſſionem. Si fuerit  $\frac{n}{m}$  numerus poſitivus, pertinèbit caſus ad figuras a 247 ad 254; ſi negativus ad 3 reliquas; & in primo caſu loca omnia erunt ex familia Parabolarum, in ſecundo ex familia Hyperbolarum. Si  $m$  fuerit numerus æqualis  $n$ , adeoque  $\frac{n}{m}$  fuerit unitas; pertinèbit caſus ad rectam expreſſam in fig. 247. Si  $m$  fuerit numerus minor, quam  $n$ ; pertinèbit caſus ad figuras 248, 249, 250, prout fuerit  $m$  impar,  $n$  par, vel  $m$ , &  $n$  impar, vel  $m$  par,  $n$  impar. Si  $m$  fuerit major, quam  $n$ , habebuntur ſingulæ 251; 252, 253 in iſdem tribus ſubdiviſionibus ejus caſus. Si

autem

autem  $\frac{n}{m}$  fuerit negativus habebitur figura 254, 255, 256 prout fuerit &  $m$ , &  $n$  impar, vel  $m$  par,  $n$  impar, vel  $m$  impar,  $n$  par. Quod si  $m$  esset nihil, adeoque ordinata in nulla ratione abscissæ; tum vero ordinata esset semper constans, adeoque pro curvis illis haberetur tantummodo recta ipsi axi parallela in quam eo casu eadem curvæ abeunt.

706. Quæ ex natura positivorum, ac negativorum hic deducta sunt, possunt omnia accuratè demonstrari, & immediate deduci ope constructionis harum curvarum ipsarum, quæ constructio rite peracta exhibebit per sese curvarum earundem omnium ductum, & quæ semper geometricè præstari poterit per puncta ita, ut prius habeatur constructio earum, quæ exhibent ordinatæ rationem simplicem respondentem rationi abscissæ multiplicatæ per quemvis numerum gradatim ab unitate incipiendo, tum pergendo per unitatis additionem continuam. Deinde vero traduci potest constructio ad quamvis rationem multiplicatam etiam abscissæ.

707. Quoniam recta linea exprimit casum, in quo ordinata est in ratione simplici directæ abscissæ, quæ datur in fig. 257. linea, in qua sit ordinata in ratione duplicatâ directâ eisdem. Capiatur AB utcumque perpendicularis VA, producatque indefinitè: agatur per V, & B: recta indefinita ducatur per quodvis punctum R axis MN recta parallela QO; quæ occurrat alicubi rectæ VB in P; ducatur PD axi parallela occurrens rectæ BA in D: ducatur per V, & D recta quæ rectæ illi RP occurrat alicubi in E, & ibidem determinabit ordinatam loci quæsitæ. Erit enim ordinatæ rectæ lineæ naturam PR, ut VR. Erit autem BA ad DA, ut BR ad ER. Quare rectangulum sub AB contenti, & ER æquale rectangulo sub DA, & PR, adeoque ER in ratione composita ipsarum DA, & PR, nimirum, cum eæ æquantur in ratione duplicatâ PR, sive VR, ut oportebat. Patebit autem ipsam constructionem contemplanti, a puncto P oriri RE conformem

LOCORUM GEOMETRICORUM. 247

RP, ac positivam, a puncto vero P<sub>2</sub> oriri R<sub>2</sub>E<sub>2</sub> contrariam, sive a negativo iterum positivam, ut R<sub>2</sub>P<sub>2</sub> in fig. 248.

708. Invenienda jam sit curva, in qua ordinata sit ratione triplicata abscissæ. Sit in fig. 258, recta

RP, ut prius, & curva SI<sub>2</sub>VI<sub>2</sub>T jam constructa ejusdem, ut RI sit in ratione duplicata VR. Ducatur ex puncto I D parallela axi, occurrens AB in D, tum per D & D recta, quæ rectæ RP occurret in E, ac determinabit punctum E quæsitum. Erit enim BA ad DA, sive PR, ad RE. Quare, ut prius ER, in ratione composita & RP, prior est duplicata VR, posterior simplex. Quamvis illa composita est triplicata ipsius VR, ut oportet.

Patet autem etiam hic, punctum I<sub>2</sub> jacens ex parte positiva debere iterum reddere punctum E<sub>2</sub> ex parte negativa. Patet etiam, si RI sit in ratione triplicata VR, obventuram RE in ratione quadruplicata VR, sed tunc debere I<sub>2</sub> jacere ex parte negativa, & P<sub>2</sub> moveri ad partem positivam, atque ita porro quævis multiplicatio rationis abscissæ habebitur per gradus, ut tunc semper E<sub>2</sub> ex parte positiva, ubi devenitur ad numerum parem, negativa, ubi ad imparem; atque ratione habentur omnes casus hujusmodi, in quibus ordinata sit in quavis ratione abscissæ multiplicata per quemvis numerum integrum positivum; ac simul etiam omnes casus, in quibus debeat esse submultiplicata ratio, sive in quibus ratio ordinatæ, utcumque multiplicata, sit eadem, ac ratio abscissæ simplex. Potest enim esse mutare axem, & abscissam mutare in ordinatam, ut ex figuris 248, 249 constructis deriventur 251, 252.

709. Si ratio sit reciproca simplex in fig. 259, ducatur VB, ut prius, ducatur BI parallela axi occurrens rectæ RP in I, tum per V, & I recta occurrens re-  
 AB in H, ac demum recta HE parallela axi occurrens RP in E, eritque E quæsitum punctum. Erit BA ad AH, sive RE, ut RP ad RI. Quamobrem

## 248 DE TRANSFORMATIONE

item rectangulum sub RP, & RE aequabitur  
 in rectangulo sub AB, & RI, erique idcirco  
 ratione reciproca RP, sive VR, ut oportebat.  
 Constructio autem ipsa ostendet E<sub>2</sub> determinari a P  
 partem negativam.

710. Si ratio sit reciproca duplicata; manent  
 F260fig. 260 VB, sit sIBT curva jam descripta, habens  
 in ratione reciproca simplici VR, ductaque VIH  
 HE, ut prius, habebit quæsitæ RE. Erit enim  
 ad AH, sive RE, ut RP ad RI, adeoque ob AB  
 stantem RI in ratione composita RE. & RP,  
 RE directe ut RI, & reciproce ut RP. Est autem ratio  
 recta RI eadem, ac reciproca VR, & ratio reci-  
 ca RP eadem, ac reciproca VR. Quare erit RE  
 ratione reciproca duplicata VR, ut oportebat. I  
 autem etiam hic, punctam I<sub>2</sub> jacens ex parte neg-  
 va debere iterum reddere punctum E<sub>2</sub> ex parte po-  
 va. Patet etiam, si RI sit in ratione reciproca du-  
 cata VR; obventuram RE in ratione reciproca tri-  
 cata, sed tunc debere I<sub>2</sub> jacere ex parte positiva,  
 E<sub>2</sub> transire ad partem negativam, atque ita porro  
 vis multiplicatio rationis reciproce habebitur per  
 dus, jacente semper E ex parte positiva in numero  
 ri, negativa in impari.

711. Quod si ratio ordinate multiplicata per aliquem  
 numerum rationalem  $n$  debeat esse eadem, ac ratio  
 abscissæ sive directæ, sive reciproca multiplicata per  
 F261 261 litem quemvis  $m$ ; id facile præstari poterit ope curvæ  
 262 rum jam constructarum. Fiat in fig. 261 axe MN cu-  
 263 va SVT, cujus abscissæ VH sint in ratione ordinari-  
 rum IH multiplicata per  $n$ , ac curva SVT', eujus  
 ordinatæ RP sint in ratione abscissarum VR multip-  
 cata per  $m$ . His semel præparatis per quodvis po-  
 ctum R agatur recta perpendicularis MN, donec  
 currat curvæ VT' in P, tum PD parallela NM usque  
 ad OQ, inde vero DH ad angulum VDH semper  
 ctum, quæ occurrat in H rectæ VN, deinde HI para-  
 lela OQ, donec occurrat curvæ VT in I, ac demum  
 per

## LOGORUM GEOMETRICORUM. 249

Directa parallela MN, quæ occurret RP in E, & terminabit questum punctum E. Nam erit ob angulum VDH semirectum, & DVH rectum, VH æqualis sive RP. Erit autem VH in ratione IH, sive in ratione RE multiplicata per  $n$ , & PR in ratione VR multiplicata per  $m$ . Ergo ratio RE multiplicata per  $n$  erit æqualis ac ratio VR multiplicata per  $m$ , ut oportebat.

Porro si  $n$  sit numerus impar, &  $m$  par, habentur casus figuræ 261; compositæ ex fig. 252, & ac E<sub>2</sub> jacebit ex parte positiva, figura ipsa referens casus reliquos si. 248, vel 252: si fuerit &  $n$ , &  $m$  par, habebitur casus fig. 262 compositæ ex 249, & ac habebitur E<sub>2</sub> ex parte negativa, figura referente casus reliquos ipsarum figurarum 249, & si fuerit  $n$  par, &  $m$  impar, habebitur casus fig. 263 compositæ ex 251, & 249, figura ipsa referente casus reliquos fig. 250, nullo existente E<sub>2</sub>, respondeat R<sub>2</sub>, & respondentibus R binis E.

Quod si ratio ordinatæ multiplicata per  $n$ , sit esse æqualis rationi reciprocæ abscissæ multiplicatæ per  $m$ , satis esset arcubus SVT parabolicis, & hyperbolice crura hyperbolica figurarum 254, 255, ita ut in figura 260, 261, 262 R<sub>i</sub> esset in ratione reciproca abscissæ VR multiplicata per  $m$ , patet, eadem prorsus constructione obtineri in-

Atque hæc demum pacto constitui possunt, & prorsus curvæ propositæ tam parabolici, quam hyperbolici generis, quæ quidem egregias, & utilis proprietates habent potissimum circa subtangentem, & arearum mensuram, quæ in omnibus acquiruntur quadrabiles sunt, præter unicam. Hyperbolam præter rationis simplicis reciprocæ, sed earum inapplicatio nec ad rem præsentem facit, & multo est minor ope quantitatum infinitesimalium: interea pertransit ad considerationem transitus, qui sit e positivo in negativum.

Mirum sane, quam sibi ubique costans sit Geometria

metria potissimum in lege continuationis servanda, cujus vi nihil usquam mutatur per saltum, aut totum simul exoritur; aut evanescit; sed a quacumque magnitudine ad aliam quamcumque semper itur per intermedias omnes. Nullus Loci Geometrici arcus usquam abruptitur, sed vel in gyrum, torquetur, vel in se ipsum reflectitur; ut in fig. 250 in V; ac vel in se ipsum redit, ut in Ellipsi; vel in infinitum protenditur; ut crura hyperbolica, & parabolica; vel spiris infinitis circumagitur; aut recedendo puncto quodam ex altera tantum parte in infinitum; & ex altera accedendo semper; quin ad ipsum pertingat nunquam, & quin tamen usquam abruptatur; quod & illi accidit; quam spiralem logarithmicam appellat, & cujus naturam alibi persequemur; vel demum binis saltem spirarum ordinibus recedendo in infinitum quod alia multae spirales praestant. Ac ordinatae normales, subnormales, tangentes, anguli tangentium cum axe, vel cum recta data quavis, vel cum recta utcumque per eundem Locum Geometricum definita; curvatura ipsa; directio curvae, ac quidvis aliud sine ullo saltu mutatur semper transeundo per omnes intermedia quantitates ejusdem generis.

715. Ea lex omnino servatur etiam, ubi e positivis quantitatibus transitur ad negativas, qui nimirum transitus non fit per saltum, sed per gradus continuos. Fit autem is transitus duplici modo; nimirum vel transeundo per nihilum, vel per infinitum. Ac ubi per nihilum transitur, res sane nullam admirationem parit; cum id, quod decrevit, donec evanescat penitus; admodum rerum constitutioni, & naturae ordini consentaneum sit, ut aliquando post interitum mutetur in oppositum, quemadmodum paullo superius num. 677 vidimus contingere in debito, vel in regressu fluvii. At transitus e positivo in negativum mysteria quaedam secum trahit, quae hic evolvenda sunt; & quae ad Sectionum Conicarum naturam; & analogiam; ac ad universam Locorum Geometricorum indolem perspicendam mirum in modum conducunt. Primum autem proferemus exempla,

LOCORUM GEOMETRICORUM. 251

in quibus, e positivo in negativum fit transitus per nihilum; ac per infinitum petita etiam e vulgari Geometria, tum alia, quæ ad infinitum pertinent, addemus e Sectionibus Conicis demonstratis, ac ex illis ipsis curvis; quas hic habuimus; & ad Hyperbolas, ac Parabolas sublimiores referri diximus adjectis etiam regulis quibusdam pro Locorum, Geometricorum transformationibus.

716: Sit in fig. 264 recta indefinita AB, ac centro  $C$  extra ipsam, assumpto, concipiatur circulus NKOQ, quovis intervallo, per cujus centrum transeat recta DE parallela ipsi AB, occurrens circulo in N ad partes A; D; in O ad partes B, E. Sit autem CH perpendicularis ad AB, occurrens ipsi in H, & circulo in K versus H; ac in Q ad partes oppositas. Transeat demum per ipsum centrum C recta indefinita FG, que circulo occurrat in puncto L ad partes F; & M ad partes G; recta vero AB in P, atque ea recta concipiatur motu continuo delata in gyrum circa centrum illud C immotum ordine NKOQ. Minuetur primo HP, accedente L ad K, & evanescet: tum abeunte L in arcum KO in L', mutabit HP' directionem, adeoque post transitum per nihilum in H mutabitur e positiva in negativam, vel viceversa. Pergat FG contracti; & Punctum P' perpetuo recedet ab H; aucta perpetuo HP' per omnes finitarum magnitudinum gradus in infinitum; donec L' abeat in O, quo casu intersectio P' in illo infiniti quodam velut immenso pelago quodammodo absorpta nusquam jam erit. Nam recta G'F' congruet cum DE parallela rectæ AB, adeoque cum ipsa AB nusquam concurret; licet in infinitum producat, Verum utcumque parum inde removeatur ita, ut abeat L' in M, & M' in L; statim P', quod post discessum in infinitum delituerat eo unico momento temporis, quo L' erat in O, jam invenitur ex parte opposita in P, ac, si finitas tantummodo quantitates contemplerur, mutata est HP', in HP habentem directionem contrariam. Nimirum etiam in transitu puncti

puncti P per infinitum abit ipsa HP' e negativa in positivam, vel viceversa.

717. Is transitus puncti P per infinitum ex una plaga in plagam oppositam videtur fieri motu profus continuo, tanquam si recta infinita HB, in infinita illa distantia connecteretur quodammodo cum recta infinita HA. Nullo enim tempore continuo deest locus aliquis puncti P, præter momentum illud, quo L' est in O, ac assignato quovis momento temporis, utcumque parum distante a momento illo quo L' est in O, assignari semper potest locus puncti P, qui idcirco eo solo momento temporis in infinito delitescit. In ipso vero motu continuo recta CF vertit quodammodo totum spatium conclusum parallelis CE, HB ita, ut nullum sit punctum utcumque proximum rectæ CE, utcumque remotum a recta CH, per quod aliquando non transeat, quod ipsum accidet rectæ GG respectu spatii DCHA, ubi punctum M' percurreret arcum NK, motu scilicet semper continuo, & nunquam interrupto.

718. Illud unicum est discrimen inter transitum rectæ HP' per nihilum, & per infinitum, quod nimirum in primo casu in ipso transitu ipsa quidem HP' jam nulla sit, punctum vero P habeatur in H; in secundo punctum P in illo immenso infiniti pelago velut demersum nusquam jam sit, ipsa autem HP' habeatur, & quidem infinita, nisi forte infinitum impossibile sit, qua de re paulo inferius. Illud interesse generaliter notari potest, nihilum, & infinitum absolutum in extensione ita inter se connecti, ut quotiescumque in aliqua proportione geometrica bini termini finiti maneat, qui vel simul medii sint, vel similes extremi, si reliquorum alter evanescat, debeat alter vadere absolute infinitus, & viceversa, quod etiam manifestum sit, si ducatur LZ perpendicularis ad KO erit enim CZ ad ZL, ut CH ad HP', ac abeunte in O evanescit CZ, & remanent finitæ CH, & ZL sed hac de re occurret iterum sermo.



719. Cæterum quod punctum  $P$  motu quodam continuo transeat per infinitum; & illud ipsum, quod ex altera parte demersum fuerat in infinito, & obtutum, regrediatur ex parte opposita, videtur erui etiam ex solutione problematis, quo quaeratur in figura 265, tertia  $CP$  continitè proportionalis post binas  $CM$ ,  $CO$  datas. Si enim centro  $C$  intervallo majoris  $CO$  describatur circulus, cui occurrat in  $I$  recta  $MI$  perpendicularis ad  $CO$ , ducaturque per  $I$  tangens infinita  $GF$ , occurrens rectæ  $AB$  alicubi in  $P$ , erit ex circuli natura  $CP$  tertia proportionalis quaesita; ubi interea notetur & illud, licet ejusmodi recta in binis punctis  $I$  circulo occurrat, unicam tamen  $CP$  respondere; unico puncto  $M$ ; & eandem ab utroque exhiberi idcirco; quod cum etiam ob angularem rectum  $CIP$  sit  $CM$  ad  $MI$  ut  $MI$  ad  $MP$ ; ubi pro  $MI$  positiva, sumatur eadem negativa, manente directione primi termini  $CM$ , & ea mutata in binis terminis proportionis quatuor terminorum  $CM$ ,  $MI$ ,  $MI$ ,  $MP$ , debet manere etiam directio quarti termini  $CP$ ; adeoque ubi  $MI$  post transitum puncti  $I$  per  $O$  redeat ad magnitudinem eandem, licet oppositam directionem accipiat; debet redire eadem & magnitudo, & positio rectæ  $MP$ , & locus puncti  $P$  esse idem. Sed hoc ad transitum per infinitum non pertinet.

720. Pro ipso transitu per infinitum considerando, recta  $CO$  utrinque in infinitum producat in  $A$ , &  $B$ ; ac circulo iterum occurrat in  $N$ , recta vero ipsi  $NO$  perpendicularis per  $C$  ducta occurrat circulo  $QQ$ , & per utrumque  $Q$  sit tangens  $DE$  indefinitè producta. Concipiatur jam punctum  $M$  motu continuo delatum ab  $O$  ad  $N$  ita, ut superato centro  $C$ , abeat in  $M$ . Punctum  $I$  transferetur per  $Q$  in  $I$ , tangens  $GF$  per  $DE$ , in  $GF$ ; punctum vero  $P$  per infinitum recedens ex parte  $B$  regredietur ex ipso infinito ex parte  $A$ . Ipsum quidem in ipso appulsu puncti  $M$  ad  $C$ , infinito veluti obtutum, nusquam erit; tangens enim  $DE$  parallela  $AB$  nusquam ipsi  $AB$  occurret; at utcumque

parum distet  $M$  a  $C$ , erit omnino alicubi ex parte altera  $B$ , vel  $A$ . Porro in eo motu puncta  $M$ , &  $I$  semper intueri licet, quæ dum per  $Q$ , &  $C$  transeunt, transeunt illa quidem motu continuo, nec omnino mutantur, sed porro pergunt. Punctum igitur  $P$ , quod iis semper responderet, quod semper mentis acie Taltem intueri possumus extra unicum infiniti casum, videtur, in illo unico infiniti casu in infinito ipso quodammodo delituisse, non interiisse, nec mutatum esse, dum in illo casu unico in infinito delituit quodammodo, sed ex plaga contraria requisisse idem, adeoque in illis plagis contrariis videntur quodammodo connecti rectæ  $CB$ ,  $CA$  nexu quodam nostræ menti impervio, sed qui, nisi infinitum repugnet, omnino haberi debeat. Porro novæ  $CM'$  responderet ipsa nova  $CP'$  ex parte opposita, quia ex quatuor proportionalibus  $CM$ ,  $CO$ ,  $CO$ ,  $CP$ , mutata directione unius  $CM$ , ac manentibus  $CO$ , debuit mutari & postremæ  $CP$  directio, ac si pro  $CO$  sumatur  $CN$ , & fiant  $CM'$ ,  $CN$ ,  $CN$ ,  $CP'$  proportionales, mutatis primis tribus, mutari debet, & quæstus terminus, cum ( $n. 688$ ) mutationum numerus impar, inducat mutationem in termino per præcedentes determinato par vero ipsum retineat.

721. Porro ipsa hæc mira continuatio, in translatione puncti per infinitum ad plagas prorsus contrarias, & menti nostræ impervius infiniti nexus plurimis aliis exemplis e Geometria petitis confirmatur, ubi nimitum, quæ cum puncto in infinitum recedente ita, ut nusquam jam sit, connectuntur, mutari cernimus motu continuo, & oculis ipsis subjecta, ac quodammodo velut devincta retinemus, ne in transitu per nihilum fugiant, & mutantur. Unam ex hujusmodi exemplis hic proferemus, in quo quidem omnino videtur demonstrari immediatus ille transitus, & infiniti nexus, ac patebit, rectam lineam haberi debere pro circulo, cujus radius sit infinitus, & cujus centrum in infinita illa distantia, quodammodo velut ob-

non delitescat, ac deinde ex parte opposita regredia-  
tur, Ubi autem ex eo plures fructus perceperimus,  
progrediemur ad illustrandam ejus ope continuationis  
legem, & multa, quæ ad cuspides, atque ad infinita  
curvarum crura pertinent, evolvemus. Multo autem  
plura in ipsis Sectionum Conicarum proprietatibus oc-  
current ex hoc miro, & nostræ menti profus imper-  
vio infiniti nexu in plagis oppositis derivata ubi etiam  
dum earum natura, & analogia evolvitur, mysteria  
quædam se prædent, quæ mentem altius defixam, ac  
geometricis meditationibus iniciatam incredibili sane  
voluptate perfundatur.

722. Concipiatur in ipsa fig. 264 radio PH circulus  
occurrent ipsi AB præterea in R. Moveatur jam, ut  
prius, punctum L per arcum NKOQ, & mentis acies  
desigatur in mutationes omnes, quæ interea accident  
ipsi circulo, tum quod ad magnitudinem, tum quod  
ad directionem pertinet curvaturæ. Curvatura qui-  
dem circuli & est minor, quo radius est major;  
eo enim magis ejusdem longitudinis arcus ad rectam  
accedit lineam, quo e majore abscinditur circulo,  
quam ob causam putei superficies, quæ ex ingenti  
vocius Telluris sphaera desumitur, sensibus apparet  
profus plana: atque idcirco circuli curvatura æsti-  
mari solet ita, ut sit in ratione reciproca simplici ra-  
diorum.

723. Dum igitur punctum L accedit ad K ultra quos-  
cumque limites, minuitur radius HP pariter ultra li-  
mites quoscumque, & ultra quoscumque limites auge-  
tur curvatura. Apellente L ad K, appellit P ad H,  
evanescit radius HP, evanescit circulus, postquam  
per omnes finitarum magnitudinum gradus decreve-  
rit; curvatura autem ipsius circuli per omnes pari-  
ter finitarum magnitudinum gradus aucta infinita esse  
operet in eæ casu, ut in fig. 265 recta CP recipro-  
ca CM infinita evadere debuit, in ipso velut interi-  
oræ rectæ CM evanescentis. Transiente L in L', jam  
transit radius HP', ac circulus per omnes itidem fini-  
tarum

tarum magnitudinum gradus crescunt, curvatur vero minuitur; ac curvatura ipsa jam oppositam directionem acquisivit, & quæ cavitas prius respiciebat plagam A in infinitum extensam, jam plagam B respicit. extensam pariter in infinitum ad partes contrarias. Habemus igitur jam, curvaturam in transitu quodam per infinitum directionem mutasse motu continuo, & postquam cavitas quibusdam velut hiantibus oculis plagam A aspectaverat, ut motu continuo pergens, ipsos oculos jam ad plagam B conversos habet. Verum hæc quidem curvatura ipsa ad illam infiniti magnitudinem videtur accessisse ultra quoscumque limites, ac eam nequaquam attingisse, nisi in ipso puncto, quod partibus, & flexu caret, quandam velut infinitam curvaturam animo confingamus.

724. Pergat jam moveri L' versus O: perget augeri circuli radius, & ipse circulus, ac per omnes magnitudinum finitarum gradus crescent in infinitum. Interea vero curvatura circuli decreset pariter ultra quoscumque limites, & peripheria ad rectam CH utrinque in infinitum productam in S, & T accedet pariter ultra quoscumque limites ita, ut nullum sit punctum V ejusdem rectæ in quacumque distantia ab H assumptum, ad quod ea peripheria aliquando non accedat ultra quoscumque limites distantie quoscumque VI' utcumque parvæ. Ubi cumque enim assumatur punctum F' extra rectam ST, semper inveniri poterit locus centri P' in recta AB ejusmodi, ut peripheria per ipsum transeat. Satis erit rectam HF ducere, tum ad I' constituere angulum HI'X æqualem angulo I'HB, & recta IX debet rectæ HB occurrere alicubi ob angulos I'HB, HI'X simul minores duobus rectis; ac ob eorum angulorum æqualitatem debet ibidem triangulum constituere isoscelium: ac proinde ubi ad eum occursum devenerit P' transibit peripheria per I', & eo transgresso, peripheria ipsa adhuc ad V accedet propius. Quod quidem cum verum omnino sit de quovis puncto I' utcumque proximo cuivis puncto V rectæ ST: peripheria ipsa mo-  
tu

tu continuo verret quodammodo, ac velut perraderet omne spatium planum, quod a recta  $ST$  in infinitum protenditur ad partes  $B'$  ita, ut nullum sit punctum ejus infiniti spatii, ad quod aliquando peripheria non pertingat; dum  $L'$  percurrit arcum  $KO$ , nullum, ad quod iterum redeat, sed assignatio quovis puncto ejus spatii, ubicumque posito, assignari semper possit locus centri  $P'$  ipsi respondens in recta  $HB$ , & puncti  $L'$  locus in arcu  $KO$ , ac utrolibet ex his assignato, assignari pariter possint omnia superficiæ puncta, per quæ tum transit ipsa peripheria.

725. Abeunte  $L'$  in  $O$ , punctum  $P'$  infinito obrutum, nusquam erit, at abeunte  $L'$  in arcum  $OQ$ , &  $P$  ex parte opposita emergente ex infinito, jam circumulum habebimus cum directione curvaturæ opposita, jacentem penitus ad plagam a priore prorsus aversam respectu rectæ  $ST$ , Radius, & circulus decrescent per omnes finitarum magnitudinum gradus, curvatura crescet, arcus autem eodem ordine verret, ac perraderet omne spatium, quod ab ipsa recta  $ST$  porrigitur in infinitum ad partes  $A$  ita, ut per quodvis punctum  $L$  ejusdem spatii transeat aliquando, donec, abeunte demum  $L'$  in  $Q$ , recidat iterum  $P$  in  $H$ , ac eadem phenomenorum series exordiat.

726. Jam vero quinam futurus est peripheriæ status in ipso appulsu  $L$  ad  $O$ , in quo punctum  $P'$  ita in infinitum recessit, ut nusquam jam esset? Debuit sane congruere cum ipsa recta  $ST$  in infinitum producta, Conspiciantur enim omnes infiniti status punctorum  $P'$ , &  $L'$ , ac omnes pariter infiniti status peripheriæ circa punctum  $H$ . Cuius ex illis respondere debet aliquis ex his. Nullus autem ipsius peripheriæ status habetur extra rectam  $ST$ , cui non respondeat altera ex parte rectæ  $ST$  suus status punctorum  $L' P'$ , nec ullus est puncti  $L$  status in arcu  $KOQ$  extra  $O$ , cui non respondeat aliquis status puncti  $P$  in recta infinita  $AB$ , & aliquis peripheriæ status hinc, vel inde a recta  $ST$ . Quare pro appulsu puncti  $L'$  ad  $O$ , cui

respondet casus ille puncti  $P'$  in immensam illam infiniti abyssum, atque voraginem velur demersi, ille unicus status peripheriæ relinquitur, nimirum congruentia cum recta  $ST$ : Quoniam peripheria circa  $H$  universam aream perradit ex parte  $B$  motu continuo, & in illo transitu  $L'$  per  $O$  abiit ad plagam oppositam; profecto debuit in ipso appulsu  $L'$  ad  $O$  transire per rectam ipsam, nec a punctis  $I'$  ad puncta  $I$  transilire potuit, nisi transeundo per puncta  $V$ .

727. Inde autem duplici via nexus ille infiniti videtur etui: primo quidem, quia recta ipsa infinita  $ST$  debet considerari tanquam circulus quidam infinitus, cujus centrum sit in infinita quadam distantia, sive ex parte  $B$ , sive ex parte  $A$ ; quæ partes in ipso infinito copulentur quodammodo, & conjungantur, ut ipsa circuli peripheria ab  $H$  versus  $T$  digressa ad ipsum  $H$  ex parte  $S$  redeat quodammodo ductu continuo, nec usquam abrupto. Secundo vero, quia ut peripheria illa eadem circa  $H$ , ex parte  $SBT$  transit motu quodam continuo ad partem  $SAT$ , nec in ipso transitu est mutata, sed se explicavit quodammodo, & sine saltu ullo in rectam abiit, ac deinde in contrariam partem se flexit, ita & illud ejus centrum  $P'$  videtur idem. itidem mansisse, nec in illo transitu per infinitum commutatum esse.

728. Atque hinc quidem licet jam ad Conicarum Sectionum analogiam quandam considerandam migrare, sed quo plenius intelligatur res ipsa, addenda quædam, quæ pertinent ad regressum puncti cujuscumque motu continuo delati a finitis quibusdam limitibus, & ab ipso infinito, quæ ad continuitatem Locorum Geometricorum intimius cognoscendam conducunt, & cum his, de quibus agimus, nexus habent arctissimos.

729. In primis ubi quæpiam quantitas perpetuo decrescit, ac demum evanescit coeuntibus binis illis limitibus, quibus terminabatur, ut, ubi de lineis agitur, binis punctis; aliquando quidem in contrariam mutatur, & in negativam abit, motum suum proficiente

LOCORUM GEOMETRICORUM. 259

venit altero ejus limite, vel utroque, si uterque li-  
mes sit mobilis, quod in exemplis contigit huc usque  
altius; aliquando vero retro regreditur; & cum eadem  
directione iterum crescit ex parte positiva, limitibus il-  
lis ipsis; vel eorum altero, si alter immobilis manet,  
retro cursum reflectentibus; unde adveniant. Eodem  
vero pacto etiam ubi quantitas excrescit in infinitum,  
aliquando quidem ejus limes ex infinito regreditur ex  
parte opposita; ut pariter in exemplis huc usque alla-  
tus contigit; aliquando vero ex eadem itidem parte in-  
finiti redit retro, quo pacto quantitatis ipsius directio  
non mutatur. Rem itidem exemplis e simplici Geome-  
tria petitis illustrabimus.

730. In fig. 264. vidimus, HP mutare directionem  
tam ubi in appulsu L ad K, vel Q evanescit, quam  
ubi in appulsu ad O, vel N transit per infinitum.  
Id quidem semper accidet; ubicumque assumatur C  
intra circulum, ducta per ipsum punctum C recta  
DNOE; & excurrente puncto L motu continuo per  
circuli peripheriam. At si, ut in fig. 266; punctum F 266  
C assumatur extra circulum ita, ut e binis tangen-  
tibus ex ipso ductis ad circulum ipsum altera CQ sit  
parallela AB; quæ producatur indefinite in DE, alte-  
ra sit CK, quæ ipsam AB secet in H, ac punctum L  
ipsius circuli peripheriam percurrat omnem motu con-  
tinuo; & recta GF per ipsum, ac per C transeat sem-  
per intersectio illa P oscillabit quodammodo inter ni-  
hilam; & infinitum, retro ex utroque limite regre-  
diens sine directionis mutatione. Si enim in arcu  
circuli inter Q; K ad partes C ponatur I, ad par-  
tes vero contrarias R, & punctum L per arcum QRK  
excurrat versus K motu continuo, minuetur HP: eo  
appellente ad K, ipsa HP evanescet; eo abeunte in  
L' in arcum KIQ, iterum P regredietur; & HP cre-  
scent eadem directione, qua prius, ac per omnes ma-  
joritudinum finitarum gradus interjacentes inter nihi-  
lata, & infinitum, evadet demum absolute infinita,  
ubi L' appellit ad Q, quo abeunte in L in arcum

QRK, iterum P retro redibit ex infinito ex eadem plaga sine transitu ad directionem oppositam, ac decreset per omnes magnitudinum earundem gradus ab infinito usque ad nihilum, & ad ipsum nihilum appellet, ut prius, in ipso appulsu L ad K.

731. Hæc autem ipsa videre est in illis Parabolarum, ac Hyperbolarum generibus, de quibus a nu. 694 egimus, ubi Parabolæ ostendent binos hosce casu per nihilum; Hyperbolæ vero in transitu per infinitum. Nam  
 F248 in fig. 249, ubi punctum P per arcum TVS motu continuo excurrat, minuitur tam abscissa VR, quam ordinata RP ultra quoscumque limites, evanescent in ipso appulsu ad V, tum abeunte P in P<sub>2</sub> crescit utraque ex parte opposita, directionem mutata in ipso transitu per nihilum. In fig. 248 in transitu per nihilum in V mutat quidem directionem abscissa VR abiens in VR<sub>2</sub>, sed ordinata RP non mutat, quæ nimirum retro regreditur in R<sub>2</sub>P<sub>2</sub>. In fig. 250 e contrario, abeunte P per V in p, ordinata RP mutat directionem in R<sub>p</sub>: abscissa VR retro regreditur. At in fig. 254 si recta quædam parallela QQ moveatur motu continuo directione NM, excrescit ordinata RP in infinitum, per quod transit in ipso appulsu R ad V, tum abeunte R in R<sub>2</sub>; mutat directionem, & abscissa VR delata in VR<sub>2</sub> transgressa nihilum, & ordinata RP in R<sub>2</sub>P<sub>2</sub> transgressa infinitum, ubi punctum P a cruce P<sub>2</sub> transit motu quodam continuo ad cruce sP<sub>2</sub>. quasi illa infinita cruce in illa infinita distantia licet vergente ad partes oppositas, inter se quodammodo connecterentur, & continuarentur. At in fig. 255 abit quidem abscissa VR in VR<sub>2</sub> per nihilum directione mutat, at ordinata RP directionem suam retinet in R<sub>2</sub>P<sub>2</sub>, quo casu cruce P<sub>2</sub> cum cruce sP<sub>2</sub> continuatur quodammodo in illo infinito, ex quo ex eadem plaga O regreditur. In fig. 256. arcus P<sub>2</sub> cum arcu sP continuatur quodammodo in illa infinita distantia opposita, & abscissa quidem VR retro regreditur e nihilo ordinata vero RP in motu puncti P per P<sub>2</sub>sP transgresso infinito mutatur, & oppositam directionem acquirit.



quitit . Porro in hoc casu continuari arcum  $Pt$  cum  $sp$  in illis plagis oppositis , colligitur ex eo , quod si per  $B$  agatur recta infinita  $IH$  occurrens cruri  $Pt$  in in  $P$  , tum convertatur , ut angulo  $ABH$  evanescente congruat cum directione  $BA$  , & fiat parallela rectæ  $OQ$  , rum pergat ulterius in  $I'H'$  , punctum  $P$  , peragrato toto arcu infinito  $Pt$  , ex parte opposita regreditur per  $sp$  in  $p$

732. In his quidem exemplis habuimus mutationem & abscissæ , & ordinatæ in fig. 249 , & 254 ; mutationem abscissæ , & regressum ordinatæ a nihilo , vel infinito in fig. 248 , & 255 ; regressum abscissæ , & mutationem ordinatæ in fig. 250 , & 256 . Nulla ex curvis ejus generis exhibet regressum utriusque tam abscissæ , quam ordinatæ , ac cuspidem quidem , quæ ibi occurrunt , habent binos arcus positos hinc , & inde a communi tangente , & crura asymptotica , si regrediuntur ex eadem parte infiniti , jacent pariter hinc , & inde ab asymptoto . Sed facile est , curvas invenire harum ope , in quibus uterque arcus jaceat ad eandem tangentis partem , ac utrumque crus ad eandem partem asymptoti , regrediatur autem abscissa e nihilo , ac ordinata sive e nihilo , sive ex infinito .

733. Sit in fig. 267 cuspis  $DOD$  ejusdem generis F267 ac in 250 , vel 253 , in qua tangens  $OA$  jaceat inter binos arcus  $OD$  ,  $OD'$  . Assumpta  $AV$  : ad arbitrium ducatur recta  $MN$  in quovis angulo finito cum  $OA$  , quæ occurrat rectæ  $OA$  in  $A$  , captoque in eadem recta segmento  $AV$  ad arbitrium , ducatur  $VO$  indefinita , ac per quodvis ejus punctum  $E$  recta  $EL$  parallela  $MN$  , quæ occurrat curvæ  $D'OD$  in  $I'$  ,  $I$  , rectæ  $OA$  in  $F$  , ac in ipsa  $EL$  capiatur  $EP$  tertia post  $VE$  ,  $EI$  , &  $EP'$  tertia post  $VE$  ,  $EI'$  in eadem directione , in qua jacent  $EI$  ,  $EI'$  , nisi directio  $VE$  mutata , cogat mutare directionem ipsius  $EP$  , vel  $EP'$  , & puncta  $P$  ,  $P'$  erunt ad novam cuspidem  $TOS$  , cujus tangens erit ipsa illa recta  $VO$  ita , ut uterque arcus  $OT$  ,  $OS$  jaceat ad eandem partem tangentis ipsius . Nam accedente  $E$  ad  $O$  ultra quoscumque limites ,

limites; decrefcit etiam EF, adeoque tam EI, quam EI' ultra quofcumque limites. Quamobrem EP, & EP' decrefcunt ultra quofcumque limites etiam refpectu ipfarum EI; EI', adeoque refpectu EF, & refpectu EO habentis ad EF rationem finitam; unde fit, ut recta per O, & P, vel P' ducta accedat ad OV ultra quofcunquc limites; quæ idcirco punctis P, P' abeuntibus in O fimul fiet tangens; & recidet in rectam VO: jacebit autem tam EP', quam EP' in directione eadem propè cuspide; cum EI, EI' in eadem directione jaceant.

268 734: At in fig. 268 funt bina crura afymptotica ID, ID' hinc, & inde ab eadem afymptoto AB, ut in fig. 255, & 256 ab iisdem VO, VN. Secet ipfam ABquevis MN in A, & hanc in V fecet OQ parallela ipfi afymptoto AB. Ducta vero recta EL, ut prius, fiat pariter EP, vel EP' tertia post VE, EI, vel EI', & puncta P, P' erunt ad alia bina crura Tt, Ss, quæ habebunt pro communi afymptoto rectam VO; fed jacebunt ad eandem partem refpectu ipfius: Crescente enim VE in infinitum, accedunt EI, EI' in infinitum ad EF æqualem datæ VA: Quamobrem EP, EP' tertiæ post VE, & EF decrefcunt in infinitum; & crus utrumque accedit ad VO ultra quofcunquc limites, quam idcirco habet pro afymptoto. Quoniam vero rectæ EI, EI' eandem directionem habent; habebunt eandem etiam EP, EP', & ramus uterque jacebit ad eandem partem afymptoti.

735: Porro in utraq; constructione facile admodum inveniuntur puncta H, H', in quibus nova curva priorem fecat. Ea determinabuntur a recta fecante bifariam angulum OVN. Si enim hæc recta occurrat rectæ EL in L: patet ob angulum ELV æqualem alterno LVN, adeoque etiam angulo EVL, fore EL æqualem EV, adeoque EP, vel EP' tertiam post EL, EI, vel EI' fore minorem, æqualem, vel majorem refpectu EI, prout fuerit EI refpectu EL. Quare ubi L congruet cum I, vel I' in H, vel H', ibi cum iisdem congruet etiam P, vel

735. vel P'. Sed hæc ad rem præsentem nullius sunt usus. Illud autem huc pertinet, quod in fig. 267 si habeatur pro abscissa OE, pro ordinata EP, EP' vel etiam EI, EI', excurrente P, vel I per arcum TPOP'S, vel DIOI'D', regreditur simul e nihilo, tam abscissa OE, quam ordinata EP, vel EI, manente eadem directione etiam in EP', vel EI'. At in fig. 268, si ducantur ordinatæ PR, P'R' parallelæ rectæ OV, abeunte P per crura Tt in infinitum, ac redeunte per P'S ex infinito, tam abscissa VR, retro regreditur per VR' e nihilo, quam ordinata RP per R'P' ex infinito.

736. At huiusmodi curvam, quæ bina crura asymptotica habeat ad eandem asymptoti partem, & quæ idcirco eundem illum regressum exhibere possit utriusque, nimirum tam abscissæ, quam ordinatæ, admodum facile est construere etiam in fig. 266. Satis est ibidem rectam CP producere ita, ut PO, PO' sint æquales ip-F266  
sis CL, CL'; & omnia puncta O, O' erunt ad curvam SO'MOT, quæ conunget in M rectam CH producta ita, ut sit HM æqualis tangenti CK; habebit vero bina crura O'S, OT in infinitum tendentia ab eadem parte rectæ HA, quæ erit asymptotus utriusque. Ductis enim CV, ON, ON' perpendicularis in ipsam AH, erit CP ad PO, vel PO', nimirum ad CL, vel CL', ut CV ad ON, vel ON'. Quare aucto in infinitum primo termino CP in accessu L, vel L' ad Q, & manentibus finitis CV, CL, vel CL', debet ON, vel ON' decrescere ultra quoscumque limites, & cum CL, CL' ambæ directionem habeant semper eandem; eandem pariter directionem habebant semper. & PO, PO', utroque puncto O jacente ad eandem partem rectæ AH. Abeuntibus autem L, & L' in K, patet O, & O' debere abire in M; unde illud consequi patet, rectam nimirum FG evadere tangentem curvæ TMS.

737. His fufius aliquanto expositis licebit jam inducere continuitatem quandam in ipsis Sectionibus Conicis, quæ in Hyperbola fit cum transitu per infinitum ad partes oppositas, in Parabola vero cum regressu. In

**F269**fig. 269 sint inter asymptotes  $MCm$ ,  $NCn$  bini rami ejusdem Hyperbolæ  $SDT$ ,  $sdt$ , ac recta quædam infinita  $RB$  transiens per ejus punctum  $D$  ipsi iterum occurrat in  $P$ , & circa ipsum  $D$  motu continuo convertatur, donec integram conversionem absolvat: jaceat autem  $Pr$  in crure  $DS$ , per quod ita excurret, ut  $A_1B_1$  evadente in  $A_2B_2$  parallela asymptoto  $Mm$ , nusquam jam sit, sed crure toto peragrato in infinito illo quodammodo delitescat: abeunte  $A_2B_2$  in  $A_3B_3$  jam punctum  $P$  emerget in  $P_3$  ex distantia infinita opposita in crure  $s$ , ac motu continuato per  $A_4B_4$  peragrabit  $P_4$  totum crus  $s$ , donec facta  $A_5B_5$  parallela asymptoto  $Nn$ , iterum nusquam sit: pergente vero recta in  $A_6B_6$  regredietur ex infinito ex parte opposita per crus  $T$ , quod percurreret totum, donec recidat in  $D$ , facta  $A_7B_7$  tangente. Atque hoc quidem pacto, ubi recta  $AB$  dimidiam conversionem absolvet motu continuo, Punctum itidem  $P$  motu continuo percurreret utcumque Hyperbolæ ramum, & Hyperbola ipsa habenda erit pro curva quadam continua, quæ quodammodo in orbem redeat etiam ipsa, & in infinitis illis oppositis distantibus quodammodo veluti conjugatur, connectaturque, crure  $t$  conjuncto cum  $T$ , &  $s$  cum  $S$ . Ductus autem ejus continuus est  $DP_1S$  (*infinitum*)  $sP_2P_4t$  (*infinitum*)  $TP_6D$ .

738. Quod si punctum  $D$  assumatur intra Hyperbolæ ramum ubicumque recta binas semper habebit intersectiones cum ejus perimetro juxta num. 284, dempto casu, quo evadat asymptotis parallela, quo casu altera ex intersectionibus in infinitum abibit, & nusquam jam erit; semper autem ex infinito redibit ex parte opposita; unde consequitur etiam illud, mutari semper rectam  $DP$  e positiva in negativam in quovis transitu puncti  $P$  ex altero ramo in alterum. Sic  $DP_1$  jacet directione  $DA_1$ , sed  $DP_3$  post transitum per infinitum contrariam directionem habet  $DB_3$  quam habet etiam  $DP_4$ ; at iterum superato infinito  $P_6$  jacet ad partes  $A_6$ . Quare si qua recta digesta a dato

dato puncto, & terminata ad alterum ramum habeatur pro positiva; ubi ad ramum alterum terminabitur, habenda erit pro negativa. Chorda quoque quævis, quæ ad eundem ramum terminabatur, si terminetur ad utrumque, e positiva transibit in negativam.

739. Hinc autem etiam, si concipiatur Hyperbolæ ordinata  $Pp$  in fig. 11 post recessum puncti  $R$  in infinitum regressumque per  $R'$  ex parte opposita regrediens per  $Pp'$ , permutabuntur puncta  $P, p$  in  $p', P'$  ita, ut existente  $P$  in latere dextro, sit  $P'$  in sinistro, & viceversa  $p$  e latere sinistro transeat in  $p'$  in latus dexterum, mutata itidem ipsius chordæ  $Pp$  directione in contrariam in  $Pp'$ , eaque ipsa e positiva migrante in negativam, vel viceversa.

740. At in Parabola longe alio modo se res habet. Habetur nimirum regressus ex infinito in recta  $DP$  in fig. 270. Si enim per punctum quodvis perimetri  $D$  transeat recta  $A_1B_1$ , & occurrat ipsi perimetro iterum in  $P_1$ , tum moveatur ita, ut accedat ad positionem parallelam axi; recedet  $P_1$  ultra quoscumque limites per crus  $DS$ ; & semper alicubi existet; donec  $AB$  fiat in  $A_2B_2$  parallela axi; quo casu juxta num. 149 ipsum  $P$  nusquam jam erit: at progrediente recta ipsa in  $A_3b_3$ , statim habebitur  $P_3$  in crure  $TD$ , quod punctum percurrat totum id crus, donec in idem punctum  $D$ , ex quo fuerat digressum, recidat ubi  $AB$  evaserit tangens in  $A_4B_4$ . Hic igitur  $DP$ , ubi in  $DP_1$  in infinitum excreverit, recto redibit in  $DP_3$  cum directione eadem. Erit autem Parabola etiam ipsa curva quædam continua in se quodammodo rediens hoc ordine  $DP_1S$  ( *infinitum* )  $TP_3D$ .

741. Hic autem mirus itidem videtur nexus crurum  $S$ , &  $T$  in infinita licet distantia a se invicem se conjugentium quodammodo. Recedunt illa juxta num. 77. & ab axe, & a se invicem ultra quoscumque limites: at ut in Hyperbola binorum ramorum crura continuabantur in illa infinita opposita distantia

stantia, ita hic continentur quodammodo crura  $S, T$  in distantis oppositis. Si nimirum  $D$  sit vertex axis  $DA_2$ ; & concipiatur ordinata  $PIP_3$ , quæ abeunte  $R$  in infinitum, & regresso inde regrediatur cum ipso; puncta ipsa  $P_1, P_3$  non regredientur, sed  $P_1$  transibit in  $P_3$ , &  $P_3$  in  $P_1$  transgresso infinito, in quo & ordinata ipsa in infinitum crescens continuatur quodammodo, & crura  $S, T$  continentur. Hiatus vero ille inter bina crura  $S, T$  licet crescens in infinitum considerandus erit tanquam punctum quoddam infinitæ peripheriæ infiniti circuli descripti facto centro in vertice  $D$ . Utcumque enim exiguus angulus fiat  $A_1DA_2$ , semper (num. 286) recta  $A_1BI$  occurret iterum alicubi in  $P_1$  cruri parabolico, & ultra ipsum excurret. Si nimirum facto centro in  $D$ , assumpto radio quovis, de scribatur circulus occurrens rectis  $A_1D, A_2D, A_3D$  in  $H_1, H_2, H_3$ , utcumque exiguus sit arcus  $H_1H_2$ , semper punctum  $A_1$  excurret ultra Parabolæ ramum, ut pariter utcumque exiguus sit arcus  $H_2H_3$ , excurret  $A_3$  ultra ipsum ramum. Quare si sumatur arcus  $H_1H_2$  in quavis utcumque exigua ratione ad totam sui circuli peripheriam, in circulo, qui concipiatur descriptus radio  $DA$  superante chordam  $DP$ , adhuc minorem rationem habebit arcus interceptus cruribus  $ST$ , cum eam habere debeat arcus interceptus rectis  $P_1A_1, P_3A_3$ . Quare in circulo infinito ea ratio debet esse prorsus nulla, ita, ut arcus interceptus ipsis cruribus nec habeat unum gradum illius circuli, nec unum minutum, nec unum secundum, & ita porro, sed haberi debeat respectu ipsius prorsus ut punctum quoddam, quod illi ideæ continuitatis crurum  $ST$  magis etiam favet, & videtur excludere saltum quemdam infinitum e crure  $S$  ad  $T$  in illo continuato motu puncti  $P$  peragrantis ramum omnem Parabolæ, qui quodammodo redeat in se ipsum.

742. Porro eadem continuatio, & nexus crurum, ac regressus curvæ in se ipsam ope infiniti habetur etiam in curvis reliquis, de quibus hic egimus, sive para-

boli-

bolici generis sunt, siye hyperbolici. In primis in fig. 248, & 249, quodvis Parabolæ genus in orbem F<sup>248</sup> redit hoc ordine, VPT (*infinitem*) SP<sub>2</sub>V, & in 249 fig. 250 VPT (*infinitem*) SpV, Id patet, si concipiatur recta indefinita transiens per P, & V, Si enim ea moveatur circa V, & discedens a positione MN convertatur, donec deveniat prius ad positionem QO, tum ad NM, punctum P percurreret prius totum crus VT, ex quo motu continuo transibit ad crus SV, quod percurreret, cruce T connexo quodammodo cum cruce S in illa ipsa infinita distantia. In ramis pariter Hyperbolicis in fig. 254, 255, 256, semper habebitur continuatio crurum t, s, ac T, S in infinita distantia, & ductus curvæ continuus habebitur per BT (*infinitem*), SP<sub>2</sub>s (*infinimum*) tPB, ac in fig. 254 tam T, & S, quam t, & s conjunguntur in distantia infinita opposita, in fig. 255. T, & S conjunguntur in opposita t, & s in eadem, in fig. 256 contra T, & S in eadem t, & s in opposita.

743. Generaliter autem in figuris omnibus geometricis, siye quarum omnia puncta inveniri possunt quocumque modo ope simplicis Geometriæ, vel ope curvarum per simplicem Geometriam constructarum per puncta, si quod crus in infinitum abeat, semper habebitur crus alterum ex infinito regrediens vel ex eadem parte, vel ex contraria eum ipso in illa infinita distantia connexum quodammodo, quod omnino ad continuitatis legem ubique in Geometria servatam religiosissime est necessarium, ac ope calculi algebraici generaliter demonstrari potest, & ubi de applicatione Algebrae ad Geometriam agendum erit, omnino demonstrabitur. Quamobrem ejusmodi crura semper erunt numero paria. Idem autem, & sublimioribus curvis quibusdam contingit, quas transcendentibus vocant, præter spirales quasdam, quæ ex altera parte in infinitum recedunt, ex altera circa punctum quoddam, vel orbem quendam infinitis spiris circumvolvuntur accedentes semper, quin unquam in ipsum recidunt, de quibus

bus agemus alibi. Crura autem hujusmodi, vel parabolici erunt generis, vel hyperbolici. Primi generis crura nullam habent rectilineam asymptotum; ad quam accedant ultra quoscumque limites, sed ultra quoscumque limites a quavis recta data recedunt. Secundi generis crura habent rectilineam asymptotum omnia, ad quam ultra quoscumque limites accedunt. Illa semper recedunt a se invicem in infinitum, & in distantia infinita copulantur: hæc quandoque a se invicem recedunt, in infinitum quandoque vero accedunt; at in primo casu semper recedunt ad plagas prorsus oppositas ita, ut adhuc asymptotum eandem habeat semper utrumque crus, quod ubi in infinitum discesserit ex parte altera ejus asymptoti poterit regredi vel ex eadem parte, vel ex opposita, ac vel ita, ut binactura jaceant respectu ejusdem asymptoti ad easdem plagas, vel ita, ut jaceant ad oppositas. Crus  $Pt$  recedit in infinitum ad partes  $O$  asymptoti  $OQ$  in fig.

**F254** 254, 255, 256, 268, regreditu, autem in prima ex parte 255 te opposita  $Q$ , & ad plagam oppositam  $VM$ , respectu 266 asymptoti ipsius, in secunda ex eadem parte  $O$ ; 268 sed pariter ad plagam oppositam  $VM$ , in tertia ex parte opposita  $Q$ , sed ad eandem plagam  $VN$ , in quarta ex eadem parte  $O$ , & ad plagam eandem  $VN$ :

744. Sic autem etiam in arcubus, qui ad punctum quoddam terminantur, idem accidit, ut ducta ibidem tangente, & recta ipsi tangenti inclinata utcumque, quæ nimirum recta producta cum ea ipsa tangente pariter producta continet 4 angulos; arcus curvæ ipsius continuari debeat, sed jacere possit in quovis ex illis

**F248** quatuor angulis, sive regrediens, sive progrediens. Arcus 249  $VS$ , qui est continuatio arcus  $TV$  jacet in fig. 250 248, & 253, in angulo  $OVM$ , jacente ad latus respectu 251 anguli  $OVN$ , in quo jacet  $TV$ ; in fig. 249, 252 & 252 in angulo  $MVQ$ ; ad verticem opposito: in 243 fig. 250, & 251 in angulo  $NV$ . jacente ad latus alterum: at in fig. 267, tam arcus  $TO$ , quam  $OS$  jacent in eodem angulo  $VOA$ : Quotiescumque autem con-

con-



continuatio habetur in angulo ad verticem opposito, ut in secundo ex hisce quatuor casibus, habetur mutatio flexus in ipso nexu binorum arcuum, recta, quæ arcum utrumque tangit, ibidem ipsum secante, ut in fig. 249, & 252. Quotiescumque habetur continuatio in eodem angulo, ut in fig. 267, habetur cuspis secundi generis duorum arcuum; quorum alter convexitatem obvertit alterius cavitati. In reliquis binis casibus habetur vel continuatio quædam curvaturæ in eandem plagam, ut in fig. 248, & 251, vel cuspis primi generis duorum arcuum sibi obvertentium convexitates, ut in fig. 250, & 253, prout arcus continuatus jacet ad eandem tangentis partem, vel ad oppositam, in quo postremo casu cuspidis primi generis tangens curvam pariter in ipso contactu fecat. Cuspis autem primi generis figuræ 250, & 253 habens tangentem infertam inter binos arcus respondet cruribus hyperbolicis figuræ 255 habentibus asymptotum mediam VO, in quam tangens definit, ubi punctum contactus ita in infinitum recedit, ut nusquam jam sit, & cuspis fig. 267, TOS secundi generis jacens utroque arcu ad eandem tangentis partem cruribus Tt, Ss fig. 268 jacentibus pariter ad eandem partem asymptoti, quæ cuspis in hæc ipsa crura definit, ut patet ex ipsa constructione, si manentibus punctis V, A punctum O ita in infinitum discedat, ut nusquam jam sit, quo casu a cuspidis primi generis DOD' figuræ 267 generantur crura asymptotica DBD' figuræ 268, & a cuspidis TOS illius crura Tt, Ss hujus.

745. Porro in his ipsis cuspidibus, & in illo flexu contrario continuitatis legem observare liceret pariter, sed connexam sæpe cum illo transitu per infinitum, vel cum consideratione rectæ, tanquam in infinitis oppositis distantis continuaturæ, & redeuntis in se ipsam, ac transitum e positivo in negativum, tam per nihilum, quam per infinitum. Curvaturam enim, ut diximus num. 722 metitur radius circuli curvam osculantis in quovis puncto, cui ea censetur reciproce proportionalis. Porro centrum circuli osculatoris semper jacet ex parte cava

in recta perpendiculari tangenti, quod idcirco in flexu contrarij figuræ 352, vel in cuspide primi generis habente tangentem arcibus intermediam in figura 253 debet in V transire e plaga VN, ad plagam oppositam VM, quod fieri omnino non potest, nisi transeat, vel per ipsum punctum V, vel per infinitum, transeunte radio osculi, vel per nihilum, vel per infinitum; ac proinde curvatura, vel per infinitum, vel per nihilum. Et quidem ubi de circuloſcutorum generali determinatione ageinus; videbimus in curvis quibuscumque eam legem sanctè servari semper, ut nulla cuspis primi generis, nullus contrarij flexus habeatur; nisi in eo puncto, in quo radius osculatoris circuli vel per nihilum transit, vel per infinitum; tum vero curvatura, & radii circulus migrant e positivis in negativa, licet aliquando etiam radius osculi, & curvatura, vel ad nihilum deveniant, vel ad infinitum; sed inde segregantur, quo casu oritur; vel arcus porro pergens; ac iter suum producens, ut TVS in fig. 248; vel cuspis secundi generis; ut TOS in fig. 267; qui quidem arcus, & quæ cuspis haberi itidem possunt radio osculatoris circuli ad certam magnitudinem deveniente, nec ad nihilum, nec ad infinitum delato.

746. Præterea si consideretur directio motus puncti P percurrentis arcum TVS, & concipiatur tangens eadem directione, facile apparebit, tam in fig. 248; 251 arcus pergentis, quam in 249; 252 arcus mutantis flexum, sine directionis mutatione continuari motum per PVP<sub>2</sub>; vel PVp, at in cuspide tam primi generis in fig. 250, 253, quam secundi in fig. 267 motum retro reflecti; ac proinde tangentis directio in illis manet, in his mutatur, & in eis ipsa tangens abit e positiva in negativam. Sed mutatio ubicumque fit; fieri semper debet in aliam directionem prorsus oppositam; tanquam si plagæ M, & N in fig. 250; vel Q, O in fig. 253 infinites a se invicem distantes in illa ipsa infinita distantia connecterentur inter se, & continuarentur; quorum analogæ sunt ea, quæ in hyperbolicis crutibus

Notari possunt, ut ubi de curvis agemus generaliter, vel opè solius Geometriæ, vel opè calculi, fufius exponemus, ac demonstrabimus. Hic autem eâ innuimus, ut innotescat hujus hexus, & continuationis usus in universa Geometriâ latissime patens.

747. Porro crura hujusmodi in infinitum protensa in singulis Geometricis Locis jam bina sunt tantummodo, jam quatuor, jam etiam plura ita, ut quivis eorum numerus par haberi possit. Bina tantum parabolica habentur in Parabola conica, & in omnibus sublimioribus Parabolis fig. 248, 249, 250, 251, 252, 253: quia immo bina quodammodo sunt etiam in recta linea hinc, & inde in infinitum protensa. Bina tantum hyperbolica habentur in fig. 266, cujus periméter in se sedit per MO'S (*infinitum*) TOM. Quatuor habentur hyperbolica in Hyperbola conica, & in Hyperbo-  
F 254  
255  
256  
266.

748. Interea antequam eas, quas hic determinavimus, curvas relinquamus; notabimus rationem quandam determinandi tangentes; quas turbant nonnihil cuspidés utriusque generis, quæ possent aliquando non satis cautis imponere. Solent enim quandoque determinari tangentes curvarum hoc pacto: In fig. 266 recta CG secans arcum quendam IKR in L; & L' ita moveatur, ut demum intersectiones L, L' coeant in K: evanescente chorda LL'; abibit ipsa secans in tangentem; & binæ intersectiones in contactum. Hæc methodus fallere potest aliquando; cum fieri possit, ut bi-

pæ interfectiones coeant, quin habeatur contactus, & habeatur contactus, quin binæ interfectiones coeant, Primum accidet, quotiescumque habebitur cuspidis utriuslibet generis, secundum quotiescumque curva a tangente simul secatur, ut in mutationes flexus, & in cuspidis primi generis. Rectæ curvam tangentis vera notio est ea, ut sit recta, quæ ad ipsum arcum omnium maximè accedit ita, ut cum eo contineat angulum quovis rectilineo minorem, sive ita, ut nulla alia recta duci possit e puncto contactus in eo angulo, quem F267 arcus ipse continet cum tangente. Porro si in fig. 267. recta  $EL'$  moveatur motu parallelo, docet abeat in  $OL$ , vel circa punctum  $L$ , donec abeat in  $LOR$ , interfectiones  $L, L'$ , vel  $P, P'$  coibunt in  $O$ , nec tamen utralibet ex iis rectis evadet tangens utriuslibet F252 cuspidis. Contra vero in fig. 252, 253, recta parallela rectæ  $BA$  quamvis occurrens curvæ in unico puncto 253  $P$  motu continuo delata abibit in tangentem  $OVQ$ , 251 quin habeatur concursus binarum tangentium. At extra ejusmodi casus, quotiescumque nimirum, ut in fig. 251, bini arcus  $TV, VS$  continuati jacent in binis angulis, quos tangens cum alia recta per contactum ducta continet ad eandem plagam, semper rite procedet methodus, quod demonstrabimus, ubi de curvis lineis agemus in genere, ut & illud, hunc casum generaliter occurrere in curvis quibuscumque: nam curvæ ipsæ in punctis tantummodo determinatis possunt habere vel flexum contrarium, vel cuspidem primi, aut secundi generis, sive continuationem arcus in aliquo e reliquis tribus angulis tangentis cum normali, non vero in omnibus punctis cujuspiam arcus continui, utcumque parvi, quod ipsum ibidem demonstrabitur de circulo osculatore, qui itidem generaliter habebitur in quavis curva, nec nisi punctis quibusdam determinati tantummodo deesse poterit.

749. Hic interea monendum illud, quoniam ea determinatione tangentis pro Sectionibus Conicis usi sumus

LOCORUM GEOMETRICORUM. 371

mus num. 151, considerando in fig. 46, & sequentibus  
 concursum punctorum P, p in I, idcirco deinde num.  
 193 ostensum esse, tangentem eo pacto determinatam F. 46  
 accedere ita ad arcum curvæ, ut in eo angulo nulla  
 alia duci possit. Nam conferenti conditionem, quæ  
 habetur in utroque casu; quod rectæ ductæ a concut-  
 tu tangentis cum directrice, & a contactu ad focum  
 contineant ibi angulum rectum juxta num. 175; pate-  
 bit utramque determinationem eodem recidere. Quin  
 immo cum inde constet generaliter, eo pacto definiti  
 posse in Sectionibus Conicis tangentem, patet simul in  
 iis, nusquam haberi cuspidem, aut flexum contrarium.

750. Eodem autem vitio, ac in iisdem casibus labo-  
 rare; patet etiam, methodum, quæ tangens determi-  
 natur demonstrando arcum utrimque a quodam puncto  
 jacere ad eandem partem hujusmodi rectæ; ac deducen-  
 do inde, eam rectam esse tangentem, & illud punctum  
 esse punctum contactus. Id accidit in fig. 267 in rectis F. 267  
 omnibus per O ductis, licet unica OV sit tangens cus- 251  
 pidis secundi generis, & unica OA cuspidis primi;  
 quin immo in hac accidis omnibus rectis præter ipsam  
 solam tangentem OA. In ipsa vero tangente id nec  
 accidit hic in cuspidis primi generis; nec in fig. 252  
 in flexu contrario; cum utrobique bini arcus hinc; &  
 inde jaceant ad partes tangentis oppositas; At eo vitio  
 non laborat methodus, qua recta occurrentis curvæ in  
 binis punctis, convertatur circa alterum ex iis immo-  
 tum donec chorda evanescente, eodem recidat & altè-  
 tum. Sic si in fig. 252 per V; & P agatur recta con-  
 vertaturque; donec recidat P in V; recta ipsa abiit in  
 tangentem QQ necessario omnium rectarum proximam  
 ita, ut in eodem angulo nulla alia recta duci possit;  
 nam si nova recta utrimque parum declinet a prima;  
 jam erit una ex iis; quæ habebat alteram intersec-  
 tionem; & arcum binis intersecctionibus interjacentem in-  
 terceptum angulo tangentis cum chorda. Idem autem  
 accideret etiam in fig. 267; in qua si per O, & I, vel P  
 ageretur recta; ac circa punctum O converteretur; donec

abirent ea puncta in O, desineret eadem recta in tangentem OA, OV. Verum hæc ipsa in tractatu de curvis lineis in genere pluribus persequemur, & accuratius omnia demonstrabimus.

751. Interea videbimus hic aliam quandam relationem, quam habet recta linea infinita, cum infinito circulo, quæ nobis usui futura est infra, & ad plures tum analogias, tum anomalias detegendas conduces.

F. 271 Sit in fig. 271 recta infinita MN, eique perpendicularis OQ, quæ ipsam secet in R. In hac sit centrum circuli P. occurrentis ipsi in binis punctis I, I', jacente I' ad partes centri, & rectæ MN in binis A, C. Patet & chordam AC perpendiculararem diametro secari in R bifariam ab eadem, & binos arcus AIC, A'I'C' itidem bifariam in I, & I'. Recedente centro P. in infinitum ita, ut semper circulus transeat per eadem illa puncta A, & C, patet juxta num. 727, æcum AIC debere abire in rectam lineam, adeoque debere congruere, cum ipsa recta AC, abeunte I in R. Reliquus arcus AI', CI' partim abibit in rectas AM, CN in infinitum productas, partim ita in infinitum recedet cum ipso puncto I, ut nusquam jam sit. Quamobrem sicut in ipso circulo bini habentur arcus AC, nimirum AIC, A'I'C' terminatur binis punctis AC, qui arcus secantur bifariam in I, & I', ita habebuntur binæ rectæ AC, nimirum ARC, AM (infinitum), NC, sive assumpto pro caractéristica infiniti signo  $\infty$ , quo semper utemur in posterum, AM  $\infty$ , NC, quorum prima secabitur bifariam in R, secunda in  $\infty$ , ita, ut prioris dimidia sint AR, RC, posterioris A  $\infty$ , C. Quin immo; quoniam, ut in fig. 89 vidimus num. 278, arcus Fm sunt numero infiniti tam directione FBm, quam directione FAm, qui nimirum his arcubus integras quocumque peripherias addant; etiam hic infiniti numero erunt arcus incipientes ab A, & desinentes in C, nimirum AIC, AICIAIC, AICIAICIAIC, & contra A'I'C, A'I'CIA'I'C, A'I'CIA'I'CIA'I'C, & ita porro, ac infinite numero

rectæ

est ARC, ARCN  $\infty$  MARC, ARCN  $\infty$  MARCN  
 $\infty$  MARC, & contra AM  $\infty$  NC, AM  $\infty$  NCRAM  
 $\infty$  NC, AM  $\infty$  NCRAM  $\infty$  NCRAM  $\infty$  NC,  
 & ita porro.

752. Jam vero omissis reliquis magis compositis, ipsa recta finita ARC, & illa per infinitum tractata AM  $\infty$  NC eam inter se analogiam habent, quam in eo circulo arcus AIC, AIC: ut si nimirum arcus communes habent proprietates, si alteri positivè sumpto substituantur alter sumptus negativè, ita etiam in recta illa MN utrinque infinita segmentum ejus finitum AC negativè respondeat segmento AM  $\infty$  NC per infinitum tractato, & viceversa hoc negativè sumptum illi sumpto positivè.

753. Hinc autem in fig. 265, ubi imminuta CM, F265 augetur CP, donec puncto M abeunte in C, abeat P in infinitum ita, ut nusquam jam sit, ac puncto ipso M abeunte in M' ad partes oppositas, abit etiam P ad partes oppositas in P', considerari possunt binæ CP', altera directione CB, quæ directio si assumatur pro positiva, adeoque opposita CA pro negativa, eadem erit adhuc positiva, & altera directione CA jam negativa. Illa nimirum erit COB  $\infty$  AP', hæc CNP'. Hoc modo si res consideretur post eandem CM', & CO, vel CM habebuntur quodammodo binæ tertiæ continue proportionales, altera negativa CNP', altera adhuc positiva COB  $\infty$  AP'. Nimirum cum juxta num. 719 sit CP' positiva tertia post CM positivam, & CO; ut imminuta ipsa CM ultra quoscumque limites, augetur ultra quoscumque limites CP, & illa evanescente, sive abeunte in nihilum, hæc abit in infinitum, ita facta CM' jam negativa, quæ quodammodo concipitur decrevisse infra nihilum, ipsi videtur quodammodo debere respondere ex eadem parte quantitas plusquam infinita, & cum respondeat COPB  $\infty$  AP', videtur hæc dicenda esse quodammodo & positiva, & plusquam infinita. Sed id quidem ad mysterium quoddam infiniti pertinet, & ad analogias

quandam conduit, at in Geometria communi ipsi  $CM$  negativæ negativæ itidem illa finita  $CMP$  respondet sine ullo mysterio, & ita; ut in iis, quæ inde deducantur, perspicua ubique evidentia habeatur; ac maxime manifesta.

271 754. Consideratio tamen binarum  $AC$  in figura 271  
 9 nimirum  $ARC$ , &  $AM$   $\infty$   $NC$ , usum etiam in Se-  
 11 ctionibus Conicis contemplandis paullo inferius habe-  
 269 bit præstantissimum, ubi axi Ellipseos  $MCm$  finito in  
 fig. 9 ostendemus prorsus, & directe analogum; non  
 axem finitum Hyperbolæ  $Mm$  in fig. 11; sed axem  
 $MH$   $\infty$   $hm$  tractatum per infinitum. Pariter in  
 fig. 269, ubi recta  $A_1B_1$  per  $A_2B_2$  abit in  $A_3B_3$ ; concipitur  $DP_1$  per infinitum abire in  $DP_3$  negativam; Abit illa, si analogia spectetur directæ, & ab infiniti mysteriis perita, in  $DA_3$   $\infty$   $BP_3$  adhuc positivam; & per infinitum tractatam, & proprietates prioris quæcumque a directione pendent; cum hujus directione conspirant. Sed considerari solet pro ipsa illa altera  $DP$  finita, ac negativa, quæ huic contranalogæ est, si hac voce uti licet, & est ejus complementum ad quandam veluti infinitum circum, qua idea nobis infra opus erit ad ostendendam illud etiam, posse rationem reddi, cum in negativis quantitibus subtractio additioni substituenda sit etiam; ubi obvenerint ex transitu puncti per infinitum, licet quantitati, quæ habebatur ante discessum in infinitum, sit prorsus, & directe analogæ non hæc quantitas negativa, sed positiva illa per infinitum tractata, quæ juxta illam superiorem ideam plusquam infinita diceretur.

755. Quoniam autem huc usque tam multa vidimus, quæ pertinent ad transitum quantitatum e positivis in negativas, vel regressum inde, liber hic adnectere aliam quandam analogiam, quam habet cum hoc ipso transitu quantitatum e positivis in negativas, vel regressu transitus, qui fit e statu reali, ad statum imaginarium, qui impossibilitatem secum fert juxta num. 684. Transitus e positivo in negativum nunquam fieri potest per



factum quendam, ubi adhuc decrementum haberi possit, vel incrementum ex eadem plaga, sed gradatim; ut nimirum transitus ipse fiat vel per nihilum, vel per infinitum. In primo casu limites magnitudinis; ut ubi de lineis agitur, extrema puncta ad se invicem accedunt; & coeunt, in secundo a se invicem recedunt in infinitum: Eodem pacto realis quantitas nunquam in imaginariam abibit per factum; sed semper gradatim, nec unquam is transitus fiet, nisi ubi ea devenierit vel ad nihilum, vel ad infinitum. Ad hosce veluti scopulos allisa aliquando retro reflectitur adhuc realis, & per eosdem gradus decrefcit; aliquando contrariam directionem acquirit per ipsum nihilum, vel infinitum traducta, aliquando vero in imaginariam quoque migrat, sive impossibilem. Regressus, ac transitus exempla dedimus jam plurima; hujus migrationis in statum imaginarium exempla plurima se ubique proferent. En aliqua rei illustrandæ apta.

756. Dum in fig. 242 recta EF motu continuo delata versus E<sub>2</sub>F<sub>2</sub> appellit ad A; bina puncta G, G ita in se invicem incurrant, & quodammodo veluti colliduntur, ut se destruant; & motu ejus rectæ pergenite, jam nusquam sint, e reali statu in imaginarium translata; quæ migratio a migratione in infinitum plurimum differt. Migratio enim in infinitum determinationem quandam problemati addit, ut ibi Ellipseos vertex in infinitum recedens Ellipsim ipsam mutat in Parabolam, ac abdueto secum in infinitum altero foco, & centro, mutat in parallelos juxta n. 202 radios illos, qui ex altero foco egressi, convergebant in Ellipsi post reflexionem ad focum alterum, ac parallelas iidem reddit diametros omnes quæ in Ellipsi convergebant ad centrum; vel ubi circuli centrum recedens in infinitum ejus peripheriam mutat in rectam lineam. At abitus in imaginarietatem secum trahit impossibilitatem absolutam problematis, quod ejus ope solvebatur ita, ut idem sit in quavis resolutione devenire ad latus quadrati negativi, ac problematis in eo casu impossibilitatem evincere, quod & Geo-

Geometris, & Algebraicis solemne est. Linea igitur GG in eo casu evadit imaginaria posteaquam per omnes finitarum magnitudinum gradus decrevit usque ad nihilum, at in fig. 256 ordinata Pp, puncto R abeunte per V in R<sub>2</sub>, evadit quidem imaginaria, sed posteaquam per omnes contra magnitudinum finitarum gradus crevit in infinitum; atque idem accideret in fig. 268. ordinata R<sub>2</sub>P, si punctum R continueret cursum ultra V versus M. Abiret ordinata etiam in eo casu in infinitum, & deinde imaginaria evaderet.

757. Illud autem discriminis intercedit inter casum quo linea post discessum in infinitum abit in imaginariam, & casum, quo realis remanet, ac transit, vel regreditur, quod in hoc secundo casu potest haberi progressus, vel regressus etiam, ubi unicum punctum abit in infinitum, ut ubi in fig. 254 ordinata RP abit in contrariam R<sub>2</sub>P<sub>2</sub>, vel in fig. 255 regreditur per R<sub>2</sub>P<sub>2</sub>, in quibus abit quidem in infinitum P, sed remanet R; at in primo illo casu nunquam habebitur imaginarietas ipsa, nisi utrumque rectæ extremum abeat in infinitum sive ad partes oppositas, ut in fig. 256, sive ad easdem, ut in fig. 268, adeoque nisi in illo ipso infinito collisio quædam habeatur, ac veluti pugna inter bina puncta sibi invicem occurrentia ibidem, & se mutuo quodammodo elidentia. Hic autem ipse velut interitus quantitatis (si hæc etiam cum vero aliarum rerum interitu analogiam quandam persequi liceat) nec habebitur sane, nisi illa ipsa puncta velocitatem, qua in se mutuo irruunt, infinites majorem habeant ibi, quam alibi, ut facile demonstratur contingere punctis G, G fig. 242, P, p fig. 268, & vero etiam P, p fig. 256, ubi puncta P, p ex parte finita a se invicem recedentia ultra quoscumque limites, ex parte infinita ad se invicem accedunt pariter ultra quoscumque limites, & sibi invicem occurrunt quodammodo, & colliduntur: vel infinites minorem, quam alibi, velocitatem habeant respectivam, quod accideret utri-

que

LOCORUM GEOMETRIGORUM. 279

que in cuspidibus omnibus, quæ tamen multo pauciores sunt juxta num. 748; nam rectæ  $PP'$ , &  $II'$  in fig. 267 paulo antequam evanescant, differentias habent in infinitum minores, quam alibi, ut facile demonstrari possent, & post imminutam in infinitum velocitatem respectivi motus extremorum punctorum, abeunte  $EL'$  ultra  $el$ , imaginariæ sunt: ut adeo videatur etiam in Geometria hæc interitus haberi posse tantummodo vel e nimio quodam quasi furere, ac effervescentia, ut teli cujusdam ictu haberi solet, ac febri, vel e languore quodam, ut habetur in senibus quandoque decrepitis ætate ipsa, & virium imbecillitate, quanquam id ipsum pariter perquam raro conuagat.

758. Porro migrationis e statu reali in imaginarium per nihilum satis etiam elegans exemplum habetur in ipsi Coni Sectionibus, quas a num. 552 persecuti sumus. Assumpto in latere  $VA$  figuræ 208 quovis puncto  $M$  ad arbitrium, si concipiatur recta  $MI$  congruens initio cum  $MV$  versus positionem  $MA$  circumvoluta per punctum  $M$ , e recta linea  $MV$ , in qua planum ipsi  $QVS$  parallelum eo casu contingit conum, nascitur juxta num. 585 Ellipsis principio arcuissima, quæ perpetuo pinguescit in cono recto, donec factio plano ipso parallelo basi sectio evadat circulus, puncto  $T$  abeunte in infinitum ita, ut nusquam jam sit, sed in infinito ipso delitescat. Pergente motu, oblongatur perpetuo Sectionis forma, & abit per omnes gradus finitarum rationum axis conjugati ad transversum, quas acquirit in fig. 209 iterum a circulari forma recedens, ac punctum  $T$  tractum per infinitum jam regreditur ex parte opposita, quo abeunte demum in  $B$ , abit Sectionis figura in Parabolam figuræ 210, in qua vertex ille  $m$  jam infinito obrutus latet, & nusquam est. Procedente ulterius  $T$  versus  $A$ , jam habetur in figura 211 duplex rami Hyperbolæ cum vertice  $m$  regresso ex infinito ex parte opposita, ac Hyperbolæ ipsius forma mutatur iudem perpetuo, donec ipso

so puncto T, & cum eo etiam I abeuntibus simul in A, abeant ipsi Hyperbolæ rami in binas rectas MA, VA' infinitas. Perit hic Sectionis Conicæ atea; & ad nihilum devenit, posteaquam è nihilo enata fuerat ab illa recta MV fig. 208, quæ respondet huic ipsi MV fig. 211: & is interitus habetur quodam veluti incurso perimetri irrudentis in se, & in axem transversum hinc, & inde ab axe ipso. Si motus plani qui eo casu contingit conum, pergat ulterius in eandem plagam; jam punctum T abibit ultra A extra conum, & puncto ~~in~~ subeunte rectam VB; id planum iterum secabit ipsum conum; ac iterum nascetur nova Ellipsis, & nova Sectionum Conicarum series priori profusum simillima. Sed hæc non continuatur cum illa prioris, nec Hyperbolæ illæ postemæ in primas hæc Ellipses mutantur. Illæ enim desinunt in rectam MA  $\infty$  *am* tractam per infinitum, hæc nascuntur à recta finita MV, quæ illi tractæ per infinitum quodammodo non analoga est; sed quodammodo velut antianaloga, nimirum ejus negativa, & ad eam relata, ut illi bini ejusdem circuli arcus hinc datis punctis interjecti, & contraria directione considerati AIC, AIC in fig. 271 sibi invicem analogi sunt. Prima illa igitur series exortum habet in recta finita, interitum in recta per infinitum tracta illius ejusdem finitæ rectæ complemento ad infinitum circum, ac illi alia succedit iterum ortum, & interitum habens ita; ut in singulis conversionibus integris, binæ ejusmodi series orientur, & occidant, quarum quælibet ante ortum, vel post occasum in imaginario statu sit.

759. Porro in hujusmodi transformationibus Sectionum Conicarum aliarum in alias habentur punctorum multiples & transitus per nihilum, ac per infinitum, & regressus inde: ipsi autem appulsus ad infinitum, vel nihilum sæpe puncta retinent in statu reali, vel alicubi conspicua, vel infinito obruta, ibique velut delitescunt; quandoque etiam ad imaginarietatem detur-

turbant, adeoque linearum, quæ ipsis terminantur, habetur jam perseverantia in eadem directione, jam directionis mutatio, jam impossibilitas, & sæpe annihilatio, ac evanescencia, sæpe productio in infinitum, sæpe eiam circuitus quidam per infinitum, & quædam veluti plusquam infinita extensio. Hinc hæc ipsa Conicarum Sectionum transformatio aptissima est, ad declarandos, confirmandosque quosdam canones, qui per universam late Geometricam observantur, & eorum exempla ex demonstratis harum curvarum elementis deprecanda. Ex ipsis autem canonibus, eorumque applicatione ad hæc ipsa Conicarum Sectionum Elementa patebit eiam, quæ hisce curvis communia sint, & communem demonstrationem suscipiant, quæ ab altera ad alteram transferri non possint, & ipsa ejus anomalie ratio se prodet, ac nostrum in hisce elementis adornandis consilium palam fiet. Ejusmodi vero canones ex iis, quæ huc usque vidimus pendunt omnes, & sunt eorum quidam veluti fructus. Proponemus autem singulos, ac eorum rationem proferemus, exempla dabimus, & applicationem ad Conicas Sectiones. Occurrent autem identidem quædam etiam infiniti mysteria, quæ eo usque excrescent, ut infiniti extensio impossibilitatem demum suadeant, ac ad indefinitum, sive indefinite parva sint, sive indefinite magna, theoriam, quam alio opere pertractabimus, nos deducunt.

760. In primis *Analogæ* dicemus puncta, quæ eodem modo determinantur in utroque ejusdem geometricæ constructionis statu, ante nimirum transformationem, & post, quæ nempe determinantur per concursum eorundem Locorum Geometricorum, rectorum cum aliis rectoris, cum circulo, cum Sectionis Conicæ perimetro, cum lineis per ejusmodi concursus definitis eadem lege. Sic analogæ sunt in fig. 239 tam puncta  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , quam  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ , &  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ , eodem modo definita per concursum rectorum inter se; analogi sunt tam vertices  $M$ , quam  $m$  in fig. 9, 10,

185 DE TRANSFORMATIONE

F23911 axium transversorum Ellipseos, Parabolæ, Hyperbolæ, qui ubique eadem lege determinantur per rationem constantem, ex foco F assumpto; & recta directrice AB. Analogas autem dicimus lineas binis analogis punctis terminatas, superficies terminatas lineis analogis; solida terminata analogis superficiebus. Sic in fig. 239 analogæ sunt rectæ  $M_1O_1$ ,  $M_2O_2$ ,  $M_3O_3$ ; & in fig. 9, 10, 11 foci radii FM inter se; chordæ per focum ductæ  $VF_m$  inter se, ac alia ejusmodi.

761. Deinde binæ hujus analogiæ genera distingui-mus: alterum *Primarium*; & summum; cum post transformationem manet directio quantitatis definitæ; vel mutatur numero mutationum pari; alterum *Secundarium*, cum directio quantitatis mutatur semel; vel numero mutationum impari; quæ posset etiam *Ami-nalogia* dici. Primario analogiæ genere analogæ sunt in fig. 239 omnes rectæ MO inter se; rectæ  $M_1N_1$ ; &  $M_2N_2$  inter se; ac  $N_1O_1$ ; &  $N_3O_3$  inter se; pariter in fig. 9, 10, 11 radii foci FM inter se; chordæ  $VF_m$  ductæ per focum inter se; quæ directionem servant. Hoc itidem genere primatio analogiæ analogæ sunt quadrata tectarum directionem mutantium; quæ eam juxta num. 684 bis mutant. Et veto etiam primario analogiæ genere analogus est axis transversus Ellipseos finitus  $Mm$  cum axe Hyperbolæ  $M \infty m$  per infinitum traducto; qua expressione exprimimus lineas, quæ a quibusdam punctis ut M; & m tenden-tes ad partes oppositas ipsis; ut hic versus H; & h; concipiuntur conjunctæ quodammodo; & con-nexæ in ipso infinito; juxta ea, quæ jam toties vidi-mus. Secundario analogiæ genere analogæ sunt in fig. 239 rectæ  $N_1O_1$ ;  $N_2O_2$ ; ac  $M_1N_1$ ;  $M_2N_2$ ; in fig. 9; & 11 foci radii  $Fm$  inter se; axes finiti  $Mm$  in-ter se; & alia ejusmodi; quæ directionem habent con-trariam post transformationem; ut etiam solida sub-tribus lineis quibuscumque directionem mutantibus: Porro diversa axium Ellipseos; & Hyperbolæ analogiæ, ac permutatio axis finiti cum axe per infinitum traduc-

tracto ita, ut axi Ellipseos finito  $MC_m$  directe respondeat Hyperbolæ axis; non finitus  $MC_m$ , sed  $M \infty m$  per infinitum tractus; & viceversa, patent ex eo; quod dum ratio determinans perpetuo crescit; vel conii sectio perpetuo inclinatur post parallelismum cum base; & Ellipsis accedit ad Parabolam; axis  $MC_m$  perpetuo oblongatur; & vertex  $m$  post transitum per parabolam ita regreditur ex parte opposita, ut perimenter curvæ retro non redeat in orbem ab  $M$  ad  $m$ , sed versus eandem plagam in infinitum abeat & superato veluti infinito; eadem directione pergat regrediens ex parte opposita. Hinc nimirum per quodvis punctum  $R$  finiti axis  $MC_m$  figuræ 9, & axis  $M \infty m$  per infinitum tracti figuræ 11 ducta recta axi perpendicularis occurrit perimetro in binis punctis  $P^1$ ,  $p$  juxta num. 36; contra rectæ; quæ transeunt per puncta  $R$  axis  $M \infty m$  Ellipseos, &  $MC_m$  Hyperbolæ nusquam occurrunt perimetro: usque adeo axi  $MC_m$  illius responderet directe axis  $M \infty m$  hujus, & viceversa.

762. Etiam in punctis, si ea determinantur a bis rectis tendentibus ad eandem plagam, dicimus ipsa analogæ primo analogiæ genere; si ad oppositas, secundario. Puncta  $P$  definita (num. 130) in fig. 35, & 36 a rectis  $FQ$ ;  $VG$  tendentibus utrobique in eandem plagam sunt analogæ primario analogiæ genere, puncta  $p$  secundario; cum ipsum  $p$  in fig. 35 definiatur a rectis  $QF$ ;  $gV$  cocurrentibus ad partes  $FV$  respectu  $Gg$ ; & in fig. 36 ad partes oppositas. Pariter in fig. 19, & 20 sunt analogæ secundario analogiæ genere puncta  $m$ ; saltem si ipsum  $m$  in Hyperbola in fig. 20 concipiatur, ut vertex axis finiti  $Mm$ ; si enim concipiatur, ut vertex axis  $M \infty m$  per infinitum tracti; poterit concipi, ut primario analogiæ genere analogum ipsi  $m$  figuræ 19. Centrum quoque  $C$  Ellipseos in fig. 19; cum centro  $C$  Hyperbolæ in fig. 20 trunt analogæ secundario analogiæ genere; cum inveniuntur in medio itinere ab  $M$  ad  $m$  versus partes opposi-

oppositas . At axis Hyperbolæ per infinitum  $\infty$  traductus  
 habebit in ipso infinito aliud centrum  $\infty$  , quæ est  
 infiniti nota , ut & axis Ellipseos  $M \infty m$  aliud cen-  
 trum  $\infty$  juxta num. 254, eritque analogum primo a-  
 nalogiæ genere centrum finitum Ellipseos  $C$ , quod ejus  
 axem finitum  $MCm$  secat bifariam, cum centro Hyperbo-  
 læ infinito  $\infty$  , quod secat bifariam ejus axem  $M \infty m$   
 traductum per infinitum, & centrum  $\infty$  Ellipseos cum  
 centro Hyperbolæ  $C$  . Ejus permutationis centrorum  
 discrimen manifesto se prodit ipsam Ellipseos, ac Hy-  
 perbolæ formam consideranti . Ellipsis obvertit cavitatem  
 centro  $C$ , convexitatem centro  $\infty$  utrinque, & se-  
 catur a recta per  $C$  ducta perpendiculari axi in binas  
 æquales, ac similes Semiellipses spectantes hiangibus  
 veluti buccis plagas  $MFC$ ,  $mfc$ . Hyperbola obvertit  
 convexitatem centro  $C$ , cavitatem centro  $\infty$  utrin-  
 que, & in binos æquales, ac similes ramos quodam  
 modo secatur in infinito, quo rami ipsi excurrunt, quæ  
 spectant itidem hiata cavo easdem plagas, sed expres-  
 sas per  $MF \infty$ ,  $mfc \infty$ . Ipse ordo punctorum rempre-  
 dit. Nam in Ellipsi incipiendo ab  $M$  proceditur in fig.  
 19 sic,  $MFC$   $fme \infty$   $EM$ ; in Hyperbola vero in  
 fig. 20 sic:  $MF \infty$   $fme$   $CEM$ , ubi  $C$ , &  $\infty$  sedes  
 permutant. Hinc nimirum in Ellipsi quævis recta per  
 $C$  ducta occurrit perimetro bis, nulla in Hyperbola du-  
 cta in iis asymptotorum angulis, quos secat axis con-  
 jugatus. Nulla in Ellipsi contingit perimetrum per  $C$   
 ducta: in Hyperbola habentur pro tangentibus asym-  
 ptoți, in quas tangentes desinunt juxta num. 288, ubi  
 contactus ita in infinitum abeant, ut nusquam jam sint,  
 Hinc Hyperbola asymptotos habet, Ellipsis non habet;  
 adeoque tam multis, & elegantissimis sane asymptoto-  
 rum proprietatibus Ellipsis caret.

763. Expositis hisce nominum definitionibus, jam  
 ad canones ipsos faciemus gradum, in quavis geo-  
 metricarum constructionum transformatione adhiben-  
 dos .

764. Canon I. Si quantitates, a quibus solutio pro-  
 blema-



Idematis pendet, vel enunciatio theorematũs, manebit  
 omnes post transformationem analogã primo analogie ge-  
 metre, nec ullus habeatur transitus per infinitum; manebit  
 eadem solutio, enunciatio, demonstratio, nulla res,  
 nullo verbo mutata. Quod si aliqua ex iis per infinitum  
 traducta, & in ipso infinito copulata, ac connexa  
 inter se concipiuntur, extantæ utroque extremo; in iis,  
 quæ a sola directione pendunt, manebunt iidem omnia  
 in iis; quæ ad magnitudinem pertinent, consors debet e-  
 rum ratio eadem, quæ oritur ex ea lógõ, quia determi-  
 nantur, prorsus analogã illi, quam haberent, si per infi-  
 nitum non transissent.

765. Prima canonis pars omnino patet ex eo, quod  
 omnes Geometricorum Locorum partes debeant eandem  
 proprietates habere; & cum nullus fiat transitus per  
 infinitum, vel per nihilum; nulla mutatio fit, quæ  
 perturbet vulgarem geometricum sermonem, quantita-  
 tibus vel infinitis, aut per infinitum traductis usque  
 ad finitum oppositum, vel negativis, & minuentibus  
 summam. Et id quidem prorsus congruit cum in. 674. &  
 675. In fig. 239, quotiescumque punctum N fuerit in-F239  
 æt G, & H, ut N1, constructio problematis propo-  
 siti num. 676 inveniendi summam MN, NO æqualem  
 ætæ datæ, enunciatio summæ inventæ demonstratio,  
 eadem erit ubique, nec mutabitur nisi puncto N e-  
 gresso ex illis limitibus aliquæ quantitates directionem  
 mutant.

766. Idem videre licet etiam in nostris Sectionum  
 Conicarum Elementis. Nos ea ita adornavimus, ut  
 in iis, quæ ad ipsam curvarum naturam contemplan-  
 dam, & proprietates deducendas pertinent, reduceren-  
 tur omnia ad unicum problema geometricum, cujus  
 generalis solutio, & applicatio ad casus particulares,  
 vel per se ipsa, vel per ea, quæ inde sponte conse-  
 querentur, proprietates omnes harum curvarum ele-  
 mentares exhiberet. Vidimus nimirum ea fere om-  
 nia, quæ in earum elementis circumferri solent, con-  
 tineri comparationibus rectarum, quæ ipsis occurrunt,

vel earum positione considerata, vel magnitudine, a qua pendent summæ, differentiæ, rationes ad se invicem, quadrata, rectangula, eorumque relationes tam variæ. Quamobrem selegimus ejusmodi definitionem, quæ omnibus hæcæ curvis generaliter conveniret, expressam ratione constanti, quam habet distantia puncti cujusvis perimetri a dato puncto, ad distantiam perpendiculararem a data recta: tum investigavimus solutionem hujusmodi generalis problematis, *Datis foco, directrice, & ratione determinante, invenire concursum rectæ datæ cujusvis cum Sectione Conicæ*. Solutio generaliter hoc problemate, satis patebat, in ipsa solutione contineri debere fundamenta omnia omnium relationum, quas rectæ ejusmodi concursibus interceptæ habere possent ad se invicem, & cum ipsa perimetro Conicarum Sectionum: dummodo ex generalibus Locorum Geometricorum transformationibus rite ipsa generalis constructio ad casus singulares applicaretur.

767. Porro illud contigit, ut in ipsa illa generali constructione quædam rectarum intersectiones, a quibus punctotum quæstorum determinatio pendebat, vel iis rectis evadentibus parallelis, ita in infinitum abierint, ut nusquam jam essent, vel iis rectis congruentibus, haberi non possent, frustrata generali ipsa solutione; quorum primum accidit in rectis directrici parallelis, secundum in rectis per focum transeuntibus. Quamobrem pro iis substituimus binæ particularia problemata, ad quorum solutiones quo pacto illa generalis solutio nos perduxerit, in sequentium canonum applicatione, ubi nimirum ad eas ejusmodi transformationes pertinuerint, ostendemus. Atque idcirco problema generale ad propositionem tertiam rejecimus, reliquis illis, quæ ipso generali non indigerent, præmissis in præcedentibus binis propositionibus, ubi etiam, quæcumque ad Conicarum Sectionum proprietates pertinentia se ulro offerrent, deduximus. Tum ex generali problemate multo uberiores fructus percipimus

primus alia ex aliis theoremata deducendo, ipsa etiam; ubertate sane admirabili; fecundissima quaquaversum.

768. Jam vero in singulis hisce, vel problematum solutionibus, vel theorematum enunciationibus, vel demonstrationibus utrorumque, patebit sane illud eadem consideranti, ubicumque nihil directionem mutat, nihil abit in infinitum; nec per infinitum traducitur, vim constructionis, & enunciationem ipsam; ac verba omnia prorsus eadem esse ubique; sive considerentur diversae partes ejusdem perimetri ejusdem Sectionis Conicae; sive conferatur perimeter unius Sectionis Conicae cujuscumque cum perimetris aliarum quantumcumque vel magnitudine tantum, vel & magnitudine; & specie, & forma differentium; Ejusmodi exempla ubique occurrunt. Eadem est in fig. 9; 10; ut determinatio puncti M; secta FE in M in ratione determinante, eadem puncti V; vel N; capta FV; vel FN ad FE in ipsa ratione determinante juxta num. 35. Eadem in fig. 35; & 36 determinatio cujusvis puncti P per totum arcum VMN in quavis Sectione Conica; capta juxta num. 130 QG ad partes oppositas FV aequali QF; per intersectionem rectarum VG; FQ; & eadem iisdem verbis demonstratio desumpta e similibus triangulis FPV, QPG; quae ubique demonstrantur similia ob angulos ad verticem P aequales oppositos; & angulos ad basim FV, alternos angulorum ad basim QG; adeoque aequales. Patiter theoremata communia iisdem verbis effrentur. Chorda VFN in hisdem figuris erit ubique latus rectum principale juxta num. 34; ac eodem ubique modo accipietur. Chorda, quam circulus osculator intercipiet e diametro per punctum osculi transeunte, erit ubique juxta num. 50; aequalis lateri recto ejusdem diametri. In omnibus ejusmodi casibus satis erit puncta homologa designare litteris iisdem ubique, & eadem prorsus demonstrationes obvenient.

769. Secunda pars hujus Canonis; quae est de lineis

per infinitum traductis, pertinet ad infiniti mysteria quædam, quæ ad analogiam quandam retinendam hic adhibemus, licet infra eo deveniendum sit nobis, ut ipsum infinitum habeamus potius pro impossibili. Idcirco adjecimus, *si aliqua ex iis per infinitum traductæ . . . . concipiantur*. Nimirum si eas hoc pacto concipimus, debemus etiam in iis generales illas rationes admittere, quæ habentur in omnibus aliis analogis, eadem nimirum lege cum eadem directione definitis per constructiones easdem, ad quas analogas Geometria humanæ mentis extenditur. Nam si infinitum extensum est possibile, id quidem humanæ mentis vires omnino excedit, quæ in eo absurda quædam demum invenit, quæ cum recta ratione nullo modo conciliari posse videantur. Adjecimus autem illud, *extante utroque extremo*, ut distingueremus quantitates hæcæ per infinitum traductas, ac proinde quodammodo veluti plusquam infinitas, quarum nimirum extrema sunt alicubi, & possunt perspicui, ab illis, quæ simpliciter in infinitum abeunt, altero saltem extremo nusquam jam existente.

770. Illud, quod in hac secunda hujusce Canonis parte pertinet ad directionem rectæ per infinitum traductæ, manifestum est in illa insigni Conicarum Sectionum proprietate, quæ earum focus nomen dedit, quam num. 202 exposuimus. Radii ex foco  $F$  egressi in Ellipsi in fig. 66 post reflexionem in punctis  $P$ ,  $p$  debent abire per rectas finitas  $Pp$ ,  $pp$  convergentes ad punctum  $f$  ex parte finita. Si in parabola in fig. 67, abeunte foco  $f$  in infinitum ita, ut nusquam jam sit, evadunt paralleli inter se, quod pertinet ad unum e sequentibus Canonibus. At in Hyperbola in fig. 68 abeunt per rectas  $P \infty f$ ,  $p \infty f$ , quæ sunt analoge primario genere analogiæ finitis  $Pf$ ,  $pf$  Ellipticos, & quodammodo velut convergunt itidem ad ipsum  $f$  ex parte infiniti. Sed quoniam in vulgari geometrico sermone non adhibetur nota infiniti, nec rectæ considerantur in infinitum traductæ, apponenda fuit littera  $O$ ,  
quæ

LOCORUM GEOMETRICORUM. 289

quæ vices ipsius  $\infty$  suppleret, & convergentiæ ex parte infiniti substituenda divergentia ex parte finiti. Atque eodem pacto si in fig. 68 possent lucis radii ex  $f$  egressi superato infinito deferri ad puncta  $P, p$ , adque nimirum advenirent per rectas  $OP, op$ , colligerentur in  $F$ , ut in figura 66 radii  $fP, fp$  in ipso foco  $F$  colliguntur,

771. Ex hac hujus Canonis parte debent in fig. 20 in Hyperbola distantia focorum  $F \infty f$ , verticum  $M \infty m$ , directricum  $E \infty e$  per infinitum tractæ haberi pro continuè proportionalibus inter se, & distantia  $F \infty, M \infty, E \infty$ , inter se in ratione determinante, ut in ratione determinante sunt in fig. 19 continue proportionales  $FCf, MCm, ECe$ , &  $EC, MC, EC$  juxta num. 90. Videtur hoc singens quoddam infiniti mysterium. Debet enim concipi arcus illius circuli infiniti cui respondet  $F \infty f$  major arcu illius, cui respondet  $M \infty m$ , & hic arcu  $E \infty e$  in illa ratione, quam habet in ipsa fig.  $FM$  ad  $ME$ , quæ a ratione æqualitatis potest distare utcumque, ut possit esse dupla, decupla, centupla, & ita porro. Quare fieri potest, ut ille arcus primus secundi, & hic tertii haberi debeat duplus, decuplus, centuplus. At id discrimen provenire non potest ab illis  $EM, em$ , vel  $MF, mf$  adjectis, quæ potius præstarent primum arcum minorem secundo, secundum tertio. Debet igitur concipi ille circulus primus in infinito ipso extensus longe ultra secundum, secundus longe ultra tertium ita, ut illud  $\infty$  in aliis ejusmodi circulis in alia distantia infinita sit, pro conditione, & natura rectarum, quæ per infinitum tractæ concipiantur. In fig. 19  $FCf$  est minor, quam  $MCm$ , &  $MCm$  minor, quam  $ECe$ . Oblongata Ellipsi, dum ratio determinans continuo crescit, crescit etiam ejusmodi ratio, quæ dum Ellipsis ad Parabolam appellit, evadente ratione determinante ratione æqualitatis, evadere & ipsa debet ratio æqualitatis, ut infra videbimus. Mutata Ellipsi in Hyperbolam in fig. 20, & tractæ per infinitum

290 DE TRANSFORMATIONE

punctis  $e, m, f$ , abiq̄ ratio determinans in rationem majoris inæqualitatis, quæ perpetuo crescit, dum puncta ipsa accedunt ad  $E, M, F$  ex parte opposita, Quare debent concipi & illi veluti arcus  $F \infty f, M \infty m, E \infty e$  in illis immensis, & nostræ menti imperviis quibusdam infiniti ipsius veluti campis extensi per tractus diversos respondententes rationi illi, abeunte duplo, decuplo, centuplo longius illo  $\infty$  pertinente ad  $Ff$ , quam abeat illud, quod pertinet ad  $Mm$ , & hoc totidem spatii longius, quam id, quod pertinet ad  $Fe$ . Hoc infiniti mysterium usui nobis erit infra, & ubi etiam binæ rectæ in infinitum recedunt, limite saltem altero relicto in ipso infinito, patebit infra, debere pariter concipi alteram altera longiorem in ratione quacumque. Quin etiam fieri posset, ut ad analogiam servandam infinitum infinito etiam infinities majus, sive in ratione, quam habet infinita quantitas ad finitam, finita ad nihilum, haberi debeat. Sed hæc de primo Canonè satis; jam ad secundum,

772. Canon, 2. *Si aliqua quantitates maneant analoge solo secundario analogie genere, computanda erunt in enunciationibus, & demonstrationibus negativo modo ea, quæ directionem mutarunt numero impari mutationum, ut nimirum si e binis altera tantum mutetur eo pacto, summa abeat in differentiam, quæ pro positiva habeatur, vel pro negativa, prout ea, quæ mutavit, erat minor, vel major, & viceversa: si mutetur utraq̄, summa, & differentia remaneant pariter summa, & differentia, sed e positivis in negativas abiisse censeantur, ubi ad ulteriora vel theoremata, vel problemata adhibenda sint. In demonstrationibus vero per proportionem institutis argumentationi per compositionem substitui debet argumentatio per divisionem, & viceversa, ubi e binis terminis rationis tam prima, quam secunda abierit in negativum, alter tantummodo; retinendum argumentationis genus, si uterque mutet rationis utriuslibet.*

773. Quæ ad hunc pertinent Canonem consequuntur omnia

omnia ex iis, quæ supra vidimus. Habenda esse pro negativis ea, quæ positionem mutant numero vicium impari, manere, quæ mutant numero pari, constat ex num. 688, Negativa mutare summam in differentiam, constat ex iis omnibus, quæ demonstravimus a n. 677 ad 692. Mutatio modi argumentandi patet ex eo ipso, quod summæ in differentias migrent, & viceversa, ubi alter e binis terminis mutatur in negativum. Ejus rei exemplum adductum est num. 691. Alia exempla exhiberi possunt plura etiam in Sectionum Conicarum Elementis, En aliqua,

774. In Ellipsi in fig. 19 est (num. 92) summa binarum rectarum, quæ a binis focus  $F, f$  ducuntur ad quodvis punctum perimetri  $P$  constanter æqualis axi  $Mm$ . In Hyperbola in fig. 20 æqualis est axi  $Mm$  earum dif-<sup>F.19</sup>ferentia, quia nimirum  $Pf$  directionem mutavit, cum <sup>20</sup>punctum  $f$  Ellipseos abierit in  $f$  Hyperbolæ per infinitum, unde fit, ut recta  $P \infty f$  Hyperbolæ sit analogâ primo analogiæ genere rectæ  $Pf$  Ellipseos. Cum vero  $Pf$  negativa sit major, quam  $PF$ , summa ipsarum, quæ in vulgari sermone geometrico est differentia, evadit negativa, & idcirco axis  $Mm$  ipsi differentiæ æqualis negativus est respectu axis Ellipseos.

775. In demonstratione autem ejusdem proprietatis facta num. 93 summæ, quæ habentur pro Ellipsi, mutantur in differentias pro Hyperbola. Cum nimirum sit  $FP$  ad  $PD$ , &  $fp$  ad  $Pd$  in ratione determinante, sive juxta num 90, ut  $Mm$  ad  $Ee$ , eruitur summam  $FP$ ,  $fp$  in Ellipsi, differentiam in Hyperbola ad  $Dd$  summam ibi, hic differentiam ipsarum  $PD$ ,  $Pd$  esse, ut  $Mm$  ad  $Ee$ , adeoque ut  $Dd$ ,  $Ee$  æquantur, æquari illam summam, vel differentiam ipsi  $Mm$ . Theorema autem numeri 90 ibi suppositum, quod  $Ff$ ,  $Mm$ ,  $Ee$  sint continuo in ratione determinante, quod num. 91 demonstravimus ex natura proportionis harmonicæ, poterat demonstrari mutando differentias, quæ habentur pro Ellipsi, in summam pro Hyperbola, & viceversa hoc pacto. Est  $Ff$  in Ellipsi differentia, in Hyperbola sum-

ma ipfarum FM,  $fM$ , est  $Mm$  differentia in Elliptis, summa in Hyperbola ipfarum ME,  $Me$ , five  $me$ ,  $Me$ , Eadem  $Mm$  summa in Elliptis, differentia in Hyperbola ipfarum FM,  $fM$ , five  $fm$ ,  $fM$ , &  $Ee$  summa in Elliptis, differentia in Hyperbola ipfarum ME,  $Me$ . Hinc cum sit & FM ad ME, &  $fM$  ad  $Me$  in ratione determinante, colligitur & antecedentium summas, vel differentias ad consequentium summas, vel differentias, nimirum  $Ff$  ad  $Mm$ , &  $Mm$  ad  $Ee$  fore in eadem ratione. Mutatio directionis rectorum  $fM$ ,  $Me$  mutationem induxit in summas, & differentias.

776. Porro ex ipsis infiniti mysteriis, nimirum e ne-  
 xu illo in infinita distantia, de quo jam toties injecta est  
 mentio, reddi potest ratio, cur etiam ubi directiones quan-  
 titatum mutantur vi transitus per infinitum, adhuc pro  
 negativis haberi debeant, & subtrahi, licet illæ positive  
 non mutantur in has negativas; sed in illas per infinitum  
 traductas, quæ sunt harum veluti complementa ad cir-  
 culum infinitum. Summa ipfarum FP,  $Pf$  in fig. 19 est  
 constans, & æqualis axi  $Mm$ . In fig. 20. ipsi  $Pf$  est ana-  
 loga primario analogiæ genere recta per infinitum tra-  
 ducta  $P \infty f$ . Quare adhuc ipfarum PF,  $P \infty f$  sum-  
 ma pro constanti habenda erit. Quantum igitur crescit  
 FP tantum minui debet ipsa  $P \infty f$ , quæ cum ea con-  
 stantem summam reddit. Tantundem igitur debet cresce-  
 re  $fP$  complementum ipsius  $P \infty f$  ad illum infinitum  
 circulum, qui hic habetur pro constanti; ac proinde FP,  
 $fP$  æque crescent, & earum differentia semper manebit  
 constans. Abeunte P in M, ea differentia erit eadem,  
 ac differentia  $fM, FM$ , five  $fm, fM$ , nimirum  $Mm$ . Hoc pa-  
 rto ab illa summa Ellipseos fit transitus ad hanc Hyperbo-  
 læ differentiam ex ipsis infiniti mysteriis. Sed rem ita se  
 habere debere constat ex ipsa conformitate omnium par-  
 tium Locorum Geometricorum, quæ communes proprie-  
 tates habere debent, dummodo si directio contraria sit,  
 contratio modo accipiantur, demendo, quod addebe-  
 tur, & addendo, quod demebatur. Sic in fig. 89. aris

F.89 illi  $Fbm$ , &  $FAm$  juxta num. 277. communes proprie-  
 tates



## LOCORUM GEOMETRICORUM. 193

tates habent, nec alter in tres partes æquales secari potest, quin secetur & alter, licet alterius negativus sit: & idcirco si ab  $FP$  trisecante primum deveniendum sit ad  $Fp$  trisecantem secundum non gyrando per  $BmP'Ap$ , quo pacto in  $p$  trisecatur arcus  $FBmAFBmAFBm$ , non arcus ipse  $FAm$ , sed retro regrediendo per  $PFp$ ; mutatur directio tam arcus  $FP$ , in arcus  $Fp$ , quam chordæ in chorda.

777. Canon. 3. *Si in aliqua proportione termini aliqui post transformationem maneant analogi secundario analogia genere, manebit proportio: sed in proportionibus utrumque compositis nunquam mutatio habebitur, nisi numero pari, in rectangulis, vel solidis equalibus debetis, vel in omnibus haberi mutationum numerus par, vel impar in omnibus, & terminus, qui invenitur proportionibus quibuscumque, vel quovis ductu, censendus erit negativus, vel positivus, prout mutationum numerus fuerit in iis, a quibus pendet, impar, vel par.*

778. Proportionem debere manere post mutationem directionis, qua analogia primaria in secundariam vertitur, patet ex eo, quod etiam num. 776 usi sumus, quod nimirum omnes partes eorundem Locorum Geometricorum easdem proprietates, & relationes ad se invicem habere debeant, sive assumantur ex parte positiva, sive ex parte negativa. Sic in fig. 89 nullus ex arcibus tendentibus ab  $F$  ad  $m$  per  $B$  trisecari potest iuxta num. 776, quin simul trisecentur constructione eadem reliqui omnes, qui ab eodem puncto  $F$  tendunt ad  $m$  contraria directione per  $A$ .

779. Terminum, qui invenitur proportionibus quibuscumque, vel ductu quovis, fore negativum, vel positivum, prout numerus mutationum fuerit impar, vel par, demonstratum est num. 688, & confirmatum deinde tam multis exemplis e Geometria petitis. Inde autem consequitur, in proportionibus utrumque compositis nunquam mutationem haberi posse nisi numero pari. Nam si præcedentes mutationes fuerint numero impari, accedet mutatio postremi, quæ complebit numerum

merum patem, si autem mutationes præcedentes fuerint pares, manebit postremus terminus, adeoque iterum manebit numerus par. Rectangula autem, vel solida æqualia, debent habere numerum mutationum, vel simul imparem, vel simul parem, quia si alterum haberet imparem, alterum patem; alterum evaderet negativum, alterum positivum remaneret, adeoque non posset remanere æqualia. Idem autem ex priorre parte eruitur etiam hoc pacto, In rectangulis æqualibus est unum latus prioris ad unum posterioris, & in solidis planum sub binis lateribus prioris ad planum sub binis posterioris, ut reliquum latus posterioris ad reliquum prioris. Hinc in ejusmodi proportionem numerus mutationum erit summa mutationum utriusque rectanguli, vel solidi. Ut ea sit numerus par, debet in utroque rectangulo, vel solido esse simul par, vel simul impar. Nam par pari, & impar impari additur patem reddit, par impari imparem. Patent igitur omnes propositi Canonis partes.

780. At hic in ipsa prima parte hujus Canonis videtur occurrere difficultas, quæ solutionem non ita facile admittat. Sex haberi possunt in proportionem aliqua constante quatuor terminis binaria terminorum ipsorum. Vel enim sumi possunt bini rationis primæ, vel bini rationis secundæ, vel primus cum tertio, vel secundus cum quarto, vel bini extremi, vel bini medii, qui mutantur. In primo, ac secundo casu erit termini negativum ad negativum eadem ratio, quæ positivum ad positivum: in quo nulla est difficultas. In tertio, & quarto erit negativum ad positivum, ut negativum ad positivum, vel positivum ad negativum, ut positivum ad negativum, in quo pariter difficultas est nulla. At in postremis binis oportet sit negativum ad positivum, ut positivum ad negativum, vel positivum ad negativum, ut negativum ad positivum, quod eodem reddit permutato rationum æqualium ordine. Id vero videtur omnino pugnare cum analogia, & quidem etiam cum modo, quo negativa concipimus. Ea nimirum

LOCORUM GEOMETRICORUM. 295

rum concipiuntur in aliqua ratione minora nihilo. Si facultates considerantur, debitum, quod est negativum, pejoris conditionis hominem reddit, quam si nihil haberet. Si considerentur progressus, pejoris conditionis est ille, qui regreditur, quam ille, qui stat. Ablatis 8 a 10 relinquuntur 2, ablatis 10 relinquuntur nihil, ablatis 12 relinquuntur duo minus, quam nihil. Secunda conditio est pejor prima; igitur & tertia conditio secunda est pejor. Quamobrem ratio quantitatis negativæ ad positivam esse debet multo minor, quam nihili ad positivam. Ipsam, ratio autem positivæ ad negativam multo major, quam positivæ ad nihilum. Non igitur æquales esse possunt.

781. Hæc quidem difficultas summam, si rite rerum analogia consideretur, vim habet. At ejus solutio pendet ex hisce infiniti mysteriis, quæ persequimur, & ex iis potissimum, quæ num. 753 vidimus in fig. 265. f. 265 Ibi enim notavimus tertiam continue proportionalem post  $CM'$  consideratam ut negativam, in quam abierit positiva  $CM$  post nihilum habitum in appulsu  $M$  ad  $C$  non esse  $CP'$  finitam, sed  $CB$  æq.  $AP'$  per infinitum tractam, & quodammodo veluti plusquam infinitam. Hinc ut finita quantitas  $CM$  ducta in finitam  $CP$  reddit rectangulum æquale quadrato  $CO$ , ita quodammodo nihilum in infinitam ductum, ubi  $M$  abit in  $C$ , &  $P$  in infinitum ita, ut nusquam jam sit, & negativa  $CM'$  in quantitatem plusquam infinitam ducta, idem producat.

782. Idcirco autem illud in Geometria ubique sanctè observabitur, ut in hisce postremis binis casibus semper, si alter e binis terminis abeat in negativum transcendo per nihilum, alter abeat transcendo per infinitum, dum in reliquis vel ambo transibunt per nihilum, vel ambo per infinitum. Dum fig. 243 abit in 244, e quatuor terminis proportionalibus illius  $CH$ , 245  $CF$ ,  $CI$ ,  $CG$  primus, & quartus abeunt in negativum. 244 Sed puncto  $H$  accedente ad  $C$ , & decresecente angulo 254  $CH$

$CIH$  in fig. 243, adeoque crescente  $CHI$ , punctum  $G$  recedit a  $C$  ita, ut congruente  $IH$ , cum  $IC$ , & facta  $FG$  parallela  $CE$ , punctum  $G$  in infinito obtutum delitescat; tum procedente  $H$  in fig. 244 redit  $G$  ex parte  $D$  ex infinito. Pariter in fig. 254, si ea referat Hyperbolam conicam, in qua rectangulum sub  $VR$ , &  $RP$  est constans, adeoque  $VR$  ad  $VA$ , ut  $AB$  ad  $RP$ , transeunte  $VR$  in negativam per nihilum, transit  $RP$  in  $R_2P_2$  per infinitum, ut adeo illis  $CG$ ,  $PR$  figuræ 243, & 254 non respondeat  $CG$  figuræ 244, &  $R_2P_2$  figuræ 254, sed illi  $C \infty G$  huic  $R_2 \infty P_2$ . Generaliter ut rectangulum sub extremis æquetur rectangulo sub mediis, semper manentibus finitis alterius lateribus, & altero alterius latere transeunte per nihilum, alterum latus alterius transibit per infinitum, cum, ut paullo infra patebit, altero evanescente, alterum debeat evadere infinitum: adeoque quodammodo fiet plusquam infinitum ex ea parte, ex qua in infinitum recesserat. At ubi figura 243 abeat in 245, facile patebit transeunte  $CH$  per nihilum, vel per infinitum motu rectæ  $IH$  circa  $I$ , transire debere pariter  $GF$  per nihilum, vel per infinitum simili motu rectæ  $GF$  circa  $G$ , & idem accideret, si recta  $HI$  transiret motu parallelo ad partes  $BD$  per  $C$ , vel per infinitum, transeuntibus  $H$ , &  $I$  simul per  $C$ , vel per infinitum.

783. Licet autem ubi agitur de proportione, terminus quartus post quantitatem negativam  $CM'$ , & binas positivas  $CO$  sit  $C \infty P'$  per infinitum traductus in  $F_{265}$  fig. 265; tamen cum hæc traductio haberi non possit nisi  $P'$  redeat ex parte opposita, & alicubi in finitis quantitatibus existat; secum trahit necessario distantiam  $CP'$  finitam directionis oppositæ, & conformis directioni  $CM$ , quæ, si puræ magnitudines spectentur, vel ex considerentur ut positivæ, libera enim est plaga positivorum, easdem habebunt relationes ad se invicem, & ad eandem  $CO$ , quam prius habebant segmenta  $CM$ ,  $CP'$  ejusdem Loci Geometrici eodem modo definita;

LOCORUM GEOMETRICORUM. 297

definita; adeoque adhuc erit  $CM'$  *fid*  $CO$ , ut  $CO$  ad  $CP'$  finitam, & proportio quidem manebit, directio autem in ejusmodi finitis quantitibus in oppositam plagam tendentibus erit iterum eadem priori contraria. Idcirco proportio manebit etiam inter ejusmodi quatuor quantitates, quarum mediæ directionem non mutarunt, mutavit prima, & quarta quoque assumpta ex parte finita contrariam priori habet; adeoque in summis habenda erit etiam ipsa pro negativa, reductione aliqua simili ei, quam num. 776 consideravimus in complemento ejusmodi ad circulum infinitum ejus quantitatis per infinitum traductæ, quæ analogæ erat primo analogiæ genere.

784. Ubi vero uterque terminus per nihilum transit, nulla difficultas esse potest, cum præcedentes termini, qui habebantur ante transformationem, migrarint in hos ipsos negativos, ac ubi mutatio fit transeundo per infinitum, facile ratio redditur rationis manentis ex illo infiniti mysterio, quod num. 776 persecuti sumus; licet mutatione facta per infinitum, non succedant prioribus terminis negativi illi finiti, sed positivi per infinitum traducti. Si in fig. 243 *re-*<sup>F243</sup>cta  $FG$  abiret in infinitum ex parte  $AE$ , & regrederetur ex parte contraria  $DB$  in  $fg$ ; illis  $CF$ ,  $CG$  non succederent  $Cf$ ,  $Cg$ , sed  $C \infty f$ ,  $C \infty g$ . At quoniam harum ratio semper ob analogiam deberet esse eadem, etiam si  $fg$  appelleret ad  $C$ ; idcirco juxta n. 769 etiam integri infiniti circuli  $CA \infty BC$ ,  $CE \infty DC$  debent concipi ad se invicem in eadem ratione  $CH$  ad  $CI$ . Quare ubicumque sit  $fg$  ab integris circulis illis existentibus, ut  $CH$ ,  $CI$  demendo segmenta  $CA \infty Bf$ ,  $CE \infty Dg$ , quæ sunt in eadem ratione, relinquentur  $Cf$ ,  $Cg$  in ratione pariter eadem. Quamobrem etiam considerata analogia primi generis in transformatione, eruitur adhuc quantitates secundario genere analogas, licet oriantur transitu limitis per infinitum, debere retinere proportionem, quas ante transformationem habuerant.

## 298 DE TRANSFORMATIONE

785. Et hæc quidem ad explicandum canonem ; ac ex Locorum Geometricorum homogeneitate in omnibus suis partibus, vel ex infiniti mysteriis demonstrandum ; ac vindicandum dicta abunde sunt ; Cæterum canon ipse , ubi de finitis quantitatibus agitur certissimus omnino est, ac patet in omnibus tam multis exemplis , quæ adduximus à num. 677 ad num. 706 . Ex eo determinavimus ductum, & formam tot curvarum parabolici , ac hyperbolici generis ; quas deinde constructione geometrica æcurata invenimus ejusdem formæ ; quæ ex hoc canone iis applicato obvenerat . Patet autem latissime ipsius usus per universam Geometriam ; Pauca quædam attingemus ; quæ pertinent ad ejus usum, in nostris Conicarum Sectionum elementis.

**F. 1** 786. In primis in ipsa definitione in fig. 1 , & 2  
 a tam  $FP$  ad  $PD$  , quam  $Fp$  ad  $pd$  sunt in eadem ratione determinante :  $Fp$  , &  $pd$  in fig. 2 sunt analogæ ipsi  $Fp$  ,  $pd$  figuræ 1 secundario analogiæ genere ; & tamen servant proportionem eandem  $FP$  ad  $PD$  ; ut  $Fp$  ad  $pd$  . Deinde in ea proportione abiierunt in negativos bini termini secundæ rationis in transitu a figura 1 ad 2 ; nimirum habetur numerus mutationum par ; & uterque terminus mutat transeundo per infinitum ; cum arcus rami ulterioris ; & cum eo punctum  $p$  regrediatur ex infinito .

**F. 19** 787. In fig. 19 ; & 20 est ( num. 96 ) tam  $Ff$  ad  
 20  $Mm$  , quam  $Mm$  ad  $Ee$  in ratione determinante  $FM$  ad  $ME$  . Manet utraq. proportio ; licet  $Ff$  ,  $Mm$  ,  $Ee$  in fig. 20 sint analogæ secundario genere analogiæ ipsi  $Ff$  ,  $Mm$  ,  $Ee$  fig. 19 . In utraq. proportione binii termini tantummodo mutant directionem ; & cum ad eandem pertineant rationem ; mutant ambo in transitu per infinitum .

**F. 12** 788. In fig. 122 in qua rectangulum  $PLp$  æquatur ( num. 330 ) rectangulo  $VLD$  , abeunte  $VL$  in  $VL'$  directione mutata ; & manente  $L'D'$  ; debet mutari c. positivo in negativum etiam rectangulum  $P'Lp'$  . Qua-

te debet altera tantum ex ipsis  $PL'$ ,  $L'p'$  directionem mutare. Mutat eam sola  $L'p'$ , ac in rectangulis æqualibus  $PL'p'$ ,  $VLD'$  invenitur, numerus mutationum utrobique impar.

789. Hinc ex hoc ipso principio in fig. 169, & 170 F169 facile definiri potest plaga ad quam poni debent illæ 170  $ia$ ,  $Ip'$ , quas num. 453 determinavimus in problema- te, quo quaeritur Sectio Conica transiens per data quinque puncta  $Pp'AB$ . Cum enim debeat esse ( num. 299 ) rectangulum  $AQB$  ad rectangulum  $AIB$ , ut rectangulum  $PQp'$  ad  $P'Ip'$ ; postremum hoc  $P'Ip'$  debet habere mutationes directionis numero pari, vel impari respectu  $AIB$ , ut  $PQp'$  habet respectu  $AQB$ . Quare cum innotescant reliquorum omnium laterum directiones præter directionem lateris quaesiti  $Ip'$ , hæc etiam innotescet. In fig. 169  $AIB$  respectu  $AQB$  mutat solam  $AQ$  in  $AI$ , manentibus  $QB$ , &  $IB$ . Quare &  $P'Ip'$  respectu  $PQp'$  debet habere unam mutationem. Mutavit  $P'I$  respectu  $PQ$ , manebit igitur  $Ip'$  respectu  $Qp'$ , ut revera manet. Simile est argumentum pro  $Ip'$  manente in fig. 170, ac eodem pacto determinatur positio  $ia$ , quæ manet respectu  $qp'$  in fig. 169, mutatur in fig. 170.

790. Canon. 4. Angulo, cujus alterum crus tantummodo directionem mutavit, succedit is, qui ejus est complementum ad duos rectos, sive quem continet crus non mutatum cum crure mutato producto: angulo, cujus utrumque mutavit directionem, succedit is, qui ipsi ad verticem opponitur, & ut enunciatio maneat, in crure quod directionem mutavit, communis aliqua littera opponenda est in binis casibus sita ad partes oppositas ita, ut altera jaceat ad partem puncti analogi secundario analogie genere, altera ad partem oppositam; in demonstrationibus veto, ut & in enunciationibus cavendum semper fieri posse; ut anguli, qui congruebant, fiant ad verticem oppositi, qui erat externus in parallelis, evadat internus, & oppositus, vel alternus; atque ea a numero mutationum pendeant, ita tamen,

ut in singulis casibus admodum facile deprehendatur substitutio facienda in demonstratione, notatis illis binis successio-  
 num regulis. Generaliter autem ubi vertex anguli, qui erat intra binas parallelas, abeat extra; angulus ipse enunciatus concursu crurum cum iis parallelis hinc, & inde ad verticem oppositus, fiet communis, anguli vero crurum cum parallelis mutabuntur ex alternis in externos, ac internos, & oppositos, & viceversa si punctum abeat inter parallelas. Quod si extra fuerit, & abeat extra, sed ad partes alterius parallele, manebit ipse angulus, & anguli ad parallelas, qui erant externi, fient interni, & viceversa.

791. Hujus canonis ratio est manifesta; ubi enim, F243 in fig. 243 abeunte in 244, anguli cujuspiam HCl crus  
 244 alterum CH directionem mutet, angulus ipse HCl,  
 245 qui prius in fig. 243 erat ACE, evadit jam in fig.  
 246 244 ECB, quem continet crus mutatum CH prioris, sive CA productum in CB, cum latere non mutato Cl, vel CE. At in fig. 246 mutato & CH, & CI, angulus ICH, qui congruebat in fig. 243. cum ACE, jam congruit cum DCB ad verticem opposito. Quoniam vero punctum C jacet in fig. 243, 245, 246 extra parallelas HI, FG ad partes HI, in fig. 244 inter eas; angulus HCl est in illis idem, ac FCG, in hac ad verticem oppositus, anguli vero CHI, CIH in illis externi, & CFG, CGF interni, & oppositi, in hac alterni. At si in illis HI recederet a C ultra FG, satis patet, statim ipsos CFG, CGF ex internis evasuros externos.

792. Porro plurimum sæpe proderit litteras apponere a transformatione non pendentes, quæ adhiberi possint sine mutatione ulla, ut hic litteræ A, B, D, E plurimum profunt ad plagas designandas, cum in fig. 243 ponitur A ad partes H, & in fig. 244 B ad partes H jam mutati, & A ad oppositas. Proderit autem id ipsum sæpe ad habendam generalem enunciationem, ut jam videbimus, in Conicarum Sectionum elementis præstitum a nobis esset cum successu. Mutationes

vero



LOCORUM GEOMETRICORUM. 301

vero angulorum in oppositos ad verticem, vel externorum in alternos, vel internos vidimus ex parte n. 690. videbimus jam uberius in ipsis Conicis Sectionibus.

793. Anguli mutatio tam ex alterius cruris, quam e utriusque mutatione in Conicarum Sectionum elementis occurrit plurimis vicibus, cui & demonstratio aliquando idcirco accommodanda fuit. In solutione probl. 2, num. 136, occurrit in fig. 35, & 36 detet-F.35 minatio puncti P per intersectionem rectarum VG, 36 FQ, & puncti p per intersectionem rectarum Vg, FQ, captis FV ad FE in ratione determinante, & QG, Qg æqualibus QF. In ejus autem demonstratione considerantur *similia triangula*, FPV, QPG, & QPD, QFE, ac inde eruitur FP ad PQ, ut FV ad QG, sive QF, & PQ ad PD, ut FQ ad FE, unde inferitur ex æqualitate ordinata FP ad PD, ut FV, ad FE in ratione determinante, ut oportebat. Hęc demonstratio, si assumatur similitudo triangulorum, nullum habet discrimen in figuris 35, & 36, juxta num. 764, licet altera ad quamvis Sectionem Conicam pertineat, altera ad solam Hyperbolam; quia omnia remanet primo analogię genere analogæ, nullo termino directionem mutante, neq; in infinitum abit quidquam, nec per infinitum traducitur. Transferitur ea demonstratio ad punctum p iisdem prorsus verbis, & litteris ponendo solum pro punctis, P, G, D puncta p, g, d eorum analogæ. Sunt nimirum *similia triangula* FpV, Qpg, & Qpd, QFE, ac inde eruitur Fp ad pQ, ut FV ad Qg, sive QF, & pQ ad pd, ut FQ ad FE; unde inferitur ex æqualitate ordinata Fp ad pd, ut FV ad FE in ratione determinante, ut oportebat. Nulla autem mutatio fit in nomenclatura triangulorum, & proportionibus, si ve conferatur punctum p cum puncto P ejusdem figuræ, si ve p cum p alterius, quia punctis, & rectis succedunt puncta, & rectæ cum analogia vel primi, vel secundi generis; quamobrem rationes redeunt eodem juxta num. 772, & cum nulla argumentatio fiat componendo, vel dividendo, nullus fit transitus a summis,

## 302. DE TRANSFORMATIONE

ad differentias, vel viceversa, quæ textum demonstrationis verbo aliquo immutent.

794. At similitudinis triangulorum illorum demonstratio turbatur nonnihil a mutatione directionis eorum in angulis. Angulo  $VFP$  in fig. 35 succedit  $VFP$ , quem  $PF$  mutata continet, si producat, cum  $FV$  non mutata. At directio  $FP$ ,  $Fp$  communis in fig. 36, cum  $FV$  communi angulum  $VFP$  communem reddat cum angulo  $VFP$ . Contra angulus  $PQg$  idem est ac  $pQg$  in fig. 35 ob directionem  $Qp$ ,  $Qp$  eandem, &  $Qg$  utrobique eandem, sed contrariam illi priori  $QG$ : at in fig. 36  $pQg$  est ad verticem oppositus ipsius  $PQG$ , ob directionem  $Qp$ ,  $Qg$  utramque oppositam directioni  $QP$ ,  $QG$ . Comparando angulos  $FPV$ ,  $QPG$ , habetur utrobique alter alteri ad verticem oppositus, at  $FpV$ ,  $Qpg$  idem sunt angulus mutatis in fig. 35 solis directionibus  $FP$ ,  $VP$ , dum abeunt in  $Fp$ ,  $Vp$ , & manentibus directionibus  $GP$ ,  $QP$ , in  $Gp$ ,  $Qp$ : at in fig. 36 mutatis contra directionibus  $GP$ ,  $QP$  in  $gp$ ,  $Qp$ , manentibus  $FP$ ,  $VP$  in  $Fp$ ,  $Vp$ , unde fit, ut alter ex angulis illis binis utrobique, dum fit transitus a  $P$  ad  $p$ , mutetur in angulum sibi ad verticem oppositum, maneat vero alter, & proinde qui fuerant ad verticem oppositi, jam congruant. Demum anguli  $PFV$ ,  $PVF$  sunt utrobique alterni angulorum  $PQG$ ,  $PGQ$  jacente  $P$  inter parallelas  $FV$ ,  $GQ$ , at  $pFV$ ,  $pVF$ , respectu  $pQg$ ,  $pgQ$  sunt in fig. 35 externi, in fig. 36; interni, & oppositi cum jaceat  $p$  ibi ad partes  $FV$  hic ad partes  $gQ$ . Quoniam tamen ejusmodi mutatio angulorum ex oppositis ad verticem in congruentes & ex alternis in externos, ac internos, & oppositos, vel ex externis in internos, æqualitatem eorum non mutat, manebit demonstrationis vis; & solum enunciatio mutabitur dicendo pro puncto  $P$  angulus  $FPV$  æquatur angulo  $QPG$  ad verticem opposito, & pro angulo  $FpV$ , est idem; ac angulus  $Qpg$ ; pro angulis vero ad  $FV$ ,  $GQ$ , &  $FV$ ,  $gQ$  potest dici tantummodo anguli ad ejusmodi bases sunt ubique æquales et paral-

LOCORUM GEOMETRICORUM. 304

parallelarum proprietatibus, licet, si ex proprietatibus enunciarentur, mutari debeat expressio. Prorsus vero similia observari possunt in comparatione triangulorum FEQ, PDQ, & FEQ, pdQ.

795. At ad evitanda incommoda directionis mutatae in angulorum, & vero etiam rectarum enunciacionibus, plurimum saepe nobis profuit alias adhibere litteras praeter eas, quae mutantur: Hinc illae A, B in fig. 1, 2, & tam multis post retentae in directrice: hinc illae GHIT, *ghit* constanter retentae in figuris a 9 ad 14, & 25, 26, 27. Hinc in figuris post 41 puncta illa z, Z, & K, ac aliis in locis. Id autem prodest multo etiam magis aliquando, ubi punctum aliquod ita in infinitum abit, ut nusquam jam sit. Sic praeter superiora exempla, in quibus haec utilitas ostendi potest, ubi figura 25 mutatur in 28 (num. 109) & Ellipsis in circulum, puncto E illius abeunte in infinitum ita, ut nusquam jam sit, frustra analogia quaeretur figurarum; nisi utrobique manerent litterae Gg, Hh, Ii ab interfectionibus non pendentibus, quae post transformationem supersunt:

796. Exempla litterae adjectae cum fructu enunciacionis manentis habentur plura. Luculentissimum est in usu litterae V; quae in figuris a 41 ad 45 adjecta est in usu litterae V; quae in figuris a 41 ad 45 adjecta est (num. 172) rectae HF, in prioribus ad partes Fin postrema ad partes H. Hac arte obrigit ubique ex parallelarum natura aequalitas angulorum PFH, pFV cum angulis LTt, LtT aequalibus inter se; licet ex diversis parallelarum proprietatibus. profluat aequalitas ipsa juxta hunc ipsum rationem. Porro in figuris 41, 42, 43 tam PP inter se relatae, quam Ep inter se, positionem servant; & proinde omnia eodem modo se habent; in figura 44 mutat directionem tam EP, quam Ep; hinc adhuc V jacet ad partes contrarias H. At in fig. 45 mutatur Ep, manet FP; hinc litterarum respondentium V, & H altera respectu alterius manentis mutari debet, ut jam directiones FH, FV congruerent.

797. Hujusmodi artificio auferetur etiam apparens quædam irregularitas, quæ videtur occurrere in theoremate exposito num. 176. Ibi enunciatur, binas tangentes ductas ex extremis punctis chordæ transeuntis per focum concurrere in directrice, ibique continere angulum in Ellipsi acutum, in Parabola rectum, in Hyperbola obtusum, si terminetur ad eundem ramum illa chorda, iterum vero acutum si terminetur ad binos ramos. Is angulus est in fig. 53, & 54  $PHp$ .  
 53 Porro ubi punctum  $p$  e ramo citeriore figuræ 53 abit  
 54 in ulteriorem figuræ 54, non abit angulus ille ex obtuso in acutum saltu quodam, sed angulo  $PHp$  illius succedit angulus, quem in hac contineret  $PH$  cum  $pH$  producta ad partes  $H$ , quæ nimirum  $pH$  directionem mutavit. Is est adhuc obtusus, & excipiens postremum illum obtusum  $PHp$  figuræ 53, qui habetur puncto  $p$  abeunte in infinitum, & tangente  $Hp$  in asymptotum  $H_2K_2$  figuræ 50. Is per omnes continuos gradus mutatur, donec ad binos rectos accedat ultra quoscumque limites, imminuto  $PHp$  acuto ita, ut abeuntibus  $P$ ,  $p$  in vertices axis transversæ, & factis tangentibus parallelis, evanescat. Satis igitur fuisset in  $HP$  producta in fig. 53 ad partes  $p$ , in 54 ad partes  $H$  apponere litteram  $V$ , & enunciare ita: angulus  $PHV$  erit in Ellipsi acutus, in Parabola rectus, in Hyperbola semper obtusus. Sed quoniam enuntiatio, & demonstratio sine ejusmodi productione rectæ evadebat simplicior, simplicitati analogiam postposuimus.

798. At ex hisce exemplis jam patet, quam apte hujusmodi artificio servetur sæpe analogia, vulgari etiam Geometriæ sermone adhibito. Nam si infiniti mysteria liberet adjicere, & rectas considerare per infinitum tractas, ac alia, quædam, quæ singula persequi longum esset, admiscere, theorematis quoque inde provenientibus in Geometriam invecis; possent semper ipsa intersectionum puncta retinere characteres suos, dummodo aliqua notula generaliter exprimi posset directio

LOCORUM GEOMETRICORUM. 309

rectio rectæ tendentis ad punctum, & magnitudo, quæ expressio communis esset etiam punctis in infinito latentibus, & lineis per infinitum traductis. Sic in fig. 35 angulus  $FpV$  angulo  $Qp$  erit adhuc oppositus  $F.35$  ad verticem, ut  $FpV$  angulo  $QpG$ , si non sumatur  $54$  ex parte finita rectorum  $Fp$ ,  $Vp$ , quæ directionem mutantur, sed ex parte illarum  $F\infty p$ ,  $V\infty p$ , quæ per infinitum eadem directione traductæ concipiuntur & in ipsa  $54$  adhuc obtusus est angulus  $PH\infty p$ , quem  $PH$  continet cum  $H\infty p$  per infinitum traducta. Verum deest ejusmodi geometricum idioma, & infiniti mysteria, si ipsum possibile sit, nostræ mentis captum excedunt adeo, ut sæpe in iis analogia quædam considerari possit tantummodo, & usus ad ea, quæ de finitarum magnitudinum relationibus mutuis habentur, generalius, & facilius eruenda, non vero ad ipsarum infinitarum, vel plusquam infinitarum magnitudinum relationes ad se invicem evidenter perspicendas, & pari evidentiâ ex iis relationibus deducendas semper demonstrationes theorematum ad finitam Geometriam pertinentium. Quædam ex iis investigationi aptiora sunt, quam demonstrationi. Certe quidam tantummodo canones eruuntur, quod hic præstamus, ex quibus rite stabilitis possint plerumque, quid post transformationem debeat in quantitatibus finitis relinqui. Ubi infinitis indefinita substituerimus alio modo, multo sane evidentiâ, & multo uberius patebunt omnia, quæ huc pertinerent. Sed de iis iterum infra. Interea geometrici idiomatis defectus etiam in sequenti canone, & multo etiam magis se prodet.

799. Canon. 5. Ubi anguli hiatus ab altera plaga ad alteram transit, quod fieri potest vel transeundo per nihilum, vel transeundo per binos rectos, si accipitur is, qui ejusmodi mutatione oritur transeundo per nihilum, habendus est pro negativo, & in summis negativo modo computandus ita, ut summa in differens abeat, altero tantum e binis mutato; ac si ea  
 $X \quad ? \quad$  abeat

306 DE TRANSFORMATIONE

abeat transfendo per b nos reſtos, angulo orto juxta  
 communem Geometrię nomenclaturam debet ſubſtitui eſ  
 e mplementum ad 4 reſtos, qui ſi appelletur angulus con-  
 vexus, vel ut aliqui ſolent gibbus, ſape analogia mul-  
 to melius ſervabitur.

200. Dum recta CL in fig. 264 gyrat circa C cum  
 F264 recta CK efficit angulum KCL directione KLN; abe-  
 unte L in K, is evadit nullus: tum abeunte L in L',  
 jam evadit negativus reſpectu KCL, hiatu KCL poſt  
 tranſitum per nihilum abeunte in KCL' directione op-  
 poſita KLO. Is crefcit, & fit reſtus, ubi L' abit in  
 O: tum ſi L' pergat ultra moveri in M; angulus KCM  
 eſt adhuc ejuſdem directionis cum KCL', ſed obtuſus.  
 Abeunte M in Q, jam fit KCQ recta linea,  
 & angulus ille abit non in nihilum, ſed in duos re-  
 ſtos KCQ, quorum menſura eſt dimidia circumfe-  
 rentia KOQ. Pergente M in M', jam angulus KCM'  
 in vulgari geometrico ſermone intelligitur is, qui hia-  
 tu cavo reſpicit plagam KN, qui iterum eſt minor duo-  
 bus reſtis. At is non ſuccedit priori illi KCM, nec  
 eſt analogus ipſi primario analogię genere, ſed ſecun-  
 datio. Priori ſuccedit angulus, ut eum appellavimus,  
 convexus, quem KC cum CM' continet ex parte OQ  
 & cujus menſura eſt arcus KOM' ſemicirculo major.  
 Is crefcit, & ille cavo decreſcit, dum M' pergat in  
 L, & appellente demum M', vel L ad K, comple-  
 F.89 tur quatuor reſti. Nimirum ut in fig. 89 bini ſunt  
 arcus FBm', FAm' contraria directione complentes cir-  
 culum, immo infiniti, qui integros addunt circulos  
 directione utraque; ita bini conſiderari poſſunt angu-  
 li, quos binę rectę in puncto quovis continent di-  
 rectione contrarii, alter convexus, alter cavus,  
 complectens quatuor reſtos, immo infiniti directione  
 utraque.

201. Porro ubi angulus directionem mutat tranſ-  
 undo per nihilum, tractari debet ut negativus. In fig.  
 F240240 angulus ACB externus æquatur ſummę angulo-  
 rum AEB, DBE, qui ſunt interni, & oppoſiti in tri-  
 an-

LOCORUM GEOMETRICORUM. 307

angulo CBE. Hinc angulus AC<sub>2</sub>B æquari debet differentię angulorum AE<sub>2</sub>B, DBE<sub>2</sub> ob directionem DBE mutam in DBE<sub>2</sub>; transitu facto in D per nihilum. Et revera est ipsi differentię æqualis, cum AE<sub>2</sub>B externus æquetur binis DBE<sub>2</sub>, AC<sub>2</sub>B internis, & oppositis.

802. Quod si mutatio fiat transeundo per duos rectos; angulo, qui in vulgari sermone nascitur cavus ad partem oppositam, debet substitui convexus ille, qui est ejus complementum ad quatuor rectos. Est notissimum Geometrię theorema, in circulo angulum ad centrum esse duplum anguli eidem arcui insistentis ad circumferentiam. Non erit verum, nisi angulus ad circumferentiam sit acutus, vel nisi anguli hujusmodi convexi considerentur. In fig. 271 angulus APC est<sup>F.271</sup> duplus anguli AIC; anguli autem AIC non habetur duplus in vulgari sermone acceptus, neque enim est APC, sed ejus complementum ad rectos quatuor, cuius mensura est arcus AIC, sive est angulus APC convexus.

803. Hujus etiam canonis usus occurrit in Sectionum Conicarum elementis. Ex num. 184 habetur, in F.57 Ellipsi in fig. 58 duplum anguli PHp binarum tangentium æquari differentię binorum angulorum PFP, Pfp, 58 in Hyperbola in fig. 59 summa eorundem PFP, Pfp. Nam ubi *f* abit in Parabola in infinitum ita, ut nullam jam sit, angulus Pfp decrescens in recessu puncti *f* in infinitum jam sit nullus, & ideo ibidem in fig. 57 in Parabola duplum anguli PHp æquatur soli angulo PFP. Ubi autem abit curva in Hyperbolam figurę 59, & *f* redit ex parte opposita, angulus Pfp acquirit directionem oppositam, quam cum acquiserit in transitu per nihilum; evasit negativus, & differentia debuit abire in summam.

804. Ibidem autem si angulus PFP non obvertat cupidem puncto H, sed ut in fig. 60, 61, 62 hiatum; F.60 enunciatio theorematum in vulgari Geometrico sermone 61 falsa erit. Nam non est accipiendus angulus PFP ca- 62

vus ille quem vulgo considerant, sed ejus complementum ad 4 rectos, nimirum ille, quem nos convexum appellavimus, qui constat adhuc binis PFN, pFN, quod ibidem enunciamus, & qui id non enunciant, theorema exhibent in hoc casu falsum. Nam in Geometrico sermone vulgari semper anguli nomine intelligitur cavus ille, non convexus.

805. Hic solum postremo loco notandum est hosce binos modos mutandi directionem in angulis transeundo per nihilum, & per duos rectos, respondere binis modis, quibus linea abit e positiva in negativam transeundo per nihilum, & per infinitum. Ut autem ibi non est analogia primario analogiæ genere priori lineæ linea finita habens directionem oppositam nata in transitu per infinitum, sed illa per infinitum traducta plusquam infinita; ita hic priori angulo non respondet post transitum per duos rectos angulus cavus directionis contrariæ, sed ille, quem nos hic convexum diximus plusquam obtusus.

806. Canon. 6. *Quadratum linea tam positiva, quam negativa est positivum, & quodvis quadratum positivum bina habet latera alterum positivum alterum negativum. Si autem quoddam quadratum equale fuerit rectangulo, cujus latus alterum directionem mutet; ipsum quidem quadratum censendum erit reale, sed negativum, & quadrato primi analogum secundo genere analogiæ; ac ejus latus fiet imaginarium, & impossibile, deficiente ibi termino analogo lateri quadrati prioris: si directionem mutet utrumque rectanguli latus, erit reale utrumque latus quadrati positivum, & negativum, & singula ex his erunt analogæ primo analogiæ genere singulis lateribus prioris quadrati.*

807. Patet hic Canon. ex iis, quæ diximus a num. 682 ad 688, ubi & ejus demonstratio habetur, & affertur exempla ordinatarum BG, BG figuræ 242, quæ binæ sunt intra circulum, nullæ extra, ac B2L, B3L, quæ habentur extra utriusque in Hyperbola, non autem ipsa



LOCORUM GEOMETRICORUM. 309

intra, ac alia exempla adduntur desumpta a positionibus Euclidis libri 2. Quadratum autem, ubi sit negativum, & adhuc appellatur quadratum, non erit quadratum quantitatis realis, sed productum ex recta positiva considerata, & recta longitudinis ejusdem, directionis contrariæ negativè considerata; adeo ut quadratum negativum ubi ad reales quantitates referatur idem significet, ac ejusmodi productum, quod quadrato positivo, & vere quadrato respondet, ut recta negativa positivè; erit autem quadratum lateris imaginarii, sive impossibilis. Rectangula ejusmodi, & quadrata negativa cum positivis confundi, & pro se invicem assumi poterunt, ubi solè magnitudines considerantur; ut ubi etiam positio consideratur, ac analogia ad transformationes, diligenter sunt distinguenda.

808. Consequitur autem ex ipso canone hoc veluti Corollarium. *Inter binas rectas tam simul positivas, quam simul negativas media proportionalis est duplex, altera positiva, altera negativa, qua longitudine sunt æquales, directione contraria. Inter binas alteram positivam, negativam alteram media proportionalis realis non habetur, sed in impossibilem, & imaginariam utraque transit: haberi autem possunt binæ mediae longitudine æquales, sed positione contraria altera positiva, altera negativa. Patet corollarium ex eo, quod quadratum mediæ æquari debeat rectangulo sub extremis, & demonstratum est num. 685. Binæ autem illæ mediæ habebuntur, ubi datatum altera est positiva, altera negativa, si earundem datatum utraque positive consideretur, & inveniantur binæ mediæ, quod ibidem præstitimus, inventis binis  $B_2L$ , mediis inter  $AB_2$ ,  $B_2D$ : Nam si hæc considerentur ut positivæ ambæ, erit  $AB_2$  ad utramvis  $B_2L$ , ut eadem  $B_2L$  ad  $B_2D$ , at si altera ex iis consideretur negativo modo, ut  $AB_2$ , erit  $AB_2$  ad alterum e binis  $BL$ , ut altera,  $BL$ , non illa eadem, ad  $B_2D$ , mutata nimirum consideratione utriusque termini ejusdem primæ rationis. Atque hoc erit disti-*

### 210 DE TRANSFORMATIONE

scizmen inter B comparatum circulo, & B<sub>2</sub> comparatum Hyperbolæ. Eris ibi AB ad alterutram BG, ut eadem BG ad BD, hinc AB<sub>2</sub> ad alteram B<sub>2</sub>L, ut non ea, sed altera BL pariter ad Hyperbolam terminata ad B<sub>2</sub>D. Atque hoc pacto relationes quandoque habebuntur non inelegantes inter Ellipsim, & Hyperbolam, solventes quædam problemata, quæ videntur ope possivorum, & negativorum ad unicum problema reduci posse, & communem habere enunciationem, ubi nimirum planis positivis negativa succedant, non linearum tantummodo, ut in fine eorum, quæ ad hunc Canonem pertinent, patebit.

209. Hujus Canonis, & Corollarii summus est usus in Sectionum Conicarum elementis, & ejus ope mirum in modum ratio redditur quarundam, quæ videntur anomalis evertentes omnem analogiam, & relationem harum curvarum ad se invicem. Illud jam supra notavimus num. 761, ubi ostendimus axem Hyperbolæ per infinitum tractum, non vero axem finitum respondere finito axi Ellipseos, quod nimirum per quodvis punctum axis finiti Ellipseos, & per nullum finiti, sed per quodvis illius, qui traducitur per infinitum in Hyperbolæ, ductæ rectæ ipsi axi perpendiculares occurrunt perimetro. Id vero hinc sane manifesto patet, & ad omnes diametros primarias Hyperbolæ traducitur. Nimirum in fig. 9. in Ellipsi est (num. 66) constanter axis M<sub>oo</sub> ad chordam VF<sub>oo</sub>, ut rectangulum MR<sub>oo</sub> ad quadratum semiordinate RP. Jam vero ubicumque assumatur punctum R in Ellipsi in axe finito M<sub>oo</sub>, ambæ MR,  $\infty$ R retinent positionem suam, adeoque habentur ordinatæ PR<sub>p</sub> iis respondentes. At si punctum assumatur extra ad partes M, vel  $\infty$ , mutatur in negativam MR, vel  $\infty$ R, manente  $\infty$ R, vel MR. Quare mutatur in negativum etiam rectangulum MR<sub>oo</sub>. Hinc quartus terminus proportionalis post M<sub>oo</sub> VN, & rectangulum MR<sub>oo</sub>; quod erat quadratum semiordinate, vertitur in negativum, & proinde semiordinate respondens puncto cuilibet axis Ellipseos M<sub>oo</sub> per

LOCORUM GEOMETRICORUM, 311

per infinitum traduci est imaginaria, licet ejus quadratum reale maneat, sed negativum.

810. Comparata jam Hyperbola figuræ II cum Ell.<sup>9</sup> lipsi fig. 9, si R assumatur in quovis puncto axis indefiniti MH; directionem habet MR eandem, ac prius, mR contrariam; & assumatur R' in axe mb, commutat MR', retinet mR'. Quare in utroque casu rectangulum MRm evadit negativum. Remanet autem Vv positiva quantitas, Mm negativa, directionis nimirum contrariæ, Quare mutatis primo, ac tertio termino proportionis, & manente secundo, debet manere quartus, adeoque quadratum semiordinate habetur, positivum, & semiordinata utraque realis per totum axem M oo m traductam per infinitum. Contra vero in quovis puncto R assumpto inter M, & m retinetur directio utriusque MR, mR respectu Ellipseos; adeoque retinetur rectangulum MRm directionis ejusdem, retinetur Vv, mutatur veto Mm. Quare mutatur etiam quadratum semiordinate in negativum, & proinde nullum est punctum assumptum in axe Mm finito Hyperbolæ, in quo haberi possint ordinatæ. Ordinatæ ipsæ iis punctis respondentes sunt impossibiles, & imaginariæ; earum autem quadratum, quartum in illa proportionem, in qua priores tres termini reales sunt, reale est etiam ipsum, sed negativum.

811. Hoc animadverto, patet jam primo, cur Ellipsis quidem finito orbe in se ipsam redeat, Hyperbola vero habeat binæ crura in infinitum utrinque producta. Patet etiam unde oriatur discrimen in figure inter diametros conjugatas primariarum Hyperbolæ, five diametros secundarias & diametros conjugatas Ellipseos. Omnes diametri hujus terminantur ad perimetrum, (num. 212); illius diametri, non omnes, sed eæ solæ, quas continent in asymptotorum anguli, quos axis transversus secat, occurrunt perimetro ipsius; reliquæ autem ipsi nullo modo occurrunt, sed terminantur ad perimetrum binorum ramorum Hyperbolæ conjugatæ (nu. 212), quæ Hyperbola conjugata est locus geometricus a priore

### 312. DE TRANSFORMATIONE

a priorē omnino distinctus. Nam quæcumque diximus de ordinatis axi transverso, locum habent in ordinatis diametrorum omnium, cum in omnibus juxta num. 351 debeat esse rectangulum sub abscissis ad quadratum semiordinatæ in constanti ratione diametri primariæ, quæ in Hyperbola mutat directionem, ad rectam datam, qua parameter dicitur, & ut paulo inferius hinc demonstrabitur, eam non mutat. Quamobrem si per centrum  $C$ , utique interceptum verticibus diametri, concipiatur ordinata parallela ordinatis diametri primæ cujusvis; ea quidem imaginaria est, sed ejus quadratum est reale, & negativum. Si ea esset realis, esset utique analogæ diametro conjugatæ Ellipseos, quæ cum per centrum transeat, & ad perimetrum Ellipseos ipsius terminetur, ac sit parallela ordinatis suæ diametri primæ sibi conjugatæ, etiam ipsa est ordinata quædam pertinens ad ipsum centrum. Hinc eruitur illud: semidiametro parallela ordinatis diametri Ellipseos cujusvis terminatæ ad ejus perimetrum, adeoque ejus conjugatæ nihil respondere analogum, quod reale sit, & pertineat ad centrum finitum Hyperbolæ. Sed ejus quadrato respondere quadratum quoddam negativum, parametrum positivam, & rectangulum  $MCm$  positivum,

§12. Porro ob hujus quadrati negativæ analogiam cum quadrato positivo axis conjugati Ellipseos factum est, ut Geometræ, licet id, ipsum omnino tum non perspexerint, semidiametros appellaverint conjugatas primariarum, latera ejusmodi quadrati positivè considerati, quas cum viderent non terminari ad perimetrum, eas dixerunt semidiametros secundarias. Illæ funguntur vice earum, quæ imaginariæ sunt, & quæ vere analogæ essent, si essent reales. Hinc autem illud manifesto consequitur, semidiametros, vel diametros secundarias Hyperbolæ nullam habere analogiam cum semidiametris, vel diametris conjugatis Ellipseos, sed illarum quadrata esse analogæ secunde

tio

rio analogiæ genere quadratis harum , nimirum , ubi refertur Hyperbola ad Ellipsim , quadrata semidiametrorum secundariorum illius assumenda esse ; ut negativa , dum quadrata semidiametrorum conjugatarum cujusvis diametri Ellipseos considerantur , ut positiva .

813. Huc ubi iam delati sumus , prona fient , & legibus continuitatis , & uniformis Sectionum Conicarum naturæ admodum conformia plurima , quæ videntur omnem analogiam pervertere . Nimirum in iis , quæ pertinent ad diametros ipsas secundarias Hyperbolæ collatas cum diametris Ellipseos , discrepabunt omnia , ac proprietates earum diversæ erunt , & diversa ratione demonstrabuntur . Ubi autem earum quadrata occurrent , servabitur penitus analogia , dummodo quadrata diametrorum secundariorum Hyperbolæ habeantur pro negativis . Patebit autem & illud discrimen , & hæc conformis ratio , consideratis ipsis Conicarum Sectionum Elementis , in quibus , quæ maximè notari digna huc pertinentia arbitrabimur , hic persequantur .

814. Constructio Ellipseos , quam ex datis binis diametris dedimus num. 391 , nullo modo ad Hyperbolam transferri potest : ea vero , quam pro Hyperbola dedimus num. 269 ad Ellipsim pertinere non potest : ambæ elegantissimæ sunt , & simplicissimæ , sed a se invicem remotissimæ , & penitus discrepantes . Axis transversus in Ellipsi est omnium diametrorum maxima ( n. 379 ) , in Hyperbola omnium primariorum minima ( num. 246 ) , & methodi , quibus ea theoremata demonstrantur a se invicem discrepant . In Ellipsi omnes diametri terminantur ad ejusdem Ellipseos perimetrum , ut diximus : in Hyperbola terminantur omnes primariæ tantum , secundariæ autem ad Hyperbolam conjugatam , quæ alium locum geometricum constituit a priori prorsus distinctum . In quavis Ellipsi habentur ( numer. 379 ) binæ diametri conjugatæ æquales , ac vel primaria major esse potest , quam sua conjugata vel minor : in Hyperbola , nisi equilatera sit , semper inæquales sunt .

ae primaria (num. 246) vel semper major, vel minor quam sua conjugata.

§15. Ipsa ratio, qua axem conjugatum, & diametros primarias conjugatas definivimus in Ellipsi, & Hyperbola discrimen hoc apertissime docet, cum admodum diversa sit, licet prima fronte conformis appareat. Neque enim eas definivimus ex ulla relatione communi ad perimetrum Ellipseos, & Hyperbolæ, quæ nimirum nulla habebatur, sed alia via ad hanc ipsam anomaliam declarandam aptissima. Nimirum pro axe conjugato in fig. 9, & 11 assumpimus CX; Cx medias inter MF, mF, & diximus utrobique illam Xx axem conjugatum. Videtur sane hæc definitio communis esse desumpta nimirum ab eadem relatione ad rectas analogas MF, mF. At re diligentius considerata, contrarium erit admodum manifestum. Cum enim MF in figura 11 habeat eandem directionem, ac in fig. 9, & Fm contrariam, patet alteram tantummodo transire in negativam. Hinc si habetur in Ellipsi duplex media proportionalis inter MF & Fm, ea in Hyperbola haberi non potest juxta num. 308, cum nulla sit media inter quantitatem positivam, & negativam; sed binæ inveniri possint mediæ æquales quidem magnitudine, sed positione contrariæ altera positiva, altera negativa. Si igitur in Hyperbola assumantur mediæ CX, Cx inter MF, mF, jam etiam mF consideratur, ut positiva, adeoque ipsa sic considerata non est analogæ illi mF Ellipseos ibidem consideratæ, ut positivæ; nec proinde illæ mediæ analogæ sunt.

§16. At pro diametris conjugatis cujusvis diametri poterat quidem illud assumi pro definitione, ut essent rectæ per centrum ductæ parallelæ ordinatis illius in eo bifariam sectæ, quarum quadratum ad quadratum suæ diametri primæ esset, ut est quadratum semiorbitæ ad rectangulum sub abscissis, quæ visa fuisset communis definitio. Sed præterquam quod in eundem scopulum incidisset definitio, quadrato semidiametri secundariæ evadente negativo in Hyperbola, & ipsa semi-

## LŒCORUM GEOMETRICORUM. 313

midiametro, ac diametro, si analogia rite servanda es-  
 set; imaginaria; præterea ea definitio nec generalis  
 exiſſet; nam diameter quævis primaria habet in Hy-  
 perbola suam ſecundariam, cujus ea ipſa conjugata eſt;  
 nec tamen habetur conſtans ea ratio quadrati ſemidi-  
 dinatæ diametri ſecundariæ ad rectangulum ſub abſciſ-  
 ſis a binis ejus verticibus, ſed ea proprietas eſt ordi-  
 natarum tantummodo, & abſciſſarum ad diametrum  
 primariam. Aliam igitur apparentem tantummodo ana-  
 logiam conſecrati ſumus, quæ primo aspectu ſumma  
 videretur, licet re ipſa, nulla eſſet, cum nimirum nul-  
 la præſus haberi poſſet. Nimirum in ſubſidium voca-  
 vimus figuram illam conſiſtens quatuor infinitis bina-  
 rum Hyperbolarum conjugatarum ramis, quas exhibent  
 figuræ 52, 83, 84, & ad unicam Ellipſim, ut  
 num. 172 inuimus, relationes habet admodum ele-  
 gantes. Diximus igitur num. 212 illam diametri cu-  
 juſvis diametrum conjugatam, & poſitione, & magni-  
 tudine definitam, quæ per centrum ducta ordinatis il-  
 lius parallela eſſet, & ad perimetrum terminaretur in  
 Ellipſi ipſius Ellipſeos, in Hyperbola figuræ ipſius a qua-  
 tuor binarum Hyperbolarum conjugatarum ramis con-  
 cluſæ, qua definitione ſatis patebat contineri axes ip-  
 ſos, cum axem conjugatum terminari in Ellipſi ad pe-  
 rimetrum ipſius Ellipſeos conſtare ex n. 72, & in Hy-  
 perbola id in ipſa Hyperbolarum conjugatarum noſione  
 contineretur n. 170.

817. Porro tanta eſt ejus figuræ quatuor Hyperbola-  
 rum ramis concluſæ habitudo ad unicam Ellipſim, ut  
 ea vel minus perito, vel minus cauto Geometræ faci-  
 le poſſit imponere, ac ſuadete ejus etiam figuræ peri-  
 metrum ſimplicem eſſe Geometricum locum, & unice  
 Ellipſi integre reſpondentem. Nam quævis recta tam  
 in quavis Ellipſi, quam in ejuſmodi figura per centrum  
 ducta, ipſius perimetro occurrat hinc, & inde in bi-  
 nis punctis tantummodo, ſi nimirum & aſymptotorum  
 concurſus conſiderentur, ut in infinito deliteſcentes,  
 ubi ſe & cum ipſis aſymptotis octo illa quatuor ramo-  
 rum

rum crura conjungant: quævis ex iis ita terminata in ipso centro secatur bifariam; quævis est diameter habens ordinatas, quas bifariam fecet, quibus liceret annumerare etiam illas  $IL$  in fig. 83, quæ dici possent ordinatæ asymptotorum alteri parallelæ ab altera bifariam sectæ, juxta num. 240; quævis habet binas tangentes perimetri figuræ ordinatis parallelas præter asymptotorum ordinatas illas  $LI$ , quæ nullam habent nisi ipsa asymptoto considerata pro tangente, cujus contactus ita in infinitum recedit, ut nusquam jam sit: quævis diametrum sibi conjugatam habet parallelam binis tangentibus figuræ per binos suos vertices ductis. Demum tam in Ellipsi, quam in ea figura quatuor tangentes per extrema puncta diametrorum conjugatarum ductæ parallelogrammum continent, cujus area constantis est magnitudinis, æqualis nimirum rectangulo sub binis axibus, juxta num. 469, ubi illud etiam ad hujusmodi analogiam accedit, quod anguli eius parallelogrammi terminantur in Ellipsi ad aliam Ellipsim similem (num. 375), & in Hyperbola ad asymptotos (num. 244), quas patet communes esse debere omnibus Hyperbolis similibus idem habentibus centrum  $C$ , & eandem directionem axium  $Mm$ ,  $Xx$ , ac eandem eorundem rationem ad se invicem, & in eas debere desinere omnes Hyperbolas, ubi axes evanescant, ut adeo illæ ipsæ asymptoti considerari possint, tanquam alia quædam Hyperbola illi similis, in cuius perimetro id parallelogrammum angulos habet terminatos, ut in Ellipsi.

. 818. At licet tanta sit huius figuræ similitudo cum Ellipsi, discrimen admodum facile deprehenditur vel ex eo, quod eadem recta ei figuræ in quatuor etiam punctis possit occurrere, ut illa  $Hb$  fig. 84, quæ occurrit ipsi in  $N$ ,  $P$ ,  $p$ ,  $n$ , præter quam quod nulla e mille aliis proprietatibus, quæ vel ad focos, vel ad ordinatas, vel ad latera recta, normales, tangentes, ac alia ejusmodi pertinent in Ellipsi, locum habet in ramis omnibus eius figuræ, sed ritè applicata in binis



tantummodo . Illa vero qualescumque apparet analogia, & figurarum similitudo inde ortum duxit, quod licet ipsæ diametri secundariæ non sint in Hyperbola analogæ diametris Ellipseos, earum tamen quadrata sunt analogæ secundo analogiæ genere quadratis harum, quibus si negativè sumantur, prorsus respondent. Cum ipsæ diametri vi ejus definitionis nullo modo analogæ sint, hæc ipsa analogia quadratorum demonstrari communi demonstratione non potuit desumpta ex ipsâ definitione . Pendet ea a theoremate enunciato Prop. 7 num. 351, in qua habetur pro utraque curva, quadratum semiordinatæ cujusvis diametri primariæ esse ad rectangulum sub binis abscissis a binis ejus verticibus, ut est quadratum semidiametri conjugatæ ad quadratum semidiametri primariæ . Porro rationem ejus quadrati ad rectangulum sub abscissis constantem esse communi demonstratione patuit num. 352 ; at eam eandem esse, quæ est quadrati semidiametri primariæ, eadem pro utraque curva demonstratione evinci non potuit ; sed pro Ellipsi ibidem demonstratum est ex eo, quod vertices diametri conjugatæ sunt etiam ad eandem Ellipsim, pro Hyperbola repetitum est a numer. 256, ubi idem longe alia demonstratione, petita videlicet ab asymptotorum natura, fuerat demonstratum.

319. Cæterum demonstrata jam ejusmodi quadratorum analogia, ex qua constat quadratum ejus, quæ dicta est diameter secundaria in Hyperbola, esse ejusdem magnitudinis, ac est quadratum negativum vere analogum quadrato positivo diametri conjugatæ Ellipseos, quæcumque in Ellipsi pertinebunt non ad ipsas diametros conjugatas, sed ad earum quadrata, erunt communia Hyperbolæ, dummodo in hac quadratum semidiametri secundariæ sumatur negativè, quod sane, si ipsa secundaria diameter esset analogæ diametro Ellipseos, positive sumi deberet, cum nimirum & positivarum, & negativarum quantitatum quadrata sint positiva . Fit autem idem, ut ubi de quadratis agit,

altero jam negativè accepto ; summis jam respondentibus differentiarum ; quod in sequentibus exemplis manifestum erit :

F.19  
20  
820. In Ellipsi in fig. 19 quadratum distantiarum CF foci a centro æquatur ( num. 64 ) differentiarum quadratorum semiaxium CM , CX ; at in Hyperbola in fig. 20 summe . Semiaxis quidem Hyperbolæ transfertus ille finitus  $Mm$  est analogus semiaxi transverso Ellipseos ; sed secundario analogiarum genere , adeoque respectu ipsius negativus . At positivum adhuc manet ejus quadratum . Semiaxis conjugatus illius terminatus vertice X non est analogus ullo analogiarum genere semiaxi conjugato hujus , sed illi responderet imaginaria , atque impossibilis quantitas ; cujus tamen quantitatis quadratum reale æquatur semiaxis conjugati quadrato negativè sumpto ; unde fit ; ut ubi ipsius CX adhibetur quadratum in Ellipsi ; substitui possit in Hyperbola suæ CX quadratum negativè sumptum , quod erit idem ; ac rectangulo  $MFm$  Ellipseos analogum ; sed negativum Hyperbolæ rectangulum  $MFm$  substituere . Ac ut quadratum CF in fig. 19 est differentia quadrati CM , & rectanguli  $MFm$  ; in figura vero 20 summa eorundem ; mutata nimirum directione rectanguli  $MFm$  ob  $mF$  mutatam positione ; quæ duo theorematâ apud Euclidem respondent propositioni 5 & 6 Libri 2 ; sed re vera rite considerata Geometriæ indole ; unicum theorema sunt ; ita etiam ibi differentiarum , hic summæ quadratorum CM , CX æquatur illud idem quadratum CF .

821. Eodem prorsus pacto cum in Ellipsi summa quadratorum semidiametrorum conjugatarum , æquetur summæ quadratorum axium ; in Hyperbola æquantur inter se eorundem quadratorum differentiarum ; quod nimirum quadrato diametri conjugatæ Ellipseos responderet in Hyperbola quadratum quantitatis imaginariæ , sed ipsum reale , & æquale quadrato semidiametri conjugatæ Ellipseos negativè sumpto .

822. Quod parametri , seu latera recta omnium dia-

Sectionum in Ellipsi; & primariorum in Hyperbola sunt  
 prorsus analogæ, & quidem primario analogiæ gene-  
 re; sunt autem, ut jam videbimus; ac proinde pro-  
 prietas omnes communes habeant; & communi e-  
 nunciatione, constructione, demonstratione ubique gau-  
 deant; ex hac ipsa quadrati semidiametri conjugatæ  
 negativæ sumpti consideratione omnino profuit: Latus  
 rectum cujuscumque diametri diximus generaliter ( num.  
 351 ) tertiam continue proportionalem post diametrum  
 illam; & ejus conjugatam, & eo reduci etiam latus  
 principale; constat ex num: 66; cum inde pateat, &  
 in Ellipsi, & in Hyperbola ipsum esse tertium post a-  
 xem transversum; & conjugatam; licet ubi ipsum defi-  
 nimus! n. 54; usi fuerimus ea proprietate, quam ha-  
 bet communem cum latere recto principali Parabolæ  
 carentis axe conjugato; quod nimirum sit chorda axi  
 perpendicularis per focum ducta: Rectangulum sub  
 diametro primaria; & latere recto debet æquari qua-  
 drato diametri secundariæ: Porro ubi Ellipsis in Hy-  
 perbolam abit; quadratum diametri conjugatæ secunda-  
 riæ Hyperbolæ ipsius negativæ sumptum est analogum  
 quadrato diametri conjugatæ Ellipseos: Debet igitur e-  
 vadere negativum illud rectangulum; adeoque debet  
 evadere negativum alterum tantummodo e binis ejus  
 latibus; Evadit autem negativam diametrem primariam,  
 quæ nimirum terminatur ad ramum oppositum. Igitur  
 latus rectum debet adhuc remanere positivum; quod  
 cum connectatur non cum ea quantitate imaginaria;  
 quæ in Hyperbola respondet diametro conjugatæ Ellip-  
 seos; sed cum ejus quadrato reali, reale est.

823. Poterat quidem sic etiam definiti, ut esset quar-  
 tum post rectangulum sub binis abscissis, quadratum se-  
 miordinatæ, ac diametrum primariam; cujus ea est  
 ordinata; & in hac definitione, quæ eodem redit;  
 nihil assumeretur, quod non esset homogeneum, &  
 reale: Abscissæ autem in negativos primus terminus ob  
 alteram abscissam, ac tertius ob diametrum primariam  
 abeuntes in negativas; ac proinde manente positivo se-

cundo termino, sive quadrato semiordinatæ, manet etiam positivus quartus, seu latus rectum. Eo pacto ejus positiva analogia in ipsa definitione manifesta esset per sese. At quoniam ejus relationis ad ipsas diametros major est usus, & est multo simplicior determinatio tertiæ continuè proportionalis post binas rectas, quam quartæ post illa plana; idcirco hinc etiam simplicitati posthabuimus analogiam, ut supra num. 797.

824. Cæterum latera recta communibus gaudere proprietatibus in utraque curva, plurimis exemplis patet, quæ elementa ipsa perpendicularibus passim occurrent.

F173 Eodem pacto latera recta principalia determinantur  
 180 num. 54 per chordam axi perpendicularem per focus  
 186 ductam: eodem pacto num. 464 definitur in fig. 173,  
 189 174 ex dimidio latere recto principali VO subnormalis RM æqualis RD: eodem pacto num. 475 in fig. 180, ac 181 illa PT, abscissa per perpendicularum MT ductum ex concursu normalis cum axe transverso in radium foci, æqualis dimidio lateri recto principali; eodem pacto num. 495 determinatur in fig. 186, 188 ex quovis latere recto VA quadratum semiordinatæ PR æquale rectangulo VRL: eodem pacto num. 503 in fig. 189, 191 chorda VH, quam circulus osculator abscindit ex diametro primaria ducta per punctum osculi, æqualis lateri recto ejusdem diametri. In iis omnibus & enunciatio, & constructio, & demonstratio communis est.

825. Quoniam vero ipsæ diametri conjugatæ in Ellipsi, & Hyperbola nullam analogiam habent, habent autem earum quadrata secundariam; tam in demonstrandis theorematis, quam in solvendis problematis, quæ pendent a diametris ipsis conjugatis, proderit sæpe ad earum quadrata recurrere, quorum opè communis quandoque inveniri poterit & enunciatio, & constructio, ac demonstratio. Exemplum theorematis desumi potest ab illa area parallelogrammi, quod in suo angulo continent binæ diametri conjugatæ, & circumscribitur Ellipsi, ac inscribitur figuræ Hyperbolicæ 4ta-

LOCORUM GEOMETRICORUM. 321

morum, quæ area constanter æquatur rectangulo sub  
 semiaxibus. Nos aliam ejus demonstrationem dedimus  
 pro Ellipsi num. 375, aliam pro Hyperbola num. 344,  
 quarum illa prior ad Hyperbolam, posterior ad Ellip-  
 sim transferri nullo modo possunt, atque id idcirco,  
 quod in iis nulla haberi debuerat analogia. Demon-  
 strationem communem nonnulli exhibent ope tangen-  
 tium, quæ proprietates communes habent. Nos etiam  
 num. 469 communem ejus demonstrationem haberi pos-  
 se ostendimus petitam ex alio communi theoremate  
 proposito num. 466, quod nimirum in fig. 171, & 172  
 rectangulum sub perpendicularo CL e centro in tangen-<sup>F171</sup>  
 tem, & semidiametro conjugata CI æquetur rectangu-<sup>172</sup>  
 lo sub semiaxibus. Id vero idcirco fieri potuit, quia  
 num. 467 in ejus theorematis demonstratione inven-  
 tum fuit, alterando, quadratum CL ad quadratum se-  
 miaxis transversæ CV, ut quadratum semiaxis conjuga-  
 tæ CD ad quadratum semidiametri conjugatæ CI. Qua-  
 drata adhibita sunt, quæ sunt realia, licet negativa  
 sint. Quadratum autem semiaxis conjugatæ CD, & se-  
 midiametri conjugatæ CI in Hyperbola, si negativè ac-  
 cipiantur, sunt analogæ iisdem quadratis positivè sum-  
 ptis in Ellipsi, & ratio inter ea negativè sumpta est  
 eadem, ac inter ea positivè sumpta, quam ob causam  
 in lateribus ipsorum positivè consideratorum, quæ rea-  
 lia sunt, mansit ratio, licet in iis non habeatur analo-  
 gia. Id semper accidet, ubi proportio aliqua comple-  
 ctetur in Ellipsi binos terminos, qui in Hyperbola ma-  
 neant analogi, & binas diametros, quæ in Hyperbola  
 fiant secundariæ; manebit proportio, sed in demonstra-  
 tione recurrendum erit ad quadrata, & ad hunc ipsum  
 discursum, quem hic instituimus.

826. Problematis exemplum esse potest illud, quod  
 num. 436 proposuimus, ubi & quadratum semidiametri  
 conjugatæ analogum secundario analogiæ genere,  
 & latus rectum primario analogiæ genere analogum  
 adhibuimus. Ibi datis in fig. 160, 161 binis diametris con-<sup>F160</sup>  
 jugatis Pp, Ii; quærebantur axes. Poterant quæri binæ  
 rectæ

### 322 DE TRANSFORMATIONE

sectæ ejusmodi, ut quadratorum summa, vel differentia æquaretur summæ, vel differentiæ quadratorum datarum CP, CI, & rectangulum rectangulo sub altera, ut CI, & perpendicularo ex alterius vertice demisso in ipsam, quibus definitur constans parallelogrammum; at solutio nec obvenisset communis, nec ita expedita. Sustulimus heterogeneous illas diametros conjugatas, & illis substituimus parametros, quæ datis diametris primariis, & conjugatis dantur, & cum dentur per quadrata diametrorum conjugatarum analogæ sunt in utraque curva, & quidem primario analogiæ genere, ut vidimus num. 822. Eas combinavimus cum diametris primariis itidem analogis, sed secundario genere, adeoque negativis. Idcirco applicata PS æquali dimidiæ parametro utrobique ex parte curvæ convexa, adeoque utrobique ad eandem plagam, nimirum in Ellipsi in fig. 160 in directum cum pP, in Hyperbola in fig. 161 a P versus punctum p mutatum, unde provenit CS summa ibi semidiametri CP, & dimidiæ parametri PS, quæ in illa positivæ sunt ambæ, differentia hic alterius positivæ ab altera negativæ; communis profuxit & constructio, & demonstratio.

827. Quoniam autem diximus num. 808. inter binas rectas alteram positivam, alteram negativam non posse inveniri unicam mediam proportionalem, posse autem duas magnitudine quidem æquales sed directione contrarias; non erit abs re proferre exemplum, in quo binæ semidiametri secundariæ in Hyperbola assumptæ cum directionibus contrariis sint mediæ proportionales inter binas rectas, quæ in Ellipsi ambæ sunt positivæ, & habent semidiametrum conjugatam pro media proportionali, quarum tamen altera directionem servat in Hyperbola, altera mutat, ubi ea proprietas semidiametri Ellipseos ad Hyperbolam transfertur hujus contrariæ directionis beneficio, quæ nimirum profuit ex illa quadrati negativi analogia. Diximus num. 415 in fig. 156 semidiametrum secundariam CV in Hyperbola esse mediam proportionalem inter abscissam a cen-

FI 154  
155  
156

pro CR, & distantiam CQ concursus tangentis PQ cum eadem diametro, Monuimus autem ipsas CR, CQ, quæ in figura 153, & 154, ubi num. 419 agebatur de diametris Ellipseos, vel de diametris Hyperbolæ primariis, jacebant ad eandem centri partem, debere in fig. 153 jacere ad partes oppositas. Nimirum in diametris primariis in fig. 153, & 154 erat CR ad CV, ut CV ad CQ, & quadratum CV æquale rectangulo sub CR, & CQ. In fig. 156 quadratum CV negativè sumptum respondet quadrato CV fig. 153, & 154. Hinc rectangulum sub CR, & CQ debuit esse negativum in fig. 156 respectu fig. 153, & 154, adeoque cum in illis eandem utraque directionem haberit, in hac debent habere contrarias; nec erit, si positio etiam spectetur, CR ad CV, ut CV ad CQ, sed CR ad CV, ut CV ad CQ. Id autem ipsum eruitur ex sine demonstrationis positæ num. 416. Invenitur enim CR ad CQ, ut quadratum CR ad quadratum CV. Primus terminus, & secundus habent directionem contrariam, adeoque & tertius, ac quartus debent habere contrariam ita, ut quadratum CV respectu positivè quadrati CR pro negativo habendum sit, sive pro producto ex CR, & CV, quæ sint verè mediæ inter CR, CQ, si directio spectatur. Sed cum ipsa directio ibi consideranda nobis non esset, & solè magnitudines spectarentur, quæ in Geometria communium habent; diximus semidiametrum ipsam CV mediam inter CR, CQ ibi, ut in diametris primariis.

828. Haud multum ab simile ab eò casu est illud, quod diximus num. 808. in fig. 342 si sumatur BG<sup>F242</sup> pro media inter AB, BD consideratas ut positivæ, mutata AB in negativam AB<sub>2</sub>, fore non B<sub>2</sub>L terminatam ad Hyperbolam mediam inter AB<sub>2</sub>, B<sub>2</sub>D, sed binas illas B<sub>2</sub>L habentes directiones oppositas, alteram positivam, alteram negativam, fore medias. Simile quid habetur etiam, si ma or quædam relatio queratur inter inventionem Locorum Geometricorum; ad quæ terminatur vertex trianguli habentis basim datam,

cujus angulorum ad basim summa, vel differentia  $\mu$  quatur angulo dato, quorum Locorum nu. 266 inveni-  
 tus primum esse circulum, secundum esse Hyperbolam  
 F272 æquilateram. Sit in fig. 272. recta data  $V\mu$ , fiat angulus  
 $\mu VI$  æqualis summae, vel differentia: tum methodo ibi-  
 dem exposita fiat circulus  $P'VP\mu$ , cujus  $V\mu$  chorda,  $IVi$   
 tangens, & Hyperbola æquilatera  $SVT \infty t\mu$ , cujus  
 diameter  $V\mu$ , tangens pariter  $IVi$ : ac arcus circuli  $VP\mu$ ,  
 & Hyperbolæ  $VT \infty t\mu$  egressi ab  $V$  ad partes  $I$ , ac  
 desinentes in  $\mu$ , exhibebunt ille summam, hic differen-  
 tiam æqualem angulo  $\mu VI$ , reliquis idem exhibentibus  
 respectu  $\mu Vi$ .

§29. Demonstratio pro Hyperbola ibi expressa est hu-  
 jusmodi. Ducta ordinata  $PRP$  parallela  $IVi$ , & rectis  
 $VP$ ,  $\mu P$ , erit (num. 260) quadratum  $RP$  æquale re-  
 ctangulo  $VR\mu$ , adeoque  $VR$  ad  $RP$ , ut  $RP$  ad  $R\mu$ ; &  
 proinde similia erunt triangula  $VRP$ ,  $PR\mu$  ob angulum  
 ad  $R$  communem, & angulus  $R\mu P$ , sive  $V\mu P$  æqualis  
 $VPR$ , sive alterno  $PVI$ ; adeoque differentia ipsorum  
 $PV\mu$ ,  $P\mu V$  eadem, ac  $PV\mu$ ,  $PVI$ , sive datus angulus  $\mu VI$ ;  
 quæ demonstratio eadem esset in crure  $ut \infty$ ; cum tan-  
 gens per  $\mu$  debeat esse parallela tangenti  $IVi$ , & conti-  
 nere cum  $\mu V$  angulum æqualem ipsi  $\mu VI$  ad partes op-  
 positas, nimirum alternum. Porro in circulo ductis pa-  
 riter  $VP'$ ,  $\mu P'$ , angulus  $P'VI$  chordæ cum tangente æ-  
 quatur angulo  $\mu P'$  in alterno segmento; adeoque bi-  
 ni  $P'\mu V$ ,  $PV\mu$  æquantur soli  $\mu VI$ , ut oportebat. At si  
 illa demonstratio Hyperbolæ ad circulum sit transferen-  
 da, ubi  $VR'$  acquisivit directionem contrariam  $VR$ , &  
 in negativam abiit, non erit jam  $RP'$  media inter  $VR'$ ,  
 $R'\mu$ , sed binæ  $RP'$ ,  $R\mu'$ , quarum altera directionem  
 habet alteri oppositam, erunt mediæ. Et quidem sunt  
 ex natura circuli, in quo rectangula  $VR'\mu'$   $P'R'\mu'$  æqua-  
 lia sunt, adeoque  $VR'$  ad  $R'P'$ , ut  $R'\mu'$  ad  $R'\mu$ , & ob  
 angulos ad verticem  $R'$  oppositos æquales, angulus  $R'PV'$   
 sive  $P'VI$  æqualis angulo  $R'\mu P'$ , sive ob arcus  $VP'$ ,  $V\mu'$   
 interceptos a chorda tangenti parallela æquales, æqua-  
 lis angulo  $V\mu P'$ , ut oportebat.



830. Porro hinc aliquando fieri potest, ut ad quorundam problematum resolutionem, quæ videntur unicuique continere problema, respondeant Loca Geometrica diversæ prorsus naturæ, quæ diversis eorum partibus satisfaciant, singula singulis. Satis quidem est manifestum id debere contingere, ubi positivorum, & negativorum ratio non habeatur. Ubi in problemate proposito num. 676 quæritur in fig. 239 summa segmentorum MN, NO, quæ recta data EF intercipit inter se, & binas parallelas AB, DG datas e recta ducta per punctum P datum, si ea recta debeat occurrere rectæ EF in  $N_1$  inter parallelas ipsas, solutio est admodum expedita, quam ibidem dedimus, ope solius rectæ KI, & PN ipsi parallelæ. Eadem cõmmunis erit etiam, ubi punctum N cadat extra in  $N_2$ , vel  $N_3$ , dummodo mutata directione recta intercepta habeatur pro negativa. Nam si nulla negativorum ratio habeatur, & quæraturs recta ejusmodi, in qua  $M_2N_2$ , &  $O_2N_2$  simul sumptæ æquentur rectæ datæ, problema erit altissimum, & curvas sublimiores requiret. Si enim ex puncto  $P_2$  ducta quavis  $P_2O_2N_2$ , sumatur  $N_2R$  semper æqualis, & contraria  $O_2N_2$ , haud difficulter demonstratur, punctum R fore ad Hyperbolam transfentem per  $P_2$ , & habentem pro asymptotis binas rectas parallelas ipsis EF, DG, quarum prima citra EF, secunda ultra P jaceat tantundem, quantum P jacet ultra EF, vel DG. Quod si ducta per  $P_2$  quavis recta  $P_2M_2$ , in ea sumatur semper  $M_2R$  recta æqualis datæ summe; punctum R erit semper ad Concoïdem axe AB, polo  $P_2$  descriptam, cum ea ipsa sit ejus curvæ notio, de qua nobis alibi agendum erit. Quare ubi ex binæ curvæ se secuerint in R, habebitur ex prima  $N_2R$  æqualis  $N_2O_2$ , adeoque  $M_2R$  summa ipsarum  $M_2N_2$ ,  $N_2O_2$  quæ ex secunda erit æqualis datæ.

831. At ibi statim dignoscitur mutatio problematis ex summa considerata etiam post mutatum alterum terminum in negativum. Verum prima fronte facilius quispiam habebit pro simplici problema, quo in fig. 242, da-  
 F. 242  
 tis

tis in recta indefinita AD binis punctis A, D, quaeritur in eadem punctum B ita, ut rectangulum sub binis ejus distantis AB, DB a punctis A, & D aequetur dato rectangulo. Ad ejus generalem solutionem requiritur figura composita ex circulo, cujus diameter AD, & Hyperbola æquilatera, cujus AD axis transversus. Si ex quovis puncto R datæ rectæ erigatur perpendicularis RS media inter latera dati rectanguli, & ducatur ex S recta ipsi datæ rectæ parallela, quæ necessario occurret binis ramis Hyperbolæ in binis punctis L, L<sub>2</sub>, & circumum vel secabit in binis G, G<sub>1</sub>, vel tanget in unico, vel evitabit, extra ipsum delata, prout KS fuerit minor, æqualis, vel major circuli radio, sive dimidiæ AD, & occursum illi cum figura coalescente ex iis binis locis solvent problema. Demissis enim perpendicularis LB, GB, quæ erunt æqualia ipsi SR, erit (num. 685) rectangulum quodvis ABC, æquale quadrato fuz BG, sive BL, adeoque quadrato SR, & rectangulo dato. Idem autem problema proponi posset etiam hoc pacto. Invenite duas reciprocas binis datis, quarum detur summa, vel differentia. Nam data AD est summa AB<sub>1</sub>, BD, & differentia AB<sub>2</sub>, B<sub>2</sub>D, vel AB<sub>3</sub>, B<sub>3</sub>D, & alterum dati rectanguli latus est ad alteram ex ipsis, ut earum altera ad ejusdem rectanguli latus alteram. Videtur problema unicum esse utrumque, cum summas in differentias mutet, mutata directione AB in AB<sub>2</sub>. Sed idcirco maxime dividitur in bina inter se diversa, cum AB<sub>2</sub>, & B<sub>2</sub>D, non possit esse mediæ inter illas ipsas, inter quas mediæ sunt AB, AD: nam in proportionem unius tantum terminus directionem mutare non potest (num. 777). Quadratum quoque eidem RS æquale, & semper positivum, æquale esse non potest utrique rectangulo ABD, AB<sub>2</sub>D, nisi suppositio positivorum, adeoque unitas problematis mutetur; cum alterum ex iis rectangulis respectu alterius, manente unica suppositione, negativum esse debeat.

LOCORUM GEOMETRICORUM. 317

vunt binos casus problematis, qui simul ad unicum problema pertinere viderentur, & tamen ad duos pertinent inter se diversos. Et quidem id problema erit quoddam complementum eorum, quæ in Conicarum Sectionum elementis demonstravimus de figurarum similitudine a n. 18. Sit in fig. 273 figura *fab* directe, vel *fab'* inverse similis figuræ FAB, & quærat, an habeant aliquod punctum P, vel P', in quo bina homologa puncta coeant, sive quod sit punctum homologum commune. Ad id inveniendum producta *af*, donec occurrat in V rectæ AF productæ indefinite in I, sumatur *fn* in eadem directione respectu *fa*, in qua est FV respectu FA, quæ ad ipsam FV sit in ratione, in qua sunt latera homologa *af*, AF, & patet puncta V<sub>n</sub> fore homologa. Jam ut punctum P, vel P' commune sit, oportebit, rectæ VP, PV, vel *nP'*, PV sint in illa eadem ratione, ac anguli IVP, V<sub>n</sub>P ad easdem plagas in similitudine directæ, IVP, V<sub>n</sub>P' in inversa ad oppositas, æquales sint inter se. Quare summa angulorum BV<sub>n</sub>, P<sub>n</sub>V, vel differentia P'V<sub>n</sub>, P'<sub>n</sub>V debeat esse æqualis angulo IV<sub>n</sub> dato, qui est summa angulorum PV<sub>n</sub>, PVI, & differentia P'V<sub>n</sub>; P'VI. Si igitur construantur bini Loci Geometrici, alter, ad quem ex punctis V<sub>n</sub> ductæ rectæ *nP*, VP, vel *nP'*, VP' sint in illa ratione data *fa* ad FA, alter, in quo summa angulorum PV<sub>n</sub>, P<sub>n</sub>V, vel differentia P'V<sub>n</sub>, P'<sub>n</sub>V æquetur dato angulo IV<sub>n</sub>, occursum ejusmodi locorum solvet problema. Porro patet ex num. 28 primum locum haberi, si in recta *nV* producta datis binis punctis V, *n*, alternis proportionis armonicæ, & ratione *fa* ad FA ipsius proportionis, inveniantur reliqua duo B, D per num. 25, & diametro BD describatur circulus BPD<sub>n</sub> secundum autem, patet ex num. 266, fore pro P arcum circuli VP<sub>n</sub> habentis VI pro tangente, V<sub>n</sub> pro chorda, & pro P' crura VT ∞ *tn* Hyperbolæ æquilateræ habentis V<sub>n</sub> pro diametro, & ipsam VI, pro tangente. Quare patet, quo pacto problema construendum sit.

833. Porro videbatur, pro directa, & inversa similitudine eadem Loca Geometrica requiri debere, & diversa obtigerunt. Requiebatut enim in altero summa, in altero differentia angulorum ad basin æqualis datæ, quæ problemata cum in fig. 272 mutant illam eandem RP mediam inter VR, RV in binas RP', R'p' medias inter VR', R'u, mutata positione VR in contrariam VR', Locû Geometrici requisiti mutarunt naturam.

834. Ex tam expedita problematis constructione facile deduci potest, semper commune punctum inveniri debere in binis figuris, utcumque similibus, idque unicum, si inæquales sint, ac in casu equalitatis puncto D abeunte in infinitum, circulum PBP' abire in rectam, & P inveniri expeditius, P' abire in infinitum: in casu autem inversæ similitudinis secto bifariam angulo VP'u per rectam indefinitam, eandem, quæ nimirum cum tectis P'V, P'u homologis æquales continebit angulos ad partes oppositas, fore communem positione homologam, in directa vero similitudine, si non congruant directione ipsæ VP, uP positione homologæ, nullas alias per commune punctum ductas communes esse posse; si vero illæ congruant, omnes per ipsum ductas fore positione communes, ut sunt omnes per F ductæ in fig. 33, & 34, cum nimirum novæ homologæ cum præcedentibus eisdem in eandem plagam

F. 33  
34 angulos continere debeant, adeoque inter se eundem angulum, quem illæ inter se. Sed nos jam longius evagatos septimus Canon ad se se vocat.

835. Canon. 7. *Si in quatuor proportionis cuiuspiam terminis binis utriuslibet rationis maneat finiti, reliquorum autem alter, abeat in nihilum, vel ita in infinitum, ut alterum saltem ejus extremum nusquam jam sit; alter abibit pariter in nihilum, vel in infinitum eodem pacto. Quod si binis extremis manentibus alter ex extremis abeat in nihilum, vel in infinitum, alter contra abibit in infinitum, vel in nihilum, & idem in mediis continget, si bini extremi maneat: ac si, quod eodem*

*eodem redit, quoddam rectangulum finito rectangulo equalo maneat, ac alterum ejus latus abeat in nihilum, vel in infinitum, alterum contra abibat in infinitum, vel in nihilum.*

836. Canonis hujus partes omnes videntur admodum manifestæ. Adhuc tamen sic accuratius demonstrantur. Si bini termini rationis utriuslibet finiti sint & unus præterea rationis alterius evanescat, vel fiat infinitus, alter ipsius non potest finitus remanere; nam is, qui supponitur evasisse infinitus, vel abiisse in nihilum, adhuc esset finitus, & inveniretur ex reliquis tribus eodem pacto, quo in Geometria, datis tribus re-ctis, quarta proportionalis invenitur. Porro cum eorum ratio debeat esse finita, non potest alter ex iis binis terminis abire in nihilum, altero abeunte in infinitum, ratio enim infiniti ad nihilum non finita esset, sed infinities infinita. Quod si binis extremis manentibus finitis, alter ex mediis evanescat, vel in infinitum abeat, alter ex ipsis eadem ratione finitus remanere non potest, quod eodem argumento evincitur. Non possunt autem simul abire in nihilum, vel in infinitum, ne eorum productum, quod æquari debet finito producto extremorum, fiat nihilum, vel infinitum. Eadem autem est demonstratio, si maneant medii, & alter ex extremis abeat in nihilum, vel in infinitum.

837. Porro ubi alter ex terminis extremis, vel mediis proportionis ita in infinitum absolute recessit, ut nusquam jam sit, verum nihilum illi respondere debet, non quantitas quæpiam, quæ dicatur infinitesima ordinis cujuscumque. Id quidem multo evidentius constabit, ubi manifesto demonstraverimus, quantitates infinitissimas, quæ in se ipsis tales sint, nullas revera esse, sed a nostro cogitandi modo pendere tantummodo, ut nimirum indefinitè, non absolute infinitè parvæ sint. At hic etiam, si nomine infiniti absolute intelligatur id, cujus saltem alter limes, ut in recta alterum punctum, ita in infinitum recessit, ut nusquam sit; verum et nihilum respondere mille exemplis e Geometria petitis facile evinci

830 DE TRANSFORMATIONE

evinci potest. In fig. 254 ubi est VR ad VA, ut AB ad RP;  
 F254 Utrumque parva sit VR respondet semper alicui RP  
 264 habenti aliquem terminum P; nec P ita recedit in in-  
 275 finitum; ut nusquam jam sit, nisi ubi R recidat in V;  
 facta RP absolute infinita; & VR penitus evanescente:  
 nam accurata demonstratione ostensum est (num.  
 249); asymptotum solum in Hyperbola e rectis omni-  
 bus ipsi parallelis nusquam perimetro occurrere: Sicut  
 iam in fig. 264 vidimus (num. 718) e quatuor CZ,  
 CH, ZL, HP proportionalibus solum cœuntibus om-  
 nino punctis C, Z, adeoque evanescente prorsus CZ,  
 abire in infinitum HP ita, ut P nusquam jam sit: Ita-  
 dem in fig. 265 cum sit CM ad CO, ut CO ad CP;  
 vidimus num. 720; CP non excrecere in infinitum  
 ita, ut nusquam jam sit, nisi CM penitus evanescente,  
 abeat I in Q.

838. Hujus theorematibus frequentissimus est usus per  
 universam Geometriam, & in ipsis Conicarum Sectionum  
 transformationibus easdem rite contemplanti sæpissimè  
 occurrit: Prima ejus pars in quovis etiã angulo re-  
 ctilineo est manifesta. In fig. 12, cum sit ER ad RQ,  
 F.12 ut EF ad FV; non potest evanescere RQ, vel abire  
 9 in infinitum, nisi pariter etiã ER evanescat, vel abeat  
 28 in infinitum: Secundæ partis exemplum esse potest re-  
 cessus directricis in infinitum ita; ut nusquam jam sit;  
 ubi Ellipsis in circulum abit juxta numer. 109: Nam  
 est in fig. 9 (num. 90) CF ad CM, ut CM ad CE:  
 Ubi autem Ellipsis abit in circulum, debet focus F a-  
 bire in centrum; ut in fig. 28, evanescente prorsus  
 CF: Quare debet CE evadere prorsus infinita ita; ut  
 nusquam jam sit: In ipsa autem fig. 9 cum rectangu-  
 lum sub CF, & CE æquerit quadrato CM, abeunt  
 CF in nihilum; abit simul CE in infinitum; quæ erat  
 pars tertiã: Pariter in Hyperbola ad asymptotos relas  
 rectangulum sub quavis abscissa; & ordinata æquans  
 (num. 227) rectangulo sub aliis quibusvis: Hinc or-  
 dinata rum solum abire in infinitum ita, ut ejus vertex  
 nusquam jam sit; cum recidit in ipsam asymptotum

sum ea congruens ; atque cum abscissa penitus evanescit .

839. Canon. 8. Si binæ rectæ , quæ ad quoddam punctum convergebant , parallele fiant ; illud punctum ita in infinitum recedit , ut nusquam jam sit , angulus vero , quem ad partes in ipso finito remanentes continebant , evanescit ; ac is , quem altera continebat cum altera producta , censeri debet , ut in duas rectas desinat : Si vero è contrario concursus ita in infinitum recedat , ut nusquam jam sit , vel angulus ex altera parte evanescat , ex altera abeat in duas rectas ; illa ipsa recta evadunt parallelæ .

840. Hic etiam canon est admodum manifestus , & eo jam sæpe uti sumus . Hoc autem pacto facile demonstrari potest ex præcedenti . In fig. 140 ex puncto  $E_3$  ducatur recta  $E_3I$  parallela  $AB$  , quæ rectæ  $AE_2$  occurrat in  $I$  : Erunt similia triangula  $E_3AI$  ;  $BC_2A$  ob parallelas ; eritque  $E_3I$  ad  $E_3A$  ut  $AB$  ad  $BC_2$  : Abeat jam recta  $AE_2$  in  $AE_3$  parallelam  $BH$  : evanescet  $E_3I$  , adeoque  $BC_2$  fiet infinita , nec concursus  $C_2$  usquam jam erit : Angulus autem  $AC_2B$  semper æqualis  $E_3AC_2$  alterno evanescet , cum ille evanescat , ac proinde si ponatur  $H$  in  $BD$  producta ultra  $C_2$  , angulus  $AC_2H$  accedet ultra quoscumque limites , ad duos rectos ; & censeri debet in eas desinens , dum  $AC_2B$  decrescit ultra quoscumque limites , & evanescit . E contrario si concursus  $C_2$  ita recessit in infinitum , ut nusquam sit , & angulus alter est nullus , adeoque alter desinit in duos rectos ; binæ rectæ debent esse parallelæ : Si enim non essent , alicubi concurrerent ; & angulos constituerent binos , ac simul duobus rectis æquales .

841. Cæterum hinc etiam patet , binis rectis evidentibus parallelis , concursum abire in infinitum ita , ut nusquam jam sit : Quod ipsæ utcumque in infinitum productæ nusquam concurrant , Angulum autem parallelarum nullum esse ex parte finita , patet juxta titum. 681 ibidem ex eo , quod anguli  $AC_2B$  mensura est semidifferentia ætuum  $AB$  ,  $E_2D$  , quæ abeunte  $E_2$

332 DE TRANSFORMATIONE  
 in  $E_3$ , evanescit penitus, adeoque & angulus parallelarum evadit omnino nullus.

842. Hujus canonis in transformationibus locorum geometricorum usus est frequentissimus. Secunda ejus parte usi sumus num. 797 ad ostendendam analogiam, & continuitatem theorematis, quo determinatur angulus, quem binæ tangentes ductæ per extrema puncta chordæ transeuntis per centrum, & coeuntis in directrice ibidem continent. Invenimus enim ipsum in Hyperbola, si rite accipiantur, ex parte altera evanescere, ex altera definire in duos rectos, ubi chorda est ipsæ axis transversus, & tangentes fiunt parallelæ. Multo tamen frequentius occurrit pars prima, quæ pertinet ad recessum puncti in infinitum, quo sepiissime usi sumus. Ejus ope invenimus num. 41 alterum axis verticem in Parabola ita in infinitum recedere, ut nusquam jam sit, ex eo nimirum quod  $ET. 21$ , quæ in fig. 9 in Ellipse concurrebant in puncto  $t$  determinante punctum  $m$ , evaserint in fig. 10 parallelæ inter se, puncto  $t$  nusquam jam existente. Ejus ope inventum est num. 154, rectas parallelas axi Parabolæ, & num. 156 rectas parallelas alterutri asymptoto Hyperbolæ semel occurrere perimetro, altera intersectione ita in infinitum recedente, ut nusquam jam sit.

843. Porro ejus itidem ope admodum expedite transferuntur ad Parabolam multæ e proprietatibus Ellipseos. In Ellipse omnes diametri convergunt ad centrum ( num. 206 ), centrum in Parabola recedit in infinitum, cum recedat vertex  $m$ ; quare diametri omnes in Parabola debent evadere parallelæ axi: & sunt juxta num. 206. Radii, qui ex altero foco Ellipseos incurunt in ejus perimetro, convergunt post reflexionem ad focum alterum ( num. 202 ): focus alter in Parabola recedit in infinitum cum centro, & vertice altero: hinc si is focus concipiatur esse primo ille, ad quem radii convergebant, tum ille a quo prodibant, habebimus ibidem illa bina theoremata: radii, qui in Parabola exeunt e foco, abeunt post reflexionem parallelæ



LOCORUM GEOMETRICORUM. §33.

ralleli axi : radii , qui adveniunt paralleli axi , con-  
 vergunt post reflexionem ad focum . In Ellipfi in fig.  
 173 existente VO dimidio lateri recto principali re-  
 cta OC ad centrum ducta determinat ( num. 464 )  
 RD æqualem subnormali axis RM : in Parabola abit  
 centrum C in infinitum : evadit ergo OD parallela VR,  
 ut exhibet fig. 176 ; & proinde fit RD æqualis ipsi VO.  
 & subnormalis æqualis dimidio lateri recto principali :  
 ita autem se res habet ibidem . In fig. 186 existente VA  
 æquali lateri recto , recta AV ducta ad alterum verti-  
 cem u determinat RL , cujus rectangulum cum VR æ-  
 quatur quadrato semiordinatæ RP : abit in Parabola  
 punctum u in infinitum : igitur AL evadit parallela VR,  
 ut exhibet fig. 187 , & proinde RL æquatur lateri re-  
 cto VA , & quadratum semiordinatæ RP æquatur re-  
 ctangulo sub abscissa VR , & lateri recto ; ita autem  
 se rem habere constat ex n. 495.

844. Hic recessus in infinitum mutat constructio-  
 nes omnes , ubi punctum , ad quod aliqua ducenda erat,  
 abit in infinitum . At constructio nova semper inde  
 deduci potest , in quam in eo casu migrat illa prior .  
 Duo autem sunt casus , Vel enim rectæ inde ducen-  
 dæ dabatur aliquod aliud punctum , quod remanet , vel  
 dabatur sola directio , ut nimirum debuerit duci ex il-  
 lo concursu recta cupiam datæ parallela . In primo ca-  
 su res erit expeditissima . Satiserit ex illo puncto , quod  
 remanet , ducere rectam parallelam illi , in qua erat  
 punctum , quod abiit in infinitum . In secundo aliquo  
 artificio erit opus , quo ante constructionis transforma-  
 tionem determinetur aliquod ejus rectæ punctum , quod  
 remaneat , vel distantia ab ea recta , cui parallela sit ;  
 & res iterum eodem redibit .

845. Ea exemplum pro primo casu : data in fig. 71  
 quavis chorda Pp in Ellipfi , ad inveniendam diametrum,  
 cujus ea sit ordinata , satis est ( n. 209 ) ducere in fig. 71  
 ex foco F rectam FA ipsi perpendicularem , quæ alicubi  
 occurrat directrici in I . Inde si per centrum C ducatur  
 recta , ea problemati faciet satis , & ipsam illam

chordam bifariam secabit in R. In Parabola in fig. 79 centrum C abiit in infinitum ita; ut nusquam iam sit, sed remanet I. Quare satis erit ex I ducere rectam, axi parallelam, quod ibidem est præstitum.

846. Secundi casus extremi desumemus ex problemate tertio generali, quod num. 140 proposuimus, ejus solutio ad omnes diversos casus applicata totum hunc notorum elementorum ordinem nobis exhibuit, juxta ea, quæ diximus num. 766; & 767. Generalis nimirum ipsa solutio fallebat in binis casibus; rectarum videlicet parallelarum directrici, & transeuntium per focus, quod nos coegit binâ ipsi problemata particularia substituere, quæ in primâ, & secundâ propositione præmisimus.

847. Propositionis tertiz problema illud generale erat hujusmodi: *Datis foco, directrice, & ratione determinante, invenire concursum rectæ datæ cum Sectione Conicæ.* Constructio problematis erat hujusmodi. Sit **F. 41** in fig. 41, AB directrix; focus F; recta data HK, quæ directrici occurrat in H; Assumpto quovis puncto L, & ducta LG perpendiculari ad directricem, capiatur LS ad LG in ratione determinante datâ. Centro L, intervallo LS fiat circulus. Ducatur recta LO, parallela datæ KH occurrans directrici in O; tum per O recta ZOZ parallela FH, quæ si alièubi occurrat circulo in T, t, ducantur LT, Lt; & illis parallela ex F rectæ, quarum occursus P, p cum rectâ datâ HK erunt quæsitâ puncta.

848. Jam vero si recta data sit parallela directrici in punctum H abiit in infinitum. Hinc recta quidem FH, ejus punctum F adhuc remanet, adhuc habetur ducendo ex F rectam parallelam directrici. Sed evadit simul etiam LO parallela directrici, adeoque punctum O abiit in infinitum. Debet igitur etiam OZ evadere parallela directrici. At ejus nullum jam aliud punctum habemus, unde ea duci possit. Binas habebat determinationes, alteram quod ducenda esset ex puncto O, alteram, quod deberet esse parallela HF. Utrâque de-

terminat

terminatio abiit in unicum parallelismum cum directrici  
ce. Eam igitur jam ducere non possumus, nec eius  
ope definire illa puncta  $T$ ,  $t$ ; & radios  $LT$ ;  $Lt$ ; qui-  
bus ducantur parallelæ  $FP$ ,  $Fp$ . En primum in primo  
casu incommodum:

849. Quod si recta  $HK$  transeat per focum  $F$ , eva-  
nescet angulus  $FHK$ ; adeoque &  $LOZ$ . Transibit igitur  
 $OZ$  per  $L$ , &  $LT$ ,  $Lt$  abibunt in ipsam  $OZ$ , ac  $FP$ ,  
 $Fp$  iis parallelæ in ipsam  $HK$ ; quam non secabunt,  
adeoque occurfus illos cum Sectionis Conicæ perime-  
tro; quos per suas intersectiones debebant determina-  
te, indefinitos relinquent. En incommodum secundi  
casus.

850. Ut primo incommodo medeamur, sit fig. 274  $F_274$   
eadem; ac 41. Quærat  $LI$  perpendicularis  $OZ$ ; sive  $275$   
hujus distantia ab  $L$ . Ducatur ipsa; &  $FR$  perpendicu-  
laris  $HF$ , occurrans  $HK$  in  $R$ ; tum  $RE$  perpendicu-  
laris directrici. Facile constabit, fore similia triangula  
 $FRH$ ,  $ILO$ , &  $REH$ ,  $LGO$  ob latera omnia paral-  
lela, singula singulis: Quare erit  $FR$  ad  $RH$ ; ut  $IL$   
ad  $LO$ , &  $RH$  ad  $RE$ ; ut  $LO$  ad  $LG$ ; adeoque ex  
æqualitate ordinata  $FR$  ad  $RE$ , ut  $IL$  ad  $LG$ . Porro  
ubi  $H$  abiit in infinitum; & fiunt  $FH$ ;  $KH$  paralle-  
læ; evadit ipsa  $FR$  perpendicularis etiã recte data  
 $KR$ ; quæ proinde datur etiã tum; dato  $F$ : datur  
idem  $RE$ ; &  $LG$ . Ergo datur etiã  $LI$  distantia re-  
cte  $OZ$  a centro  $L$ ; qua data, duci poterit recta ipsa  
 $Zz$ ; & problematis solutio huc redibit: In fig. 275 sit  
recta data  $KR$  parallela directrici. Ducatur  $FR$  ipsi per-  
pendicularis, quæ producatur usque ad directricem in  $E$ .  
Facto circulo, ut prius, capiatur  $LI$  ad  $LG$ ; ut est  $FR$   
ad  $RE$ ; versus partem utramlibet in ipsa  $GL$ ; ac per  $I$   
directa  $Zz$  parallela directrici; ad ejus concursus  $T$ ; &  
tum circulo; si qui sunt; ducantur radii  $LT$ ,  $Lt$ , tum  
ex  $F$  rectæ  $FP$ ;  $Fp$  ipsis parallelæ; quæ solvent pro-  
blemã. Erit enim  $FP$  ad  $FR$ ; ut  $LT$  ad  $LI$ ; &  $FR$  ad  
 $RE$ , sive  $PD$ , ut  $IL$  ad  $LG$ ; adeoque  $FP$  ad  $PD$ , ut  
 $LT$ ; vel  $LS$  ad  $LG$  in ratione determinante, Patet au-  
tem

sem LP æqualem LI exhibituram rectas LT ; LT' æ Lt, L' in directum, adeoque solutionem eandem.

851. At hic jam constat, circulum, qui constructionem nobis suggessit, necessarium non esse. Satis erit centro F intervallo rectæ, quæ ad PD, vel RE fit in ratione determinante, invenire puncta. Id Pp ipsum est præstitum in fig. 9. Centro F intervallo rectæ, quæ ad RE esset in ratione determinante, quæsitæ sunt puncta Pp: ut autem ea intervalla semper præsto essent, capta est FV, & Fm ad FB in ea ratione, & ductæ per E, & V, ac u rectæ il, sG, quæ exhibent RQ, & RO ad RF in ratione eadem, adeoque quæsitis interval-  
 I, 9

lis opportunas.  
 852. Et hoc idem pacto remedium adhibitum constructioni problematis generalis nos perduxit ad hujus primi problematis constructionem adeo simplicem, & elegantem, & vero etiam secundam, quæ Sectionum Copnicarum naturam & varias formas, ac proprietates tantum multas statim exhibuit. Poterant & alia parari remedia. Sed libuit illam inire viam, quæ se prima obtulit, & quæ docet, quid agendum sit, ubi determinatio rectæ nos deserit ob punctum ejus aliquod in infinitum recedens, & binas determinationes, ut hic, in unicam coalescentes. Jam ad Canonem 9, quo secundi problematis patebit constructio.

853. Canon. 9. Si bina rectæ ex eodem puncto disgressæ superponentur, earum angulo evanescent; bina alia, quæ iis parallela erant singula singulis, evadent inter se parallela, vel pariter superponentur. Quod si in binis triangulis similibus vertex utriusque abeat in basim, lateribus basi superpositis; bina distantia puncti in quod abit vertex, quod punctum succedit intersectioni laterum, a binis extremis ipsius basis tam ad se invicem, quam ad ipsam basim, erunt utrobique in eadem ratione.

854. Hujus etiam Canonis ratio est manifesta. Nam evanescente angulo binarum rectarum, evanescit angulus earum, quæ ipsis sunt parallelæ. Quare et evadunt

LOCORUM GEOMETRICORUM. 337

Evadunt parallele juxta Canonem 8 vel si forte distantia earum sit nulla, superponuntur. In triangulis vero illis cum latera sint semper ad se invicem, & ad basim in eadem ratione, utcumque parum vertices distent a basibus ipsis; oportet omnino etiam, ubi jam in ipsas incidunt, ratio sit utrobique eadem, ne scilicet altera in ipso verticum appulsu mutetur per saltum.

Fig. 41

855. Ubi constructio illa generalis fig. 41, appli-  
catur in fig. 48 in Parabola rectis parallelis axi, cum  
ibi (num. 154) congruant puncta  $GO^2S$ , recta  $Lr$  su-  
perponitur recte  $LO$ , evanescente illius angulo  $OLr$ .  
Erant autem in fig. 41 recte  $HK$ ,  $Fp$  parallele ipsi  
 $LO$ ,  $Lr$ . Quare he jam parallele evadunt inter se, ni-  
si forte  $HK$  transeat & ipsa per  $F$ , ut  $H_2K_2$ . Inde au-  
tem consequitur illud punctum  $p$ , quod pertineret ad  
 $H_1K_1$ ,  $H_3K_3$ , abire in infinitum ita, ut nusquam jam  
sit juxta n. 154, parallelis nusquam concurrentibus; ac  
ex eodem prorsus fonte profuit recessus in infinitum  
alterius intersectionis in rectis alteri asymptoto paralle-  
lis in Hyperbola juxta n. 156.

48

856. Quod si in ipsa fig. 41 transeat  $HK$  per  $F$ , rea-  
cte  $OL$ ,  $OZ$ ,  $tL$ ,  $LT$  superponuntur; ac pariter superpo-  
nuntur  $HF$ ,  $HK$ ,  $Fp$ ,  $PF$ , & constructionem generalem  
frustrantur, ut diximus n. 849. At ex hoc Canone tum  
etiam in ipsa  $HK$  jam transeunte per punctum  $F$ , quod  
abit in bases triangulorum  $FPH$ ,  $FpH$ , erunt sumenda  
puncta  $P$ ,  $p$  ita, ut sit  $FP$  ad  $PH$ , &  $Fp$  ad  $pH$ , ut  
 $LT$ , vel  $Lr$  nimirum  $LS$  ad  $LO$ .

857. Porro id ipsum prestitissimum in fig. 35, & 36, in  
quibus recta data est  $FQ$ , gerente  $Q$  vices illius  $H$ ,  
Quæsitæ sunt puncta  $P$ ,  $p$  ita, ut essent  $FP$  ad  $PQ$ , &  
 $Fp$  ad  $pQ$ , ut est in fig. 41  $LS$  ad  $LO$ . Commodum  
autem accidit; ut in fig. 35, & 36 illa ipsa  $FV$  jam in-  
venta in primo problemate esset ad  $FQ$ , ut in fig. 41  $LS$   
ad  $LO$ ; est enim ibi  $FV$  ad  $FE$ , ut hic  $LS$  ad  $LG$ , & ibi  
 $FE$  ad  $FQ$ , ut hic  $LG$  ad  $LO$ . Quare satis fuit inve-  
niri puncta  $P$ ,  $p$  ita, ut esset  $LP$  ad  $PQ$ , &  $Lp$  ad  $pQ$ ,  
in ratione  $FV$  ad  $FQ$ . Id autem statim patuit admo-  
dum

Fig. 35

36

41

rum facile præstari, si sumptis hic in directrice  $QG$ ,  $Qg$  æqualibus  $QF$ , ducerentur rectæ per  $G$ , &  $V$ , & per  $g$  &  $V$ , quæ juxta num. 130 solverunt problema. Atque hoc pacto ope hujus Canonis ex illa generali constructione problematis constructio profluxit.

858. Canon. 10. *Si circuli radius in infinitum abeat ita, ut altero extremo manente, centrum nusquam jam sit peripheria circuli abibit in rectam lineam, & recta linea viceversa habenda erit pro peripheria circuli infiniti.*

859. Hic Canon abunde demonstratus, est a num. F271 722. Eruitur autem etiam ex Canone 8, (num. 839). Si enim in fig. 271 centrum  $P$  ita in infinitum recedat, ut nusquam jam sit, maneant autem quævis ita peripheriæ puncta  $A$ ,  $I$ ,  $C$ , tres radii  $AP$ ,  $IP$ ,  $CP$  evadent paralleli, & anguli  $API$ ,  $APC$  profus evanescent. Bini igitur reliqui anguli tam ad basim  $AI$ , quam ad  $AC$ , evadent binis rectis æquales; adeoque cum ob isoscelisimum triangulorum  $API$ ,  $APC$ , sint æquales singuli singulis, sicut singuli singulis rectis æquales. Quare anguli  $API$ ,  $APC$  æquales sicut inter se, & recta  $AI$  superponetur rectæ  $AC$ , abeunte puncto  $I$  in  $AC$ , & jacentibus punctis  $A$ ,  $I$ ,  $C$  in directura. Cumque id in omnibus reliquis peripheriæ punctis locum habere debeat; patet omnem peripheriam, quæ manet in spatiis finitis, in unicam abire rectam perpendicularem cuilibet e rectis, per quas centrum crescit in infinitum.

F. 23 24 860. Hujus Canonis usus non semel occurrit in nostris Conicarum Sectionum Elementis. In figura 23 ostensum est (num. 100) in Ellipsi distantiam  $PF$  cujusvis puncti  $P$  ejus perimetri a foco  $F$  æquari distantiam perpendiculari  $PD$  a peripheria circuli descripti centro facto in altero foco  $f$ , & intervallo axis transversæ. Focus  $f$  in Parabola abit in infinitum. Quare is circulus abit in rectam perpendicularem rectæ  $FE$ , nempe in ipsam rectilineam Parabolæ directricem. Et quidem hanc hujus circuli tam in Ellipsi, quam in Hyperbe-

parbola analogiam cum directrice Parabolæ notavimus etiam num. 102. Circulus ille in Ellipsi cavus versus  $F$ , ad quam plagam ibi jacet ejus centrum  $f$ , abit in rectam, ubi  $f$  in Parabola in infinitum recedit, idem vero, regresso  $f$  in Hyperbola in fig. 24 ex parte opposita, convexitatem obvertit foco  $F$ .

361. Eodem pacto etiam cum demonstratum sit nu. 194 pro Ellipsi in fig. 63, & pro Hyperbola in fig. 64 rectam  $CA$  ductam e centro  $C$  ad concursum  $A$  normalis  $FA$  cum tangente æquari semiaxi transverso  $CM$ ; patet, in iis concursum ipsum  $A$  normalis cum tangente jacere in perimetro circuli descripti diametro  $Mm$  qui concursus  $A$  in Parabola in fig. 65 ( num. 194 ) incidit in rectam  $MA$  normalem axi  $AF$ . Res eodem recidit. Circulus ille in Ellipsi in fig. 63 obverteret convexitatem foco  $F$ , abeunte  $m$  in infinitum in Parabola, abiret in fig. 65 in rectam ipsi  $FV$  perpendicularem, & regresso  $m$  ex parte opposita ex infinito in fig. 64 in Hyperbola, jam ipsi  $F$  convexitatem obverteret.

362. Canon. 11. Si binæ rectæ altero saltem utriusque limite ita in infinitum abeunte, ut nusquam jam sit, infinite evadant, debent in ipso infinito censeri, ut affecta illam rationem, ad quam ultra quoscumque limites accesserunt, dum in infinitum excrescerent: & si binæ aliæ rectæ fuerint semper in earum ratione, ac illis excrescentibus in infinitum, remaneant finitæ; habebunt accuratè eam rationem ipsam, ad quam illæ ultra quoscumque limites accesserant. Ratio autem, ad quam accedent binæ quantitates, dum in infinitum excrescunt, & quam affecta censeri debent, ubi jam infinita sint, potest esse ratio æqualitatis, vel inæqualitatis finitæ, vel excrescens, aut decrescens ultra quoscumque limites; erit tamen semper ratio æqualitatis, ubi differentia ipsarum finitæ maneat, vel nulla, & differentia semper manebit finitæ, vel nulla; si binæ rectæ terminatæ ad idem punctum ab aliis binis punctis abierint in infinitum, manifestibus his binis punctis, & abeunte in infinitum illa communi ita, ut nusquam jam sit.

863. Prima theorematis pars demonstratur a cōstituitatis lege , quam cum alibi ubique tam sanctè Geometria servet, servare debet etiam ibi , ubi quantitates in infinitum excrescunt , quæ ibi etiam, ubi & oculos nostros, & mentem fugiunt, debent, si possibiles sunt, in eo statu habere id, ad quod accesserant ultra quoscumque limites , nec per saltum illo unico momento temporis aliã rationem habere diversam ab ea, a qua temporis præcedentis intervallo quam minimo, distabant quam minimè. Finitæ autem illæ , quæ in earum ratione erant , & remanent adhuc finitæ , adeoque omnino aliquã rationem habent , debent habere illam, ad quam accesserant ultra quoscumque limites .

864. Porro ejusmodi ratio potest esse æqualitatis , cum possint æquales perpetuo esse dum abeunt in infinitum . Immo etiam ad rationem æqualitatis accedet, licet earum differentia finita maneat , ut videbimus paulo infra . Possunt autem habere rationem finitam quoque. Sic si in fig. 243 manentibus punctis  $F$ ,  $H$  evadant  $HI$ ,  $FG$  parallele ipsi  $CE$ ; puncta  $I$ , &  $G$  ita in infinitum recedent , ut nusquam jam sint , & rectæ  $CI$ ,  $CG$ , ac  $HI$ ;  $FG$  habebunt semper in recessu eorum punctorum rationem finitam quamcumque, quam nimirum habebunt rectæ  $CH$ ,  $CF$  finitæ. Ac si interea ipsa quoque puncta  $F$ ,  $H$  movèantur utcumque, sed rectis  $HI$ ,  $FG$  delatis ad parallelismum, maneat alicubi; rectæ illæ  $CI$ ,  $CG$  censeri deberent asscutè rationem eandem, in qua reliquuntur  $CH$ ,  $CI$ ; & si quæ quantitates sint semper, ut ipsæ  $CI$ ,  $CG$ , & ipsis abeuntibus in infinitum, finitæ remaneant: debent habere tum rationem illam, quam habent  $CH$ ,  $CF$ . Potest autem ea ratio etiam in infinitum excrescere. Sic in fig. 260, decrescente  $VR$  ultra quoscumque limites, crescit ultra quoscumque limites tam  $RI$ , quam  $RE$ , & abeunt  $R$  in  $V$ , jam ita in infinitum abeunt, ut  $I$ , &  $E$  nusquam sint; & tamen  $RE$  ad  $RI$  erit semper, ut  $AH$  ad  $RI$ , ut  $AV$  ad  $RV$ , quæ ratio crescit ultra quoscumque limites; dum manente  $VA$ , minuitur  $VR$  ultra quoscum-



LOCORUM GEOMETRICORUM. 341

Cumque limites, ac demum evanescit. Est id quidem ingens quoddam infiniti mysterium; ut licet jam limes I ita in infinitum per omnes magnitudinum gradus excreverit, ut nusquam jam sit; adhuc tamen ultra ipsum habeatur spatium infinities magis protensum quodammodo, quo RE extendatur infinities magis, & quo se punctum E abdiderit. At in infinitum absolutum admittitur, id quidem ad servandam analogiam omnino admitti debet, & est simile illi mysterio, quod supra hum. 769. notavimus.

865. Rationem autem æqualitatis censeri debere, ubi binæ quantitates in infinitum abierint, differentia manente finita, est adhuc mysterium; cum æqualia esse non possint, quæ differentiam habeant; adhuc tamen ad analogiam retinendam est necessarium, & sic evincitur. Ejusmodi quantitates non possunt habere ullam rationem inæqualitatis utcumque parum disjunctam a ratione æqualitatis. Exprimant enim bini termini finiti, utcumque parum inæquales rationem illorum, & erit, dividendo, horum differentia ad minorem, ut illarum differentia illa finita, ad minorem ex his, quæ ponuntur infinitæ. Hæc igitur ex illis ita penderet, ut limitem alicubi deberet habere omnino. Vis demonstrationis patebit in exemplo sequenti. Ex natura tangentis IP in fig. 265 est in circulo etiam, ut in quavis Ellipsi juxta num. 411, NP ad PO, ut NM ad MO. Capiatur CM' æqualis CM, & ipsarum NM, MO differentia erit MM ipsarum vero NP, PO differentia erit NO. Jam vero ipsæ NP, PO non possunt ita in infinitum abire, ut nusquam jam sit earum limes P, nisi parallelæ evadant, & punctum I recidat in Q. Etiam in illo casu ipsarum NP, PO differentia finita est, nimirum æqualis finitæ illi NO. At ipsarum NM, MO differentia illa M'M penitus evanescit, & fit verum nihilum, coeuntibus penitus in C ipsis M'M. Illarum ratio evadit accurata æqualitatis ratio. Quare etiam binæ illæ NP, PM licet differant per NO, censeri debent ad æqualita-

patris rationem delataz, nec, quæ iis proportionales sunt, possunt in eo casu non habere rationis æqualitatem accuratam.

866. Plerumque quantitibus infinitis ajunt respondere quantitates infinitesimas, quæ inassignabiles sint, sint tamen aliquæ, & relationes ad se invicem habeant. Quod a nobis assignari possiat, vel non possint, id a nostro cognoscendi, & determinandi modo pender, & aliud mentis finitæ genus ad aliam magnitudinum relationem cognoscendam, assignandamque deveniet, aliud ad aliam, quæ minoris, vel majoris inæqualitatis rationem secum ferat, usque ad quosdam limites a vi mentis ipsius pendentes. Idcirco nos ad evitandas æquivocationes utimur, ubi opus est, vocibus, quæ ab ipsa assignatione non pendent. Ubi de infinitesimis agemus, statuemus illud, ac demonstrabimus, lineas, superficies, solida, quæ in se determinata sunt, quæ nimirum suos alicubi limites habeant, finita esse, & finitam inter se rationem habere. Hic autem ita eas voces adhibemus, ut infinitum dicamus id, cujus saltem aliquis limes nusquam jam sit. Non querimus an ipse a nobis assignari possit, an non. Utrumque remotum sit punctum P, dummodo alicubi sit; punctum I non erit in Q, nec M, M' in C, & ipsum quidem P, sive assignari possit a nobis illa ejus distantia ab O, & N, sive non possit, ita erit alicubi, ut ultra ipsum alia habeantur, sive ut possit ulterius excurrere, crescente ipsa illa distantia; ac eodem pacto puncta I, M, M' ita erunt alicubi, ut illud cum Q, hæc cum C non congruant, sed distantiam ab iis habeant quandam in se determinatam, sive ea a nobis assignari possit, sive non possit, quæ distantia itidem adhuc decrecere poterit. Atque ea erit ipsarum distantiarum I a Q, & M, M' a C ratio ad distantiam puncti P alicubi existentis a punctis O & N, ut illa quidem augeri semper possit, hæc minui, nec ulla illarum sit maxima, harum minima; illarum æquæ omnium limes quidam sit infinitam absolutum, in qua

nusquam jam sit, harum nihilum, in quo I a Q, & M, M' a C distantiam habeant omnino nullam, sed cum ipsis accuratè congruant. Punctum autem P nusquam tum esse, qua phrasi semper uti sumus, est manifestum ex eo, quod duæ rectæ parallelæ, quæ utcumque producantur, nunquam ad se invicem accedunt ne minimo quidem, utcumque exiguo in se determinato intervallo nusquam revera concurrunt; licet in finitarum magnitudinum relationibus explicandis haberi possint pro concurrentibus in ipso infinito nostre menti impervio, nisi forte non impervium tantummodo ipsum sit, sed pro absurdo, haberi debeat, ut mox videbimus,

867. Ceterum si rectæ NP, PQ exprimant quantitates quascumque, quæ in absolutum infinitum abeunt, relicta NO finita differentia, rectæ vero NM, MO sint quantitates finitæ earum rationem exprimentes, & ipsæ NM, MO non evaserint accuratè æquales, erit aliqua ipsarum differentia MM' in se determinata. Hinc erit aliqua distantia MC in se determinata, aliqua MI ipsi respondens, & non congruens cum CQ, adeoque aliqua tangens GF non congruens cum DE, & aliquod punctum P in aliqua in se determinata distantia ab O, & N. Quare si illæ NP, & PO ad rationem æqualitatis non fuerint delatæ utcumque parum ab ea distent, non erunt absolutè infinitæ ita, ut limites P nusquam jam sit,

868. Ad hoc mysterium utcumque evolvendum, operet quantitatem finitam quamcumque respectu absolutè infinitæ habere prorsus pro nulla, quanquam ea quidem cum absoluto nihilo confundi non possit. Sic & (n. 741) hiatus Parabola licet infinitum, coacti sumus considerare, ut punctum, ut verum nihilum respectu absolutè infinitæ peripheriæ, Circuli retinetalis ænearum in vertice ipsius Parabola,

869. Postrema canonis pars sic demonstratur. Vel binæ puncta quæ remanent sunt, ut N, & O in eadem recta AB, in qua punctum P in infinitum recessit, & patet

344 DE TRANSFORMATIONE

& patet ipsarum NP, PO differentiam fore illam NO finitam. Vel in diversis rectis ea puncta sunt in fig. F266 266 puncta H, C rectarum CP, HP, quæ evadunt absolute infinitæ, ubi punctum P ita in infinitum recessit, ut nusquam jam sit; & in hoc secundo casu, antequam punctum P illa infiniti nobis impervia velut voragine absorbeat, si radio PC fiat circuli arcus CR occurrens rectæ PH in R; ipsarum PC, PR differentia erit HR. Ubi autem punctum P in infinitum recesserit, arcus CR debet congruere cum perpendiculari CV per canonem 10. Quare differentia fiet HV, quæ quidem vel nulla erit, si nimirum CH sit perpendicularis HP, puncto H congruente cum V, vel finita erit, extantibus adhuc punctis H, & V.

870. Hujus canonis usus frequens occurrit, secunde F. 6 partis potissimum. Num. 25 cum datis in fig. 6: binis 265 punctis alternis A, C proportionis harmonicæ, & data ejus ratione, quæreremus reliqua duo B, D, invenimus, si ratio data foret æqualitatis, B quidem abire in mediam rectam AG in R; D vero ita infinitum recedere ut nusquam jam esset. Res eodem rediit, atque hic in fig. 265, & rectæ RD, CD ad æqualitatis rationem delatæ ita in illam infiniti barathrum miserunt punctum D, ut nusquam jam esset, & ipsæ quidem absolute infinitæ evaderent, differentia autem ipsarum jam esset nulla.

871. In applicatione theorematum Ellipseos, vel Hyperbolæ ad Parabolam summus ejus usus haberi potest. Quoniam rectæ Fm, mE in fig. 9: debent acquirere F. 9 rationem æqualitatis, ubi ea in Parabolam migrat, vertex 10 m axis transversæ in ipsa Parabola in fig. 10. nusquam jam est, & ipsæ evadunt absolute infinitæ. Hinc vero ad Parabolam transfertur theorema pertinens ad Ellipsim, & Hyperbolam propositum num. 74, quod nimirum quadrata semiordinatarum RP in fig. 9 & 11 ad axem transversam sint, ut rectangula MR sub abscissis a binis verticibus. Dum eæ mutantur in Parabolam figuræ 10, abit m in infinitum ita, ut

quisquam jam sit : Quare si binæ assumantur semior-  
dinatæ , binarum  $mR$ , quæ ad eas pertinent, & eva-  
dunt absolutè infinitæ , ratio evadit ratio æqualitatis ,  
eum differentia ipsarum sit. illa finita distantia bino-  
rum punctorum  $R$ . Quare illa rectangula erunt , ut  
sola abscissæ  $MR$  a vertice  $M$ , qui in Parabola  
manet , Id autem ita se habere constat ; id enim ip-  
sam eodem numero pariter proposuimus : atque eomo-  
do ex Ellipsi, & Hyperbola ad Parabolam transfertur  
eadem proprietates generalius pro diametris omnibus  
proposita numer. 357 , cum abeunte in infinitum  
centro in Parabola ; simul cum ipso cujusvis diame-  
tri alter vertex in infinitum abeat , neq; usquam jam  
sit .

872. Eiusdem canonis opè illa etiam Parabolæ pro-  
prietates , quam num. 200 demonstravimus in fig. 65 ,  
quod nimirum foci radius  $FP$  æquetur tam distantiæ  $Ff$  63  
Et ejusdem foci a normali , quam distantia  $FQ$  eju- 65  
dem a tangente computatis in axe , derivari potest ex  
proprietate Ellipseos proposita num. 189 in fig. 63 ,  
quod normalis secet  $Ff$  in ratione laterum  $FP$ ,  $fp$  ,  
& quod concurrentibus normali, & tangente axi trans-  
verso in  $I$ , &  $T$ , constituent proportionem harmo-  
nicam , quatuor puncta  $f$ ,  $I$ ,  $F$ ,  $T$ . Nam ex prima  
alternando erit  $FP$  ad  $FI$ , ut  $fp$  ad  $fi$ , quæ ratio  
cum abeunte in Parabola puncto  $f$  in infinitum , &  
remanentibus  $FP$ ,  $FI$ , evadat ratio æqualitatis, erit in  
ea etiam  $FP$  æqualis  $FI$ . Ex secunda vero est  $FT$  ad  
 $FI$ , ut  $fT$  ad  $fi$ ; quæ ratio pariter abeunte  $f$  in infi-  
nitum, & manentibus  $T$ ,  $I$ , evadit ratio æqualitatis;  
unde fit , ut in fig. 65 rectæ  $FP$ ,  $FI$ ,  $FT$  æquari de-  
beant inter se.

873. Et his quidem casibus facile fuit canonem hunc  
applicare ; at artificio aliquo opus erit nonnunquam, ut  
ipsum applicari possit ; ut ubi plures quam duæ quanti-  
tates infinite sunt ob unius puncti tantammodo neces-  
saria in infinitum. In Ellipsi (num. 419) sunt continuæ  $FT$  73  
proportionales in fig. 153 tres rectæ  $CR$ ,  $CV$ ,  $CQ$ , 155  
sive

sive abscissa a centro, semidiameter, & subtransgens a centro computata. Ab eunte centro C in infinitum, uti paria Parabola mutatur, debet ea proprietates aliam parte apertam ipsi Parabola. Ea sic facile inveniri poterit. Cum sit eadem ratio CR ad CV, & CV ad CQ, erit pariter eadem ratio differentiarum antecedentium RV ad differentiam consequentium VQ. Erit igitur VR ad VQ, ut CR ad CV. Porro ab eunte centro C in infinitum, ac manentibus R, & V, ea ratio evadit ratio æqualitatis; evadit igitur æquales etiam VR, VQ in parabola, nimirum distantia VR, verticis V in fig. 255 a normali æqualis distantia VQ, a tangente computata in axe; sive subtransgens dupla abscissæ, quod num. 405 de ipsa parabola demonstravimus demonstratione peculiari.

874. Majus aliquod artificium requiritur plerumque, ubi non commune aliquod punctum binarum rectarum abit in infinitum, sed binæ, singularum singula, vel ad demonstrandum, differentiam manere finitam; ex qua proficiat ratio æqualitatis, vel si differentia quoque ita in infinitum excreseat; ut earum ratio & finita censenda sit, & adhuc ratio inæqualitatis; ad invenientiam rationem ipsam, & substituendas quantitates finitas, quæ eam rationem expriment. Adhuc tamen non deest plures methodi exercitatio Geometrix ad id præstandum. Bina pro binis hisce casibus exempla alterum pro altero exhibebit simul ipsum theorema illud generale; quod n. 299. proposuimus pro rectis omnibus Sectioni Conicæ bis occurrentibus, quod hoc ipso artificio transulimus ad rectas axi parallelas in Parabola, & utriuslibet asymptoto in Hyperbola, ac ejus ope invenimus theorema alterum ipsi substitutum pro hisce casibus particularibus num. 305 & peculiari demonstratione repetitum, unde ex finita Geometria.

875. Theorema generale huc reducitur. Si in fig. 91  
F. 91 rectæ quocumque PLp ductæ per quoddam punctum L  
occurrant Sectioni Conicæ bis in punctis P, p; rectan-  
gula sub earum segmentis LP, Lp interceptis inter  
punct-

punctum, & illos occurfus erunt ad se invicem in ratione, quæ data Conica Sectione, & ipsarum rectarum inclinationibus, erit semper constans, utcumque mutato puncto L: Abeat jam altera intersectio; ut  $p$ , in infinitum, quod accidit solum rectis axi parallelis in Parabola, vel alteri asymptoto in Hyperbola: rectangulum  $PLp$  evadit infinitum. Sed si rectæ  $Lp$  in eo casu substituiatur recta, quæ mutato puncto L, mutetur in eadem ratione, in qua mutatur ipsa  $Lp$ ; jam etiam rectanguli sub  $LP$ , & sub hac recta ratio ad reliqua rectangula manebit constans, nec immutata a mutatione puncti L.

876. Porro omnes rectæ  $Lp$  infinite in Parabola habendæ erunt pro æqualibus, & in Hyperbola pro proportionalibus rectis; quæ in quovis angulo ducantur ex ipsis punctis L ad illam asymptotam, cui  $Lp$  evadit parallela. Nam si in fig. 276 ducantur per bina puncta L, L' binæ  $Pp$ ,  $P'p'$  parallelæ axi transverso, tum  $LA$ ,  $PD$ ,  $pd$  perpendiculares ipsi  $Pp$ ; patet, differentiam binarum  $Lp$ ,  $L'p'$  fore æqualem summæ, vel differentie ipsarum  $LA$ ,  $pd$ , cumque ambas  $Pp$ ,  $P'p'$  debeat secare idem axis conjugatus bifariam; patet, ipsam  $pd$ , æquari  $PD$ . Cum igitur mutata Ellipsi in Parabolam, & abeuntibus punctis  $p$ ,  $p'$  in infinitum, maneat finita  $AL$ ,  $PD$ ; manebit finita illarum differentia; & proinde ratio erit æqualitatis. At in fig. 277 si binæ chordæ  $Pp$ ,  $P'p'$  inter se parallelæ occurrant binis asymptotis in binis punctis  $H$ ,  $h$ ; &  $H'$ ,  $h'$ , ducantur autem, ex binis quibusvis earum punctis L, L' binæ rectæ  $LH$ ,  $L'H'$  in quovis angulo ad asymptotam  $Cb$ ; erunt  $Lh$ ,  $L'h'$ , ut  $LH$ ,  $L'H'$  ob triangulorum similitudinem. Abeuntibus autem punctis  $p$ ,  $p'$  in infinitum; cum  $ph$ ,  $p'h'$  semper (num. 221) æquantur finitis  $PH$ ,  $P'H'$ ; erunt  $Lp$  ad  $Lh$ , &  $L'p'$  ad  $L'h'$  in ratione æqualitatis ob differentiam finitam. Igitur &  $Lp$ ,  $L'p'$  erunt, ut  $LH$ ,  $L'H'$ . Hinc in iis casibus pro ea constanti ratione rectangulo sub binis distantis  $Lp$ ,  $L'p'$  a binis occurfus  $p$ ,  $p'$  sublimi poterit distantia ab unico occurfu in recta qua-

vis constanti in Parabola, vel illi ipsi asymptoto inclinata in Hyperbola in angulo constanti quovis ex illo ipso puncto dato. Atque id ipsum præstitimus illi num. 305, & rite factum per finitam Geometriam demonstravimus.

877. Liceret hic addere jam Canonem 12 huic similem pro rectis, quæ in infinitum decrescunt ita, ut demum evanescant, quæ pariter, dum ita decrescunt ad rationem aliquam accedunt ultra quoscumque limites, quam finitæ quantitates acquirunt eo momento temporis, quo illæ evanescunt, quæ ratio pariter esse potest vel utcumque inæqualitatis finitæ, vel etiam aucta, vel imminuta in infinitum, cui canoni tota innititur methodus, quam Nevvtonus appellavit primam nascentium, vel ultimam evanescentium, & ex qua methodus illa, quam idem appellat *fluxionum*, ortum duxit. Quod si quantitates dum in infinitum decrescunt, infinitesimæ dicantur, & harum infinitesimalium certi ordines, & gradus designentur, ac ad certos canones redigatur eorundem usus, illa omnis uberrima sane differentialis habetur methodus, quæ calculo porissimum adjuta tantos fecit tam brevi in omni & pura, & mixta Mathesi universa progressus, qui quidem gradus si etiam in quantitatibus in infinitum exerescentibus pariter considerentur, habetur quidquid ad methodum infinitorum pertinet in Geometria.

878. At ea omnia nos alteri tomo edendo, cum prima per tempus licuerit, reservamus; in promptu enim est omnis materia: at e solidioribus principiis conabimur stabilire omnia. Nam nec illud nobis satisfacit, quod Nevvtonus de evanescentibus quantitatibus habet, eas ad quandam rationem devenire, neque antequam evanuerint, neque post, sed tum, cum evanescent; tum enim, cum evanescent, jam nihil sunt, neque ullum est ultimum esse quod acquirant, sed vel sunt aliquid adhuc, quo minus erunt deinde, vel nihil omnino sunt. Multo autem minus illud arridet, quod alii usurpant, qui infinitesimas quantitates contemplantur,



ut aliquid, quod in se determinatum sit, & rationem ad finitas habeat minorem quacumque data. Cum enim datam dicunt, si intelligant, quæ reapse data sit; fieri sane poterit, ut nec data sit ratio 1 ad 1000, & tunc ratio 1 ad 2000 minor erit, quacumque data; si vero intelligant etiam dabilem, quod vere intelligunt ii, qui ejusmodi quantitates inassignabiles vocant; difficultatem ii quidem nequaquam eludunt. Si enim ita assignabilem, & dabilem dicunt, ut a nobis distinctè percipi possit ipsa earum magnitudo per relationem ad mensuras, quas intuemur; & id a mentis ipsius pendebit vi ut supra diximus numer. 866, ita, ut quod respectu alterius mentis dari, vel assignari non possit; possit ab altera. Cumque mentis cuiuspiam vis fines habeat omnino certos; id, quod uni assignabile erit, atque finitum, alteri erit inassignabile, & infinitesimum, ac duplum infinitesimi respectu ejusdem mentis erit finitum. Si vero mentis ipsius vim, & perceptionem distinctam nequaquam respiciunt; cur ex quantitates, quibus in universa Geometria, & Analyti perpetuo utimur, quarum operam longas demonstrationes perteximus, quarum ordines, & gradus, ac relationes ad se invicem tam multas persequimur, assignari non possint? Cum ratio cujusdam quantitatis ad finitam quandam dicatur minor quacumque dabili, cum ejus ipsius quantitatis dimidium ad eam ipsam quantitatem finitam, duplo adhuc minorem rationem habeat? Illud unum est reliquum, ut ubi ratio *minor quacumque data* dicitur; significetur id, quod nomen *datum* in Geometria plerumque exprimit, nimirum *determinatum*, & infinitesimæ quantitates in se ipsis determinatæ, qua voce ad tollendas æquivocationes utimur, nullæ sint: sed infinitesimæ dicantur ex, quas nos indefinitè concipimus, quarum nimirum magnitudinem non definimus, sed ita partem accipimus, ut ad nostrum libitum imminui possit, sine ullo fine a nobis determinato, quo nimirum liceat demonstrationem deinde reducere, si opus sit, ad absurdum. Ea acceptione infinitesimorum habita & rite confirmata, solidissimæ totius methodi demonstrationes obveniunt, quas non simul cum earum usu in curvarum generalibus proprietatibus per simplicem etiam Geometriam erpendis, ac curvarum utiliorum elementis inde repetitis eodem illo tomo persequemur.

879. Eodem autem pacto & quantitates, quæ in infinitum

excrescunt, accipi indefinitè possunt, ac demonstrationes, quæ  
 quæ inde profiunt pro ipsis curvarum transformationibus;  
 sunt sanè multo & solidiores; & ipsi nostræ menti magis per-  
 viæ, quam eæ, quas ex infiniti absoluti mysteriis hæc adhibui-  
 mus. Mysteria enim ipsa infiniti absoluti extensio ejusmodi sunt,  
 ut nos ea studiosissimè persequentes demum deduxerint ad cen-  
 sendum potius impossibile prorsus, & repugnans infinitum ab-  
 solutum in quantitate, quam tantummodo finitæ nostræ men-  
 ti impervium. Canones, quos hæc præscripsimus ad erudendas  
 finitarum quantitarum, quæ post transformationem residuæ  
 sunt; relationes mutuas, habemus pro certissimis in iis omni-  
 bus, quæ pertinent ad ipsas quantitates finitas residuas, & binæ  
 ipsorum Canonum genuina fundamenta censemus esse illa;  
 quæ suis locis protulimus. Ubi nihil punctum aliquod  
 traducitur per infinitum, & plusquam infinitæ quantitati sub-  
 stituitur negativum ejus complementum ad integrum infinitum  
 circum juxta n. 776, fundamentum est ipsa homogeneitas Lo-  
 corum Geometricorum simplicium; quorum partes omnes ead-  
 em habent relationes ad se invicem, ut ibidem monuimus; ubi  
 vero punctum nusquam jam est; sed infinito concipitur de-  
 tectum, atque obrutum; habetur continuitatis lex; quæ cogit  
 quantitates finitas post ipsam transformationem remanent-  
 res eam habere rationem; ad quam accesserant ultra quoscum-  
 que limites ipsæ, quæ remanent; & ad quam accedere de-  
 buissent illæ etiam; quæ in infinitum excrescentes concipiuntur,  
 nisi alicubi necessario obtruperentur, ante quam absolute  
 infinitæ evaderent. Censemus autem abrupti alicubi debere  
 omnino ita, ut nunquam assequi possit omnem illam exten-  
 sionem quæ possibilis est. Quidquid existit; id omne fines ha-  
 bere certos, arbitramur, ultra quos alii, sed omnes itidem certi;  
 & definiti limites habeantur; ut dictum futuræ æternitatis nu-  
 merus a præsentis die ad quemcumque determinatum, qui, extit-  
 utus est aliquando, finitus est; sed alius haberi potest, & omni-  
 no habebitur ipso major. Eodem prorsus pacto nobis persuasum  
 est, rerum quarumcumque existentium numerum; ut hominum,  
 necessario semper finitum fore; atque id ita; ut eo ma-  
 jor alter haberi semper possit, qui & ipse finitus sit, nec unquam  
 simul possit existere totum id, quod; si seorsum spectetur; po-  
 test existere. Neque enim fieri potest, ut summa Divinæ Condi-  
 toris

potis Omnipotentia vires exhauriat suas, & condat quæcumque condere possit, quin alia supersint sine fine, quæ itidem condat, si velit, quod nos quidem appellare suemus *finium in infinitum*, & ibi uberius explicabimus, ubi hanc infinitorum theoriam fusius persequemur. Eodem nimirum pacto, & rectam lineam, & curvilinei cruris cujuscumque tractum, censemus, non posse simul existere cum ea omni longitudine, quam successive habere potest, quæ nimirum quotiescumque extiterit, finita erit, & alias se longiores purè adhuc possibiles post se relinquet ita, ut nulla sit ultima earum, quæ existere possunt, & maxima, quemadmodum nulla itidem longitudo est minima, sed quacumque determinata longitudine utcumque parva, quæ non sit absolutum nihilum, aliæ adhuc minores, & a nihilo minus distantes haberi possunt.

380. Interea colligemus hic illa mysteria, quæ nobis demum visa sunt migrare in vera absurda, quæ quidem sunt pleraque. Mittimus illum nostræ menti impervium sane transitum puncti per infinitum ad partes oppositas, & nexum rectæ utrinque in infinitum productæ in partibus oppositis, qui quidem omnem excedit captum humanæ mentis; esset enim, quo is evitari posset, concipiendo punctum, quod ex opposita parte regreditur, non esse idem, ac id, quod recesserat, sed aliud, & solum post integram rectæ conversionem punctum idem, per dimidiam infiniti circuli circumferentiam evagatum, redire; licet id ipsum omnem Locorum Geometricorum analogiam perverteret, ut facile ostendi posset. Mittimus rationem æqualitatis in quantitibus inæqualibus, quæ nimirum differant quantitate finita; cum reponi possit, pro nihilo habendam esse quantitatem finitam respectu infinitarum; quamquam aliud omnino est haberi debere pro nihilo, aliud revera nihil esse; quod ad veram æqualitatem requiritur. Mittimus illa infinita spatia extensa longè ultra alia infinita, quæ concipienda diximus n. 771, quo nimirum infiniti illi circuli excurrant alii longè ultra alios, quorum ope negativæ quantitates ortæ ex transitu per infinitum retineant rationem quandam finitam inæqualitatis cujuscvis; cum ea non aliter demonstrantur, quam ex sola analogia: quamquam in tanta exemplorum accuratissime demonstratorum multitudine ipsa etiam analogia ingentem habere vim debet.

881. Hisce omnibus omiſſis; quæ poſſent vel non admitti, vel pro myſteriis quibuſdam haberi nobis imperviis, quid illud, quod finita, & accurata evidentiffima Geometria demonſtratione evincitur, ut n. 864 Inuimus, in fig. 260 rectam RE debere infinities majorem eſſe, quam RI, ubi in infinitum excreſcunt? Concipiatur recta VO ita in infinitum extenſa, ut ejus vertex nuſquam jam ſit; nimirum ut omnem eam, ſi fieri poteſt, extensionem habeat, quam habere poteſt, & quæ utique a curvarum ſibi adjacentium deſcriptione non pendet: Concipiatur jam ipſi adjacens ſola curva TE: Nullum ſane eſt ſegmentum finitum ipſius rectæ VO, quod aliquando ordinata RI non ſuperet in motu continuo puncti R verſus V. Igitur ſi curva TB extenditur, quantum extendi poteſt, nihil ex recta illa ultra ipſam procurrat, & appellente R ad V, ordinata ipſa RI puncto jam I demerſo in illis infiniti latebris, atque obruto, illi VO pariter infinitæ æquabitur. Quo igitur procurrat ultra RE, ut ipſa RI infinities ſit major? An ſecunda curva accedente, ipſa illa recta VO, quæ ab iis, ut diximus, non pendeat, proſtenditur, ut novam ordinatam RE ſibi jam congruentem excipiat? An non noſtræ tantummodo mentis a ſine abſtrahentis figmentum eſt & recte illius, & curvæ continuatio ſine ſine? Nam eæ, ſi utcumque finitæ alicubi ſunt, nihil abſurdi involvunt. Sane utcumque magnæ ordinatæ finitæ RI alia RE in quavis ratione major reſpondere poteſt; congruenti cum tota VO *absolūtè* infinita non poteſt.

[F. 270] 882. Quid in illo hiatus Parabolæ, in fig. 270? Licebit ſane ibi deprehendere abſurdum potius graviffimum, quam imperivium noſtræ mentis myſterium. Nam ex eo quod recta DA excurrat ſemper ultra ipſam Parabolam, niſi congruat cum ipſo axe DA, eruiſimus n. 741 ſpatium cruribus S, T infinitis in tercepum minorem quavis finita ratione rationem habere ad arcum circuli circumquaque infiniti: At id ipſum ſpatium admodum facile demonſtrabitur majus, quam ipſius infinite peripheriæ ſubquadruplum. Certiſſimum enim eſt in Geometria ex Archimedis inventis, diametrum ad peripheriam habere rationem majorem, quam 1 ad 4, cum habeat ſane majorem etiam, quam 7 ad 22. At hiatus ille facile demonſtratur æqualis ipſius circuli infiniti diametro. Ubi cumque enim aſſumatur punctum G in tangente BA in infinitum producta ita, ut omnem eam ha

beat extensionem, si id fieri possit, quam habere potest, quæ-  
turque recta ipsi axi  $DA_2$  parallela; semper Parabolæ perime-  
tro occurret in aliquo puncto P. Quare hiatus ille idem tantun-  
de extenditur, quantum ipsa circuli infiniti diameter, cui  
proinde æqualis erit. Est igitur eadem ratio & major, & infini-  
ties minor, quam 1 ad 4, quod est absurdum. Mystrium erit,  
si dicatur, axem  $DA_2$  infinities magis protendi, quam tangen-  
tem  $DB_4$ ,  $DA_4$ . Et quidem id omnino dicendum erit; nam  
 $DG_3$  ad  $G_2P_3$ , sive  $DR$ , est, ut radius ad tangentem anguli  
 $G_2DP_3$ , qui cum abeunte  $H_3$  in  $H_2$ , quo casu puncta G, &  
K ita in infinitum abeunt, ut nusquam jam sint, abeat in re-  
ctum, ea ratio tum evadit quantitatis finitæ ad infinitam; unde  
erui deberet, axem Parabolæ infinitum infinities longiorem ef-  
se, quam infinitam tangentem. At an idcirco recta  $DA_2$  infini-  
ties magis protendi potest, quam  $DA_4$ , quod parabola ipsis ac-  
cessit, cujus illa est tangens, hæc vero axis? Quid si aliam de-  
scriberemus Parabolam axe  $DA_4$ , tangente  $DA_2$ ? Num idcir-  
co illa, quæ infinities minor erat, infinities major evaderet?

883. Maximam hoc quidem argumentum apud nos vim ha-  
bet, & ei similimam alia quamplurima, quæ proferri possent,  
ut quoddam aliud, quod jam ab anno 1741 protulimus in dis-  
sertatione *de Natura, & usu infinitorum, & infinite parvorum*,  
ubi ostendimus, admissio infinito absoluto in extensione, par-  
tem obvenire æqualem, inimo etiam majorem toto. Accedit au-  
tem & illud, quod, ut h. 837 vidimus, infinito absoluto post ip-  
sum, & finitam aliquam quantitatem pro tertia continue pro-  
portionali respondet nihilum absolutum, non quæpiam quan-  
titas, quæ infinitesima dici debeat, & partes, atque extensionem  
aliquam habere possit, quod quidem mille geometricis argu-  
mentis evinci potest. Sic in fig. 260 sic geometrica constructione  
investigaremus tertiam post  $RI$ , &  $RA$ , vel post  $RE$ , &  $RA$ , abe-  
unte R in V, & factis  $RI$ ,  $RE$  absolute infinitis, facile sane in-  
veniretur, utramque abire in verum, & absolutum nihilum.  
Porro facile & illud patet, tertias illas post  $RI$ , vel  $RE$ , & ean-  
dem  $RA$  fore receptocæ, ut ipsas  $RI$ ,  $RE$ . Quamobrem abeun-  
tibus in infinitum absolutum binis rectis, si ex finitam aliquam  
rationem haberent ad se invicem, vel ut hic etiam in infinitum  
vel atactam, vel imminutam; eandem esse inter ipsa nihila ra-  
tio-

tionem oporteret, & in ipsa extensione aliquid nihil deberet esse magis nihil, immo & infinities magis nihil, quam aliud nihil, quod quidem, quam pugnet cum nitidissima illa nihili idea, quæ menti humanæ cuilibet se præfens sistit, nemo non videt.

884. Sunt quidem, qui in infinito, ajunt, neque æqualitatis, neque totius, & partis nomen admitti posse. At id quidem erit, non difficultatem, sed usum sermonis tollere, ne redarguaris, ut si quis omnium idiomatum usum adimeret. Debent sane illa vocabula admitti etiam ibi, cum idea, quæ nobis clarissima iis responderet nominibus ab infinito ratione non pendeat. Quocumq; utaris nomine, ultra illam rectam, quæ extenditur, quantum extendi potest sine ullo limite, nihil esse potest, quo eadem recta, adjecta ipsi ad latus altera potius curva, quam altera & cum altera potius conditione, quam cum altera, excrescat jam, & producat. Si bina quæcumque sint ejusmodi, ut in altero sit, quidquid habetur in altero, & præterea aliquid, quod in eo non habetur; hoc sane, siue finitum sit, siue infinitum, habebit id, quod concipimus, cum dicimus, majorem esse, & cum dicimus, esse totum respectu suarum partium, quarum altera erit id, quod commune est, altera id, quod ipsi accedit. Majus autem adhuc semper erit totum sua parte, & pars ipsi toto equalis esse non poterit, multo vero minus poterit esse major. Idem quodpiam eisdem in hoc sensu ipso, siue finitum sit, siue infinitum, & æquale simul, & majus, & minus esse non poterit. At esset, ac extensiones absolute infinitæ, ut & series absolute infinitæ, si eas inter se diversa ratione comparaveris, eadem sane iisdem & majores simul erunt, & æquales, & minores, quod argumentis evincitur. Illud igitur dicendum potius, quantitatem nullam existere posse, quæ finita non sit, quam ejusdem appellationes infinito non convenire; & quæcumque contradictionem involvunt, absurda dicenda sunt, quæ impossibilem existentiam evincant, non mysteria tantummodo, quæ finitæ mentis captum transcendant.

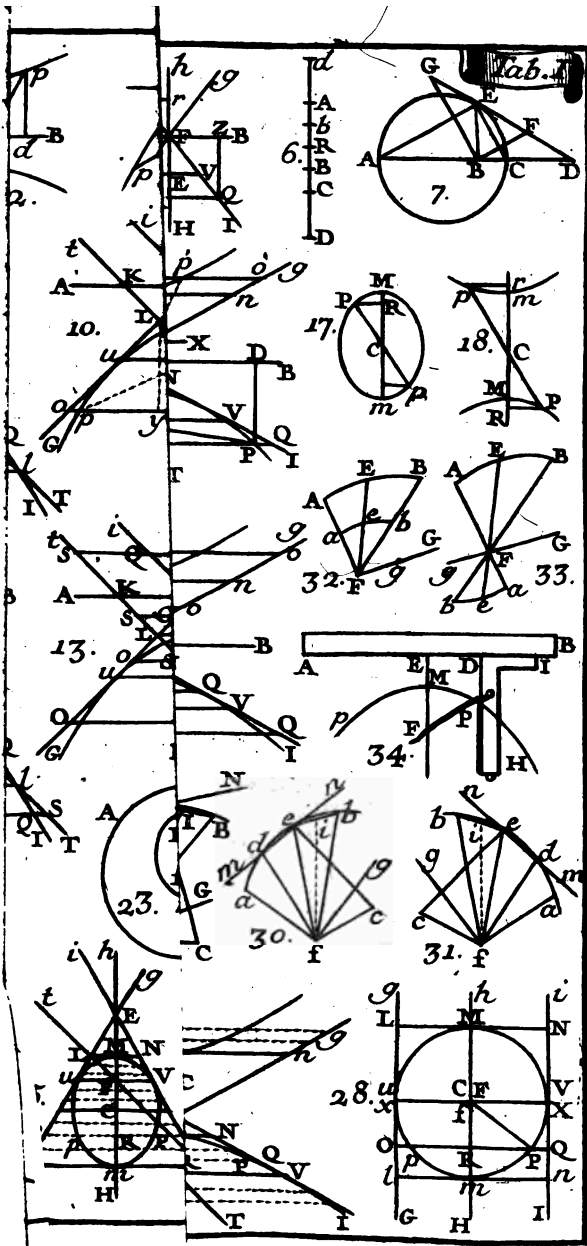
885. Ac nobis quidem considerantibus, unde fiat, ut impossibilis sit quantitas infinita, occurrit illud, quod infinitum summam simplicitatem, & unitatem requirat, quæ a summa infiniti perfectione nequaquam sejungi possit, quantitas autem partibus omnino constare debeat, & compositionem exposcat. Si linea in infinitum ex utraque parte excurret; invenimus in illa

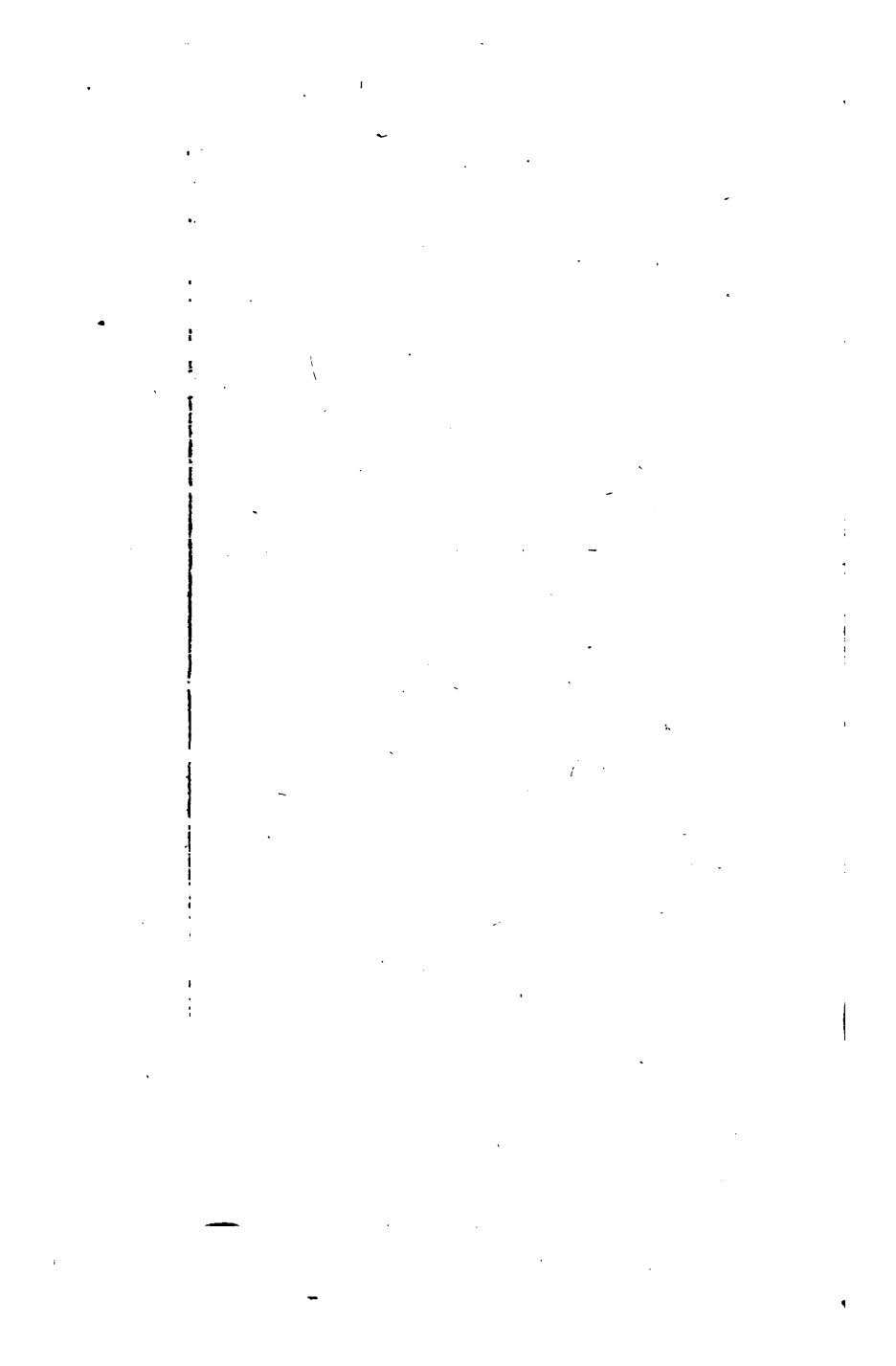
infinita distantia eam quodammodo copulari, atque conjungi,  
 & in orbem redire debere, ut & infinita Hyperbolæ, ac parab-  
 olæ crura a se invicem per infinitum tractum divulsa, ibidem  
 quodammodo conjungi, tanquam si illa infinita distantia jam  
 esset nulla. Ille infinitus hiatus Parabolæ in fig. 270 licet æqua-  
 lis infinitæ tangenti, debet esse quoddam veluti punctum juxta  
 n. 741, quo motus continuus puncti P nequaquam interrump-  
 patur. Æquivalere debet unico illi puncto, in quod centrum  
 Ellipseos, quod erat unicum punctum, abiisse, censendum est.  
 Omnes nimirum diametri in Ellipsi ad centrum convergunt, &  
 in eo conjunguntur. Eadem in Parabola terminari debent ad  
 infinitum cruribus illis infinitis conclusum, quod illi unico pun-  
 cto æquivaleret. Dum punctum H est extra H<sub>2</sub>, utravis e parte sit,  
 punctum P est in altero ramo, punctum A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub> ultra ipsum ex-  
 curret: & unico momento, seu puncto temporis, quo H est in  
 H<sub>2</sub>, utrumque ad partes A<sub>2</sub> debet esse in omni eo infinito spa-  
 tio, in quo, ut diximus, terminati debent omnes illæ diametri,  
 quæ ibidem secuntur invicem, & cum axe, & cum ipsa recta gy-  
 rante simul singulæ coire deberent quodammodo, ut etiam pa-  
 rallelarum quarumcumque concursus in infinito quodammo-  
 do delitescit. En igitur infinitum spatium conclusum cruribus  
 infinitis, quod licet æquale sit rectæ toti utrinque in infinitum  
 extensæ; tamen unius puncti prorsus indivisibilis naturam af-  
 fectat, quod cum illa infinita distantia, quæ debeat quodammo-  
 do evadere nulla tum, cum infinitum attingitur, mirum in mo-  
 dum consentit. Neq; in eo tantummodo spatio, quod respectu  
 infinitæ peripheriæ deberet esse, ut punctum quoddam, ejusmo-  
 di unitatem, simplicitatem, indivisibilitatem infiniti natura re-  
 quirat, sed etiam in universa ipsa infinita peripheria, & per eam  
 in universa infinitæ veluti spheræ superficie, quæ a dato quovis  
 puncto quaquaversum extenditur in infinitum. Nam ubi Ellip-  
 sis per parabolam in Hyperbolam migrat, concursus ille semi-  
 diametrorum omnium, quæ ex parte cava concurrebant in uni-  
 co centro, diffunditur quodammodo per totos illos circuli qua-  
 quaversum infiniti arcus; qui intercipiuntur iis asymptoto-  
 rum angulis, quos axis transversus secat, qui ad totam infinitam  
 peripheriam sunt, sicut ii anguli ad quatuor rectos: Quævis enim  
 recta in Hyperbola a finito ejus centro egressa in iisdem angulis  
 jacens incurrit in perimetro hinc, & inde, ultra quam ptoer-  
 dine

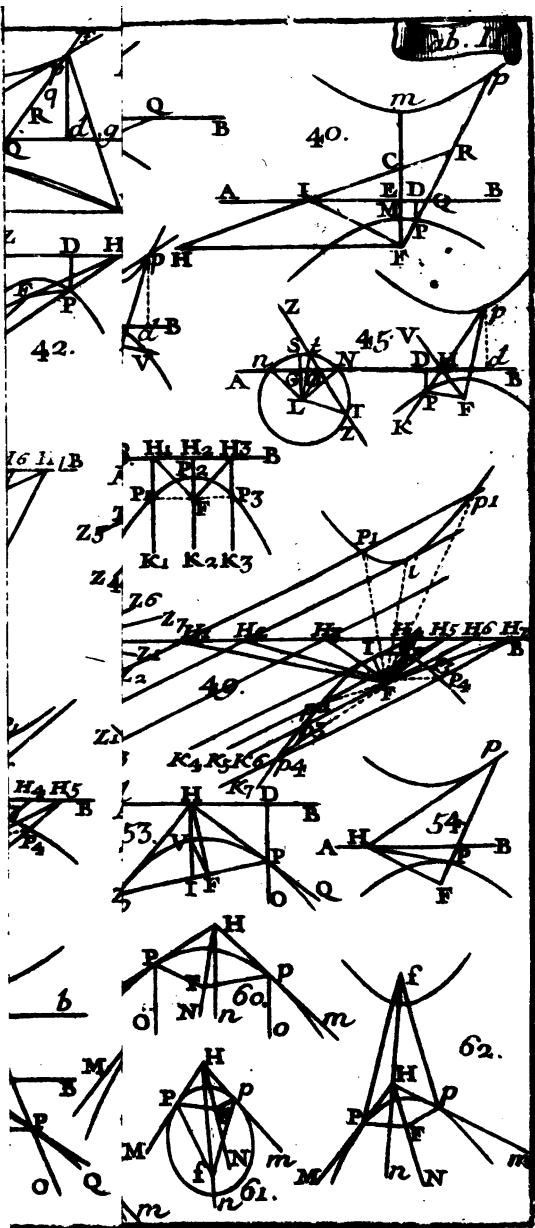
ditur ex parte cava in infinitum, atque illud invenit infinitum  
 centrum Hyperbolæ analogum finito Ellipseos centro, & illius  
 axem conjugatum offendit, qui pariter finito axi Ellipseos conjit-  
 gat<sup>us</sup> respondens Hyperbolâ dividit in binos infinitos ramos ver-  
 sus se cavos, & suis singulos focis præditos, ut axis conjugatus El-  
 lipseos finitus ipsâ dividit in duas ejusmodi finitas semiellipses,  
 Succedunt igitur ii arcus infiniti unico centro indivisibili Ellip-  
 seos, & ejus naturam affectant. Si jam binii accedant Hyperbolæ  
 conjugatæ rami, ipsi reliquum omne, quod in reliquis asymp-  
 totorum angulis superest, in unicum pariter punctum nitentur cō-  
 trahere, ut jam debeat quodammodo infinita omnis periphæria  
 circuli circa Hyperbolæ centrum circumquaq; infiniti, affectare  
 unici indivisibilis puncti naturam. Atq; id ipsum pertinebit ad om-  
 nem superficiem spheræ pariter infinitæ, si Hyperbolæ planum  
 circa axem conjugatum gyrando integram conversionem ab-  
 solvat, & illa infinita periphæria puncto quodammodo æquiva-  
 lens, infinite ipsius spheræ superficiem producat, quæ tota eo ipso,  
 quod infinita sit, puncti naturam, simplicitatem, indivisibilitatem  
 requirat; cumq; eam habere omnino non possit, sed in immen-  
 sum augere debeat, ex ipsa quantitatis natura sibi inherente,  
 compositionem, atq; divisibilitatem, & partes; dum duo ita con-  
 trariâ inter se conjungere, & copulare veluti studet, contradi-  
 ctionem involvat, necesse est, & impossibilis omnino sit.

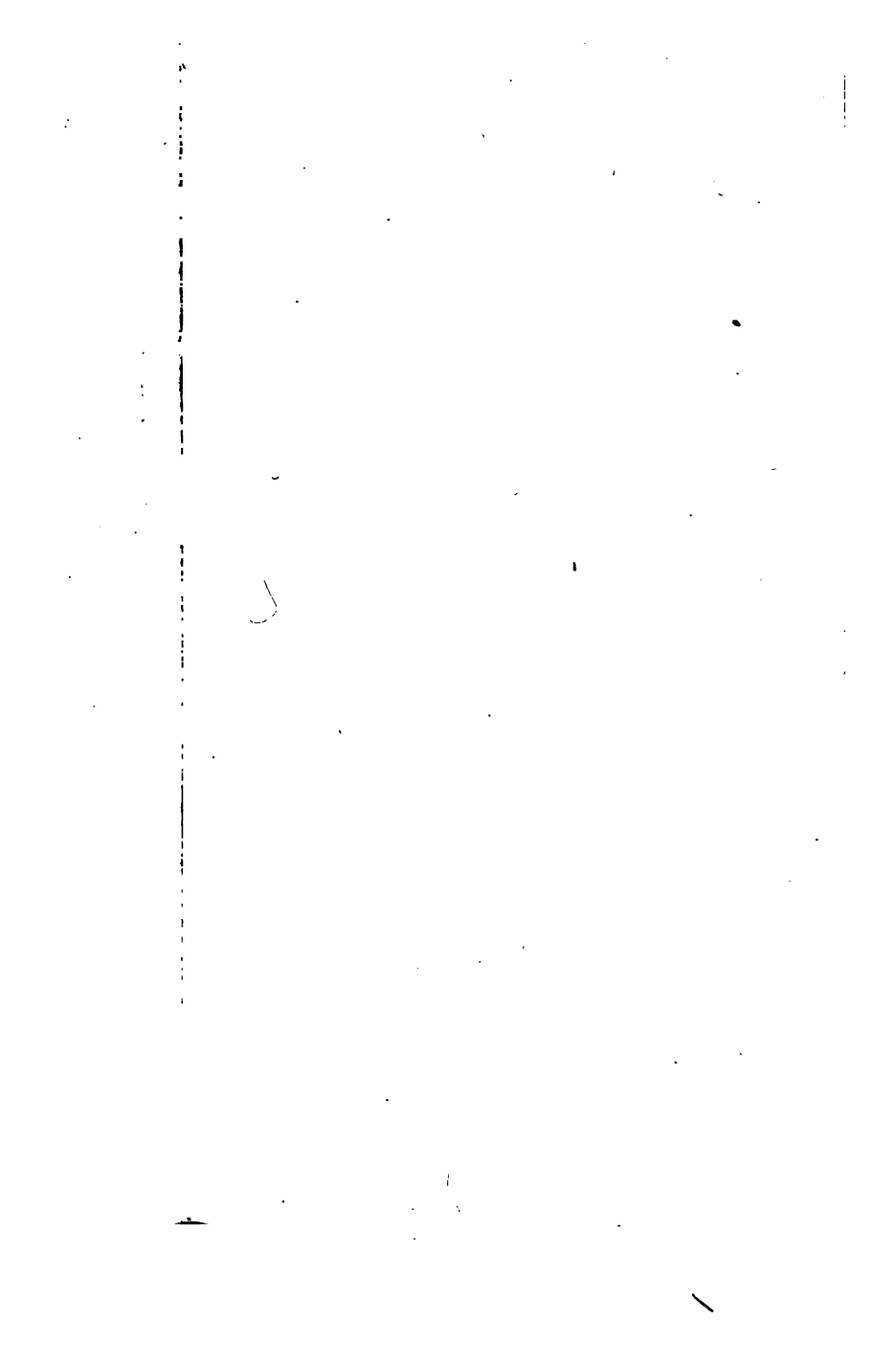
886. Atque hoc demum pacto licebit etiã e geometricis hi-  
 sce meditationibus mentem agrollere, ac Divinæ Immensitatis  
 simplicitatem summam admirari, quæ ab omni partium com-  
 positione alienissima, cum summa Naturæ simplicitate, atq; uni-  
 tate summi infiniti naturam conjungit, & perfectiones omnes  
 miro, atque inexplicabili nexu conjunctas complectitur. Infini-  
 tam venerabimur majestatem percussis, atque attoniti, ac herē-  
 bimus admirabundi infinitam illam animo pervolvētes men-  
 tis infinitæ vim, qua & hæc ipsas harum curvarum proprieta-  
 tes tam multas, tam varias, tam miras, quas nos tam longa ra-  
 tiocinatione, ac deductione tam molesta persequitur, una cum  
 aliis infinitis infinities magis arduis, atq; mirificis, & pulcherri-  
 mis, atque elegantissimis sublimiorum curvarum proprietati-  
 bus, unico intuitu, ac simplicissima cognitione perspicit, & p-  
 nitus comprehendit.

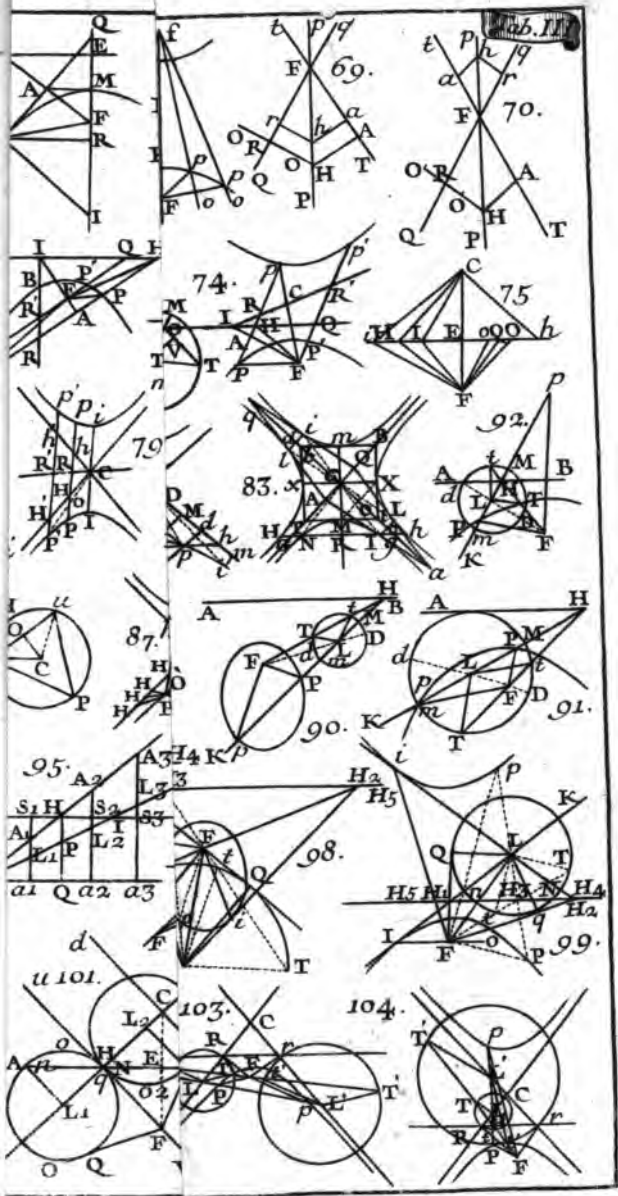


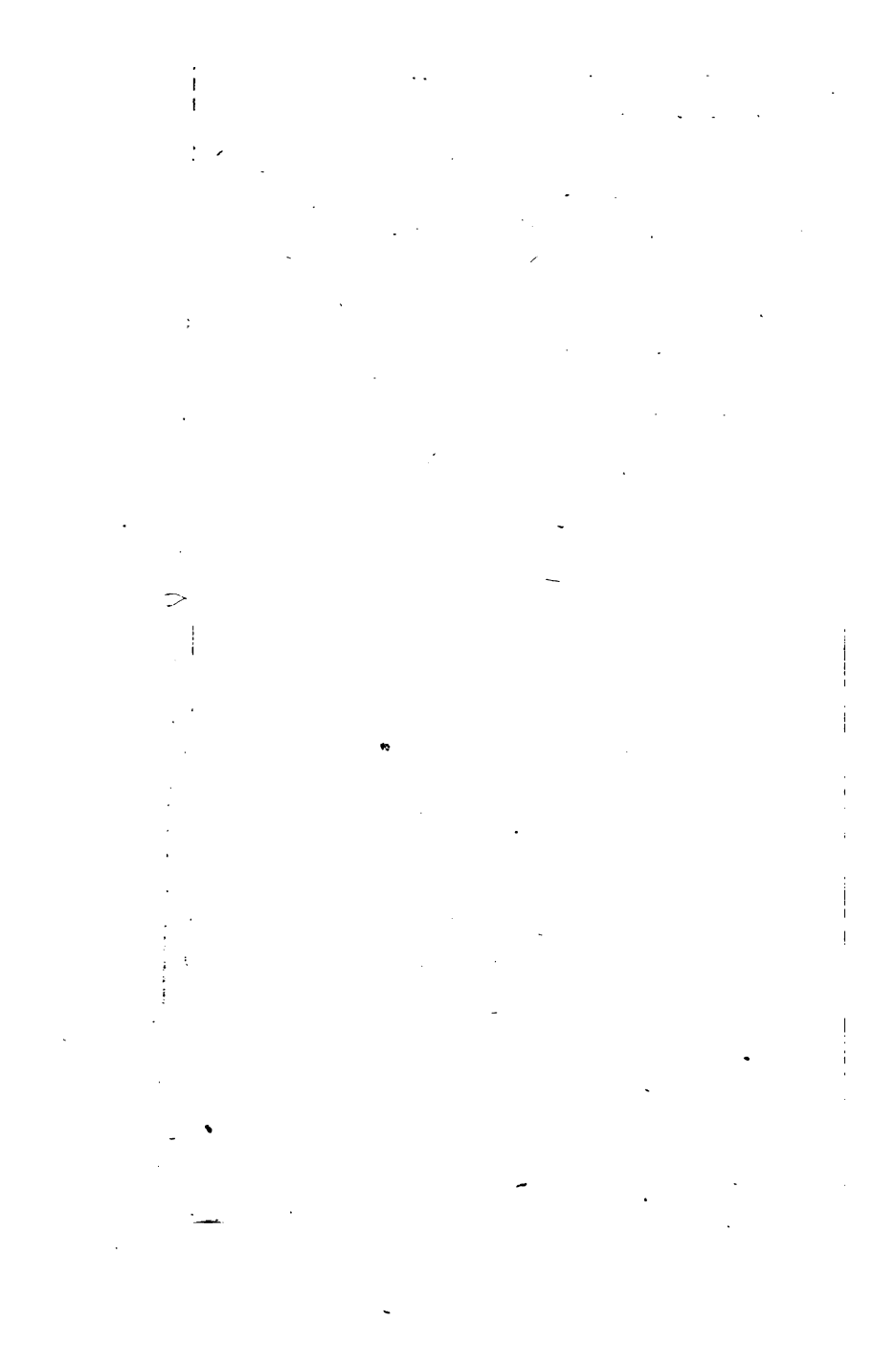


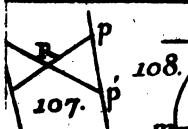




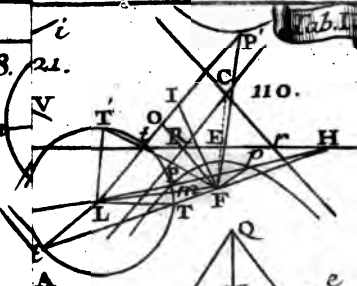




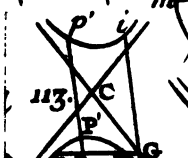




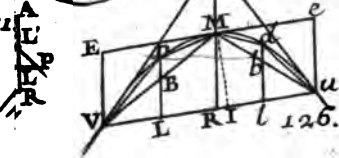
107.



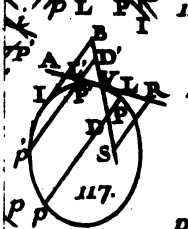
110.



113.



126.

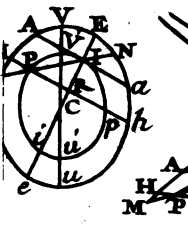


117.

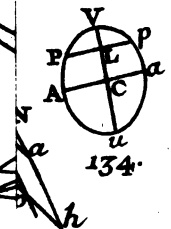


124.

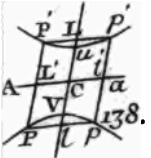
125.



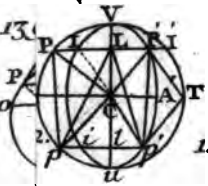
134.



135.



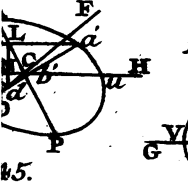
138.



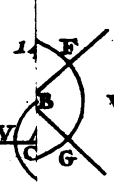
143.



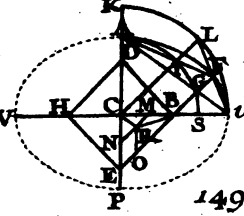
149.



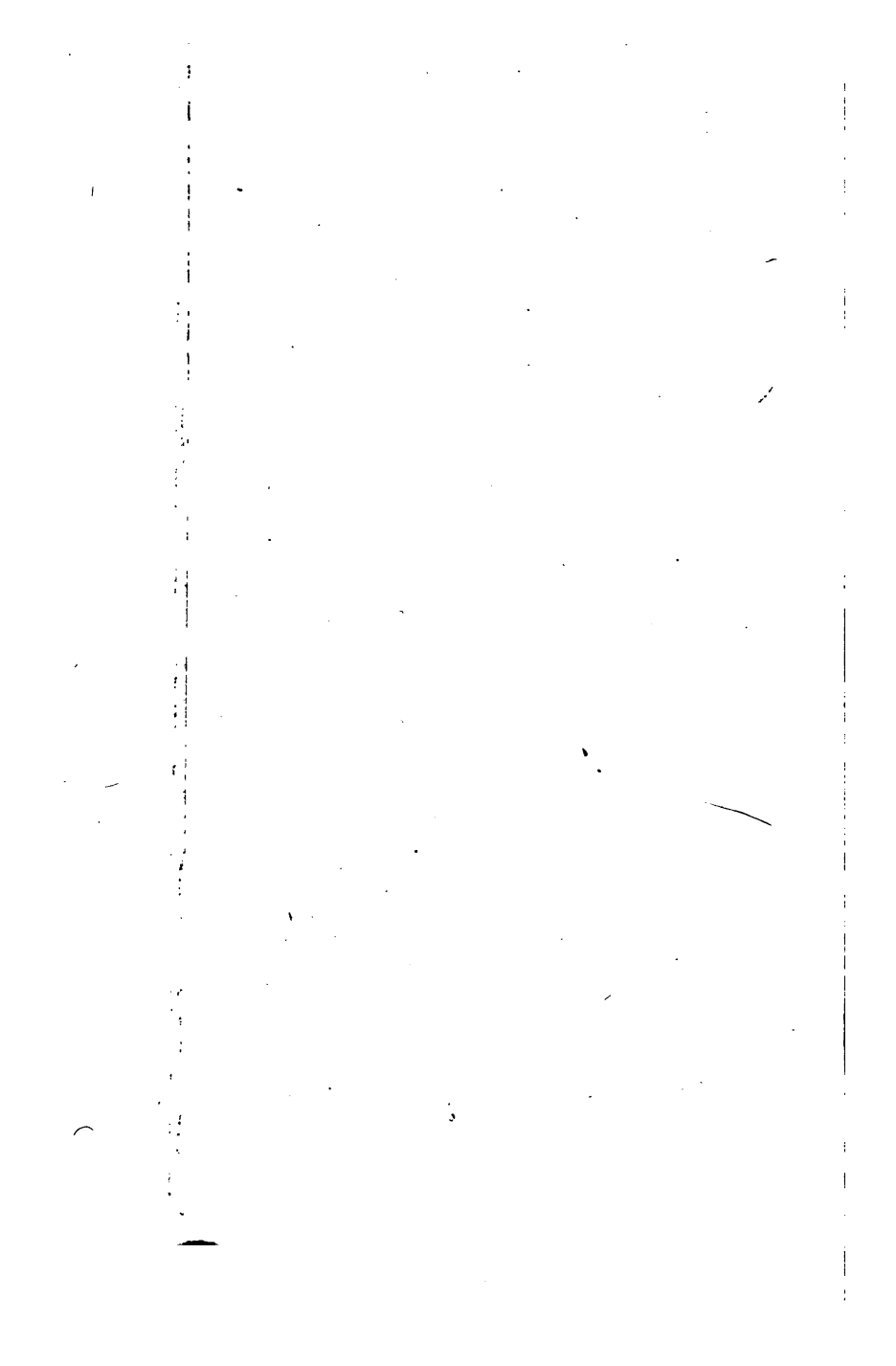
145.



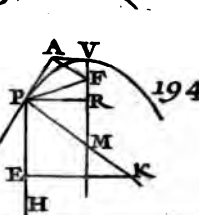
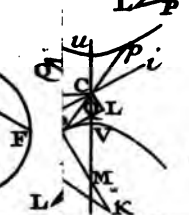
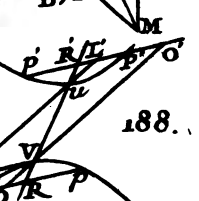
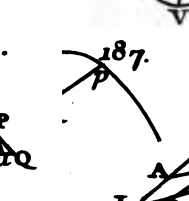
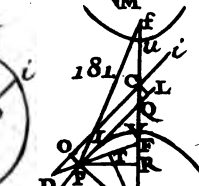
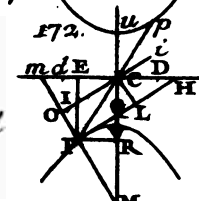
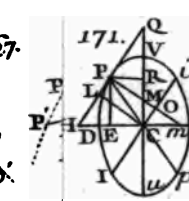
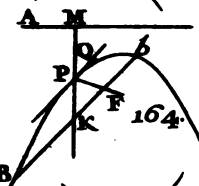
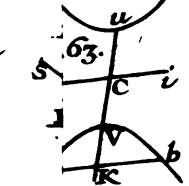
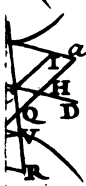
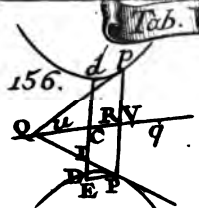
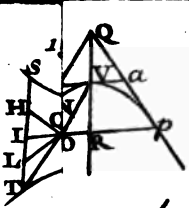
148.

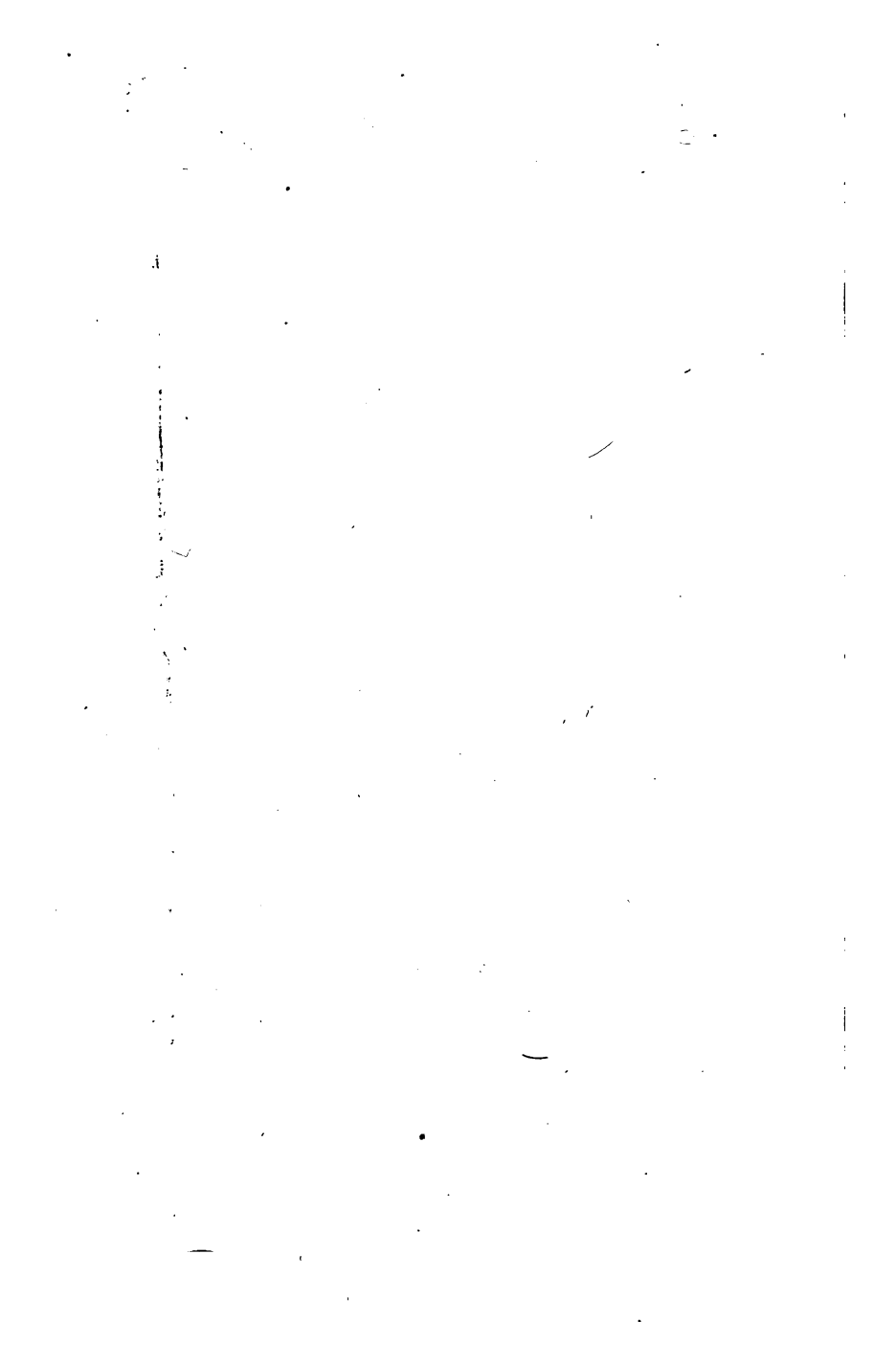


149.

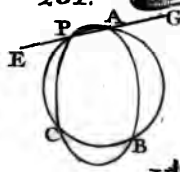
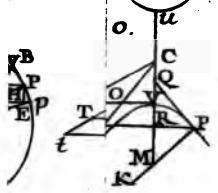




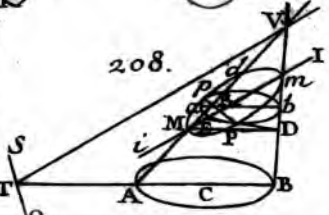




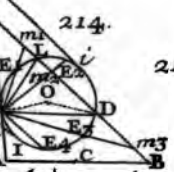
201.



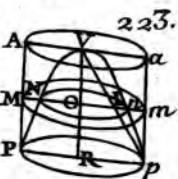
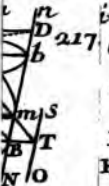
208.



214.

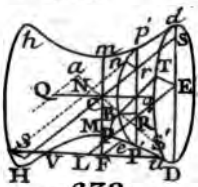


215.



222.

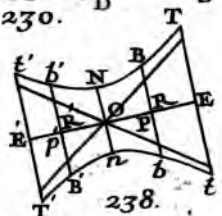
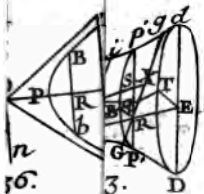
223.



226.

230.

235.



230.

3.

238.

